TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

11 2006
Số 353

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Tập thể giáo viên tổ Toán - Tin,
Trường Trung học phổ thông năng khiếu Trần Phú - Hải Phòng

Chúc mừng nhà giáo nhân dân
GS.TS. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ 75 tuổi

GS.TS. **Nguyễn Đình Trí**

Năm nay, Nhà giáo nhân dân GS.TS. Nguyễn Đình Trí tròn 75 tuổi.

GS. Nguyễn Đình Trí sinh ngày 10-01-1931 tại Hải Phòng. Quê ông là xã Nhân Nghĩa, huyện Lý Nhân, tỉnh Hà Nam. Năm 1956, sau khi tốt nghiệp khoa Toán của trường Đại học Sư phạm Khoa học, ông trở thành một trong 26 cán bộ giảng dạy đầu tiên của trường Đại học Bách khoa Hà Nội (ĐHBKHN). Năm 1961 ông được Nhà nước cử sang Liên Xô làm nghiên cứu sinh tại trường Đại học Tổng hợp Lômônôxôp (Matxcova) danh tiếng và bảo vệ thành công luận án Phó tiến sĩ (nay là Tiến sĩ) Toán - Lí.

GS. Nguyễn Đình Trí là một trong những nhà khoa học đầu tiên của Việt Nam trong lĩnh vực Phương trình đạo hàm riêng với nhiều công trình toán học xuất phát từ các bài toán Vật lí kĩ thuật đã được công bố trên tạp chí chuyên ngành có uy tín trong và ngoài nước. Với cương vị Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam (1989 - 1994), Giáo sư là một trong số ít các nhà toán học Việt Nam có công giới thiệu nền toán học non trẻ của Việt Nam với cộng đồng toán học thế giới và tập hợp lực lượng các người làm toán ở Việt Nam. Cùng với GS. Nguyễn Thừa Hợp (ĐHKHTN), Giáo sư đã sáng lập seminar Phương trình Vật lí - Toán liên trường Đại học Bách khoa - Đại học Tổng hợp từ năm 1966 và seminar vẫn sinh hoạt đều đặn bốn mươi năm qua vào sáng thứ sáu hàng tuần. Từ seminar này nhiều thế hệ toán học Việt Nam đã bảo vệ thành công các luận án Tiến sĩ, Tiến sĩ khoa học, trong đó có ba cán bộ là học trò trực tiếp của ông.

GS. Nguyễn Đình Trí là nhà sư phạm mẫu mực, có nhiều đóng góp cho sự nghiệp giáo dục và đào tạo. Ông là tấm gương cho các thế hệ cán bộ giảng dạy về sự chuẩn mực và tâm huyết với trình độ sư phạm cao trong giảng dạy. Giáo sư là tác giả của nhiều cuốn sách có chất lượng phục vụ cho việc giảng dạy toán ở bậc đại học, nổi bật nhất là bộ sách Toán cao cấp do Giáo sư chủ biên, xuất bản lần đầu năm 1967, được tái bản nhiều lần với số lượng lớn, đến nay vẫn được sử dụng rộng rãi tại các trường Đại học kĩ thuật trong cả nước. Không chỉ quan tâm đến lĩnh vực giáo dục ở bậc đại học, Giáo sư còn chú ý đến việc giảng dạy toán ở phổ thông bằng những ý kiến đóng góp xác đáng về chương trình giảng dạy và sách giáo khoa với tư cách là Ủy viên Hội đồng bộ môn Toán Bộ GD & ĐT trong nhiều năm. Ông còn là một cộng tác viên nhiệt tình của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

GS. Nguyễn Đình Trí là nhà quản lí giáo dục nghiêm túc, có uy tín. ông đã từng giữ cương vị Tổ trưởng bộ môn Toán, Trưởng ban Khoa học Cơ bản (1967 - 1968), Chủ nhiệm khoa Toán - Lí (1968 - 1977) và Hiệu phó của trường ĐHBKHN (1977 - 1994). Ông có nhiều đóng góp to lớn cho việc xây dựng và phát triển ngành Toán - Tin Ứng dụng của trường ĐHBKHN (từ bộ môn Toán phát triển thành khoa Toán - Tin Ứng dụng ngày nay).

Với những cống hiến cho khoa học và đào tạo, ông đã được Nhà nước phong chức danh Phó Giáo sư ngay từ đợt đầu(năm 1980), chức danh Giáo sư năm 1984 và tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Nhất, Huân chương Lao động hạng Ba. Ông còn vinh dự được nhận danh hiệu Chiến sĩ thi đua toàn quốc thời kì đổi mới (năm 2000).

GS. Nguyễn Đình Trí là người sống giản dị và khoa học. Hàng ngày, ông thường dậy rất sớm để luyện tập thể dục, thể thao (đi bộ, bơi). Chính vì vậy ở tuổi 75 ông vẫn có được sức khoẻ dẻo dai, khả năng làm việc bền bỉ và hiệu quả, tạo nên sự ngạc nhiên và kính nể của các cán bộ trẻ. Giáo sư là Chủ tịch Hội đồng Quản trị Viện Tin học Pháp ngữ từ khi thành lập (năm 1996) đến nay.

Ngày 4-11 vừa qua tại Ba Vì (Hà Tây), Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức Hội thảo khoa học "Một số vấn đề về phương trình vi phân" và kỉ niệm 75 năm ngày sinh của ông trong không khí đầm ấm và trang trọng của các thế hệ làm toán Việt Nam. Nhân dịp này, cộng đồng những người làm toán Việt Nam, những thế hệ học trò của Giáo sư, các đồng nghiệp và toàn thể độc giả của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ kính chúc Giáo sư dồi dào sức khoẻ, hạnh phúc trong cuộc sống, tiếp tục có nhiều đóng góp cho sự nghiệp giáo dục và khoa học nước nhà.

PHAN HỮU SẢN - TRẦN HUY HỔ (*Hà Nội*)

Mò mẫm, dự đoán ... đến lời giải

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP Hồ Chí Minh)

Trong giải toán và đặc biệt là giải các bài toán về cực trị, việc mò mẫm và dự đoán kết quả bài toán có vẻ thiếu tự nhiên để từ đó "điều chỉnh' thích hợp tìm ra lời giải bài toán là một suy nghĩ rất độc đáo và sáng tạo.

Bài viết này nhằm trao đổi cùng bạn đọc về việc tìm kiếm lời giải cho ba bài toán cực trị hay và khó sau đây.

Bài toán 1. *Tìm kích thước của tam giác có diện tích lớn nhất nội tiếp đường tròn (O; R) cho trước.*

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh, 1993 - 1994)

Mò mẫm và dự đoán. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, vẽ đường cao AH thì $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC$. Nếu cố định BC thì S_{ABC} lớn nhất khi AH lớn nhất, lúc đó A nằm chính giữa cung BC và tam giác ABC cân tại A. Tương tự, nếu cố định AB thì S_{ABC} lớn nhất khi tam giác ABC cân tại C. Vì vậy, ta dự đoán S_{ABC} lớn nhất khi tam giác ABC là tam giác đều, lúc đó

$$S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

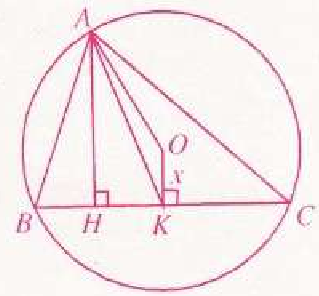
Từ đó gợi ý cho ta đi chứng minh $S_{ABC}\le\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Lời giải. (h.1)

Với tam giác ABC bất kì nội tiếp đường tròn $(O; R)$, kẻ AH và OK cùng vuông góc với BC. Đặt $OK = x$ $(0\le x<R)$, ta có

$BC=2\sqrt{R^2-x^2}$;

$AH\le AK\le OA+OK=R+x$.



Hình 1

Do đó $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC$

$$\le\frac{1}{2}(R+x).2\sqrt{R^2-x^2}=R\sqrt{R^2-x^2}+x\sqrt{R^2-x^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\sqrt{R^2-x^2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}x.\sqrt{R^2-x^2}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy với hai số không âm dẫn đến

$$S_{ABC}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{3R^2}{4}+R^2-x^2\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}\left(3x^2+R^2-x^2\right)$$

$$S_{ABC}\le\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}H\equiv K\\ O \text{ nằm giữa } A \text{ và } K\\ \frac{\sqrt{3}}{2}R=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{3}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=AC\\ \widehat{BAC}=60^o.\end{cases}$$

Tức là tam giác ABC đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$. □

Bài toán 2. *Xét các tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$.*

Mò mẫm và dự đoán. Nhận thấy

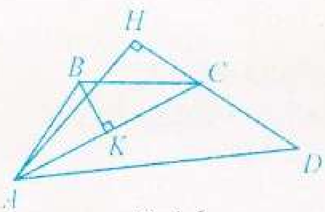
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \le S_{ABC} + \frac{1}{2}AH.CD.$

Nếu cố định tam giác ABC thì S_{ABCD} lớn nhất khi $\widehat{ACD}=90^o$. Tương tự, cố định tam giác BCD thì S_{ABCD} lớn nhất khi $\widehat{ABD}=90^o$. Vì vậy, ta dự đoán S_{ABCD} lớn nhất khi $\widehat{ABC}=\widehat{ACD}=90^o$, tứ giác $ABCD$ là hình thang cân ($AD//BC$) nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$ có $AB = BC = CD = a$, lúc đó $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Từ đó gợi ý cho ta đi chứng minh $S_{ABCD} \le \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Lời giải. (h.2).

Vẽ $AH \perp CD$, $BK \perp AC$. Đặt $AC = x$ $(0 < x < 2a)$. khi đó



Hình 2

$BK = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$

và $AH \le AC = x$. Ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}BK.AC + \frac{1}{2}AH.CD$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.x + \frac{1}{2}.x.a$$

$$= \frac{1}{2}.2\sqrt{3}\left(\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.\frac{\sqrt{3}}{6}x\right) + \frac{1}{2}.\sqrt{3}\left(a.\frac{\sqrt{3}}{3}x\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy với hai số không âm dẫn đến

$$S_{ABCD} \le \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{12}\right) + \frac{1}{2}.\sqrt{3}.\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{x^2}{3}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} H \equiv C \\ \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}x \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{ACD} = 90^o \\ AC = \sqrt{3}a. \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ đạt được khi nó là hình thang cân ($AD//BC$) có $AB = BC = CD = \frac{DA}{2} = a$. ❒

✪**Bài toán 3.** *Cho x, y là hai số dương. Đặt S là số nhỏ nhất trong các số x, $y + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của S.*

Mò mẫm và dự đoán. Khi cho $x = y + \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ thì ta có $xy = 1$; $x^2 = xy + 1 = 2$. Khi đó $S = x = \sqrt{2}$. Ta dự đoán S lớn nhất bằng $\sqrt{2}$. Gợi ý cho việc đi chứng minh $S \le \sqrt{2}$.

Lời giải. Giả sử $S > \sqrt{2}$ thì $x > \sqrt{2}$, $\frac{1}{y} > \sqrt{2}$, $y + \frac{1}{x} > \sqrt{2}$ (1). Suy ra $\frac{1}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$, do đó $y + \frac{1}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Mâu thuẫn với (1).

Vậy $S > \sqrt{2}$ là sai, suy ra $S \le \sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ❒

Các bạn hãy rèn luyện thêm bằng cách tìm lời giải cho các bài toán sau đây.

Bài 1. Cho điểm I cố định nằm trong đường tròn $(O; R)$ với I không trùng với O. AC, BD là hai dây cung di động qua I và vuông góc với nhau. Xác định vị trí của các dây AC, BD để diện tích tam giác ICD lớn nhất.

Bài 2. Tìm kích thước của tam giác có chu vi lớn nhất nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ cho trước.

Bài 3. Cho S là số nhỏ nhất trong các số x, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{t}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$, t (với x, y, z, t là các số dương). Hãy tìm giá trị lớn nhất của S.

Bài 4. Cho x, y là các số dương. Giả sử S là số lớn nhất trong ba số x, $\frac{1}{y}$, $y + \frac{1}{x}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10
THPT chuyên AMSTERDAM và THPT CHU VĂN AN, Hà Nội
NĂM HỌC 2006 - 2007

MÔN : *TOÁN – TIN*
(*Thời gian làm bài : 150 phút*)

Bài 1 (*2 điểm*)

Cho phương trình ẩn x

$$\frac{x^6-1}{x^3}-(2a+1)\frac{x^2-1}{x}+2a-3=0\ (*)$$

1) Giải phương trình (*) khi $a = 1$.

2) Tìm a để phương trình có nhiều hơn hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 2 (*2 điểm*)

Cho dãy các số tự nhiên 2, 6, 30, 210, ... được xác định như sau: Số hạng thứ k bằng tích k số nguyên tố đầu tiên (k = 1, 2, 3, ...). Biết rằng tồn tại hai số hạng của dãy số có hiệu bằng 30000, tìm hai số hạng đó.

Bài 3 (*2 điểm*)

Tìm các số nguyên x, y, z thoả mãn

$$\begin{cases}\sqrt{2x}\,y^2-z^4\geq 7\\ \sqrt{-x^2y^2+8xy+9}-\sqrt{x^2-4}\geq 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right).\end{cases}$$

Bài 4 (*3 điểm*)

Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi C là điểm tuỳ ý trên nửa đường tròn, D là hình chiếu vuông góc của C trên AB. Tia phân giác góc ACD cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là E, cắt tia phân giác góc ABC tại H.

1) Chứng minh $AE \,//\, BH$.

2) Tia phân giác góc CAB cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai là F, cắt CE tại I. Tính diện tích tam giác FID trong trường hợp tam giác đó là đều.

3) Trên đoạn BH lấy điểm K sao cho $HK = HD$, gọi J là giao điểm của AF và BH. Xác định vị trí của C để tổng các khoảng cách từ các điểm I, J, K đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5 (*1 điểm*)

Chứng minh rằng trong 2007 số khác nhau tuỳ ý được lấy ra từ tập hợp

$A = \{1, 2, 3,..., 2006^{2007}\}$, có ít nhất hai số x, y thoả mãn: $0 < \left|\sqrt[2007]{x}-\sqrt[2007]{y}\right| < 1$.

VŨ QUỐC LƯƠNG
(GV THCS Chu Văn An, Hà Nội)
Giới thiệu

HỘI THẢO KHOA HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 17 VỀ ỨNG DỤNG CÁC PHƯƠNG PHÁP KĨ THUẬT SỐ VÀO VIỆC GIẢNG DẠY VÀ HỌC TẬP MÔN TOÁN

Dự kiến từ 3.12.2006 đến 9.12.2006 tại Hà Nội sẽ diễn ra hội thảo Khoa học Quốc tế lần thứ 17 về những thành tựu mới nhất trong việc ứng dụng công nghệ số và công nghệ tin học vào việc xây dựng các bài giảng lí thuyết mô hình hóa, ra và giải bài tập, xây dựng phần mềm dạy học môn toán. Hội thảo do trường Đại học Bách khoa Hà Nội phối hợp với Hội Giảng dạy Toán học thuộc liên đoàn Toán học thế giới(IMO) tổ chức. Các nhà khoa học từ Anh, Mỹ, Brazil, Nam Phi, Mêhicô, Bungari, Úc, Canada... và trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội, Viện Toán học tham gia Ban Chương trình và Ban Tổ chức. Sẽ có lớp bồi dưỡng dành cho giảng viên Toán, bài giảng trực tiếp bằng tiếng Anh. Thời hạn đăng kí trước ngày 15.11.2006 theo địa chỉ email:

sonlehung2003@yahoo.com

Hội nghị phí nộp cho Ban tổ chức vào chiều 3.12.2006.Chi tiết xem tại

www.tatvietnam.com/conference

BÍNH NAM HÀ

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 khối THPT chuyên ĐẠI HỌC VINH

NĂM HỌC 2006 - 2007

MÔN TOÁN

(Đề thi đã đăng trên THTT số 352, tháng 10 năm 2006)

VÒNG 1

Câu 1. Đặt $n = 3k + r$ ($k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2\}$).

$r = 0$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 3k + 2$ chia 3 dư 2;

$r = 1$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 9k + 4$ chia 3 dư 1;

$r = 2$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 15k + 8$ chia 3 dư 2.

Câu 2. a) Đặt $u = x^2 - x$, $v = y^2 - 2y$, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u + v = 19 \\ u.v = -20. \end{cases}$

Khi đó u, v là nghiệm của PT

$X^2 - 19X - 20 = 0 \Leftrightarrow X = -1, X = 20.$

Với $u = -1$; $v = 20$, hệ đã cho vô nghiệm.

Với $u = 20$, $v = -1$, hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-4; 1)$, $(5; 1)$.

b) ĐK $-\frac{1}{3} \le x \le 2$. Với ĐK đó phương trình đã cho tương đương với

$3x + 1 + 2 - x + 2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 9$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(2-x)} = 3 - x$

$\Leftrightarrow (3x + 1)(2 - x) = (3 - x)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{7}{4}$.

