

ThS. NGUYỄN VĂN DŨNG

MỚI



PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN **SỐ PHÚC** VÀ ỨNG DỤNG

- ✓ Dành cho thí sinh lớp 12 ôn tập và nâng cao kỹ năng làm bài.
- ✓ Biên soạn theo nội dung và định hướng ra đề thi của Bộ GD&ĐT.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. NGUYỄN VĂN DŨNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ PHÚC VÀ ỨNG DỤNG

- ✓ Dành cho thí sinh lớp 12 ôn tập và nâng cao kỹ năng làm bài.
- ✓ Biên soạn theo nội dung và định hướng ra đề thi của Bộ GD&ĐT.



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;

Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897

Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giam đốc PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập nội dung

BÍCH HANH

downloadsachmienphi.com

Sửa bài

Download Sách Hay Đọc Online

DIỀN NGUYỄN

Chế bản

CÔNG TY ANPHA

Trình bày bìa

SƠN KỲ

Đối tác liên kết xuất bản

CÔNG TY ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

Mã số: 1L-376H2010

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ty TNHH In Bao bì Hưng Phú

Số xuất bản: 626-2010/CXB/09-101DHQGHN, ngày 25/06/2010

Quyết định xuất bản số: 376LK-TN/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2010.

LỜI NÓI ĐẦU

Khởi đầu từ nhu cầu giải quyết các phương trình đại số, số phức đã bắt đầu xuất hiện từ thế kỷ thứ XVI và phát triển mạnh đến nay. Ứng dụng của số phức không chỉ ở đại số nói riêng hay toán học nói chung, mà còn trong nhiều ngành khoa học khác.

Số phức được đưa vào giảng dạy ở bậc phổ thông của nhiều nước trên thế giới, nhưng lại là nội dung mới với học sinh trung học ở Việt Nam, và thực sự đã gây không ít khó khăn bởi nguồn tài liệu tham khảo hạn chế, hoặc nếu có thì cũng chưa đáp ứng được với mong muốn. Vì thế tôi biên soạn cuốn sách "Phương pháp giải toán số phức và ứng dụng" với ba phần:

Phần thứ nhất. Những vấn đề cơ bản về số phức.

Phần thứ hai. Một số ứng dụng của số phức.

Phần thứ ba. Các bài toán chọn lọc.

Với 223 ví dụ và bài tập được trình bày từ cơ bản đến nâng cao; từ nội dung bám sát sách giáo khoa, ôn luyện thi tốt nghiệp, cao đẳng và đại học, đến những vấn đề khó phù hợp với các kỳ thi học sinh giỏi ... Tác giả tin rằng, các đối tượng học sinh đều có thể tìm thấy những điều thú vị trong cuốn sách này.

Cuốn sách được hoàn thành với sự giúp đỡ nhiệt tình của các biên tập viên (...), sự đóng góp ý của gia đình và những người bạn. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Mặc dù rất tâm huyết biên soạn cuốn sách một cách công phu, kỹ lưỡng nhưng không thể tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ:

- Trung tâm Sách giáo dục Anpha
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q5, TP. HCM
- Công ty Sách - thiết bị giáo dục Anpha
50 Nguyễn Văn Săng, Q. Tân Phú, TP. HCM
- ĐT: 08.62676463, 38547464
- Email: alphabookcenter@yahoo.com

Trân trọng cảm ơn !

TÁC GIẢ

ABC

Phần thứ nhất

NHỮNG VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ SỐ PHỨC

Nội dung được trình bày theo sát sách giáo khoa, bài tập được phân dạng cụ thể phong phú với 45 ví dụ và 30 bài tập tự luyện có gợi ý và đáp số.

1 - DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

1.1. Định nghĩa

Số phức là số có dạng $z = x + yi$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$ và i là đơn vị ảo ($i^2 + 1 = 0$), x gọi là phần thực của số phức z (ký hiệu là $\operatorname{Re} z$) và y gọi là phần ảo của số phức z (ký hiệu là $\operatorname{Im} z$).

Nếu $y = 0$ thì số phức $z = x + 0i$ là số thực.

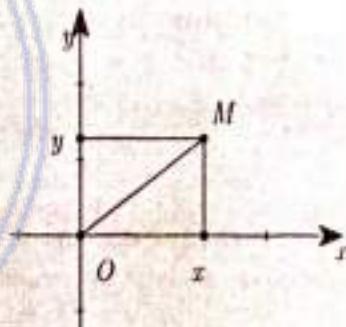
Nếu $x = 0$ thì số phức $z = 0 + yi$ là số thuần ảo.

Ha số phức $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ bằng nhau khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

1.2. Biểu diễn hình học của số phức

Xem mặt phẳng tọa độ Oxy , mỗi số phức $z = x + yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x, y)$.

Như vậy, số thực được biểu diễn trên trục Ox , nên Ox gọi là trục thực; số ảo được biểu diễn trên trục Oy , nên Oy gọi là trục ảo. Mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn số phức gọi là mặt phẳng phức.



Hình 1.1

1.3. Số phức liên hợp và modun của số phức

a) Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức $z = x + yi$ là $\bar{z} = x - yi$.

Vì $\bar{\bar{z}} = z$ nên z và \bar{z} là hai số phức liên hợp của nhau (các điểm biểu diễn của chúng đối xứng qua trục thực Ox).

Số phức z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$, là số ảo khi và chỉ khi $z = -\bar{z}$.

b) Modun của số phức

Modun của số phức $z = x + yi$ là số thực không âm $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rõ ràng $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z \bar{z}$.

1.4. Các phép toán trên tập số phức

Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$.

a) Phép cộng số phức

Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ là số phức

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Số đối của số phức $z = x + yi$ là $-z = -x - yi$.

b) Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ là số phức

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

c) Phép nhân số phức

Tích của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ là số phức

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

d) Phép chia số phức

Số phức nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$.

downloadsachmienphi.com

Với $z = x + yi$ ($x^2 + y^2 \neq 0$) thì $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$.

Thương của hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$ ($z_2 \neq 0$) là số phức

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Các ví dụ về tính toán và chứng minh

Sử dụng các phép tính số phức, điều kiện hai số phức bằng nhau ...

Chú ý:

+ Với mọi số nguyên dương n thì

$$i^{4n} = (i^2)^{2n} = 1; i^{4n+1} = (i^2)^{2n} \cdot i = i$$

$$i^{4n+2} = (i^2)^{2n+1} = -1; i^{4n+3} = (i^2)^{2n+1} \cdot i = -i.$$

+ Với mọi số phức z thì $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Ví dụ 1.1. Xác định phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau

a) $5 + 2i + 9(2 + i) - i$

d) $(1 - i)^{14}$

b) $(3 + 2i)(3 - 2i) + 5(1 + 2i) + 2i^5$

e) $(3 - i)^{16}(1 + 2i)^{16}$

c) $(1 + i)^8$

f) $\frac{(2 - 3i)(3 + i)^2}{6 + 17i}$

Lời giải.

a) Ta có $z = 5 + 2i + 9(2 + i) - i = 5 + 2i + 18 + 9i - i = 23 + 10i$ nên số phức z có phần thực là $\operatorname{Re} z = 23$ và phần ảo $\operatorname{Im} z = 10$.

b) Vì $i^5 = i^4 \cdot i = (i^2)^2 \cdot i = i$ và $(3 + 2i)(3 - 2i) = 9 - 4i^2 = 13$ nên ta có $z = (3 + 2i)(3 - 2i) + 5(1 + 2i) + 2i^5 = 13 + 5 + 10i + 2i = 18 + 12i$.

Do đó số phức z có phần thực là $\operatorname{Re} z = 18$ và phần ảo $\operatorname{Im} z = 12$.

c) Ta có $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ nên $(1 + i)^8 = (2i)^4 = 16(i^2)^2 = 16$. Vậy số phức $z = (1 + i)^8$ có $\operatorname{Re} z = 16$, $\operatorname{Im} z = 0$.

d) Vì $(1 - i)^2 = -2i$ nên $(1 - i)^{14} = (-2i)^7 = -128(i^2)^3 \cdot i = 128i$.

Vậy số phức $z = (1 - i)^{14}$ có $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 128$.

e) Vì $(3 - i)(1 + 2i) = 5(1 + i)$ nên

$$z = (3 - i)^{16}(1 + 2i)^{16} = 5^{16}(1 + i)^{16} = 5^{16}(2i)^8 = 5^{16}2^8(i^2)^4 = 5^{16}2^8.$$

Vậy $\operatorname{Re} z = 5^{16}2^8$, $\operatorname{Im} z = 0$.

f) Do $(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$ nên

$$z = \frac{(2 - 3i)(3 + i)^2}{6 + 17i} = \frac{(2 - 3i)(8 + 6i)}{6 + 17i} = \frac{34 - 12i}{6 + 17i} = \frac{-2i(17i + 6)}{6 + 17i} = -2i.$$

Vậy số phức z có $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = -2$.

Ví dụ 1.2. Tìm các số thực x, y thoả mãn

a) $x(2 - 3i)^2 + (2y + 1)(1 + i)^3 = -5(7 + 10i)$

b) $(2x + i)(3 + i)^2 - (x - 2y)(i - 2)^3 = 18 + 76i$

Lời giải.

a) Vì $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$; $(1 + i)^3 = -2 + 2i$ nên ta có

$$x(-5 - 12i) + (2y + 1)(-2 + 2i) = -35 - 50i$$

$$\Leftrightarrow -5x - 4y - 2 - (12x - 4y - 2)i = -35 - 50i \quad (*)$$

Các số thực x, y thoả mãn (*) khi và chỉ khi x, y là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} -5x - 4y - 2 = -35 \\ 12x - 4y - 2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 12x - 4y = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy các số thực cần tìm là $(x; y) = (5; 2)$.

b) Ta có $(3+i)^2 = 8+6i$; $(i-2)^3 = -2+11i$ suy ra

$$\begin{aligned} & (2x+i)(3+i)^2 - (x-2y)(i-2)^3 = 18+76i \\ \Leftrightarrow & (2x+i)(8+6i) - (x-2y)(-2+11i) = 18+76i \\ \Leftrightarrow & 18x - 4y - 6 + (x+22y+8)i = 18+76i \end{aligned}$$

Vì thế $\begin{cases} 18x - 4y - 6 = 18 \\ x + 22y + 8 = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x - 4y = 24 \\ x + 22y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy giá trị cần tìm là $(x; y) = (2; 3)$.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng các số phức sau là số thực

a) $z = \frac{(1+3i)^3(4-3i)^2}{(2+i)^2(3+80i+i^3)}$

b) $z = \frac{(3+\sqrt{2}i)^2(\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{2}i)^2} - \frac{19}{3i}$

Lời giải.

a) Vì $i^3 = i \cdot i^2 = -i$ nên ta có

$$(1+3i)^3 = 1+9i+27i^2+27i^3 = 1+9i-27-27i = -18+18i$$

$$3+80i+i^3 = 3+79i; (4-3i)^2 = 7-24i; (2+i)^2 = 3+4i.$$

$$\text{Do đó } z = \frac{(1+3i)^3(4-3i)^2}{(2+i)^2(3+80i+i^3)} = \frac{(-26-18i)(7-24i)}{(3+4i)(3+79i)} = \frac{-614+498i}{-307+249i} = 2.$$

Vậy $z = 2$ nên đó là số thực.

b) Ta có $(3+\sqrt{2}i)^2 = 7+6\sqrt{2}i$; $(1+\sqrt{2}i)^2 = -1+2\sqrt{2}i$. Suy ra

$$\begin{aligned} z &= \frac{(3+\sqrt{2}i)^2(\sqrt{2}-i)}{(1+\sqrt{2}i)^2} - \frac{19}{3i} = \frac{(7+6\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-i)}{-1+2\sqrt{2}i} - \frac{19i}{3i^2} = \frac{13\sqrt{2}+5i}{-1+2\sqrt{2}i} + \frac{19i}{3} \\ &= \frac{(13\sqrt{2}+5i)(1+2\sqrt{2}i)}{(-1+2\sqrt{2}i)(1+2\sqrt{2}i)} + \frac{19i}{3} = \frac{3\sqrt{2}+57i}{-9} + \frac{19i}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Do đó số phức đã cho là số thực.

Ví dụ 1.4. Cho số phức $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Tính $\bar{z}; \frac{1}{z}; z^3; (\bar{z})^2; z^2 - z + 1; (1-z^6)^{2010}$.

Lời giải

Ta có $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ nên $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\text{Vì } |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ nên } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$z^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}i^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8}i^3 = -1.$$

$$(\bar{z})^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ta có $z^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ nên

$$z^2 - z + 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0.$$

Mà $1 + z^3 = (1 + z)(1 - z + z^2) = 0$ nên $1 - z^6 = (1 - z^3)(1 + z^3) = 0$.

Do đó ta có $(1 - z^6)^{2010} = 0$.

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (với $z_2 \neq 0$)

d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$

e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Lời giải

Giả sử $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ với $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Ta có $\bar{z}_1 = x_1 - y_1i$ và $\bar{z}_2 = x_2 - y_2i$ nên

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i.$$

Mà $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$.

Vậy $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

b) Ta có $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i$ và

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

A B C

Từ đó suy ra $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

c) Vì $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$ là số thực, nên ta có $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 \bar{z}_2}}{\overline{z_2 \bar{z}_2}} = \frac{\bar{z}_1 \bar{\bar{z}}_2}{\bar{z}_2 \bar{\bar{z}}_2} = \frac{\bar{z}_1 z_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 z_2}{z_2 z_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

d) *Cách 1:* Ta có $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ và $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

$$\text{Suy ra } |z_1||z_2| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \quad (1)$$

Mặt khác $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$, do đó

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Vì $|z|^2 = z\bar{z}$, nên $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$.

Từ đó ta có $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Nhận xét. Sử dụng khéo léo phép biến đổi số phức liên hợp cho lời giải ngắn gọn.

e) Vì $|\bar{z}_2| = |z_2|$ nên $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 z_2} \right| = \left| \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \right| = \frac{|z_1 \bar{z}_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| |\bar{z}_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1| |z_2|}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Ví dụ 1.6. Cho hai số phức z_1 và z_2 . Chứng minh rằng

$$\text{a)} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$\text{b)} |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= 2(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} |1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - \bar{z}_1 z_2)(\overline{1 - \bar{z}_1 z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (1 - \bar{z}_1 z_2)(1 - z_1 \bar{z}_2) - (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= 1 + |z_1|^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

ABC
10

Mặt khác

$$(1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 = 1 + 2|z_1 z_2| + |z_1 z_2|^2 - |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| - |z_2|^2.$$

Vì $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ nên

$$(1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 = 1 + |z_1|^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.7. Cho các số phức z, z_1, z_2 . Chứng minh rằng

a) $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$

b) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

c) $\|z_1\| - \|z_2\| \leq |z_1 \pm z_2| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

Lời giải

a) Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên từ bất đẳng thức đúng $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ suy ra $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$. Tương tự ta cũng có $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$.

b) Ta có $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \Leftrightarrow 0 \leq |xy|$ (đúng).

c) Chứng minh $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Ta có: $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) =$

$$z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$$

Mà $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$ nên:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Do đó $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (*).

Theo (*) ta có $|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

Tương tự $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2| \Rightarrow \|z_1\| - \|z_2\| \leq |z_1 + z_2|$ (**).

Từ (*) và (**) thì $\|z_1\| - \|z_2\| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Thay z_2 bởi $-z_2$ và chú ý $|-z_2| = |z_2|$ ta được $\|z_1\| - \|z_2\| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Vậy $\|z_1\| - \|z_2\| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

ABC

+) Dấu đẳng thức của bất đẳng thức $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ xảy ra khi và chỉ khi $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1||z_2|$, hay $z_2 = 0$ hoặc $z_1 = tz_2$ với t là số thực không âm.

Chú ý. Bất đẳng thức trên còn gọi là bất đẳng thức tam giác, được ứng dụng trong nhiều bài toán khác.

Ta cũng có thể chứng minh được dạng tổng quát:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n|$$

Ví dụ 1.8. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Chứng minh rằng

a) $1 \leq \left| \frac{3z + 2i}{z} \right| \leq 5$

b) $1 \leq |1 + z^3| + |1 + z + z^2| \leq 5$

Lời giải

a) Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$1 = |3| - \left| \frac{2i}{z} \right| \leq \left| \frac{3z + 2i}{z} \right| = \left| 3 + \frac{2i}{z} \right| \leq |3| + \left| \frac{2i}{z} \right| = 5$$

b) Vì $|z| = 1$ nên $|z^n| = |z|^n = 1, n \in \mathbb{Z}^*$. Ta có

$$+) |1 + z^3| + |1 + z + z^2| \leq 1 + |z^3| + 1 + |z| + |z^2| = 5$$

$$+) \text{Nếu } z = 1 \text{ thì } |1 + z^3| + |1 + z + z^2| = 5 \geq 1 \text{ (đúng).}$$

Nếu $z \neq 1$ thì

$$\begin{aligned} |1 + z^3| + |1 + z + z^2| &= |1 + z^3| + \frac{|1 - z^3|}{|1 - z|} \geq |1 + z^3| + \frac{|1 - z^3|}{2} \\ &\geq \frac{|1 + z^3|}{2} + \frac{|1 - z^3|}{2} \geq \frac{1}{2} |1 + z^3 + 1 - z^3| = 1. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.9. Cho các số phức x, y, z . Chứng minh rằng

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|$$

Lời giải

Đặt $m = x + y - z, n = x - y + z, p = -x + y + z$ ta có

$$x = \frac{m+n}{2}, y = \frac{p+m}{2}, z = \frac{n+p}{2}$$

Theo bất đẳng thức tam giác

$$|x| = \left| \frac{m+n}{2} \right| \leq \frac{|m| + |n|}{2}, |y| \leq \frac{|p| + |m|}{2}, |z| \leq \frac{|n| + |p|}{2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều suy ra

$$|x| + |y| + |z| \leq |m| + |n| + |p|$$

$$\text{Hay } |x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|.$$

Ví dụ 1.10. Cho hai số phức z_1 và z_2 đều có modun bằng 1. Chứng minh

rằng số phức $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ là số thực với $z_1 z_2 \neq -1$.

Lời giải

Sử dụng điều kiện số phức z là số thực khi và chỉ khi $\bar{z} = z$.

Ta có $z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$. Tương tự $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$.

$$\text{Do đó } \bar{z} = \left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \right) = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = z.$$

Vậy $\bar{z} = z$ nên $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ là số thực.

Ví dụ 1.11. Cho z là một số phức khác 0 và 1. Chứng minh rằng với mọi số

nguyên dương n , ta có $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

Lời giải

Đặt $T = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} + z^n$.

Ta có $Tz = z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^n + z^{n+1}$

Trừ vế với vế ta được

$$T - Tz = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n - z - z^2 - z^3 - \dots - z^n - z^{n+1} = 1 - z^{n+1} \text{ Vậy}$$

$$T(1 - z) = 1 - z^{n+1} \Rightarrow T = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Nhận xét: Công thức $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ là công thức

tính tổng một cấp số nhân với số phức.

Dạng 2: Tìm số phức z thoả mãn điều kiện cho trước

Sử dụng các phép biến đổi trực tiếp, hoặc đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và chú ý rằng $\bar{z} = x - yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$... để tìm số phức z .

Ví dụ 1.12. Tìm số phức z thoả mãn

a) $\frac{2i-1}{i+2} z = \frac{3i+1}{i-3}$

b) $\frac{z}{(2i+1)^2} = \frac{5i-2}{2i^3+i-1}$

c) $2z - 3i\bar{z} = 4 - 11i$

d) $2z + (\bar{z})^2 = 0$

Lời giải

a) Ta có $z = \frac{3i+1}{i-3} \cdot \frac{2i-1}{i+2} = \frac{3i+1}{i-3} \cdot \frac{i+2}{2i-1} = \frac{7i-1}{1-7i} = -1$.

b) Vì $(2i+1)^2 = -3+4i$ và $i^3 = i \cdot i^2 = -i$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{z}{(2i+1)^2} = \frac{5i-2}{2i^3+i-1} &\Leftrightarrow \frac{z}{-3+4i} = \frac{5i-2}{-i-1} \Leftrightarrow z = \frac{(5i-2)(4i-3)}{-i-1} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-14-23i}{-i-1} \Leftrightarrow z = \frac{(14+23i)(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{37}{2} + \frac{9}{2}i. \end{aligned}$$

c) Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $\bar{z} = x - yi$ nên

$$\begin{aligned} 2z - 3i\bar{z} = 4 - 11i &\Leftrightarrow 2(x+yi) - 3i(x-yi) = 4 - 11i \\ &\Leftrightarrow 2x - 3y + (2y - 3x)i = 4 - 11i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2y - 3x = 11 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = 2. \end{aligned}$$

Vậy số phức cần tìm là $z = 5 + 2i$.d) Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $\bar{z} = x - yi \Rightarrow (\bar{z})^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$.

Nên $2z + (\bar{z})^2 = 0 \Leftrightarrow 2(x+yi) + x^2 - y^2 - 2xyi = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + 2y(1-x)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0 & (1) \\ 2y(1-x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có $y = 0$ hoặc $x = 1$.+ Nếu $y = 0$ thì từ (1) ta có $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0; x = -2$.+ Nếu $x = 1$ thì từ (1) ta có $-y^2 + 3 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}; y = -\sqrt{3}$.Vậy các số phức cần tìm là $z = 0; z = -2; z = 1 + \sqrt{3}i; z = 1 - \sqrt{3}i$.**Ví dụ 1.13.** Tìm số phức z biết

a) $|z| = 5$ và $z = \bar{z}$

b) $|z| = 4$ và $z = -\bar{z}$

c) $|z| = 6$ và phần thực của số phức z bằng ba lần phần ảo của z .

Lời giải

Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$ suy ra $\bar{z} = x - yi$

- a) Ta có $z = \bar{z}$ nên $x + yi = x - yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Mà $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2} = |x| = 5 \Rightarrow x = 5; x = -5$.

Vậy số phức cần tìm là $z = 5; z = -5$.

- b) Theo bài ra, $z = -\bar{z}$ nên $x + yi = -x + yi \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2} = |y| = 4 \Rightarrow y = 4; y = -4$.

Vậy $z = 4i; z = -4i$.

- c) Phần thực của số phức z là x và phần ảo là y nên $x = 3y$. Do đó ta có

$$\begin{cases} x = 3y \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y)^2 + y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = \frac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{10}}{5}, x = \frac{9\sqrt{10}}{5} \\ y = -\frac{3\sqrt{10}}{5}, x = -\frac{9\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

Vậy ta có $z = \frac{9\sqrt{10}}{5} + \frac{3\sqrt{10}}{5}i; z = -\frac{9\sqrt{10}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{5}i$.

Ví dụ 1.14. Tìm số phức z thoả mãn hệ

$$\left| \frac{z+2}{z+2i} \right| = 1$$

$$\left| (z+1)(\bar{z}-i) \right| = 5$$

Lời giải

Sử dụng kết quả câu d, e của ví dụ 1.5.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } \left| \frac{z+2}{z+2i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z+2|}{|z+2i|} = 1 \Leftrightarrow |z+2| = |z+2i|$$

$$\Leftrightarrow |x+2+yi| = |x+(y+2)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Lại có } |(z+1)(\bar{z}-i)| = 5 \Leftrightarrow |z+1||\bar{z}-i| = 5 \Leftrightarrow |x+1+yi||x-yi-i| = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 5.$$

Mà $x = y$ nên $x+1 = y+1$, do đó ta có $(x+1)^2 + x^2 = 5 \Rightarrow x = -2; x = 1$.

Vậy $z = -2 - 2i; z = 1 + i$.

Ví dụ 1.15. Tìm số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thoả mãn $\bar{z}^3 = -117 - 44i$

Lời giải

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{Z}$).

Ta có $\bar{z}^3 = (x - yi)^3 = x^3 - 3x^2yi + 3xy^2i^2 - y^3i^3 = x^3 - 3xy^2 - (3x^2y - y^3)i$.

Nên $\bar{z}^3 = -117 - 44i$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -117 \\ 3x^2y - y^3 = 44 \end{cases}$.

Đây là hệ phương trình đẳng cấp bậc ba.

Từ hệ suy ra $44(x^3 - 3xy^2) + 117(3x^2y - y^3) = 0$

hay $44x^3 + 351x^2y - 132xy^2 - 117y^3 = 0 \Leftrightarrow (4x - 3y)(11x^2 + 96xy + 39y^2) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4}y; x = \frac{-48 + 25\sqrt{3}}{11}y; x = \frac{-48 - 25\sqrt{3}}{11}y.$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x = \frac{3}{4}y$, suy ra

$$x^3 - 3xy^2 = -117 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}y\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{4}y^3 = -117 \Rightarrow y^3 = 64 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy số phức cần tìm là $z = 3 + 4i$.

Dạng 3: Biểu diễn số phức và tìm tập hợp điểm

- + Véc tơ $\vec{u}(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$.
- + Điểm $M(x; y)$ biểu diễn $z = x + yi$ tức là \overrightarrow{OM} biểu diễn số phức đó.
- + Tìm tập hợp điểm thường dùng kiến thức hình học giải tích phẳng.
- + Phương pháp cơ bản là dựa vào phép đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ví dụ 1.16. Trong mặt phẳng phức, trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào, biết A, B, C theo thứ tự biểu diễn các số phức z_A, z_B, z_C .

Lời giải

Gọi O là gốc toạ độ. Ta có $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ biểu diễn số phức z_A, z_B, z_C .

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

nên điểm G biểu diễn số phức $\frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$.

Nhận xét: Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi

$$z_A + z_B + z_C = z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}.$$

Ví dụ 1.17. Cho các véc tơ \vec{u} và \vec{v} biểu diễn các số phức z và w .

a) Chứng minh rằng $\vec{u}\vec{v} = \frac{1}{2}(\bar{z}w + z\bar{w})$ và $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$) $\Leftrightarrow \bar{z}w - \bar{w}z = 0$.

b) Tìm điều kiện của \vec{u} và \vec{v} để $\frac{\vec{u}}{w}$ với $w \neq 0$ là số ảo? số thực?

Lời giải

Đặt $z = a + bi, w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), suy ra $\vec{u}(a; b), \vec{v}(c; d)$.

a) Ta có $\vec{u}\vec{v} = ac + bd$ và $\bar{z} = a - bi, \bar{w} = c - di$, nên

$$\bar{z}w + z\bar{w} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) = 2(ac + bd) = 2\vec{u}\vec{v}.$$

Ta có $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$) $\Leftrightarrow ad - bc = 0$ và

$$\bar{z}w - \bar{w}z = 0 \Leftrightarrow (a - bi)(c + di) - (a + bi)(c - di) = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0.$$

Hay: $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$) $\Leftrightarrow \bar{z}w - \bar{w}z = 0$

b) Ta có $\frac{z}{w}$ là số ảo khi và chỉ khi $\frac{z}{w} = -\left(\frac{\bar{z}}{w}\right) \Leftrightarrow \frac{z}{w} = -\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Leftrightarrow z\bar{w} + w\bar{z} = 0$ nên khi đó $\vec{u} \perp \vec{v}$.

+) $\frac{z}{w}$ là số thực khi và chỉ khi $\frac{z}{w} = \left(\frac{\bar{z}}{w}\right) \Leftrightarrow \frac{z}{w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Leftrightarrow z\bar{w} - w\bar{z} = 0$ hay khi đó hai véc tơ \vec{u} & \vec{v} cùng phương ($\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$)).

Ví dụ 1.18. Trong mặt phẳng phức cho ba điểm A_1, A_2, A_3 biểu diễn các số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 . Chứng minh rằng A_1, A_2, A_3 nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$.

Lời giải.

Ba điểm A_1, A_2, A_3 thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{A_1A_3} = k\overrightarrow{A_1A_2}$. Mà $\overrightarrow{A_1A_3}$ biểu diễn số phức $z_3 - z_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ biểu diễn số phức $z_2 - z_1$, nên theo **ví dụ 1.17** ta có $\overrightarrow{A_1A_3} = k\overrightarrow{A_1A_2} \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$.

Ví dụ 1.19. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện

a) $z + \bar{z} > 4$

b) $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số ảo

c) $|z + i - 2| = |z + 3|$

d) $|\bar{z} - i| = 3$

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.

a) Ta có $\bar{z} = x - yi$ nên

$$z + \bar{z} > 4 \Leftrightarrow x + yi + x - yi > 4 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy tập hợp điểm M là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $x = 2$.

b) Ta có $(2 - z)(\bar{z} + i)$

$$= (2 - x - yi)(x - yi + i)$$

$$= -x^2 - y^2 + 2x + y - (x + 2y - 2)i.$$

Nên $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số ảo khi và chỉ khi:

$$x^2 + y^2 - 2x - y = 0.$$

Hay $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$,

Vậy điểm M thuộc đường tròn tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$

bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Vì $z + i - 2 = x - 2 + (y + 1)i$ nên $|z + i - 2| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$

Lại có $z + 3 = x + 3 + yi$ nên $|z + 3| = \sqrt{(x + 3)^2 + y^2}$.

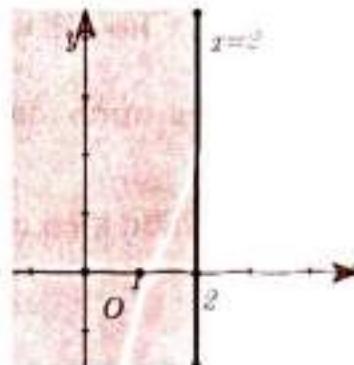
Vì thế ta có: $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow 5x - y + 2 = 0$$

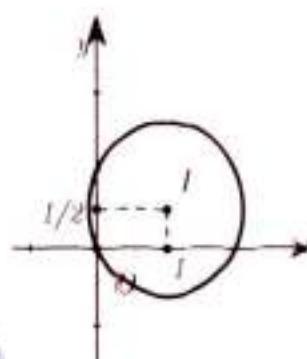
Vậy điểm M thuộc đường thẳng có phương trình $5x - y + 2 = 0$.

Chú ý: Có thể giải bài toán này bằng cách nhìn hình học với chú ý rằng nếu \vec{u} biểu diễn số phức z thì $|\vec{u}| = |z|$, suy ra $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |z_B - z_A|$.

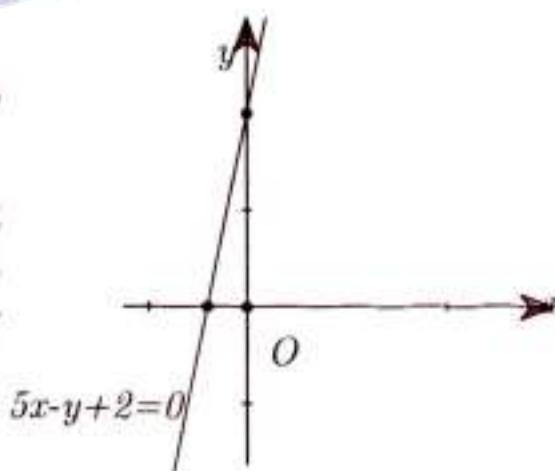
Gọi $A(2; -1), B(-3; 0)$ là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 - i; z_2 = -3$.



Hình 1.2



Hình 1.3



Hình 1.4

Ta có $|z+i-2|=|z+3| \Leftrightarrow |\overline{AM}| = |\overline{BM}|$, nên điểm M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Vì trung điểm của đoạn AB là $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $\overline{AB}(-5; 1)$ nên phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là $-5\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0$ hay $5x - y - 2 = 0$. Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng $5x - y - 2 = 0$.

d) Vì $\bar{z} - i = x - yi - i = x - (y + 1)i$ nên

$$|\bar{z} - i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 3^2$$

Vậy điểm M thuộc đường tròn tâm $J(0; -1)$ bán kính $R = 3$.

Ví dụ 1.20. Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z sao cho $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương.

Lời giải

Gọi $A(0; -1), B(0; 1)$ là các điểm biểu diễn số phức $z_A = -i, z_B = i$.

Ta có $\overline{AM}, \overline{BM}$ biểu diễn các số phức $z+i, z-i$, nên $\frac{z+i}{z-i}$ là số thực dương khi và chỉ khi $\frac{z+i}{z-i} = k \Leftrightarrow \overline{AM} = k\overline{BM} \Leftrightarrow \overline{MA} = k\overline{MB}$ ($k > 0$). Do đó điểm M nằm trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn thẳng AB .

BÀI TẬP

Bài 1.1. Tìm phần thực, phần ảo và tính modun của các số phức sau.

a) $3(2i+1)+2i(i+1)$

b) $(i-3)^2 + 3(2i-3)(i+1)$

c) $\frac{2i-1}{i+2} + 4i^3 + 3i + 2$

d) $\frac{(3i-1)(2-i)}{i+1} + i^3(1+4i)$

e) $\frac{(-1+9i)^{18}(4-5i)^{18}}{(1-i)^{20}}$

f) $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}+i)^{12}} + 3\left(i^9 - \frac{1}{i^9}\right)$

g) $\frac{(\sqrt{2} + i)(\sqrt{8} + 2i)}{(3i - 2)(i + 3)}$

h) $\frac{130(4 + 5i)}{(2i + 3)(3 - i)} + \frac{125}{(2 - i)^3}$

i) $1 + (\sqrt{3} - i) + (\sqrt{3} - i)^2 + (\sqrt{3} - i)^3 + \dots + (\sqrt{3} - i)^{2010}$

Bài 1.2. Chứng minh các số phức sau là số ảo.

a) $(1 - \sqrt{3}i)^9 - i^5(512i + 3)$

b) $(5i - 1)^2(1 - 3i) - (8i - \sqrt{10})^2$

c) $\frac{5 + \sqrt{2}i}{2\sqrt{3} - 10i} - \frac{5 - \sqrt{2}i}{2\sqrt{3} + 10i}$

d) $-\frac{52 + \sqrt{2009}i}{(3 + i)(79 + 7i)} + \frac{52 - \sqrt{2009}i}{10(23 - 10i)}$

Bài 1.3. Tìm các số thực x, y thoả mãn điều kiện.

a) $(2x + 1)(2 - i)^3 - y(-3 + 2i)(2 + 3i) = 6 - 85i$

b) $(3x - y)\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^7 + (y + 2)(x - i)^2 = -19 - 23i$

Bài 1.4. Chứng minh rằng với mọi số phức z_1, z_2

a) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 + \bar{z}_2} = \overline{z_1} + z_2$

c) $|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$

d) $|1 + z_1 z_2|^2 + |z_1 - \bar{z}_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$

Bài 1.5. Chứng minh rằng với mọi số phức $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$

a) $\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \dots + \overline{z_n}$

b) $\overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3} \dots \overline{z_n}$

c) $|z_1 z_2 z_3 \dots z_n| = |z_1| |z_2| |z_3| \dots |z_n|$

Bài 1.6. Tìm số phức z thoả mãn

a) $(4 - 3i)z = (2 + i)(3 - 5i)$

b) $(z + 2)i = (3i - z)(-1 + 3i)$

c) $\frac{7 + i}{(2i - 1)^3} = \frac{3 + i}{2z + 1}$

$$\text{d) } \frac{2+i-z}{(3-i)^2} = \frac{2z+1}{10+5i}$$

c) $|z| + 2|\bar{z}| = 3$ và $z = -\bar{z}$

f) $2z\bar{z} - |z|^2 = 5$ và $z = \bar{z}$

$$g) (4\bar{z} + z)(2 - i) + 7z = 3i - 7$$

h) $z^2 + |z| = 0$

Bài 1.7. Tìm số phức z thoả mãn hệ

$$\text{a) } \begin{cases} \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \\ \left| \frac{z-3i}{z+i} \right| = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \left| \frac{z+2}{\bar{z}-3i} \right| = \frac{5}{3\sqrt{2}} \\ \left| \frac{z-5}{z-1} \right| = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left| \frac{z+i}{z-1} \right| = 1 \\ |(z+3)(z-3i)| = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \left| \frac{z+3i}{z-i} \right| = 1 \\ |(z-2)(i\bar{z} + 5 - 2i)| = 6 \end{cases}$

Bài 1.8. Cho các điểm A, B, C, D, M, N, P nằm trong mặt phẳng phức lần lượt biểu diễn các số phức $1 + 3i, -2 + 2i, -4 - 2i, 1 - 7i, -3 + 4i, 1 - 3i, -3 + 2i$.

a) Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

b) Tìm điểm Q trong mặt phẳng phức sao cho $MNPQ$ là hình bình hành. Điểm Q biểu diễn số phức nào?

c) Chứng minh rằng ABCD là tứ giác nội tiếp một đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn đó.

Bài 1.5. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức sao cho

a) $z^2 - 2z + 4i$ là số thực

b) $(z + 3)(\bar{z} - 2i)$ là số ảo

c) $\frac{\bar{z} + i}{iz - 1}$ là số thực

d) $\frac{z + 2i}{i\bar{z} - 1}$ là số ảo

Bài 1.10. Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện

a) $|z + 2| = |z - 3 + 2i|$

b) $|2\bar{z} + 3i| = 4$

c) $\left| \frac{z + 2i}{z - 3} \right| = 1$

d) $\left| \frac{z - 3i}{z} \right| = 2$

2 - CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHÚC VÀ PHƯƠNG TRÌNH

2.1. Căn bậc hai của số phức

a) Định nghĩa

Căn bậc hai của số phức w là số phức z khi và chỉ khi $z^2 = w$.

b) Phương pháp xác định căn bậc hai của số phức

Xét số phức $w = a + bi$. Gọi $z = x + yi$ là căn bậc hai của w

+ Nếu $a = 0, b = 0$ thì $w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$.

+ Nếu $a > 0, b = 0$ thì căn bậc hai của w là $z = \pm\sqrt{a}$.

+ Nếu $a < 0, b = 0$ thì $w = a = -ai^2$ nên $z = \pm\sqrt{-a}i$.

+ Nếu $b \neq 0$ thì ta có $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$ (1) (2)

Từ (2) với $b \neq 0$ thì $x \neq 0$ nên ta có $y = \frac{b}{2x}$. Thay vào (1)

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a \Leftrightarrow 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ x^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x^2 > 0 \text{ nên } x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}},$$

$$\text{Nếu } b > 0 \text{ thì } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \text{ nên}$$

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i$$

$$z = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i.$$

$$\text{Nếu } b < 0 \text{ thì } y = \mp\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \text{ nên}$$

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i$$

$$z = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}i.$$

2.2. Phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ với A, B, C là các số phức và $A \neq 0$ có $\Delta = B^2 - 4AC$.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có hai nghiệm trùng nhau $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$.

+ Nếu $\Delta \neq 0$, gọi δ là căn bậc hai của Δ , thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \frac{-B + \delta}{2A}; z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$.

CÁC VÍ DỤ

Dạng 1: Xác định căn bậc hai, giải phương trình bậc hai

+ Xác định căn bậc hai của số phức $w = a + bi$, ngoài cách làm tổng quát ta thường biến đổi về phái thành một bình phương $a + bi = (x + yi)^2$, khi đó căn bậc hai của w sẽ là $z = x + yi$ hoặc $z = -x - yi$.

+ Hệ thức Viet vẫn đúng cho phương trình bậc hai với hệ số phức: Nếu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0 (A \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{B}{A} \\ z_1 z_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$$

Ví dụ 1.21. Tìm căn bậc hai của số phức w

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $w = 2i$ | b) $w = -2i$ |
| c) $w = -3 + 4i$ | d) $w = i$ |
| e) $w = -2 - 2\sqrt{3}i$ | f) $w = -1 + 4\sqrt{3}i$ |

Lời giải

Gọi z là căn bậc hai của số phức w .

- Ta có $w = 2i = 1 + 2i + i^2 = (1 + i)^2$ nên căn bậc hai của w là hai số phức $z = 1 + i$ hoặc $z = -1 - i$.
- Vì $w = -2i = 1 - 2i + i^2 = (1 - i)^2$ nên $z = 1 - i$ hoặc $z = -1 + i$.
- Ta có $w = -3 + 4i = 4i^2 + 4i + 1 = (2i + 1)^2$, do đó $z = 2i + 1$ hoặc $z = -2i - 1$.

ABC

Nhận xét: Cách phân tích $w = a + bi$ thành bình phương là dựa vào bài toán: Tìm hai số thực x, y có tích là $\frac{b}{2}$ mà hiệu hai bình phương $x^2 - y^2$ bằng a .

- d) Với $w = i$ thì $b = 1, a = 0$ nên x, y có tích là $\frac{1}{2}$ và $x^2 - y^2 = 0$, ta nhầm được $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $w = i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$, do đó $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ hoặc $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

- e) Vì $w = -2 - 2\sqrt{3}i$ nên x, y có tích là $-\sqrt{3}$ và $x^2 - y^2 = -2$ nên chọn $x = 1; y = -\sqrt{3}$. Ta có phân tích $w = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 = (1 - \sqrt{3}i)^2$.
Vậy $z = 1 - \sqrt{3}i$ hoặc $z = -1 + \sqrt{3}i$.

- f) Vì $w = -1 + 4\sqrt{3}i$ nên x, y có tích là $2\sqrt{3}$ và $x^2 - y^2 = -1$ nên chọn $x = \sqrt{3}; y = 2$. Ta có phân tích $w = 3 + 4\sqrt{3}i + i^2 = (\sqrt{3} + i)^2$.
Vậy $z = \sqrt{3} + i$ hoặc $z = -\sqrt{3} - i$.

Chú ý: Cách phân tích **thành bình phương** được dùng cho hầu hết các bài tập mà mức độ đòi hỏi tính toán không nhiều, nhưng không dùng được trong các trường hợp bài tập “cố tình” đòi hỏi tính toán phức tạp.

Ví dụ 1.22. Tìm căn bậc hai của số phức w

a) $w = 1 + i$ b) $w = -3 + 2i$ c) $w = \sqrt{7} - 5i$

Lời giải

Gọi $z = x + yi$ là căn bậc hai của số phức w .

Vì $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

a) Với $w = 1 + i$ thì $z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4x^2 - 1 = 0 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}$. Suy ra $y = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2}$.

Vậy các căn bậc hai cần tìm là

$$z = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i, z = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i.$$

b) Với $w = -3 + 2i$ thì $z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3x^2 - 1 = 0 & (3) \\ xy = 1 & (4) \end{cases}$

Giải phương trình trùng phương (3) ta có $x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{2}$

+ Với $x = \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{2}$ thì $y = \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{13}-3}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{13}+3}}{\sqrt{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}} = \sqrt{\sqrt{13}+3}$.