Câu 3. Nhận xét rằng

$a^3 = 6 - 6\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}\right)$

hay $a^3 = 6 - 6a \Leftrightarrow a^3 + 6a - 6 = 0.$

Từ đó

$f(a) = (a^3 + 6a - 5)^{2006} = (a^3 + 6a - 6 + 1)^{2006} = 1.$

Câu 4. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

a) Ta có $\Delta KEA \backsim \Delta KBE \Rightarrow \frac{KE}{KB} = \frac{KA}{KE}$

hay $KE^2 = KA.KB$ (1)

Tương tự có $KF^2 = KA.KB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $KE = KF$. Từ đó ta thấy tứ giác $AEIF$ là hình bình hành.

b) Vì $MA = MO = MO'$ nên tam giác OAO' vuông tại A. Dẫn đến $OO'^2 = R^2 + R'^2$ (3)

Mặt khác $OO'^2 = EF^2 + (OE - OF)^2$

$= EF^2 + (R - R')^2$ (4)

Từ (3), (4) tìm được $EF = \sqrt{2RR'}$.

VÒNG 2

Câu 5. • $a = 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

• $a \ge 2$. Đặt $A = a^{1966} + a^{2006} + 1$

$= a(a^{3.655} - 1) + a^2(a^{3.668} - 1) + (a^2 + a + 1)$

Ta có $a^{3.655} - 1 = (a^3)^{655} - 1 \;\vdots\; a^2 + a + 1;$

$a^{3.668} - 1 \;\vdots\; a^2 + a + 1.$

Do đó $A \;\vdots\; (a^2 + a + 1) > 1$, nghĩa là A không phải là số nguyên tố với $a \ge 2$.

Vậy chỉ có $a = 1$ thỏa mãn.

Câu 6. a) PT $x^4 + 4x^3 - 8x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 8x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) - 12 = 0.$

Đặt $t = x^2 + 2x$, với $t \ge -1$.

Giải PT (ẩn t) : $t^2 - 4t - 12 = 0$ được nghiệm $t = 6$ (chú ý $t \ge -1$). Trở lại giải PT (ẩn x) $x^2 + 2x - 6 = 0$ được nghiệm $x = -1 \pm \sqrt{7}$.

b) Giả sử PT đã cho có nghiệm nguyên x_1, x_2 ($x_1 \le x_2$). Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m(m+1) \\ x_1.x_2 = 3m - 1 \end{cases} \quad (*)$$

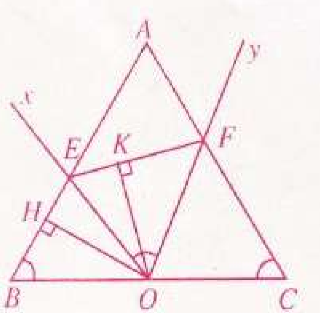
• Với $m \ge 1$, từ (*) có $1 \le x_1 \le x_2$, dẫn đến $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \ge 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \ge 0$. $\Leftrightarrow -m^2 + 2m \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \ge 1$ nên $m = 1$ hoặc $m = 2$.
Thử lại, thấy $m = 2$ thỏa mãn.

• Với $m \le 0$, thử thấy $m = 0$, $m = -1$ thỏa mãn. Xét $m \le -2$ lúc đó từ (*) có $x_1 + x_2 < 0$, $x_1x_2 < 0$, $x_1, x_2 \ne 0$. Để ý đến $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, ta suy ra $x_1 \le -1 < 1 \le x_2 \Rightarrow (x + 1)(x_2 + 1) \le 0$ $\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 0$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \le -2$ nên $m = -4$; $m = -3$, $m = -2$. Thử lại thấy $m = -4$ thỏa mãn.
Tóm lại, các giá trị cần tìm là $m = -4$; $m = -1$; $m = 0$; $m = 2$.

Câu 7. Đặt $a = 2 + t$; $b = 2 - t$; $t \in (-2\ ;\ 2)$.
Khi đó $a^2b^2(a^2 + b^2) = (4 - t^2)^2(8 + 2t^2)$ $= 2(4 - t^2)(16 - t^4) \le 2.4.16$, hay $a^2b^2(a^2 + b^2) \le 128$, $\forall t \in (-2\ ;\ 2)$.
Đẳng thức xảy ra khi $t = 0$, hay $a = b = 2$.

Câu 8. a) Ta có $\widehat{EBO} + \widehat{EOB} = \widehat{BOF}$, dẫn đến $\widehat{OEB} = \widehat{FOC}$. Do đó $\Delta OBE \backsim \Delta FCO$

$$\Rightarrow \frac{OB}{FC} = \frac{BE}{CO}$$
$$\Leftrightarrow OB.CO = BE.FC$$
$$\Leftrightarrow BC^2 = 4BE.FC$$
(đpcm).



b) Từ câu a) $\Delta OBE \backsim \Delta FCO$ nên $\dfrac{OE}{FO} = \dfrac{BE}{CO} = \dfrac{BE}{BO}$ (do $BO = CO$)

kết hợp với $\widehat{EBO} = \widehat{FOE} = 60^\circ$ suy ra $\Delta OBE \backsim \Delta FOE \Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{FEO}$.

Nghĩa là EO là phân giác của góc BEF.

Dựng $OH \perp AB$, $OK \perp EF$ thì $OH = OK$. Khi đó EF tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính OH. Rõ ràng điểm O cố định, OH có độ dài không đổi nên ta có điều cần chứng minh.

LÊ QUỐC HÁN – LÊ XUÂN SƠN
(Trường ĐH Vinh) giới thiệu

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T6/353. Consider a convex quadrilateral $AA'C'C$ such that the lines AC, $A'C'$ intersect at a point I. Take a point B on the side AC and a point B' on the side $A'C'$. Let O be the point of intersection of the lines AC', $A'C$; let P be that of AB', $A'B$; let Q be that of BC', $B'C$. Prove that the points P, O, Q are collinear.

T7/353. Let be given an isosceles triangle ABC with $AB = AC$. Take a point D on the side AB and a point E on the side AC so that $DE = BD + CE$. The bisector of angle BDE cuts the side BC at I.
i) Find the measure of angle DIE.
ii) Prove that the line DI passes through a fixed point when D moves on AB and E moves on AC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/353. Find all positive integers n greater than 1 such that every integer k, $1 < k < n$, satisfying $GCD\,(k, n) = 1$, is a prime.

T9/353. Find all polynomials $P(x)$ satisfying the condition
$$P(x^{2006} + y^{2006}) = (P(x))^{2006} + (P(y))^{2006}$$
for all real numbers x, y.

T10/353. Solve the equation
$$2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{\ldots + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}}}}}$$
$$= 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$
where on the left side there are 2006 signs of radical.

T11/353. Let be given a quadrilateral $ABCD$ inscribed in a circle with center O, radius R. The lines AB, CD intersect at P, the lines AD, BC intesect at Q. Prove that $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = R^2$.

T12/353. Let M be a point lying inside the tetrahedron $ABCD$. The lines MA, MB, MC, MD cut the faces BCD, CDA, DAB, ABC respectively at A', B', C', D'. Prove that the volume of the tetrahedron $A'B'C'D'$ does not exceed $\dfrac{1}{27}$ that of the tetrahedron $ABCD$.

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT

năm học 2005-2006

Bảng B

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

NGÀY THỨ NHẤT

Bài 1. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5=y \\ y^3+3y^2+2y-5=z \\ z^3+3z^2+2z-5=x. \end{cases}$$

Lời giải. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Xét hai trường hợp:

1) $x \geq y \geq z$

Từ hệ trên ta có

$$\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5 \leq x \\ z^3+3z^2+2z-5 \geq z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)((x+2)^2+1) \leq 0 \\ (z-1)((z+2)^2+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ 1 \leq z. \end{cases}$$

2) $x \geq z \geq y$

Từ hệ trên ta có

$$\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5 \leq x \\ y^3+3y^2+2y-5 \geq y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)((x+2)^2+1) \leq 0 \\ (y-1)((y+2)^2+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ 1 \leq y. \end{cases}$$

Cả hai trường hợp đều cho $x = y = z = 1$. Thử lại, ta thấy $x = y = z = 1$ là nghiệm của hệ PT. Tóm lại hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = y = z = 1.$$

Bài 2. *Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn. Xét một điểm M di động trên đường thẳng CD sao cho M không trùng với C và với D. Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đường tròn (BCM) và đường tròn (DAM).*

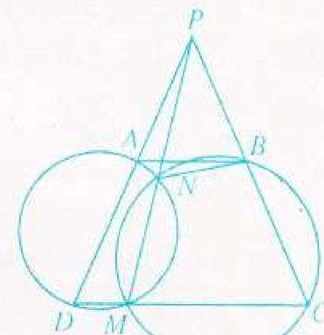
Chứng minh rằng:

1) *Điểm N di động trên một đường tròn cố định;*

2) *Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định. ((XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).*

Lời giải. 1) Nếu M nằm trên cạnh CD thì N nằm cùng phía với M đối với đường thẳng AB. Sử dụng các tứ giác nội tiếp $ANMD$ và $BNMC$ (h. 1), ta có $\widehat{ANM} = \pi - \widehat{D}$, $\widehat{BNM} = \pi - \widehat{C}$, cho nên $\widehat{ANB} = \widehat{C} + \widehat{D}$.

Nếu M nằm ngoài cạnh CD thì N nằm khác phía với M đối với đường thẳng AB. Tương tự trên, ta có $\widehat{ANB} = \pi - (\widehat{C} + \widehat{D})$. Vậy N nằm trên đường tròn cố định đi qua A, B.



Hình 1

2) Gọi P là giao điểm hai cạnh bên của hình thang cân $ABCD$ thì $PA.PD = PB.PC$. Vậy P nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (AMD) và (BMC), nghĩa là P nằm trên MN.

Bài 3. *Một đơn vị kiểm lâm muốn lập lịch đi tuần tra rừng cho cả năm 2006 với các yêu cầu sau:*

i) *Số ngày đi tuần tra trong năm nhiều hơn một nửa tổng số ngày của năm;*

ii) *Không có hai ngày đi tuần tra nào cách nhau đúng một tuần lễ.*

1) Chứng minh rằng có thể lập được lịch đi tuần tra rừng thỏa mãn các yêu cầu nêu trên, biết rằng năm 2006 có 365 ngày;

2) Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu lịch đi tuần tra rừng như vậy?

Lời giải. Đánh số ngày của năm 2006 bởi 1, 2, ..., 365. Xét lịch tuần tra sau: *tuần tra vào những ngày m mà* $m \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{14}$. *Tổng số những ngày này là* 183. Con số này vượt quá nửa tổng số ngày của năm, nên phương án tuần tra đó đáp ứng các yêu cầu của bài toán.

Kí hiệu $A_i := \{m \le 365 : m \equiv i \pmod 7\}$. Ta có $|A_1| = 53$, $|A_i| = 52$ cho mọi $i \ne 1$. Như vậy số ngày tuần tra trong A_1 không quá 27, số ngày tuần tra trong A_i còn lại không quá 26, và tổng số ngày tuần tra không vượt quá $6 \times 26 + 27 = 183$. Vậy mỗi lịch tuần tra thỏa mãn yêu cầu đầu bài phải có 183 ngày.

Bây giờ ta xác định số các tập hợp 183 ngày thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Số cách chọn các ngày trong A_1 được xác định duy nhất (chỉ gồm các ngày dạng $14k + 1$). Và với mỗi $i \ne 1$ có đúng 27 cách chọn 26 ngày trong A_i không thuộc vào hai tuần liên tiếp nhau, đặc trưng bởi dãy $\underbrace{(0, 0, ..., 0}_{26}, 1, ... 1)$ (trong đó tại vị trí 0 là các ngày dạng $14k + i$ và tại vị trí 1 là các ngày dạng $14k + 7 + i$). Như vậy, có thể lập được tất cả $\mathbf{27^6}$ lịch tuần tra khác nhau thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

NGÀY THỨ HAI

Bài 4. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O và có BC > AB > AC. Đường thẳng OA cắt đường thẳng BC tại điểm A_1; đường thẳng OB cắt đường thẳng CA tại B_2. Gọi B_1, C_1, C_2 và A_2 tương ứng là tâm các đường tròn (AA_1B), (AA_1C), (BB_2C) và (BB_2A).*

Chứng minh rằng:

1) Tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác $A_2B_2C_2$.

2) Tam giác $A_1B_1C_1$ bằng tam giác $A_2B_2C_2$ khi và chỉ khi góc C của tam giác ABC bằng 60°.

((XYZ) kí hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

Lời giải. 1) Theo định lí sin trong tam giác AA_1B ta có:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = 2\sin\widehat{AA_1B} = 2\cos(C - B)$$

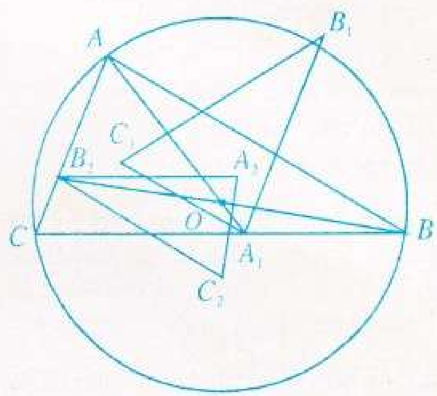
(vì $\widehat{AA_1B} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{A_1AB})$

$$= 180^\circ - \left(\widehat{B} + \frac{180^\circ - 2\widehat{C}}{2}\right) = 90^\circ + (\widehat{C} - \widehat{B}).$$

Do $\widehat{AA_1B} = \widehat{OAC} + \widehat{C} = (90^\circ - \widehat{B}) + \widehat{C} = 90^\circ + \widehat{C} - \widehat{B}$

(h. 2) và tương tự có $\dfrac{AC}{A_1C_1} = 2\cos(C - B)$,

nên $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{AC}$ (1)



Hình 2

Mặt khác $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{B_1A_1A} + \widehat{C_1A_1A}$

$= (90^\circ - \widehat{B}) + (90^\circ - \widehat{C}) = \widehat{A}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số $2\cos(C - B)$.

Tương tự thì $\Delta A_2B_2C_2 \backsim \Delta ABC$ theo tỉ số $2\cos(A - C)$.

Do đó $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$.

2) Cần và đủ để hai tam giác đồng dạng nói trên bằng nhau là tỉ số đồng dạng của nó với tam giác ABC như nhau. Lưu ý $\widehat{A} > \widehat{C} > \widehat{B}$ nên:

$\cos(\widehat{C} - \widehat{B}) = \cos(\widehat{A} - \widehat{C}) \Leftrightarrow \widehat{A} - \widehat{C} = \widehat{C} - \widehat{B}$

$\Leftrightarrow \widehat{C} = 60^\circ$.

Bài 5. *Hãy tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x)+8=0$$

với mọi x, y, z thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải. Cho $x=\dfrac{t}{2}$, $y=-\dfrac{t}{2}$ và $z=0$, thu được $f(t).f\left(-\dfrac{t}{2}\right)^2+8=0$, do đó $f(t)<0$ với mọi t. Vậy có thể đặt $f(x)=-2^{g(x)}$.

Thế vào PT hàm đã cho, nhận được

$$g(x-y)+g(y-z)+g(z-x)=3.$$

Đặt $u=x-y$, $v=y-z$ thì $z-x=-(u+v)$.

Đặt $h(x)=g(x)-1$, PT hàm trên trở thành

$$h(u)+h(v)=-h(-u-v) \qquad (*)$$

Dễ thấy $h(0)=0$ (với $u=v=0$) và

$h(x)=-h(-x)$ (với $u=x$ và $v=-x$).

PT (*) được viết lại thành

$$h(u)+h(v)=h(u+v).$$

PT hàm này chính là PT hàm Cauchy. Nghiệm của nó là $h(t)=at$, với a là hằng số thực tùy ý nào đó. Thế ngược trở lại, ta thu được nghiệm của PT hàm ban đầu là $f(x)=-2^{ax+1}$, $a\in\mathbb{R}$.

Thử lại, thấy hàm số này nghiệm đúng PT đã cho.

Bài 6. *Hãy tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc=1$, ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k\ge(k+1)(a+b+c).$$

Lời giải. Giả sử k là số thực thỏa mãn điều kiện đầu bài cho mọi số thực dương a, b và c với $abc=1$. Khi đó với $a=\dfrac{1}{x^2}$, $b=c=x$ thì:

$$x^4+\frac{2}{x^2}+3k\ge(k+1)\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)\Rightarrow\frac{x^2+x+1}{2x+1}\ge k.$$

Nhận thấy khi $x\to0$ thì $k\le1$. Ta chứng minh số $k=1$ thỏa mãn đầu bài. Thực vậy, với a, b, c dương và $abc=1$ ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge2(a+b+c) \qquad (1)$$

Do $abc=1$, cho nên phải có hai số trong chúng, chẳng hạn a và b cùng lớn hơn hoặc cùng nhỏ hơn 1. Khi đó BĐT (1) biến đổi tương đương được về bất đẳng thức

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+2(a-1)(b-1)+(ab-1)^2\ge0 \qquad (2)$$

bằng cách sử dụng các đẳng thức

$$\frac{2}{ab}=\frac{2}{c},\ a^2b^2=\frac{1}{c^2}.$$

BÀI TOÁN... *(Tiếp trang 15)*

Quá trình lặp lại nhiều lần khi tính hàm $J(n)$, trong đó có những lần số 0 đứng đầu bị xóa, sẽ sinh ra một dãy các số $J(n)=n_1$, $J(n_1)=n_2$, ... giảm dần, cùng với số các số 0 trong dãy n_1, n_2, ... cũng giảm dần, cuối cùng đến một n_i nào đó gồm toàn số 1. Khi đó, theo (3), ta có $J(n_i)=n_i$. Điểm n_i có tính chất $J(n_i)=n_i$ được gọi là "điểm bất động" của hàm J, và hàm J có tính chất $J(n_k)=n_{k+1}$ mà $n_{k+1}<n_k$ được gọi là có tính chất "co rút". Như vậy $J(n)$ là một hàm co rút về điểm bất động. Chẳng hạn với $n_i=7=(111)_2$ thì $J(7)=7$ nên 7 là điểm bất động và hàm J đã co rút từ 13 về 10 và cuối cùng về 7.

Ánh xạ có tính chất "co rút về điểm bất động" có nhiều ứng dụng trong toán học và trong tin học hiện đại. Trong toán học nó làm cơ sở cho phương pháp giải xấp xỉ các phương trình hàm. Trong tin học nó được dùng để nén tin.

GIẢI BÀI ... *(Tiếp trang 27)*

Dễ dàng thấy rằng U_{PD} sớm pha so với U_{DQ} một góc $\varphi=15^o$.

$$U_{PQ}^2=U_{PD}^2+U_{DQ}^2+2U_{PD}U_{DQ}\cos\varphi$$
$$=U^2+U^2+2U^2\cos\varphi.$$

$$U_{PQ}=U\sqrt{2(1+\cos\varphi)}=20\sqrt{2(1+\cos15^o)}\approx39{,}7(\text{V}).$$

Kết quả: Hai ampe kế A_1, A_2 chỉ các giá trị $I_1=I_2=2$ (A); ampe kế A chỉ giá trị $I=2\sqrt{2}$ (A); vôn kế V chỉ giá trị $U_{AB}\approx39{,}7$(V) và $R=5\sqrt{2}(\Omega)$. □

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Bình: *Nguyễn Bình*, 12A1, THPT Nam Tiền Hải; **Phú Thọ**: *Thế Anh*, 11A1, THPT Phong Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Trung Thành*, 11A2, THPT Trần Phú, Đức Thọ.

NGUYỄN VĂN THUẬN

DÃY CON và sự hội tụ của dãy số

ĐẶNG XUÂN SƠN
(GV THPT NK Trần Phú, Hải Phòng)

Trong nhiều bài toán tìm giới hạn của dãy số, việc khảo sát các dãy con đã góp phần khẳng định sự hội tụ của dãy, đồng thời, nó còn làm cho lời giải đẹp hơn. Bài viết này vừa mang ý nghĩa phương pháp vừa giới thiệu các cách sáng tạo thêm nhiều bài toán mới. Trong bài này luôn coi n lấy giá trị trong tập hợp số tự nhiên và n lớn vô hạn khi tìm giới hạn.

Ta đã biết *mọi dãy con của dãy hội tụ đều hội tụ và ngược lại* nếu $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = a$ thì $\lim x_n = a$.

Một cách tổng quát ta có

Cho số nguyên $m \geq 2$, *nếu*

$\lim x_{mn+i} = a, \forall i = 0, 1, ..., m-1$ *thì* $\lim x_n = a$.

Từ kết quả này ta có thể xét sự hội tụ của các dãy số cho bởi công thức phức tạp hơn.

✪ **Bài toán 1.** *Dãy* (x_n) *được xác định bởi công thức:* $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 3x_{n+2} = x_n + x_{n+1}. \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (x_n) *hội tụ.*

Lời giải. Xét dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2.a_n}{3}$, dễ thấy (a_n) là dãy giảm dần về 0.

Ta chứng tỏ $\max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq a_n$, $\forall n$ (1)

Thật vậy, (1) đúng với $n = 0$ và $n = 1$. Giả sử (1) đúng với n và chú ý rằng (a_n) là dãy giảm, ta có

$3x_{2n+2} = x_{2n} + x_{2n+1} \leq 2a_n \Rightarrow x_{2n+2} \leq a_{n+1}$

và $3x_{2n+3} = x_{2n+1} + x_{2n+2} \leq a_n + a_{n+1} \leq 2a_n$

$\Rightarrow x_{2n+3} \leq a_{n+1}$.

Như vậy (1) đúng với $n+1$, theo nguyên lí quy nạp thì (1) được chứng minh.

Dễ thấy $x_n > 0$, $\forall n$ và từ (1) theo nguyên lí kẹp có $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = 0$, suy ra $\lim x_n = 0$. □

**Bình luận:* lời giải trên đã đưa vào dãy phụ (a_n) có tác dụng chặn cả hai dãy con dạng (x_{2n}), (x_{2n+1}) và làm cho chúng cùng hội tụ về một điểm.

✪ **Bài toán 2.** *Dãy* (x_n) *được xác định bởi công thức:* $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 3x_{n+2} = x_n^2 + x_{n+1}^2. \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (x_n) *hội tụ.*

Lời giải. Xây dựng dãy số (a_n) như sau : $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2.a_n^2}{3}$. Dễ thấy (a_n) là dãy giảm dần về 0.

Tương tự như ở bài toán 1 ta chứng minh được $\max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq a_n$, $\forall n$ (2)

. Dễ thấy $x_n > 0$, $\forall n$, từ (2) theo nguyên lí kẹp ta có : $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim x_n = 0$. □

**Bình luận:* Cách cho công thức truy hồi của hai dãy là khác nhau nhưng lại cùng chung một cách giải quyết và lại có thể tổng quát hóa cho lớp bài toán mà chúng tôi sẽ dẫn ra sau đây.

✪ **Bài toán 3.** *Dãy (x_n) được xác định bởi :*

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \in (0;1) \\ 3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+2}^2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ.

Lời giải. Xây dựng dãy số (a_n) như sau: $a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2\}$, $a_{n+1} = \dfrac{2.a_n^2}{3}$.

Dễ thấy (a_n) là dãy giảm dần về 0. Ta chứng tỏ $\max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \le a_n$, $\forall n$. (3)

Thật vậy, (3) đúng với $n = 0, 1, 2$. Giả sử (3) đúng với n và chú ý rằng (a_n) là dãy giảm, ta có:

$3x_{3n+3} = x_{3n}^2 + x_{3n+2}^2 \le 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+3} \le a_{n+1}$;

$3x_{3n+4} = x_{3n+1}^2 + x_{3n+3}^2 \le a_n^2 + a_{n+1}^2 \le 2a_n^2$

$\Rightarrow x_{3n+4} \le a_{n+1}$

và $3x_{3n+5} = x_{3n+2}^2 + x_{3n+4}^2 \le a_n^2 + a_{n+1}^2 \le 2a_n^2$

$\Rightarrow x_{3n+5} \le a_{n+1}$.

Như vậy, (3) đúng với $n+1$. Theo nguyên lí quy nạp, (3) được chứng minh. Dễ thấy $x_n > 0$ $\forall n$ và từ (3) theo nguyên lí kẹp ta có $\lim x_{3n+i} = 0$ $(i = 0, 1, 2) \Rightarrow \lim x_n = 0$.❐

**Bình luận*: Hai bài toán trên có chung một dãy phụ, từ dãy phụ này ta có thể tạo ra một lớp các bài toán khác, chẳng hạn có thể đưa ra các khẳng định sau:

Các dãy số dương (x_n) cho bởi các công thức sau đều hội tụ về 0 với x_0, x_1, x_2, x_3 đều thuộc (0; 1):

1) $3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+1}x_{n+2}$, $3x_{n+3} = x_n^2 + x_n x_{n+1}$.

2) $3x_{n+3} = \dfrac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2} + x_{n+1}^2$, $3x_{n+3} = \dfrac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2} + x_n x_{n+1}$

3) $6x_{n+4} = x_{n+1}x_{n+2} + x_n^2 + 2x_n x_{n+1}$. ...

✪ **Bài toán 4.** *Dãy (x_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \text{ dương cho trước} \\ x_{n+3} = \sqrt{x_n + x_{n+2}}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) hội tụ.

Lời giải. Ta xây dựng hai dãy (a_n) và (b_n) như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ b_{n+1} = \sqrt{2b_n}. \end{cases}$$

Dãy (a_n) là dãy giảm dần về 2 còn dãy (b_n) tăng dần về 2. Nhờ đó, bằng quy nạp theo n ta chứng minh được khẳng định sau (*dành cho bạn đọc*)

$b_n \le \min\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\}$

$\le \max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \le a_n, \forall n$

Từ đó, dẫn đến $\lim x_{3n} = \lim x_{3n+1} = \lim x_{3n+2} = 2$

$\Rightarrow \lim x_n = 2$.❐

**Bình luận:* Từ cặp dãy số $(a_n), (b_n)$ có thể xây dựng thêm nhiều dãy số hội tụ khác. Hi vọng bạn đọc có thể *kiến thiết* được dạng tổng quát của bài toán này. Để kết thúc chúng tôi xin gửi đến các bạn một số bài toán sau đây.

Bài 1. Dãy số dương (x_n) được xác định bởi x_i $(i = 0, 1, ..., m-1)$ dương cho trước và $x_{n+m+1} \le \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + ... + \alpha_m x_{n+m}$, trong đó số nguyên $m \ge 1$, $\alpha_i \ge 0$, $(i = 1, 2, ..., m)$ sao cho $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i < 1$. Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ.

Bài 2. Cho các số $\alpha_{ij} \ge 0$ $(i = 0, 1, ..., k)$ và $\sum_{j=0}^{m} \alpha_{ij} = c$ ($c \ge 1$, c là hằng số); các số $\beta_i \ge 0$ $(i = 0, 1, ..., k)$ và $\sum_{i=1}^{k} \beta_i < 1$.

Đặt $F_i = \beta_i x_n^{\alpha_{i0}}.x_{n+1}^{\alpha_{i1}}...x_{n+m}^{\alpha_{im}}$ với $i = 0, 1, ..., k$. Chứng minh rằng các dãy xác định bởi $x_0, x_1, ..., x_m \in (0, 1)$ và $x_{n+m+1} = F_0 + F_1 + ... + F_k$ đều hội tụ.

Bài 3. Dãy (x_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \text{ tùy ý cho trước} \\ x_{n+3} = \log_5(3^{x_n} + 4^{x_{n+2}}). \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim x_n = 2$.

Niềm vui sáng tạo là cảm hứng cho chúng ta theo đuổi các ý tưởng đến tận cùng.

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ trên tạp chí Toán học & Tuổi trẻ

Năm học 2005-2006

__LTS:__ Trong năm học vừa qua, cuộc thi thường niên của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ được các bạn trên toàn quốc hưởng ứng rất sôi nổi. Các địa phương có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải là ***Vĩnh Phúc, Hải Dương, Nam Định, Thanh Hóa, Nghệ An, Khánh Hòa.*** *Đặc biệt có nhiều bạn học sinh bậc Tiểu học tham gia giải bài và một số bạn đã đoạt giải.*

Hai giải Xuất sắc (môn Toán) lần này thuộc về hai bạn **Phạm Phi Điệp** *và* **Võ Văn Tuấn**. *Nhiều bạn đoạt giải ở cuộc thi trước lại đoạt giải khá cao ở lần này. Tòa soạn xin chúc mừng các bạn đoạt giải Toán - Vật lí trong cuộc thi này. Hẹn gặp các bạn trong cuộc thi tiếp sau.*

Sau đây là danh sách các bạn được giải Toán và Vật lí năm học 2005-2006.

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (2 giải)

1. *Phạm Phi Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, **Nam Định**
2. *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, **Đăk Lăk**

Giải Nhất (5 giải)

1. *Cao Thanh Tùng*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**
2. *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**
3. *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**
4. *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**
5. *Vũ Văn Quang*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**

Giải Nhì (12 giải)

1. *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX. Đông Hà, **Quảng Trị**
2. *Vũ Đình Long*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
3. *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn, **Bắc Ninh**
4. *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành, **Hải Dương**
5. *Nguyễn Ngọc Huy*, 8A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng, **Hải Phòng**
6. *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ, **Hưng Yên**
7. *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
8. *Hoàng Đức Ý*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**
9. *Võ Thái Thông*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**
10. *Phan Tiến Dũng*, 11 Toán, THPT chuyên **Hưng Yên**
11. *Lê Công Truyền*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**
12. *Võ Quốc Bá Cẩn*, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**

Giải Ba (15 giải)

1. *Đỗ Thái Chúng*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí, **Quảng Ninh**
2. *Nguyễn Ngọc Thọ*, 6A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**
3. *Nguyễn Thị Thu Hà*, 6B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**

4. *Lê Quang Huy*, 7H1, THCS Trưng Vương, **Hà Nội**
5. *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
6. *Phạm Ngọc Dương*, 8B, THCS Liên Hòa, Kim Thành, **Hải Dương**
7. *Đỗ Như Milan*, 9A1, THCS Chu Văn An, Ba Đình, **Hà Nội**
8. *Nguyễn Cao Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**
9. *Trần Văn Huỳnh*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**
10. *Đào Đức Trung*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì, **Phú Thọ**
11. *Nguyễn Như Quốc Trung*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**
12. *Trần Mỹ Linh*, 10T, THPT chuyên **Bạc Liêu**
13. *Trần Tấn Phong*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**
14. *Vũ Xuân Dương*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**
15. *Nguyễn Tuấn Dũng*, 11A, THPT Phan Chu Trinh, Xuân Lộc, Sông Cầu, **Phú Yên**

Giải Khuyến khích (58 giải)

1. *Trương Nhã Uyên*, 4/1, TH Hàm Nghi, Đông Hà, **Quảng Trị**
2. *Nguyễn Phi Hùng*, 5A, TH Trung Trạch, Bố Trạch, **Quảng Bình**
3. *Nguyễn Đức Nguyên*, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn, **Hải Dương**
4. *Nguyễn Đức Tú*, 6/4, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà, **Quảng Trị**
5. *Nguyễn Thị Hà Anh*, 6A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**
6. *Nguyễn Thị Ngọc*, 6A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**
7. *Phan Thị Hà*, 6A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ, **Hưng Yên**
8. *Văn Gia Thi*, 6A1, THCS Lê Hồng Phong, TP Quy Nhơn, **Bình Định**
9. *La Hồng Quân*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**
10. *Lê Thị Tuyết Mai*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên, **Vĩnh Phúc**
11. *Phạm Duy Long*, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội**
12. *Phạm Thế Hoàng*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
13. *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ, **Quảng Trị**
14. *Võ Quang Viễn*, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, **Quảng Trị**
15. *Vũ Thị Tuyết*, 7A, THCS Tự Lập, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**
16. *Dương Hoàng Hưng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
17. *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, **Thái Bình**
18. *Tăng Văn Bình*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
19. *Nguyễn Lệnh Dũng*, 8A, THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức, **Hà Tây**
20. *Phạm Duy Hiệp*, 8B8, THCS Trần Phú, **Hải Phòng**
21. *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hoá**
22. *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP Rạch Giá, **Kiên Giang**
23. *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**
24. *Đương Phúc Thưởng*, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương, **Nghệ An**
25. *Hà Khương Duy*, 9B, THCS TTr Bố Hạ, Yên Thế, **Bắc Giang**
26. *Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**
27. *Nguyễn Duy Cương*9A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ, **Yên Bái**
28. *Đinh Hoàng Long*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức, **Hà Tây**
29. *Nguyễn Phi Hùng*, 9A, THCS Quách Xuân Kì, Hoàn Lão, Bố Trạch, **Quảng Bình**
30. *Nguyễn Thế Tâm*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây**
31. *Nguyễn Thị Hồng*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
32. *Trần Nhật Tân*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây**
33. *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn, **Hà Tĩnh**
34. *Trần Văn Phúc*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**
35. *Đinh Thành Nhân*, 9A7, THCS Quang Trung, TP Đà Lạt, **Lâm Đồng**

36. *Nguyễn Văn Lương,* 9/3, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà, **Quảng Trị**
37. *Phan Sỹ Quang,* 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**
38. *Trần Đức Minh,* 9A1, THCS Tế Tiêu, Mĩ Đức, **Hà Tây**
39. *Trần Thị Hồng Vân,* 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**
40. *Dương Văn An,* 10A1, THPT Châu Thành, TX Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**
41. *Thái Thị Thu Trang,* 10A, THPT Vĩnh Linh, **Quảng Trị**
42. *Phan Thị Thu Trang,* 10A1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Vĩnh Điện, Điện Bàn, **Quảng Nam**
43. *Phan Tiến Thành,* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**
44. *Đinh Ngọc Thái,* 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**
45. *Đinh Quang Huy,* 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**
46. *La Tiến Nam,* 10A1, THPT Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**
47. *Nguyễn Đình Tuấn,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TX. Đông Hà, **Quảng Trị**
48. *Nguyễn Quang Phương,* 10T3, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TX Hà Đông, **Hà Tây**
49. *Nguyễn Quốc Đại,* 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**
50. *Phan Xuân Minh,* 10A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An**
51. *Đặng Ngọc Thanh,* 11, THPT chuyên **Quảng Bình**
52. *Trịnh Văn Vương,* 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**
53. *Trương Xuân Nhã,* 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TX Đông Hà, **Quảng Trị**
54. *Đặng Công Vinh,* 11I, THPT Nghĩa Đàn, Nghĩa Đàn, **Nghệ An**
55. *Đoàn Trí Dũng,* 11A1, khối THPT chuyên Toán - Tin, ĐHSP **Hà Nội**
56. *Phạm Khắc Thành,* 11A, THPT Triệu Sơn 3, **Thanh Hóa**
57. *Bùi Văn Ngọc,* 12A, THPT Chu Văn An, **Lạng Sơn**
58. *Nguyễn Quang Huy,* 12 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**

MÔN VẬT LÍ

Giải Nhất (4 giải)

1. *Nguyễn Minh Khương,* 11A3, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**
2. *Trịnh Văn Vương,* 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**
3. *Trần Thái Hà,* 12 Lí, THPT chuyên **Bắc Ninh**
4. *Vũ Ngọc Quang,* 12A3, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**

Giải Nhì (3 giải)

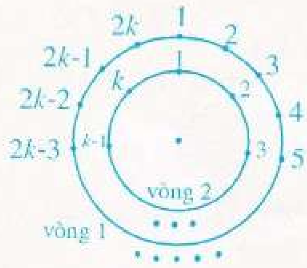
1. *Phạm Đức Linh,* 10 Lí, THPT chuyên **Hưng Yên**
2. *Nguyễn Thị Kim Khuyên,* 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**
3. *Lê Hoàng Dũng,* 12 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**

Giải Ba (8 giải)

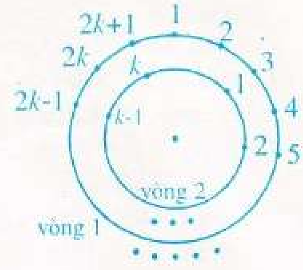
1. *Tạ Đức Mạnh,* 10A3, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**
2. *Nguyễn Tất Nghĩa,* 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**
3. *Lê Bá Sơn,* 11F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**
4. *Lý Viễn Trường,* 11A1, THPT Phù Cát I, **Bình Định**
5. *Phùng Đình Phúc,* 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**
6. *Nguyễn Công Dưỡng,* 12 Lí, THPT chuyên **Bắc Ninh**
7. *Nguyễn Ngọc Kì Nam,* 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**
8. *Nguyễn Xuân Nam,* 12 Lí, THPT chuyên **Bắc Ninh**

Các bạn được giải hãy gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Bằng chứng nhận và giải thưởng!