+ Với $x = -\frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{2}$ thì $y = \frac{1}{x} = \frac{-2}{\sqrt{\sqrt{13}-3}} = -\sqrt{\sqrt{13}+3}$

Vậy các căn bậc hai cần tìm là:

$$z = \frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{2} + \sqrt{\sqrt{13}+3}i, z = -\frac{\sqrt{\sqrt{13}-3}}{2} - \sqrt{\sqrt{13}+3}i.$$

c) Với $w = \sqrt{7} - 5i$ thì $\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{7} \\ 2xy = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4\sqrt{7}x^2 - 25 = 0 & (5) \\ 2xy = -5 & (6) \end{cases}$

Giải (5) ta có $x^2 = \frac{\sqrt{7} \pm 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{8\sqrt{2} + 2\sqrt{7}}}{2}$

+ Với $x = \frac{\sqrt{8\sqrt{2} + 2\sqrt{7}}}{2}$ thì

$$y = -\frac{5}{2x} = -\frac{5}{\sqrt{8\sqrt{2} + 2\sqrt{7}}} = -\frac{5\sqrt{8\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}}{\sqrt{(8\sqrt{2} + 2\sqrt{7})(8\sqrt{2} - 2\sqrt{7})}} = -\frac{\sqrt{8\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}}{2}$$

+ Với $x = -\frac{\sqrt{8\sqrt{2} + 2\sqrt{7}}}{2}$ thì $y = -\frac{5}{2x} = \frac{\sqrt{8\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}}{2}$.

Vậy các căn bậc hai cần tìm là

$$z = \frac{\sqrt{8\sqrt{2} + 2\sqrt{7}}}{2} - \frac{\sqrt{8\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}}{2}i, z = -\frac{\sqrt{8\sqrt{2} + 2\sqrt{7}}}{2} + \frac{\sqrt{8\sqrt{2} - 2\sqrt{7}}}{2}i.$$

Ví dụ 1.23. Giải phương trình

a) $z^2 + 3z + 10 = 0$

b) $z^2 - 2\sqrt{3}z + 7 = 0$

c) $z^2 + (i-5)z + 8 - i = 0$

d) $z^2 - (4+5i)z - 11 + 13i = 0$

ABC

Lời giải

a) Xét phương trình $z^2 + 3z + 10 = 0$. Ta có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 10 = -31 = 31i^2$ nên phương trình có hai nghiệm là $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{31}i}{2}$; $z_2 = \frac{-3 - \sqrt{31}i}{2}$.

b) Ta có $\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 7 = -4 = (2i)^2$ nên các nghiệm cần tìm là:

$$z_1 = \sqrt{3} + 2i; z_2 = \sqrt{3} - 2i$$

c) Phương trình $z^2 + (i-5)z + 8-i = 0$ có hệ số phức với:

$$\Delta = (i-5)^2 - 4(8-i) = -8 - 6i$$

Ta tìm căn bậc hai của Δ bằng cách phân tích thành bình phương:

$$\Delta = -8 - 6i = 9i^2 - 2 \cdot 3i \cdot 1 + 1 = (3i - 1)^2$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $z_{1,2} = \frac{-(i-5) \pm (3i-1)}{2}$, hay ta có $z_1 = 2+i$; $z_2 = 3-2i$

d) Phương trình $z^2 - (4+5i)z - 11+13i = 0$ có:

$$\Delta = (4+5i)^2 - 4(-11+13i) = 35 - 12i$$

Ta tìm hai số có tích là -6 và hiệu các bình phương là 35 . Phân tích ta được $\Delta = 35 - 12i = 36 - 12i + i^2 = (6-i)^2$

Vậy các nghiệm cần tìm là:

$$z_1 = \frac{4+5i+6-i}{2} = 5+2i; z_2 = \frac{4+5i-6+i}{2} = -1+3i$$

Ví dụ 1.24. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $3z^2 - \sqrt{5}z + 3 = 0$.

Tính giá trị của các biểu thức.

a) $A = z_1^2 + z_2^2$

b) $B = z_1^3 + z_2^3$

c) $C = z_1^5 + z_2^5$

d) $D = \frac{z_1^3}{z_2} + \frac{z_2^3}{z_1}$

e) $E = \frac{z_1}{2z_2 + 1} + \frac{z_2}{2z_1 + 1}$

f) $F = \frac{z_1^2 + z_2}{z_1 - 2} + \frac{z_2^2 + z_1}{z_2 - 2}$

Lời giải

Với $\Delta = (-\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -31 = 31i^2$, ta có các nghiệm của phương trình

là $z_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{31}i}{6}$; $z_2 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{31}i}{6}$.

Ta có $S = z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $P = z_1 z_2 = 1$

a) $A = z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = S^2 - 2P = \frac{5}{9} - 2 = -\frac{13}{9}$.

b) $B = z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2(z_1 + z_2) = S^3 - 3SP = \frac{5\sqrt{5}}{27} - 3 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{22\sqrt{5}}{27}$.

c) Vì $(z_1^2 + z_2^2)(z_1^3 + z_2^3) = z_1^5 + z_2^5 + z_1^2 z_2^2(z_1 + z_2)$ nên ta có

$$\begin{aligned} C &= z_1^5 + z_2^5 = (z_1^2 + z_2^2)(z_1^3 + z_2^3) - z_1^2 z_2^2(z_1 + z_2) \\ &= (S^2 - 2P)(S^3 - 3SP) - SP^2 = \left(-\frac{13}{9}\right)\left(-\frac{22\sqrt{5}}{27}\right) - 1^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{205\sqrt{5}}{243}. \end{aligned}$$

d) $D = \frac{z_1^3}{z_2} + \frac{z_2^3}{z_1} = \frac{z_1^4 + z_2^4}{z_1 z_2}$.

Ta có $z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2 z_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$ nên $z_1^4 + z_2^4 = \left(-\frac{13}{9}\right)^2 - 2 \cdot 1^2 = \frac{7}{81}$

Do đó $D = \frac{z_1^4 + z_2^4}{z_1 z_2} = \frac{\frac{7}{81}}{z_1 z_2} = \frac{7}{81}$

e) Ta có

$$\begin{aligned} E &= \frac{z_1}{2z_2 + 1} + \frac{z_2}{2z_1 + 1} = \frac{z_1(2z_1 + 1) + z_2(2z_2 + 1)}{(2z_1 + 1)(2z_2 + 1)} \\ &= \frac{2(z_1^2 + z_2^2) + z_1 + z_2}{4z_1 z_2 + 2(z_1 + z_2) + 1} = \frac{2(S^2 - 2P) + S}{4P + 2S + 1} \\ &= \frac{2\left(-\frac{13}{9}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3}}{5 + \frac{2\sqrt{5}}{3}} = \frac{\frac{-26 + 3\sqrt{5}}{9}}{\frac{15 + 2\sqrt{5}}{3}} = \frac{-26 + 3\sqrt{5}}{3(15 + 2\sqrt{5})} = \frac{-420 + 97\sqrt{5}}{615}. \end{aligned}$$

f) $F = \frac{z_1^2 + z_2}{z_1 - 2} + \frac{z_2^2 + z_1}{z_2 - 2} = \frac{(z_1^2 + z_2)(z_2 - 2) + (z_2^2 + z_1)(z_1 - 2)}{(z_1 - 2)(z_2 - 2)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1 - z_1^2 - z_2^2 - 2(z_1 + z_2)}{z_1 z_2 - 2(z_1 + z_2) + 4} = \frac{SP - S^2 + 2P - 2S}{P - 2S + 4}. \end{aligned}$$

Thay số và rút gọn, ta có $F = \frac{165 - 19\sqrt{5}}{615}$.

ABU

Ví dụ 1.25. Chứng minh rằng

- Hai số phức liên hợp z và \bar{z} là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực.
- Nếu phương trình bậc hai với hệ số thực có một nghiệm phức z thì \bar{z} cũng là một nghiệm của nó.

Lời giải

- a) Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $\bar{z} = a - bi$.

Ta có $z + \bar{z} = 2a$ và $z\bar{z} = a^2 + b^2$ nên z và \bar{z} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ có các hệ số thực.

- b) Xét phương trình bậc hai $Ax^2 + Bx + C = 0$ (*) ($A, B, C \in \mathbb{R}, A \neq 0$).

Vì z là nghiệm nên $Az^2 + Bz + C = 0 \Leftrightarrow \overline{Az^2 + Bz + C} = \bar{0}$. Do A, B, C là các số thực nên $\overline{A} = A, \overline{B} = B, \overline{C} = C$.

Vì thế $\overline{Az^2 + Bz + C} = \overline{Az^2} + \overline{Bz} + \overline{C} = A\overline{z^2} + B\overline{z} + C$ và $\bar{0} = 0$

nên $A\overline{z^2} + B\overline{z} + C = 0$. Hay \bar{z} cũng là nghiệm của phương trình (*).

Ví dụ 1.26. Lập phương trình bậc hai với hệ số thực có nghiệm

- a) $z_1 = 5 + 2i, z_2 = 5 - 2i$ b) $z = -2 + i$

Lời giải

- a) Vì $z_1 = 5 + 2i, z_2 = 5 - 2i$ nên ta có:

$$z_1 + z_2 = 5 + 2i + 5 - 2i = 10 \text{ và } z_1 \cdot z_2 = (5 + 2i)(5 - 2i) = 25 - 4i^2 = 29$$

nên phương trình cần tìm là $z^2 - 10z + 29 = 0$.

- b) *Cách 1.* Gọi phương trình cần tìm là $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$).

Vì $z = -2 + i$ là nghiệm nên $a(-2 + i)^2 + b(-2 + i) + c = 0$. Hay ta có

$$a(3 - 4i) + b(-2 + i) + c = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b + c - (4a - b)i = 0.$$

Mà $a, b, c \in \mathbb{R}$ nên $\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 5a \\ b = 4a \end{cases}$. Khi đó phương trình có dạng $ax^2 + 4ax + 5a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0$ (vì $a \neq 0$).

Cách 2. Sử dụng kết quả ví dụ 1.25b.

Vì $z = -2 + i$ là một nghiệm nên $\bar{z} = -2 - i$ là nghiệm thứ hai của phương trình. Ta có $z + \bar{z} = -4, z\bar{z} = (-2 + i)(-2 - i) = 5$ nên phương trình cần tìm là $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Dạng 2: Phương trình quy về phương trình bậc hai

- + Việc giải các phương trình có bậc lớn hơn 2 thường sử dụng phương pháp phân tích thành nhân tử, đặt ẩn phụ... để chuyển về dạng bậc hai.
- + Chú ý cách giải các dạng phương trình với hệ số thực đã biết.

Ví dụ 1.27. Giải các phương trình sau trên tập số phức

$$\begin{array}{ll} \text{a)} z^3 + 8 = 0 & \text{b)} z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0 \\ \text{c)} (z + 3i)(z^2 + 4)(z^3 + i) = 0 & \text{d)} z^4 + 4 = 0 \end{array}$$

Lời giải

a) Ta có $z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2 \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{cases}$

Xét phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$ có $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ nên phương trình có 2 nghiệm là $z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $z_1 = -2; z_2 = 1 + \sqrt{3}i; z_3 = 1 - \sqrt{3}i$.

b) Đέ ý các hệ số của phương trình $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$ ta thấy $z = -1$ là nghiệm, nên phân tích thành nhân tử ta có

$$z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)(z^2 - 4z + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ ta được các nghiệm $z_2 = 2 + i; z_3 = 2 - i$.

Vậy các nghiệm cần tìm là $z_1 = -1; z_2 = 2 + i; z_3 = 2 - i$.

c) Đây là phương trình tích nên có các trường hợp

$$+) z + 3i = 0 \Rightarrow z = -3i.$$

$$+) z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4i^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0 \Rightarrow z = 2i, z = -2i$$

+) $z^3 + i = 0$. Đây là phương trình bậc 3, nếu nghĩ lấy căn bậc ba của $-i$ thì khá khó khăn, nếu đặt $z = x + yi$ thì lời giải khá dài. Đέ ý rằng $i^2 = -1$ nên phương trình có dạng

$$z^3 - i^3 = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + iz + i^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z^2 + iz - 1 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $z^2 + iz - 1 = 0$ có $\Delta = i^2 - 4.1.(-1) = i^2 + 4 = 3$ nên có các nghiệm là $z = \frac{-i + \sqrt{3}}{2}$ hoặc $z = \frac{-i - \sqrt{3}}{2}$.

ABC

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm

$$z = -3i; z = -2i; z = 2i; z = i; z = \frac{\sqrt{3} - i}{2}; z = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$$

d) Sử dụng $i^2 = -1$ ta biến đổi phương trình như sau

$$z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 - 4i^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 2i)(z^2 + 2i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2i & (1) \\ z^2 = -2i & (2) \end{cases}$$

Giải các phương trình (1) và (2) là đi tìm căn bậc hai của số phức $\pm 2i$, sử dụng các hằng đẳng thức quen thuộc $(1+i)^2 = 2i, (1-i)^2 = -2i$ ta có nghiệm cần tìm là $z = 1+i, z = -1-i, z = 1-i, z = -1+i$.

Ví dụ 1.28. Giải các phương trình sau trên C

a) $z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0$

b) $z^3 + 2(1-i)z^2 + (2+3i)z + 1 + 5i = 0$

Lời giải

a) Vì tổng các hệ số trong vế trái của phương trình bằng 0, nên phương trình có một nghiệm $z = 1$. Phân tích thành nhân tử, ta có

$$\begin{aligned} z^3 - z^2 - (1+2i)z^2 + (1+2i)z + (i-1)z + 1 - i &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2(z-1) - z(1+2i)(z-1) - (1-i)(z-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (z-1)[z^2 - (1+2i)z - 1 + i] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$, ta có $\Delta = (1+2i)^2 + 4(1-i) = 1$ phương trình có 2 nghiệm là $z = 1+i; z = i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $z = 1; z = 1+i; z = i$.

b) Phương trình $z^3 + 2(1-i)z^2 + (2+3i)z + 1 + 5i = 0$ có các hệ số ở vế trái thoả mãn $-1 + 2(1-i) - (2+3i) + 1 + 5i = 0$, nên nhận nghiệm $z = -1$.

Ta có $z^3 + z^2 + (1-2i)z^2 + (1-2i)z + (1+5i)z + 1 + 5i = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)[z^2 + (1-2i)z + 1 + 5i] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z^2 + (1-2i)z + 1 + 5i = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $z^2 + (1-2i)z + 1 + 5i = 0$, ta có

$$\Delta = (1-2i)^2 - 4(1+5i) = -7 - 24i = 9 - 2.3.4i + 16i^2 = (3-4i)^2.$$

Nên các nghiệm là $z = 1-i; z = -2+3i$.

Vậy các nghiệm cần tìm của phương trình đã cho là: $z = -1; z = 1-i; z = -2+3i$.

Ví dụ 1.29. Cho phương trình $3z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Tìm các hệ số thực a, b, c biết phương trình có các nghiệm là

a) $z = -1$ và $z = 1 - i$

b) $z = \frac{1}{3}$ và $z = -2 + 3i$

Lời giải

Xét phương trình $3z^3 + az^2 + bz + c = 0$ (*)

- a) Phương trình (*) nhận $z = -1$ là nghiệm nên $-3 + a - b + c = 0$ (1), và nhận nghiệm $z = 1 - i$ nên: $3(1-i)^3 + a(1-i)^2 + b(1-i) + c = 0$
 $\Leftrightarrow -6 - 6i + a(-2i) + b(1-i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c - 6 - (2a + b + 6)i = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 6 = 0 \\ 2a + b + 6 = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} a - b + c = 3 \\ b + c = 6 \\ 2a + b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -3, b = 0, c = 6$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng cách khác dựa vào **ví dụ 1.25b**.

Phương trình (*) nhận $z = -1$ là nghiệm nên sẽ phân tích được về dạng $(z+1)(3z^2 + mz + n) = 0$, với $m, n \in \mathbb{R}$

Mặt khác (*) có nghiệm $z = 1 - i$ thì nghiệm đó sẽ là nghiệm của phương trình $3z^2 + mz + n = 0$ (**). Theo **ví dụ 1.25b** ta có $\bar{z} = 1 + i$ cũng là

nghiệm của (**) nên $\begin{cases} z + \bar{z} = \frac{-m}{3} \\ z\bar{z} = \frac{n}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - i + 1 + i = \frac{-m}{3} \\ (1 - i)(1 + i) = \frac{n}{3} \end{cases} \Rightarrow m = -6, n = 6$.

Vậy ta có $3z^3 + az^2 + bz + c = (z+1)(3z^2 - 6z + 6) \Rightarrow a = -3, b = 0, c = 6$.

- b) Phương trình (*) nhận nghiệm $z = \frac{1}{3}$ nên $1 + a + 3b + 9c = 0$ (3) và nhận

nghiệm $z = -2 + 3i$ nên $3(-2 + 3i)^3 + a(-2 + 3i)^2 + b(-2 + 3i) + c = 0$

$$\Leftrightarrow 138 + 27i + a(-5 - 12i) + b(-2 + 3i) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 138 - 5a - 2b + c + (27 - 12a + 3b)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 138 - 5a - 2b + c = 0 \\ 27 - 12a + 3b = 0 \end{cases}$$
 (4)

Từ (3) và (4) ta có hệ $\begin{cases} a + 3b + 9c = -1 \\ 5a + 2b - c = 138 \\ 4a - b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 11, b = 35, c = -13$.

ABC

Ví dụ 1.30. Giải các phương trình sau trên tập số phức

a) $(z^2 + z)^2 - 3z^2 - 3z - 10 = 0$

b) $(z - 1)^4 + (z + 3)^4 + 128 = 0$

c) $(z - 1)(z + 2)(z + 4)(z + 7) = 34$

d) $z^4 - z^3 + 2z^2 - 2z + 4 = 0$

Lời giải

a) Đặt $x = z^2 + z$ (chú ý trên tập số phức, không có điều kiện của x).

Phương trình đã cho có dạng $x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5; x = -2$

+ Với $x = 5$ ta có $z^2 + z - 5 = 0$, phương trình có 2 nghiệm là

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; z_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

+ Với $x = -2$ ta có $z^2 + z + 2 = 0$, phương trình có 2 nghiệm là

$$z_3 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}; z_4 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, z_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, z_3 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}, z_4 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

b) Đặt $x = z + 1$ thì phương trình $(z - 1)^4 + (z + 3)^4 + 128 = 0$ trở thành $(x - 2)^4 + (x + 2)^4 + 128 = 0$

Khai triển và rút gọn ta được $x^4 + 24x^2 + 80 = 0$, suy ra $x^2 = -4; x^2 = -20$.

+ Với $x^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow x = 2i; x = -2i$.

+ Với $x^2 = -20 = 20i^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{5}i; x = -2\sqrt{5}i$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là

$$z_1 = -1 + 2i, z_2 = -1 - 2i, z_3 = -1 + 2\sqrt{5}i, z_4 = -1 - 2\sqrt{5}i$$

Chú ý. Với phương trình dạng $(z - a)^4 + (z - b)^4 = c$ thì giải bằng cách

đặt ẩn phụ $x = z - \frac{a+b}{2}$ sẽ chuyển được về dạng phương trình bậc bốn trùng phương.

c) Vì $-1 + 7 = 2 + 4$ nên ta biến đổi như sau

$$(z - 1)(z + 2)(z + 4)(z + 7) = 34$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(z + 7)(z + 2)(z + 4) = 34$$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 6z - 7)(z^2 + 6z + 8) = 34 \quad (1)$$

Đặt $x = z^2 + 6z - 7 \Rightarrow z^2 + 6z + 8 = x + 15$ thì (1) trở thành $x(x + 15) = 34$
 $\Leftrightarrow x^2 + 15x - 34 = 0 \Rightarrow x = 2; x = -17$
+ Với $x = 2$ thì $z^2 + 6z - 7 = 2 \Leftrightarrow z^2 + 6z - 9 = 0$
 $\Rightarrow z_1 = -3 + 3\sqrt{2}; z_2 = -3 - 3\sqrt{2}$.

+ Với $x = -17$ thì $z^2 + 6z - 7 = -17 \Leftrightarrow z^2 + 6z + 10 = 0$.

Ta có $\Delta' = (-3)^2 - 10 = -1 = i^2 \Rightarrow z_3 = -3 + i; z_4 = -3 - i$.

Vậy các nghiệm cần tìm là $z_1 = -3 + 3\sqrt{2}, z_2 = -3 - 3\sqrt{2}, z_3 = -3 + i, z_4 = -3 - i$.

Chú ý. Với phương trình $(z+a)(z+b)(z+c)(z+d) = m$ mà $a+b=c+d$ thì biến đổi phương trình về dạng $[z^2 + (a+b)z + ab][z^2 + (c+d)z + cd] = m$.

Và đặt ẩn phu $x = z^2 + (a+b)z + ab \Rightarrow z^2 + (c+d)z + cd = x + cd - ab$ ta sẽ chuyển được về phương trình bậc hai.

- d) Xét phương trình $z^4 - z^3 + 2z^2 - 2z + 4 = 0$ (2).
+ Với $z = 0$ thì phương trình (2) có dạng $4 = 0$ (vô lý).

+ Với $z \neq 0$, chia cả hai vế của (2) cho z^2 ta được

$$z^2 - z + 2 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{4}{z^2} - \left(z + \frac{2}{z}\right) + 2 = 0 \quad (3)$$

Đặt $x = z + \frac{2}{z} \Rightarrow x^2 = z^2 + 2.z.\frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} \Rightarrow z^2 + \frac{4}{z^2} = x^2 - 4$ nên phương trình

(3) có dạng $x^2 - 4 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 2$.

+ Với $x = -1$ ta có $z + \frac{2}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + z + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}; z_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$.

+ Với $x = 2$ ta có $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z_3 = 1 + i; z_4 = 1 - i$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phức là

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}; z_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}; z_3 = 1 + i; z_4 = 1 - i.$$

Chú ý. Với phương trình $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ ($a, b, c, d, e \neq 0$) có các hệ số thoả mãn $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$, thì phương pháp giải là chia hai vế cho z^2 rồi đặt ẩn phu chuyển về phương trình bậc hai. Phương trình dạng này gọi là *phương trình hối quy bậc bốn*.

Dạng 3: Hệ phương trình trên tập số phức

- + Việc giải các hệ phương trình trên tập số phức tương tự trên tập số thực. Hay sử dụng phương pháp thế, phương pháp cộng, đặt ẩn phụ ...
- + Các dạng hệ thường gặp là hệ bậc nhất, hệ đối xứng ...

Ví dụ 1.31. Giải các hệ phương trình sau với x, y là các số phức

a) $\begin{cases} x + 3y = 2 + 3i \\ 2x - y = 5 + 2i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + (1+i)y = -2 + 14i \\ ix - (2i-1)y = -4 + 9i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x^2 + y^2 + 3xy - x + 4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - (2-i)y = 2 \\ x^2 - 3iy^2 = 5 + 15i \end{cases}$

Lời giải

a) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 2 + 3i \quad (1) \\ 2x - y = 5 + 2i \quad (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $y = 2x - 5 - 2i$ thế vào (1) ta được

$$x + 3(2x - 5 - 2i) = 2 + 3i \Leftrightarrow 7x = 17 + 9i \Rightarrow x = \frac{17 + 9i}{7}$$

Suy ra $y = 2 \cdot \frac{17 + 9i}{7} - 5 - 2i = \frac{-1 + 4i}{7}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{17 + 9i}{7}, \frac{-1 + 4i}{7} \right)$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 3x + (1+i)y = -2 + 14i \\ ix - (2i-1)y = -4 + 9i \end{cases}$

Ta có

$$+ D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+i \\ i & 1-2i \end{vmatrix} = 3(1-2i) - i(1+i) = 4 - 7i.$$

$$\begin{aligned} + D_x &= \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2+14i & 1+i \\ -4+9i & 1-2i \end{vmatrix} \\ &= (-2+14i)(1-2i) - (-4+9i)(1+i) = 39+13i \end{aligned}$$

$$+ D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2+14i \\ i & -4+9i \end{vmatrix} = 3(-4+9i) - i(-2+14i) = 2+29i.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{39+13i}{4-7i} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2+29i}{4-7i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+5i \\ y = -3+2i \end{cases}$

c) Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 & (3) \\ 3x^2 + y^2 + 3xy - x + 4 = 0 & (4) \end{cases}$

Từ (3) ta có $y = 3 - 2x$, thay vào phương trình (4), ta có:

$$3x^2 + (3 - 2x)^2 + 3x(3 - 2x) - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (5)$$

Giải (5) ta được $\begin{cases} x = 2 - 3i \Rightarrow y = -1 + 6i \\ x = 2 + 3i \Rightarrow y = -1 - 6i \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2 - 3i; -1 + 6i); (2 + 3i; -1 - 6i)$.

d) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - (2 - i)y = 2 & (6) \\ x^2 - 3iy^2 = 5 + 15i & (7) \end{cases}$

Từ (6) có $x = 2 + (2 - i)y$, thay vào (7) ta được

$$[2 + (2 - i)y]^2 - 3iy^2 = 5 + 15i \Leftrightarrow (3 - 7i)y^2 + 4(2 - i)y - 1 - 15i = 0 \quad (8)$$

Giải phương trình (8):

$$\Delta' = 4(2 - i)^2 - (3 - 7i)(-1 - 15i) = 120 + 22i = 121 + 2 \cdot 11 \cdot i + i^2 = (11 + i)^2.$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{-2(2 - i) + (11 + i)}{3 - 7i} = i; y = \frac{-2(2 - i) - (11 + i)}{3 - 7i} = \frac{-26 - 51i}{29}.$$

+ Nếu $y = i$ thì $x = 2 + (2 - i)i = 3 + 2i$.

$$+ \text{Nếu } y = \frac{-26 - 51i}{29} \text{ thì } x = 2 + (2 - i) \frac{-26 - 51i}{29} = \frac{-45 - 76i}{29}$$

Vậy hệ có nghiệm là $(3 + 2i, i); \left(\frac{-45 - 76i}{29}, \frac{-26 - 51i}{29}\right)$.

Ví dụ 1.32. Giải các hệ phương trình sau với x, y thuộc tập số phức

a) $\begin{cases} x + y = 5 + i \\ x^2 + y^2 = 8(1 + i) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3(1 + i) \\ x^3 + y^3 = 9(-1 + i) \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 5 + i \\ x^2 + y^2 = 8(1 + i) \end{cases}$ thuộc dạng đối xứng hai ẩn loại I.

Vì $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \Leftrightarrow xy = 8 + i$ nên hệ có dạng $\begin{cases} x + y = 5 + i \\ xy = 8 + i \end{cases}$.

Do đó x, y là nghiệm của phương trình $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0 \quad (1)$.

Ta có $\Delta = (5 + i)^2 - 4(8 + i) = -8 + 6i = 9i^2 + 6i + 1 = (3i + 1)^2$, nên các nghiệm của (1) là $z = 3 + 2i; z = 2 - i$.

Vậy các nghiệm của hệ đã cho là $(2 - i; 3 + 2i); (3 + 2i; 2 - i)$.

Chú ý. Hệ đối xứng hai ẩn loại I thường được giải bằng phương pháp biến đổi các phương trình về dạng tổng $S = x + y$ và tích $P = xy$.

Một số kết quả hay dùng

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P.$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3SP.$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2.$$

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = S^2 - 4P \dots$$

b) Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ nên hệ phương trình đã cho tương đương

với $\begin{cases} x + y = 3(1+i) \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 9(-1+i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3(1+i) \\ 27(1+i)^3 - 9xy(1+i) = 9(-1+i) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3(1+i) \\ xy = \frac{3(1+i)^3 - (-1+i)}{1+i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3(1+i) \\ xy = 5i \end{cases}$$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$ (2).

Giải phương trình (2)

$$\Delta = 9(1+i)^2 - 4 \cdot 5i = 2i = 1 + 2i \text{ (tập số phức)}$$

Nghiệm của (2) là $z = \frac{3(1+i) + 1 - i}{2} = 2 + i$

Vậy các nghiệm cần tìm là $(2+i; 1+2i), (1+2i; 2+i)$.

Ví dụ 1.33. Giải hệ phương trình với x, y thuộc tập số phức

a) $\begin{cases} x^2 + y = -5(2+x) \\ y^2 + x = -5(2+y) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - ix = -2 + 5(i+y) \\ y^2 - iy = -2 + 5(i+x) \end{cases}$

Lời giải.

a) Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y = -5(2+x) & (1) \\ y^2 + x = -5(2+y) & (2) \end{cases}$ thuộc dạng hệ đối xứng hai ẩn loại II.

Trừ vế với vế các phương trình (1) và (2) ta được

$$x^2 + y - y^2 - x = -10 - 5x + 10 + 5y \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4(x - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + 4(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 4) = 0.$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y = -5(2+x) \\ (x-y)(x+y+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -5(2+x) \quad (3) \\ x - y = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

+ Nếu $y = x$ thì từ (3) ta có $x^2 + x = -10 - 5x \Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = 0$

Giai ra ta được nghiệm $\begin{cases} x = -3 + i \Rightarrow y = -3 + i \\ x = -3 - i \Rightarrow y = -3 - i \end{cases}$

+ Nếu $y = -4 - x$ thì từ (3) ta có

$$x^2 - 4 - x = -10 - 5x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2}i \Rightarrow y = -2 - \sqrt{2}i \\ x = -2 - \sqrt{2}i \Rightarrow y = -2 + \sqrt{2}i \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của hệ đã cho là

$$(-3 + i; -3 + i); (-3 - i; -3 - i); \\ (-2 + \sqrt{2}i; -2 - \sqrt{2}i); (-2 - \sqrt{2}i; -2 + \sqrt{2}i)$$

Chú ý. Phương pháp chung giải hệ đối xứng hai ẩn $(x; y)$ loại II là xét hiệu các phương trình, kết quả đó luôn phân tích được thành tích với một nhân tử là $x - y$. Sau đó giải tiếp hệ bằng phương pháp thế.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - ix = -2 + 5(i + y) \quad (4) \\ y^2 - iy = -2 + 5(i + x) \quad (5) \end{cases}$

Trừ vế với vế phương trình (4) cho phương trình (5), ta có

$$\begin{aligned} x^2 - ix - y^2 + iy &= -2 + 5i + 5y + 2 - 5i - 5x \\ \Leftrightarrow x^2 - y^2 + (5 - i)x - (5 - i)y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 5 - i) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = i - 5 - x \end{cases} \end{aligned}$$

+ Nếu $y = x$ thay vào phương trình (4):

$$x^2 - ix = -2 + 5(i + x) \Leftrightarrow x^2 - (5 + i)x + 2 - 5i = 0 \quad (6)$$

Giai phương trình (6): $\Delta_6 = (5 + i)^2 - 4(2 - 5i) = 16 + 30i$

Vì $16 + 30i = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 3i + 9i^2 = (5 + 3i)^2$ nên các nghiệm của phương trình (6) là $x = 5 + 2i; x = -i$.

Do đó $(x; y) = (5 + 2i; 5 + 2i); (-i; -i)$,

+ Nếu $y = i - 5 - x$ thế vào phương trình (4):

$$x^2 - ix = -2 + 5(i + i - 5 - x) \Leftrightarrow x^2 + (5 - i)x + 27 - 10i = 0 \quad (7)$$

Giải phương trình (7): $\Delta_7 = (5 - i)^2 - 4(27 - 10i) = -84 + 30i$.

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của Δ_7 .

Vì $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ nên $z^2 = \Delta_7$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -84 \\ 2ab = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -84 \\ b = \frac{15}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{225}{a^2} = -84 \\ b = \frac{15}{a} \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

$$\text{Giải (8): } a^2 - \frac{225}{a^2} = -84 \Leftrightarrow a^4 + 84a^2 - 225 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = -42 + 3\sqrt{221} \\ a^2 = -42 - 3\sqrt{221} \end{cases}$$

Suy ra $a^2 = -42 + 3\sqrt{221} \Rightarrow a = \pm\sqrt{-42 + 3\sqrt{221}}$

+) Nếu $a = \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}}$ thì từ (9) ta có

$$b = \frac{15}{a} = \frac{15}{\sqrt{-42 + 3\sqrt{221}}} = \frac{15\sqrt{42 + 3\sqrt{221}}}{\sqrt{-42^2 + 9 \cdot 221}} = \sqrt{42 + 3\sqrt{221}}$$

+) Nếu $a = -\sqrt{-42 + 3\sqrt{221}}$ thì $b = -\sqrt{42 + 3\sqrt{221}}$.

Nghiệm của phương trình (7):

$$\begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}} + (\sqrt{42 + 3\sqrt{221}} + 1)i}{2} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}} - (\sqrt{42 + 3\sqrt{221}} - 1)i}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta tính được y và suy ra các nghiệm của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x = 5 + 2i \\ y = 5 + 2i \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -i \\ y = -i \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}} + (\sqrt{42 + 3\sqrt{221}} + 1)i}{2} \\ y = \frac{-5 - \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}} - (\sqrt{42 + 3\sqrt{221}} - 1)i}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{-5 - \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}} - (\sqrt{42 + 3\sqrt{221}} - 1)i}{2} \\ y = \frac{-5 + \sqrt{-42 + 3\sqrt{221}} + (\sqrt{42 + 3\sqrt{221}} + 1)i}{2} \end{cases}$$

BÀI TẬP**Bài 1.11.** Tìm căn bậc hai của số phức

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $w = 3 + 4i$ | b) $w = -8 - 6i$ |
| c) $w = 5 + 12i$ | d) $w = -i$ |
| e) $w = -2 + 2\sqrt{3}i$ | f) $w = 1 + 4\sqrt{3}i$ |
| g) $w = 1 - i$ | h) $w = -3 + 8i$ |
| i) $w = -1 - 2\sqrt{5}i$ | j) $w = 12 - 5i$ |
| k) $w = 1 + \sqrt{15}i$ | l) $w = 2 - \sqrt{21}i$ |

Bài 1.12. Giải phương trình

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $4z^2 - 3z + 1 = 0$ | b) $3z^2 + 2\sqrt{17}z + 7 = 0$ |
| c) $z^2 + (i - 6)z + 8 - 2i = 0$ | d) $z^2 + (1 + i)z - 10 + 11i = 0$ |
| e) $3z^2 - (5 + 3i)z - 2 - i = 0$ | f) $z^2 - (7 + \sqrt{3}i)z + 16 - \sqrt{3}i = 0$ |

Bài 1.13. Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$. Tính giá trị của các biểu thức

- | | |
|--|--|
| a) $A = z_1^2 + z_2^2$ | b) $B = z_1^4 z_2 + z_2^4 z_1$ |
| c) $C = z_1^4 + z_2^4$ | d) $D = z_1^5 + z_2^5$ |
| e) $E = z_1^6 + z_2^6$ | f) $F = z_1^7 + z_2^7$ |
| g) $G = \frac{z_1^2}{2z_2 - z_1} + \frac{z_2^2}{2z_1 - z_2}$ | h) $H = \frac{z_1^2 - 2z_2}{3 - z_1} + \frac{z_2^2 - 2z_1}{3 - z_2}$ |
| i) $I = \frac{ z_1 ^2}{ z_2 } + \frac{ z_2 ^2}{ z_1 }$ | j) $K = \frac{ z_1 ^3 + z_2 }{ \bar{z}_2 } + \frac{ z_2 ^3 + z_1 }{ \bar{z}_1 }$ |

Bài 1.14. Chứng minh rằng nếu phương trình bậc n với hệ số thực:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

có một nghiệm phức z thì \bar{z} cũng là nghiệm của phương trình đó.**Bài 1.15.** Lập phương trình bậc hai với hệ số thực có nghiệm là

- | | |
|---|---|
| a) $z_1 = 2 + \sqrt{10}i, z_2 = 2 - \sqrt{10}i$ | b) $z_1 = -\sqrt{2} + 5i, z_2 = -\sqrt{2} - 5i$ |
| c) $z = 4 - i$ | d) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ |

ABC

Bài 1.16. Cho phương trình $z^3 + 2az^2 - bz + c = 0$. Tìm các hệ số thực a, b, c biết rằng phương trình có nghiệm là

a) $z = -3; z = 2 + i$

b) $z = \frac{5}{2}; z = \frac{-2 + 3i}{3}$

c) $z = -1; \bar{z} = \frac{2 - 5i}{3}$

d) $z = \frac{2}{3}; \bar{z} = \frac{-3 + i}{2}$

Bài 1.17. Giải các phương trình sau trên tập số phức

a) $z^3 - 27 = 0$

b) $6z^3 - z^2 + 14z + 5 = 0$

c) $(z^2 + 16)(z^3 - i) = 0$

d) $z^4 - z^3 + 27iz - 27i = 0$

e) $5z^4 + 7z^2 - 12 = 0$

f) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

g) $z^3 - 2(1 + i)z^2 - (4 + 9i)z - 1 - 7i = 0$

h) $5z^3 - (4 - 5i)z^2 + 4(2 - i)z + 8i = 0$

i) $iz^3 + z^2 - (1 + 4i)z - 2 = 0$

j) $z^4 + 6(1 + i)z^2 + 5 + 6i = 0$



Bài 1.18. Giải các phương trình sau với $x \in \mathbb{C}$

a) $(x^2 + 3x)^2 - 5(x^2 + 3x) - 36 = 0$

b) $(x - 3)^4 + (x - 5)^4 = 16$

c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 11x + 30) = 60$

d) $2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2 = 0$

e) $x^4 + 2x^3 + 17x^2 - 20x + 100 = 0$

f) $x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0$

g) $(x^2 + 1)(x^2 + 8ix - 15) = 105$

h) $(x - i)^4 + (x + 3i)^4 = 256$

Bài 1.19. Giải các hệ phương trình sau với x, y là các số phức

a) $\begin{cases} 3ix - y = -3 \\ x - \sqrt{3}y = -7i \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2 - i)x - (3 - 2i)y = -10 - 8i \\ (3 + 2i)x - (-1 + i)y = 3 + 6i \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2y + y^2 - x^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + (4 - i)y = 7 \\ 3x^2 + (1 + 3i)y^2 = 291 + 53i \end{cases}$

Bài 1.20. Giải các hệ phương trình với x, y thuộc tập số phức

a) $\begin{cases} x + y = -1 + 2i \\ x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 45 + 60i \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -4(1 + i) \\ xy + x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2 + 5 = 3y + x \\ 2y^2 + 5 = 3x + y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 10ix + 42i = 6y + 11 \\ y^2 - 10iy + 42i = 6x + 11 \end{cases}$

3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHÚC

3.. Số phức dưới dạng lượng giác

Dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ với $r > 0$, được gọi là dạng *lượng giác* của số phức $z \neq 0$.

- + φ là *argument* của số phức z , được xác định bởi số đo của mỗi góc lượng giác với tia đầu là tia Ox , tia cuối là tia OM (M là điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng phức). *Argument* của số phức z được đo bằng *radian*, mọi argument của z có dạng $\varphi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- + r là *modulus* của số phức z , tức là $r = |z|$.

3.. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Xét 2 số phức $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$; $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Khi đó ta có các hệ thức

$$+ z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \text{ với } r_1 \geq 0, r_2 \geq 0.$$

$$+ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \text{ với } r_1 \geq 0, r_2 > 0.$$

3. Công thức Moivre

Xét số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, với mọi số nguyên dương n ta có:

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (*)$$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

- + Với $n = 1$, (*) có dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Như vậy (*) đúng với $n = 1$.

- + Giả sử (*) đúng đến $n = k (k \in \mathbb{N}^*)$, tức là:

$$z^k = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh (*) đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$z^{k+1} = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{k+1} = r^{k+1} [\cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi] \quad (2)$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp (1) ta có

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k z = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^{k+1} (\cos k\varphi \cos \varphi + i^2 \sin k\varphi \sin \varphi + i \cos k\varphi \sin \varphi + i \sin k\varphi \cos \varphi) \\ &= r^{k+1} [\cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi)] \end{aligned}$$

Vậy (2) đúng, nên theo nguyên lý quy nạp ta có (*) đúng với mọi số nguyên dương n . Công thức (*) gọi là công thức Moivre.

Chú ý.

+ Với $r = 1$ ta có $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

+ Căn bậc hai của số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($r > 0$) là hai số phức $\pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, hay viết ở dạng lượng giác là

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right); \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right].$$

+ Từ công thức Moivre, ta cũng có thể chứng minh được, căn bậc n của số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ gồm n số phức phân biệt được biểu diễn dưới dạng $\sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right) \right]$. Với k nhận các giá trị nguyên từ 0 đến $n-1$.

CÁC VÍ DỤ

downloadsachmienphi.com

Dạng 1: Biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác

+ Chuyển số phức từ dạng đại số $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$) sang dạng lượng giác

- Tính $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Tìm φ thoả mãn đồng thời $\cos \varphi = \frac{a}{r}$, $\sin \varphi = \frac{b}{r}$.

Khi đó dạng lượng giác cần tìm của z là $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

+ Mọi số phức z có nhiều argument, nếu φ là một argument thì mọi argument đều có dạng $\varphi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và z^n có một argument là $n\varphi$.

+ Từ công thức nhân, chia dạng lượng giác suy ra nếu z_1, z_2 lần lượt có một argument là φ_1, φ_2 , thì $z_1 z_2$ và $\frac{z_1}{z_2}$ có argument lần lượt là $\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2$.

Ví dụ 1.34. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác.

a) $z = i$

b) $z = 1 + i$

c) $z = -1 + i$

d) $z = 1 + \sqrt{3}i$

e) $z = \sqrt{3} - i$

f) $z = -\sqrt{3} - i$

Lời giải

- a) Xét số phức $z = i$. Ta có $r = |z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, Góc φ thoả mãn $\cos \varphi = 0, \sin \varphi = 1$, nên chọn $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Vậy dạng lượng giác cần tìm là $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

Chú ý. Dựa vào các giá trị lượng giác đặc biệt, khi chuyển sang dạng lượng giác ta viết $z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$, rồi nhẩm tìm góc φ sao cho $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ và $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$.

- b) Ta có $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$. Mà $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên dạng lượng giác cần tìm là $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

- c) Ta có $z = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$.

Vì $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

- d) Ta có $z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$.

Vì $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

- e) Ta có $z = \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$.

Vì $\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$ nên dạng lượng giác cần tìm là

$$\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

- f) Ta có $z = -\sqrt{3} - i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$

Vì $\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$ nên dạng lượng giác cần tìm là

$$-\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right]$$

* Các kết quả trên được sử dụng nhiều trong các bài tập khác.

ABC

Ví dụ 1.35. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác.

$$a) z = (1 - \sqrt{3}i)(1 + i)$$

$$b) z = (1 + \sqrt{3}i)(1 - i)$$

$$c) z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i}$$

$$d) z = \frac{\sqrt{3} + i}{i - 1}$$

Lời giải

a) Ta có

$$+ z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$+ z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Vậy theo công thức nhân hai số phức dưới dạng lượng giác thì

$$\begin{aligned} z &= (1 - \sqrt{3}i)(1 + i) = z_1 z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \end{aligned}$$

Nhận xét. Nếu ta thực hiện rút gọn về dạng đại số, rồi sử dụng phương pháp chuyển về dạng lượng giác với bài toán trên sẽ gặp khó khăn.

Vì $z = (1 - \sqrt{3}i)(1 + i) = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i$, nên ta có

$$+ r = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}.$$

+ Góc φ thoả mãn $\cos\varphi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ và $\sin\varphi = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Thật khó để xác định φ nhận giá trị nào.

Tuy nhiên, qua hai cách làm khác nhau, ta có

$$z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] = 2\sqrt{2}\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i\right).$$

$$\text{Suy ra được } \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

b) Xét số phức $z = (1 + \sqrt{3}i)(1 - i)$. Ta có

$$+ z_3 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+ z_4 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Do đó

$$\begin{aligned} z &= (1 + \sqrt{3}i)(1 - i) = z_3 z_4 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]. \end{aligned}$$

Vậy ta có $z = (1 + \sqrt{3}i)(1 - i) = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

c) Xét số phức $z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i}$.

$$\begin{aligned} + z_5 &= 1 - \sqrt{3}i = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ + z_6 &= 1 + i = \sqrt{2} \left[\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

Nên theo công thức chia hai số phức dưới dạng lượng giác, ta có

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{z_5}{z_6} = \frac{2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2} \left[\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right]} \\ &= \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right] \end{aligned}$$

Vậy dạng lượng giác cần tìm là

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + i} = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

d) Xét số phức $z = \frac{\sqrt{3} + i}{i - 1}$. Ta có

$$\begin{aligned} + z_7 &= \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) \\ + z_8 &= -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } z &= \frac{\sqrt{3} + i}{i - 1} = \frac{z_7}{z_8} = \frac{2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right].$$

$$\text{Vì vậy } z = \frac{\sqrt{3} + i}{i - 1} = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right].$$

Ví dụ 1.36. Tuỳ theo góc φ , viết các số phức sau dưới dạng lượng giác.

- a) $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$
- b) $1 + \cos \varphi - i \sin \varphi$
- c) $\frac{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}$
- d) $(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi)(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)$

Lời giải

a) Ta có: $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

+ Nếu góc φ thoả mãn $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$ thì không có dạng lượng giác cần tìm.

+ Nếu $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$ thì dạng lượng giác là $2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

+ Nếu $\cos \frac{\varphi}{2} < 0$ thì dạng lượng giác là $\left(-2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$

b) Ta có $1 + \cos \varphi - i \sin \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

+ Nếu $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$ thì không có dạng lượng giác cần tìm.

+ Nếu $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$ thì dạng lượng giác là $2 \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{2} \right) \right]$

+ Nếu $\cos \frac{\varphi}{2} < 0$ thì dạng lượng giác của số phức đã cho là:

$$\left(-2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

c) Ta có $\frac{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2} \right)}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)}$

$$= \tan \frac{\varphi}{2} \frac{\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$= \tan \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = -i \tan \frac{\varphi}{2}$$

+ Nếu $\tan \frac{\varphi}{2} = 0$ thì không có dạng lượng giác xác định.

+ Nếu $\tan \frac{\varphi}{2} > 0$ thì dạng lượng giác của số phức đó là:

$$\tan \frac{\varphi}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

+ Nếu $\tan \frac{\varphi}{2} < 0$ thì dạng lượng giác của số phức đó là

$$\left(-\tan \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

d) Ta có $(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi)(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2} \right) \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= 2 \sin \varphi \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\ &= 2 \sin \varphi \left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

+ Nếu $\sin \varphi = 0$ thì không tồn tại dạng lượng giác xác định.

+ Nếu $\sin \varphi > 0$ thì dạng lượng giác cần tìm là

$$2 \sin \varphi \left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

+ Nếu $\sin \varphi < 0$ thì dạng lượng giác cần tìm là

$$(-2 \sin \varphi) \left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Ví dụ 1.37. Tìm một argument của mỗi số phức

a) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$

b) $2 - \sqrt{3} + i$

c) $\frac{5 + 11\sqrt{3}i}{7 - 4\sqrt{3}i}$

d) $\frac{-1 - 7\sqrt{3}i}{2\sqrt{3} + 5i}$

e) $1 + \sin \varphi + i \cos \varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$

f) $1 - \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

Vậy một argument của số phức $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ là $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Chú ý. Mọi argument của $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ có dạng $-\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ nên khi tìm một argument của số phức, có thể có kết quả khác nhau, nhưng chắc chắn các kết quả sai khác nhau một bội của 2π .

b) Ta có $2 - \sqrt{3} + i = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left[1 + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$$= 2\left[2\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

Vì $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ nên $4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$, do đó một argument của số phức

$$2 - \sqrt{3} + i \text{ là } \varphi = \frac{5\pi}{12}$$

Nhận xét. Nếu làm theo cách tìm r, φ thì khó nhận ra được $\varphi = \frac{5\pi}{12}$, bởi lẽ

không phải bạn nào cũng nghĩ đến việc chứng minh $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

c) Ta có $\frac{5 + 11\sqrt{3}i}{7 - 4\sqrt{3}i} = \frac{(5 + 11\sqrt{3}i)(7 + 4\sqrt{3}i)}{(7 - 4\sqrt{3}i)(7 + 4\sqrt{3}i)} = \frac{-97 + 97\sqrt{3}i}{7^2 + (4\sqrt{3})^2} = -1 + \sqrt{3}i$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Vậy một argument của số phức $\frac{5 + 11\sqrt{3}i}{7 - 4\sqrt{3}i}$ là $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

d) Vì $\frac{-1 - 7\sqrt{3}i}{2\sqrt{3} + 5i} = \frac{(-1 - 7\sqrt{3}i)(2\sqrt{3} - 5i)}{(2\sqrt{3} + 5i)(2\sqrt{3} - 5i)} = \frac{-37(\sqrt{3} + i)}{(2\sqrt{3})^2 + 5^2} = -\sqrt{3} - i$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right].$$

Nên một argument của số phức $\frac{-1 - 7\sqrt{3}i}{2\sqrt{3} + 5i}$ là $\varphi = \frac{7\pi}{6}$.

c) Ta có $1 + \sin \varphi = \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2$

và $\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Nên } 1 + \sin \varphi + i \cos \varphi &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 + i \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left[\left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) + i \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Mà $\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$, $\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$.

Nên $1 + \sin \varphi + i \cos \varphi = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]$

Vì $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ nên $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) > 0$, do đó một argument cần tìm

của số phức $1 + \sin \varphi + i \cos \varphi$ là $\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}$

f) Vì $1 - \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} + 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right)$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{8} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = 2 \sin \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

Nên một argument của số phức đã cho là $\frac{3\pi}{8}$.

Ví dụ 1.38. Viết dạng lượng giác căn bậc hai của số phức z biết

a) $|z| = 5$ và một argument của iz là $\frac{7\pi}{9}$.

b) $|z| = 4$ và một argument của $i\bar{z}$ là π .

c) $|z| = \frac{1}{3}$ và một argument của $\frac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

a) Vì $|z| = 5$ nên $z = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, suy ra $iz = 5(i \cos \varphi - \sin \varphi)$.

Hay ta có $iz = 5 \left[\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]$.

Vì một argument của iz là $\frac{7\pi}{9}$ nên $\varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{9} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, suy ra $\varphi = \frac{5\pi}{18} + k2\pi$, chọn $k = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{18}$.

Vậy dạng lượng giác của số phức z là $z = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right)$. Suy ra căn bậc hai của z là $\sqrt{5} \left(\cos \frac{5\pi}{36} + i \sin \frac{5\pi}{36} \right); \sqrt{5} \left(\cos \frac{41\pi}{36} + i \sin \frac{41\pi}{36} \right)$.

b) Vì $|z| = 4$ nên $z = 4(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \bar{z} = 4(\cos \varphi - i \sin \varphi)$

Do đó $i\bar{z} = 4(i \cos \varphi + \sin \varphi) = 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right]$.

Ta có một argument của $i\bar{z}$ là π nên $\frac{\pi}{2} - \varphi = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, vì thế

$\varphi = -\frac{\pi}{2} - k2\pi$. Chọn $k = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Dạng lượng giác của số phức z đó là $z = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$.

Vậy căn bậc hai cần tìm là

$2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right], 2 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$.

c) Ta có $|z| = \frac{1}{3}$ nên $z = \frac{1}{3}(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{3}(\cos \varphi - i \sin \varphi)$

Mặt khác $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Do đó $\frac{\bar{z}}{1+i} = \frac{\frac{1}{3}(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{6} \left[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \right]$
 $= \frac{\sqrt{2}}{6} \left[\cos \left(-\varphi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right]$

Một argument của $\frac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$ nên $-\varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - k2\pi$, chọn $k = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$. Vậy $z = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ nên

dạng lượng giác căn bậc hai của z là các số phức:

$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

Dạng 2: Vận dụng dạng lượng giác giải toán

Dạng lượng giác được ứng dụng nhiều trong giải toán. Trong phần này ta chỉ xét các ứng dụng trong bài toán tính toán (tìm phần thực, phần ảo, rút gọn ...), tìm số phức, chứng minh hệ thức lượng giác đơn giản ...

Ví dụ 1.39. Tìm phần thực, phần ảo của các số phức sau

a) $i^9(\sqrt{3} - i)^6$

b) $(1 - \sqrt{3}i)^{16}(1 + i)^{10}$

c) $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{21}}{(1 - i)^9}$

d) $\left(\frac{5 + 7i}{6 + i}\right)^{18}$

Lời giải

a) Vì $\sqrt{3} - i = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$ nên theo công thức Moivre ta có

$$(\sqrt{3} - i)^6 = 2^6 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]^6 = 2^6 [\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)].$$

Lại có $i^9 = i^8 i = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$ nên

$$i^9 (\sqrt{3} - i)^6 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right) \cdot 2^6 [\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)]$$

$$= 2^{16} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \right] = 2^{16} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = -2^6 i$$

Do đó phần thực của số phức là 0 và phần ảo là -2^6 .

b) Xét số phức $(1 - \sqrt{3}i)^{16}(1 + i)^{10}$.

Ta có $1 - \sqrt{3}i = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$ và $1 + i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$

Do đó

$$+ (1 - \sqrt{3}i)^{16} = 2^{16} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]^{16} = 2^{16} \left[\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right) \right].$$

$$+ (1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^{10} = 2^5 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right].$$

$$\text{Vậy } (1 - \sqrt{3}i)^{16}(1 + i)^{10} = 2^{21} \left[\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 2^{21} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{16\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{16\pi}{3}\right) \right] = 2^{21} \left[\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) \right]$$

Mặt khác $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(-2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ và
 $\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, nên $(1 - \sqrt{3}i)^{16} (1 + i)^{10} = -2^{20} \sqrt{3} - 2^{20}i$.

Vậy phần thực của số phức đã cho là $-2^{20} \sqrt{3}$, phần ảo là -2^{20} .

c) $1 + \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$; $1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Ta có
$$\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{21}}{(1 - i)^9} = \frac{2^{21} \left[\cos\left(\frac{21\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{21\pi}{3}\right) \right]}{(\sqrt{2})^9 \left[\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) \right]}$$

 $= 2^{16} \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{21\pi}{3} + \frac{9\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{21\pi}{3} + \frac{9\pi}{4}\right) \right]$
 $= 2^{16} \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{37\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{37\pi}{4}\right) \right] = 2^{16} - 2^{16}i.$

Vậy phần thực cần tìm là -2^{16} và phần ảo là -2^{16} .

d) Ta có:

$$\left(\frac{5+7i}{6+i}\right)^{18} = (1+i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{18} = 2^9 \left(\cos\frac{18\pi}{4} + i \sin\frac{18\pi}{4}\right) = 2^9i.$$

Do đó, phần thực của số phức đã cho là 0, phần ảo là 2^9 .

Ví dụ 1.40. Tìm các số nguyên dương n để số phức sau là số thực? số ảo?

a) $\left(\frac{3+11i}{4-7i}\right)^n$ b) $\left(\frac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}\right)^n$

Lời giải

a) Rút gọn $z = \frac{3+11i}{4-7i} = -1+i$. Mà $-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})$

nên $(\frac{3+11i}{4-7i})^n = (\sqrt{2})^n (\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})^n = (\sqrt{2})^n (\cos\frac{3n\pi}{4} + i \sin\frac{3n\pi}{4})$

+ Số phức z là số thực khi $\sin\frac{3n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3n\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = \frac{4k}{3}$.

Vì $n \in \mathbb{Z}^+$ và hai số 4 và 3 nguyên tố cùng nhau, nên $k:3 \Rightarrow k=3m$
 $\Rightarrow n = 4m (m \in \mathbb{N}^+)$.

+ Tương tự, z là số ảo khi $\cos \frac{3n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, suy ra

$$n = \frac{2+4k}{3} = k + \frac{2+k}{3} \Rightarrow k = 3m+1 (m \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = 4m+2.$$

Vậy $z \in \mathbb{R}$ khi n là bội nguyên dương của 4, z là số ảo khi n là số nguyên dương chia 4 dư 2.

b) Ta có $z = \left(\frac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}\right)^n = (-1+\sqrt{3}i)^n = 2^n \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^n$

Theo công thức Moivre ta có $z = 2^n \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}\right)$

+ z là số thực khi $\sin \frac{2n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2n\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = \frac{3k}{2} = k + \frac{k}{2}$. Vì

$n \in \mathbb{N}^*$ nên $k = 2m (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n = 3m$.

+ z là số ảo khi $\cos \frac{2n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n = \frac{3(2k+1)}{4}$.

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ và $(3; 4) = 1$, $(2k+1) \not\equiv 4 \pmod{3}$ (do $2k+1$ là số lẻ). Vậy $z \in \mathbb{R}$ với n là bội nguyên dương của 3 và không tồn tại n để z là số ảo.

Ví dụ 1.41. Tìm số phức z sao cho z^5 và $\frac{1}{z^2}$ là hai số phức liên hợp.

Lời giải.

Đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \varphi \in [0; 2\pi]$, thì $z^5 = r^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi)$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} = \frac{\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}{r^2} = \frac{1}{r^2} [\cos(-2\varphi) + i \sin(-2\varphi)]$$

Do đó z^5 và $\frac{1}{z^2}$ là hai số phức liên hợp khi và chỉ khi $\overline{z^5} = \frac{1}{z^2}$.

$$\text{Hay là } r^5 [\cos(-5\varphi) + i \sin(-5\varphi)] = \frac{1}{r^2} [\cos(-2\varphi) + i \sin(-2\varphi)]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = \frac{1}{r^2} \\ 5\varphi = 2\varphi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \cos \frac{k2\pi}{3} + i \sin \frac{k2\pi}{3}$$

Vì $\varphi \in [0; 2\pi]$ nên $k = \{0; 1; 2\}$.

Vậy số phức cần tìm là $z = \cos \frac{k2\pi}{3} + i \sin \frac{k2\pi}{3}$ với $k = \{0; 1; 2\}$.

Chú ý. Nếu sử dụng căn bậc n của đơn vị, thì giải như sau.

$$+) \text{ Vì } \overline{z^5} = \frac{1}{z^2} \text{ nên } |\overline{z^5}| = \left| \frac{1}{z^2} \right| \Rightarrow |z|^7 = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

$$+) \text{ Từ } |z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1} \text{ nên } \overline{z^5} = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow \frac{1}{z^5} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow z^3 = 1.$$

Vậy z là căn bậc ba của đơn vị, do đó $z = \cos \frac{k2\pi}{3} + i \sin \frac{k2\pi}{3}, k = \{0; 1; 2\}$.

Ví dụ 1.42. Tìm số phức z thoả mãn .

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{10+22i}{8+3i} = 2+2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Gọi $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ với $\varphi \in [0; 2\pi)$ thì $z^3 = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$ nên

$$z^3 = \frac{10+22i}{8+3i} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\varphi = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Do $\varphi \in [0; 2\pi)$ nên $k = \{0; 1; 2\}$, do đó có 3 số phức thoả mãn là

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

Ví dụ 1.43. Giải phương trình trên tập số phức $z^5 + i = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right). \text{ Đặt } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ với } \varphi \in [0; 2\pi).$$

Theo công thức Moivre ta có $z^5 = r^5 (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = r^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi)$.

Do đó phương trình đã cho có dạng

$$r^5 (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\varphi = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Vì $\varphi \in [0; 2\pi)$ và $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = \{1; 2; 3; 4; 5\}, r = 1$.

Vậy có 5 nghiệm phức cần tìm $z = \cos \left(-\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \right)$

với $k = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Ví dụ 1.44. Chứng minh rằng

a) $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$

b) $\cos 5\varphi = 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi$

*Lời giải*a) Theo công thức Moivre ta có $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + (3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cân bằng phần thực và phần ảo, suy ra } \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi. \end{aligned}$$

b) Tương tự, ta có $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi$. Mà

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 &= \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi + 10i^2 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad - 10i^3 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5i^4 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i^5 \sin^5 \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Xé: phần thực hai véc tơ } \cos 5\varphi \text{ và } \cos^5 \varphi + 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi.$$

$$\text{Thay } \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi, \text{ ta được } \cos 5\varphi = 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi$$

Ví dụ 1.45. Chứng minh công thức Jonh Machin

Với $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan a = \frac{1}{5}$, $\tan b = \frac{1}{239}$ thì $4a - b = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Xét hai số phức $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 239 + i$ được biểu diễn bởi hai điểm $M_1(5; 1)$, $M_2(239; 1)$ thuộc góc phán tư thứ nhất của hệ toạ độ Oxy .

Vì $\tan(Ox, OM_1) = \frac{1}{5} = \tan a$, $\tan(Ox, OM_2) = \frac{1}{239} = \tan b$ nên a, b là

một argument của z_1, z_2 . Suy ra một argument của $\frac{z_1^4}{z_2}$ là $4a - b$.

Mặt khác $\frac{z_1^4}{z_2} = \frac{(5+i)^4}{239+i} = \frac{476+480i}{239+i} = 2(1+i) = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$,

suy ra $4a - b = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vì $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $4a - b = \frac{\pi}{4}$.

ABC

Chú ý. Năm 1706 Jonh Machin đã dùng công thức này tính gần đúng số π , chính xác đến 100 số thập phân.

Ví dụ 1.46. Trong mặt phẳng phức có O là gốc toạ độ, cho hai điểm A_1, A_2 biểu diễn hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$. Chứng minh rằng tam giác OA_1A_2 là tam giác đều khi và chỉ khi $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Vì } z_1, z_2 \neq 0 \text{ nên đặt } \frac{z_1}{z_2} = x \text{ thì ta có: } z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Leftrightarrow x^2 z_2^2 + z_2^2 = x z_2^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $|x| = 1$ và một argument của x là $\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{3}$.

+)
+) Vì $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}|$ nên $OA_1 = OA_2$.

+)
+) Vì một argument của x là $\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{3}$ nên góc (OA_1, OA_2) là $\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{3}$. Điều đó chứng tỏ tam giác OA_1A_2 là tam giác đều.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

BÀI TẬP

Bài 1.21. Viết dạng lượng giác và tìm căn bậc hai của số phức:

- | | |
|---|--|
| a) $z = (3 - i)(1 - 3i)$ | b) $z = (2 + \sqrt{3}i)(1 + 3\sqrt{3}i)$ |
| c) $z = \frac{(i - 3)(1 + 12i)}{5 + 2i}$ | d) $z = \frac{(\sqrt{3} + 2i)(-5\sqrt{3} + 17i)}{2\sqrt{3} + i}$ |
| e) $z = (1 + \sqrt{3}i)(-1 - i)$ | f) $z = (\sqrt{3} - i)(1 + 7i)(1 - 2i)^2$ |
| g) $z = \frac{11 + 3\sqrt{3}i}{(2\sqrt{3} + 5i)(-1 + i)}$ | h) $z = \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^7 (\sqrt{3} + i)^8}{(1 - i)^9}$ |

Bài 1.22. Tuỳ theo góc φ , viết các số phức sau dưới dạng lượng giác:

- | | |
|---|--|
| a) $1 - \cos \varphi - i \sin \varphi$ | b) $1 - \cos \varphi + i \sin \varphi$ |
| c) $1 + \sin \varphi + i \cos \varphi$ | d) $1 - \sin \varphi + i \cos \varphi$ |
| e) $\cos \varphi + i(1 + \sin \varphi)$ | f) $\cos \varphi + i(1 - \sin \varphi)$ |
| g) $(1 - \cos \varphi + i \sin \varphi)(1 + \sin \varphi + i \cos \varphi)$ | h) $\frac{1 - \sin \varphi + i \cos \varphi}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}$ |

Bài 1.23. Tìm một argument và tính modun của các số phức sau:

a) $-\sqrt{5} + \sqrt{15}i$
 c) $2 + \sqrt{3} - i$
 e) $1 - \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$

b) $(4 + 7i)(-3 - 11i)$
 d) $2 - \sqrt{3} - i$
 f) $1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5}$
 g) $\sin \varphi - i(1 + \cos \varphi) \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$
 h) $1 - \sin \varphi - i \cos \varphi \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$
 i) $\frac{3\sqrt{2} + 5i}{1 + \sqrt{2}i} - 4 \frac{3 - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} + i}$
 j) $\frac{(-\sqrt{3} - i)^5}{(1 + i)^6}, \frac{-33 + 19\sqrt{3}i}{6 + 13\sqrt{3}i}$

Bài 1.24. Tìm số phức z ở dạng lượng giác biết rằng:

a) $|z| = 2$ và một argument của $(1+i)z$ là $\frac{5\pi}{12}$.

b) $z\bar{z} = 9$ và một argument của $(1 - \sqrt{3}i)\bar{z}$ là $\frac{\pi}{4}$.

c) $|z| = \frac{1}{4}$ và một argument của $\frac{z}{\sqrt{3} + i}$ là $\frac{2\pi}{3}$.

d) $|\bar{z}| = \frac{3}{16}$ và một argument của $\frac{\bar{z}(1-i)(4+3\sqrt{3}i)}{-13+\sqrt{3}i}$ là $\frac{\pi}{12}$.

Bài 1.25. Giải phương trình với z là số phức:

a) $z^3 = 3 - \sqrt{3}i$

b) $z^4 = -1$

c) $z^5 = 1$

d) $z^3 = \frac{3 + 23\sqrt{3}i}{18 + 5\sqrt{3}i}$

e) $z^4 = \frac{53 - 13\sqrt{3}i}{23 + 10\sqrt{3}i}$

f) $z^5 = \frac{5 + 29i}{17 + 12i}$

Bài 1.26. Tìm các số nguyên dương n để số phức sau là số thực? số ảo?

a) $\left(\frac{13\sqrt{3} + 9i}{12 - \sqrt{3}i}\right)^n$
 b) $\frac{(7 + 17i)^n}{(2 + 3i)^{2n}}$
 c) $\frac{(-59 - 11\sqrt{3}i)^n}{(3\sqrt{3} - 2i)^{2n}}$

Bài 1.27. Tìm số phức z thoả mãn:

a) z^4 & $\frac{1}{z^3}$ là hai số phức liên hợp của nhau.

b) \bar{z}^3 & $\frac{32}{z^2}$ là hai số phức liên hợp.

ABU

Bài 1.28. Chứng minh rằng:

- a) $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$
- b) $\sin 5\varphi = 16 \sin^5 \varphi - 20 \sin^3 \varphi + 5 \sin \varphi$
- c) $\left(\frac{1+i \tan \varphi}{1-i \tan \varphi} \right)^n = \frac{1+i \tan n\varphi}{1-i \tan n\varphi}$
- d) $\left(\frac{1+i \cot \varphi}{1-i \cot \varphi} \right)^{2n+1} = \frac{1-i \cot(2n+1)\varphi}{1+i \cot(2n+1)\varphi}$

Bài 1.29. Chứng minh rằng căn bậc n ($n \in \mathbb{Z}^+$) của đơn vị là n số phức có dạng $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ với $k = \{0; 1; 2; 3; \dots; n-2; n-1\}$.

Bài 1.30. Chứng minh rằng:

- a) $2a - b = \frac{\pi}{4}$ với $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{7}$.
- b) $2c + b = \frac{\pi}{4}$ với $c, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\tan c = \frac{1}{3}, \tan b = \frac{1}{7}$.
- c) $5b + 2d = \frac{\pi}{4}$ với $b, d \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\tan d = \frac{3}{79}, \tan b = \frac{1}{7}$.

GỢI Ý VÀ ĐÁP SỐ

Bài 1.1.

- a) $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = 8, |z| = \sqrt{65}.$
- b) $\operatorname{Re} z = -7, \operatorname{Im} z = -9, |z| = \sqrt{130}.$
- c) $\operatorname{Re} z = 2, \operatorname{Im} z = 0, |z| = 2.$
- d) $\operatorname{Re} z = 8, \operatorname{Im} z = 2, |z| = 2\sqrt{17}.$
- e) $\operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z = -\frac{41^{18}}{2}, |z| = \frac{41^{18}}{2}.$
- f) $\operatorname{Re} z = -8, \operatorname{Im} z = 6, |z| = 10.$
- g) $\operatorname{Re} z = -\frac{27}{65}, \operatorname{Im} z = \frac{21}{65}, |z| = \frac{3\sqrt{130}}{65}.$

h) $\operatorname{Re} z = 61, \operatorname{Im} z = -32, |z| = \sqrt{4745}$.

i) $\operatorname{Re} z = -\frac{(1 + 2^{2010} + \sqrt{3} \cdot 2^{2010})(1 + 3\sqrt{3})}{13}$

$$\operatorname{Im} z = -\frac{(1 + 2^{2010} + \sqrt{3} \cdot 2^{2010})(5 + 2\sqrt{3})}{13}, |z| = \frac{(1 + 2^{2010} + \sqrt{3} \cdot 2^{2010})(65 + 26\sqrt{3})}{13}$$

Bài 1.2. Tính toán, hoặc sử dụng điều kiện $z = -\bar{z}$.

a) $z = -3i$

b) $z = (62 + 16\sqrt{10})i$

c) $\bar{z} = \frac{5 + \sqrt{2}i}{2\sqrt{3} - 10i} - \frac{5 - \sqrt{2}i}{2\sqrt{3} + 10i} = \frac{5 - \sqrt{2}i}{2\sqrt{3} + 10i} - \frac{5 + \sqrt{2}i}{2\sqrt{3} - 10i} = -z$

d) Chú ý $(3+i)(79+7i) = 10(23+10i)$

Bài 1.3.

a) Từ $(2-i)^3 = 2-11i, (-3+2i)(2-3i) = 13i$ ta có:

$$\begin{cases} 4x + 2 = 6 \\ 11(2x + 1) + 13y = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

b) Vì $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 = (-i)^7 = i, (x-i)^2 = x^2 - 2ix - 1$ nên suy ra hệ

$$\begin{cases} (x^2 - 1)(y + 2) = -19 \\ 3x - y - 2x(y + 2) = -23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)(y + 2) = -19 \\ y(1 + 2x) = 23 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 25x^2 + 35x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2; x = \frac{-19 \pm \sqrt{397}}{6}$$

Bài 1.4. Sử dụng $|z|^2 = z\bar{z}$.

Bài 1.5. Dùng quy nạp toán học.

Bài 1.6.

a) $z = \frac{13}{5} + \frac{1}{5}i$

b) $z = -\frac{11}{17} + \frac{41}{17}i$

c) $z = 2$

d) $z = i$

e) $z = \pm i$

f) $z = \pm\sqrt{5}$

g) $z = 1 + 8i$

h) $z = 0; z = \pm i$

ABC

Bài 1.7.

a) $z = 1 + i$

b) $z = 3; z = 3 - \frac{150}{7}i$

c) $z = 0; z = -3 + 3i$

d) $z = 2 \pm \sqrt{\frac{3\sqrt{17}-5}{2}} - i$

Bài 1.8.

a) Vì $z_A + z_B + z_C = -5 + 3i = z_M + z_N + z_P$

b) Từ $z_M + z_P = z_N + z_Q \Rightarrow z_Q = -7 + 9i$

c) $\cos DAB = \frac{1}{\sqrt{10}} = -\cos BCD$

Bài 1.9.

a) Toạ độ $M(x; y)$ thoả mãn $xy + y - 2 = 0$.

b) Toạ độ $M(x; y)$ thoả mãn $x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0$.

c) $M(x; y)$ thuộc đường cong $x^2 - y^2 = -1$ trừ điểm $(0; -1)$.

d) $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $x = 0$ hoặc $y = -\frac{1}{2}$ trừ điểm $(0; 1)$.

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 1.10.

a) $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $10x - 4y - 9 = 0$.

b) $M(x; y)$ thuộc đường tròn $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 4$.

c) $M(x; y)$ thuộc đường thẳng $6x + 4y - 5 = 0$.

d) $M(x; y)$ thuộc đường tròn $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Bài 1.11.

a) $z = \pm(2 + i)$

b) $z = \pm(1 - 3i)$

c) $z = \pm(3 + 2i)$

d) $z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

e) $z = \pm(1 + \sqrt{3}i)$

f) $z = \pm(2 + \sqrt{3}i)$

g) $z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}i\right)$

h) $z = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{73}-3}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{73}+3}{2}}i\right)$

i) $z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{21}-1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{21}+1}{2}}i \right)$

j) $z = \pm \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

k) $z = \pm \left(\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \right)$

l) $z = \pm \left(\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \right)$

Bài 1.12.

a) $z = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{8}$

b) $z = \frac{-\sqrt{17} \pm \sqrt{6}i}{3}$

c) $z = 2; z = 4 - i$

d) $z = 3 - 2i; z = -4 + i$

e) $z = -\frac{1}{3}; z = 2 + i$

f) $z = 2 - \sqrt{3}i; z = 5 + 2\sqrt{3}i$

Bài 1.13. $S = z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}; P = 5$.

a) $A = S^2 - 2P$

b) $B = P(S^3 - 3SP)$

c) $C = S^4 - 4S^2P + 2P^2$

d) $D = (S^2 - 2P)(S^3 - 3SP) - SP^2$

e) $E = (S^3 - 3SP)^2 - 2P^3$

f) $F = (S^3 - 3SP)(S^4 - 4S^2P + 2P^2) - SP^3$

g) $G = \frac{2S^3 - 7SP}{9P - 2S^2}$

h) $H = \frac{5S^2 - SP - 6S - 10P}{P - 3S + 9}$

i) $I = 2\sqrt{5}$

k) $K = 12$

Bài 1.14. $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.**Bài 1.15.**

a) $z^2 - 4z + 14 = 0$

b) $z^2 + 2\sqrt{2}z + 27 = 0$

c) $z^2 + 8z + 17 = 0$

d) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$

Bài 1.16.

a) $a = -\frac{1}{2}; b = 7; c = 15$

b) $a = -\frac{7}{12}; b = \frac{17}{9}; c = -\frac{65}{18}$

c) $a = -\frac{1}{6}; b = -\frac{17}{9}; c = \frac{29}{9}$

d) $a = \frac{7}{6}; b = -\frac{1}{2}; c = -\frac{5}{3}$

Bài 1.17.

a) $z = 3; z = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

b) $z = -\frac{1}{3}; z = \frac{1 \pm \sqrt{41}i}{4}$

c) $z = \pm 4i; z = -i; z = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$

d) $z = 1; z = 3i; z = \frac{\pm 3\sqrt{3} - 3i}{2}$

e) $z = \pm 1; z = \frac{\pm 2\sqrt{15}i}{5}$

f) $z = \pm(2i + 1); z = \pm(2i - 1)$

g) $z = -1; z = -1 - i; z = 4 + 3i$

h) $z = -i; z = \frac{2 + 6i}{5}; z = \frac{2 - 6i}{5}$

i) $z = 2; z = \frac{-2 \pm \sqrt{3} + i}{2}$

k) $z = \pm i; z = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{61} - 5}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{61} + 5}{2}i} \right)$

Bài 1.18.

a) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}; x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

b) $x = 3; x = 5; x = 4 \pm \sqrt{7}i$

c) $x = 0; x = -7; x = \frac{-7 \pm \sqrt{15}i}{2}$

d) $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}; x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$

e) $x = 1 \pm 2i; x = -2 \pm 4i$

f) $x^4 + 3x^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 + (x + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (ix + 3i)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm 2i; x = -1 \pm i$

g) $(x^2 + 1)(x^2 + 8ix - 15) = 105 \Leftrightarrow (x - i)(x + i)(x + 3i)(x + 5i) = 105$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4xi - 3)(x^2 + 4xi + 5) = 105 \Rightarrow x = -2i; x = 6i; x = -2i \pm \sqrt{6}$

h) $x = i; x = -3i; x = \pm 2\sqrt{7} - i$

ABC
62

Bài 1.19.

a) $x = \frac{6\sqrt{3} + 5i}{7}, y = \frac{6 + 18\sqrt{3}i}{7}$

b) $x = i, y = 1 + 4i$

c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -10 \\ y = 4 + i \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{25332 + 2226i}{2557} \\ y = -\frac{1618 + 961i}{2557} \end{cases}$

Bài 1.20.

a) $S = -1 + 2i, P = -9 + 13i \Rightarrow (x; y) = (3 - i; -4 + 3i), (x; y) = (-4 + 3i; 3 - i)$

b) $S = 1 - i, P = 2 + i$ hoặc $S = -3 + i, P = 6 - i$ nên $(x; y) = (i; 1 - 2i)$ hoặc

$$\left(\frac{-3 + \sqrt{\sqrt{65} - 8} + (1 - \sqrt{\sqrt{65} + 8})i}{2}, \frac{-3 - \sqrt{\sqrt{65} - 8} + (1 + \sqrt{\sqrt{65} + 8})i}{2} \right)$$

và hoán vị.

c) $\begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{6}i}{2} \\ y = \frac{2 + \sqrt{6}i}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{6}i}{2} \\ y = \frac{2 - \sqrt{6}i}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 5 + 2i \\ y = 5 + 2i \end{cases}; \begin{cases} x = 1 + 8i \\ y = 1 + 8i \end{cases}; \begin{cases} x = -3 + \sqrt{2\sqrt{178} - 26} + (5 - \sqrt{2\sqrt{178} - 26})i \\ y = -3 - \sqrt{2\sqrt{178} - 26} + (5 + \sqrt{2\sqrt{178} - 26})i \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 - \sqrt{2\sqrt{178} - 26} + (5 + \sqrt{2\sqrt{178} - 26})i \\ y = -3 + \sqrt{2\sqrt{178} - 26} + (5 - \sqrt{2\sqrt{178} - 26})i \end{cases}$$

Bài 1.21. a) $z = 10 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ b) $z = 14 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

c) $z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ d) $z = 14 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

e) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$ f) $z = 50\sqrt{2} \left(\cos \frac{-5\pi}{12} + i \sin \frac{-5\pi}{12} \right)$

$$g) z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-11\pi}{12} + i \sin \frac{-11\pi}{12} \right) \quad h) z = (\sqrt{2})^{21} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

Bài 1.22. Bạn đọc tự xét các trường hợp, ở đây viết cho dạng hệ số dương.

$$\begin{aligned} a) 1 - \cos \varphi - i \sin \varphi &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ b) 1 - \cos \varphi + i \sin \varphi &= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ c) 1 + \sin \varphi + i \cos \varphi &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ d) 1 - \sin \varphi + i \cos \varphi &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ e) \cos \varphi + i(1 + \sin \varphi) &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ f) \cos \varphi + i(1 - \sin \varphi) &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ g) (1 - \cos \varphi + i \sin \varphi)(1 + \sin \varphi + i \cos \varphi) \\ &= 4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \varphi \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \varphi \right) \right] \end{aligned}$$

$$h) \frac{1 - \sin \varphi + i \cos \varphi}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Bài 1.23. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ có $|z| = r$ và một argument là φ .

- $z = 2\sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$
- $z = 65\sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$
- $z = 4 \cos \frac{5\pi}{12} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$
- $z = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$
- $z = 2 \sin \frac{\pi}{24} \left(\cos \frac{27\pi}{24} + i \sin \frac{37\pi}{24} \right)$

f) $z = 2 \sin \frac{-3\pi}{20} \left(\cos \frac{-3\pi}{20} + i \sin \frac{-3\pi}{20} \right)$

g) $z = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$

h) $z = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\cos \left(-\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$

i) $z = \frac{19}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

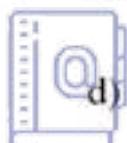
j) $z = 8 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

Bài 1.24.

a) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

b) $z = 3 \left(\cos \frac{-7\pi}{12} + i \sin \frac{-7\pi}{12} \right)$

c) $z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$



d) $z = \frac{3}{16} (\cos \pi + i \sin \pi)$

Bài 1.25.

a) $z_k = \sqrt[6]{12} \left(\cos \frac{-\pi + 12k\pi}{18} + i \sin \frac{-\pi + 12k\pi}{18} \right), k = \{0; 1; 2\}$

b) $z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}, k = \{0; 1; 2; 3\}$

c) $z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

d) $z_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi + 6k\pi}{9} + i \sin \frac{\pi + 6k\pi}{9} \right), k = \{0; 1; 2\}$

e) $z_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{-\pi + 6k\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi + 6k\pi}{12} \right), k = \{0; 1; 2; 3\}$

f) $z_k = \sqrt[10]{2} \left(\cos \frac{\pi + 8k\pi}{20} + i \sin \frac{\pi + 8k\pi}{20} \right), k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Bài 1.2i.

a) $z = (\sqrt{3} + i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 6k, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 2 + 6k, k \in \mathbb{Z}.$

ABC

b) $z = (1 - i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{-n\pi}{4} + i \sin \frac{-n\pi}{4} \right)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 4k, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$.

c) $z = (-1 - \sqrt{3}i)^n = 2^n \left(\cos \frac{4n\pi}{3} + i \sin \frac{4n\pi}{3} \right)$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Không tồn tại n để z là số ảo.

Bài 1.27.

a) $z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$

b) $z_k = 2 \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \right), k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Bài 1.28.

a) b) Bạn đọc tự giải.

c) $\left(\frac{1 + i \tan \varphi}{1 - i \tan \varphi} \right)^n = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} \right)^n = \frac{\cos n\varphi + i \sin n\varphi}{\cos n\varphi - i \sin n\varphi} = \frac{1 + i \tan n\varphi}{1 - i \tan n\varphi}$

d) Chú ý $(\sin n\varphi + i \cos n\varphi)^{2n+1} = (-1)^n [\sin(2n+1)\varphi - i \cos(2n+1)\varphi]$

$(\sin n\varphi - i \cos n\varphi)^{2n+1} = (-1)^n [\sin(2n+1)\varphi + i \cos(2n+1)\varphi]$

Bài 1.29. Xét phương trình

$\cos 0 + i \sin 0 = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Bài 1.30. a) $2a - b = \frac{\pi}{4}$ với $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{7}$.

Hai số phức $z_1 = 2 + i, z_2 = 7 + i$ có một argument tương ứng là a, b thoả

mãn $\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{7}$. Do đó một argument của $\frac{z_1^2}{z_2}$ là $2a - b$.

Mà $\frac{z_1^2}{z_2} = \frac{(2+i)^2}{7+i} = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, nên $2a - b = \frac{\pi}{4}$.

b) Xét $z_1 = 3 + i, z_2 = 7 + i$ có $z_1^2 z_2 = (3+i)^2(7+i) = 50(1+i)$

c) Xét $z_1 = 3 + 79i, z_2 = 7 + i$ thì ta có $z_1^2 z_2^5 = 78125000(1+i)$.

Phân thứ hai

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA SỐ PHÚC

Kể từ khi xuất hiện khái niệm số phức, các nghiên cứu đã khẳng định đó là một công cụ quý giá của toán học, được ứng dụng trong nhiều ngành khoa học khác nhau như: Toán học, Vật lý, Khoa học và kỹ thuật ...

Trong Toán học, số phức được dùng để giải nhiều bài toán từ sơ cấp đến cao cấp. Trong khuôn khổ của cuốn sách này, tác giả chỉ đề cập đến một số ứng dụng của số phức trong các bài toán:

- *Lượng giác và tổ hợp.*
- *Số học, đại số và giải tích.*
- *Hình học.*



downloadsachmienphi.com

1 - SỐ PHÚC VỚI LƯỢNG GIÁC VÀ TỔ HỢP

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Số phức có nhiều ứng dụng trong các bài toán liên quan đến lượng giác, tổ hợp. Có khá nhiều bài toán khó khăn (thậm chí rất khó khăn) trong việc tìm lời giải, đặc biệt là lời giải một cách tự nhiên nhất, lại được giải quyết một cách đơn giản bằng ứng dụng số phức.

Muốn làm tốt các bài tập, cần chú ý đến dạng lượng giác của số phức, các căn bậc cao của đơn vị, công thức Moivre và khai triển nhị thức Newton.

Ví dụ 2.1. Cho $\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\sin(a+b)$.

Lời giải

Đặt $z_1 = \cos a + i \sin a$, $z_2 = \cos b + i \sin b$. Khi đó:

$$z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ABC

Mà $|z_1\bar{z}_1| = |z_1|^2 = 1, |z_2\bar{z}_2| = |z_2|^2 = 1$ nên $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$, suy ra:

$$z_1 z_2 = \frac{z_1 + z_2}{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = \frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}{\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

Ta lại có $z_1 z_2 = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$ nên $\sin(a+b) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý. Ta cũng có kết quả $\cos(a+b) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2.2. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn $\sin a + \sin b + \sin c = 0$ và $\cos a + \cos b + \cos c = 0$

Chứng minh rằng:

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0 \text{ và } \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0$$

Lời giải

Đặt $z_1 = \cos a + i \sin a; z_2 = \cos b + i \sin b; z_3 = \cos c + i \sin c$, ta có:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ và } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \text{ nên } \frac{1}{z_k} = \bar{z}_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

$$\text{Vì thế: } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$$

$$\begin{aligned} &= 0^2 - 2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1 z_2 z_3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= -2z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + i(\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c) = 0.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.3. Chứng minh rằng $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$, ta có $z^7 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, nên z là nghiệm khác -1 của phương trình $z^7 + 1 = 0$.

Ta có:

$$z^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \Rightarrow (z - z^2 + z^3)(1 - z^3) = 1$$

$$+) 1 - z^3 = 1 - \cos \frac{3\pi}{7} - i \sin \frac{3\pi}{7} = 2 \sin \frac{3\pi}{14} \left(\sin \frac{3\pi}{14} - i \cos \frac{3\pi}{14} \right)$$

$$\text{nên } \frac{1}{1 - z^3} = \frac{1}{2 \sin \frac{3\pi}{14}} \left(\sin \frac{3\pi}{14} + i \cos \frac{3\pi}{14} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \cot \frac{3\pi}{14}$$

$$+) z - z^2 + z^3 = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + i(\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7})$$

Do đó xét phần thực của đẳng thức $z - z^2 + z^3 = \frac{1}{1 - z^3}$ ta suy ra được:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

Chú ý. Qua lời giải trên, ta cũng có $\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{3\pi}{14}$.

Ví dụ 2.4. Giải phương trình $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\cos x = \pm 1$ không là nghiệm của phương trình.

Đặt $z = \cos x + i \sin x$ với $x \in [0; 2\pi]$

Ta có $z \neq \pm 1, z^{-1} = \cos x - i \sin x$ và $2 \cos x = z + z^{-1}, 2 \cos nx = z^n + z^{-n}$

Vậy phương trình đã cho trở thành:

$$z + \frac{1}{z} + z^3 + \frac{1}{z^3} + z^5 + \frac{1}{z^5} + z^7 + \frac{1}{z^7} + z^9 + \frac{1}{z^9} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{18} = z^9 \Leftrightarrow z^{20} - 1 = z^{11} - z^9$$

$$\Leftrightarrow (z^{11} + 1)(z^9 - 1) = 0 \Rightarrow z^{11} = -1, z^9 = 1$$

+) Nếu $z^9 = 1$ thì $z^9 = \cos 0 + i \sin 0$ nên $z = \cos \frac{k2\pi}{9} + i \sin \frac{k2\pi}{9}, k = \overline{0; 8}$.