THTT



Hình 1



Hình 2

Bài toán Josephus dưới góc độ đệ quy

PHẠM TRÀ ÂN
(Viện Toán học)

Trong các sách báo về Toán học và Tin học, có một bài toán cổ mang tên *Bài toán Josephus* như sau:

Truyền thuyết kể lại rằng trong cuộc chiến tranh Do Thái - La Mã, Josephus gia nhập đội quân Do Thái. Trong một trận chiến đấu ác liệt, 41 người lính trong đó có Josephus đã bị quân La Mã vây chặt trong một hang động. Với tinh thần bất khuất, thà tự sát còn hơn là bị bắt, họ quyết định đứng thành một vòng tròn, rồi theo chiều kim đồng hồ, cứ cách một người lại tự sát một người, hết vòng này đến vòng khác, cho đến khi còn một người thì dừng. Người này sẽ phải sống và tìm cách thoát ra khỏi hang động để kể lại cho mọi người tinh thần hi sinh anh dũng của những người lính. Hỏi cần đứng ở vị trí nào trên vòng tròn 41 người để sống sót?

Kinh nghiệm chỉ ra rằng cách tiếp cận tốt nhất các bài toán kiểu trên là hãy mở rộng bài toán ra một chút: xét bài toán *Josephus* với n người, $n \geq 1$.

Kí hiệu $J(n)$ là vị trí người sống sót trong bài toán *Josephus* với n người.

Với $n = 1$ ta coi là $J(1) = 1$.

Với $n > 1$ ta xét hai trường hợp: n chẵn và n lẻ.

a) Trường hợp n chẵn, giả sử $n = 2k$ với $k \geq 1$. Sau vòng thứ nhất còn lại k người mang số cũ $1, 3, 5, .., 2k - 1$ và được đánh số mới là $1, 2, ..., k$ (h. 1).

Tiếp tục như thế. Một cách tổng quát, ta có $J(2k) = 2J(k) - 1$ với mọi $k \geq 1$.

b) Trường hợp n lẻ, giả sử $n = 2k + 1$. Sau vòng thứ nhất còn lại k người mang số cũ là $3, 5, ..., 2k + 1$ và được đánh số mới là $1, 2, ..., k$ (h. 2).

Tiếp tục như thế, tổng quát ta có

$J(2k + 1) = 2J(k) + 1$ với mọi $k \geq 1$.

Vậy có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} J(1) & = 1 \\ J(2k) & = 2J(k) - 1 \text{ với } k \geq 1 \\ J(2k+1) & = 2J(k) + 1 \text{ với } k \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình (1) diễn tả một quy luật, được gọi là *quy luật đệ quy*. Việc tính $J(n)$ với n bằng $2k$ hay $2k + 1$, dẫn về tính $J(k)$, biết $J(1) = 1$. Vì vậy hệ phương trình (1) còn được gọi là *hệ thức đệ quy*. Bài toán có hệ thức đệ quy được gọi là *bài toán đệ quy*. Trong toán học và tin học, ta gặp nhiều bài toán đệ quy như bài toán tháp Hà Nội (THTT số 280/10.2000), bài toán cắt bánh chưng ngày Tết (THTT số 307/1.2003), bài toán Josephus (THTT số 193/7.1993, số 203/5.1994, số 306/12.2002).

Các nhà tin học thấy ở hệ thức đệ quy (1) một giải thuật để tính $J(2k)$ hoặc $J(2k + 1)$ thông qua tính $J(k)$ và tiếp tục như thế. Trong tin học ta tính theo thứ tự ngược lại, từ $J(1) = 1$ tính được

$J(2)$, rồi tính được $J(5)$, v.v... Cách tính như vậy gọi là *giải thuật đệ quy*. Sau đây là một chương trình con, thường được gọi là một thủ tục đệ quy, để máy tính thực hiện quá trình tính toán trên, được viết bằng ngôn ngữ tựa – Pascal:

```
FUNCTION J(n) : integer;
  BEGIN
    IF n = 1 THEN J : = 1
    ELSE
      IF n mod 2 = 0 THEN J : = 2 * J(ndiv2) – 1
      ELSE J : = 2 * J ((n – 1) div 2) + 1;
  END.
```

Cách giải này có ưu điểm là thực hiện được bằng máy tính cho nhanh kết quả nhưng không biết các tính chất của hàm $J(n)$.

Các nhà toán học lại thích một lời giải khác có thể biết thêm các tính chất lí thú của hàm $J(n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1
n	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	3	5	7	9	11	13	15	1

...

Từ bảng này, ta có nhận xét:

• Có thể phân bảng thành từng nhóm theo n trong khoảng $2^m \le n < 2^{m+1}$ với $m = 0, 1, 2, ...$

• Trong mỗi nhóm, $J(n) = 2r + 1$ với $r = 0, 1, 2, ...$, chừng nào $J(n)$ chưa vượt n của nhóm kế tiếp theo. Nếu viết n ở dạng $n = 2^m + r$ với $0 \le r < 2^m$, từ bảng trên ta thấy:

Với $n = 4 = 2^2 + 0$ thì $J(4) = 2r + 1 = 1$;

Với $n = 13 = 2^3 + 5$ thì $J(13) = 2r + 1 = 11$.

Phải chăng $J(n) = J(2^m + r) = 2r + 1$?

Sau đây ta sẽ chứng minh dự đoán của ta là đúng, bằng quy nạp theo m.

Với $n = 1 = 2^0 + 0$ ($m = 0$ và $r = 0$) thì $J(1) = 1$ đúng.

Giả sử dự đoán là đúng cho $m - 1$, ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng cho m.

a) Trường hợp n chẵn: Giả sử $n = 2^m + r = 2k$, suy ra r cũng là chẵn và $\frac{r}{2}$ là nguyên. Áp dụng hệ thức đệ quy (1) và giả thiết quy nạp, ta có

$J(n) = J(2^m + r)$

$$= 2J\left(2^{m-1} + \frac{r}{2}\right) - 1 = 2\left(2.\frac{r}{2} + 1\right) - 1 = 2r + 1.$$

b) Trường hợp n lẻ: Chứng minh tương tự.

Vậy với mọi $n = 2^m + r$ mà $0 \le r < 2^m$ thì

$$J(n) = J(2^m + r) = 2r + 1 \quad (2)$$

Công thức (2) cho ta tính được kết quả của bài toán Josephus. Chẳng hạn:

$J(41) = J(2^5 + 9) = 2.9 + 1 = 19;$

$J(100) = J(2^6 + 36) = 2.36 + 1 = 73.$

Trong quá trình tìm nghiệm $J(n)$, ta thấy dạng lũy thừa cơ số 2 có một vai trò quan trọng. Giả sử số n biểu diễn trong hệ nhị phân có dạng

$$n = (1b_{m-1}...b_1b_0)_2$$

tức là $n = 1.2^m + b_{m-1}2^{m-1} + ... + b_1 2^1 + b_0 2^0$, với b_i hoặc bằng 1, hoặc bằng 0 ($i = 0, 1, ..., m - 1$) thì $r = (0b_{m-1}b_{m-2}...b_1b_0)_2$

$$2r + 1 = (b_{m-1}b_{m-2}...b_1b_0 1)_2$$

Từ hệ thức (2), ta có

$$J((1b_{m-1}b_{m-2}...b_1b_0)_2) = (b_{m-1}b_{m-2}...b_1b_0 1)_2 \quad (3)$$

tức là nếu cả n và $J(n)$ đều ở dạng nhị phân, thì $J(n)$ nhận được từ n bằng cách chuyển số 1 ở tận cùng bên trái về tận cùng bên phải. Thật là đơn giản và tiện lợi biết bao! Chẳng hạn

$J(100) = J((1100100)_2) = (1001001)_2$
$= 64 + 8 + 1 = 73.$

Với $n = 2^m + r$, ta thử tính

$$J^{(m+1)}(n) = \underbrace{J(J(...J(n)...))}_{m+1 \text{ lần J}}$$

với một vài n tương đối nhỏ.

Thí dụ $J(13) = J((1101)_2) = (1011)_2 = 11;$
$J(11) = J((1011)_2) = (0111)_2 = 7;$
$J(7) = J((111)_2) = (111)_2 = 7.$

(Xem tiếp trang 8)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/353. (Lớp 6) Tìm số tự nhiên có $2n$ chữ số dạng $\overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}}$ thoả mãn hệ thức

$$\overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}} = a_1.a_2 + ... + a_{2n-1}.a_{2n} + 2006.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Phan Thúc Trực, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T2/353. (Lớp 7) Có hay không ba số a, b, c thoả mãn

$$\frac{a}{b^2-ca} = \frac{b}{c^2-ab} = \frac{c}{a^2-bc} \ ?$$

PHAN THỊ MÙI
(GV THCS Trần Quốc Toản, TX Tuy Hoà, Phú Yên)

Bài T3/353. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) $\dfrac{x-y\sqrt{2006}}{y-z\sqrt{2006}}$ là một số hữu tỉ,

(ii) $x^2+y^2+z^2$ là một số nguyên tố.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SVK50A1S, khoa Toán-Cơ-Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/353. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xyz$, trong đó x, y, z là các số thực thoả mãn

$$\frac{8-x^4}{16+x^4} + \frac{8-y^4}{16+y^4} + \frac{8-z^4}{16+z^4} \geq 0.$$

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T5/353. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{9} \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc < \frac{1}{4}.$$

BÙI TUẤN ANH
(GV THPT Yên Thuỷ A, Hoà Bình)

Bài T6/353. Cho tứ giác lồi $AA'C'C$ có hai đường thẳng AC và $A'C'$ cắt nhau tại I. Lấy điểm B trên cạnh AC và điểm B' trên cạnh $A'C'$. Gọi O là giao điểm của AC' và $A'C$; P là giao điểm của AB' và $A'B$; Q là giao điểm của BC' và $B'C$. Chứng minh rằng ba điểm P, O, Q thẳng hàng.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T7/353. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB và điểm E trên cạnh AC sao cho $DE = BD + CE$. Tia phân giác của góc BDE cắt cạnh BC tại I.

a) Tính độ lớn của góc DIE.

b) Chứng minh rằng đường thẳng DI luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di động trên các cạnh AB và AC tương ứng.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/353. Tìm tất cả các số nguyên dương n lớn hơn 1 thoả mãn điều kiện : Với mọi k thoả mãn $1 < k < n$ và $(k, n) = 1$ thì k là số nguyên tố.

TRẦN QUỐC HOÀN
(SV K50CA, ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/353. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$$P(x^{2006} + y^{2006}) = (P(x))^{2006} + (P(y))^{2006}$$

với mọi số thực x, y.

PHẠM XUÂN THỊNH
(GV THPT Dân lập Uông Bí, Quảng Ninh)

Bài T10/353. Giải phương trình

$$2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{...+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}}}}$$
$$= 2x^3+3x^2+3x+1,$$

trong đó biểu thức vế trái có cả thảy 2006 dấu căn thức bậc hai.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Thừa Thiên - Huế)

Bài T11/353. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P, AD và BC cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = R^2$.

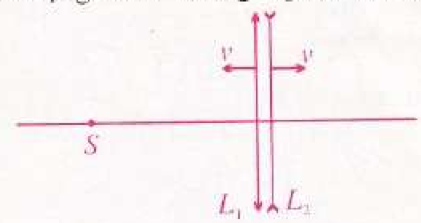
NGUYỄN ĐÔNG SƠ
(Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Dương)

Bài T12/353. Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm nằm trong tứ diện. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng thể tích của tứ diện $A'B'C'D'$ không vượt quá $\frac{1}{27}$ thể tích của tứ diện $ABCD$.

CÙ HUY TOÀN
(SV khoa Công nghệ Vật liệu 02-K50 Đại học Bách Khoa Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

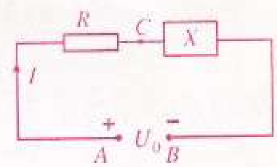
Bài L1/353. Cho một nguồn sáng điểm S đứng yên, nằm trên quang trục chính của hệ thấu kính đồng trục gồm thấu kính hội tụ L_1 có tiêu cự f_1 và thấu kính phân kì L_2 có tiêu cự $f_2 = 2f_1$. Khi hai thấu kính đặt sát nhau thì S cách thấu kính L_1 một khoảng $d = 3f_1$, và có ảnh tạo bởi hệ là S'. Sau đó cả hai thấu kính bắt đầu chuyển động theo hướng ngược chiều nhau



với cùng độ lớn vận tốc v (hình vẽ). Hãy xác định độ lớn vận tốc và hướng chuyển động của ảnh S'.

TRỊNH VĂN MÙNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/353. Một đoạn mạch điện gồm một điện trở R mắc nối tiếp với một linh kiện X mà hiệu điện thế giữa hai cực của X là $U_X = U_{CB} = a\sqrt{I}$, với a là một hằng số, I là cường độ dòng điện trong mạch (hình vẽ). Biết hiệu điện thế đặt vào hai đầu đoạn mạch có trị số không đổi U_0, hãy xác định cường độ dòng điện I trong mạch. Áp dụng với: $U_0 = 24V$, $R = 5\Omega$; $a = 2V/A^{\frac{1}{2}}$.



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/353. (for 6th grade)
Find $2n$-digit number of the form $\overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}}$ satisfying the condition

$$\overline{a_1a_2...a_{2n-1}a_{2n}} = a_1.a_2 + ... + a_{2n-1}.a_{2n} + 2006.$$

T2/353. (for 7th grade)
Do there exist three numbers a, b, c satisfying

$$\frac{a}{b^2-ca} = \frac{b}{c^2-ab} = \frac{c}{a^2-bc} \ ?$$

T3.353. Find all positive integers x, y, z satisfying simultaneously the two conditions:

(i) $\dfrac{x-y\sqrt{2006}}{y-z\sqrt{2006}}$ is a rational number,

(ii) $x^2+y^2+z^2$ is a prime number.

T4/353. Find the greatest value and the least value of the expression $P = xyz$ where x, y, z are real numbers satisfying

$$\frac{8-x^4}{16+x^4} + \frac{8-y^4}{16+y^4} + \frac{8-z^4}{16+z^4} \geq 0.$$

T5/353. Prove that

$$\frac{2}{9} \leq a^3+b^3+c^3+3abc < \frac{1}{4}.$$

where a, b, c are the measures of three sides of a triangle with perimeter $a+b+c=1$.

(Xem tiếp trang 5)

★ Bài T1/349. (Lớp 6) *Xét tổng S gồm 2006 số hạng sau:*

$$S = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n+1}{2^n} + \ldots + \frac{2007}{2^{2006}}.$$

Hãy so sánh S với 3.

Lời giải. Với mọi $n \geq 2$ ta có

$$\frac{n+1}{2^n} = \frac{n+2}{2^{n-1}} - \frac{n+3}{2^n}.$$

Từ đó $S = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{2006}{2^{2005}} + \frac{2007}{2^{2006}}$

$$= 1 + \left(\frac{4}{2^1} - \frac{5}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^2} - \frac{6}{2^3}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{2007}{2^{2004}} - \frac{2008}{2^{2005}}\right) + \left(\frac{2008}{2^{2005}} - \frac{2009}{2^{2006}}\right)$$

$$= 3 - \frac{2009}{2^{2006}} < 3.$$

Nhận xét. 1) Đa số các bạn giải dài hơn bằng cách đặt $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2005}}$ để tính $T = 2T - T = 1 - \frac{1}{2^{2005}}$. Sau đó tính

$$S = 2S - S = 2 + T - \frac{2007}{2^{2006}} = 3 - \left(\frac{2007}{2^{2006}} + \frac{1}{2^{2005}}\right) < 3.$$

2) Bạn *Nguyễn Hữu Thắng*, 6B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh** đã tính tổng $S = 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$ với $x \neq 1$ và n nguyên dương bằng cách tính

$(x^2 - 2x + 1)S = (x-1)^2 S$ rồi áp dụng với $x = \frac{1}{2}$, $n = 2006$ để suy ra kết quả.

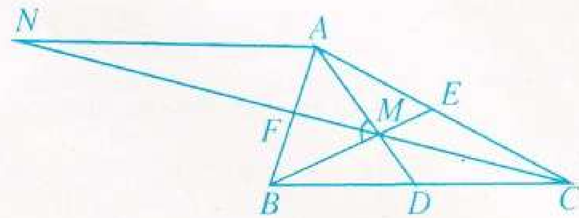
3) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Hà Nội: *Đỗ Trường Sơn*, 6A5, THCS Phan Chu Trinh, Ba Đình; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hào*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thủy*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Đinh Thị Dạ Thảo*, 5A, TH Lê Tất Đắc, Hoằng Hóa; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 5A, TH Trung Trạch, *Trần Đức Hòa*, 5B, TH số 2 Hoàn Lão, Bố Trạch; **Bình Định:** *Nguyễn Thị Xuân Thảo*, 6A1, THCS Nhơn Lộc, An Nhơn.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/349. (Lớp 7) *Cho tam giác ABC, trung tuyến AD và BE cắt nhau tại M. Chứng minh rằng nếu $\widehat{AMB} \leq 90^\circ$ thì $AC+BC>3AB$.*

Lời giải. Vẽ trung tuyến CF của ΔABC. Trên tia đối của tia FC lấy điểm N sao cho $FN = FC$, nối N với A.



Dễ thấy $\Delta ANF = \Delta BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow AN = BC$.

Trong tam giác ANC ta có $AN + AC > NC$ hay

$AC + BC > NC$ (1)

Vì M là trọng tâm tam giác ABC nên

$NC = 2FC = 6MF$ (2)

Ta sẽ chứng tỏ nếu $\widehat{AMB} \leq 90^\circ$ thì $MF \geq \frac{AB}{2}$.

Thật vậy, giả sử $MF < \frac{AB}{2} = AF = BF$ thì $\widehat{FAM} < \widehat{AMF}$ (3); $\widehat{FBM} < \widehat{BMF}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{FAM} + \widehat{FBM} < \widehat{AMF} + \widehat{BMF}$ $= \widehat{AMB} \leq 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAM} + \widehat{FBM} + \widehat{AMB} < 90^\circ + 90^\circ$ $= 180^\circ$. Vô lí. Vậy $MF \geq \frac{AB}{2}$ (5).

Từ (1), (2) và (5) suy ra $AC + BC > 3AB$. ❐

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khá hay và có nhiều cách giải. Xin gợi ý thêm hai cách giải để các bạn tham khảo.

i) Vẽ các trung tuyến AH, BG của tam giác ABM. Chúng cắt nhau tại N. Hãy chứng tỏ $AH \leq AE = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AN \leq \frac{1}{3}AC$. Tương tự, $BN \leq \frac{1}{3}BC$, suy ra $AC + BC \geq 3(AN + BN) > 3AB$.

ii) Sử dụng kết quả: $\widehat{AMB} \le 90^0$ thì $AB^2 \le AM^2 + BM^2$. Với cách này ta còn chứng minh được kết quả "mạnh" hơn: $AC + BC \ge AB\sqrt{10}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Ngọc, Phùng Ngọc Quý, Lê Thị Tuyết Mai*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Thái Nguyên:** *Đào Hoàng Tùng*, 7A3, THCS Chu Văn An, TP Thái Nguyên; **Hà Tây:** *Hà Hải Định*, 7A4, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hải Dương:** *Trần Thu Hà Phương, Quách Thị Oanh*, 7A1, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Ngọc Giàu*, 6/5, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Phú Yên:** *Phan Long Trí Yên*, 7H, THCS Hùng Vương, TP Tuy Hòa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/349. *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương r nhỏ hơn 59 đều tồn tại duy nhất số nguyên dương n nhỏ hơn 59 sao cho $(2^n - r)$ chia hết cho 59.*

Lời giải. Vì 59 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ, ta có $2^{58} - 1$ chia hết cho 59. Giả sử k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^k - 1$ chia hết cho 59, thế thì $k \le 58$. Ta chứng minh k là ước của 58. Thật vậy, giả sử r là số dư khi chia 58 cho k, nghĩa là $58 = ak + r$ với a, r là số tự nhiên và $r < k$.

Ta có $2^k \equiv 1 \pmod{59}$ nên $2^{58} = 2^{ak+r} \equiv 2^r \equiv 1 \pmod{59}$, suy ra $2^r - 1$ chia hết cho 59.

Vì giả thiết k là số nguyên dương nhỏ nhất có tính chất trên nên $r = 0$, do đó k là ước của 58.

Vậy k chỉ có thể nhận giá trị trong tập hợp $\{1, 2, 29, 58\}$.

Nếu $k = 1$ hoặc $k = 2$, thì $2^k - 1$ không chia hết cho 59.

Xét $k = 29$: Ta có $2^7 = 128 \equiv 10 \pmod{59}$

$\Rightarrow 2^{28} \equiv 10^4 \equiv 29 \pmod{59}$

$\Rightarrow 2^{29} \equiv 58 \pmod{59} \Rightarrow 2^{29} - 1 \equiv 57 \pmod{59}$.

Do đó $2^{29} - 1$ không chia hết cho 59.

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất k sao cho $2^k - 1$ chia hết cho 59 là 58.

Bây giờ giả sử có hai số nguyên dương a, b sao cho $a < b < 59$ và 2^a, 2^b có cùng số dư khi chia cho 59 thì $2^b - 2^a = 2^a(2^{b-a} - 1) \vdots 59$. Điều đó là không thể vì $b - a$ là số nguyên dương nhỏ hơn 58 và $(2, 59) = 1$.

Ta được các số $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{58}$ khi chia cho 59 được 58 số dư khác nhau và khác 0.

Vậy với mỗi số nguyên dương r nhỏ hơn 59 đều tồn tại duy nhất số nguyên dương n nhỏ hơn 59 sao cho 2^n và r có cùng số dư khi chia cho 59, nghĩa là số $(2^n - r)$ chia hết cho 59. ❒

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khó nên số bạn tham gia giải không nhiều. Điều then chốt của lời giải là biết sử dụng định lí Fermat nhỏ để chứng minh các số $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{58}$ khi chia cho 59 được 58 số dư khác nhau và khác 0.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: *Đặng Thùy Linh*, 9G, THCS Hữu Nghị Việt Nam – Angieri, Q. Thanh Xuân; *Lê Quang Huy*, 8H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm; *Bạch Đình Thắng*, 9A, THCS Đông Anh, TT Đông Anh; **Vĩnh Phúc:** *Khổng Hoàng Thao, Mạc Thế Trường*, 9A, *Mạc Thị Thu Huệ*, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; *Nguyễn Ngọc Quý*, 7A1, *Trần Bá Trung*, 9A1, *Nguyễn Hữu Hùng, Nguyễn Thị Giang A*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trường Giang*, 7A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh; **Yên Bái:** *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ; **Thái Bình:** *Nguyễn Tiến Hưởng*, 9B, THCS Quỳnh Hải, Quỳnh Phụ.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài T4/349. *Giải phương trình*

$$2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2(x^3 - 21x - 20)} \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $x^3 - 21x - 20 \ge 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x-5) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le x \le -1 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \quad (*)$$

Với điều kiện (*) thì $2x^2 - 5x + 2 > 0$, $x + 4 \ge 0$, $2x^2 - 8x - 10 \ge 0$. Do đó PT (1) tương đương với

$$(2x^2 - 8x - 10) + 3(x+4) = 4\sqrt{(2x^2 - 8x - 10)}.\sqrt{x+4} \quad (2)$$

Đặt $a = \sqrt{2x^2 - 8x - 10}$, $b = \sqrt{x+4}$ $(a \ge 0, b \ge 0)$.

Khi đó PT (2) trở thành:

$a^2 + 3b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - b)(a - 3b) = 0$.

• Nếu $a = b$ thì $\sqrt{2x^2 - 8x - 10} = \sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 14 = 0$.

Tìm được $x_1=\dfrac{9+\sqrt{193}}{4}$; $x_2=\dfrac{9-\sqrt{193}}{4}$

(đều thỏa mãn (*))

• Nếu $a = 3b$ thì $\sqrt{2x^2-8x-10}=3\sqrt{x+4}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 17x - 46 = 0.$

Tìm được $x_3=\dfrac{17+3\sqrt{73}}{4}$; $x_4=\dfrac{17-3\sqrt{73}}{4}$

(đều thỏa mãn (*)).

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4 như trên. ❐

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều giải tương tự như trên. Một số bạn không đặt ẩn phụ mà biến đổi trực tiếp thì lời giải dài hơn. Bài toán không khó nhưng có tới 20 bạn (trong số 106 bạn tham gia) giải sai.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Giang: *Hoàng Anh Hoàng*, 9A, THCS Tân Mĩ, Yên Dũng; **Nam Định:** *Trần Vũ Trung*, 8A8, THCS Phùng Chí Kiên, TP. Nam Định; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Giang*, *Lê Thị Tuyết Mai*, *Nguyễn Thị Ngọc*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Vũ Thị Tuyết*, 8A, THCS Tự Lập, Mê Linh; **Thanh Hóa:** *Lê Trọng Cường*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Tú*, 8B, *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Vũ Nguyễn Hoàng Yến*, 9A, THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa; **Tây Ninh:** *Nguyễn Quốc Trung*, 9A7, THCS Nguyễn Tri Phương, TX. Tây Ninh.

TRẦN HỮU NAM

★ **Bài T5/349.** *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c}+\frac{1}{(b+c)^2a}+\frac{1}{(c+a)^2b}\right]+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\ge 9 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT (1) là A, ta có

$$A=\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{4bc}{(b+c)^2}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{4ac}{(c+a)^2}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right).$$

Nhận thấy $\dfrac{4ab}{(a+b)^2}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=$

$$=\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right)+3$$

$$=(a-b)^2.\frac{a^2+ab+b^2}{ab(a+b)^2}+3\ge 3 \text{ (do } a>0,\ b>0).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Tương tự $\dfrac{4bc}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge 3$;

$\dfrac{4ac}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\ge 3.$

Vì vậy $A \ge 9$; $A = 9$ khi và chỉ khi $a = b = c$. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn giải cách khác dựa vào đánh giá sau :

$$\frac{4ab}{(a+b)^2}+\frac{a^2+b^2}{2ab}\ge 2\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}}\ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a+b)^2}}=2$$

và $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}\ge\dfrac{2ab}{2ab}=1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Xét tương tự với bộ số (b, c) và (c, a) rồi cộng theo vế suy ra kết quả bài toán.

2) Đa số các bạn giải bài này đều sử dụng BĐT Cauchy cho nhiều hơn hai số dương, điều này không đúng yêu cầu là giải bài toán trong chương trình cấp THCS. Một vài bạn đã nêu và chứng minh được bài toán tổng quát hơn như sau: "Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$). Đặt $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Chứng minh rằng

$$(n-1)^{n-1}a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{(S-a_1)^{n-1}a_1}+\frac{1}{(S-a_2)^{n-1}a_2}+...+\frac{1}{(S-a_n)^{n-1}a_n}\right)+\frac{S-a_1}{a_1}+\frac{S-a_2}{a_2}+...+\frac{S-a_n}{a_n}\ge n^2."$$

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

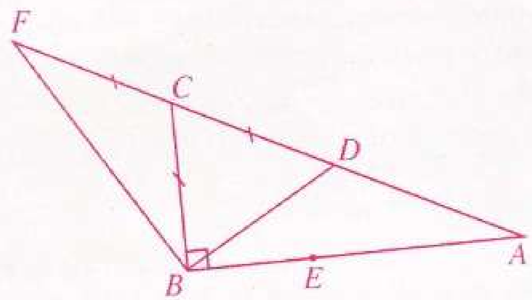
Hà Tây: *Nguyễn Bảo Khánh*, 9K4, THCS Lê Lợi, TX Hà Đông, *Tạ Đăng Mạnh*, 9B, THCS Tam Thuấn, Phúc Thọ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Luận*, 7A1, THCS Ttr Chờ, Yên Phong, *Nguyễn Hữu Thắng*, 6B, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Trần Thu Thủy*, *Lưu Thu Hạnh*, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Quang Sơn*, 9A2, THCS Trưng Vương, Thanh Lam, Mê Linh, *Phùng Ngọc Quý*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Lê Việt Thắng*, 9D10, THCS Lạc Viên, Q. Ngô Quyền; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Tú*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Phạm Lê Nhật Hoàng*, 9A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Thanh Hóa:** *Lê Trọng Cường*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7⁷, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Kiên Giang:** *Trần Thái Phú*, THCS Giồng Riềng; *Võ*

Đức Huy, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá; **An Giang:** *Nguyễn Phương Oanh*, 7A1, THCS Lý Thường Kiệt, TP. Long Xuyên.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/349. *Cho tam giác ABC vuông tại B với AB = 2BC. Lấy điểm D thuộc cạnh AC sao cho BC = CD, điểm E thuộc cạnh AB sao cho AD = AE. Chứng minh rằng $AD^2 = AB.BE$.*

Lời giải. Trên tia đối của tia AC lấy điểm F sao cho $CF = CD = BC$.



Suy ra tam giác BDF vuông tại B và $DF = AB$. Xét hai góc vuông tại B ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CBF} = \widehat{BFC}$. Từ đó $\Delta ABD \backsim \Delta AFB$.

Nên $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AD}{AB}$ hay $\dfrac{DF}{AF} = \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{DF-AD}{AF-DF} = \dfrac{AB-AE}{AD} = \dfrac{BE}{AD}$ (do $AB = DF$, $AD = AE$).

Từ $\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{BE}{AD}$ ta có $AD^2 = DF.BE = AB.BE$. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn dùng định lí Pythagore và tính toán ra kết quả.

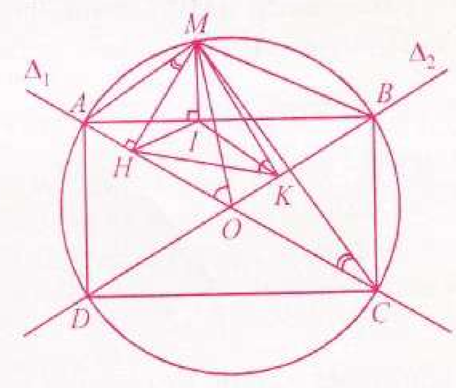
2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Hữu Thanh*, 8A3, THCS Lâm Thao, Phú Thọ; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Lan Anh*, 9A, THCS Yên Lạc; **Quảng Ninh:** *Trịnh Đức Anh*, 9D, THCS Trới, Hoành Bồ; **Hải Phòng:** *Chu Đức Nghĩa*, 9A8, THCS Trần Phú; **Bắc Giang:** *Chu Bá Chung*, xóm Bãi, Quang Minh, Việt Yên; **Hòa Bình:** *Bùi Minh Đức*, 8A3, THCS Chi Nê; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Thắng*, 6B, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Trần Công Thương*, , 6C, THCS Mỹ Hà, Mỹ Lộc, *Trần Thu Hiền*, 10/1 Phố Quang Trung, TP Nam Định; **Thanh Hóa:** *Hoàng Minh Tuấn*, 9G, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Huyền* (A), 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Hồng Ngọc*, 8, THCS Nam Hà; **Quảng Trị:** *Trần Văn Thành*, 7A, THCS Cam Hiếu, Cam Lộ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Quốc Đạt*, 9[1], THCS Kim Đồng, Hải Châu; **Quảng Ngãi:** *Thái Xuân Trà*, 8B, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Phú Yên, *Phan Long Trí Yên*, 7H, THCS Hùng Vương; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đồng Nai:** *Bùi Nguyễn Tường An*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Nguyễn Văn Nhơn*, 6/2, THCS Nguyễn Hữu Cảnh; **Đắk Lắk:** *Đinh Đắc Quảng Nam*, 9A, THCS 49 Krông Năng; **Lâm Đồng:** *Đỗ Thị Thùy Linh*, 7, THCS Đồng Nai, Cát Tiên; **Tây Ninh:** *Nguyễn Quốc Trung*, 9A7, THCS Nguyễn Tri Phương; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phạm Hải Thanh Yên*, 9/1, THCS Nguyễn An Ninh, Vũng Tàu; **Cần Thơ:** *Phạm Thị Tuyết Hạnh*, 8A1, THCS Bình Thủy; **Kiên Giang:** *Trần Minh Hảo*, 8A6, Bàn Tân Định, Giồng Riềng.

VŨ KIM THỦY

★Bài T7/349. *Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại O. Điểm M thay đổi, không thuộc Δ_1, Δ_2 sao cho OM = R không đổi. H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên Δ_1, Δ_2. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MHK.*

Lời giải. Giả sử đường tròn tâm O bán kính R cắt đường thẳng Δ_1 tại A, C; cắt đường thẳng Δ_2 tại B, D (hình vẽ).



Xét trường hợp M nằm trong góc AOB.

• *Phần thuận.* Với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MHK, xét khả năng H thuộc đoạn OA và K thuộc đoạn OB (còn các khả năng K thuộc đoạn OD hoặc H thuộc đoạn DC ta tiến hành một cách tương tự). Nhận thấy

$$\widehat{IHO} = 90^\circ - \frac{\widehat{MHK}}{2} \qquad (1)$$

Mặt khác $\widehat{AMI}=\widehat{AMH}+\dfrac{\overset{\frown}{HMK}}{2}$

$=\widehat{ACM}+\dfrac{\overset{\frown}{HMK}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{AOM}}{2}+\dfrac{\overset{\frown}{HMK}}{2}$

$=\dfrac{\overset{\frown}{HKM}+\overset{\frown}{HMK}}{2}=90^\circ-\dfrac{\widehat{MHK}}{2}$ (2)

Từ (1), (2) có $\widehat{IHO}=\widehat{AMI}$, nghĩa là bốn điểm A, M, I, H cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó $\widehat{AIM}=\widehat{AHM}=90^\circ$ (3)

Tương tự, bốn điểm B, M, I, K cùng nằm trên một đường tròn, nên $\widehat{MIB}=\widehat{MKB}=90^\circ$ (4)

Từ (3), (4) suy ra A, I, B thẳng hàng, hay I thuộc đoạn AB.