Vì $x \in [0; 2\pi]$ và $z \neq \pm 1$ nên $x = \frac{k2\pi}{9}, k = \overline{1; 8}$.

Do đó nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{k2\pi}{9} + 2m\pi (k = \overline{1; 8}), m \in \mathbb{Z}$

+) Nếu $z^{11} = -1$ thì $z^{11} = \cos \pi + i \sin \pi$ nên:

$$z = \cos \frac{\pi + k2\pi}{11} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{11}, k = \overline{0; 10}.$$

ABC

Vì $x \in [0; 2\pi)$ và $z \neq \pm 1$ nên $x = \frac{\pi + k2\pi}{11}, k = \overline{0; 9}$.

Suy ra nghiệm cần tìm là $x = \frac{\pi + k2\pi}{11} + 2m\pi (k = \overline{0; 9}), m \in \mathbb{Z}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là: $x = \frac{k2\pi}{9} + 2m\pi (k = \overline{1; 8}), m \in \mathbb{Z}$ và

$$x = \frac{\pi + k2\pi}{11} + 2m\pi (k = \overline{0; 9}), m \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.5. Biểu diễn $\cos nx; \sin nx$ theo các luỹ thừa của $\cos x; \sin x$.

Lời giải

Ở phần I, ta đã biểu diễn cho trường hợp $n = 3, n = 5$. Đây là bài toán trong trường hợp n là số nguyên dương bất kỳ.

Áp dụng công thức Moivre ta có $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Mặt khác, theo công thức khai triển nhị thức Newton:

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^n &= C_n^0 \cos^n x + i C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x + i^2 C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \\ &\quad + i^3 C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots + i^{n-1} C_n^{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + i^n C_n^n \sin^n x \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: [Download Sách Hay | Đọc Sách Online](#)

$$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots + M$$

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots + N$$

Trong đó:

$$M = \begin{cases} (-1)^m \sin^{2m} x & (n = 2m) \\ (-1)^m C_{2m+1}^{2m} \cos x \sin^{2m} x & (n = 2m+1) \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

$$N = \begin{cases} (-1)^{m-1} C_{2m}^{2m-1} \cos x \sin^{2m-1} x & (n = 2m) \\ (-1)^m \sin^{2m+1} x & (n = 2m+1) \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Nhận xét. Một số trường hợp riêng cho $\cos nx$.

+) Với $n = 4$ ta có:

$$\cos 4x = C_4^0 \cos^4 x - C_4^2 \cos^2 x \sin^2 x + C_4^4 \sin^4 x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$\sin 4x = C_4^1 \cos^3 x \sin x - C_4^3 \cos x \sin^3 x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$$

+) Với $n = 7$ ta có:

$$\begin{aligned}\cos 7x &= C_7^0 \cos^7 x - C_7^2 \cos^5 x \sin^2 x + C_7^4 \cos^3 x \sin^4 x - C_7^6 \cos x \sin^6 x \\ &= 64 \cos^7 x - 112 \cos^5 x + 56 \cos^3 x - 7 \cos x\end{aligned}$$

Ví dụ 2.6. Biểu diễn $\cos^n x; \sin^n x$ theo các hàm sin; cos của góc bội x .

Lời giải

Đặt $z = \cos x + i \sin x$. Khi đó $z^n = \cos nx + i \sin nx$.

Ta có $\frac{1}{z} = \cos x - i \sin x$ nên $\frac{1}{z^n} = \cos nx - i \sin nx$.

Từ đó suy ra: $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nx$, $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nx$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned}2^n \cos^n x &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^n = C_n^0 z^n + C_n^1 z^{n-1} \frac{1}{z} + C_n^2 z^{n-2} \frac{1}{z^2} + \dots + C_n^{n-1} z \frac{1}{z^{n-1}} + C_n^n \frac{1}{z^n} \\ &= \begin{cases} (z^{2m} + z^{-2m}) + C_{2m}^1 (z^{2m-2} + z^{-(2m-2)}) + \dots + C_{2m}^m & (n = 2m) \\ (z^{2m+1} + z^{-2m-1}) + C_{2m+1}^1 (z^{2m-1} + z^{-(2m-1)}) + \dots + C_{2m+1}^m (z + z^{-1}) & (n = 2m+1) \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên dương m :

$$\begin{aligned}\cos^{2m} x &= \frac{1}{2^{2m-1}} [\cos 2mx + C_{2m}^1 \cos 2(m-1)x + C_{2m}^2 \cos 2(m-2)x + \dots + \frac{1}{2} C_{2m}^m] \\ \cos^{2m+1} x &= \frac{1}{2^{2m}} [\cos(2m+1)x + C_{2m+1}^1 \cos(2m-1)x + \dots + C_{2m+1}^m \cos x]\end{aligned}$$

* Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}\sin^{2m} x &= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} [\cos 2mx - C_{2m}^1 \cos 2(m-1)x + \dots + \frac{(-1)^m}{2} C_{2m}^m] \\ \sin^{2m+1} x &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}} [\sin(2m+1)x - C_{2m+1}^1 \sin(2m-1)x + \dots + (-1)^m C_{2m+1}^m \sin x]\end{aligned}$$

Nhận xét. Các trường hợp riêng.

+) Với $n = 5$ ta có: $\cos^5 x = \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$.

+) Với $n = 6$ ta có: $\cos^6 x = \frac{1}{32} (\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10)$.

ABC

Ví dụ 2.7. Tính tổng với $n \in \mathbb{Z}^+$ và $a \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$$A = \cos x + \cos(x+a) + \cos(x+2a) + \dots + \cos(x+na)$$

$$B = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \dots + \sin(x+na)$$

Lời giải

Đặt $z = \cos x + i \sin x, w = \cos a + i \sin a$. Theo công thức nhân và cộng thức Moivre ta có: $zw^k = (\cos x + i \sin x)(\cos a + i \sin a)^k$

$$zw^k = (\cos x + i \sin x)(\cos ka + i \sin ka) = \cos(x+ka) + i \sin(x+ka)$$

$$\text{Xét } A + iB = (\cos x + i \sin x) + [\cos(x+a) + i \sin(x+a)] +$$

$$[\cos(x+2a) + i \sin(x+2a)] + \dots + [\cos(x+na) + i \sin(x+na)]$$

$$= z + zw + zw^2 + \dots + zw^n = z \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} \quad (\text{Vì } a \neq 2k\pi \text{ nên } w \neq 1)$$

$$\text{Vậy } A + iB = z \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w} = (\cos x + i \sin x) \frac{1 - \cos(n+1)a - i \sin(n+1)a}{1 - \cos a - i \sin a}$$

$$= (\cos x + i \sin x) \frac{\sin \frac{n+1}{2}a \left(\sin \frac{n+1}{2}a - i \cos \frac{n+1}{2}a \right)}{\sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} - i \cos \frac{a}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \left(\sin \frac{n+1}{2}a - i \cos \frac{n+1}{2}a \right) \left(\sin \frac{a}{2} + i \cos \frac{a}{2} \right) (\cos x + i \sin x)$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right) (\cos x + i \sin x)$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \left[\cos \left(\frac{na}{2} + x \right) + i \sin \left(\frac{na}{2} + x \right) \right]$$

Xét phần thực và phần ảo cả hai vế ta được:

$$A = \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \cos \left(\frac{na}{2} + x \right); B = \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \sin \left(\frac{na}{2} + x \right)$$

Nhận xét. Từ hai công thức trên, xét các trường hợp riêng:

+) Nếu $x = 0$ thì suy ra:

$$*) 1 + \cos a + \cos 2a + \dots + \cos na = \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \cos \frac{na}{2}$$

$$*) \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin na = \frac{\sin \frac{n+1}{2}a}{\sin \frac{a}{2}} \sin \frac{na}{2}$$

+) Nếu $x = 2a$ ta có:

$$*) \cos a + \cos 3a + \cos 5a + \dots + \cos (2n+1)a = \frac{\sin 2(n+1)a}{2 \sin a}$$

$$*) \sin a + \sin 3a + \sin 5a + \dots + \sin (2n+1)a = \frac{\sin^2 (n+1)a}{\sin a}$$

Ví dụ 2.8. Tính tổng với $n \in \mathbb{Z}^*$

$$A = \cos x + q \cos(x+a) + q^2 \cos(x+2a) + \dots + q^n \cos(x+na)$$

$$B = \sin x + q \sin(x+a) + q^2 \sin(x+2a) + \dots + q^n \sin(x+na)$$

Lời giải.

Tương tự ví dụ 2.8 ta có:

$$\begin{aligned} A + iB &= z + zqw + zq^2w^2 + \dots + zq^n w^n = z \frac{1 - q^{n+1}w^{n+1}}{1 - qw} = z \frac{(1 - q^{n+1}w^{n+1})(1 - q\bar{w})}{(1 - qw)(1 - q\bar{w})} \\ &= z \frac{[1 - q^{n+1} \cos(n+1)a - iq^{n+1} \sin(n+1)a]}{1 - 2q \cos a + q^2} (1 - q \cos a + iq \sin a) \end{aligned}$$

Rút gọn và xét phần thực, phần ảo hai vế ta có:

$$A = \frac{\cos x - q \cos(a-x) - q^{n+1} \cos[x+(n+1)a] + q^{n+2} \cos(x+na)}{1 - 2q \cos a + q^2}$$

$$B = \frac{\sin x - q \sin(a-x) - q^{n+1} \sin[x+(n+1)a] + q^{n+2} \sin(x+na)}{1 - 2q \cos a + q^2}$$

Nhận xét. Một số trường hợp riêng:

+) Với $q = 1$ ta có ví dụ 2.8.

ABC

+) Với $x = 0$ suy ra được:

$$1 + q \cos a + q^2 \cos 2a + q^3 \cos 3a + \dots + q^n \cos na$$

$$= \frac{1 - q \cos a - q^{n+1} \cos(n+1)a + q^{n+2} \cos na}{1 - 2q \cos a + q^2}$$

+) Với $x = a$ ta được

$$\sin a + q \sin 2a + q^2 \sin 3a + \dots + q^{n-2} \sin(n-1)a + q^{n-1} \sin na$$

$$= \frac{\sin a - q^n \sin(n+1)a + q^{n+1} \sin na}{1 - 2q \cos a + q^2}$$

+) Với $x = 0, q = -1$ ta có:

*) $1 - \cos a + \cos 2a - \cos 3a + \dots + (-1)^n \cos na$

$$= \frac{1 + \cos a - (-1)^{n+1} \cos(n+1)a + (-1)^{n+2} \cos na}{2(1 + \cos a)}$$

*) $\sin a - \sin 2a + \sin 3a + \dots + (-1)^{n-2} \sin(n-1)a + (-1)^{n-1} \sin na$

$$= \frac{\sin a - (-1)^n \sin(n+1)a + (-1)^{n+1} \sin na}{2(1 + \cos a)}$$

Ví dụ 2.9. Tính tổng với $n \in \mathbb{Z}^+$

$$A = C_n^0 \cos a + C_n^1 \cos 2a + C_n^2 \cos 3a + \dots + C_n^{n-1} \cos na + C_n^n \cos(n+1)a$$

$$B = C_n^0 \sin a + C_n^1 \sin 2a + C_n^2 \sin 3a + \dots + C_n^{n-1} \sin na + C_n^n \sin(n+1)a$$

Lời giải

Đặt $z = \cos a + i \sin a$ thì $z^n = \cos na + i \sin na$.

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} A + iB &= C_n^0 (\cos a + i \sin a) + C_n^1 (\cos 2a + i \sin 2a) + C_n^2 (\cos 3a + i \sin 3a) \\ &\quad + \dots + C_n^{n-1} (\cos na + i \sin na) + C_n^n (\cos(n+1)a + i \sin(n+1)a) \\ &= z (C_n^0 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + C_n^3 z^3 + \dots + C_n^n z^n) = z (1 + z)^n \end{aligned}$$

Vì $1 + z = 1 + \cos a + i \sin a = 2 \cos \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right)$ nên:

$$\begin{aligned}
 A + iB &= (\cos a + i \sin a) \left[2 \cos \frac{a}{2} \left(\cos \frac{a}{2} + i \sin \frac{a}{2} \right) \right]^n \\
 &= 2^n \cos^n \frac{a}{2} (\cos a + i \sin a) \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right) \\
 &= 2^n \cos^n \frac{a}{2} \left(\cos \frac{n+2}{2} a + i \sin \frac{n+2}{2} a \right)
 \end{aligned}$$

Vậy $A = 2^n \cos^n \frac{a}{2} \cos \frac{n+2}{2} a$, $B = 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \frac{n+2}{2} a$

Nhân xét. Cho n là giá trị cụ thể, suy ra được nhiều đẳng thức lượng giác đẹp.

$$\cos a + 5 \cos 2a + 10 \cos 3a + 10 \cos 4a + 5 \cos 5a + \cos 6a = 2^5 \cos^5 \frac{a}{2} \cos \frac{7a}{2}$$

$$\sin a + 4 \sin 2a + 6 \sin 3a + 4 \sin 4a + \sin 5a = 2^4 \cos^4 \frac{a}{2} \sin 3a$$

Ví dụ 2.10. Gọi $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ với $k = \overline{0; n-1}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Tính tổng: $T_m = \varepsilon_0^m + \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \varepsilon_3^m + \dots + \varepsilon_{n-1}^m$

[Download Sách Hay | Đọc Sách Online](https://downloadsachmienphi.com)

Lời giải

Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ thì $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \varepsilon^k$.

Vì $\varepsilon^m = \cos \frac{2m\pi}{n} + i \sin \frac{2m\pi}{n} = 1$ khi và chỉ khi $m:n$ nên xét 2 trường hợp:

+) Nếu $m:n$ thì $\varepsilon_k^m = (\varepsilon^k)^m = (\varepsilon^m)^k = 1$ nên $T_m = n$.

+) Nếu m không chia hết cho n thì $\varepsilon^m \neq 1$ nên:

$$T_m = 1 + \varepsilon^m + \varepsilon^{2m} + \varepsilon^{3m} + \dots + \varepsilon^{(n-1)m} = \frac{1 - \varepsilon^{nm}}{1 - \varepsilon^m} = \frac{1 - (\varepsilon^n)^m}{1 - \varepsilon^m} = 0$$

Vậy $T_m = n$ nếu m là bội của n , $T_m = 0$ nếu m không là bội của n .

Chú ý. Kết quả này được sử dụng trong nhiều bài tập khác.

Ví dụ 2.11. Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Chứng minh rằng n số phức khác không $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$ là mọi nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$.

ABC

Lời giải

Xét $\varepsilon_k = \varepsilon^k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ với k nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$.

Ta có với $z = \varepsilon_k$ thì:

$$z^n - 1 = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^n - 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi - 1 = 0$$

Suy ra ε_k là nghiệm của phương trình $z^n - 1 = 0$. Nhưng phương trình đó có bậc là n nên $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$ là mọi nghiệm của phương trình đó.

Chú ý. Ta có thể viết:

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \varepsilon)(z - \varepsilon^2)(z - \varepsilon^3) \dots (z - \varepsilon^{n-2})(z - \varepsilon^{n-1}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\text{Hay } z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = (z - 1)(z - \varepsilon^2)(z - \varepsilon^3) \dots (z - \varepsilon^{n-1}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Chọn $z = 1$ thì $(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^3) \dots (1 - \varepsilon^{n-1}) = n$. Lấy modun hai vế ta suy ra $|1 - \varepsilon||1 - \varepsilon^2||1 - \varepsilon^3| \dots |1 - \varepsilon^{n-1}| = n$.

Vì $1 - \varepsilon^k = 1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}$ nên:

$$|1 - \varepsilon^k| = \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2 \frac{2k\pi}{n}} = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$\text{Do đó } \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Ý tưởng của cách làm trên giúp ta chứng minh được các đẳng thức lượng giác có dạng tích.

Ví dụ 2.12. Chứng minh rằng:

$$S_1 = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - \dots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + C_n^9 - \dots = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

Lời giải

Xét khai triển nhị thức Newton:

ABC $(1+i)^n = C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + i^4 C_n^4 + \dots + i^{n-1} C_n^{n-1} + i^n C_n^n$

Vì $i^k = \begin{cases} 1 & (k = 4m) \\ i & (k = 4m + 1) \\ -1 & (k = 4m + 2) \\ -i & (k = 4m + 3) \end{cases}$ $m \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có:

$$(1+i)^n = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots) \quad (1)$$

Mặt khác, theo công thức Moivre thì:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.13. Tính tổng với $x \in \mathbb{C}$

$$A = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^4 x^4 + \dots + C_{2n}^{2n-2} x^{2n-2} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$B = C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-3} x^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}$$

Lời giải

Xét các khai triển nhị thức Newton:

$$+) (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$+) (1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$\text{Suy ra: } A = \frac{1}{2} [(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}], B = \frac{1}{2} [(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}]$$

Nhận xét. Xét một số trường hợp riêng:

+) Nếu $x = 1$ ta có:

$$*) C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1} \quad (1)$$

$$*) C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1} \quad (2)$$

$$+) \text{ Nếu } x = i \text{ thì } (1+x)^{2n} = [(1+i)^2]^n = (2i)^n = 2^n i^n, (1-x)^{2n} = (-2)^n i^n.$$

Do đó:

$$C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots + (-1)^{n-1} C_{2n}^{2n-2} + (-1)^n C_{2n}^{2n} = 2^{n-1} i^n [1 + (-1)^n]$$

$$C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \dots + (-1)^{n-2} C_{2n}^{2n-3} + (-1)^{n-1} C_{2n}^{2n-1} = 2^{n-1} i^{n-1} [1 - (-1)^n]$$

ABC

Khi $n = 2m$ ta có:

$$*) C_{4m}^0 - C_{4m}^2 + C_{4m}^4 - \dots - C_{4m}^{4m-2} + C_{4m}^{4m} = 2^n (-1)^m \quad (3)$$

$$*) C_{4m}^1 - C_{4m}^3 + C_{4m}^5 - \dots + C_{4m}^{4m-3} - C_{4m}^{4m-1} = 0 \quad (4)$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$*) C_{4m}^0 + C_{4m}^4 + C_{4m}^8 + \dots + C_{4m}^{4m-4} + C_{4m}^{4m} = 2^{2m-1} [2^{2m-1} + (-1)^m]$$

$$*) C_{4m}^2 + C_{4m}^6 + C_{4m}^{10} + \dots + C_{4m}^{4m-6} + C_{4m}^{4m-2} = 2^{2m-1} [2^{2m-1} - (-1)^m]$$

Từ (2) và (4) suy ra:

$$*) C_{4m}^1 + C_{4m}^5 + C_{4m}^9 + \dots + C_{4m}^{4m-7} + C_{4m}^{4m-3} = 2^{4m-2}$$

$$*) C_{4m}^3 + C_{4m}^7 + C_{4m}^{11} + \dots + C_{4m}^{4m-5} + C_{4m}^{4m-1} = 2^{4m-2}$$

Chú ý. Cách làm trên không sử dụng dạng lượng giác và công thức Moivre.

Nếu biểu diễn tương tự ví dụ 2.13, với số nguyên dương n ta có:

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots = 2^{n-1} + (\sqrt{2})^{n-2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \dots = 2^{n-1} + (\sqrt{2})^{n-2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} + \dots = 2^{n-1} - (\sqrt{2})^{n-2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \dots = 2^{n-1} - (\sqrt{2})^{n-2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Ví dụ 2.14. Tính tổng

$$A = 3^n C_{2n}^0 - 3^{n-1} C_{2n}^2 + 3^{n-2} C_{2n}^4 - \dots + (-1)^{n-1} 3 C_{2n}^{2n-2} + (-1)^n C_{2n}^{2n}$$

$$B = 3^{2m} C_{4m}^0 + 3^{2m-2} C_{4m}^4 + 3^{2m-4} C_{4m}^6 + \dots + 3^2 C_{4m}^{4m-4} + C_{4m}^{4m}$$

Lời giải

Xét các khai triển nhị thức Newton:

$$(\sqrt{3} + x)^{2n} = (\sqrt{3})^{2n} C_{2n}^0 + (\sqrt{3})^{2n-1} x C_{2n}^1 + (\sqrt{3})^{2n-2} x^2 C_{2n}^2 + \dots + z^{2n} C_{2n}^{2n}$$

$$(\sqrt{3} - x)^{2n} = (\sqrt{3})^{2n} C_{2n}^0 - (\sqrt{3})^{2n-1} x C_{2n}^1 + (\sqrt{3})^{2n-2} x^2 C_{2n}^2 - \dots + z^{2n} C_{2n}^{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } T &= 3^n C_{2n}^0 + 3^{n-1} x^2 C_{2n}^2 + 3^{n-2} x^4 C_{2n}^4 + \dots + 3x^{2n-2} C_{2n}^{2n-2} + x^{2n} C_{2n}^{2n} \\ &= \frac{1}{2} [(\sqrt{3} + x)^{2n} + (\sqrt{3} - x)^{2n}] \text{ với mọi } x \end{aligned}$$

*) Chọn $x = i$ thì:

$$\begin{aligned} +) (\sqrt{3} + i)^{2n} &= 2^{2n} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2n} = 2^{2n} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ +) (\sqrt{3} - i)^{2n} &= 2^{2n} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]^{2n} = 2^{2n} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } A = 2^{2n} \cos \frac{n\pi}{3}$$

*) Với $n = 2m$, chọn $x = 1$ thì:

$$\begin{aligned} A' &= 3^{2m} C_{4m}^0 + 3^{2m-1} C_{4m}^2 + 3^{2m-2} C_{4m}^4 + \dots + 3C_{4m}^{4m-2} + C_{4m}^{4m} \\ &= 2^{2m-1} [(2 + \sqrt{3})^{2m} + (2 - \sqrt{3})^{2m}] \end{aligned}$$

$$A = 3^{2m} C_{4m}^0 - 3^{2m-1} C_{4m}^2 + 3^{2m-2} C_{4m}^4 - \dots + (-1)^{m-1} C_{4m}^{4m} = 2^{4m} \cos \frac{2m\pi}{3}$$

$$\text{Do đó } B = \frac{A + A'}{2} = 2^{2m-2} [(2 + \sqrt{3})^{2m} + (2 - \sqrt{3})^{2m}] + 2^{4m-1} \cos \frac{2m\pi}{3}$$

Ví dụ 2.15. Chứng minh rằng

$$C_n^1 - 3C_n^3 + 5C_n^5 - 7C_n^7 + \dots = n(\sqrt{2})^{n-1} \cos \frac{n-1}{4}\pi$$

$$C_n^2 - 2C_n^4 + 3C_n^6 - 4C_n^8 + \dots = n(\sqrt{2})^{n-3} \sin \frac{n-1}{4}\pi$$

Lời giải

Điểm khác biệt của bài toán này là sự xuất hiện các hệ số của C_n^k . Để tính các tổng này, ta sẽ xử lý các hệ số đó thông qua hằng đẳng thức quen biết $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

$$\text{Tại có } C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + 4x^3 C_n^4 + \dots + nx^{n-1} C_n^n$$

$$= nC_{n-1}^0 + nx C_{n-1}^1 + nx^2 C_{n-1}^2 + nx^3 C_{n-1}^3 + \dots + nx^{n-1} C_{n-1}^{n-1} = n(1+x)^{n-1} \quad \forall x$$

Chọn $x = i$ và chú ý $(1 + x)^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1} \left(\cos \frac{n-1}{4}\pi + i \sin \frac{n-1}{4}\pi \right)$, ta có:

$$(C_n^1 - 3C_n^3 + 5C_n^5 - 7C_n^7 + \dots) + 2i(C_n^2 - 2C_n^4 + 3C_n^6 - 4C_n^8 + \dots)$$

$$= n(\sqrt{2})^{n-1} \left(\cos \frac{n-1}{4}\pi + i \sin \frac{n-1}{4}\pi \right)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý. Có thể giải bài toán theo cách dùng ứng dụng của đạo hàm.

Vì đẳng thức $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$ đúng với mọi x , nên đạo hàm hai vế ta có đẳng thức sau cũng đúng với mọi x

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + 4x^3C_n^4 + \dots + nx^{n-1}C_n^n$$

Cho $x = i$ và chú ý

$$+) (1 + i)^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = (\sqrt{2})^{n-1} \left(\cos \frac{n-1}{4}\pi + i \sin \frac{n-1}{4}\pi \right)$$

$$+) C_n^1 + 2iC_n^2 + 3i^2C_n^3 + 4i^3C_n^4 + \dots + ni^{n-1}C_n^n =$$

$$(C_n^1 - 3C_n^3 + 5C_n^5 - 7C_n^7 + \dots) + 2i(C_n^2 - 2C_n^4 + 3C_n^6 - 4C_n^8 + \dots)$$

ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.16. Tính tổng $S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 - \frac{1}{8}C_{2n}^7 + \dots$

Lời giải

Chú ý rằng $\frac{1}{2k}C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2k}$ nên:

$$S = \frac{1}{2}C_{2n}^1 - \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 - \frac{1}{8}C_{2n}^7 + \dots$$

$$= \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^2 - \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^4 + \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^6 - \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^8 + \dots$$

$$= \frac{1}{2n+1}(C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^4 + C_{2n+1}^6 - C_{2n+1}^8 + \dots)$$

$$\text{Vì } (1+i)^{2n+1} = (C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 - \dots) + i(C_{2n+1}^1 - C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 - \dots)$$

và $(1+i)^{2n+1} = (\sqrt{2})^{2n+1} \left(\cos \frac{2n+1}{4}\pi + i \sin \frac{2n+1}{4}\pi \right)$ nên:

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = (\sqrt{2})^{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4}\pi$$

Vì vậy ta có $S = \frac{1}{2n+1} \left[1 - (\sqrt{2})^{2n+1} \cos \frac{2n+1}{4}\pi \right]$.

Ví dụ 2.17. Chứng minh rằng

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n-2}{3}\pi \right)$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n-4}{3}\pi \right)$$

Lời giải

Để giải quyết bài toán này cần chú ý đến **ví dụ 2.11** và phép biến đổi

$$1 + \cos \phi + i \sin \phi = 2 \cos \frac{\phi}{2} \left(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \right)$$

Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, ta có $\varepsilon^k = 1 \Leftrightarrow k = 3m$ và

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = \frac{1 - \varepsilon^{3k}}{1 - \varepsilon^k} = 0 \text{ với mọi } k \text{ không là bội của } 3.$$

Xét các khai triển:

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

$$(1-\varepsilon)^n = C_n^0 - \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 - \varepsilon^3 C_n^3 + \dots + \varepsilon^{n-1} C_n^{n-1} - \varepsilon^n C_n^n$$

$$(1-\varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon^4 C_n^2 + \varepsilon^6 C_n^3 + \dots + \varepsilon^{2n-2} C_n^{n-1} + \varepsilon^{2n} C_n^n$$

Ta có $(1+\varepsilon)^n = \left(1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$

ABC

$$(1 + \varepsilon^2)^n = \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)^n = 2^n \cos^n \frac{2\pi}{3} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}\right)$$

$$= 2^n \cos^n \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3}\right)$$

Gọi vẽ trái các đẳng thức cần chứng minh lần lượt là S_1, S_2, S_3 thì:

$$+) 3S_1 = (1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2 \cdot 2^n \cos^n \frac{\pi}{3} \cos \frac{n\pi}{3}.$$

Hay $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}\right)$.

$$+) 3S_2 = (1+1)^n + \varepsilon^2 (1+\varepsilon)^n + \varepsilon (1+\varepsilon^2)^n =$$

$$= 2^n + \varepsilon^2 \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right) + \varepsilon \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}\right)$$

Suy ra $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n-2}{3}\pi\right)$

$$+) 3S_3 = (1+1)^n + \varepsilon (1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2 (1+\varepsilon^2)^n, thay vào rút gọn ta được$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \dots = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n-4}{3}\pi\right)$$

Nhận xét. Điểm mấu chốt của lời giải là sử dụng tính chất căn bậc 3 của đơn vị và công thức Moivre. Chúng ta xét thêm một ví dụ nữa để làm rõ hơn cách giải dạng toán này (Hoàn toàn tương tự cho lời giải bài toán tổng quát).

Ví dụ 2.18. Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^6 + C_n^{12} + C_n^{18} + \dots$

Lời giải

Khoảng cách của hai chỉ số trên liên tiếp là 6 nên xét số phức

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

Nhận thấy $\varepsilon^k = 1$ khi và chỉ khi k là bội của 6, và với mọi k không chia

hết cho 6, thì $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{4k} + \varepsilon^{5k} = \frac{1 - \varepsilon^{6k}}{1 - \varepsilon^k} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n + (1+\varepsilon^3)^n + (1+\varepsilon^4)^n + (1+\varepsilon^5)^n = \\ 6C_n + (1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5)C_n^1 + (1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10})C_n^2 + \dots \\ \dots + (1+\varepsilon^6+\varepsilon^{12}+\varepsilon^{18}+\varepsilon^{24}+\varepsilon^{30})C_n^6 + \dots \\ \dots + (1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{3n}+\varepsilon^{4n}+\varepsilon^{5n})C_n^n = 6S \end{aligned}$$

Rõ ràng $\bar{\varepsilon} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$, $\varepsilon^3 = -1$ và $\varepsilon^6 = 1 = \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon}$ nên $\varepsilon^{6-p} = \bar{\varepsilon}^p$ do đó

$$(1+\varepsilon^5)^n = (1+\bar{\varepsilon})^n, (1+\varepsilon^4)^n = (1+\bar{\varepsilon}^2)^n$$

$$+) 1+\varepsilon = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), 1+\bar{\varepsilon} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$+) 1+\varepsilon^2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, 1+\bar{\varepsilon}^2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } 6S &= 2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\bar{\varepsilon})^n + (1+\varepsilon^2)^n + (1+\bar{\varepsilon}^2)^n \\ &= 2^n + (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right) + (\sqrt{3})^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right) \\ &\quad + \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right) + \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} \right) \\ &= 2^n + 2(\sqrt{3})^n \cos \frac{n\pi}{6} + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta có } S = \frac{1}{3} \left[2^{n-1} + (\sqrt{3})^n \cos \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{3} \right].$$

BÀI TẬP

Bài 2.1. Chứng minh rằng:

$$\text{a)} \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b)} -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{c)} \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

Bài 2.2. Biểu diễn $\sin 5x; \sin 7x$ theo các luỹ thừa của $\sin x$. Biểu diễn $\tan 3x; \tan 5x$ theo các luỹ thừa của $\tan x$.

Bài 2.3. Biểu diễn $\sin^5 x; \sin^6 x$ theo hàm số sin của các góc bội của x .

Biểu diễn $\cos^7 x; \cos^8 x$ theo hàm số cos của các góc bội của x .

Bài 2.4. Chứng minh các đẳng thức với $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$):

a) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2(n-1)x + \cos 2nx = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$

b) $\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2(n-1)x + \sin 2nx = \frac{\sin nx \sin(n+1)x}{\sin x}$

c) $\sin x + 3\sin 3x + 5\sin 5x + \dots + (2n-1)\sin(2n-1)x$

$$= \frac{\sin 2nx \cos x - 2n \cos 2nx \sin x}{2\sin^2 x}$$

d) $\cos 2x + 2^2 \cos 4x + 3^2 \cos 6x + \dots + n^2 \cos 2nx$

$$= -\frac{2n \sin x \cos nx + 2n^2 \sin^2 x \sin(2n+1)x + \cos x \sin nx}{4 \sin^3 x}$$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

Bài 2.5. Tính các tổng sau

a) $S_1 = 1 + q \cos x + q^2 \cos 2x + q^3 \cos 3x + \dots + q^n \cos nx$

b) $S_2 = q \sin x + q^2 \sin 2x + q^3 \sin 3x + \dots + q^n \sin nx$

c) $S_3 = 1 + \frac{\cos a}{\cos a} + \frac{\cos 2a}{\cos^2 a} + \frac{\cos 3a}{\cos^3 a} + \dots + \frac{\cos(n-1)a}{\cos^{n-1} a}$ với $a \in (0; \frac{\pi}{2})$

d) $S_4 = \cos a \cos a + \cos 2a \cos^2 a + \dots + \cos(n-1)a \cos^{n-1} a$

Bài 2.6. Tính các tổng sau:

a) $S_1 = C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2 C_n^4 - 3^3 C_n^6 + \dots$

b) $S_2 = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2 C_n^5 - 3^3 C_n^7 + \dots$

c) $S_3 = C_n^0 + 3^2 C_n^4 + 3^4 C_n^8 + 3^6 C_n^{12} + \dots$

d) $S_4 = C_n^3 + 3^2 C_n^7 + 3^4 C_n^{11} + 3^6 C_n^{15} + \dots$

Bài 2.7. Chứng minh rằng:

$$\text{a)} C_{n+1}^1 + 5C_{n+1}^5 + 9C_{n+1}^9 + 13C_{n+1}^{13} + \dots = (n+1) \left[2^{n-1} + (\sqrt{2})^{n-2} \cos \frac{n\pi}{4} \right]$$

$$\text{b)} C_{n+1}^1 + 2C_{n+1}^8 + 3C_{n+1}^{12} + 4C_{n+1}^{16} + \dots = \frac{n+1}{4} \left[2^{n-1} - (\sqrt{2})^{n-2} \sin \frac{n\pi}{4} \right]$$

$$\text{c)} C_{n+1}^1 - 3 \cdot 3 \cdot C_{n+1}^3 + 5 \cdot 3^2 C_{n+1}^5 - 7 \cdot 3^3 C_{n+1}^7 + \dots = (n+1) 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$\text{d)} C_{n+1}^2 - 2 \cdot 3 \cdot C_{n+1}^4 + 3 \cdot 3^2 C_{n+1}^6 - 4 \cdot 3^3 C_{n+1}^8 + \dots = \frac{(n+1) 2^{n-1}}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$$

Bài 2.8. Chứng minh rằng các đẳng thức:

$$\text{a)} C_n^1 - \frac{1}{2} C_n^3 + \frac{1}{3} C_n^5 - \frac{1}{4} C_n^7 + \dots = \frac{2}{n+1} \left[1 - (\sqrt{2})^{n+1} \cos \left(\frac{n+1}{4}\pi \right) \right]$$

$$\text{b)} C_{2n}^0 - \frac{1}{3} C_{2n}^2 + \frac{1}{5} C_{2n}^4 - \frac{1}{7} C_{2n}^6 + \dots = \frac{(\sqrt{2})^{2n+1}}{2n+1} \sin \left(\frac{2n+1}{4}\pi \right)$$

$$\text{c)} C_n^0 + \frac{1}{4} C_n^3 + \frac{1}{7} C_n^6 + \frac{1}{10} C_n^9 + \dots = \frac{2}{3(n+1)} \left(2^n + \cos \frac{n-1}{3}\pi \right)$$

$$\text{d)} \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^4 + \frac{1}{8} C_n^7 + \frac{1}{11} C_n^{10} + \dots = \frac{2}{3(n+1)} \left(2^n + \cos \frac{n-3}{3}\pi \right)$$

Bài 2.9. Tính tổng:

$$\text{a)} S_1 = C_n^0 + C_n^5 + C_n^{10} + C_n^{15} + \dots$$

$$\text{b)} S_2 = C_n^1 + C_n^6 + C_n^{11} + C_n^{16} + \dots$$

Bài 2.10. Cho các dãy số a_n, b_n, c_n được xác định theo công thức:

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots$$

$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots$$

$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \dots$$

Chứng minh rằng:

$$\text{a)} a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = 2^n$$

$$\text{b)} a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - c_n a_n = 1$$

ABC

2 - SỐ PHÚC VỚI SỐ HỌC, ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Qua phần ứng dụng của số phức trong các bài toán lượng giác và tổ hợp, chúng ta đã thấy sức mạnh của công cụ số phức. Ở đây, chúng ta sử dụng số phức để giải quyết các bài toán về sự chia hết của đa thức, bài toán phân tích đa thức thành nhân tử, các bài toán về nghiệm của phương trình và hệ phương trình, rồi bài toán dãy số, tinh tuẩn hoàn của dãy số

Ví dụ 2.20. Chứng minh rằng đa thức $(x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + 1$ với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Trong các bài toán phép chia đa thức, muốn chứng minh $f(x)$ chia hết cho $g(x)$, ta chứng minh mọi nghiệm của đa thức $g(x)$ đều là nghiệm của đa thức $f(x)$. Cách làm này gặp phải khó khăn nếu như $g(x)$ không có nghiệm thực, tuy nhiên số phức giúp ta giải quyết vấn đề này.

Vì $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-i)(x+i) = 0$ nên $x^2 + 1$ có nghiệm là $\pm i$.

Đặt $f(x) = (x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2}$. Ta có:

$$+) f(i) = (i+1)^{4n+2} + (i-1)^{4n+2} \stackrel{\text{Download Sách Hay | Đọc Sách Online}}{=} (2i)^{2n+1} + (-2i)^{2n+1} = 0$$

$$+) f(-i) = (-i+1)^{4n+2} + (-i-1)^{4n+2} = (-2i)^{2n+1} + (2i)^{2n+1} = 0$$

Vậy $\pm i$ cũng là nghiệm của $f(x)$, do đó $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Ví dụ 2.21. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 và số thực α thoả mãn $\sin \alpha \neq 0$, đa thức $x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0$, $\Delta' = \cos^2 \alpha - 1 = i^2 \sin^2 \alpha$ nên có nghiệm $x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $x_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha$ là hai số phức liên hợp.

Đặt $P(x) = x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ ta có:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \sin \alpha - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha \\ &= \cos n\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $P(\bar{x}_1) = 0$ hay $P(x_2) = 0$. Vậy $P(x)$ chia hết $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Ví dụ 2.22. Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Lời giải

Các nghiệm của đa thức $x^2 + x + 1$ là: $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

Đặt $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$. Vì x_1 & x_2 là hai số phức liên hợp, nên chỉ cần tìm n sao cho $f(x_1) = 0$ (khi đó $f(x_2)$ sẽ bằng 0).

Ta có $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ nên

$$f(x_1) = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{2n} + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n + 1$$

$$f(x_1) = \cos \frac{4n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 + i \left(\sin \frac{4n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} \right)$$

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{4n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \sin \frac{4n\pi}{3} + \sin \frac{2n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{2n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 \right) = 0 \\ \sin \frac{2n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \Rightarrow n = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy đa thức $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi n là số nguyên dương không chia hết cho 3.

Ví dụ 2.23. Tìm số nguyên dương n sao cho đa thức $(x-1)^n - x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 1$.

Lời giải

Các nghiệm của đa thức $x^2 - x + 1$ là: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$.

Đặt $f(x) = (x-1)^n - x^n + 1$.

Vì $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 - 1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ do

đó $f(x_1) = \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3} + 1$.

ABC

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \sin \frac{2n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - 1 \right) = 0 \\ \sin \frac{n\pi}{3} \left(2 \cos \frac{n\pi}{3} - 1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{n\pi}{3} - 1 = 0 \Rightarrow n = 6k \pm 1.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là những số nguyên dương chia cho 6 dư 1 hoặc chia 6 dư 5.

Ví dụ 2.24. Có tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho đa thức $(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - 2x^{2n}$ chia hết cho đa thức $x^4 - 1$.

Lời giải

Các nghiệm của đa thức $x^4 - 1$ là: $\pm 1, \pm i$.

Đặt $f(x) = (x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - 2x^{2n}$, ta có $f(1) = f(-1) = 0$, nhưng $f(i) = (i+1)^{2n} + (i-1)^{2n} - 2i^{2n} = (2i)^n + (-2i)^n - 2(-1)^n$

+) Nếu $n = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$) thì $f(i) = 2^{2m+1}(-1)^m - 2 \neq 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$.

-) Nếu $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}^+$) thì $f(i) = 2 \neq 0$.

Vậy không tồn tại số nguyên dương n để đa thức $(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} - 2x^{2n}$ chia hết cho đa thức $x^4 - 1$.

Ví dụ 2.25. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên:

a) $x^4 + 4$

b) $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$

Lời giải

a) Ta có $x^4 + 4 = x^4 - (2i)^2 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i)$

$$= [x^2 - (1+i)^2][x^2 - (1-i)^2] = (x-1-i)(x+1+i)(x-1+i)(x+1-i)$$

Mà: +) $(x-1-i)(x-1+i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2$

+) $(x+1-i)(x+1+i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2$

Nên $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$

b) Ta có $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x+1)^4 - i^2(x^2 + x + 1)^2$

$$= [(x+1)^2 - i(x^2 + x + 1)][(x+1)^2 + i(x^2 + x + 1)]$$

Bằng cách giải các phương trình bậc hai, ta phân tích được thành tích:

$$+) (x+1)^2 - i(x^2 + x + 1) = [(1-i)x - i](x+1+i)$$

$$+) (x+1)^2 + i(x^2 + x + 1) = [(1+i)x + i](x+1-i)$$

$$\text{Mặt khác: } (x+1+i)(x+1-i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2$$

$$[(1-i)x - i][(1+i)x + i] = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Vậy } (x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2 = (x^2 + 2x + 2)(2x^2 + 2x + 1).$$

Ví dụ 2.26. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên:

$$\text{a)} (x^2 + 1)^2 + (x+3)^2$$

$$\text{b)} (3x^2 + 5x - 4)^2 + (5x+3)^2$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \text{ Ta có } (x^2 + 1)^2 + (x+3)^2 &= (x^2 + 1)^2 - i^2 (x+3)^2 \\ &= (x^2 - ix + 1 - 3i)(x^2 + ix + 1 + 3i) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } +) x^2 - ix + 1 - 3i = (x+1+i)(x-1-2i)$$

$$+) x^2 + ix + 1 + 3i = (x+1-i)(x-1+2i)$$

$$+) (x+1+i)(x+1-i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2$$

$$+) (x-1-2i)(x-1+2i) = (x-1)^2 - 4i^2 = x^2 - 2x + 5$$

$$\text{Vậy } (x^2 + 1)^2 + (x+3)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 5).$$

$$\text{b)} (3x^2 + 5x - 4)^2 + (5x+3)^2 = (3x^2 + 5x - 2)^2 - i^2 (5x+3)^2$$

$$= [3x^2 + 5(1-i)x - 4 - 3i][3x^2 + 5(1+i)x - 4 + 3i]$$

$$\text{Ta có } +) 3x^2 + 5(1-i)x - 4 - 3i = (x+2-i)(3x-1-2i)$$

$$+) 3x^2 + 5(1+i)x - 4 + 3i = (x+2+i)(3x-1+2i)$$

$$+) (x+2+i)(x+2-i) = (x+2)^2 - i^2 = x^2 + 4x + 5$$

$$+) (3x-1-2i)(3x-1+2i) = (3x-1)^2 - 4i^2 = 9x^2 - 6x + 5$$

$$\text{Vì vậy } (3x^2 + 5x - 4)^2 + (5x+3)^2 = (x^2 + 4x + 5)(9x^2 - 6x + 5)$$

Ví dụ 2.27. Phân tích đa thức $x^{2n} + 1$ thành tích các đa thức với hệ số thực.

ABC

Lời giải

Ta có nghiệm của đa thức $x^{2n} + 1$ là $x_k = \cos \frac{\pi + k2\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{2n}$ với $k = \overline{0; 2n-1}$. Ta có với $k = \overline{0; n-1}$ thì:

$$\begin{aligned}\bar{x}_k &= \cos \frac{\pi + k2\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi + k2\pi}{2n} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi + k2\pi}{2n} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi + k2\pi}{2n} \right) \\ &= \cos \frac{\pi + (2n-k-1)2\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi + (2n-k-1)2\pi}{2n} = x_{2n-1-k}\end{aligned}$$

Nên $x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)(x - \bar{x}_k)$.

Mà $(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - (x_k + \bar{x}_k)x + x_k \cdot \bar{x}_k = x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1$.

Do đó $x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1 \right)$.

Chú ý. Vì $x^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1 \right)$ đúng với mọi x , nên nếu cho x các giá trị cụ thể, ta sẽ có các đẳng thức lượng giác đúng.

$$\begin{aligned}+) \text{ Nếu } x = 1 \text{ thì } x^{2n} + 1 &= 2 \text{ và } x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1 \\ &= 2 - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = 4 \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}\end{aligned}$$

Nên $2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left[4 \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right] \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} = \frac{1}{2^{2n-1}}$.

Hay $\sin^2 \frac{\pi}{4n} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{4n} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{4n} \dots \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{1}{2^{2n-1}}$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4n} \cdot \sin \frac{3\pi}{4n} \cdot \sin \frac{5\pi}{4n} \dots \sin \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$$

Xét các giá trị cụ thể của n ta có các đẳng thức:

$$*) \text{ Với } n = 2 \text{ có } \sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

*) Với $n = 3$ có $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{3\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

*) Với $n = 4$ có $\sin \frac{\pi}{16} \cdot \sin \frac{3\pi}{16} \cdot \sin \frac{5\pi}{16} \cdot \sin \frac{7\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

+) Nếu $x = -1$ thì $x^{2n} + 1 = 2$

$$\text{và } x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1 = 2 + 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} = 4 \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n}$$

$$\text{Nên ta có } 2 = \prod_{k=0}^{n-1} \left[4 \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right] \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4n} = \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

$$\text{Hay } \cos^2 \frac{\pi}{4n} \cdot \cos^2 \frac{3\pi}{4n} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{4n} \dots \cos^2 \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4n} \cdot \cos \frac{3\pi}{4n} \cdot \cos \frac{5\pi}{4n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n}.$$

Ví dụ 2.28. Phân tích đa thức $x^{2n+1} + 1$ thành tích các đa thức với hệ số thực.

Lời giải

Ta có nghiệm của đa thức $x^{2n+1} + 1$ là

$$x_k = \cos \frac{\pi + k2\pi}{2n+1} + i \sin \frac{\pi + k2\pi}{2n+1} \text{ với } k = \overline{0; 2n}$$

$$\text{Trong đó } x_n = -1 \text{ và với } k = \overline{0; n-1} \text{ thì } \bar{x}_k = \cos \frac{\pi + k2\pi}{2n+1} - i \sin \frac{\pi + k2\pi}{2n+1}$$

$$= \cos \left(2\pi - \frac{\pi + k2\pi}{2n+1} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi + k2\pi}{2n+1} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi + (2n-k)2\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi + (2n-k)2\pi}{2n} = x_{2n-k}$$

$$\text{Do đó } x^{2n+1} + 1 = (x+1) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)(x - \bar{x}_k).$$

$$\text{Mà } (x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - (x_k + \bar{x}_k)x + x_k \cdot \bar{x}_k = x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1.$$

$$\text{Do đó } x^{2n+1} + 1 = (x+1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 \right).$$

ABC

Chú ý. Xét các giá trị đặc biệt của x .

+) Nếu $x = 1$ thì:

$$x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 = 2 - 2\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} = 4 \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}$$

Nên ta có $\prod_{k=0}^{n-1} \left[4 \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \right] = 1 \Leftrightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2^n}$.

Hay $\sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \cdot \sin \frac{3\pi}{2(2n+1)} \cdot \sin \frac{5\pi}{2(2n+1)} \cdots \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2^n}$.

*) VỚI $n = 2$ ta có $\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}$.

*) VỚI $n = 3$ ta có $\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$.

+) Nếu $x = -1$ thì:

$$x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 = 2 + 2\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} = 4 \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)}$$

Tuy nhiên, sẽ không thu được kết quả gì nếu thay vào đẳng thức

$$x^{2n+1} + 1 = (x+1) \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 \right)$$

Để ý rằng, với $x \neq -1$ thì $\frac{x^{2n+1} + 1}{x+1} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 \right)$

Lấy giới hạn hai vế khi $x \rightarrow -1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2n+1} + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} + 1 \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[4 \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \right]$$

Mà $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2n+1} + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \dots + x^2 - x + 1) = 2n + 1$

Nên $4^n \prod_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} = 2n \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

Vậy ta có đẳng thức:

$$\cos \frac{\pi}{2(2n+1)} \cdot \cos \frac{3\pi}{2(2n+1)} \cdot \cos \frac{5\pi}{2(2n+1)} \cdots \cos \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$*) \text{ Với } n=2 \text{ ta có } \cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

$$*) \text{ Với } n=3 \text{ ta có } \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

$$*) \text{ Với } n=5 \text{ ta có } \cos \frac{\pi}{22} \cdot \cos \frac{3\pi}{22} \cdot \cos \frac{5\pi}{22} \cdot \cos \frac{7\pi}{22} \cdot \cos \frac{9\pi}{22} = \frac{\sqrt{11}}{32}.$$

Ví dụ 2.29. Chứng minh rằng các số $\cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ với $k=\{1; 2; 3; \dots; n\}$ là các

nghiệm của phương trình: $C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_{2n+1}^{2n-1} x + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} = 0$.

Lời giải

Theo ví dụ 2.6 ta có:

$$\begin{aligned} \sin(2n+1)\varphi &= C_{2n+1}^1 \cos^{2n} \varphi \sin \varphi - C_{2n+1}^3 \cos^{2n-2} \varphi \sin^3 \varphi + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} C_{2n+1}^{2n-1} \cos^2 \varphi \sin^{2n-1} \varphi + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} \sin^{2n+1} \varphi \end{aligned}$$

Với $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ta có :

$$\sin(2n+1)\varphi = \sin^{2n+1} \varphi \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \cot^{2n-2k} \varphi \quad (*)$$

Vì $\varphi = \frac{k\pi}{2n+1}$ với $k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$ đều là nghiệm của phương trình (*),

do đó n số $\cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ là các nghiệm của phương trình

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_{2n+1}^{2n-1} x + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} = 0$$

Chú ý. Từ kết quả của bài toán này, dễ dàng chứng minh được:

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

Ví dụ 2.30. Giải hệ phương trình với nghiệm là số thực: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải

Đây là hệ đẳng cấp bậc ba. Tuy nhiên, nếu giải bằng phương pháp thông thường ta sẽ đi đến giải phương trình bậc ba: $\sqrt{3}t^3 + 3t^2 - 3\sqrt{3}t - 1 = 0$

Phương trình này không có nghiệm đặc biệt!

Xét số phức $z = x + iy$. Vì $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$, nên từ hệ đã cho ta có $z^3 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, tương tự cách làm ở chương I, ta tìm được 3 giá trị của z là:

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$$

Từ đó suy hệ đã cho có 3 nghiệm là:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos\frac{2\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin\frac{2\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos\frac{8\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin\frac{8\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos\frac{14\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin\frac{14\pi}{9} \end{cases}$$

Ví dụ 2.31. Giải hệ phương trình trong tập số thực: $\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ x^3y - y^3x = \frac{1}{4} \end{cases}$



Xét số phức $z = x + iy$.

Vì $z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4i(x^3y - y^3x)$, nên từ hệ đã cho suy ra:

$$z^4 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad (*)$$

Các số phức thoả mãn $(*)$:

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$$

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}\right)$$

Vậy các nghiệm cần tìm của hệ là:

$$\begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos\frac{\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin\frac{\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos\frac{13\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin\frac{13\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos\frac{25\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin\frac{25\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2} \cos\frac{37\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2} \sin\frac{37\pi}{24} \end{cases}$$

Ví dụ 2.32. Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = -1 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $z = x + iy$. Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$.

Vì hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau, nên hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2}\right) = 7 - i \\ \Leftrightarrow & x + iy + 16 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} - 11i \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = 7 - i \\ \Leftrightarrow & z + \frac{16 - 11i}{z} = 7 - i \Leftrightarrow z^2 - (7 - i)z + 16 - 11i = 0 \end{aligned}$$

Phương trình $z^2 - (7 - i)z + 16 - 11i = 0$ có hai nghiệm $z = 2 - 3i, z = 5 + 2i$ nên hệ đã cho có các nghiệm $(x, y) = (2, -3)$ hoặc $(x, y) = (5, 2)$.

Chú ý. Muốn giải được các hệ phương trình bằng phương pháp sử dụng số phức, cần nhớ một số công thức cơ bản của số phức, đặc biệt là với mỗi số phức $z = x + iy$ thì ta có $x^2 + y^2$ là bình phương módun và $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Ví dụ 2.33. Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sqrt{10x} \left(1 + \frac{3}{5x + y}\right) = 3 \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{3}{5x + y}\right) = -1 \end{cases}$$

Lời giải

Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$.

Bài hệ này không có dạng như ví dụ trên, tuy nhiên với mục đích chuyển mẫu số về dạng bình phương modun của số phức, chỉ cần đặt $u = \sqrt{5x}, v = \sqrt{y}$ với $u, v > 0$.

Hệ đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{3}{u^2 + v^2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ v \left(1 - \frac{3}{u^2 + v^2}\right) = -1 \end{cases}$$

ABC

Đặt $z = u + iv$. Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{u - vi}{u^2 + v^2}$.

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} & u\left(1 + \frac{3}{u^2 + v^2}\right) + iv\left(1 - \frac{3}{u^2 + v^2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - i \\ \Leftrightarrow & u + iv + 3\frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} - i \Leftrightarrow z + \frac{3}{z} = \frac{3\sqrt{2} - 2i}{2} \\ \Leftrightarrow & 2z^2 - (3\sqrt{2} - 2i)z + 6 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Giải phương trình (*), ta có $\Delta' = -34 - 12\sqrt{2}i = (\sqrt{2} - 6i)^2$. suy ra các nghiệm là $z = \sqrt{2} - 2i$, $z = \frac{\sqrt{2} + 2i}{2}$.

Vì $u, v > 0$ nên $z = \frac{\sqrt{2} + 2i}{2}$, do đó $u = \frac{\sqrt{2}}{2}, v = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}, y = 1$.

Vậy nghiệm cần tìm là $(x; y) = \left(\frac{1}{10}; 1\right)$.

Ví dụ 2.34. Giải hệ phương trình với nghiệm với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \frac{12}{3x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 + \frac{12}{3x+y}\right) = 6 \end{cases}$$

Lời giải

Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$. Đặt $u = \sqrt{3x}, v = \sqrt{y} (u, v > 0)$. Hệ đã cho có

dạng: $\begin{cases} u\left(1 - \frac{12}{u^2 + v^2}\right) = 2\sqrt{3} \\ v\left(1 + \frac{12}{u^2 + v^2}\right) = 6 \end{cases}$. Đặt $z = u + iv$. Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{u - vi}{u^2 + v^2}$.

Từ hệ đã cho ta có $u\left(1 - \frac{12}{u^2 + v^2}\right) + iv\left(1 + \frac{12}{u^2 + v^2}\right) = 2\sqrt{3} + 6$

$$\Leftrightarrow u + iv - 12\frac{u - iv}{u^2 + v^2} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \frac{12}{z} = 2\sqrt{3} + 6i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2(\sqrt{3} + 3i)z - 12 = 0 \quad (*)$$

Giai phương trình (*), ta có $\Delta' = 6 + 6\sqrt{3}i = 3(\sqrt{3} + i)^2$ suy ra các nghiệm: $z = \sqrt{3} + 3 + (\sqrt{3} + 3)i, z = \sqrt{3} - 3 + (3 - \sqrt{3})i$

Vì $u, v > 0$ nên ta có $u = \sqrt{3} + 3, v = \sqrt{3} + 3$, suy ra nghiệm của hệ là:

$$(x; y) = (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})$$

Ví dụ 2.35. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_n + u_{n-1} + u_{n-2} = 0$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) tuần hoàn và $u_{3n+1} = 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Các tính chất này có thể dự đoán và chứng minh quy nạp, tuy nhiên việc tìm số hạng tổng quát sẽ giải quyết tất cả.

Xét phương trình đặc trưng $z^2 + z + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Khi đó $u_n = a.z_1^n + b.z_2^n$ với a, b được xác định dựa vào $u_0 = -1, u_1 = 2$.

Ta có $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + b\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 \end{cases}$ nên giải ra được:
 $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Suy ra $u_n = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^n + \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^n = 2 \cos \frac{2(n-1)\pi}{3}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 2 \cos \frac{2(n-1)\pi}{3}$ với $n \in \mathbb{N}$.

+) Vì $u_{n+3} = 2 \cos \frac{2(n+2)\pi}{3} = 2 \cos \left[2\pi + \frac{2(n-1)\pi}{3}\right] = u_n \forall n \in \mathbb{N}$ nên dãy đã cho là dãy số tuần hoàn.

+) Vì $u_{3n+1} = 2 \cos \frac{2(3n+1-1)\pi}{3} = 2 \cos 2\pi = 2 \forall n \in \mathbb{N}$ nên có $u_{3n+1} = 2$.

Chú ý. Việc tìm số hạng tổng quát của dãy số trong trường hợp không sử dụng số phức là tương đối khó khăn. Với số hạng tổng quát đã biết, ta có thể suy ra được nhiều tính chất của dãy, chẳng hạn như $u_{3n} = u_{3n+2} = -1$.

Ví dụ 2.36. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_0 = 0, u_1 = 6, u_2 = -2, u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-3} \quad \forall n \geq 3$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Lời giải

Xét phương trình đặc trưng $z^3 + z^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = 1, z_2 = -1 - i, z_3 = -1 + i$$

Vì vậy $u_n = az_1^n + bz_2^n + cz_3^n$. Do $u_0 = 0, u_1 = 6, u_2 = -2$ nên thay vào ta tính được $a = 2, b = -1 + i, c = -1 - i$.

Ta có $u_n = 2 + (-1+i)(-1-i)^n + (-1-i)(-1+i)^n$. Chuyển qua dạng

$$\begin{aligned} \text{lượng giác } u_n &= 2 + (\sqrt{2})^{n+1} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^n \\ &\quad + (\sqrt{2})^{n+1} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^n \end{aligned}$$

Sử dụng công thức Moivre rồi rút gọn ta thu được:

$$u_n = 2 \left[1 + (\sqrt{2})^{n+1} \cos \frac{3(n-1)\pi}{4} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 2.37. Cho dãy số $u_n = \frac{1}{\cos^n \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^n \frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^n \frac{8\pi}{7}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh dãy số (u_n) luôn nhận giá trị nguyên và chia hết cho 32 với $n \geq 4$.

Lời giải

Vì $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ và phương trình $z^7 - 1 = 0$ có 7 nghiệm là $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}, k = \overline{0; 6}$ nên $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6$

là nghiệm của phương trình $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. (*)

Ta có (*) $\Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ (***)

Với $x = z + \frac{1}{z}$, Phương trình (*) có nghiệm là $x_k = 2\cos \frac{2k\pi}{7}, k = \{1; 2; 3\}$.

Đặt $y = \frac{2}{x}$ và chú ý $\cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}$ ta có $\frac{1}{\cos \frac{2\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{7}}, \frac{1}{\cos \frac{8\pi}{7}}$ là

nghiệm của phương trình $y^3 + 4y^2 - 4y - 8 = 0$.

Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -4 \\ y_1 \cdot y_2 + y_2 \cdot y_3 + y_3 \cdot y_1 = -4 \\ y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = 8 \end{cases}$

Lúc này $u_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n$ và $u_{n+3} = -4u_{n+2} + 4u_{n+1} + 8u_n \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì $u_1 = -4, u_2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1 \cdot y_2 + y_2 \cdot y_3 + y_3 \cdot y_1) = 24$ và

$$u_3 = (y_1 + y_2 + y_3)^3 - 3(y_1 + y_2 + y_3)(y_1 \cdot y_2 + y_2 \cdot y_3 + y_3 \cdot y_1) + 3y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = -88$$

$u_4 = -4u_3 + 4u_2 + 8u_1 = 416$ nên bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh dãy số (u_n) luôn nhận giá trị nguyên và chia hết cho 32 với $n \geq 4$.

BÀI TẬP

[Download Sách Hay | Đọc Sách Online](#)
Bài 2.11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 và mọi số thực α , đa thức $(x \sin \alpha + \cos \alpha)^n - x \sin n\alpha - \cos n\alpha$ chia hết cho đa thức $x^2 + 1$.

Bài 2.12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì đa thức $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$.

Bài 2.13. Tìm số tự nhiên n sao cho $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ với:

- a) $P(x) = x^n + (x-2)^n$ và $Q(x) = x^2 - 2x + 2$
- b) $P(x) = 3^n (1-x)^n - (1+x)^{2n}$ và $Q(x) = x^2 - x + 1$
- c) $P(x) = (1+x)^n - x^n - 1$ và $Q(x) = x^2 + x + 1$
- d) $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ và $Q(x) = x^4 + x^2 + 1$

Bài 2.14. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử với hệ số nguyên

- a) $4x^4 - 1$
- b) $4(5x^2 + 2)^2 + (7x + 3)^2$
- c) $81(x-1)^2(x-2)^2 + (9x+11)^2$
- d) $(x^2 + x - 3)^2 + (2x + 1)^2$

ABC

Bài 2.15. Phân tích các đa thức sau thành tích các đa thức (có bậc không quá 2) với hệ số thực:

a) $x^{2m} - 1$

b) $x^{2m+1} - 1$

Bài 2.16. Chứng minh rằng các số $\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ với $k = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ là các nghiệm của phương trình

$$C_{2n+1}^1 (1-x)^n - C_{2n+1}^3 (1-x)^{n-1} x + \dots + (-1)^n x^n = 0.$$

Bài 2.17. Giải các hệ phương trình với $x, y \in \mathbb{R}$:

a)
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = -2\sqrt{3} \\ y(3x^2 - y^2) = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 4 \\ x^3y - y^3x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4) = \sqrt{3} \\ y(y^4 - 10x^2y^2 + 5x^4) = -1 \end{cases}$$

Bài 2.18. Giải các hệ phương trình với nghiệm thực:

a)
$$\begin{cases} x + \frac{9x + \sqrt{10}y}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{2} \\ y + \frac{\sqrt{10}x - 9y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + \frac{78y}{x^2 + y^2} = 20 \\ y + \frac{78x}{x^2 + y^2} = 15 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(2 + \frac{7}{2x + 5y} \right) = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{5y} \left(2 - \frac{7}{2x + 5y} \right) = \sqrt{3} \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(2 - \frac{15}{x + 2y} \right) = 2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{y} \left(2 + \frac{15}{x + 2y} \right) = 3(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

Bài 2.19. Tìm số hạng tổng quát của dãy số:

a) $u_0 = 4, u_1 = 2, u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

b) $u_0 = 13, u_1 = 1, u_2 = -7, u_n = u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

c) $u_0 = 3, u_1 = 2, u_2 = 8, u_n = 2u_{n-2} - 4u_{n-3} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Bài 2.20. Chứng minh rằng các dãy số sau là dãy số tuần hoàn.

a) $u_0 = 1, u_1 = 2, u_n = u_{n-1} - u_{n-2} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

b) $u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 0, u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2} + u_{n-3} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

3 - SỐ PHÚC VỚI HÌNH HỌC PHẲNG

Một trong những ứng dụng quan trọng nhất của số phức với toán sơ cấp là giải toán hình học phẳng. Số phức là công cụ mạnh trong việc khảo sát sâu sắc những vấn đề trong mặt phẳng. Tuy nhiên, muốn giải bài toán hình học phẳng bằng số phức, chúng ta phải chuyển đổi các quan hệ trong hình học phẳng thành các điều kiện liên quan đến số phức, nên trong khuôn khổ cuốn sách này, tác giả chỉ đề cập một ứng dụng tiêu biểu, đó là sử dụng số phức để chứng minh các bất đẳng thức của hình học phẳng.

Những kiến thức chuẩn bị:

+) Trong mặt phẳng phức, nếu các điểm A, B có tọa độ là a, b thì độ dài đoạn thẳng AB là $|AB| = |a - b|$.

+) Nếu O là gốc tọa độ thì $|OA| = |a|, |OB| = |b|$.

+) Các công thức modun $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

+) Bất đẳng thức liên quan đến modun $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

+) Tam giác ABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ và diện tích S .

+) Biểu diễn các số phức là căn bậc n của đơn vị trên mặt phẳng tọa độ là đỉnh của một hình n -giác đều.

+) Một số đẳng thức đại số: Với mọi số a, b, c, m, n thoả mãn điều kiện xác định của biểu thức, ta có

$$(*1) ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = -(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$(*2) a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$(*3) \frac{(m - a)(m - b)}{(c - a)(c - b)} + \frac{(m - b)(m - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(m - c)(m - a)}{(b - c)(b - a)} = 1$$

$$(*4) \frac{(m - a)(n - a)}{(b - a)(c - a)} + \frac{(m - b)(n - b)}{(c - b)(a - b)} + \frac{(m - c)(n - c)}{(a - c)(b - c)} = 1$$

$$(*5) a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$$

Chứng minh.

$$(*1) ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = -(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Ta có } ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\
 & = ab(a-b) + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2 = ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) \\
 & = (a-b)[ab - c(a+b) + c^2] = (a-b)[(ab-ac) - (bc-c^2)] \\
 & = (a-b)[a(b-c) - c(b-a)] = -(a-b)(b-c)(c-a) \\
 & (*2) a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

Vì $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$ nên ta có điều phải chứng minh.

$$(*3) \text{ Xét } f(m) = \frac{(m-a)(m-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(m-b)(m-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(m-c)(m-a)}{(b-c)(b-a)}$$

Ta có $f(a) = \frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} = 1, f(b) = 1, f(c) = 1$ nên $f(m) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt a, b, c mà $f(m)$ là tam thức bậc hai nên $f(m) = 1 \forall m$.

(*4) Quy đồng ta đi đến cần chứng minh đẳng thức:

$$\begin{aligned}
 & (m-a)(n-a)(b-c) + (m-b)(n-b)(c-a) + (m-c)(n-c)(a-b) \\
 & = -(a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

Ta có $(m-a)(n-a)(b-c) = a^2(b-c) - a(m+n)(b-c) + mn(b-c)$ nên vế trái của (*) trở thành $VT(*) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

$$\begin{aligned}
 & -(m+n)(ab-ac+bc-ba+ca-cb) + mn(b-c+c-a+a-b) \\
 & = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

$$\begin{aligned}
 & (*5) a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = a^3(b-c) + b^3c - b^3a + c^3a - c^3b \\
 & = a^3(b-c) + bc(b^2 - c^2) - a(b^3 - c^3) \\
 & = (b-c)(a^3 - ab^2 + b^2c - abc + bc^2 - ac^2) \\
 & = (b-c)(a-b)(a^2 + ab - bc - c^2) = (b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)
 \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.38. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3\dots A_n$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có:

$$MA_1 \cdot MA_2 \cdot MA_3 \dots MA_n \leq \sqrt{(OM^2 + R^2)^n}$$

Lời giải

Xét mặt phẳng phức có gốc toạ độ O và không mất tính tổng quát, giả sử $R = 1$. Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ thì $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^n, m$ là toạ độ của các điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, M$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} |x - \varepsilon| \cdot |x - \varepsilon^2| \cdot |x - \varepsilon^3| \cdots |x - \varepsilon^n| &\leq \sqrt{(|x|^2 + 1)^n} \\ \Leftrightarrow |(x - \varepsilon) \cdot (x - \varepsilon^2) \cdot (x - \varepsilon^3) \cdots (x - \varepsilon^n)| &\leq \sqrt{(|x|^2 + 1)^n} \\ \Leftrightarrow |x^n - 1| &\leq \sqrt{(|x|^2 + 1)^n} \end{aligned}$$

Nhưng ta có $|x^n - 1| \leq |x|^n + 1$ nên bất đẳng thức được chứng minh, nếu ta chứng minh được bất đẳng thức $|x|^n + 1 \leq \sqrt{(|x|^2 + 1)^n}$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy } |x|^n + 1 &\leq \sqrt{(|x|^2 + 1)^n} \Leftrightarrow (|x|^n + 1)^2 \leq (|x|^2 + 1)^n \\ \Leftrightarrow 2|x|^n &\leq C_n^1 |x|^2 + C_n^2 |x|^4 + C_n^3 |x|^6 + \dots + C_n^{n-1} |x|^{2n-2} \end{aligned}$$

Vì $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ là đa giác nên $n \geq 3$, do đó:

$$C_n^1 |x|^2 + C_n^2 |x|^4 + C_n^3 |x|^6 + \dots + C_n^{n-1} |x|^{2n-2} \geq n|x|^2 + n|x|^{2n-2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$|x|^2 + |x|^{2n-2} \geq 2\sqrt{|x|^2 |x|^{2n-2}} \Rightarrow |x|^2 + |x|^{2n-2} \geq 2|x|^n.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Dấu đẳng thức có nếu $|x| = 0$, tức là $M \equiv O$.

Ví dụ 2.39. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng $MA \cdot \sin A \leq MB \cdot \sin B + MC \cdot \sin C$.

Lời giải

Xét mặt phẳng phức có M là gốc toạ độ. Gọi toạ độ của các điểm A, B, C là x, y, z .

Ta có $MA = |x|, MB = |y|, MC = |z|$ và $AB = |x - y|, BC = |y - z|, CA = |z - x|$

Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R .

ABC

Theo định lý sin trong tam giác thì $\sin A = \frac{BC}{2R}$; $\sin B = \frac{CA}{2R}$; $\sin C = \frac{AB}{2R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $MA \cdot BC \leq MB \cdot CA + MC \cdot AB$.
Hay $|x| \cdot |y - z| \leq |y| \cdot |z - x| + |z| \cdot |x - y|$.

Theo bất đẳng thức tam giác

$$|y| \cdot |z - x| + |z| \cdot |x - y| = |y(z - x)| + |z(x - y)| \geq |y(z - x) + z(x - y)|$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Bất đẳng thức $MA \cdot BC \leq MB \cdot CA + MC \cdot AB$ chính là bất đẳng thức Ptolemy. Dấu đẳng thức xảy ra khi MABC là một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Ví dụ 2.40. Cho tam giác đều ABC cạnh a và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA \geq a^2$.

Lời giải.

Giả sử tam giác ABC nằm trong mặt phẳng phức, nội tiếp trong đường tròn bán kính đơn vị. Gọi tọa độ các điểm M, A, B, C lần lượt là $x, 1, \varepsilon, \varepsilon^2$,

trong đó $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, a = \sqrt{3}R = \sqrt{3}$.

Chú ý rằng $\varepsilon^3 = 1, 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 1$.

Ta có $MA = |x - 1|, MB = |x - \varepsilon|, MC = |x - \varepsilon^2|$ nên:

$$+) MA \cdot MB = |x - 1| \cdot |x - \varepsilon| = |x^2 - (1 + \varepsilon)x + \varepsilon| = |\varepsilon^2 x^2 + \varepsilon x + 1|.$$

$$+) MB \cdot MC = |x - \varepsilon| \cdot |x - \varepsilon^2| = |x^2 - (\varepsilon + \varepsilon^2)x + \varepsilon^3| = |x^2 + x + 1|.$$

$$+) MC \cdot MA = |x - \varepsilon^2| \cdot |x - 1| = |x^2 - (1 + \varepsilon^2)x + \varepsilon^2| = |\varepsilon x^2 - (1 + \varepsilon)x + 1|.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức tam giác:

$$\begin{aligned} &|\varepsilon^2 x^2 + \varepsilon x + 1| + |x^2 + x + 1| + |\varepsilon x^2 - (1 + \varepsilon)x + 1| \\ &\geq |(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)x^2 + 3| = |3| = 3 \end{aligned}$$

Vậy $MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA \geq 3$, đây chính là điều cần chứng minh.

Nhận xét. Nếu không sử dụng số phức, bài toán này có lời giải khá dài và phức tạp. Tuy nhiên, đây chỉ là trường hợp riêng của bài toán sau đây.

Ví dụ 2.41. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $a \cdot MB \cdot MC + b \cdot MC \cdot MA + c \cdot MA \cdot MB \geq abc$.

Lời giải

Xét mặt phẳng phức có M là gốc toạ độ. Gọi toạ độ của các điểm A, B, C là x, y, z . Ta có $MA = |x|, MB = |y|, MC = |z|$ và

$$c = AB = |x - y|, a = BC = |y - z|, b = CA = |z - x|$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$|y - z| \cdot |y| \cdot |z| + |z - x| \cdot |z| \cdot |x| + |x - y| \cdot |x| \cdot |y| \geq |y - z| \cdot |z - x| \cdot |x - y|$$

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } |y - z| \cdot |y| \cdot |z| + |z - x| \cdot |z| \cdot |x| + |x - y| \cdot |x| \cdot |y| \\ &= |(y - z)yz| + |(z - x)zx| + |(x - y)xy| \\ &\geq |(y - z)yz + (z - x)zx + (x - y)xy| \end{aligned}$$

Theo (*1) thì $|(y - z)yz + (z - x)zx + (x - y)xy| = |(x - y)(y - z)(z - x)|$ nên bài toán được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M là một đỉnh của tam giác ABC , hoặc M là trực tâm của tam giác ABC .

Nhận xét. Bất đẳng thức còn được viết dưới dạng:

$$\frac{MB \cdot MC}{b \cdot c} + \frac{MC \cdot MA}{c \cdot a} + \frac{MA \cdot MB}{a \cdot b} \geq 1$$

Một số trường hợp đặc biệt.

*) Với các trường hợp của tam giác ABC

+) Nếu tam giác ABC đều, ta có **ví dụ 2.40.**

+) Nếu tam giác ABC vuông cân tại A ta có $b = c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên

$$2 \cdot MB \cdot MC + \sqrt{2} \cdot MA(MB + MC) \geq a^2.$$

+) Nếu tam giác ABC vuông tại A và $\angle ABC = 30^\circ$ thì $b = \frac{a}{2}, c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

nên $2 \cdot MB \cdot MC + MC \cdot MA + \sqrt{3} \cdot MA \cdot MB \geq \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

*) Với các trường hợp của điểm M

+) Nếu M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $MA = MB = MC = R$, suy ra $R^2(a + b + c) \geq abc$.

ABC

Vì diện tích của tam giác ABC là $S = \frac{abc}{4R} = pr$ nên

$$R^2(a+b+c) \geq abc \Leftrightarrow R^2 \cdot \frac{2S}{r} \geq 4R.S \Leftrightarrow R \geq 2r.$$

+) Nếu M là trọng tâm tam giác ABC thì $MA = \frac{2}{3}m_a, MB = \frac{2}{3}m_b,$

$$MC = \frac{2}{3}m_c, \text{ do đó ta có: } \frac{m_a \cdot m_b}{ab} + \frac{m_b \cdot m_c}{bc} + \frac{m_c \cdot m_a}{ca} \geq \frac{9}{4},$$

+) Nếu M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , dễ dàng chứng minh được $MA = 4R \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}, MB = 4R \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$ nên:

$$\frac{MA \cdot MB}{a \cdot b} = 16R^2 \cdot \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}}{ab}$$

Theo định lý sin ta có $a = 2R \cdot \sin A = 4R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$, suy ra:

$$\frac{MA \cdot MB}{a \cdot b} = 16R^2 \cdot \frac{\frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin^2 \frac{C}{2}}{16R^2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}}{\frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}} = \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}$$

Từ đó suy ra được bất đẳng thức:

$$\frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \geq 1.$$

Ví dụ 2.42. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh trong các tỷ số $\frac{MA}{a}, \frac{MB}{b}, \frac{MC}{c}$ có ít nhất một tỷ số không bé hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $(m+n+p)^2 \geq 3(mn+np+pm)$ ta có:

$$\left(\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{MA \cdot MB}{ab} + \frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} \right)$$

Theo kết quả của **ví dụ 2.40** suy ra: $\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}$. Vì thế trong

các tỷ số $\frac{MA}{a}, \frac{MB}{b}, \frac{MC}{c}$ có ít nhất một tỷ số không bé hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét. Đây là một ý trong đề thi chọn đội tuyển Việt Nam đi thi Toán quốc tế năm 2003.

Ví dụ 2.43. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, GBC, GCA, GAB .

Chứng minh rằng $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.

Lời giải

Theo **ví dụ 2.41**, với $M \equiv G$ ta có: $a.GB.GC + b.GC.GA + c.GA.GB \geq abc$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên: $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$

$$\text{Hay } \frac{a.GB.GC}{4R_1} = \frac{b.GC.GA}{4R_2} = \frac{c.GA.GB}{4R_3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow a.GB.GC = \frac{abc.R_1}{3R}, b.GC.GA = \frac{abc.R_2}{3R}, c.GA.GB = \frac{abc.R_3}{3R}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{abc.R_1}{3R} + \frac{abc.R_2}{3R} + \frac{abc.R_3}{3R} \geq abc \Leftrightarrow R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi G cũng là trực tâm, nên tam giác ABC đều.

Ví dụ 2.44. Cho tam giác ABC và một điểm P nằm bên trong tam giác.

Gọi R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, PBC, PCA, PAB . Các đường thẳng PA, PB, PC lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C' .

$$\text{Đặt } \alpha_1 = \frac{PA'}{AA'}, \alpha_2 = \frac{PB'}{BB'}, \alpha_3 = \frac{PC'}{CC'}$$

Chứng minh rằng $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 \geq R$.

(Đề chọn đội tuyển Rumani năm 2004)

Lời giải.

Ké $AK \perp BC, A'K' \perp BC$ ta có:

$$\alpha_1 = \frac{PA'}{AA'} = \frac{PK'}{AK} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{a.PB.PC}{4R_1} \cdot \frac{4R}{abc} = \frac{R.a.PB.PC}{R_1 \cdot abc}$$

Do đó $\alpha_1 R_1 = \frac{R.a.PB.PC}{abc}$.

Tương tự: $\alpha_2 R_2 = \frac{R.b.PC.PA}{abc}$, $\alpha_3 R_3 = \frac{R.c.PA.PB}{abc}$.

Vì thế $\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 \geq R$

$$\Leftrightarrow \frac{R.a.PB.PC}{abc} + \frac{R.b.PC.PA}{abc} + \frac{R.c.PA.PB}{abc} \geq R$$

$$\Leftrightarrow a.PB.PC + b.PC.PA + c.PA.PB \geq abc \text{ (đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Một số trường hợp riêng của điểm P .

+) Nếu $P \equiv G$ thì $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ nên ta có **ví dụ 2.43**.

+) Nếu P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $\alpha_1 = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{r}{h_1}$ với h_1 là độ dài đường cao tương ứng với đỉnh A .

Tương tự $\alpha_2 = \frac{r}{h_2}$, $\alpha_3 = \frac{r}{h_3}$ nên bất đẳng thức có dạng: $\frac{R_1}{h_1} + \frac{R_2}{h_2} + \frac{R_3}{h_3} \geq \frac{R}{r}$

Ví dụ 2.45. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng $a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \geq abc$.

Lời giải

Xét mặt phẳng phức có M là gốc toạ độ. Gọi toạ độ của các điểm A, B, C là x, y, z . Ta có $MA = |x|, MB = |y|, MC = |z|$ và

$$c = AB = |x - y|, a = BC = |y - z|, b = CA = |z - x|$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$|y - z|.|x|^2 + |z - x|.|y|^2 + |x - y|.|z|^2 \geq |y - z|.|z - x|.|x - y|$$

$$\text{Mà } |y - z|.|x|^2 + |z - x|.|y|^2 + |x - y|.|z|^2$$

$$= |x^2(y - z)| + |y^2(z - x)| + |z^2(x - y)|$$

$$\geq |x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)|$$

Và theo (*) thì $|x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)| = |(x - y)(y - z)(z - x)|$

Suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi M tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Nhận xét.

+) Nếu M là tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $MA = MB = MC = R$, nên ta có $R^2(a + b + c) \geq abc$. Từ đó cũng suy ra được $R \geq 2r$.

+) Nếu M là trọng tâm G của tam giác ABC thì $MA = GA = \frac{2}{3} \cdot m_a$, nên:

$$MA^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right)$$

Thay vào và rút gọn thu được bất đẳng thức:

$$a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + ca(a^2 + b^2) \geq \frac{9abc + a^3 + b^3 + c^3}{2}$$

Sử dụng định lý cos thì bất đẳng thức có dạng:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + 4(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 9$$

+) Nếu M là trực tâm H của tam giác ABC thì $HA^2 = 4R^2 - a^2$, tương tự cho HB, HC ta có: $a(4R^2 - a^2) + b(4R^2 - b^2) + c(4R^2 - c^2) \geq abc$

$$\Leftrightarrow R^2 \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{4(a + b + c)}.$$

Ví dụ 2.46. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng $MA^4 + MB^4 + MC^4 \geq \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz, ta có

$$(a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(MA^4 + MB^4 + MC^4)$$

Suy ra $MA^4 + MB^4 + MC^4 \geq \frac{(a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Mà $a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \geq abc$ nên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.47. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $a \cdot MA^3 + b \cdot MB^3 + c \cdot MC^3 \geq 3abc \cdot MG$

ABC

Lời giải

Xét mặt phẳng phức có M là gốc toạ độ. Gọi toạ độ của các điểm A, B, C là x, y, z . Toạ độ của điểm G là $\frac{x+y+z}{3}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$|y-z|.|x|^3 + |z-x|.|y|^3 + |x-y|.|z|^3 \geq |y-z|.|z-x|.|x-y|.|x+y+z|$$

Sử dụng (*5) và bất đẳng thức tam giác ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét.

+) Nếu M là tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có

$$R^3(a+b+c) \geq 3abc \cdot OG \Leftrightarrow R^2 \geq 6r \cdot OG$$

Chú ý rằng $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ nên

$$\begin{aligned} R^6 &\geq 36r^2 \left[R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \right] \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{R^2(36r^2 - R^4)}{4r^2} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.48. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng $\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} \geq 1$.

Lời giải

Xét mặt phẳng phức với x, y, z, m, n lần lượt là toạ độ các điểm A, B, C, M, N . Khi đó $AM = |m - x|, AN = |n - x|$, tương tự ta có bất đẳng thức

cần chứng minh trở thành $\frac{|m - x| \cdot |n - x|}{|y - x| \cdot |z - x|} + \frac{|m - y| \cdot |n - y|}{|z - y| \cdot |x - y|} + \frac{|m - z| \cdot |n - z|}{|x - z| \cdot |y - z|} \geq 1$.

Sử dụng (*4) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét.

+) Một dạng khác của bất đẳng thức là:

$$a \cdot AM \cdot AN + b \cdot BM \cdot BN + c \cdot CM \cdot CN \geq abc$$

+) Nếu tam giác ABC là tam giác đều cạnh a thì

$$AM \cdot AN + BM \cdot BN + CM \cdot CN \geq a^2$$

+) Nếu $M = N$ ta có ví dụ 2.44.

+) Nếu N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì

$$a \cdot AM + b \cdot BM + c \cdot CM \geq 4S \quad (1)$$

*) Khi M là tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC , ta có:

$$IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \Rightarrow a \cdot IA = 4Rr \cos \frac{A}{2}$$

nên (1) viết lại thành $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \sin A + \sin B + \sin C$. Đây

là một bất đẳng thức khá quen thuộc.

+) Nếu N là trọng tâm G của tam giác ABC thì

$$a \cdot MA \cdot m_a + b \cdot MB \cdot m_b + c \cdot MC \cdot m_c \geq \frac{3}{2} abc \quad (2)$$

*) Khi M là tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì (2) có dạng

$$m_a \cdot \cos \frac{A}{2} + m_b \cdot \cos \frac{B}{2} + m_c \cdot \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}(a + b + c)$$

Đây là một bất đẳng thức đẹp và khó.

*) Khi M là trực tâm H của tam giác nhọn ABC , ta có:

$$a \cdot MA \cdot m_a = a \cdot m_a \cdot 2R \cos A = 2R^2 m_a \cdot \sin 2A$$

và với chú ý $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ thì (2) trở

$$\text{thành: } \frac{m_a \cdot \sin 2A + m_b \cdot \sin 2B + m_c \cdot \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \geq \frac{3R}{2}$$

+) Nếu N là tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì

$$MA \cdot \cos \frac{A}{2} + MB \cdot \cos \frac{B}{2} + MC \cdot \cos \frac{C}{2} \geq \frac{a + b + c}{2} \quad (3)$$

*) Khi M là trực tâm H của tam giác nhọn ABC , ta có

$$HA = 2R \cdot \cos A, \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Nên (3) có dạng } \cos A \cdot \cos \frac{A}{2} + \cos B \cdot \cos \frac{B}{2} + \cos C \cdot \cos \frac{C}{2} \geq 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Ví dụ 2.49. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng $2m_a \cdot AM + b \cdot BM + c \cdot MC \geq 2bc$.

ABC

Lời giải

Ta có bất đẳng thức $a.AM \cdot AN + b.BM \cdot BN + c.CM \cdot CN \geq abc$

Xét N là trung điểm của BC thì $BN = CN = \frac{a}{2}$, $AN = m_a$ nên

$$a.AM \cdot m_a + b.BM \cdot \frac{a}{2} + c.CM \cdot \frac{a}{2} \geq abc$$

Rút gọn hai vế ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.50. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng $2AM \cdot \cos \frac{A}{2} + BM + MC \geq b + c$.

Lời giải

Ta có bất đẳng thức $a.AM \cdot AN + b.BM \cdot BN + c.CM \cdot CN \geq abc$

Xét N là chân đường phân giác trong của góc A thì

$$AN = l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}, BN = \frac{ac}{b+c}, CN = \frac{ab}{b+c}$$

Do đó $a.AM \cdot \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} + b.BM \cdot \frac{ac}{b+c} + c.CM \cdot \frac{ab}{b+c} \geq abc$

Hay ta có $2AM \cdot \cos \frac{A}{2} + BM + CM \geq b + c$.

BÀI TẬP

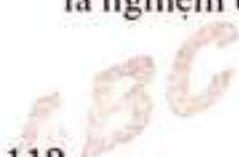
Tìm điều kiện để các bất đẳng thức trong các ví dụ từ 2.38 đến 250 xảy ra đẳng thức.

Bài đọc thêm. BÀI TOÁN DỤNG ĐA GIÁC ĐỀU 17 CẠNH

Tính độ dài cạnh đa giác đều 17 cạnh.

Giả sử đa giác đều 17 cạnh nội tiếp đường tròn đơn vị. Khi đó cạnh của đa giác đều là $a = 2R \sin \frac{\pi}{17} = 2 \sin \frac{\pi}{17}$. Xét số phức $z = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$

là nghiệm của phương trình $z^{17} - 1 = 0$.



Ta có $z^{17} - 1 = (z - 1)(z^{16} + z^{15} + z^{14} + \dots + z^2 + z + 1)$ và $z \neq 1$ nên z là nghiệm của phương trình $z^{16} + z^{15} + z^{14} + \dots + z^2 + z + 1 = 0$. (1)

Vì $z^{17} = 1$ nên $z^{17-k} = z^{-k}$, do đó phương trình (1) có dạng

$$z + z^2 + z^3 + \dots + z^8 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-8} = -1.$$

*) Đặt $u_1 = z + z^{-1} + z^2 + z^{-2} + z^4 + z^{-4} + z^8 + z^{-8}$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right) > 0$$

$$u_2 = z^3 + z^{-3} + z^5 + z^{-5} + z^6 + z^{-6} + z^7 + z^{-7}$$

$$= 2\left(\cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17} + \cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17}\right) < 0$$

Ta có $u_1 + u_2 = -1, u_1 \cdot u_2 = 4(u_1 + u_2) = -4$

Suy ra u_1, u_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + x - 4 = 0$ (2) nên

$$u_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, u_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

*) Đặt $v_1 = z + z^{-1} + z^4 + z^{-4} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17}\right) > 0$

$$v_2 = z^2 + z^{-2} + z^8 + z^{-8} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right) < 0$$

$$w_1 = z^3 + z^{-3} + z^5 + z^{-5} = 2\left(\cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17}\right) > 0$$

$$w_2 = z^6 + z^{-6} + z^7 + z^{-7} = 2\left(\cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17}\right) > 0$$

+) Nhận thấy $v_1 + v_2 = u_1, v_1 \cdot v_2 = -1$ nên v_1, v_2 là nghiệm của phương

trình $x^2 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}x - 1 = 0$ (3)

Suy ra $v_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}; v_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$

+) Ta lại có $w_1 + w_2 = u_1, w_1 \cdot w_2 = -1$ nên w_1, w_2 là nghiệm của phương

trình $x^2 + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}x - 1 = 0$ (4)

ABC

$$\text{Suy ra } w_1 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}; w_2 = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

*) Đặt $y_1 = z + z^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}, y_2 = z^4 + z^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17}$ ($y_1 > y_2$) ta có

$$y_1 + y_2 = v_1, y_1 \cdot y_2 = w_1$$

Nên y_1, y_2 là nghiệm của phương trình

$$x^2 - \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}x + \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} = 0 \quad (5)$$

Chú ý $\cos\frac{8\pi}{17} = \sin\frac{\pi}{34}$ nên $\cos\frac{2\pi}{17}$ và $\sin\frac{\pi}{34}$ lần lượt là

$$\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}}{16}$$

Mặt khác $\sin^2\frac{\pi}{17} = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2\pi}{17})$ nên tính được $\sin\frac{\pi}{17}$, nên cạnh đa giác đều

$$\text{là } 2\sqrt{\frac{17 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}}}{32}}$$

Dụng đa giác đều 17 cạnh.

*) Ta biết các nghiệm của phương trình bậc hai đều dụng được bằng thước và compa. Ví dụ:

+) Nếu dung cạnh huyền một tam giác vuông có các cạnh góc vuông a, b sẽ được đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a^2 + b^2}$.

+) Nếu dung cạnh góc vuông một tam giác vuông có cạnh huyền bằng a cạnh góc vuông bằng b sẽ được đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a^2 - b^2}$.

*) Cạnh của đa giác đều 17 cạnh được suy ra từ các phương trình bậc hai nên dụng được, vì thế dụng được đa giác đều đã nêu.

*) Bài toán này đã được nhà toán học **Carl Friedrich Gauss** (30/4/1777 - 23/2/1855) tìm ra khi ông 19 tuổi.

Bài toán dụng đa giác đều tổng quát.

Một số kết quả

- +) Bằng thước và compa, nếu ta dựng được những đa giác đều m và n cạnh, trong đó m và n là hai số nguyên tố cùng nhau thì ta có thể dựng được đa giác đều $m \cdot n$ cạnh.
- +) Định lý Gauss: Nếu p là một số nguyên tố có dạng 2^{2^n} ($n \in \mathbb{N}$) thì dùng thước và compa ta có thể dựng được đa giác đều p cạnh; còn nếu p là lũy thừa với số mũ lớn hơn hoặc bằng 2 của một số nguyên tố dạng trên hay p là một số nguyên tố không thuộc dạng trên thì dùng thước và compa, không thể dựng được đa giác đều p cạnh.

Từ kết quả này, các đa giác đều $3; 5; 17; 257; 65537$ cạnh dựng được. Còn các đa giác đều có $7; 9; 11; 13; 19; 25\dots$ không thể dựng được bằng thước và compa.

- +) Dùng thước và compa có thể dựng được đa giác đều m cạnh, nếu m là số có dạng $m = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_j$, $k \in \mathbb{N}$ và p_1, p_2, \dots, p_j là số nguyên tố có dạng 2^{2^n} và không trùng nhau.

[Download Sách Hay | Đức Sách Online](https://downloadsachmienphi.com)

GỢI Ý VÀ ĐÁP SỐ

Bài 2.1.

- a) Xét $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow z^7 = -1$, xét phần thực hai vế của đẳng thức $z + z^3 + z^5 = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{z^2 - 1} = \frac{1}{1 - z}$ ta có điều phải chứng minh.

- b) Bình phương hai vế, sử dụng công thức hạ bậc và tích thành tổng, ta cần chứng minh $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$. Tương tự câu a.

- c) Tương tự câu a.

Bài 2.2.

$$+) \sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$$

$$+) \sin 7x = -64 \sin^7 x + 112 \sin^5 x - 56 \sin^3 x + 7 \sin x$$

ABC

$$+) \tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$+) \tan 5x = \frac{\tan^5 x - 10 \tan^3 x + 5 \tan x}{5 \tan^4 x - 10 \tan^2 x + 1}$$

Bài 2.3.

$$+) \sin^5 x = \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$$

$$+) \sin^6 x = -\frac{1}{32} (\cos 6x - 6 \cos 4x + 15 \cos 2x - 10)$$

$$+) \cos^7 x = \frac{1}{64} (\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x)$$

$$+) \cos^8 x = \frac{1}{128} (\cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + 35)$$

Bài 2.4. Bạn đọc tự giải.**Bài 2.5.**

a) $S_1 = \frac{1 - q \cos x - q^{n+1} \cos(n+1)x + q^{n+2} \cos nx}{1 + 2q \cos x + q^2}$

b) $S_2 = \frac{q \sin x - q^{n+1} \sin(n+1)x + q^{n+2} \sin nx}{1 - 2q \cos x + q^2}$

c) Xét $z = \frac{1}{\cos a} (\cos a + i \sin a)$ và đẳng thức:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Ta có $S_3 = \frac{\sin na}{\sin a \cos^{n-1} a}$.

d) Xét $z = \cos a (\cos a + i \sin a)$ và đẳng thức:

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z}$$

Ta có $S_4 = \frac{\sin na \cos^{n+1} a}{\sin a}$.

Bài 2.6.

- a) $S_1 = C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2 C_n^4 - 3^3 C_n^6 + \dots = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$.
- b) $S_2 = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2 C_n^5 - 3^3 C_n^7 + \dots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$.
- c) $C_n^0 + 3^2 C_n^4 + 3^4 C_n^8 + \dots = \frac{1}{4} [(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n] + 2^{n-1} \cos \frac{n\pi}{3}$
- d) $C_n^1 + 3^2 C_n^7 + 3^4 C_n^{11} + \dots = \frac{1}{12\sqrt{3}} [(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n] - \frac{2^{n-1}}{3\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$

Bài 2.7.

a) Vì $kC_{n+1}^k = (n+1)C_n^{k-1}$ nên

$$C_{n+1}^1 + 5C_{n+1}^5 + 9C_{n+1}^9 + 13C_{n+1}^{13} + \dots = (n+1)(C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots)$$

b) Sử dụng $kC_{n+1}^k = (n+1)C_n^{k-1}$ ta có

$$C_{n+1}^4 + 2C_{n+1}^8 + 3C_{n+1}^{12} + 4C_{n+1}^{16} + \dots = \frac{n+1}{4} (C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \dots)$$

c) $C_{n+1}^1 - 3 \cdot 3 \cdot C_{n+1}^3 + 5 \cdot 3^2 C_{n+1}^5 - 7 \cdot 3^3 C_{n+1}^7 + \dots$

$$= (n+1)(C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2 C_n^4 - 3^3 C_n^6 + \dots)$$

d) $C_{n+1}^2 - 2 \cdot 3 \cdot C_{n+1}^4 + 3 \cdot 3^2 C_{n+1}^6 - 4 \cdot 3^3 C_{n+1}^8 + \dots$

$$= \frac{n+1}{2} (C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2 C_n^5 - 3^3 C_n^7 + \dots)$$

Bài 2.8.

a) Sử dụng $\frac{1}{k} C_n^{k-1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^k$ ta có

$$C_n^1 - \frac{1}{2} C_n^3 + \frac{1}{3} C_n^5 - \frac{1}{4} C_n^7 + \dots = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 - C_{n+1}^4 + C_{n+1}^6 - C_{n+1}^8 + \dots)$$

b) Vì $\frac{1}{2k+1} C_{2n}^{2k} = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{2k+1}$ nên

$$C_{2n}^0 - \frac{1}{3} C_{2n}^2 + \frac{1}{5} C_{2n}^4 - \frac{1}{7} C_{2n}^6 + \dots = \frac{1}{2n+1} (C_{2n+1}^1 - C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 - C_{2n+1}^7 + \dots)$$

c) Vì $\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$ nên

$$C_n^1 + \frac{1}{4} C_n^3 + \frac{1}{7} C_n^6 + \frac{1}{10} C_n^9 + \dots = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^4 + C_{n+1}^7 + C_{n+1}^{10} + \dots)$$

d) Tương tự ta có

$$\frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^4 + \frac{1}{8} C_n^7 + \frac{1}{11} C_n^{10} + \dots = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 + C_{n+1}^5 + C_{n+1}^8 + C_{n+1}^{11} + \dots)$$

Bài 2.9.

a) $S_1 = \frac{1}{5} \left[2^n + \frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^{n-1}} \cos \frac{n\pi}{5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^{n-1}} \cos \frac{2n\pi}{5} \right], n \in \mathbb{N}$.

b) $S_2 = \frac{2^n}{5} \left[1 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} \right)^n \cos \frac{(n-2)\pi}{5} + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} \right)^n \cos \frac{2(n-2)\pi}{5} \right]$

Hay $S_2 = \frac{1}{5} \left[2^n + \frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^{n-1}} \cos \frac{(n-2)\pi}{5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^{n-1}} \cos \frac{2(n-2)\pi}{5} \right], n \in \mathbb{N}$.

Bài 2.10. Gọi $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ta có

$$(1+1)^n = a_n + b_n + c_n, (1+\varepsilon)^n = a_n + b_n\varepsilon + c_n\varepsilon^2, (1+\varepsilon^2)^n = a_n + b_n\varepsilon^2 + c_n\varepsilon$$

a) Sử dụng hằng đẳng thức

$$a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = (a_n + b_n + c_n)(a_n + b_n\varepsilon + c_n\varepsilon^2)(a_n + b_n\varepsilon^2 + c_n\varepsilon)$$

Và chú ý $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ ta có

$$a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = (1+1)^n (1+\varepsilon)^n (1+\varepsilon^2)^n = 2^n (-\varepsilon^2)^n (-\varepsilon)^n = 2^n$$

b) Theo câu a) và hằng đẳng thức

$$a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_n b_n c_n = (a_n + b_n + c_n)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - c_n a_n)$$

$$\text{Suy ra } a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - c_n a_n = 1$$

Bài 2.11. Nghiệm của đa thức $x^2 + 1$ là $\pm i$.

$$\text{Mà } P(i) = (i \sin \alpha + \cos \alpha)^n - i \sin n\alpha - \cos n\alpha = 0$$

Nên $P(x)$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Bài 2.12. Nghiệm của đa thức $x^2 + x + 1$ là $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Xét $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

$$+) (x_1 + 1)^{2n+1} = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{2n+1} = \cos \frac{(2n+1)\pi}{3} + i \sin \frac{(2n+1)\pi}{3}$$

$$+) x_1^{n+2} = (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})^{n+2} = \cos \frac{(2n+4)\pi}{3} + i \sin \frac{(2n+4)\pi}{3}$$

$$= -\cos \frac{(2n+1)\pi}{3} - i \sin \frac{(2n+1)\pi}{3}$$

Do đó $(x_1 + 1)^{2n+1} + x_1^{n+2} = 0$ nên có điều phải chứng minh.

Bài 2.13.

- a) $n = 2 + 4k, k \in \mathbb{N}$.
- b) $n = 3k, k \in \mathbb{N}$.
- c) $n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$ hoặc $n = 6k - 1, k \in \mathbb{N}^*$.
- d) $n = 6k + 2, k \in \mathbb{N}$ hoặc $n = 6k - 2, k \in \mathbb{N}^*$.

Bài 2.14.

- a) $4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$
- b) $4(5x^2 + 2)^2 + (7x + 3)^2 = (20x^2 - 8x + 125)(5x^2 + 2x + 1)$
- c) $81(x-1)^2(x-2)^2 + (9x+11)^2 = (9x^2 - 48x + 89)(9x^2 - 6x + 5)$
- d) $(x^2 + x - 3)^2 + (2x + 1)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 5)$

Bài 2.15.

- a) $x^{2m} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right), m \in \mathbb{N}^*$
- b) $x^{2m+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^m \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right), m \in \mathbb{N}$

Bài 2.16. Sử dụng đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} &= C_{2n+1}^1 (1 - \sin^2 x)^n - C_{2n+1}^3 (1 - \sin^2 x)^{n-1} \sin^2 x + \\ &\quad + C_{2n+1}^5 (1 - \sin^2 x)^{n-2} \sin^4 x - \dots + (-1)^n \sin^{2n} x \end{aligned}$$

Bài 2.17.

- a) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos \frac{\pi}{9}; \\ y = \sqrt[3]{2} \sin \frac{\pi}{9} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos \frac{7\pi}{9}; \\ y = \sqrt[3]{2} \sin \frac{7\pi}{9} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \cos \frac{13\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{2} \sin \frac{13\pi}{9} \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \cos \frac{5\pi}{18}; \\ y = \sqrt[3]{4} \sin \frac{5\pi}{18} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \cos \frac{17\pi}{18}; \\ y = \sqrt[3]{4} \sin \frac{17\pi}{18} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \cos \frac{29\pi}{18} \\ y = \sqrt[3]{4} \sin \frac{29\pi}{18} \end{cases}$

ABC

c) $\begin{cases} x = \sqrt[4]{8} \cos \frac{-\pi}{12}; \\ y = \sqrt[4]{8} \sin \frac{-\pi}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[4]{8} \cos \frac{5\pi}{12}; \\ y = \sqrt[4]{8} \sin \frac{5\pi}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[4]{8} \cos \frac{11\pi}{12}; \\ y = \sqrt[4]{8} \sin \frac{11\pi}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[4]{8} \cos \frac{17\pi}{12}; \\ y = \sqrt[4]{8} \sin \frac{17\pi}{12} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \sqrt[5]{2} \cos \frac{-\pi}{30}; \\ y = \sqrt[5]{2} \sin \frac{-\pi}{30} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[5]{2} \cos \frac{11\pi}{30}; \\ y = \sqrt[5]{2} \sin \frac{11\pi}{30} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[5]{2} \cos \frac{23\pi}{30}; \\ y = \sqrt[5]{2} \sin \frac{23\pi}{30} \end{cases}$

và $\begin{cases} x = \sqrt[5]{2} \cos \frac{35\pi}{30}; \\ y = \sqrt[5]{2} \sin \frac{35\pi}{30} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt[5]{2} \cos \frac{47\pi}{30}; \\ y = \sqrt[5]{2} \sin \frac{47\pi}{30} \end{cases}$

Bài 2.18.

- a) $(x; y) = (\sqrt{2}; \sqrt{5})$ hoặc $(x; y) = (2\sqrt{2}; -\sqrt{5})$
- b) $(x; y) = (2; 3)$ hoặc $(x; y) = (18; 12)$
- c) $(x; y) = (2; \frac{3}{5})$
- d) $(x; y) = (7 + 4\sqrt{3}; 4 - 2\sqrt{3})$

Bài 2.19.

- a) $u_n = 2(\sqrt{2})^n \left(2\cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} \right), n \in \mathbb{N}.$
- b) $u_n = 3 + 2 \left(5\cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right), n \in \mathbb{N}.$
- c) $u_n = (-2)^n + 2(\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4} \right), n \in \mathbb{N}.$

Bài 2.20.

- a) Dãy tuần hoàn vì $u_n = 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$
- b) Dãy tuần hoàn vì $u_n = -1 + 3 \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$

Phân thứ ba

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Phần này giới thiệu các bài toán chọn lọc với mục đích ôn tập. Bài tập được chọn lọc không chỉ từ các đề thi đại học, mà còn có từ các đề thi học sinh giỏi quốc gia của Việt Nam, đề thi toán quốc tế, đề thi từ các kỳ thi của các nước...

Bài 3.1. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2009)

Lời giải

Phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ có $\Delta' = 1 - 10 = -9 = 9i^2$ nên có hai nghiệm phức là $z_1 = -1 - 3i, z_2 = -1 + 3i$.

Ta có $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ nên:

$$A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10 + 10 = 20.$$

Chú ý. Có thể giải cách khác dựa vào nhận xét: Với phương trình đã cho có hệ số thực thì nếu có nghiệm phức z_1 thì sẽ có nghiệm \bar{z}_1 . Hay $z_2 = \bar{z}_1$. Theo định lý Viet ta có $z_1 z_2 = 10 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = 10 \Rightarrow |z_1|^2 = 10$.

Do đó $A = 20$.

Bài 3.2. Cho phương trình $x^{10} + (13x - 1)^{10} = 0$ có 10 nghiệm phức là r_i, \bar{r}_i

với $i = \overline{1; 5}$. Tính tổng $S = \frac{1}{r_1 \bar{r}_1} + \frac{1}{r_2 \bar{r}_2} + \frac{1}{r_3 \bar{r}_3} + \frac{1}{r_4 \bar{r}_4} + \frac{1}{r_5 \bar{r}_5}$.

(AIME năm 1994)

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{z}$, phương trình đã cho trở thành $1 + (13 - z)^{10} = 0$. Hay ta có:

$$(13 - z)^{10} = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow 13 - z = \cos\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow z = 13 - \cos\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right) - i \sin\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right) \text{ với } k = \overline{0; 9}.$$

ABC

Phương trình đã cho có hệ số thực, nên nếu có nghiệm z thì sẽ có nghiệm là \bar{z} , vì vậy các nghiệm của phương trình là z, \bar{z} với $k = \overline{0; 4}$. Vì $z\bar{z} = |z|^2$

$$\text{nên: } z\bar{z} = \left[13 - \cos\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right) \right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right) \right]^2 = 170 - 26\cos\left(\frac{\pi + k2\pi}{10}\right)$$

$$\text{Do đó } S = \sum_{k=0}^4 z\bar{z} = 850 - 26\left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{5\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10}\right).$$

Chú ý rằng $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ta có $S = 850$.

Bài 3.3. Biết phương trình $(1-i)x^2 + (\lambda+i)x + 1 + i\lambda = 0$ không có nghiệm thực. Tìm những giá trị có thể có của λ .

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 1994)

Lời giải

Nếu phương trình có một nghiệm thực r thì:

$$(1-i)r^2 + (\lambda+i)r + 1 + i\lambda = 0 \Leftrightarrow r^2 + \lambda r + 1 + i(-r^2 + r + \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + \lambda r + 1 = 0 \\ -r^2 + r + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + \lambda r + 1 = 0 \\ \lambda r + r + \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 + \lambda r + 1 = 0 & (1) \\ (\lambda+1)(r+1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) ta có:

+) Nếu $\lambda = -1$ thì từ (1) suy ra $r^2 - r + 1 = 0$, phương trình này không có nghiệm thực.

+) Nếu $r = -1$ thì từ (1) suy ra $1 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm thực khi và chỉ khi $\lambda \neq 2$.

Bài 3.4. Tìm điều kiện đối với các số phức a, b, c sao cho với mọi số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ thì $az^2 + bz + c$ là số thực.

Lời giải

Vì $az^2 + bz + c$ là số thực nên chọn các giá trị đặc biệt:

+) Chọn $z = 1$ thì $a + b + c \in \mathbb{R}$. (1)

+) Chọn $z = -1$ thì $a - b + c \in \mathbb{R}$. (2)

+) Chọn $z = i$ thì $-a + ib + c \in \mathbb{R}$. (3)

+) Chọn $z = -i$ thì $-a - ib + c \in \mathbb{R}$. (4)

Từ (1) và (2) ta có $a, b \in \mathbb{R}$. Nhưng từ (3) và (4) ta có $ib \in \mathbb{R}$ do đó $b = 0$.

Khi đó, từ (1) và (3) thì $a, c \in \mathbb{R}$.

Vì $|z| = 1$ nên đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) ta có:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + b(\cos \varphi + i \sin \varphi) + c \\ &= (a \cos 2\varphi + c) + ia \sin 2\varphi \in \mathbb{R} \text{ khi và chỉ khi } a \sin 2\varphi = 0 \quad \forall \varphi. \end{aligned}$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$.

Vậy giá trị cần tìm là $a = b = 0$ và c là số thực tùy ý.

Bài 3.5. Phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 4 nghiệm không thực với các giá trị thực a, b, c và d . Biết tích hai trong bốn nghiệm đó là $13 + i$ và tổng của hai nghiệm còn lại là $3 + 4i$. Tìm giá trị của b .

(AIME năm 1995)

Lời giải

Gọi 4 nghiệm phức của phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ là $\alpha, \beta, \gamma, \eta$.

Khi đó $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \eta), \forall x$ nên suy ra $\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\eta + \beta\gamma + \beta\eta + \gamma\eta = b$ (*).

Theo bài ra ta có $\alpha\beta = 13 + i, \gamma + \eta = 3 + 4i$.

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nên $\alpha\beta$ & $\gamma + \eta$ cũng như $\alpha + \beta$ & $\gamma + \eta$ phải là các số phức liên hợp, do đó $\alpha + \beta = 3 - 4i, \gamma + \eta = 13 - i$.

Theo (*) thì $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\eta + \beta\gamma + \beta\eta + \gamma\eta = (\alpha + \beta)(\gamma + \eta) + \alpha\beta + \gamma\eta$
 $\Rightarrow b = (3 - 4i)(3 + 4i) + 13 + i + 13 - i = 51$.

Vậy giá trị cần tìm của b là 51.

Bài 3.6. Tìm số phức z thoả mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối B năm 2009)

Lời giải

Gọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$+) |z - (2 + i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |x - 2 + (y - 1)i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \quad (1)$$

$$+) z\bar{z} = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ & } y = 4; x = 5 \text{ & } y = 0.$$

Vậy $z = 3 + 4i$ hoặc $z = 5$.

ABC

Bài 3.7. Tìm số phức z thoả mãn điều kiện:

a) $2|z|^2 + z^2 = 21 + 12i$

b) $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$ và $|z| = 1$

c) $(z - 2)(\bar{z} + i)$ là số thực

d) $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z|$

Lời giảiGọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Ta có $2|z|^2 + z^2 = 21 + 12i \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 + 2xyi = 21 + 12i$

Hay: $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 21 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 21x^2 + 36 = 0 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4; x^2 = 3 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow x = \pm 2, y = \pm 3$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}, y = \pm 2\sqrt{3}$

Vậy các số phức cần tìm là:

$$z = 2 + 3i, z = -2 - 3i, z = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i, z = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i$$

b) Do $z^2 + \bar{z}^2 = 2(x^2 - y^2)$ nên theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 2|x^2 - y^2| = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \pm \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4}; y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 = \frac{1}{4}; y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy có 8 số phức thoả mãn: $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, z = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Ta có $(z - 2)(\bar{z} + i) = (x - 2 + yi)[x + (1 - y)i]$

$$= (x - 2)x - y(1 - y) + [(x - 2)(1 - y) + yx]i$$

Do đó $(z - 2)(\bar{z} + i)$ là số thực khi và chỉ khi:

$$(x - 2)(1 - y) + yx = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Suy ra $x = 2 - 2y$. Vậy mọi số phức cần tìm có dạng: $z = 2 - 2y + iy$ với $y \in \mathbb{R}$.

d) Ta có $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow 4x - 2iy = (2 + i\sqrt{3})\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow 4x - 2iy = 2\sqrt{x^2 + y^2} + i\sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x^2 + y^2} \\ -2y = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \leq 0 \\ 4x^2 = x^2 + y^2 \\ 4y^2 = 3(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \leq 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases}$$

Suy ra $y = -\sqrt{3}x$ với $x \geq 0$. Vậy số phức cần tìm có dạng: $z = x - i\sqrt{3}x$ với $x \geq 0$.

Bài 3.8. Giải hệ phương trình với hai ẩn phức z, w .

$$\text{a)} \begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2 \bar{w}^4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} z^3 - \bar{w}^2 = 0 \\ z^5 \bar{w}^3 = 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Xét hệ phương trình $\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 & (1) \\ z^2 \bar{w}^4 = 1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có $z^6 \bar{w}^{12} = 1$. Từ (1) $\cdot z^3 = -w^5 \Rightarrow z^6 = w^{10}$.

Do đó $w^{10} \bar{w}^{12} = 1 \Rightarrow |w|^{22} = 1 \Rightarrow |w| = 1$ nên $|z| = 1$.

Vì $|w| = 1$ nên $1 = w^{10} \bar{w}^{12} = (w \bar{w})^{10} \bar{w}^2 = \bar{w}^2$, suy ra hoặc $w = 1$ hoặc $w = -1$.

+)
+) Nếu $w = 1$ thì từ hệ ta có $\begin{cases} z^3 + 1 = 0 \\ z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow z = -1$.

+)
+) Nếu $w = -1$ thì ta tìm được $z = 1$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(1, 1)$ và $(-1, 1)$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} z^3 - \bar{w}^2 = 0 & (3) \\ z^5 w^3 = 1 & (4) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} z^3 - \bar{w}^2 = 0 \\ z^5 w^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^{15} = \bar{w}^{10} \\ z^{15} w^9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{w}^{10} w^9 = 1 \quad (*)$

Từ (*) ta có $|\bar{w}|^{10} |w|^9 = 1 \Rightarrow |w| = 1$, vì thế $1 = \bar{w}^{10} w^9 = \bar{w} (\bar{w} w)^9 = \bar{w}$. Do

dó $\bar{w} = 1$, nên hệ có dạng $\begin{cases} z^3 = 1 \\ z^5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^5 \cdot z = 1 \\ z^5 = 1 \end{cases}$ suy ra $z = 1$.

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

Bài 3.9. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ: $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức $S = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$ với n là số nguyên dương.

ABC

Lời giải

Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1, \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2, \frac{1}{z_3} = \bar{z}_3$.

Do đó: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$

$$\Rightarrow z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1 z_2 z_3 = a$$

Vậy z_1, z_2, z_3 là ba nghiệm của phương trình:

$$z^3 - z^2 + az - a = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + a) = 0$$

Chứng tỏ trong ba số phức z_1, z_2, z_3 phải có một số bằng 1 và hai số còn lại đối nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $z_1 = 1; z_2 = -z_3$ khi đó:

$$S = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1} = 1 + z_2^{2n+1} - z_2^{2n+1} = 1$$

Vậy ta có tổng $S = 1$.

Chú ý. Có thể giải bài toán bằng cách sử dụng biểu diễn hình học của số phức hoặc dùng dạng lượng giác (tương tự ví dụ dưới đây).

Bài 3.10. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thoả mãn hệ: $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức $T = |az_1 + bz_2 + cz_3|$ với $a, b, c \in R$.

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 2000)

Lời giải

Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_2}{z_3} \right| = \left| \frac{z_3}{z_1} \right| = 1$, do đó có thể đặt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos x + i \sin x, \frac{z_2}{z_3} = \cos y + i \sin y$$

Suy ra $\frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \cos(-x-y) + i \sin(-x-y)$.

Mà $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ nên $\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos(-x-y) = 1 \\ \sin x + \sin y + \sin(-x-y) = 0 \end{cases}$

Ta có $0 = \sin x + \sin y + \sin(-x - y)$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \end{aligned}$$

Suy ra hoặc $x = k2\pi$ hoặc $y = k2\pi$ hoặc $x + y = k2\pi$, do đó hai trong ba số z_1, z_2, z_3 bằng nhau.

Giả sử $z_1 = z_2$ thì $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_3} = -\frac{z_3}{z_1}$ hay ta có $\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2 = -1 \Rightarrow z_3 = \pm iz_1$.

Do đó: $|az_1 + bz_2 + cz_3| = |az_1 + bz_1 \pm iz_1| = |z_1| |a + b \pm ic| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.

Vậy T bằng $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ hoặc $\sqrt{(b+c)^2 + a^2}$ hoặc $\sqrt{(c+a)^2 + b^2}$.

Bài 3.11. Cho số phức z bằng $9 + bi$ với b là số thực dương. Biết phần ảo của z^2 và z^3 bằng nhau. Tìm b .

(AIME năm 2007)

downloadsachmienphi.com
Lời giải

Ta có $z^2 = (9+bi)^2 = 81 - b^2 + 18bi$ nên $\text{Im } z^2 = 18b$.

Lại có $z^3 = (9+bi)^3 = 729 - 27b^2 + (243b - b^3)i$ nên $\text{Im } z^3 = 243b - b^3$.

Theo bài ra ta có: $\text{Im } z^2 = \text{Im } z^3 \Leftrightarrow 18b = 243b - b^3 \Rightarrow b = 0; b = -15; b = 15$

Vì b là số thực dương nên $b = 15$.

Bài 3.12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (3 - 4i)| = 2$.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối D năm 2009)

Lời giải

Gọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow |x - 3 + (y + 4)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 2$.

ABC

Bài 3.13. Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $(1 + i\sqrt{3})z + 2$, trong đó $|z - 1| \leq 2$.

Lời giải

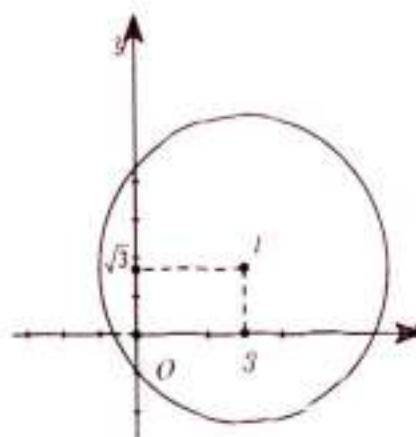
$$\text{Đặt } w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \text{ thì } z = \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Theo bài ra $|z - 1| \leq 2$ nên

$$\left| \frac{w - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1 \right| \leq 2 \Leftrightarrow |w - 2 - 1 - i\sqrt{3}| \leq 2|1 + i\sqrt{3}|$$

$$\Leftrightarrow |w - (3 + i\sqrt{3})| \leq 4.$$

Vậy tập hợp các điểm M là các điểm thuộc hình tròn tâm I là điểm biểu diễn số phức $3 + i\sqrt{3}$, có bán kính bằng 4.



Hình 3.1

Bài 3.14. Xác định tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức thoả mãn:

- a) M biểu diễn các số phức $\bar{z} + 1 - i$, trong đó $|z - 1 + 2i| = 3$.
- b) M biểu diễn các số phức $z - 2 + i$, với $2 \leq |z - 1 - i| < 3$.

Lời giải

Gọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Vì $\bar{z} + 1 - i = x + 1 + (y+1)i$ nên điểm M có tọa độ $M(x+1, -y-1)$.

$$\text{Ta có } |z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |x - 1 + (y+2)i| = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

Hay viết lại $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x+1-2)^2 + (-y-1-1)^2 = 9$ suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(2; 1)$ bán kính $R = 3$.

- b) Ta có $2 \leq |z - 1 - i| < 3 \Leftrightarrow 2 \leq |(z - 2 + i) - (-1 + 2i)| < 3$, nên tập hợp điểm M là những điểm nằm phía trong đường tròn bán kính bằng 3 và phía ngoài (kể cả biên) của đường tròn bán kính bằng 2 có cùng tâm là điểm biểu diễn số phức $-1 + 2i$, tức là những điểm trong hình vành khán kể cả biên trong. Về mặt giải tích, những điểm $M(x; y)$ đó thoả mãn điều kiện:

$$4 \leq (x+1)^2 + (y-2)^2 < 9$$

Bài 3.15. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn:

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $ z + 1 + z - 1 = 4$ | b) $ z + 2i + z - 2i = 6$ |
| c) $ z - 5 - z + 5 = 8$ | d) $ z - 2 = \operatorname{Re} z + 2$ |

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z .

- a) Xét điểm F_1 biểu diễn số phức $z_1 = -1$, F_2 biểu diễn số phức $z_2 = 1$. Hai điểm F_1 và F_2 nằm trên trục thực Ox .

Ta có: $|z + 1| + |z - 1| = 4$

$$\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4 \text{ và } F_1F_2 = 2.$$

Vậy tập hợp các điểm M là Elip có trục lớn bằng 4 và trục bé bằng $2\sqrt{3}$.

Phương trình của Elip trong mặt phẳng tọa độ Oxy là $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- b) Xét điểm F_1 biểu diễn số phức $z_1 = 2i$, F_2 biểu diễn số phức $z_2 = -2i$. Hai điểm F_1 và F_2 nằm trên trục ảo Oy .

Ta có: $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$

$$\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 6 \text{ và } F_1F_2 = 4.$$

Vậy tập hợp các điểm M là Elip có hai tiêu điểm F_1 và F_2 thuộc trục Oy và độ dài trục lớn bằng 6 và trục bé bằng $\sqrt{5}$.

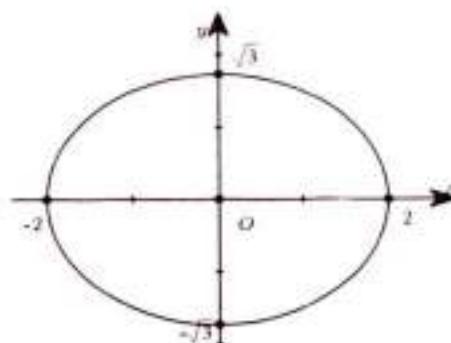
Phương trình của Elip trong mặt phẳng tọa độ Oxy là $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- c) Xét điểm F_1 biểu diễn số phức $z_1 = -5$, F_2 biểu diễn số phức $z_2 = 5$. Hai điểm F_1 và F_2 nằm trên trục thực Ox .

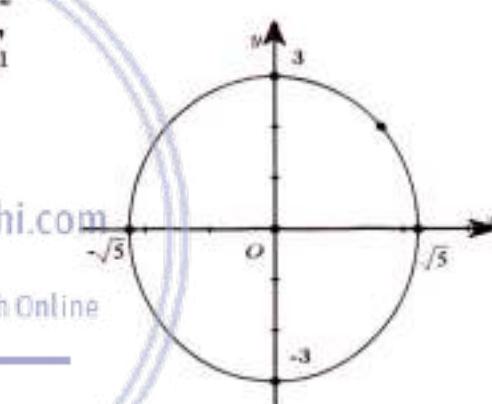
Ta có: $|z - 5| - |z + 5| = 8 \Leftrightarrow MF_2 - MF_1 = 8$ và $F_1F_2 = 10$.

Tập hợp các điểm thoả mãn $|MF_2 - MF_1| = 8$ với $F_1F_2 = 10$ là Hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục Ox , độ dài trục thực là 4 và trục ảo là 3, nên

có phương trình (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

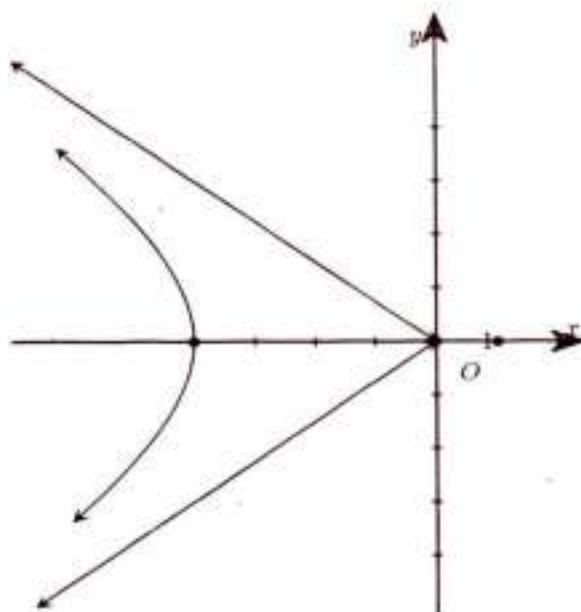


Hình 3.2



Hình 3.3

ABC



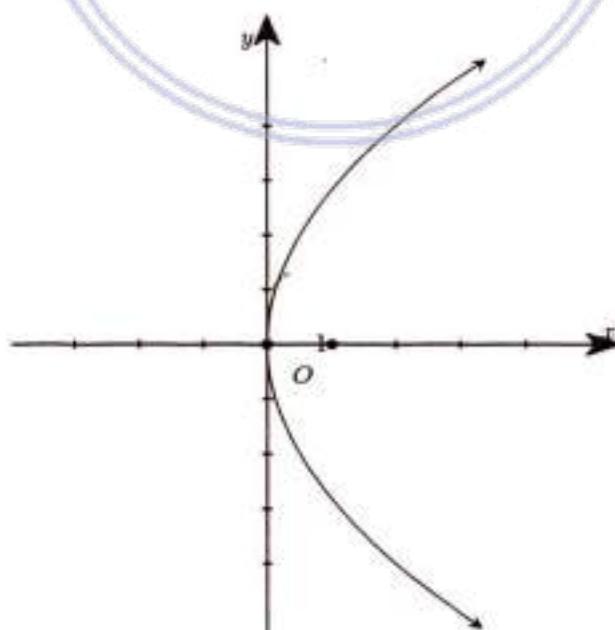
Hình 3.4

Vậy điểm M cần tìm thuộc nhánh trái của (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

- d) Gọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có $|z - 2| = |x - 2 + iy|$ nên:

$$|z - 2| = \operatorname{Re} z + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$$



Hình 3.5

Vậy tập hợp điểm M là những điểm thuộc Parabol (P) : $y^2 = 8x$ (có đỉnh là gốc toạ độ và tiêu điểm $F(2;0)$).

Bài 3.16. Cho ba điểm A_1, A_2, A_3 trên mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức z_1, z_2, z_3 thoả mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Chứng minh rằng tam giác $A_1A_2A_3$ đều khi và chỉ khi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Lời giải

Trọng tâm G của tam giác $A_1A_2A_3$ biểu diễn số phức $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên ba điểm A_1, A_2, A_3 thuộc đường tròn đơn vị có tâm tại gốc toạ độ O . Do đó tam giác $A_1A_2A_3$ đều khi và chỉ khi $G \equiv O$, hay khi và chỉ khi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Bài 3.17. Cho $M = \{z \mid (z - 1)^2 = |z - 1|^2, z \in C\}$. Chọn phương án đúng?

- (a) $M = C - R$ (b) $M = R$ (c) $R \subset M \subset C$ (d) $M = C$

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 1987)

download [Lời giải](https://bookgiaokhoa.com)

Ta có $|z - 1|^2 = (z - 1)\overline{(z - 1)} = (z - 1)(\bar{z} - 1)$ nên:

$$(z - 1)^2 = |z - 1|^2 \Leftrightarrow (z - 1)^2 = (z - 1)(\bar{z} - 1)$$

$$\Leftrightarrow (z - 1)(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow z = 1, z = \bar{z}$$

Vậy ta có z là số thực nên $M = R \Rightarrow$ chọn b

Bài 3.18. Cho số phức z thoả mãn điều kiện $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$. Chứng minh rằng $|z| = 1$.

(Putnam năm 1989)

Lời giải

Ta có $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0 \Leftrightarrow z^9(11z + 10i) = 11 - 10iz$. Hay:

$$z^9 = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \quad (*)$$

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Từ $(*)$ suy ra:

$$|z|^9 = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right| = \frac{|11 - 10iz|}{|11z + 10i|} = \frac{\sqrt{10^2(x^2 + y^2) + 11^2 + 220y}}{\sqrt{11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y}} = \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{g(x, y)}}$$

ABC

Xét các trường hợp:

+) Nếu $|z| > 1$ thì $x^2 + y^2 > 1$ nên:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= 11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y = 10^2(x^2 + y^2) + 21(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y \\ &> 10^2(x^2 + y^2) + 11^2 + 220y = f(x,y) \end{aligned}$$

Do đó $|z|^2 < 1 \Rightarrow |z| < 1$ (mâu thuẫn).

+) Nếu $|z| < 1$ thì $x^2 + y^2 < 1$ nên:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= 11^2(x^2 + y^2) + 10^2 + 220y = 10^2(x^2 + y^2) + 21(x^2 + y^2) + 10^2 - 220y \\ &< 10^2(x^2 + y^2) + 11^2 - 220y = f(z,y) \end{aligned}$$

Suy ra $|z|^2 > 1 \Rightarrow |z| > 1$ (mâu thuẫn).

+) Nếu $|z| = 1$ thì $g(x,y) = f(x,y)$ (thoả mãn)

Vậy $|z| = 1$.

Bài 3.19.

Cho hai số phức x, y có tổng các bình phương là 7 và tổng các lập phương là 10. Tìm giá trị thực lớn nhất của tổng $x + y$?

[Download Sách MienPhi](https://www.sachmienphi.com) | [Đọc Sách Online](#)

(AIME năm 1983)

Lời giải

Đặt $S = x + y, P = xy$. Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 7 \\ S^3 - 3SP = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{S^2 - 7}{2} \\ S(7 - P) = 10 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S\left(7 - \frac{S^2 - 7}{2}\right) = 10 \Leftrightarrow S^3 - 21S + 20 = 0 \Leftrightarrow (S-1)(S-4)(S+5) = 0$$

Hay $S = -5, S = 1, S = 4$.

Vậy giá trị thực lớn nhất của $x + y$ là 4.

Bài 3.20. Cho α, β hai số phức liên hợp thoả mãn $\frac{\alpha}{\beta^2} \in R$ và $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$.

Tính $|\alpha|$.

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 1996)

Lời giải

Đặt $\alpha = x + iy \Rightarrow \beta = x - iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Không giảm tính tổng quát, ta coi $y \geq 0$.

Vì $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$ nên $|2iy| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$.

Do α, β hai số phức liên hợp nên $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$, mà $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha^3}{(\alpha \beta)^2} \in \mathbb{R}$ do đó

$\alpha^3 \in \mathbb{R}$. Nhưng ta có $\alpha^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ nên $\alpha^3 \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1$.

Vậy $|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Bài 3.21. Tìm các số thực $x; y$ thoả mãn

$$a) (x^2 + 2y + i)(3 - i)^2 + y(x + 1)(1 - i)^3 = 26 - 14i$$

$$b) (x^2 + y^2 + 2i)(\sqrt{3}i - 1)^6 + (y^2 + 2x)\frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^4} = 320 + 896i$$

*downloadsachmienphi.com
Lời giải*

a) Ta có $(3 - i)^2 = 8 - 6i$; $(1 - i)^3 = -2 - 2i$ nên đẳng thức đã cho có dạng

$$(x^2 + 2y + i)(8 - 6i) + y(x + 1)(-2 - 2i) = 26 - 14i$$

$$\text{Hay } 8x^2 - 2xy + 14y + 6 + (8 - 6x^2 - 2xy - 14y) = 26 - 14i$$

Suy ra

$$\begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \\ 3x^2 + xy + 7y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \\ x^2 + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - xy + 7y = 10 \quad (1) \\ 2y = 3 - x^2 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}$

Vậy các cặp số thực cần tìm là

$$(x; y) = (1; 1), (-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-1 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$b) \text{Ta có } (\sqrt{3}i - 1)^6 = 64, \frac{(\sqrt{3} + i)^9}{(1 + i)^4} = 128i \text{ nên}$$

$$64(x^2 + y^2 + 2i) + 128i(y^2 + 2x) = 320 + 896i$$

$$\text{Hay } x^2 + y^2 + 2i(y^2 + 2x + 1) = 5 + 14i$$

ABC

Vì thế ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 = 6 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy các cặp số cần tìm là $(x; y) = (1; 2), (1; -2)$.

Bài 3.22. Tìm c biết a, b và c là các số nguyên dương thoả mãn:

$$c = (a + bi)^3 - 107i.$$

(AIME năm 1985)

Lời giải

Tacó $c = (a + bi)^3 - 107i = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3 - 107)$. Nên c à số nguyên dương thi $3a^2b - b^3 - 107 = 0$. Hay $b(3a^2 - b^2) = 107$.

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và 107 là số nguyên tố nên xảy ra:

+)
+) $b = 107; 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{11450}{3} \notin \mathbb{Z}$ (loại).

+)
+) $b = 1; 3a^2 - b^2 = 107 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ (thoả mãn).

Vậy nên $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 1^2 = 198$.

Bài 3.23. Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n

thoả mãn $\frac{z}{z+n} = 4i$. Tìm n .

(AIME năm 2009)

Lời giải

Đặt $z = x + 164i$ ta có:

$$\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow \frac{x+164i}{x+164i+n} = 4i \Leftrightarrow x+164i = -656 + 4(x+n)i$$

$$\Rightarrow x = -656 \text{ & } x+n = 41 \Rightarrow n = 697$$

Vậy giá trị cần tìm của n là 697.

Bài 3.24. Cho x, y và z là các số phức thoả mãn

$$(y+z)(x-y)(x-z) = (z+x)(y-z)(y-x) = (x+y)(z-x)(z-y) = 1$$

Tính giá trị của biểu thức $T = (y+z)(z+x)(x+y)$.

Lời giải

Từ điều kiện suy ra x, y và z là các số phức đôi một khác nhau.

Do đó

$$(y+z)(x-y)(x-z) = (z+x)(y-z)(y-x)$$

$$\Rightarrow (y+z)(z-x) = (z+x)(y-z) \Rightarrow xy = z^2$$

Tương tự $yz = x^2, zx = y^2$. Suy ra x, y và z đều khác không, ngược lại nếu $x = 0$ thì $z = 0$, do đó $(z+x)(y-z)(y-x) = 0 \neq 1$.

Ta có $xy \cdot x^2 = z^2 \cdot yz \Rightarrow x^3 = z^3$. Mặt khác $zx \cdot x^2 = y^2 \cdot yz \Rightarrow x^3 = y^3$. Mà x, y và z là các số phức đôi một khác nhau, nên nếu gọi ε là căn bậc ba

của đơn vị $(\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ thì $(x; y; z) = (k; \varepsilon k; \varepsilon^2 k)$ hoặc

$(x; y; z) = (k; \varepsilon^2 k; \varepsilon k)$ với k là một số phức.

Trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$(y+z)(x-y)(x-z) = -3k^3 \Rightarrow k^3 = -\frac{1}{3}.$$

Nhưng $T = (y+z)(z+x)(x+y) = -k^3$, nên $T = \frac{1}{3}$.

Bài 3.25. Tìm tất cả các số phức x, y, z có modun bằng 1, thoả mãn

$$\frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} + \frac{x^2 + y^2}{z} = 2(x + y + z) \text{ và } |x^2 + y^2 + z^2| \neq 3.$$

Lời giải

Viết lại đẳng thức $\frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} + \frac{x^2 + y^2}{z} = 2(x + y + z)$ dưới dạng

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3(x + y + z).$$

Vì $|x| = 1$ nên $\frac{1}{x} = \bar{x}$, do đó ta có $(x^2 + y^2 + z^2)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = 3(x + y + z)$.

Hay $(x^2 + y^2 + z^2)\overline{(x + y + z)} = 3(x + y + z)$.

Lấy modun hai vế $|x^2 + y^2 + z^2| |\overline{(x + y + z)}| = 3|x + y + z|$

Mà $|x^2 + y^2 + z^2| \neq 3$, suy ra $x + y + z = 0$.

ABC

Như vậy $x + y + z = 0$ và $|x| = |y| = |z| = 1$ nên x, y, z là tọa độ ba đỉnh một tam giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị.

Vậy nếu gọi $x = \cos \varphi + i \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi)$ thì

$$y = x \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + i \sin(\varphi + \frac{2\pi}{3})$$

$$z = x \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \cos(\varphi + \frac{4\pi}{3}) + i \sin(\varphi + \frac{4\pi}{3})$$

Bài 3.26. Cho các số phức z_1, z_2 . Chứng minh rằng: $\left| \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} \right| \leq 2 \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1| + |z_2|}$

Lời giải

Giả sử $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|} \right| &= \left| \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \right| \\ &= \sqrt{(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2} = \sqrt{2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ \left| \frac{z_1 + z_2}{|z_1| + |z_2|} \right| &= \left| \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cos \varphi_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cos \varphi_2 + i \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} \sin \varphi_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \sin \varphi_2 \right) \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} \cos \varphi_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cos \varphi_2 \right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} \sin \varphi_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2} \sin \varphi_2 \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2 + 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \leq 4 \left[\frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} + \frac{2r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$

$$\Leftrightarrow (r_1 - r_2)^2 [1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3.27. Cho số phức $z \neq 0$ thoả mãn $\left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| \leq 2$.

Chứng minh rằng: $\left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2$.

Lời giải

Ta có $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$ nên:

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^3 = \left|z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \leq \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2 + 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$$

Đặt $t = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ thì t là số thực không âm.

Ta có $t^3 \leq 2 + 3t \Leftrightarrow (t - 2)(t + 1)^2 \leq 0 \Rightarrow t \leq 2$.

Do đó $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$.

Bài 3.28. Cho các số phức $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ thoả mãn

$|z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n| = 1$. Chứng minh rằng tồn tại tổng S của một tập con của $\{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ thoả mãn điều kiện $|S| \geq \frac{1}{6}$.

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 1986)
downloadsachmienphi.com

Lời giải

Đặt $z_k = x_k + iy_k$ với $1 \leq k \leq n$. Ta có:

$$\begin{aligned} 1 &= |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \leq (\sum_{x_k \geq 0} |x_k| + \sum_{x_k < 0} |x_k|) + (\sum_{y_k \geq 0} |y_k| + \sum_{y_k < 0} |y_k|) \\ &\Rightarrow 1 \leq \sum_{x_k \geq 0} |x_k| + \sum_{x_k < 0} |x_k| + \sum_{y_k \geq 0} |y_k| + \sum_{y_k < 0} |y_k| \end{aligned}$$

Do đó phải tồn tại ít nhất một tổng trong các tổng

$\sum_{x_k \geq 0} |x_k|, \sum_{x_k < 0} |x_k|, \sum_{y_k \geq 0} |y_k|, \sum_{y_k < 0} |y_k|$ không nhỏ hơn $\frac{1}{4}$. Giả sử $\sum_{x_k \geq 0} |x_k| \geq \frac{1}{4}$

Khi đó, theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta có:

$$\frac{1}{4} \leq \sum_{x_k \geq 0} |x_k| = \left| \sum_{x_k \geq 0} x_k \right| \leq \left| \sum_{x_k \geq 0} z_k \right| = |S|.$$

Hay $|S| \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$.

Đây chính là điều phải chứng minh.

ABC

Chú ý. Bài toán tổng quát “Cho các số phức $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$. Chứng minh rằng tồn tại một tập con I của $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ sao cho $\left| \sum_{k \in I} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$.”

Bài 3.29. Cho số phức $z \neq 0$ thoả mãn $|z| \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

Lời giải

Ta có $P = \left| \frac{z+i}{z} \right| = \left| 1 + \frac{i}{z} \right|$ và $1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right|$ nên:

$$1 - \left| \frac{i}{z} \right| \leq P \leq 1 + \left| \frac{i}{z} \right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 1 + \frac{1}{|z|}$$

Mặt khác, theo bài ra $|z| \geq 2$ nên $\frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2}$ vì thế:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{|z|} \leq P \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$$

Vì $P = \frac{1}{2}$ chẳng hạn với $z = -2i$ và $P = \frac{3}{2}$ chẳng hạn với $z = 2i$ nên:

+) Giá trị lớn nhất của P là $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$.

+) Giá trị nhỏ nhất của P là $\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

Bài 3.30. Cho các số thực x, y, z thoả mãn $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $|\cos x| + |\cos y| + |\cos z| \geq 1$.

(Đề thi chọn đội tuyển toán Romanian năm 1988)

Lời giải

Vì $z = -x - y$ nên $\cos z = \cos(-x - y) = \cos(x + y)$.

Xét số phức $a = \cos 2x + i \sin 2x, b = \cos 2y + i \sin 2y$ ta có:

$$+) |1 + a| = 2|\cos x(\cos x + i \sin x)| = 2|\cos x|, |1 + b| = 2|\cos y|$$

$$+) |1 + ab| = |1 + \cos 2(x + y) + i \sin 2(x + y)| = 2|\cos(x + y)|.$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$|1 + a| + |1 + b| + |1 + ab| \geq 2.$$

Thật vậy $|1+a| + |1+b| + |1+ab| \geq |1+a| + |1+ab - (1+b)| = |1+a| + |b||1-a| = |1+a| + |1-a| \geq |1+a+1-a| = 2$.

Đó chính là điều phải chứng minh.

Nhận xét: Sử dụng số phức để chứng minh bất đẳng thức là cách làm khá “thú vị”!

Bài 3.31. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 . Chứng minh rằng:

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$$

(Bất đẳng thức Hlawka)

Lời giải

Bố đề: Chứng minh rằng, với các số phức z_1, z_2, z_3 ta có:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$$

Thay vậy, đẳng thức được chứng minh với chú ý rằng:

$$+ |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + |z_2|^2$$

$$+) |z_1 + z_2 + z_3|^2 = (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_3$$

Áp dụng: Ta có

$$2|z_1 + z_2| \cdot |z_2 + z_3| = 2|z_2(z_1 + z_2 + z_3) + z_1 z_3| \leq 2|z_2| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| + |z_1 z_3|$$

$$\text{Tương tự: } +) 2|z_2 + z_3| \cdot |z_3 + z_1| \leq 2|z_3| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| + |z_2 z_1|$$

$$+) 2|z_3 + z_1| \cdot |z_1 + z_2| \leq 2|z_1| \cdot |z_1 + z_2 + z_3| + |z_3 z_2|$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức và đẳng thức trong bố đề ta có:

$$(|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1|)^2 \leq (|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|)^2$$

Do đó $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$.

Nhận xét: Có thể chứng minh bất đẳng thức nhờ đẳng thức:

$$(|z_1| + |z_2| + |z_3| - |z_1 + z_2| - |z_2 + z_3| - |z_3 + z_1| + |z_1 + z_2 + z_3|).$$

$$\cdot (|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|)$$

ABC

$$\begin{aligned}
 &= (|z_2| + |z_3| - |z_2 + z_3|)(|z_1| - |z_2 + z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|) \\
 &+ (|z_3| + |z_1| - |z_3 + z_1|)(|z_2| - |z_3 + z_1| + |z_1 + z_2 + z_3|) \\
 &+ (|z_1| + |z_2| - |z_1 + z_2|)(|z_3| - |z_1 + z_2| + |z_1 + z_2 + z_3|)
 \end{aligned}$$

Bài 3.32. Cho các số phức a, b, c thoả mãn $|a+b|=m, |a-b|=n$ và $m, n \neq 0$.

Chứng minh rằng $\max\{|ac+b|, |a+bc|\} \geq \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 2007)

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức $\max(x, y) \geq \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}$ $\forall x, y, \alpha, \beta > 0$ ta có

$$\begin{aligned}
 \max\{|ac+b|, |a+bc|\} &\geq \frac{|a| \cdot |a+bc| + |b| \cdot |ac+b|}{|a| + |b|} \\
 &\geq \frac{|a(a+bc) - b(ac+b)|}{|a| + |b|} = \frac{|a^2 - b^2|}{|a| + |b|}
 \end{aligned}$$

Vì $m^2 + n^2 = |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \geq (|a| + |b|)^2$ nên

$$\max\{|ac+b|, |a+bc|\} \geq \frac{|a^2 - b^2|}{|a| + |b|} \geq \frac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{2(|a|^2 + |b|^2)}} = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3.33. Cho số phức thoả mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của:

a) $A = |1+z| + 3|1-z|$ b) $B = |1+z| + |1-z+z^2|$

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Vì $|z|=1$ nên $y^2 = 1 - x^2$ và $x \in [-1; 1]$.

a) Ta có: +) $|1+z| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1+x)}$

+) $|1-z| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1-x)}$

Do đó $|1+z| + 3|1-z| = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)} = f(x)$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$f(x) = \sqrt{2(1+x)} + 3\sqrt{2(1-x)}$ với $x \in [-1; 1]$.

Hàm số liên tục trên $x \in [-1; 1]$ và với $x \in (-1; 1)$ thì:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1-x)}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

Mà $f(1) = 2, f(-1) = 6, f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{10}$ nên:

+)
 $\underset{|z|=1}{Max} A = 2\sqrt{10}$ khi $z = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i$

+)
 $\underset{|z|=1}{Min} A = 2$ khi $z = 1$

b) Vì $1 - z + z^2 = 1 - x + x^2 - y^2 + i(2x - 1)$ $y = 2x^2 - x + i(2x - 1)$ y nên

$$|1 - z + z^2| = \sqrt{(2x^2 - x)^2 + y^2} = \sqrt{(2x - 1)^2(x^2 + y^2)} = |2x - 1|$$

Vậy nên $B = |1 + z| + |1 - z + z^2| = \sqrt{2(1+x)} + |2x - 1|$.

Đặt $g(x) = \sqrt{2(1+x)} + |2x - 1|$ với $x \in [-1; 1]$.

Xét hai trường hợp:

+)
Trường hợp 1: Xét $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ thì $g(x) = \sqrt{2(1+x)} + 2x - 1$

Ta có $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} + 2 > 0 \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên:

$$\underset{\left[\frac{1}{2}; 1\right]}{Max} g(x) = g(1) = 3, \underset{\left[\frac{1}{2}; 1\right]}{Min} g(x) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

+)
Trường hợp 2: Xét $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ thì $g(x) = \sqrt{2(1+x)} - 2x + 1$

Vì $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1+x)}} - 2 > 0, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}$ và:

$$g(-1) = 3, g\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}, g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Nên $\underset{\left[-1; \frac{1}{2}\right]}{Max} g(x) = g\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{13}{4}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên

khoảng đó.

ABC

So sánh hai trường hợp, ta có: +) $\underset{|z|=1}{\text{Max}} B = \frac{13}{4}$ khi $z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i$

+) $\underset{|z|=1}{\text{Min}} B = \sqrt{3}$ khi $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài 3.34. Cho số phức thoả mãn $|z| = 1$. Tìm $\underset{|z|=1}{\text{Max}} |z^3 - z + 2|$.

(Putnam năm 1947)

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Vì $|z| = 1$ nên $y^2 = 1 - x^2$ và $x \in [-1; 1]$

$$\text{Ta có } z^3 - z + 2 = x^3 - 3xy^2 - x + 2 + i(3x^2 - y^2 - 1)y$$

$$= 4x^3 - 4x + 2 + i(4x^2 - 2)y$$

$$\text{Vậy } |z^3 - z + 2|^2 = (4x^3 - 4x + 2)^2 + (4x^2 - 2)^2 y^2 = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$$

Xét $f(x) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$ với $x \in [-1; 1]$.

$$f'(x) = 48x^2 - 8x - 16, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1) = 4, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 13, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}, f(1) = 4$$

$$\text{Vậy } \underset{|z|=1}{\text{Max}} |z^3 - z + 2| = \sqrt{13} \text{ khi } z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\text{Chú ý. } \underset{|z|=1}{\text{Min}} |z^3 - z + 2| = \frac{2\sqrt{6}}{9} \text{ khi } z = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i.$$

Bài 3.35. Cho số phức thoả mãn $|z + 2 - 2i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Vì $|z + 2 - 2i| = 1$ nên:

$$|x + 2 + (y - 2)i| = 1 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Vì thế có thể đổi biến $x + 2 = \cos t, y - 2 = \sin t$ với $0 \leq t < 2\pi$.

$$\text{Khi đó: } x^2 + y^2 = (\cos t - 2)^2 + (\sin t + 2)^2$$

$$= 9 + 4(\sin t - \cos t) = 9 + 4\sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Mà $-1 \leq \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ nên $9 - 4\sqrt{2} \leq x^2 + y^2 \leq 9 + 4\sqrt{2}$, do đó:

$$\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \leq |z| \leq \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq |z| \leq 2\sqrt{2} + 1$$

$$+) |z| = 2\sqrt{2} - 1 \text{ khi } t = \frac{7\pi}{4} \text{ hay } x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $2\sqrt{2} - 1$ khi $z = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$+) |z| = 2\sqrt{2} + 1 \text{ khi } t = \frac{3\pi}{4} \text{ hay } x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|z|$ là $2\sqrt{2} + 1$ khi $z = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài 3.36. Tìm giá trị nhỏ nhất $\frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z}$ với tất cả các số phức z thuộc $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lời giải

Vì số phức z thuộc $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nên $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ với $r > 0$ và $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$+) \frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z} = \frac{\sin 5\varphi}{\sin^5 \varphi} = \frac{16 \sin^4 \varphi - 20 \sin^3 \varphi + 5 \sin \varphi}{\sin^5 \varphi} = \frac{5}{\sin^4 \varphi} - \frac{20}{\sin^2 \varphi} + 16$$

$$= 5 \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - 2 \right)^2 - 4 \geq -4.$$

$$+) \frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z} = -4 \Leftrightarrow \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{2k+1}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $\frac{\operatorname{Im} z^5}{\operatorname{Im}^5 z}$ là -4 .

Bài 3.37. Cho z_1 và z_2 là các số phức thoả mãn $z_1^2 - 4z_2 = 16 + 20i$. Giả sử α, β là các nghiệm của phương trình $x^2 + z_1x + z_2 + m = 0$ thoả mãn điều kiện $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$, với m là số phức.

a) Tìm giá trị lớn nhất của $|m|$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $|m|$.

(Đề thi học sinh giỏi toán Trung Quốc năm 1995)

ABC

Lời giải

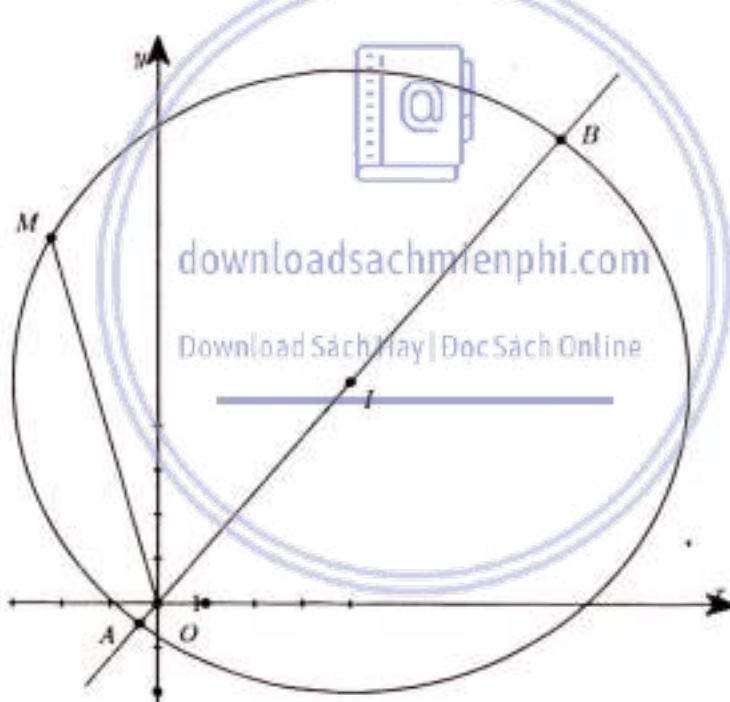
Sử dụng định lý Viet ta có $\alpha + \beta = -z_1$, $\alpha \cdot \beta = z_2 + m$.

Do đó: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = z_1^2 - 4z_2 - 4m = 16 + 20i - 4m$

Từ $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$ suy ra $|4 + 5i - m| = 7$. Do đó điểm M biểu diễn số phức m trên mặt phẳng phức thuộc đường tròn tâm $I(4; 5)$ và bán kính $R = 7$. Ta cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của OM . Đường thẳng OI cắt đường tròn tại hai điểm A, B với O nằm giữa A và I . Vì $OI = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ nên:

- a) Giá trị lớn nhất của $|m|$ khi $M = B$, khi đó:

$$|m|_{max} = OB = OI + IB = 7 + \sqrt{41}.$$



Hình 3.6

- b) Giá trị nhỏ nhất của $|m|$ khi $M = A$, khi đó:

$$|m|_{min} = OA = IA - OI = 7 - \sqrt{41}.$$

Bài 3.38. Cho $a; b; c$ là ba số phức thoả mãn $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$.

Chứng minh rằng $|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$.

(Đề thi học sinh giỏi toán Rumani năm 2008)

Lời giải

Nếu trong ba số phức $a; b; c$ có một số bằng 0 thì bất đẳng thức được chứng minh. Xét trường hợp cả ba số phức đều khác không, chia hai về cho $|abc|$ và đặt $x = \frac{a}{|a|}, y = \frac{b}{|b|}, z = \frac{c}{|c|}$ thì điều kiện trở thành $x + y + z = 0$ và $|x| = |y| = |z| = 1$. Khi đó $x; y; z$ là toạ độ các đỉnh của một tam giác đều có tâm là gốc toạ độ, nên sự sai khác argument giữa $x; y; z$ là $\pm \frac{2\pi}{3}$.

Theo định lý cos ta có:

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(a, b) = |a|^2 + |b|^2 + |a||b| \geq 3|a||b|$$

Làm tương tự rồi nhân vế với vế suy ra

$$|a - b|^2 |b - c|^2 |c - a|^2 \geq 27|a|^2 |b|^2 |c|^2$$

Suy ra $|(a - b)(b - c)(c - a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$.

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3.39. Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ theo thứ tự là các số phức.

Chứng minh rằng $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k\right) \leq \frac{1}{3n+2} \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 + \frac{9n^2 + 6n + 2}{2} \sum_{k=0}^n |b_k|^2 \right)$

Lời giải

Ta chứng minh $\operatorname{Re}(a_k b_k) \leq \frac{1}{3n+2} \left(|a_k|^2 + \frac{9n^2 + 6n + 2}{2} |b_k|^2 \right)$ (1)

Gọi $a_k = x + iy, b_k = p + iq$ với $x, y, p, q \in \mathbb{R}$, thì (1) có dạng:

$$xp - yq \leq \frac{1}{3n+2} \left((x^2 + y^2) + \frac{9n^2 + 6n + 2}{2} (p^2 + q^2) \right) \quad (2)$$

Ta có các bất đẳng thức đúng

$$+) \quad xp \leq \frac{1}{3n+2} \left(x^2 + \frac{9n^2 + 6n + 2}{2} p^2 \right) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-p)^2 + [x-(3n+1)p]^2}{3n+2}$$

$$+) \quad -yq \leq \frac{1}{3n+2} \left(y^2 + \frac{9n^2 + 6n + 2}{2} q^2 \right) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(y+q)^2 + [y+(3n+1)q]^2}{3n+2}$$

Nên cộng vế với vế ta có (2) đúng. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

ABC

Bài 3.40. Cho a, b, c, d là các số phức thoả mãn $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Chứng minh rằng $|az^3 + bz^2 + cz + d| \geq \sqrt{6}$ với ít nhất một số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

Lời giải

Đặt $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, Q(z) = a\bar{z}^3 + (a\bar{c} + b\bar{d})z^2 + (a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d})z$ và chú ý $a\bar{a} = |a|^2 = 1, \varepsilon + \bar{\varepsilon} = 2 \operatorname{Re} \varepsilon$ ta có $|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)} = 4 + 2 \operatorname{Re} Q(z)$.

Gọi ε là căn bậc ba của đơn vị thì $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0, 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = 0$ nên

$$\begin{aligned} Q(z) + Q(\varepsilon z) + Q(\varepsilon^2 z) &= 3a\bar{z}^3 + (a\bar{c} + b\bar{d})(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \\ &\quad + (a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{d})(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4) = 3a\bar{z}^3. \end{aligned}$$

Chọn z là căn bậc ba của $a\bar{d}$ thì $|z|=1$ và

$$\operatorname{Re} Q(z) + \operatorname{Re} Q(\varepsilon z) + \operatorname{Re} Q(\varepsilon^2 z) = 3$$

Hay:

$$|P(z)|^2 + |P(\varepsilon z)|^2 + |P(\varepsilon^2 z)|^2 = 12 + 2[\operatorname{Re} Q(z) + \operatorname{Re} Q(\varepsilon z) + \operatorname{Re} Q(\varepsilon^2 z)] = 18$$

Vì thế một trong ba số $|P(z)|^2, |P(\varepsilon z)|^2, |P(\varepsilon^2 z)|^2$ không nhỏ hơn 6.

Mà $|z| = |\varepsilon z| = |\varepsilon^2 z| = 1$ nên tồn tại $|z| = 1$ sao cho $|az^3 + bz^2 + cz + d| \geq \sqrt{6}$

Bài 3.41. Giải phương trình $x^4 - 2ix^2 + 3 = 0$

(Đề thi Đại học Kinh tế quốc dân Hà Nội năm 1997)

Lời giải

Đặt $t = x^2$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2it + 3 = 0$. Nghịch lý của phương trình là $t = 3i, t = -i$.

+) Nếu $t = 3i$ thì $x^2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left[\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ nên:

$$x = \pm \sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

+) Nếu $t = -i$ thì

$$x^2 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$\text{nên } x = \pm \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm: $x = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right), x = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Bài 3.42. Biết một nghiệm phức dạng lượng giác của phương trình $z^6 + z^3 + 1 = 0$ có argument θ nằm trong khoảng $(90^\circ; 180^\circ)$. Tìm θ ?

(AIME năm 1984)

Lời giải

Đặt $x = z^3$.

Phương trình đã cho trở thành: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

+) Nếu $x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$ thì $z^3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$

nên $z = \cos\left(\frac{240^\circ + k360^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{240^\circ + k360^\circ}{3}\right)$ với $k = \{0; 1; 2\}$

+) Nếu $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ thì $z^3 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

nên $z = \cos\left(\frac{120^\circ + k360^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{120^\circ + k360^\circ}{3}\right)$ với $k = \{0; 1; 2\}$

Từ đó suy ra nghiệm thoả mãn yêu cầu là $z = \cos 160^\circ + i \sin 160^\circ$.

Vậy $\theta = 160^\circ$.

Bài 3.43. Tìm tất cả các số phức z thoả mãn $|z| = 1$ và $\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$.

Lời giải

Vì $|z| = 1$ nên đặt $z = \cos x + i \sin x, x \in [0; 2\pi)$.

Ta có $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x, \bar{z}^2 = \cos 2x - i \sin 2x$ nên

$$1 = \left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{z^2 + \bar{z}^2}{\bar{z}z} \right| = \frac{|z^2 + \bar{z}^2|}{|z|^2} = 2|\cos 2x|$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

ABC

Vì $x \in [0; 2\pi)$ nên các nghiệm x là

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}, x_3 = \frac{2\pi}{3}, x_4 = \frac{5\pi}{6}, x_5 = \frac{7\pi}{6}, x_6 = \frac{4\pi}{3}, x_7 = \frac{5\pi}{3}, x_8 = \frac{11\pi}{6}$$

Vậy $z_k = \cos x_k + i \sin x_k, k = \{1; 2; \dots; 8\}$.

Bài 3.44. Tìm các cặp số thực $(a; b)$ sao cho $(a + ib)^n = a - ib$ với $n \in \mathbb{Z}^+$.

Lời giải

+) Nếu $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ thoả mãn.

+) Nếu $a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), a - ib = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$

với $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \varphi \in [0; 2\pi)$.

Ta có $(a + ib)^n = a - ib \Leftrightarrow (a + ib)^{n+1} = (a + ib)(a - ib)$

Hay $(a + ib)^{n+1} = a^2 + b^2 \Leftrightarrow r^{n+1}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{n+1} = r^2$

$$\Leftrightarrow r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi] = r^2 \Leftrightarrow \begin{cases} r^{n+1} \cos(n+1)\varphi = r^2 & (1) \\ \sin(n+1)\varphi = 0 & (2) \end{cases}$$

Vì $\sin(n+1)\varphi = 0$ nên $\cos(n+1)\varphi = \pm 1$, nhưng từ (1) thì $\cos(n+1)\varphi = 1$

và $r = 1$. Mà $\cos(n+1)\varphi = 1 \Leftrightarrow (n+1)\varphi = k2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{k2\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}$

Nhưng $\varphi \in [0; 2\pi)$ nên $k = 0; 1; 2; \dots; n$.

Vậy có $n+2$ cặp số thực $(a; b)$ cần tìm là $(0; 0), (\cos \frac{k2\pi}{n+1}; \sin \frac{k2\pi}{n+1}), k = \overline{0; n}$.

Bài 3.45. Có bao nhiêu số nguyên dương n nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thoả mãn $(\sin x + i \cos x)^n = \sin nx + i \cos nx$ đúng với mọi số thực x .

(AIME năm 2005)

Lời giải

Vì $(\sin x + i \cos x)^n = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^n$ nên theo công thức

Möivre ta có: $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Do đó $\cos n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin nx + i \cos nx$ với mọi x .

Suy ra: $\begin{cases} \cos n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin nx \\ \sin n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos nx \end{cases}$ đúng với mọi số thực x .

Giải ra ta được $n = 1 + 4k$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $1 \leq n \leq 1000$ nên có 250 số nguyên dương n thoả mãn.

Bài 3.46. Cho $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3) \dots (1 + \varepsilon^{2011})$

Lời giải

Ta có $\varepsilon^3 = 1$ và $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ nên:

$$\begin{aligned} A &= (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3) \dots (1 + \varepsilon^{2011}) \\ &= \prod_{k=0}^{669} [(1 + \varepsilon^{3k+1})(1 + \varepsilon^{3k+2})(1 + \varepsilon^{3k+3})] (1 + \varepsilon^{2011}) \\ &= \prod_{k=0}^{669} [(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^3)] (1 + \varepsilon)^{699} (1 + \varepsilon) \\ &= 2^{699} (0 + 1)^{699} (1 + \varepsilon) = 2^{699} (-\varepsilon^2) = 2^{699} \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = 2^{698} (1 + \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

Vậy $A = 2^{698} (1 + \sqrt{3}i)$.

Bài 3.47. Cho các số phức $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ thoả mãn $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$.

Đặt $z = \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right)$. Chứng minh rằng $z \in \mathbb{R}$ và $0 \leq z \leq n^2$.

Lời giải

Vì $|z_k| = 1$ nên $\bar{z}_k = \frac{1}{z_k}; z_k = \frac{1}{\bar{z}_k}$, do đó

$$\bar{z} = \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} \overline{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right)} = \left(\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{z}_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) = z$$

Vậy nên $z \in \mathbb{R}$.

ABC

$$+) \text{ Ta có } z = \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \bar{z}_k \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \cdot \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)} = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k| \right)^2 = n^2.$$

+) Đặt $z_k = \cos x_k + i \sin x_k, x_k \in \mathbb{R}, k = 1; n$. Thì

$$\begin{aligned} z &= \left(\sum_{k=1}^n \cos x_k + i \cdot \sum_{k=1}^n \sin x_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \cos x_k - i \cdot \sum_{k=1}^n \sin x_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \cos x_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \sin x_k \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $z \in \mathbb{R}$ và $0 \leq z \leq n^2$.

Bài 3.48. Chứng minh rằng $\sin^3 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{10} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Đặt $z = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}, \sin \frac{\pi}{10} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Khi đó:

$$\sin^3 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{\pi}{10} = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^3 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 = \frac{3}{8} [z^2 + \bar{z}^2 + i(z - \bar{z}) - 1] + \frac{1}{8} (1).$$

Mặt khác $z^5 = \cos \frac{5\pi}{10} + i \sin \frac{5\pi}{10} = i \Rightarrow z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$ (do $z \neq 1$),

nên $z^4 = i\bar{z}; iz^3 = -\bar{z}$ nên suy ra $z^2 + \bar{z}^2 + i(z - \bar{z}) - 1 = 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.49. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$\frac{\cos a + \cos b + \cos c}{\cos(a+b+c)} = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\sin(a+b+c)} = m$$

Chứng minh rằng $\cos(a+b) + \cos(b+c) + \cos(c+a) = m$.

(Đề nghị IMO năm 1989)

Lời giải

Đặt $x = \cos a + i \sin a, y = \cos b + i \sin b, z = \cos c + i \sin c$.

Ta có $x + y + z = \cos a + \cos b + \cos c + i(\sin a + \sin b + \sin c)$

$$= m \cdot \cos(a+b+c) + i \cdot m \cdot \sin(a+b+c) = mxzy$$

Do đó $x + y + z = mxyz$ nên $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = m$.

Vì $|x| = |y| = |z| = 1$ nên $x^{-1} = \bar{x}, y^{-1} = \bar{y}, z^{-1} = \bar{z}$.

$$\text{Vậy } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = m \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot \bar{x} = m$$

$$\Leftrightarrow \cos(a+b) + \cos(b+c) + \cos(c+a) - i[\sin(a+b) + \sin(b+c) + \sin(c+a)] = m$$

Từ đó ta có $\cos(a+b) + \cos(b+c) + \cos(c+a) = m$.

Bài 3.50. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

Chứng minh rằng:

a) $\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c = 3\cos(a+b+c)$

$$\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c = 3\sin(a+b+c)$$

b) $\cos 5a + \cos 5b + \cos 5c = \sin 5a + \sin 5b + \sin 5c = 0$

Lời giải

Đặt $x = \cos a + i \sin a, y = \cos b + i \sin b, z = \cos c + i \sin c$.

Suy ra $x + y + z = \cos a + \cos b + \cos c + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0$

- a) Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ nên $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Sử dụng công thức Moivre và công thức nhân dạng lượng giác: $(\cos a + i \sin a)^3 + (\cos b + i \sin b)^3 + (\cos c + i \sin c)^3 = 3(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$
- $$\Leftrightarrow \cos 3a + \cos 3b + \cos 3c + i(\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c) = 3[\cos(a+b+c) + i \sin(a+b+c)]$$

Từ đó ta được: $\cos 3a + \cos 3b + \cos 3c = 3\cos(a+b+c)$

và $\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c = 3\sin(a+b+c)$

- b) Với $x + y + z = 0$ thì $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Mặt khác, từ $|x| = |y| = |z| = 1$ suy ra $x^{-1} = \bar{x}, y^{-1} = \bar{y}, z^{-1} = \bar{z}$.

ABC

Vì thế:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\&= (x + y + z)^2 - 2xyz(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = (x + y + z)^2 - 2xyz\overline{(x + y + z)} = 0\end{aligned}$$

Do đó $x^5 + y^5 + z^5 = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos a + i \sin a)^5 + (\cos b + i \sin b)^5 + (\cos c + i \sin c)^5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5a + \cos 5b + \cos 5c + i(\sin 5a + \sin 5b + \sin 5c) = 0$$

Vậy nên $\cos 5a + \cos 5b + \cos 5c = \sin 5a + \sin 5b + \sin 5c = 0$.

Bài 3.51. Chứng minh rằng $\frac{1}{\cos 6^\circ} + \frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} = \frac{1}{\sin 12^\circ}$

Lời giải

Xét số phức $z = \cos 6^\circ + i \sin 6^\circ$, có $z^{15} = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i$.

$$\text{Ta có } \cos 6^\circ = \frac{z^2 + 1}{2z}, \sin 12^\circ = \frac{z^4 - 1}{2iz^2}, \sin 24^\circ = \frac{z^8 - 1}{2iz^4}, \sin 48^\circ = \frac{z^{16} - 1}{2iz^8}$$

Đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{2iz^2}{z^4 - 1} + \frac{2iz^4}{z^8 - 1} + \frac{2iz^8}{z^{16} - 1} = 0$$

Rút gọn và chú ý $z \neq 0$ ta có $z^{16} - 1 - iz(z^{14} + 1) = 0$. Hay:

$$z^{16}z - 1 - iz^{15} - iz = 0 \Leftrightarrow iz - 1 - i^2 - iz = 0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài 3.52. Giải phương trình $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Đặt $z = \cos x + i \sin x$ thì

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \cos 2x = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, \cos 3x = \frac{z^6 + 1}{2z^3}$$

Phương trình đã cho trở thành $\frac{z^2 + 1}{2z} - \frac{z^4 + 1}{2z^2} + \frac{z^6 + 1}{2z^3} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \quad (*)$$

Vì $z = -1$ không là nghiệm nên với $z \neq -1$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow z^7 + 1 = 0$$

Hay $z^7 = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$ nên $z = \cos\left(\frac{\pi + k2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + k2\pi}{7}\right)$ với $k = \overline{0;6}$. Vì $z \neq -1$ nên không nhận giá trị $k=3$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{3\pi}{7} + m2\pi$
 $x = \frac{5\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{9\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{11\pi}{7} + m2\pi, x = \frac{13\pi}{7} + m2\pi$ với $m \in \mathbb{Z}$.

Bài 3.53. Cho số nguyên dương n và các số thực x, y . Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos[(n-k)x+ky] = 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \cos \frac{n(x+y)}{2}.$$

Lời giải

Đặt $z = \cos x + i \sin x, w = \cos y + i \sin y$.

Xét khai triển nhị thức Newton

$$\begin{aligned} (z+w)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} w^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos x + i \sin x)^{n-k} (\cos y + i \sin y)^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k [\cos(n-k)x + i \sin(n-k)x][\cos ky + i \sin ky] \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \{\cos[(n-k)x+ky] + i \sin[(n-k)x+ky]\} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $z+w = \cos x + \cos y + i(\sin x + \sin y)$

$$\begin{aligned} &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2i \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ &= 2 \cos \frac{x-y}{2} \left(\cos \frac{x+y}{2} + i \sin \frac{x+y}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Nên } (z+w)^n = 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \left(\cos \frac{x+y}{2} + i \sin \frac{x+y}{2} \right)^n$$

$$= 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \left[\cos \frac{n(x+y)}{2} + i \sin \frac{n(x+y)}{2} \right] \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos[(n-k)x+ky] = 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \cos \frac{n(x+y)}{2}.$$

ABG

Nhận xét. Rõ ràng $\sum_{k=0}^n C_n^k \sin[(n-k)x + ky] = 2^n \cos^n \frac{x-y}{2} \sin \frac{n(x+y)}{2}$.

Bài 3.54. Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{b) } \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

$$\cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Lời giải

a) Rõ ràng $x_k = \cos \frac{k2\pi}{2n+1} + i \sin \frac{k2\pi}{2n+1}$ với $k = \overline{0; 2n}$ là $2n+1$ nghiệm của phương trình $x^{2n+1} - 1 = 0$. Trong đó $x_0 = 1$ và $x_{2n+1-k} = \bar{x}_k$ vì:

$$x_{2n+1-k} = \cos \left(2\pi - \frac{k2\pi}{2n+1} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{k2\pi}{2n+1} \right) = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}$$

với $k = \overline{1; n}$ nên ta có: $x^{2n+1} - 1 = (x-1) \prod_{k=1}^n (x-x_k)(x-\bar{x}_k)$.

Mặt khác $(x-x_k)(x-\bar{x}_k) = x^2 - (x_k + \bar{x}_k)x + x_k \cdot \bar{x}_k = x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1$.

Do đó $x^{2n+1} - 1 = (x-1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right)$. Với $x \neq 1$ thì

$$\frac{x^{2n+1} - 1}{x-1} = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x + 1 + 4x \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n+1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x + 1 + 4x \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

Mà $\frac{x^{2n+1} - 1}{x-1} = x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x + 1$ nên:

$$2n+1 = \prod_{k=1}^n \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right) = 2^{2n} \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

$$\text{Vậy } \sin \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

+) Từ $x^{2n+1} - 1 = (x-1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right)$ cho $x = -1$ ta có:

$$-1 - 1 = (-1 - 1) \prod_{k=1}^n \left(2 + 2 \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \right) \Leftrightarrow \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} \prod_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Vậy } \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

Chú ý. Xét các trường hợp cụ thể của n .

+) Với $n = 3$ ta có: $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$, $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$.

+) Với $n = 5$ thì:

$$\sin \frac{\pi}{11} \cdot \sin \frac{2\pi}{11} \cdot \sin \frac{3\pi}{11} \cdot \sin \frac{4\pi}{11} \cdot \sin \frac{5\pi}{11} = \frac{\sqrt{11}}{320},$$

$$\cos \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{2\pi}{11} \cdot \cos \frac{3\pi}{11} \cdot \cos \frac{4\pi}{11} \cdot \cos \frac{5\pi}{11} = \frac{1}{32}$$

+) Với $n = 6$ thì:

$$\sin \frac{\pi}{13} \cdot \sin \frac{2\pi}{13} \cdot \sin \frac{3\pi}{13} \cdot \sin \frac{4\pi}{13} \cdot \sin \frac{5\pi}{13} \cdot \sin \frac{6\pi}{13} = \frac{\sqrt{13}}{64},$$

$$\cos \frac{\pi}{13} \cdot \cos \frac{2\pi}{13} \cdot \cos \frac{3\pi}{13} \cdot \cos \frac{4\pi}{13} \cdot \cos \frac{5\pi}{13} \cdot \cos \frac{6\pi}{13} = \frac{1}{64}.$$

- b) Tương tự $x_k = \cos \frac{k2\pi}{2n} + i \sin \frac{k2\pi}{2n}$ với $k = \overline{0; 2n-1}$ là $2n$ nghiệm của phương trình $x^{2n} - 1 = 0$. Trong đó $x_0 = 1, x_n = -1$.

Vì $x_{2n-k} = \cos \frac{(2n-k)2\pi}{2n} + i \sin \frac{(2n-k)2\pi}{2n} = \cos \frac{2k\pi}{2n} - i \sin \frac{2k\pi}{2n} = \bar{x}_k$ với

$k = \overline{1; n-1}$ nên ta có: $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k)(x - \bar{x}_k)$

Mặt khác $(x - x_k)(x - \bar{x}_k) = x^2 - (x_k + \bar{x}_k)x + x_k \bar{x}_k = x^2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n} x + 1$.

ABC

Do đó $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$.

$$\text{Với } x \neq \pm 1 \text{ thì } \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x + 1 + 4x \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x + 1 + 4x \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right)$$

Mà $\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1$ nên:

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right) = 2^{2n-2} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} x$$

$$\text{Vậy } \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} x = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

+) Mặt khác $\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 + 2x + 1 - 4x \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 + 2x + 1 - 4x \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \right)$$

Hay ta có $n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(4 \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \right) = 2^{2n-2} \prod_{k=1}^{n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{2n}$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{n}{2^{2n-2}} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

$$\text{Vậy } \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n} \dots \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

Chú ý. Cho n các trường hợp cụ thể:

+) Với $n = 5$ ta có:

$$\sin \frac{\pi}{10} \cdot \sin \frac{2\pi}{10} \cdot \sin \frac{3\pi}{10} \cdot \sin \frac{4\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}}{16}$$

$$\cos \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{2\pi}{10} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \cos \frac{4\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}}{16}$$

+) Với $n = 7$ ta có:

$$\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{2\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{4\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} \cdot \sin \frac{6\pi}{14} = \frac{\sqrt{7}}{64}$$

$$\cos \frac{\pi}{14}, \cos \frac{2\pi}{14}, \cos \frac{3\pi}{14}, \cos \frac{4\pi}{14}, \cos \frac{5\pi}{14}, \cos \frac{6\pi}{14} = \frac{\sqrt{7}}{64}.$$

Bài 3.55. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

(Tạp chí Kvant)

Lời giải

Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $z = x + iy$. Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$.

Từ hệ đã cho suy ra $x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} + i \left(y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} \right) = 3$

$$\Leftrightarrow x + iy + \frac{3(x - yi)}{x^2 + y^2} - i \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3 - i}{z} = 3$$

Hay ta có $z^2 - 3z + 3 - i = 0$. Phương trình này có hai nghiệm phức là:

$$z = 2 + i; z = 1 - i$$

Vậy nghiệm cần tìm của hệ đã cho $(x; y) = (2; 1)$ hoặc $(x; y) = (1; -1)$.

Bài 3.56. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

(Đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 1996)

Lời giải

Từ hệ suy ra $x > 0, y > 0$.

Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y} (u, v > 0)$.

Hệ đã cho có dạng:

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Đặt $z = u + iv$.

ABC

Ta có: $\frac{1}{z} = \frac{u - vi}{u^2 + v^2}$.

Hệ đã cho tương đương với:

$$u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \right)z + 1 = 0 \quad (*)$$

Giải (*): Vì $\Delta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \right)^2 - 4 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}} + 2\sqrt{2}i \right)^2$ nên các nghiệm:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i + \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \right)i$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i - \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2} \right)i$$

Ta có nghiệm u, v và do đó nghiệm của hệ là:

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \right)^2 \text{ & } y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \right)^2 \text{ hoặc}$$

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}} \right) \text{ & } y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2} \right)$$

Bài 3.57. Cho A, B, C, D thoả mãn

$$A = \left\{ (x, y) : x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}, \quad B = \left\{ (x, y) : 2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} = 3 \right\}$$

$$C = \left\{ (x, y) : x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \right\}, \quad D = \left\{ (x, y) : 3x^2y - 3x - y^3 = 0 \right\}$$

Chứng minh rằng $A \cap B = C \cap D$.

(Putnam năm 1987)

Lời giải

Xét số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(x, y) \in A \cap B$ tức là x, y thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 2xy + \frac{y}{x^2 + y^2} = 3 \end{cases}$$

Mà hệ đó tương đương với phương trình $z^2 = z^{-1} + 3i$. Hay ta có:

$$z^3 - 3iz = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 3y + (3x^2y - 3x - y^3)i = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in C \cap D$$

Vậy $A \cap B = C \cap D$.

Bài 3.58. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

(Đề thi học sinh giỏi toán Liên Xô (cũ) năm 1991)

Lời giải

Ta có hệ đã cho tương đương với:

$$xz - 2yt + \sqrt{2}(xt + yz)i = 3 + \sqrt{2}i$$

$$\Leftrightarrow xz + 2t^2yt + \sqrt{2}(xt + yz)i = 3 + \sqrt{2}i$$

$$\Leftrightarrow (x + i\sqrt{2}y)(z + i\sqrt{2}t) = 3 + \sqrt{2}i$$

Lấy modun hai vế $|(x + i\sqrt{2}y)(z + i\sqrt{2}t)| = |3 + \sqrt{2}i|$, suy ra:

$$(x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11$$

Vì x, y, z, t nguyên nên xảy ra hai trường hợp:

+) Trường hợp 1: $x^2 + 2y^2 = 1, z^2 + 2t^2 = 11$.

Từ phương trình $x^2 + 2y^2 = 1$ suy ra $x = \pm 1, y = 0$. Kết hợp hệ phương trình tìm được: $x = 1, y = 0, z = 3, t = 1$ hoặc $x = -1, y = 0, z = -3, t = -1$

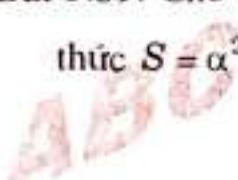
+) Trường hợp 2: $x^2 + 2y^2 = 11, z^2 + 2t^2 = 1$. Hoàn toàn tương tự ta có:

$x = 3, y = 1, z = 1, t = 0$ hoặc $x = -3, y = -1, z = -1, t = 0$

Vậy có 4 nghiệm thoả mãn hệ là:

$$(1; 0; 3; 1), (-1; 0; -3; -1), (3; 1; 1; 0), (-3; -1; -1; 0).$$

Bài 3.59. Cho α, β là hai số thoả mãn $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = \alpha^{2011} + \beta^{2011}$.



Lời giải

Ta có α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ nên

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \alpha^{2011} + \beta^{2011} = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2011} + \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2011} \\ &= \cos \frac{2011\pi}{3} - i \sin \frac{2011\pi}{3} + \cos \frac{2011\pi}{3} + i \sin \frac{2011\pi}{3} = 2 \cos \frac{2011\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Hay } S = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + 670\pi \right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Bài 3.60. Gọi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức với hệ số thực

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n$$

Chứng minh rằng:

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \dots (x_n^2 + 1) = (1 - p_2 + p_4 - \dots)^2 + (p_1 - p_3 + p_5 - \dots)^2$$

[Lời giải](https://downloadsachmienphi.com)

Với mọi x , ta có:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

Vì $(i - x_k)(-i - x_k) = -i^2 + x_k^2 = x_k^2 + 1$ nên cho $x = i, x = -i$ rồi nhân về với vế ta được $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1) \dots (x_n^2 + 1) =$

$$(i^n + p_1 i^{n-1} + \dots + p_{n-1} i + p_n) [(-i)^n + p_1 (-i)^{n-1} + \dots + p_{n-1} (-i) + p_n]$$

Đặt $a = 1 - p_2 + p_4 - \dots$, $b = p_1 - p_3 + p_5 - \dots$ thì

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1) \dots (x_n^2 + 1) = (i^n a + i^{n-1} b) [(-i)^n a + (-i)^{n-1} b]$$

Mà $(i^n a + i^{n-1} b) [(-i)^n a + (-i)^{n-1} b] = a^2 + b^2$ nên có điều phải chứng minh.

Bài 3.61. Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ có nghiệm $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ và $Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$ có nghiệm $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2$. Những hệ số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ là những số phức. Chứng minh rằng nếu tổng $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ và $a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ là những số thực, thì tổng $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ cũng là số thực.

Lời giải

Đặt $m = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ và $n = a_2 + a_4 + a_6 + \dots$ thì $m, n \in \mathbb{R}$.

Ta có: $P(1) = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = 1 + m + n$

$$P(-1) = (-1)^n [1 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n] = (-1)^n (1 - m + n)$$

Suy ra $P(1).P(-1) = (-1)^n [(1+n)^2 - n^2] \in \mathbb{R}$.

Vì $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ có nghiệm $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

và $Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$ có nghiệm $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2$.

Nên: $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$

$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2) \dots (x - x_n^2)$

Do đó: $Q(1) = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)(1 - x_3^2) \dots (1 - x_n^2) = P(1).P(-1) \in \mathbb{R}$

Mà $Q(1) = 1 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ nên có điều phải chứng minh.

Bài 3.62. Cho phức z . Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n$.

Lời giải

Đặt $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n} \right)^2 + \left(\frac{y}{n} \right)^2} \right)^n = \left(\sqrt{1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}} \right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ nên:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)}{\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x^2 + y^2}{2n} \right) = x \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$.



Bài 3.63. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức $\sin x < x < \tan x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\cot x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Hay: $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Theo **Ví dụ 2.29** ta có:

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Nên: } \frac{n(2n-1)}{3} &= \cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} \\ &< \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{3\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 \end{aligned}$$

$$n + \cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \dots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

Download Sách Hay | Đọc Sách Online

$$\text{Hay } \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} \text{ nên:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bài 3.64. Cho m, n là các số nguyên dương mà mỗi số đều phân tích được thành tổng các bình phương của hai số nguyên. Chứng minh rằng tích $m.n$ cũng phân tích được thành tổng các bình phương của hai số nguyên.

Lời giải

Giả sử $m = x^2 + y^2, n = u^2 + t^2$ với $x, y, u, t \in \mathbb{Z}$.

Xét hai số phức $z = x + yi, w = u + it$. Ta có:

$$|z.w| = |z|.|w| = \sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + t^2)} = \sqrt{m.n} \quad (1)$$

Mà $z \cdot w = (x + yi)(u + it) = xu - yt + i(xt + yu)$ nên:

$$|z \cdot w| = \sqrt{(xu - yt)^2 + (xt + yu)^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m \cdot n = (xu - yt)^2 + (xt + yu)^2$.

Vì $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ nên $xu - yt, xt + yu \in \mathbb{Z}$. Vậy $m \cdot n$ phân tích được thành tổng các bình phương của hai số nguyên.

Bài 3.65. Cho số phức $z = x + iy$ với x, y là những số nguyên.

- a) Chứng minh rằng $z^n = x_n + iy_n$ với x_n, y_n là những số nguyên.
- b) Chứng minh rằng nếu một số tự nhiên phân tích thành tổng các bình phương của hai số nguyên, thì luỹ thừa bậc $n (n \in \mathbb{N}^*)$ của số đó cũng phân tích được thành tổng hai bình phương của hai số nguyên.

Lời giải

- a) Chứng minh $z^n = x_n + iy_n$ với x_n, y_n là những số nguyên (*) bằng phương pháp quy nạp toán học.
- +) Với $n = 1$ ta có $z = x + iy$ với x, y là những số nguyên (đúng).
 - +) Giả sử (*) đúng đến n , hay là $z^n = x_n + iy_n$ với x_n, y_n là những số nguyên.

Ta phải chứng minh (*) đúng đến $n + 1$, tức là $z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ với x_{n+1}, y_{n+1} là những số nguyên.

Thật vậy $z^{n+1} = z^n \cdot z = (x_n + iy_n)(x + iy) = x_n \cdot x - y_n \cdot y + i(x_n \cdot y + y_n \cdot x)$

Vì x, y và x_n, y_n là những số nguyên, nên đặt

$$x_{n+1} = x_n \cdot x - y_n \cdot y, y_{n+1} = x_n \cdot y + y_n \cdot x$$

thì $z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ và x_{n+1}, y_{n+1} là những số nguyên.

Do đó (*) đúng với $n + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp (*) đúng với mọi số tự nhiên n .

- b) Xét $S = x^2 + y^2$ với $x, y \in \mathbb{Z}$. Ta có $S = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z}$. Theo chứng minh trên ta có $z^n = x_n + iy_n \Rightarrow \bar{z}^n = x_n - iy_n$.

Vậy: $S^n = (z \cdot \bar{z})^n = z^n \cdot \bar{z}^n = (x_n + iy_n)(x_n - iy_n)$

ABC

$$\Rightarrow S^n = x_n^2 - i^2 \cdot y_n^2 = x_n^2 + y_n^2$$

Do $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$ nên S^n cũng là tổng các bình phương của hai số nguyên.

Chú ý. Xét một ví dụ cụ thể: Chứng minh rằng 29^{2010} là tổng các bình phương của hai số tự nhiên.

Ta có $29 = 2^2 + 5^2$ nên áp dụng chứng minh trên, 29^{2010} là tổng các bình phương của hai số tự nhiên.

Bài 3.66. Chứng minh đẳng thức sau với n là số nguyên dương:

$$\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \right)^2 + \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \right)^2 = 2^n$$

(Đề T7/248 báo Toán học và tuổi trẻ)

Lời giải

Xét số phức $z = 1 + i$, sử dụng khai triển nhị thức Newton ta có:

$$z^n = (1+i)^n = \sum_{k=0}^n (i)^k C_n^k = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} + i \cdot \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1}$$

Lấy modun hai vế:

$$|z^n| = \sqrt{\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \right)^2 + \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \right)^2}$$

Mà $|z^n| = |z|^n = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n$ nên

$$\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \right)^2 + \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \right)^2 = 2^n$$

Chú ý. Nếu với số phức $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ thì:

$$z^n = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n$$

$$= \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi + i \cdot \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi$$

Do đó, lấy modun hai vế ta có:

$$\left[\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k C_n^{2k} \cdot \cos^{n-2k} \varphi \sin^{2k} \varphi \right]^2 +$$

$$\left[\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} \varphi \sin^{2k+1} \varphi \right]^2 = 1$$

+) Xét $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ta có kết quả của bài toán trên.

+) Xét $\varphi = \frac{\pi}{3}$ thì $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta có đẳng thức:

$$\left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-3)^k C_n^{2k} \right)^2 + 3 \left(\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-3)^k C_n^{2k+1} \right)^2 = 4^n$$

Bài 3.67. Cho $S = C_{2n+1}^1 + 2^3 C_{2n+1}^3 + 2^6 C_{2n+1}^5 + \dots + 2^{3(n-1)} C_{2n+1}^{2n-1} + 2^{3n} C_{2n+1}^{2n+1}$.

Chứng minh rằng S không chia hết cho 5 với mọi số tự nhiên n .

(Đề thi toán quốc tế lần thứ 16)

Lời giải

Vì $2^3 = 8 = 10 - 2$ chia cho 5 dư -2 , nên 2^{3m} chia cho 5 có số dư bằng số dư của $(-2)^m$ khi chia cho 5. Do đó, ta chỉ cần chứng minh S_n không chia hết cho 5 với $S_n = \sum_{m=0}^n (-2)^m C_{2n+1}^{2m+1}$.

Đặt $R_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_{2n+1}^{2m} 2^m$.

Theo khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(1 + i\sqrt{2})^{2n+1} = \sum_{m=0}^n C_{2n+1}^m (i\sqrt{2})^m = R_n + i\sqrt{2}S_n$$

Lấy modun hai vế suy ra $3^{2n+1} = R_n^2 + 2S_n^2$.

Vì $3^{2n+1} = 3 \cdot 9^n$ chia cho 5 sẽ có số dư là ± 3 nên nếu S_n chia hết cho 5 thì R_n^2 chia cho 5 sẽ dư ± 3 . Nhưng R_n^2 là bình phương của một số nguyên nên chia cho 5 chỉ có thể dư 0; 1 hoặc 4. Mâu thuẫn này chứng tỏ S_n không chia hết cho 5.

Vậy S không chia hết cho 5 với mọi số tự nhiên n .

Bài 3.68. Cho n, k là hai số nguyên dương với $n > 2k + 1$, chứng minh rằng

$$C_n^1 + C_n^{2k+1} + C_n^{2(2k+1)} + \dots = \frac{2^n}{2k+1} \left[1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cos \frac{mn\pi}{2k+1} \right]$$

ABC

Lời giải

Với số phức $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{2k+1} + i \sin \frac{2\pi}{2k+1}$ ta có

$$1 + \varepsilon^m + \varepsilon^{2m} + \varepsilon^{3m} + \dots + \varepsilon^{2km} = \begin{cases} 2k+1, & m \mid 2k+1 \\ 0, & m \nmid 2k+1 \end{cases} \quad (1)$$

Xét đa thức với hệ số thực $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ thì

$$+) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots + a_nx^n$$

$$+) f(\varepsilon x) = a_0 + a_1\varepsilon x + a_2\varepsilon^2 x^2 + \dots + a_m\varepsilon^m x^m + \dots + a_n\varepsilon^n x^n$$

$$+) f(\varepsilon^2 x) = a_0 + a_1\varepsilon^2 x + a_2\varepsilon^4 x^2 + \dots + a_m\varepsilon^{2m} x^m + \dots + a_n\varepsilon^{2n} x^n$$

$$+) f(\varepsilon^{2k} x) = a_0 + a_1\varepsilon^{2k} x + a_2\varepsilon^{4k} x^2 + \dots + a_m\varepsilon^{2km} x^m + \dots + a_n\varepsilon^{2n} x^n$$

Cộng vế với vế và chú ý đến (1) thu được

$$\frac{1}{2k+1}[f(x) + f(\varepsilon x) + f(\varepsilon^2 x) + f(\varepsilon^3 x) + \dots + f(\varepsilon^{2k-1} x) + f(\varepsilon^{2k} x)]$$

$$= a_0 + a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2(2k+1)}x^{2(2k+1)} + a_{3(2k+1)}x^{3(2k+1)} + \dots$$

Vậy nếu $f(x) = (1+x)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m$ thì

$$C_n^0 + C_n^{2k+1}x^{2k+1} + C_n^{2(2k+1)}x^{2(2k+1)} + C_n^{3(2k+1)}x^{3(2k+1)} + \dots =$$

$$\frac{1}{2k+1}[(1+x)^n + (1+\varepsilon x)^n + (1+\varepsilon^2 x)^n + \dots + (1+\varepsilon^{2k-1} x)^n + (1+\varepsilon^{2k} x)^n] \quad (2)$$

Cho $x = 1$ thì từ (2) ta có

$$S_{2k+1} = C_n^0 + C_n^{2k+1} + C_n^{2(2k+1)} + C_n^{3(2k+1)} + \dots =$$

$$\frac{1}{2k+1}[(1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n + \dots + (1+\varepsilon^{2k-1})^n + (1+\varepsilon^{2k})^n]$$

Ta đã biết rằng $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$ nên

$$(1 + \varepsilon^m)^n = \left(1 + \cos \frac{2m\pi}{2k+1} + i \sin \frac{2m\pi}{2k+1}\right)^n$$

$$= 2^n \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1}\right)^n \cdot \left(\cos \frac{mn\pi}{2k+1} + i \sin \frac{mn\pi}{2k+1}\right)$$

Mặt khác, ta có $\epsilon^{2k+1-m} = \overline{\epsilon^m}$ nên

$$(1 + \epsilon^{2k+1-m})^n = (1 + \overline{\epsilon^m})^n = \overline{(1 + \epsilon^m)^n} =$$

$$= 2^n \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cdot \left(\cos \frac{mn\pi}{2k+1} - i \sin \frac{mn\pi}{2k+1} \right)$$

$$\text{Do đó } (2k+1)S_{2k+1} = \sum_{m=0}^{2k} (1 + \epsilon^m)^n = \left[\sum_{m=0}^k (1 + \epsilon^m)^n + \sum_{m=1}^k (1 + \epsilon^{2k+1-m})^n \right]$$

$$= 2^n + 2^n \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cdot \left(\cos \frac{mn\pi}{2k+1} + i \sin \frac{mn\pi}{2k+1} \right)$$

$$+ 2^n \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cdot \left(\cos \frac{mn\pi}{2k+1} - i \sin \frac{mn\pi}{2k+1} \right)$$

$$= 2^n + 2^{n+1} \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cdot \cos \frac{mn\pi}{2k+1}$$

$$\text{Vì vậy } S_{2k+1} = \frac{2^n}{2k+1} \left[1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^k \left(\cos \frac{m\pi}{2k+1} \right)^n \cdot \cos \frac{mn\pi}{2k+1} \right].$$

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được

$$C_n^0 + C_n^{2k} + C_n^{2.2k} + C_n^{3.2k} \dots = \frac{2^n}{2k} \left[1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^{k-1} \left(\cos \frac{m\pi}{2k} \right)^n \cos \frac{mn\pi}{2k} \right]$$

Bài 3.69. Cho n, k, j là các số tự nhiên với $n > k + j$, chứng minh rằng:

$$C_n^j + C_n^{j+k} + C_n^{j+2k} + C_n^{j+3k} + \dots = \frac{2^n}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\cos \frac{m\pi}{k} \right)^n \cos \frac{(n-2j)m\pi}{k}$$

Lời giải

Với số phức $\epsilon_m = \cos \frac{2m\pi}{k} + i \sin \frac{2m\pi}{k}$ ta có

$$\epsilon_0^{m-j} + \epsilon_1^{m-j} + \epsilon_2^{m-j} + \dots + \epsilon_{k-1}^{m-j} = \begin{cases} k, & (m-j) \vdots k \\ 0, & (m-j) \not\vdots k \end{cases} \quad (1)$$

Thật vậy, nếu $m-j$ chia hết cho k thì $\epsilon_0^{m-j} = \epsilon_1^{m-j} = \dots = \epsilon_{k-1}^{m-j} = 1$ nên

$$\epsilon_0^{m-j} + \epsilon_1^{m-j} + \epsilon_2^{m-j} + \dots + \epsilon_{k-1}^{m-j} = k$$

ABC

Ngược lại, nếu $m-j$ không chia hết cho k thì chú ý $\varepsilon_q^{m-j} = e^{q(m-j)}$,
 $q = \overline{0; k-1}$, nên sử dụng công thức tính tổng của cấp số nhân

$$\varepsilon_0^{m-j} + \varepsilon_1^{m-j} + \varepsilon_2^{m-j} + \dots + \varepsilon_{k-1}^{m-j} = \sum_{q=0}^{k-1} \varepsilon^{q(m-j)} = \frac{1 - \varepsilon^{k(m-j)}}{1 - \varepsilon^{m-j}} = \frac{1 - (\varepsilon^k)^{m-j}}{1 - \varepsilon^{m-j}} = 0$$

Vì thế (1) được chứng minh.

Xét khai triển $\sum_{m=0}^{k-1} \varepsilon_m^{-j} (1 + \varepsilon_m)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m (\varepsilon_0^{m-j} + \varepsilon_1^{m-j} + \varepsilon_2^{m-j} + \dots + \varepsilon_{k-1}^{m-j})$

Sử dụng (1) ta có $\sum_{m=0}^{k-1} \varepsilon_m^{-j} (1 + \varepsilon_m)^n = k(C_n^j + C_n^{j+k} + C_n^{j+2k} + C_n^{j+3k} + \dots)$ (2)

Mặt khác, vì $|\varepsilon_m| = 1$ nên $\varepsilon_m \cdot \bar{\varepsilon}_m = 1 \Rightarrow \varepsilon_m^{-j} = \bar{\varepsilon}_m^j = \cos \frac{2mj\pi}{k} - i \sin \frac{2mj\pi}{k}$

Do đó $\varepsilon_m^{-j} (1 + \varepsilon_m)^n =$

$$\begin{aligned} &= \left(\cos \frac{2mj\pi}{k} - i \sin \frac{2mj\pi}{k} \right) \left(2 \cos \frac{m\pi}{k} \right)^n \left(\cos \frac{mn\pi}{k} + i \sin \frac{mn\pi}{k} \right) \\ &= 2^n \left(\cos \frac{2m\pi}{k} \right)^n \left[\cos \frac{(n-2j)m\pi}{k} + i \sin \frac{(n-2j)m\pi}{k} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta có

$$C_n^j + C_n^{j+k} + C_n^{j+2k} + C_n^{j+3k} + \dots = \frac{2^n}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\cos \frac{m\pi}{k} \right)^n \cos \frac{(n-2j)m\pi}{k}$$

Nhận xét. Đây là bài toán tổng quát.

Bài 3.70 là trường hợp $j = 0$.

+) Từ chứng minh trên, ta cũng có $\sum_{m=0}^{k-1} \left(\cos \frac{m\pi}{k} \right)^n \sin \frac{(n-2j)m\pi}{k} = 0$.

+) Một số trường hợp cụ thể

*) Với $k = 4, j = 3$ thì

$$\begin{aligned} C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \dots &= \frac{2^n}{4} \sum_{m=0}^3 \left(\cos \frac{m\pi}{4} \right)^n \cos \frac{(n-6)m\pi}{4} \\ &= \frac{2^n}{4} \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-2} \cos \frac{(n-6)\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

*) Với $k = 5, j = 1$ thì

$$\begin{aligned} C_n^1 + C_n^6 + C_n^{11} + C_n^{16} + \dots &= \frac{2^n}{5} \sum_{m=0}^4 \left(\cos \frac{m\pi}{5} \right)^n \cos \frac{(n-2)m\pi}{5} \\ &= \frac{2^n}{5} \left[1 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} \right)^n \cos \frac{(n-2)\pi}{5} + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5} \right)^n \cos \frac{2(n-2)\pi}{5} \right] \end{aligned}$$

Bài 3.71. Cho đa thức $P(x) = (1+x+x^2)^{6n+1} = \sum_{k=0}^{12n+2} a_k x^k, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{2n} a_{6k} = \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+2}$.

Lời giải

Đặt $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $\varepsilon^3 = 1; 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0; 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Do đó $P(\varepsilon) = 0$ và $P(-\varepsilon) = (1 - i\sqrt{3})^{6n+1} = (1 - i\sqrt{3})^{6n} \cdot (1 - i\sqrt{3}) = 2^{6n} (1 - i\sqrt{3})$

Nên $P(\varepsilon) + P(-\varepsilon) = 2^{6n} (1 - i\sqrt{3}) = 2^{6n} - i \cdot 2^{6n} \sqrt{3}$ (1)

Mặt khác, ta có $P(\varepsilon) + P(-\varepsilon) = 2(a_0 + a_6 + \dots + a_{12n})$

+ $2\varepsilon(a_4 + a_{10} + \dots + a_{12n-2}) + 2\varepsilon^2(a_2 + a_8 + \dots + a_{12n+2})$

Hay $P(\varepsilon) + P(-\varepsilon) = [2(a_0 + a_6 + \dots + a_{12n}) - (a_2 + a_8 + \dots + a_{12n+2})]$

$- i\sqrt{3}[(a_2 + a_8 + \dots + a_{12n+2}) - (a_4 + a_{10} + \dots + a_{12n-2})]$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} 2 \sum_{k=0}^{2n} a_{6k} - \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+4} - \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+2} = 2^{6n} \\ \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+2} - \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+4} = 2^{6n} \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{2n} a_{6k} = \sum_{k=0}^{2n} a_{6k+2}$.

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Bài 3.72. Giải phương trình

a) $|z - |z + 1|| = |z + |z - 1||$

b) $z^2(2^{|z|^2} - 1) + z(2^{|z-1|} - 1) + 1 = 0$ với $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Ta có $|z - |z + 1|| = |z + |z - 1||$ khi và chỉ khi $|z - |z + 1||^2 = |z + |z - 1||^2$

Hay $(z - |z + 1|)(\bar{z} - |z + 1|) = (z + |z - 1|)(\bar{z} + |z - 1|)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z + \bar{z})|z + 1| + |z + 1|^2 = z\bar{z} + (z + \bar{z})|z - 1| + |z - 1|^2$ (1)

Mặt khác $|z+1|^2 - |z-1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) - (z-1)(\bar{z}-1) = 2(z+\bar{z})$

Nên (1) trở thành $(z+\bar{z})(|z+1| + |z-1|) - 2(z+\bar{z}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z+\bar{z}=0 \\ |z+1| + |z-1|=2 \end{cases}$

+) Nếu $z+\bar{z}=0$ thì $\operatorname{Re} z=0$, nên $z=bi, b \in \mathbb{R}$.

+) Nếu $|z+1| + |z-1| = 2$ (2) thì theo bất đẳng thức tam giác có
 $|z+1| + |z-1| \geq |(z+1) - (z-1)| = 2$

Nên (2) xảy ra khi z là số thực thuộc đoạn $[-1;1]$.

Vậy những số phức cần tìm là $z=bi, b \in \mathbb{R}$ hoặc $z=a \in \mathbb{R}, a \in [-1;1]$.

b) Giả sử $z=a+ib, a, b \in \mathbb{R}$. Vì $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nên $b \neq 0$.

Do $|z|^2 = a^2 + b^2, |z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{1+a^2+b^2-2a}$ nên nếu đặt $2^{|z|^2} - 1 = \alpha, 2^{|z-1|^2} - 1 = \beta$ thì $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Phương trình được viết dưới dạng

$$(a^2 - b^2 + 2iab)\alpha + (a+ib)\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)\alpha + a\beta + 1 + i(2aba + b\beta) = 0$$

Suy ra $(a^2 - b^2)\alpha + a\beta + 1 = 0$ (1) và $2aba + b\beta = 0$ (2).

Vì $b \neq 0$ nên từ (2) có $\beta = -2aa$, nên (1) có dạng $(a^2 + b^2)\alpha = 1$.

~~Do đó $(a^2 + b^2)(2^{a^2+b^2} - 1) = 1$ (3)~~

Xét $f(x) = x(2^x - 1)$ với $x \geq 0$.

~~$f'(x) = 2^x - 1 + x \cdot 2^x \geq 0, \forall x \geq 0$~~

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$, mà $f(1) = 1$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất. Như thế theo (3) ta có $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |z-1| = \sqrt{2-2a}$.

Mà $\beta = -2aa$ nên $2^{\sqrt{2-2a}} - 1 = -2a$, hay $2^{\sqrt{1+y}} = y$ (4) với $y = 1 - 2a$.

Vì $|a| \leq 1$ nên $y \leq 3$. Từ (4) có $y > 0 \Rightarrow 2^{\sqrt{1+y}} > 2 \Rightarrow y > 2$.

Vì thế $y = 2^{\sqrt{1+y}} > 2^{\sqrt{3}} > 2^{\frac{5}{3}} > 3$, mâu thuẫn với $y \leq 3$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm.

Bài 3.73. Giải hệ phương trình trên tập số phức $\begin{cases} x(x-y)(x-z)=3 \\ y(y-x)(y-z)=3 \\ z(z-x)(z-y)=3 \end{cases}$

(Đề thi học sinh giỏi Romania 2002)



Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x(x-y)(x-z) = 3 \quad (1) \\ y(y-x)(y-z) = 3 \quad (2) \\ z(z-x)(z-y) = 3 \quad (3) \end{cases}$

Rõ ràng $x, y, z \neq 0$ và x, y, z đôi một khác nhau.

Từ (1) và (2) ta có $x(x-y)(x-z) = y(y-x)(y-z) \Rightarrow x(x-z) = -y(y-z)$

Hay $x^2 + y^2 = xz + yz$.

Tương tự, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x^2 + y^2 = xz + yz \\ y^2 + z^2 = yx + zx \quad (4) \\ z^2 + x^2 = zy + xy \end{cases}$

Cộng vế với vế ta được $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$.

Kết hợp với (4) ta có $x^2 = yz, y^2 = zx, z^2 = xy$. Suy ra $x^3 = y^3 = z^3 = xyz$.

Đặt $a = xyz$ thì từ $x^3 = y^3 = z^3 = xyz = a$ và x, y, z đôi một khác nhau nên $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{a}, z = \sqrt[3]{a}$ với $\epsilon = 1, 1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$.

Mà $x(x-y)(x-z) = 3$ nên $a(1-\epsilon)(1-\epsilon^2) = 3$.

Ta có $(1-\epsilon)(1-\epsilon^2) = 1 - \epsilon - \epsilon^2 + \epsilon^3 = 3$ nên $\epsilon = 1$.

Vậy các số phức (x, y, z) cần tìm là các hoán vị của $(1, \epsilon, \epsilon^2)$.

Bài 3.74. Cho dãy số $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi $u_0 = 3; u_1 = 0; u_2 = 2, u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Chứng minh rằng u^p chia hết cho p nếu p là số nguyên tố.

Lời giải

Xét phương trình đặc trưng $x^3 - x - 1 = 0$ có 3 nghiệm phức là α, β, γ .

Ta có $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \alpha\beta\gamma = 1$ nên

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2$$

Do đó $u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$.

Rõ ràng nếu $p = 2$ và $p = 3$ ta có $u_2 = 2, u_3 = 3$ nên bài toán đúng.

Xét p là số nguyên tố lớn hơn 3, thì p lẻ nên:

$$+) \alpha^p = -(\beta + \gamma)^p = -\beta^p - \gamma^p - \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \beta^{p-k} \gamma^k$$

$$+) \beta^p = -(\gamma + \alpha)^p = -\gamma^p - \alpha^p - \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \gamma^{p-k} \alpha^k$$

$$+) \gamma^p = -(\alpha + \beta)^p = -\alpha^p - \beta^p - \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \alpha^{p-k} \beta^k$$

ABC

Cộng vế với vế suy ra $3(\alpha^p + \beta^p + \gamma^p) = -\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k (\beta^{p-k} \gamma^k + \gamma^{p-k} \alpha^k + \alpha^{p-k} \beta^k)$

Mà $C_p^k, k = \overline{1, (p-1)}$ chia hết cho p với p là số nguyên tố và biểu thức $\beta^{p-k} \gamma^k + \gamma^{p-k} \alpha^k + \alpha^{p-k} \beta^k$ là số nguyên nên $3(\alpha^p + \beta^p + \gamma^p)$ chia hết cho p , hay u^p chia hết cho p .

Bài 3.75. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \cos kx = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^{n-2k} \cos \frac{nx}{2}, x \in [0; \pi]$

Lời giải

$$\text{Đặt } A_n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \cos kx, B_n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \sin kx.$$

$$\text{Ta có } A_n + iB_n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (\cos x + i \sin z)^k$$

Xét hệ số y^n từ hằng đẳng thức $(1+y)^n (1+zy)^n = [1+(1+z)y+zy^2]^n$ ta

$$\text{có } \sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=n}} C_n^k C_n^l z^l = \sum_{\substack{0 \leq k, l, s \leq n \\ k+l+s=n \\ l+2s=n}} \frac{n!}{k! l! s!} (z+1)^s z^s$$

downloadsachmienphi.com

$$\text{Hay viết lại dưới dạng } \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 z^k = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k (z+1)^{n-2k} z^k$$

$$\text{Xét } z = \cos x + i \sin x \text{ thì } 1+z = 1+\cos x + i \sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right)$$

nên với $x \in [0; \pi]$ ta có

$$\begin{aligned} A_n + iB_n &= \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (\cos x + i \sin x)^k = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 z^k = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k (z+1)^{n-2k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\cos \frac{(n-2k)x}{2} + i \sin \frac{(n-2k)x}{2} \right) (\cos kx + i \sin kx) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right)$$

$$\text{Vì thế: } A_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \cos \frac{nx}{2}; B_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{n-2k} \sin \frac{nx}{2}$$

Ta có điều phải chứng minh.

ABC

Nhận xét. Theo kết quả trên thì $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \sin kx = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^{n-2k} \sin \frac{nx}{2}$

+) Nếu $x = 0$ thì $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} C_{2k}^k 2^{n-2k} = C_{2n}^n$

+) Nếu $x = \pi$ thì $\sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} 0, & n = 2m + 1 \\ (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & n = 2m \end{cases} m \in \mathbb{N}$

Bài 3.76. Cho các số phức $a_k, z_k (k = \overline{1; n})$.

a) Chứng minh rằng $\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^n |z_k|^2$

(*Dạng phức của bất đẳng thức Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz*)

b) Nếu $a_k \in \mathbb{R}, (k = \overline{1; n})$. Chứng minh rằng $\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \cdot \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $\left| \sum_{k=1}^n w_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |w_k|$ ta có

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k z_k| \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |z_k| \right)^2 \quad (1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz ta có

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k| \cdot |z_k| \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

b) Đặt $z_k = b_k + i c_k (b_k, c_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1; n})$ ta có

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^n a_k (b_k + i c_k) \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k + i \sum_{k=1}^n a_k c_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right)^2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2 ; \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n c_k \right)^2$$

Suy ra $\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n c_k \right)^2 \quad (3)$

$$\text{Mặt khác, ta có } \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^n b_k + i \sum_{k=1}^n c_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n c_k \right)^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3.77. Cho các số thực $a_k, b_k, c_k (k = \overline{1; n})$ thoả mãn:

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 = 1, \sum_{k=1}^n b_k c_k = 0$$

Chứng minh rằng $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right)^2 \leq 1$.

Lời giải

Bố đề. Cho $a_k \in \mathbb{R}, z_k \in \mathbb{C}, (k = \overline{1; n})$.

Chứng minh rằng $2 \left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \left| \sum_{k=1}^n z_k^2 \right| \right)$ (Bất đẳng thức N.G de Bruijn)

Áp dụng. Đặt $z_k = b_k + i c_k$ thì $z_k^2 = b_k^2 - c_k^2 + 2i b_k c_k$ nên

$$\sum_{k=1}^n z_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 + 2i \sum_{k=1}^n b_k c_k = 1 - 1 + 2i \cdot 0 = 0$$

Mặt khác, ta có

$$+) \left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k + i \sum_{k=1}^n a_k c_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right)^2$$

$$+) \sum_{k=1}^n |z_k|^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 + \sum_{k=1}^n c_k^2 = 2$$

Áp dụng bất đẳng thức N.G de Bruijn: $2 \left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \left| \sum_{k=1}^n z_k^2 \right| \right)$

$$\text{Ta có } 2 \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k c_k \right)^2 \right] \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot (2 + 0) = 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét. Đây là bài toán tổng quát của một bài trong đề thi học sinh giỏi toán Romania năm 2007

Cho các số thực $b_k, c_k (k = \overline{1; n})$ thoả mãn $\sum_{k=1}^n b_k^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 = 1, \sum_{k=1}^n b_k c_k = 0$

Chứng minh rằng $\left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n c_k \right)^2 \leq 1$.

Các đề thi đại học năm 2009 (đã có trong phần thứ III)

Bài 3.1. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2009)

Lời giải.

Phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ có $\Delta' = 1 - 10 = -9 = 9i^2$ nên có hai nghiệm phức là $z_1 = -1 - 3i, z_2 = -1 + 3i$.

Ta có $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ nên:

$$A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10 + 10 = 20.$$

Chú ý. Có thể giải cách khác dựa vào nhận xét: Với phương trình đã cho có hệ số thực thì nếu có nghiệm phức z_1 thì sẽ có nghiệm \bar{z}_1 . Hay

$$z_2 = \bar{z}_1.$$



Theo định lý Viet ta có $z_1 \bar{z}_1 = 10 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = 10 \Rightarrow |z_1|^2 = 10$. Do đó $A = 20$.

Bài 3.6. Tìm số phức z thỏa mãn $|z - (2+i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối B năm 2009)

Lời giải.

Gọi $z = x + iy$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có:

+

$$|z - (2+i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |x-2+(y-1)i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad (1)$$

$$+) z\bar{z} = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3 \& y = 4; x = 5 \& y = 0.$$

Vậy $z = 3 + 4i$ hoặc $z = 5$.

Bài 3.12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (3-4i)| = 2$.

(Đề thi tuyển sinh đại học khối D năm 2009)

Lời giải.

ABC

Ta có $\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 7i) = (2 - i)^2$ nên nghiệm của phương trình đã cho là

$$z = \frac{4 + 3i \pm (2 - i)}{2} \Rightarrow z = 1 + 2i, z = 3 + i.$$

Bài 3.2. Cho số phức z thoả mãn $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

(Đề thi tuyển sinh cao đẳng khối A, B, D năm 2010 – Chương trình chuẩn)
Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì $\bar{z} = x - yi$ nên đẳng thức đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (2 - 3i)(x + yi) + (4 + i)(x - yi) = -(1 + 3i)^2 \\ & \Leftrightarrow 6x + 4y - 2(x + y)i = 8 - 6i \end{aligned}$$

Do đó $\begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

Vậy số phức z có phần thực bằng -2 , phần ảo bằng 5 .

Bài 3.3. Giải phương trình $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$ trên tập số phức.

(Đề thi tuyển sinh cao đẳng khối A, B, D năm 2010 – Chương trình nâng cao)
Lời giải.

Ta có $\Delta = (1 + i)^2 - 4(6 + 3i) = -24 - 10i = (5i - 1)^2$

Nghiệm của phương trình đã cho là

$$z = \frac{4 + 3i \pm (5i - 1)}{2} \Rightarrow z = 1 - 2i, z = 3i.$$

ABC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [01]. **Andresscu, T. Andrica, D.** "Complex numbers from A to...Z", Birkhauser, 2006.
- [02]. **Andy Liu**, "Chinese mathematics competitions and Olympiads 1981 - 1993", AMT publishing, 1998.
- [03]. **Andy Liu**, "Chinese mathematics competitions and Olympiads 1983 - 2001", AMT publishing, 2004.
- [04]. **Am Slinko**, "USSR mathematical Olympiads 1989 - 1992", AMT publishing, 1997.
- [05]. **Bộ giáo dục và Đào tạo - Hội toán học Việt Nam**, "Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ", Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
- [06]. **Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic**, "The IMO Compendium", Springer, 2004.
- [07]. **Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic**, "IMO shortlist", Springer.
- [08]. **Jiri Herman, Radan Kucera, Jaromir Simsa**, "Equations and Inequalities", Springer, 1999.
- [09]. **Kin Y.Li**, "Math Problem book I", Hong Kong IMO, 2001.
- [10]. **Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil**, "The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985 - 2000", MAA, 2002.
- [11]. **SS Dragomir**, "A survey on Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz type discrete inequalities", Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 4, 2003.
- [12]. **Xiong Bin, Lee Peng Yee**, "Mathematical Olympiad in China", East China Normal University press, 2007.
- [13]. "American Invitational Mathematics Examination".
- [14]. "Romanian mathematical competitions".
- [15]. "The American Mathematical Monthly".
- [16]. <http://www.mathlinks.ro>
- [17]. <http://reflections.awesomemath.org/index.html>
- [18]. <http://www.recreatiimatematice.ro>

ABC

MỤC LỤC

Phần thứ nhất: Những vấn đề cơ bản về số phức	5
1 - Dạng đại số của số phức.....	5
Dạng 1: Các ví dụ về tính toán và chứng minh	6
Dạng 2: Tìm số phức z thoả mãn điều kiện cho trước	13
Dạng 3: Biểu diễn số phức và tìm tập hợp điểm	16
2 - Căn bậc hai của số phức và phương trình.....	22
Dạng 1: Xác định căn bậc hai, giải phương trình bậc hai	23
Dạng 2: Phương trình quy về phương trình bậc hai	29
Dạng 3: Hệ phương trình trên tập số phức.....	34
3 - Dạng lượng giác của số phức.....	41
Dạng 1: Biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác	42
Dạng 2: Vận dụng dạng lượng giác giải toán	51
Phần thứ hai: Một số ứng dụng của số phức	67
1 - số phức với lượng giác và tổ hợp	67
2 - Số phức với số học, đại số và giải tích	86
3 - Số phức với hình học phẳng	101
Phần thứ ba: Các bài toán chọn lọc	121