Lưu ý: Với các điều kiện của bài ra thì I thuộc đoạn AB (trừ hai điểm A, B).

• *Phần đảo.* Lấy I tùy ý trên đoạn AB (trừ hai điểm A, B). Qua I dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt cung nhỏ AB của đường tròn (O, R) tại M. Dựng $MH \perp AC$, $MK \perp BD$. Xét các tứ giác nội tiếp $AMIH$, $BMIK$, ta thấy $\widehat{HMI}=\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{KMI}$ (5)

Chú ý rằng $\widehat{HMI}=\widehat{HAI}=\widehat{KBI}=\widehat{KMI}$ tính góc AMI như ở phần thuận, ta có

$\widehat{MHI}=90^\circ-\widehat{AMI}=$

$$=90^\circ-\left(\frac{\widehat{HMK}}{2}+\frac{\widehat{HKM}}{2}\right)=\frac{\widehat{MHK}}{2} \quad (6)$$

Từ (5), (6) và để ý tới tia HI nằm giữa hai tia HM và HK, suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MHK.

Lập luận tương tự trên, khi M nằm trong góc BOC thì I thuộc đoạn BC (trừ B, C); khi M nằm trong góc COD thì I thuộc đoạn CD (trừ C, D); khi M nằm trong góc AOD thì I thuộc đoạn AD (trừ A, D).

• *Kết luận:* Tập hợp các điểm I, tâm đường tròn nội tiếp tam giác MHK, là biên của hình chữ nhật $ABCD$ (trừ các điểm A, B, C, D). ❒

Nhận xét. Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải hoàn chỉnh:

Bắc Ninh : *Nguyễn Ngọc Tân*, 9C, THCS huyện Thuận Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hoàng Hải*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Thanh Hóa:** *Hoàng Kiên An*, 9E, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Quỳnh Vy*, 8K, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP.Rạch Giá.

HỒ QUANG VINH

★Bài T8/349. *Cho p_1, p_2, p_3 (với $p_1 < p_2 < p_3$) là ba số nguyên tố. Gọi tập hợp*

$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \le n \le p_1p_2p_3,\ n \not\vdots\ p_1,\ n \not\vdots\ p_2,\ n \not\vdots\ p_3\}$.

Chứng minh rằng $|A| \ge 8$ (kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A).

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. *Cách 1.* (Theo đa số các bạn). Kí hiệu B, C, D theo thứ tự là tập hợp các số $n \in \mathbb{N}^*$, $n \le p_1p_2p_3$ mà $n \vdots p_1$, $n \vdots p_2$, $n \vdots p_3$.

Dễ thấy $|B| = p_2p_3$, $|C| = p_1p_3$, $|D| = p_1p_2$, $|B \cap C| = p_3$, $|B \cap D| = p_2$, $|C \cap D| = p_1$ và $|B \cap C \cap D| = 1$.

Do đó $|B \cup C \cup D| = |B| + |C| + |D| - |B \cap C| - |C \cap D| - |B \cap D| + |B \cap C \cap D| =$

$= p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1-p_1-p_2-p_3+1$

Suy ra $|A| = p_1p_2p_3 - |B \cup C \cup D|$

$= (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)$

$\ge (2-1)(3-1)(5-1) = 8.$

$|A| = 8 \Leftrightarrow p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5$ và $A = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Cách 2. (Theo bạn *Phạm Hồng Hạnh*, 11Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**).

Rõ ràng $|A| = \varphi(p_1p_2p_3)$, ở đó φ là hàm Euler.

Theo tính chất nhân tính của hàm Euler ta có

$|A| = \varphi(p_1)\varphi(p_2)\varphi(p_3) = (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1) \ge 8.$ ❒

Nhận xét. 1) Cách 2 tuy ngắn gọn và tổng quát nhưng lại đòi hỏi bạn phải sử dụng kiến thức về hàm Euler $\varphi(n)$ (Khá nhiều bạn ở các lớp chuyên Toán đã được học về hàm Euler này).

2) Tất cả các bạn đều chỉ dừng lại ở việc chỉ ra dấu bằng khi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ và $p_3 = 5$. Như thế chưa đầy đủ. Yêu cầu đầu bài là phải chỉ ra tập hợp A để xảy ra dấu đẳng thức $|A| = 8$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Nghiêm Thị Hiền*, 10, THPT Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Văn Mạnh Tuấn*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** *Trịnh Ngọc Tú*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Quốc Trung*, 11T, THPT chuyên lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 11 Toán, THPT Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** *Võ Văn Tuấn*, 10T, PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; **Đắk Lắk:** *Đỗ Thanh Tùng*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T9/349. *Cho sáu số thực a, b, c, a_1, b_1, c_1 (với a, a_1 khác 0) thỏa mãn hệ thức*

$$\left(\frac{c}{a}-\frac{c_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{b_1}{a_1}\right).\frac{bc_1-cb_1}{aa_1}<0 \quad (1)$$

Chứng minh rằng hai phương trình

$$ax^2+bx+c=0 \text{ và } a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

đều có các nghiệm phân biệt và các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số.

Lời giải. Ta có phương trình

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b_1}{a_1}x+\frac{c_1}{a_1}=0$$

Đặt $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, $\frac{b_1}{a_1}=p_1$, $\frac{c_1}{a_1}=q_1$.

Các phương trình trên trở thành

$$x^2+px+q=0 \quad (2)$$

và $$x^2+p_1x+q_1=0 \quad (3)$$

Điều kiện (1) là

$$(q-q_1)^2+(p-p_1)(pq_1-qp_1)<0 \quad (4)$$

Suy ra $p-p_1 \neq 0$.

Như ta đã biết trong lí thuyết về tam thức bậc hai: hai phương trình (2) và (3) đều có các nghiệm phân biệt, các nghiệm của chúng nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số khi và chỉ khi đồ thị các hàm số $y = x^2 + px + q$ (C) và $y = x^2+p_1x+q_1$ (C_1) cắt nhau tại một điểm nằm dưới trục hoành (5).

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C) và (C_1) là nghiệm của phương trình

$$x^2+px+q=x^2+p_1x+q_1 \Leftrightarrow x=\frac{q_1-q}{p_1-p}.$$

Ta có tung độ giao điểm của (C) và (C_1) bằng

$$y=\left(\frac{q_1-q}{p-p_1}\right)^2+p\left(\frac{q_1-q}{p-p_1}\right)+q$$

$$=\frac{1}{(p-p_1)^2}\left((q_1-q)^2+p(q_1-q)(p-p_1)+q(p-p_1)^2\right)$$

$$=\frac{1}{(p-p_1)^2}\left((q-q_1)^2+(p-p_1)(pq_1-qp_1)\right)<0$$

(do (4))

Khẳng định (5) được chứng minh, nên khẳng định ở đề bài được chứng minh. ❒

Nhận xét. Bài toán trên thuộc dạng cơ bản, có nhiều lí luận hay. Trong số các bạn giải đúng, gọn gàng có các bạn lớp 10 sau:

Phú Thọ: *Đinh Văn Nhật*, 10A1, THPT Vĩnh Chân, Hạ Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Thái*, 10A1, THPT Thuận Thành I, *Nguyễn Ngọc Lưỡng*, *Vũ Thị Thêu*, $10A_0$, THPT Yên Phong I, *Nguyễn Xuân Vương*, 10 Tin, THPT chuyên; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Trung*, 10A2, PTDL Bình Minh, Hoài Đức; **Thanh Hóa:** *Đào Đức Huân*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hoàng Minh Thắng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Võ Văn Hòa*, 10A1, THPT Nghi Lộc IV; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 10A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn, *Nguyễn Thị Thúy*, 10/1, THPT Nghèn, Can Lộc; **Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Minh Sang*, 10T PTCT, ĐHKH Huế; **Hậu Giang:** *Dương Hữu Thành*, 11A3, THPT Long Mỹ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/349. *Tìm tất cả các đa thức P(x) có hệ số thực thỏa mãn*

$$P(x).P(x+1)=P(x^2+2) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a$ nên $a = 0$ hoặc $a = 1$. Ta thấy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra.

Xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số. Ta có các nhận xét sau:

• Đa thức bậc hai $P(x) = x^2 - x + 2$ thỏa mãn bài ra.

• Nếu $P(x)$ thỏa mãn bài toán thì hiển nhiên mọi đa thức dạng $Q(x) = (P(x))^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) cũng thỏa mãn bài ra.

• Đa thức $P(x)$ thỏa mãn bài toán thì hệ số bậc cao nhất bằng 1.

• Đa thức $P(x)$ thỏa mãn bài toán thì nó không thể có nghiệm thực. Thật vậy, nếu x_0 là nghiệm thì dãy số dương tăng $x_1 = x_0^2+2$, $x_2 = x_1^2+2, \ldots$ cũng là nghiệm, mâu thuẫn.

Vậy bậc của $P(x)$ là một số chẵn, $\deg P(x) = 2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$), đặt

$P(x) = (x^2 - x + 2)^m + Q(x)$, $\deg Q(x) = q < 2m$.

Thế vào điều kiện bài ra, ta thu được

$$(x^2 - x + 2)^m Q(x) + (x^2 - x + 2)^m Q(x + 1) + Q(x)Q(x + 1) = Q(x^2 + 2) \quad (1)$$

Ta chứng minh $Q(x) \equiv 0$. Giả sử $Q(x) \not\equiv 0$. Bậc của đa thức ở vế trái của (1) bằng $2m + q$, còn bậc của đa thức ở vế phải bằng $2q$. So sánh bậc của hai vế, ta thu được $q = 2m$. Điều này là vô lí. Vậy $Q(x) \equiv 0$ và

$$P(x) = (x^2 - x + 2)^m.$$

Kết luận: Các đa thức thỏa mãn điều kiện bài ra là $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$, $P(x) = (x^2 - x + 2)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$. ❐

Nhận xét. 1) Đây là đề toán khó liên quan đến định lí cơ bản của đại số và cần có kiến thức về số phức. Các bạn chưa quen với việc sử dụng số phức nên gặp nhiều khó khăn trong cách trình bày. Tuy nhiên, nếu sử dụng định lí cơ bản của đại số thì bài toán được giải có tính tự nhiên hơn, không phải nhẩm nghiệm như đã trình bày ở trên.

Bạn *Phan Tiến Dũng*, 11T, THPT chuyên **Hưng Yên**, từ cách giải bài toán này đã nêu ra một loạt bài toán tương tự.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Tuyên Quang: *Trần Mạnh Hùng*, 11B1, THPT Sơn Dương; **Lạng Sơn:** *Nguyễn Tiến Tuấn*, 11B, *Nguyễn Thanh Tuyền*, 11A, THPT Chu Văn An, TP. Lạng Sơn; **Hà Nội:** *Đỗ Ngọc Hà*, 12T, THPT Hà Nội – Amsterdam, *Ngô Thị Bích Phương*, 11T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Thị Thanh Hoa*, *Đoàn Thị Bích Ngọc*, 11A1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** *Trịnh Ngọc Tú*, 11T, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Hằng*, 10A0, THPT Yên Phong I; **Hải Phòng:** *Đoàn Minh Duyên*, 11T, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Mạnh*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Hà Tĩnh:** *Bùi Hoàng Đan*, *Nguyễn Bảo Minh Hoàng*, 10T, THPT chuyên; **Đắk Lắk:** *Đỗ Thanh Tùng*, *Lê Đức Quang*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Như Quốc Trung*, 11A2, *Nguyễn Như Đức Trung*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Đinh Văn Vương*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Phạm Ngọc Anh Cương*, 12A15, THPT Vũng Tàu; **Vĩnh Long:** *Lương Thanh Long*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 12T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/349. *Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC và A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, AC, AB. Kí hiệu S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Chứng minh rằng* $\dfrac{3}{S_1} - \dfrac{2}{S_2} \le \dfrac{4}{S}$.

Lời giải.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác ; AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Khi đó

$$S_{A'B'C'} = \frac{2\prod\alpha}{\prod(\alpha+\beta)} \cdot S_{ABC}.$$

Trong đó $\prod\alpha = \alpha\beta\gamma$;

$$\prod(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta).$$

Các kí hiệu trên sẽ được sử dụng trong toàn bộ lời giải này.

Chứng minh bổ đề 1. Xem lời giải bài T10/248 THTT số 252 tháng 6 năm 1998 .

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC. Ta luôn có

$$3 + \sum\cos(B-C) \le 4\sum\cos A.$$

Chứng minh bổ đề 2.

Nếu tam giác ABC không nhọn thì

$\prod\cos A \le 0 < \prod(1 - \cos A)$

Nếu tam giác ABC nhọn thì

$$\prod\cot\frac{A}{2} = \sum\tan\frac{B+C}{2} \le \sum\frac{\tan B+\tan C}{2} = \sum\tan A$$

$$\Rightarrow \prod\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \le \prod\frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \prod\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{\sin A} \le \prod\frac{\sin A}{\cos A}$$

$\Rightarrow \prod \cos A(1+\cos A) \le \prod \sin^2 A$

$\Rightarrow \prod \cos A.\ \prod(1+\cos A)$

$\le \prod(1+\cos A).\ \prod(1-\cos A)$

$\Rightarrow \prod \cos A \le \prod(1-\cos A).$

Tóm lại, với tam giác ABC bất kì, ta có

$\prod \cos A \le \prod(1-\cos A)$

$\Rightarrow 2\prod \cos A \le 1 - \sum \cos A + \sum \cos B\cos C$

$\Rightarrow 1-\sum \cos^2 A \le 1+\sum\cos(B+C)+\sum\cos B\cos C$

$\Rightarrow 1-\sum\cos^2 A \le 1-\sum\sin B\sin C + 2\sum\cos B\cos C$

$$\Rightarrow \sum \sin B\sin C \le \left(\sum\cos A\right)^2 \qquad (1)$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức kép quen thuộc

$1 < \sum\cos A \le \frac{3}{2}$, ta có

$\left(\sum\cos A-\frac{3}{2}\right)\left(\sum\cos A-1\right) \le 0$

$$\Rightarrow \left(\sum\cos A\right)^2-\frac{5}{2}\sum\cos A+\frac{3}{2} \le 0 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$\sum\sin B\sin C-\frac{5}{2}\sum\cos A+\frac{3}{2}\le 0$

$\Rightarrow 2\sum\sin B\sin C+3\le 5\sum\cos A$

$\Rightarrow \sum\left(\cos(B-C)-\cos(B+C)\right)+3\le 5\sum\cos A$

$\Rightarrow \sum\cos(B-C)+\sum\cos A+3\le 5\sum\cos A$

$\Rightarrow 3+\sum\cos(B-C)\le 4\sum\cos A$ (đpcm).

Chú ý: 1) Trong phép chứng minh bổ đề 2, ta đã sử dụng hai kết quả quen thuộc sau

* $\frac{\tan x+\tan y}{2}\ge \tan\frac{x+y}{2}\ \forall x, y \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

* $1-\sum\cos^2 A = 2\prod\cos A$

2) $\sum\cos(B-C)+3\le 4\sum\cos A$

$\Leftrightarrow \sum h_a \le 2R+5r.$

3) $4\sum\cos A \ge 3+\sum\cos(B-C)$

$=\sum\left(1+\cos(B-C)\right) = 2\sum\cos^2\frac{B-C}{2}$

$\ge 6\sqrt[3]{\prod\cos^2\frac{B-C}{2}} \ge 6\prod\cos\frac{B-C}{2}$

$\Rightarrow \sum\cos A\ge\frac{3}{2}\prod\cos\frac{B-C}{2}.$

Trở lại việc giải bài toán T11/349.

Từ bổ đề 1, ta có $\frac{S}{S_1}=\frac{\prod(b+c)}{2\prod a}.$

Từ bổ đề 2, ta có

$$\frac{S}{S_2}=\frac{\prod\left((p-b)+(p-c)\right)}{2\prod(p-a)}=\frac{\prod a}{2\prod(p-a)}.$$

Từ đó, theo định lí sin

$$\frac{3S}{S_1}-\frac{2S}{S_2}=\frac{\frac{3}{2}\prod\cos\frac{B-C}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}-\frac{1}{\prod\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\prod\cos\frac{B-C}{2}-1}{\prod\sin\frac{A}{2}}\le\frac{\sum\cos A-1}{\prod\sin\frac{A}{2}}$$

(theo chú ý 3 và bổ đề 2)

$=\dfrac{4\prod\sin\frac{A}{2}}{\prod\sin\frac{A}{2}}=4$. Suy ra $\frac{3}{S_1}-\frac{2}{S_2}\le\frac{4}{S}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ☐

Nhận xét. 1) Bài toán trên tương đối khó. Có 37 bạn tham gia giải với nhiều cách biểu diễn và đánh giá khác nhau, 33 bạn giải đúng.

2) Các bổ đề 1 và 2 là các kết quả kinh điển về bất đẳng thức trong tam giác. Từ bổ đề 1 và $8\prod\alpha\le\prod(\beta+\gamma)$ có $S_1\le\frac{1}{4}S$.

Dễ thấy $\frac{1}{S_1}-\frac{2}{2S_2}\le\frac{2}{S} \Leftrightarrow 3+\sum\cos(B-C)\le 4\sum\cos A$ (bổ đề 2). Từ đó và $S_2\le\frac{1}{4}S$ suy ra bất đẳng thức $\frac{1}{S_1}-\frac{1}{2S_2}\le\frac{2}{S}$ mạnh hơn bất đẳng thức trong đề bài.

3) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Hà Tây: *Trịnh Ngọc Tú, Nguyễn Hữu Hiển*, 11T, THPT Nguyễn Huệ, TX. Hà Đông; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Tâm*, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Trị:** *Trần Thị Hải Yến*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thái Nguyên:** *Lê Vũ Hải*, 10T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Hằng, Nguyễn Thị Hiền*, 10A0, THPT Yên Phong I, Yên Phong; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Mạnh*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Hậu Giang:** *Lê Nguyễn*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Thanh Hoa*, 11T, khối PTCT–Tin, ĐHKHTN.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T12/349. *Cho góc tam diện Sxyz thỏa mãn $\widehat{xSy} = 121^o$; $\widehat{xSz} = 59^o$. Trên tia Sx lấy điểm A sao cho SA = a cho trước. Trên tia phân giác của góc $\widehat{zSy}$ lấy điểm B thỏa mãn $SB = a\sqrt{3}$. Tính các góc của tam giác SAB.*

Lời giải. Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt là vectơ đơn vị trên các cạnh Sx, Sy, Sz. Vì B thuộc tia phân giác của góc $\widehat{ySz}$ và $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ nên $\overrightarrow{SB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{SC} = \vec{b} + \vec{c}$.

Từ $\vec{a}\,\vec{b} = \cos 121^o = -\cos 59^o = -\vec{a}\,\vec{c}$ ta được: $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = 0$, cũng tức là $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0$.

Suy ra $SA \perp SB$ hay tam giác SAB vuông ở S: $\widehat{ASB} = 90^o$. Từ $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ ta tìm được $AB = 2a$. Suy ra $\widehat{SAB} = 60^o$ và $\widehat{SBA} = 30^o$ ❐

Nhận xét. 1) Kết quả trên đây về tính chất của tam giác SAB (là nửa của một tam giác đều) vẫn còn *nguyên hiệu lực*, miễn là các góc $\widehat{xSz} = \beta$ và $\widehat{xSy} = \gamma$ của góc tam diện $Sxyz$ thỏa mãn điều kiện $\beta + \gamma = 180^o$. Ngoài ra, còn đòi hỏi tỉ số $SB : SA = \sqrt{3}$.

Mệnh đề: Nếu một góc tam diện có hai mặt (tức hai góc phẳng ở đỉnh) bù nhau (tức là có tổng là một góc bẹt) thì cạnh chung của hai mặt đó vuông góc với tia phân giác của mặt thứ ba còn lại.

2) Bài toán này thuộc loại dễ, tuy nhiên đòi hỏi sử dụng tích vô hướng của hai vectơ (trong đó có kĩ năng tự đặt và sử dụng vectơ đơn vị để phát hiện ra tam giác SAB là vuông ở S.

3) Một số bạn không sử dụng vectơ thì phải dựng thêm tia đối Sy' hoặc Sz' của một trong hai tia Sy hoặc Sz và chiếu vuông góc A lên mp (ySz) sau đó cũng chứng minh được $\widehat{ASB} = 90^o$.

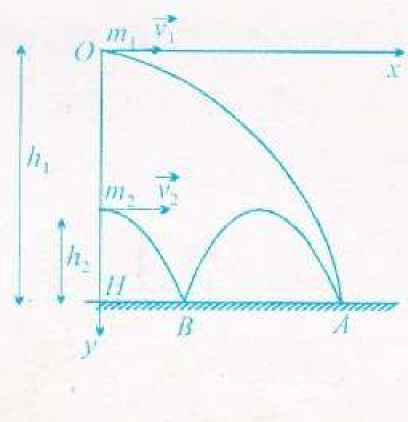
4) Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn gàng hơn cả:

Bắc Ninh: *Nguyễn Văn Huyên*, 11A$_0$, THPT Yên Phong I, Bắc Ninh; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*, THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình; **Nghệ An:** *Đậu Lê Thủy*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV; **Hà Tĩnh:** *Bùi Hoàng Đan*, 10 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Võ Xuân Quang*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Võ Xuân Thanh*, 12A6, THPT Tuy Phước II, Bình Định; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đắk Lắk:** *Lê Đức Quang, Đỗ Thanh Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hoàng Nguyên Nhật Tảo*, 11A6, THPT Trần Đại Nghĩa; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 11 Toán, THPT Bến Tre; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài L1/349. *Từ độ cao h_1, h_2 người ta ném cùng lúc hai vật có khối lượng m_1, m_2 (xem như hai chất điểm) theo phương ngang với vận tốc tương ứng là v_1, v_2. Vật thứ hai chạm đất tại B, va chạm đàn hồi với đất, nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ hai tại A cùng thời điểm với vật thứ nhất. Biết h_2 = 20m. Tìm h_1 và tỉ số $\frac{v_1}{v_2}$ (lấy g = 10m/s^2).*

Lời giải. Để tìm được h_1 và tỉ số $\frac{v_1}{v_2}$ dĩ nhiên quỹ đạo của hai vật phải nằm trong cùng một mặt phẳng thẳng đứng (chứa hai điểm ném) và hai vật cùng chạm đất tại A như hình vẽ.



Theo phương ngang hai vật đều chuyển động thẳng đều với vận tốc tương ứng v_1 và v_2 (vì va chạm của m_2 với đất là va chạm đàn hồi nên thành phần nằm ngang của vận tốc của m_2 sau va chạm vẫn bằng v_2).

Gọi t là khoảng thời gian kể từ lúc bắt đầu ném cho đến khi hai vật cùng chạm đất tại A, ta có $HA = v_1 t = v_2 t \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1$.

Ngoài ra ta có $h_1 = \frac{gt^2}{2}$ (1)

Xét chuyển động của vật m_2 ta có $BA = 2HB$ $\Rightarrow HB = \frac{HA}{3} = \frac{v_2 t}{3}$. Gọi t_1 là khoảng thời gian kể từ lúc ném cho đến khi vật B chạm đất ta lại có: $HB = v_2 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{t}{3}$.

Từ đó $h_2 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt^2}{18}$ (2)

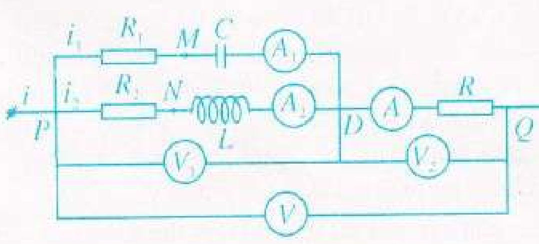
Từ (1) và (2) tìm được $h_1 = 9h_2 = 180(\text{m})$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải chặt chẽ và đáp số đúng:

Bình Định: *Nguyễn Hữu Quốc Đạt, Lê Thanh Bình*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Hải Phòng:** *Võ Sỹ Cường*, 10 Lí, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng; **Hưng Yên:** *Trần Văn Luyện, Nguyễn Thị Kim Loan*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên, *Phạm Ngọc Thúy*, 11A2, THPT Tiên Lữ; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Thu Hương*, 11F, THPT chuyên Lam Sơn, *Lê Duy Toàn*, 10A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Lê Hồng Minh*, 10K1, THPT Triệu Sơn 4; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Trường*, 46A10, THPT chuyên ĐHVinh, *Phan Đình Thái*, GK43, THPT Nghĩa Đàn; **Hà Tĩnh:** *Trần Thế Minh*, K33A1, THPT Nguyễn Huệ; **Hà Nội:** *Nguyễn Thế Năng*, 11A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Hà Tây:** *Đỗ Mạnh Cường*, 11A1, *Nguyễn Tuấn Khang* 10A1, THPT Phùng Khắc Khoan, ThạchThất, *Nguyễn Ngọc Đăng*, 10A1, THPT Phú Xuyên A; **Thái Bình:** *Nguyễn Bình*, 12A1, THPT Nam Tiền Hải.

MAI ANH

★ Bài L2/349. *Một mạch điện xoay chiều như sơ đồ (hình vẽ). Cho $R_1 = Z_L = 5\sqrt{3}\,\Omega$; $R_2 = Z_C = 5\Omega$. Hai vôn kế V_1 và V_2 chỉ cùng một giá trị $U = 20$V. Hãy xác định các số chỉ của các ampe kế A_1, A_2, A và số chỉ của vôn kế V ; tìm giá trị của điện trở R. Bỏ qua điện trở của các ampe kế và dây dẫn nối ; coi điện trở các vôn kế là vô cùng lớn.*



Lời giải. Tính tổng trở Z_1 và Z_2 của các đoạn mạch R_1C và R_2L.

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + Z_C^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = 10(\Omega);$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + Z_L^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10(\Omega).$$

Cường độ dòng điện hiệu dụng qua các đoạn mạch là: $I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{20}{10} = 2$ (A); $I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{20}{10} = 2$ (A); suy ra $I_1 = I_2$.

Độ lệch pha U so với I_1:

$$\tan\varphi_1 = \frac{-Z_C}{R_1} = \frac{-5}{5\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_1 = -30^\circ.$$

U trễ pha so với I_1 một góc 30°.

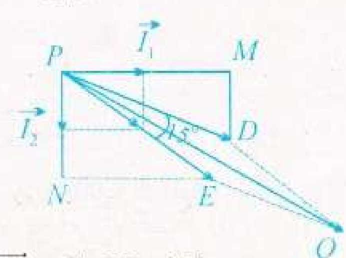
Độ lệch pha U so với I_2:

$$\tan\varphi_2 = \frac{Z_L}{R_2} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2 = 60^\circ.$$

U sớm pha so với I_2 một góc 60°. Kết quả tìm được cho thấy $\vec{I_1} \perp \vec{I_2}$; mặt khác do $I_1 = I_2$ nên $I = I_1\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (A).

Từ đây suy ra $R = \frac{U}{I} = \frac{20}{2\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}(\Omega)$.

Trên *giản đồ vectơ Fresnel* ở hình bên ta biểu diễn U_{PD} bằng vectơ $\overrightarrow{PD}$, U_{DQ} bằng vectơ $\overrightarrow{PE}$, với $PD = PE$, vì $U_{PD} = U_{DQ} = U = 20$ (V).



(Xem tiếp trang 8)

X hỏi ? Y, Z trả lời.

Trả lời - những số trước

1. (1.06). Tôi xin có mấy ý kiến về vấn đề mà thầy giáo Nguyễn AnhThuấn đã nêu ra như sau:

Thứ nhất, thầy Thuấn đã đặt ra vấn đề học sinh chưa được học khái niệm hai đoạn thẳng, hai tia song song. Tôi cho rằng sau này khi học sinh học khái niệm cặp đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song thì đã mặc nhiên thừa nhận khái niệm hai đoạn thẳng song song. Cũng như vậy, khi học khái niệm hai góc có cạnh tương ứng song song, học sinh cũng đã coi như có khái niệm hai tia song song. Các khái niệm trên hoàn toàn tương tự khái niệm hai đường thẳng song song. Bên cạnh đó, thực tế cho thấy hầu hết các em học sinh lớp 7 đều làm bài tập 29/92 (Toán 7 – tập 1) một cách "ngon lành" mà không có thắc mắc gì chính bởi sự ngầm thừa nhận trên. Vì vậy, có lẽ là trong quá trình giảng dạy các thầy cô cũng chỉ cần khẳng định cho học sinh sự tương tự của các khái niệm trên mà không cần phải chi tiết hóa chúng để giảm bớt gánh nặng lí thuyết cho học sinh.

Về vấn đề thứ hai, tôi hoàn toàn đồng tình với thầy Thuấn về việc chúng ta chưa khi nào quy định các kí hiệu Ax hay By là để chỉ các đường thẳng. Vì vậy, để đảm bảo sự chặt chẽ của toán học, trong bài 26/91 mà thầy Thuấn đã dẫn ra nên thay cụm từ "hai đường thẳng Ax, By" thành "hai đường thẳng chứa các tia Ax, By".

HOÀNG VĂN CƯƠNG
(Lớp 11 Toán, khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Hỏi - số này

1. (11.06). ***Cần xem lại khái niệm hai bộ số tỉ lệ trong SGK Hình học 12.***

Về khái niệm hai bộ số tỉ lệ, SGK Hình học 12 (sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000, tái bản lần thứ 5), trong bài : VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG – CHÙM MẶT PHẲNG ở mục *1. Một số quy ước và kí hiệu* viết:

"Hai bộ n số $(A_1, A_2, ..., A_n)$ và $(A'_1, A'_2, ..., A'_n)$ được gọi là tỉ lệ với nhau nếu tồn tại số thực $t \neq 0$ để $A_1 = tA'_1$, $A_2 = tA'_2$, ..., $A_n = tA'_n$ hoặc tồn tại số thực $t' \neq 0$ để $A'_1 = t'A_1$, $A'_2 = t'A_2$, ..., $A'_n = t'A_n$" vì mệnh đề: "tồn tại số thực $t' \neq 0$ để $A'_1 = t'A_1$, $A'_2 = t'A_2$, ..., $A'_n = t'A_n$" tương đương với mệnh đề: "tồn tại số thực $t \neq 0$ để $A_1 = tA'_1$, $A_2 = tA'_2$, ..., $A_n = tA'_n$".

Như vậy, với định nghĩa này bộ số gồm n số 0: (0, 0, ..., 0) là không tỉ lệ với bất kì bộ n số $(A_1, A_2, ..., A_n)$ nào. Nhưng ở phần sau, cũng trong mục này, lại viết: hai vectơ $\vec{u}\,(a; b; c)$ và $\vec{u'}\,(a'; b'; c')$ cùng phương khi và chỉ khi $a : b : c = a' : b' : c'$. Rõ ràng điều này không đúng trong trường hợp $\vec{u}$ hoặc $\vec{u}'$ là $\vec{0}$ (vectơ – không).

Cũng tương tự như trên, trong bài "VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ CÁC MẶT PHẲNG" trang 93 trong mục *1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng* có viết ở phần d như sau:

d) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi $\vec{u}$, $\vec{u}'$ và $\overrightarrow{M_0M'_0}$ cùng phương. Vậy:

$d \equiv d' \Leftrightarrow a : b : c = a' : b' : c'$
$= (x'_0 - x_0) : (y'_0 - y_0) : (z'_0 - z_0)$.

Nếu $M_0 \equiv M'_0$ và $a : b : c = a' : b' : c'$ thì theo định nghĩa trên d và d' không trùng nhau (!)

Để tránh những sai sót nêu trên, tôi nghĩ rằng nên bỏ điều kiện $t \neq 0$ và $t' \neq 0$ trong định nghĩa hai bộ n số tỉ lệ, khi đó bộ n số (0, 0, ..., 0) sẽ tỉ lệ với bộ n số $(A_1, A_2, ..., A_n)$ bất kì. Còn nếu vẫn giữ quan điểm bộ n số 0: (0, 0, ..., 0) không tỉ lệ với bất kì bộ n số $(A_1, A_2, ..., A_n)$ nào thì phải bỏ phần thừa của định nghĩa trên, cũng như chỉnh lại những sai sót nói trên.

Ý kiến của các bạn về vấn đề này thế nào?

TRẦN NGỌC PHƯƠNG
(GV trường THPT bán công Krông Păk, Đắk Lắk)

Câu lạc bộ

Giải đáp bài: Trò chơi Ngày khai giảng

Mỗi số từ 1 đến 31 (và các số tự nhiên khác nữa) đều có thể biểu thị được duy nhất bằng tổng các lũy thừa (với hệ số 1) của hệ cơ số 2.

Chẳng hạn
$1 = 2^0$; $2 = 2^1$; $3 = 2^0 + 2^1$;
$4 = 2^2$; $5 = 2^0 + 2^2$; $6 = 2^1 + 2^2$

Từ đó suy ra chỉ cần cộng các con số đầu của các tấm bìa có mặt con số mà bạn học sinh nêu tên thì tổ trưởng sẽ có ngày sinh của bạn đó.

Ví dụ số có ở tờ 2 và tờ 3 thì suy ra đó là ngày 2 + 4 = 6 (tờ 2 có số 2 đứng đầu, tờ 3 có số 4 đứng đầu).

Cách thứ 2 là viết các số từ 1 đến 31 theo hệ nhị phân. Ví dụ

$6 = 110_{(2)}$ (số 1 ở hàng 2, 3 → số 6 ở tấm bìa 2, 3)

$5 = 101_{(2)}$ (số 1 ở hàng 1, 3 → số 50 ở tấm bìa 1, 3)

$31 = 11111_{(2)}$ (số 1 ở 5 hàng → số 31 ở cả 5 tấm bìa).

Từ đó cũng suy ra cách làm như trên. Vậy bản chất của trò chơi này là sự duy nhất trong biểu diễn một số ở hệ cơ số 2.

Các bạn được nhận quà tặng của Câu lạc bộ:

Bắc Ninh: *Lê Thị Hương*, đội 4 thôn Đoài, Tam Giang, Yên Phong; **Hải Dương:** *Nguyễn Quang Thắng*, 12A1, THPT Phả Lại, Chí Linh; **Hưng Yên:** *Phạm Thanh Tùng*, 11 Sinh, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** *Nguyễn Hằng Giang*, 11A1, THPT Nam Lý, Lý Nhân.

Các bạn sau cũng có lời giải tương đối tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thanh Tùng*, 7A1, THCS Trưng Vương, Mê Linh; **Nghệ An:** *Lê Huyền Trang*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Ngọc Phiên*, 9B, THCS Phổ Văn, Đức Phổ.

BÍNH NAM HÀ

Giải đáp ô chữ: Thầy trò và mái trường

N H A T T U V I S U
Đ O M A Y L A M N E N
C O G I A O N H U M E H I E N
Q U A N S U P H U
H I E U H O C
K H O N G T A Y H O C B A N
T H A Y T R O G I O I
C H O Đ O
G I A N G B A I
T R A N G G I A O A N
C H A M Đ I E M
T H A N H Đ A T
N H O T R U O N G

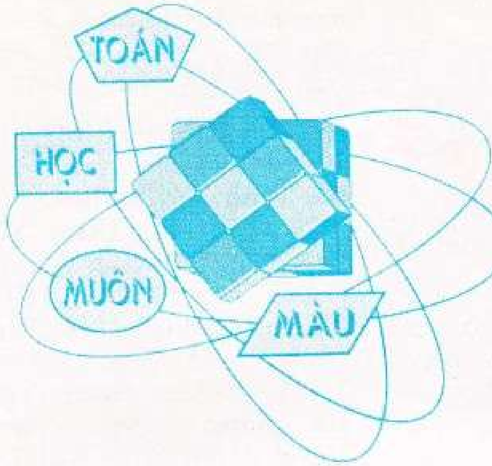
Các ô chữ cột dọc tô màu là: **TÔN SƯ TRỌNG ĐẠO.**

Nhận xét: Rất nhiều bạn gửi về giải ô chữ này. Nhiều bạn còn để thừa một ô ở dòng 7.

Các bạn sau được nhận quà của Câu lạc bộ:

Nguyễn Xuân Tiến, 12A1, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh; *Trần Phúc Đạt*, 10 chuyên, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Nguyễn Trung Kiên*, 10 Toán, THPT Nguyễn Tất Thành, *Đoàn Thị Hiệp*, GV THPT Chu Văn An, Văn Yên, **Yên Bái**; *Bùi Văn Do*, 10[6], Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**.

VŨ ĐÔ QUAN



PHÂN CHIA HÌNH VUÔNG thành các tam giác có diện tích bằng nhau

Ta dễ dàng phân chia một hình vuông thành hai (hoặc bốn) tam giác vuông cân bằng nhau khi kẻ một (hoặc hai) đường chéo của hình vuông đó. Chú ý rằng các tam giác này rời nhau và nguyên vẹn (không được ghép từ các mảnh nhỏ).

Dành cho bạn đọc

1) Hãy trình bày cách phân chia một hình vuông thành $2n$ (n nguyên dương) tam giác bằng nhau.

2) Bạn có thể phân chia hình vuông thành ba tam giác có diện tích bằng nhau không? Giải thích câu trả lời.

Giải đáp bài: KHĂN CHỮ NHẬT phủ mặt bàn tròn

(Đề đăng trên THTT số 349 tháng 7.2006)

Nếu gập khăn theo đường thẳng EF đi qua tâm Q của hình chữ nhật $ABCD$ thì hình mới được gập sẽ đối xứng qua đường thẳng QO vuông góc với EF tại điểm Q. Đặt $AB = a$(cm), $AD = 2a$(cm).

1) Người phục vụ gấp khăn $ABCD$ thành hình ngũ giác $CB'EFD$ phủ hình tròn tâm O bán kính $OQ = OM = r$ (h. 1).

Dễ thấy $\Delta COM \backsim \Delta CQN$ nên $\dfrac{CO}{OM} = \dfrac{CQ}{QN}$

$\Rightarrow (CQ - r)a = CQ.r \Rightarrow r(CQ + a) = a.CQ$.

Trong ΔCQN vuông có $CQ^2 = QN^2 + CN^2 =$

$a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow CQ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

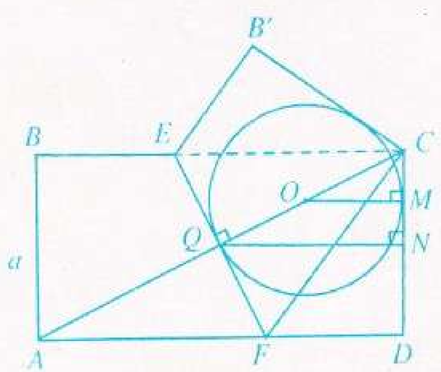
Vậy $r = \dfrac{a.a\sqrt{5}}{a\sqrt{5}+2a} = (5-2\sqrt{5})a$

$\Rightarrow 2r = (10 - 4\sqrt{5})a \approx 1{,}055a$.

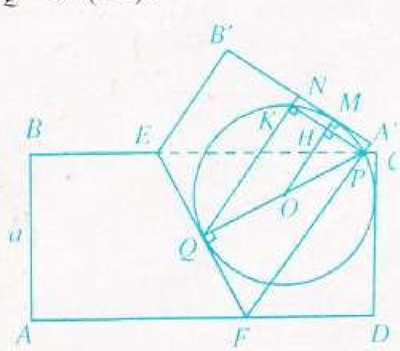
Với $a = 100$(cm) thì $2r \approx 105{,}5$ (cm)

Người phục vụ gấp khăn như thế thì phủ kín mặt bàn tròn.

2) Giả sử gấp khăn $ABCD$ thành hình $A'B'EFDCP$ với $PQ = 2r$ (h.2).



Hình 1



Hình 2

Giải đáp bài:

CÓ THIẾU SÓT KHÔNG ?

(Đề đăng trên THTT số 345, tháng 3.2006)

Các nhà "*Dọn vườn toán*" đều chỉ ra :

Phép biến đổi từ $y_0 \neq \dfrac{x_0^2+mx_0-6}{x_0-m}$ $\forall m$ (1) *đến* $y_0x_0-my_0-x_0^2-mx_0+6 \neq 0$, $\forall m$ *tương đương* là sai lầm dẫn đến đáp số cuối cùng của bài toán là không đúng! Lưu ý rằng phương trình (ẩn m): $y_0=\dfrac{f(x_0,m)}{g(x_0,m)}$ vô nghiệm ở một trong hai khả năng $g(x_0,m)=0$ hoặc $f(x_0,m)-y_0=0$ (ẩn m) vô nghiệm.

Ta có thể giải lại bài toán đã cho như sau:

Điều kiện (1) tương đương với

$y_0x_0-my_0-x_0^2-mx_0+6\neq 0$ với mọi $m\neq x_0$

hay PT ẩn m: $(-y_0-x_0)m+x_0y_0-x_0^2+6=0$ (2) vô nghiệm hoặc nó có nghiệm $m=x_0$.

Trường hợp 1. PT(2) vô nghiệm, giải như cách đã trình bày, ta tìm được những điểm cần tìm trong trường hợp này là đường thẳng $y=-x$, bỏ đi hai điểm $M(\sqrt{3};-\sqrt{3})$ và $N(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Trường hợp 2. PT(2) có nghiệm $m=x_0$. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases}-x_0-y_0\neq 0\\(-x_0-y_0)x_0+x_0y_0-x_0^2+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -y_0\\x_0=\pm\sqrt{3}.\end{cases}$$

Trường hợp này các điểm cần tìm nằm trên hai đường thẳng $x=\sqrt{3}$, bỏ điểm $M(\sqrt{3};-\sqrt{3})$ và đường thẳng $x=-\sqrt{3}$, bỏ điểm $N(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Vậy các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là các điểm nằm trên ba đường thẳng $y=-x$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$, bỏ đi hai điểm $M(\sqrt{3};-\sqrt{3})$ và $N(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Những bạn sau có đáp án tốt hơn cả: *Nguyễn Văn Huyên*, 11A$_0$, THPT Yên Phong I, Yên Phong, *Lê Tiến Thành*, 11A1, THPT Quế Võ I, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Vũ Nam Phong*, 11E1, THPT Cẩm Phả, TX. Cẩm Phả, **Quảng Ninh**; *Chu Quốc Hùng*, trường THPT Dân lập Nguyễn Trãi, TP Vinh, **Nghệ An**; *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành, TX. Bà Rịa, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

NGỌC HIỂN

KHĂN CHỮ NHẬT...

Kẻ $OM\perp A'B'$ tại M. Đặt $HM=KN=x$.

Trong ΔQPK vuông có $PQ^2=PK^2+QK^2$ hay

$$4r^2=\frac{a^2}{4}+(a-x)^2 \qquad (*)$$

Mặt khác có $OM\geq r$.

Vì $OM=OH+HM$ nên

$$\frac{a-x}{2}+x\geq r\Rightarrow a+x\geq 2r \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) dẫn đến $x\geq\dfrac{a}{16}$.

Theo (*) để r lớn nhất thì x phải nhỏ nhất, lúc đó $x=\dfrac{a}{16}$.

Thay vào (*) được $2r=\dfrac{17}{16}a\approx 1{,}0625a$.

Lấy $a=100$ (cm) thì $2r\approx 106{,}25$ (cm). □

Bạn *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX. Nghĩa Lộ, **Yên Bái** giải tốt bài này.

PHI PHI

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 353 (11-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

LỊCH CHÍNH TRỊ - GIÁO DỤC 2007

Sáu loại lịch:

Lịch tiểu (7.5x10.5 cm)
Lịch trung Pơluya (10.5x15 cm)
Lịch trung màu (10.5x14.5 cm)
Lịch đại (14.5x20.5 cm)
Lịch siêu đại (24x34 cm)
Lịch cực đại (28x38 cm)

NXB Chính trị Quốc gia, NXB Giáo dục, NXB Bách khoa Hà Nội, NXB Bưu điện, NXB Công an nhân dân, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, NXB Đồng Nai, NXB Hội Nhà văn, NXB Khoa học xã hội, NXB Kim đồng, NXB Thế giới, NXB Trẻ, NXB Tư pháp, NXB Y học phối hợp xuất bản, phát hành lịch Blốc 2007 với các thông tin ghi trên lịch thiết thực, bổ ích; hình thức trình bày mang tính truyền thống, hấp dẫn.

Nội dung ghi trên lịch

1. Số liệu lịch chính xác theo bảng lịch chính thức của Ban lịch nhà nước

* Lịch dương (ngày, thứ trong tuần, tháng, năm ghi bằng tiếng Việt và Tiếng Anh)

* Lịch âm dương (giờ, ngày, tháng, năm, tiết khí tính theo Can Chi ghi bằng tiếng Việt và Tiếng Trung Quốc)

* Lịch tuần lễ (có trong lịch siêu đại và cực đại)

2. Thông tin khoa học bổ ích phục vụ sản xuất nông nghiệp và đời sống

* Lịch khí tượng * Lịch canh nông Thông tin về thời vụ và kĩ thuật canh tác cây trồng, chăm sóc vật nuôi	có trong lịch Tiểu, Trung, Đại

* Giải thích về 24 Tiết khí

* Lí giải tại sao Việt Nam đón Tết Đinh Hợi trước Trung Quốc một ngày

3. Thông tin về lịch sử, văn hoá xã hội, giáo dục trong nước và thế giới

* Các sự kiện, tri thức lịch sử, chính trị, xã hội

* Ngày truyền thống các ngành và các tổ chức

* Kỉ niệm chẵn năm ngày sinh, ngày mất các danh nhân, các nhà văn hoá, các nhà giáo dục trong và ngoài nước

* Lễ hội dân gian truyền thống

4. Nội dung thơ ca, tục ngữ, danh ngôn, câu đối tri thức văn học, văn hoá Việt Nam và nước ngoài được tuyển chọn theo chủ đề: Tinh hoa xử thế.

5. Lịch cực đại có 365 câu đối về truyền thống văn hoá, giáo dục Việt Nam.

Tổng đại lí phát hành

• Trung tâm phát hành tại Hà Nội:
NXB Giáo dục tại TP. Hà Nội,
187B Giảng Võ.
ĐT: 04. 8562496. Fax: 04. 8562493

• Trung tâm phát hành tại Đà Nẵng:
NXB Giáo dục tại TP.Đà Nẵng,
15 Nguyễn Chí Thanh.
ĐT: 0511. 827373. Fax: 0511. 894504

• Trung tâm phát hành tại TP. Hồ Chí Minh:
NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh,
231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
ĐT: 08. 8358423. Fax: 08. 8390727

Lịch chính trị giáo dục có bán tại:

Các đại lí, cửa hàng của các công ti Sách - TBTH, công ti Văn hoá phẩm của các tỉnh, thành phố;
Các đại lí, cửa hàng bán lẻ lịch trên toàn quốc

TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG

20 NĂM xây dựng và trưởng thành

Hiệu trưởng
ThS. Ngô Văn Phú

Trường THPT năng khiếu Trần Phú được thành lập vào ngày 21.5.1986 với mục tiêu là đào tạo bồi dưỡng học sinh giỏi phục vụ chiến lược đào tạo bồi dưỡng nhân tài cho thành phố và đất nước. Cuộc hành trình 20 năm qua của nhà trường gắn liền với biết bao thăng trầm, biết bao khó khăn thử thách, nhiều thế hệ thầy và trò đã góp công xây dựng nên bề dày truyền thống vẻ vang của nhà trường. Chất lượng giáo dục của nhà trường được khẳng định là đơn vị dẫn đầu thành phố, là tốp dẫn đầu các trường Chuyên toàn quốc, là trường có tỉ lệ tốt nghiệp loại Giỏi và thi đỗ đại học cao nhất thành phố và thuộc tốp dẫn đầu toàn quốc. Tỉ lệ học sinh thi đỗ đại học nhiều năm gần đây đạt 95% (có năm đạt 97,3%) trong đó có nhiều Thủ khoa (năm 2006 có 13 Thủ khoa). Hầu hết số học sinh này được học tại các trường đại học uy tín trong và ngoài nước và sau này trở thành các nhà khoa học, các nhà quản lí giỏi. Cùng với thành tích về giáo dục toàn diện, trường THPT Năng khiếu Trần Phú đặc biệt đạt thành tích cao về lĩnh vực bồi dưỡng, đào tạo học sinh giỏi Quốc gia, Quốc tế (năm 2006 có 67 giải Quốc gia, 3 giải Quốc tế). Kể từ khi thành lập đến nay, trường có tất cả 802 giải Quốc gia (trong đó có 29 giải Nhất, 225 giải Nhì), có 33 học sinh đoạt giải Quốc tế và Khu vực (Đông Nam Á (SEAMO), châu Á Thái Bình Dương (APMO)), trong đó có 6 Huy chương Vàng (HCV), 11 Huy chương Bạc (HCB), 11 Huy chương Đồng (HCĐ), 3 Bằng khen (BK) và 2 Cúp Vàng Quốc tế. Đó là: *Trần Trọng Thắng* (HCĐ Toán 1989), *Bùi Phùng Quý* (BK Lí 1990), *Nguyễn Xuân Long* (HCĐ Toán 1992), *Lê Hải Dương* (BK Lí 1993), *Nguyễn Hồng Vân* (HCV Nga 1994), *Ngô Đức Duy* (HCV Toán 1996), *Tô Trần Tùng* (HCB Toán 1997), *Đặng Anh Tuấn* (HCV SEAMO, HCB APMO- 1998), *Đoàn Thái Sơn* (HCĐ APMO- 1999), *Nguyễn Hải Bình* (HCV Hoá 2000), *Nguyễn Phương Ngọc* (HCB Tin 2000, HCB Tin 2001), *Nguyễn Anh Quân* (HCĐ APMO-2000, HCB IMO-2001), *Phạm Minh Đức* (HCB APMO-2001), *Ngô Thành Sơn* (BK Tin 2002), *Nguyễn Thành Nam* (HCĐ APMO-2002), *Cao Thị Phương Anh* (HCĐ Hoá 2002, HCV Hoá 2003), *Nguyễn Minh Trường* (HCV Toán 2004), *Nguyễn Duy Khương* (HCĐ Tin 2004), *Trần Trọng Đan* (HCB Toán 2005), *Nguyễn Đức Dũng* (HCĐ Tin 2005), *Khúc Anh Tuấn* (HCB Tin 2006), *Trần Nam Trung* (HCB Hoá 2006), *Phạm Tuấn Hiệp* (HCĐ Lí 2006)... Nhà trường không chỉ tập trung vào đào tạo văn hoá mà còn tổ chức các hoạt động xã hội, TDTT đạt chất lượng cao. Tiêu biểu như em *Đỗ Quang Tùng* hai lần đoạt HCV cờ vua trẻ các nước ASEAN, em *Phạm Bảo Trung* đoạt Cúp vàng thi sáng tạo dành cho thanh thiếu niên Quốc tế tại Nhật Bản, em *Phạm Mai Phương* đoạt danh hiệu Hoa hậu Việt Nam 2002, ...

Với những thành tích tự hào ấy, liên tục nhiều năm liền trường được Bộ Giáo dục và Đào tạo đánh giá là đơn vị Tiên tiến xuất sắc, được Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba năm 1996, Huân chương Lao động hạng Nhì năm 2001, nhiều lần được các đồng chí lãnh đạo Đảng, Nhà nước đến thăm. Hội đồng giáo dục nhà trường có 4 giáo viên được phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú, 1 giải thưởng Lê Văn Thiêm, nhiều nhà giáo được tặng Huân chương Lao động, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Đặc biệt, năm 2004 nhà trường được Chủ tịch nước phong tặng danh hiệu cao quý **Anh hùng lao động** trong thời kì đổi mới.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT55M6
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ti CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2006
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng