BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✻ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

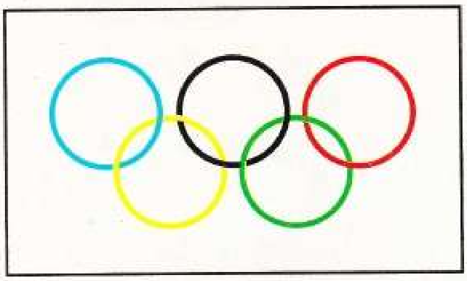
10
2000

SỐ 280 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

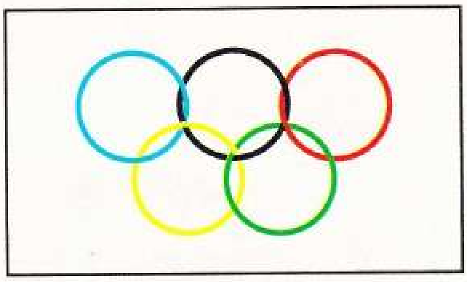
TOÁN HỌC MUÔN MẦU

CÁC VÒNG TRÒN LIÊN KẾT

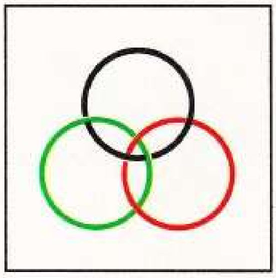
Chắc các bạn đều biết biểu tượng của Olympic thể thao là hình liên kết của 5 vòng tròn bằng nhau với 5 màu, tượng trưng cho sự đoàn kết các chủng tộc 5 châu lục (hình 1). Biểu tượng này do nhà hoạt động xã hội người Pháp Pie đờ Cubectanh (Pierre de Coubertin 1863-1937), Chủ tịch Ủy ban Olympic quốc tế 1896-1916, 1919-1925 và sau đó là Chủ tịch danh dự) đề nghị từ 1913 và xuất hiện lần đầu tiên trên lá cờ thế vận hội lần thứ 7 (1920) tại Ăngve nước Bỉ.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Đối với hai vòng tròn (hoặc hai hình vành khuyên) đang xét chỉ có 2 vị trí tương đối :

(1) liên kết *lồng đơn*, nghĩa là mỗi vòng ở 2 chỗ gặp vòng kia có 1 lần thấy và 1 lần khuất.

(2) *rời nhau*, nghĩa là 2 vòng có thể không gặp nhau hoặc mỗi vòng không có 1 lần thấy 1 lần khuất.

Hai vòng tròn A và B liên kết lồng đơn kí hiệu là $A - B$. Như thế công thức liên kết ở hình 1 là $A - B - C - D - E$, ở hình 2 là :
$$\begin{array}{ccccc} A & - & C & - & E \\ & B & - & D & \end{array}$$

Đối với ba vòng tròn đang xét chỉ có 3 vị trí tương đối :

(1) có ít nhất 2 vòng liên kết lồng đơn.

(2) *rời rạc*, nghĩa là hai vòng bất kì không lồng đơn và có thể rời nhau hoặc mỗi vòng không có 2 lần thấy 2 lần khuất.

(3) liên kết *lồng kép* nghĩa là hai vòng bất kì không lồng đơn và mỗi vòng có 2 lần thấy, 2 lần khuất

Ba vòng tròn liên kết lồng kép kí hiệu là
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & C & \end{array}$$

Ba vòng tròn liên kết lồng kép (hình 3) đã được dùng làm biểu tượng cho dòng họ Bôrômêô (Borromeo) người Ý từ thời Phục hưng (TK XV).

Từ nhiều vòng tròn bằng nhau nếu sử dụng cách lồng đơn và lồng kép ta được nhiều hình liên kết các vòng tròn với nhau. Các hình liên kết coi là *khác nhau* nếu có công thức liên kết khác nhau.

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Từ 5 vòng tròn *bằng nhau*, hãy vẽ các hình liên kết *khác nhau* của chúng kèm theo công thức liên kết sao cho đường biên ngoài (đường bao xung quanh) của các đoạn thẳng nối tâm các vòng tròn đó tạo thành

1) Hình thang cân ; 2) Hình đa giác đều

Tặng phẩm sẽ được trao cho 5 bạn tạo được nhiều hình liên kết.

PHI PHI

(Xem tiếp trang 23)

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 280 (10-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

Chúc mừng ba trường THPT chuyên Lê Hồng Phong (Nam Định), Lam Sơn (Thanh Hóa) và Nguyễn Huệ (Hà Tây) được Nhà nước phong tặng danh hiệu

ĐƠN VỊ ANH HÙNG

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

THỬ BẮC CẦU NỐI ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP VÀ CÁC ĐƯỜNG TRÒN BÀNG TIẾP CỦA TAM GIÁC

LÊ QUỐC HÁN
(GV trường ĐHSP Vinh)

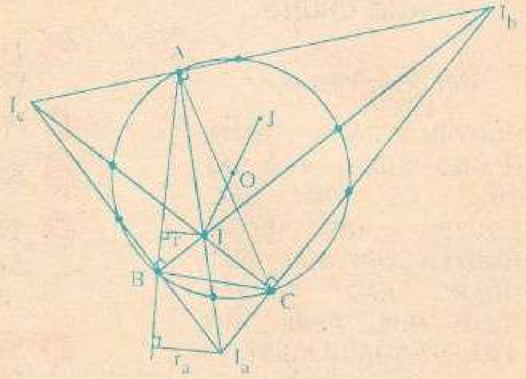
Hệ thức Ơle $d^2 = R^2 - 4Rr$, trong đó d là khoảng cách từ tâm O đường tròn ngoại tiếp đến tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC và R, r tương ứng là bán kính các đường tròn ấy, là một trong những hệ thức đẹp của hình học sơ cấp trong mặt phẳng. Tương tự, ta cũng có hệ thức $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, trong đó d_a là khoảng cách từ O đến tâm I_a đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC và r_a là bán kính đường tròn này.

Để chứng minh hai hệ thức trên, ngoài việc sử dụng hệ thức lượng trong đường tròn (tính phương tích của điểm I, điểm I_a đối với đường tròn (O)), ta còn dùng đến tính chất sau đây :

Tính chất 1. Đường tròn (O) đi qua trung điểm của đoạn I_aI..

Ba mươi lăm năm nay, tôi thường tự hỏi : Nguyên nhân nào dẫn tới tính chất 1 ? (Bạn chớ vội kết luận đó là câu hỏi vớ vẩn. Kinh nghiệm học toán mấy chục năm qua cho tôi thấy rằng bất kì tính chất nào của toán học cũng có nguồn gốc sâu xa. Khám phá ra nguồn gốc ấy sẽ giúp chúng ta phát hiện nhiều tính chất mới thú vị liên quan đến tính chất này). Nếu xét riêng từng đường tròn bàng tiếp một, chúng ta khó tìm ra nguyên nhân dẫn đến tính chất 1, nhưng nếu xét đồng thời cả ba đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ta thấy ngay I chính là *trực tâm* của tam giác $I_aI_bI_c$, còn I_aA, I_bB, I_cC là các *đường cao* của tam giác ấy. Vì vậy, đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC chính là *đường tròn chín điểm Ơle* của tam giác $I_aI_bI_c$. Đường tròn này đi qua các trung điểm của I_aI, I_bI, I_cI đồng thời đi qua các trung điểm của I_aI_b, I_bI_c và I_cI_a (hình 1)

Gọi J là điểm đối xứng của I qua O, khi đó J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$.



Hình 1

Mặt khác, vì I là trực tâm và I_aA, I_bB, I_cC là các đường cao của $\Delta I_aI_bI_c$, nên dễ chứng minh :

$$\frac{IA}{I_aA} + \frac{IB}{I_bB} + \frac{IC}{I_cC} = 1 \Rightarrow \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$ Suy ra

Tính chất 2 : *Trong tam giác ABC, ta có :*

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

Tính chất 2 là một tính chất quen thuộc, nhưng cách chứng minh tính chất ấy theo cách nhìn trên đây có vẻ lạ hơn.

Sử dụng tính chất của các tứ giác nội tiếp IBI_aC, ICI_bA, IAI_cB ta có :

$$\frac{r}{r_a} = \frac{IA}{I_aA} = \frac{IA}{I_bA} \cdot \frac{I_bA}{I_aA} = \text{tg}\,\angle AI_bI.\text{tg}\angle CI_aI$$

$$= \text{tg}\frac{C}{2} \cdot \text{tg}\frac{B}{2}.$$ Do đó :

Tính chất 3 : *Trong tam giác ABC, ta có :*

$$\frac{r}{r_a} = \text{tg}\frac{B}{2} \cdot \text{tg}\frac{C}{2}$$

Tương tự, từ tính chất 3, ta suy ra :

$$\frac{r}{r_b} = \mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2}, \quad \frac{r}{r_c} = \mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2}.$$

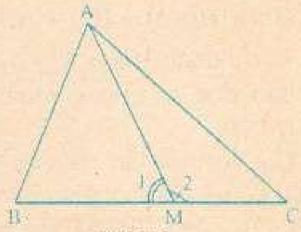
Thay vào hệ thức trong tính chất 2 được :

Hệ quả : *Trong tam giác ABC, ta có :*

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 1$$

Tính chất 3 có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán liên quan đến đường tròn bàng tiếp tam giác. Chẳng hạn, dùng nó ta có thể giải dễ dàng bài toán sau đây (đã từng được chọn làm đề thi Olympic toán quốc tế).

Tính chất 4: M là một điểm bất kì trên cạnh BC của tam giác ABC. Gọi r, r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp và ρ, ρ_1, ρ_2 là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác ABC, ABM và ACM. Chứng minh hệ thức : $\frac{r}{\rho} = \frac{r_1}{\rho_1}.\frac{r_2}{\rho_2}$



Hình 2

Chứng minh : Vì $\angle M_1 + \angle M_2 = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{\angle M_1}{2} + \frac{\angle M_2}{2} = 90^\circ \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{M_1}{2} = \mathrm{cotg}\frac{M_2}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\frac{M_1}{2}.\mathrm{tg}\frac{M_2}{2} = 1 \text{ nên } \frac{r_1}{\rho_1}.\frac{r_2}{\rho_2} =$$

$$= \mathrm{tg}B.\mathrm{tg}\frac{M_1}{2}.\mathrm{tg}\frac{M_2}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{\rho}$$

(xem hình 2)

Cuối cùng, xin nhấn mạnh rằng, ngoài hệ thức Ơle, còn có nhiều hệ thức khác cho ta thấy sự tương tự giữa đường tròn bàng tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác. Bạn sẽ tin điều này hơn, sau khi đã giải một loạt các bài toán sau đây.

Bài toán 1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có a) $IA.IB = 4Rr^2$

b) $I_aA \,.\, I_aB \,.\, I_aC = 4Rr_a^2$

Bài toán 2. Gọi G là trọng tâm và I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Gọi G_1 là trọng tâm tam giác $I_aI_bI_c$. Chứng minh rằng nếu $\mathrm{tg}\frac{B}{2}.\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ thì

(Xem tiếp trang 4)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 34

Problem. Suppose that all positive integer numbers are consecutively written down from left to right. Find the 206788th digit in this infinite sequence.

Solution. There are exactly 9 one-digit numbers, 90 two-digit numbers, 900 three-digit numbers, ... Generally, we have 9.10^{n-1} n–digit numbers. The one-digit numbers occupy nine places in the sequence under consideration, the two-digit numbers 2.90 = 180 places, the three-digit numbers 3.900 = 2700 places, the four-digit numbers 4.9000 = 36000 places, and the five-digit numbers 5.90000 = 450000 places. Therefore, the digit we are interested in belong to a five-digit number.

The digits belonging to the numbers consisting of not more than four-digit occupy the places with indices from 1 to 9+180+2700+36000 = 38889 inclusive. To determine the number of the five-digit which lie in the interval from the 38889th place to the 206788th place in the sequence we must divide the difference 206788 – 38889 = 167899 by 5. This results in a quotient of 33579 with a remainder of 4 :

$$206788 - 38889 = 5.33579 + 4.$$

Thus, the sought-for digit belongs to the 33580th five-digit number. Since the first five-digit number is 10000, the 33580th five-digit number is 43579. In this number, the digit we want to find is the fourth one, counting from left to right. Consequently, it is equal to 7.

Từ mới :

write down	= viết xuống giấy, ghi chép
one-digit	= có một chữ số (tính từ)
generally	= tổng quát
n–digit	= có *n* chữ số
occupy	= chiếm giữ
place	= vị trí
consideration	= sự quan sát, sự suy xét
interest in	= quan tâm đến (động từ)
index	= chỉ số
inclusive	= kể cả, bao gồm (tính từ)
result in	= cho kết quả là (động từ)
quotient	= thương, tỉ số
remainder	= phần dư
seek for	= tìm, kiếm (động từ)
count	= đếm (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

KỈ NIỆM 990 NĂM THĂNG LONG - HÀ NỘI

Bài toán THÁP HÀ NỘI

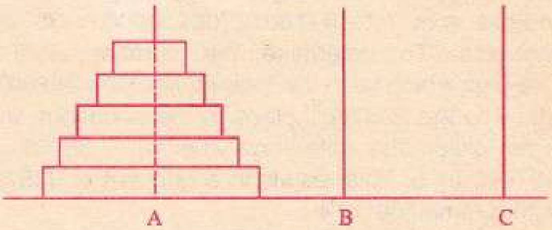
PHẠM TRÀ ÂN
(*Viện Toán học*)

Trong các sách báo về Toán và Tin học có một bài toán mang tên "Bài toán tháp Hà Nội" như sau :

Có n đĩa kích thước nhỏ dần xếp chồng lên nhau ở cọc A, đĩa lớn ở dưới, nhỏ ở trên. Hãy tìm cách chuyển chồng đĩa này sang cọc C sao cho :

1) Mỗi lần chỉ chuyển 1 đĩa từ cọc này sang cọc khác và được dùng cọc B làm cọc trung gian

2) Không được xếp đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ



Nếu $n = 1$ và $n = 2$ thì giải dễ dàng.

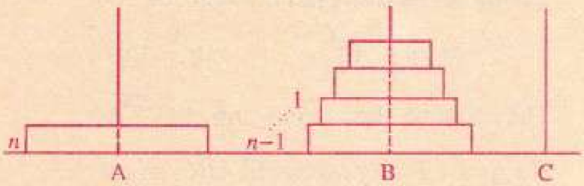
Giả sử ta đã biết cách giải bài toán với n–1 đĩa. Khi đó ta giải bài toán cho n đĩa như sau :

• Chuyển n–1 đĩa trên cùng từ A sang B (theo giả thiết đã biết cách giải).

• Chuyển đĩa thứ n từ A sang C (bài toán 1 đĩa)

• Chuyển n–1 đĩa từ B sang C (theo giả thiết đã biết)

Như vậy cách giải bài n đĩa được quy về giải bài n–1 đĩa và bài 1 đĩa. Cách giải như vậy được



gọi là *thuật giải đệ quy* đã biết từ lâu. Tư duy này ngắn gọn, hiệu quả nhưng để các phần mềm tin học hiểu và thực hiện thì các ngôn ngữ lập trình Pascal, C trở lên mới có khả năng.

Kí hiệu $L(n)$ là số lần chuyển đĩa trong bài n đĩa. Ta có

$L(1) = 1;\ L(2) = 3;$

$L(n) = L(n-1) + L(1) + L(n-1) = 2L(n-1) + 1.$

Ta dự đoán $L(n) = 2^n - 1$.

Bạn đọc tự chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp.

Giả sử mỗi lần chuyển 1 đĩa là 1 giây. Vậy nếu có 64 đĩa thời gian cần là $2^{64} - 1 =$ 18 446 744 073 703 551 615 giây ≈ 50 tỉ năm. Nếu ta dùng một chương trình đệ quy thực hiện với máy tính 1 000 000 phép toán / giây thì thời gian chạy máy là

$$(2^{64} - 1) \times \frac{1}{10^6} \text{ giây} \approx 50\,000 \text{ năm (!)}$$

Vậy là bài toán này vượt quá khả năng thực tế của máy, là bài toán "bất trị". Bài toán Tháp Hà Nội có vai trò quan trọng trong Toán và Tin học hiện đại. Cùng với sự xuất hiện của máy tính, bài toán hồi sinh. Nhà toán học Pháp Lucat (Lucas) đã nêu ra "bài toán tháp Hà Nội" từ năm 1883. Có tài liệu cho rằng bài toán này xuất phát từ việc xây dựng đền thờ ở Ấn Độ. Có người cho là nhà toán học nước ngoài nào đó đến thăm Việt Nam, ngắm cảnh Hồ Gươm và bị quyến rũ bởi vẻ đẹp của Tháp Rùa nên đã đặt tên là *Bài toán tháp Hà Nội.* Trò chơi mang tên *Tháp Hà Nội* đã đi vào các sách toán ở nhiều nước.

THỬ BẮC CẦU NỐI... *(Tiếp trang 3)*

a) IG song song với BC (T4/277 THTT 7/2000)

b) IG_1 song song với I_bI_c.

Bài toán 3. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại M, N, P. Đường tròn bàng tiếp góc A của ΔABC tiếp xúc với BC, tia AC, tia AB lần lượt tại M', N', P'. Chứng minh rằng :

a) AM, BN, CP đồng quy tại một điểm (điểm Giécgôn)

b) AM', BN', CP' đồng quy tại một điểm.

Bài toán 4. Trong ΔABC, kí hiệu $a = BC$, p là nửa chu vi, S là diện tích tam giác, r và r_a lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp góc A. Chứng minh rằng :

a) $r = \dfrac{S}{p}$ và $r = (p - a)\,\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}$

b) $r_a = \dfrac{S}{p-a}$ và $r_a = p\,\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}$ ./.

KẾT QUẢ THI VUI HÈ 2000

Tòa soạn nhận được hơn 700 bài dự thi. Thành phần độc giả rất đa dạng. Độc giả nhiều tuổi nhất tham gia là ông Đào Đức Trương 74 tuổi ở Sơn Thị, Lâm Thao, Phú Thọ. Rất đông các bạn học sinh THCS tham gia giải. Nhiều lời giải trình bày rất công phu. Giải nhất được trao cho các bạn giải hoàn chỉnh tất cả các câu.

Chúng tôi hi vọng các bạn khác sẽ đoạt giải trong các thi kế tiếp ở những năm sau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Điền số hợp lí

Một số bạn đã lập luận chặt chẽ để tìm ra kết quả.

a) Nếu hàng đơn vị là chữ số 0 thì đẳng thức thứ nhất có thể là $15 \times 2 = 30$, $35 \times 2 = 70$, $45 \times 2 = 90$, $15 \times 4 = 60$, $14 \times 5 = 70$, $12 \times 5 = 60$. Từ đó ta tìm nốt đẳng thức thứ hai. Trường hợp này có 3 phương án :

* *Phương án 1:* $45 \times 2 = 90$; $13 \times 6 = 78$

* *Phương án 2:* $15 \times 4 = 60$; $29 \times 3 = 87$

* *Phương án 3 :* $15 \times 4 = 60$; $39 \times 2 = 78$

b) Bạn Nguyễn Ngọc Hiếu, 104 Phùng Khắc Khoan, Sơn Tây, Hà Tây còn lưu ý thêm nếu cho phép chữ số hàng chục là 0 thì được 2 phương án nữa :

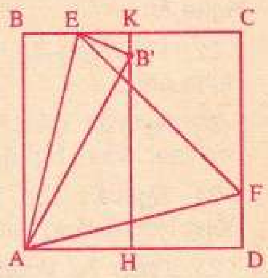
* *Phương án 4 :* $06 \times 9 = 54$; $27 \times 3 = 81$

* *Phương án 5 :* $09 \times 6 = 54$; $27 \times 3 = 81$

Câu 2 : Gấp giấy

Có mảnh giấy hình vuông *ABCD*.

– Gấp cạnh *AB* trùng với cạnh *DC* ta có nếp gấp *HK* rồi mở giấy trở lại hình *ABCD*.



– Gấp đoạn *AB* trùng với đoạn *AB'* sao cho *B'* nằm trên *KH* ta có nếp gấp *AE*.

– Để có nếp gấp *AF* ta làm tương tự như trên khi thay cạnh *AB* bởi cạnh *AD* hoặc gấp theo *AC* để có *E* trùng với *F*.

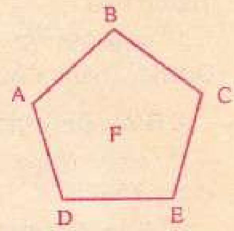
– Gấp theo đường *EF*, ta được ba nếp gấp *AE*, *AF*, *EF* theo yêu cầu đề bài.

Theo cách gấp trên $AB = AB' = 2AH$ nên trong tam giác vuông AHB' có $\angle HAB' = 60^\circ$, suy ra $\angle BAE = \angle EAB' = \frac{1}{2}(90^\circ - 60^\circ) = 15^\circ$.

Tương tự $\angle DAF = 15^\circ$ nên $\angle EAF = 60^\circ$. Tam giác *AEF* cân ($AE = AF$) và có góc 60° nên là tam giác đều.

Có nhiều cách gấp khác nhau để tạo ra ΔAEF đều, nhưng tất cả đều dựa vào việc tạo tam giác vuông có 1 cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền.

Câu 3. Thử tìm quy luật

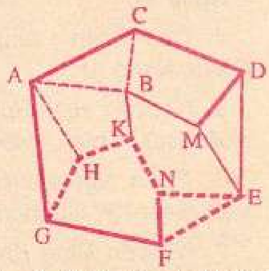


Quy luật ở đây là $F = (A+B+C) \times (D-E)$.

Do đó dấu ? là kết quả của phép toán $(4+3+5) \times (11-7)$ tức có thể thay dấu ? bằng 48.

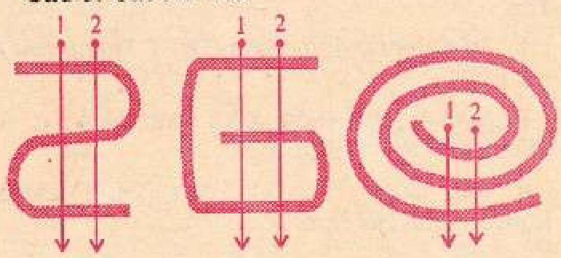
Có đến một phần ba số các bạn dự thi làm sai câu này.

Câu 4. Bố trí tuyến xe



Có thể coi mạng đường gồm 11 đỉnh và 18 cạnh như trên hình vẽ. Ba đỉnh *A*, *B*, *E* ứng với 4 cạnh nên bố trí được 2 đường đi vào và 2 đường đi ra, do đó để số tuyến xe là ít nhất thì không cần bố trí 3 đỉnh *A*, *B*, *E* là đầu mút của tuyến, nói riêng tuyến đường qua *AB* phải có không ít hơn 3 cạnh. 8 đỉnh *C*, *D*, *F*, *G*, *H*, *K*, *M*, *N* ứng với 3 cạnh nên số đường đi vào và số đường đi ra chênh nhau 1 đường, do đó các đỉnh này phải là đầu mút của tuyến xe. Vậy mạng đường có ít nhất 8 đầu mút, nghĩa là 4 tuyến xe. Có nhiều lời giải cho bài này, ở hình bên là một đáp án mà hành khách trên mỗi tuyến xe có thể chuyển sang ít nhất 3 tuyến xe khác.

Câu 5. Cắt thế nào



Có nhiều cách đặt sợi dây để cắt một nhát được 4 đoạn, cắt tiếp nhát nữa được tổng cộng 7 đoạn. Trên hình cho một số cách đặt sợi dây.

Một số bạn hiểu sai sợi dây là vòng dây.

Câu 6. Dịch mật mã

Với chìa khóa mang tên người đã tạo ra chiếc sàng số nguyên tố, các bạn dễ dàng đánh số thứ tự các ô từ trái sang phải, từ trên xuống dưới và tô màu các chữ ở các ô đánh số là số nguyên tố, sẽ được thông điệp :

"CHÚC CÁC BẠN MÙA HÈ BỔ ÍCH
LÝ THÚ VUI VẺ"

Nhiều bạn không để ý tới các chữ ở những ô không tô màu, nếu ghép lại sẽ được đầy đủ tên của những người chúc các bạn.

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐỌC ĐOẠT GIẢI

I. Giải nhất (2 giải)

1. *Đào Minh Lâm*, 12E, THPT Như Thanh, Thanh Hóa.

2. *Nguyễn Sĩ Thái Bình*, xóm 12, Thanh Dương, Thanh Chương, Nghệ An.

II. Giải nhì (7 giải)

1. *Hàn Ngọc Đức*, 11C, THPT Mỹ Hào, Hưng Yên

2. *Trần Thị Ngà*, xóm Đền, Lâm Động, Thủy Nguyên, Hải Phòng

3. *Nguyễn Toàn Thắng*, 12D, THPT Nam Đàn I, Nghệ An

4. *Cao Xuân Hùng*, xóm 5, Diễn Hùng, Diễn Châu, Nghệ An

5. *Nguyễn Hữu Hùng*, 10/5 trường Quốc học, Huế, Thừa Thiên - Huế.

6. *Phan Nguyên Như*, 11/7 THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ, Quảng Nam

7. *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Tp Hồ Chí Minh.

III. Giải ba (26 giải)

1. *Nguyễn Quang Đạt*, số nhà 190 tổ 33, đường Thanh Niên, phường Hồng Hà, Yên Bái.

2. *Ngô Văn Hiệp*, 43B Hàng Quạt, Hà Nội.

3. *Tống Anh Quân*, 11 Tin, THPT Lê Hồng Phong, Nam Định

4. Cao Xuân Vinh, 12B, THPT Nghĩa Đàn, Nghệ An

5. *Đào Đức Trương*, Sơn Thị, Lâm Thao, Phú Thọ

6. *Trần Hoàng Anh*, 10A4, THPT Thanh Oai A, Hà Tây.

7. *Nguyễn Đức Điển*, Xóm Đình, Huề Trì, An Phụ, Kinh Môn, Hải Dương

8. *Đào Công Trực*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương

9. *Trần Phương Anh*, 11A1, Hai Bà Trưng, Vĩnh Phúc

10. *Trần Việt Dũng*, 129, tổ 43, Đại Yên, Ngọc Hà, Ba Đình, Hà Nội

11. *Nguyễn Tú Trung*, đội I, Dược Thượng, Tiên Dược, Sóc Sơn, Hà Nội

12. *Bạch Văn Sơn*, 12C, PT chuyên ngữ, ĐHNN - ĐHQG Hà Nội

13. *Nguyễn Ngọc Sơn*, 9A tổ 4, Hạ Đình, Thanh Xuân, Hà Nội

14. *Bùi Xuân Diệu*, xóm 10, Gia Hòa, An Vinh, Quỳnh Phụ, Thái Bình

15. *Đinh Văn Năm*, xóm 6, Giao An, Giao Thủy, Nam Định

16. *Trần Nguyên Khải*, 11A3, THPT Hải Hậu A, Nam Định

17. *Phùng Văn Huân*, 12D, THPT Giao Thủy, Nam Định.

18. *Đỗ Duy Hà*, 24 ngõ 438, Phú Liên, Thanh Hóa.

19. *Cao Ngọc Cường*, Đội 3, Tây Thọ, Diễn Thọ, Diễn Châu, Nghệ An

20. *Nguyễn Thị Nam Phương*, tổ 4, khối 7, Hà Huy Tập, Vinh, Nghệ An.

21. *Nguyễn Thế Anh*, 12A1, PTCT ĐHSP Vinh, Nghệ An

22. *Võ Trọng Trí*, xóm 9, thị trấn Đô Lương, Nghệ An

23. *Nguyễn Trần Nhân*, 11A, trường Hermann Gmeiner, Vinh, Nghệ An

24. *Nguyễn Thế Tùng*, 8/4, THCS Nam Lý, Đồng Hới, Quảng Bình

25. *Phan Tự Vượng*, 12T1, THPT Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai

26. *Lê Phương*, 9/3 trường THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai.

THTT

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN
TRƯỜNG ĐH KINH TẾ QUỐC DÂN HN NĂM 2000

A. Phần chung cho tất cả các thí sinh

Câu I. 1. Hãy xác định các khoảng tăng, giảm, các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số

$$f(x) = xe^{-3x}$$

2. Hãy tìm phương trình của tất cả các tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$, biết rằng mỗi một trong các tiếp tuyến đó cùng với các trục tọa độ giới hạn một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

Câu II. 1. Giải bất phương trình :

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0$$

2. Giải phương trình :

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-1}=0$$

Câu III. Giải phương trình :

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$$

Câu IV. 1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh thỏa mãn hệ thức :

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

Chứng minh rằng trong 4 mặt của tứ diện phải có ít nhất một mặt là tam giác có cả ba góc đều nhọn.

2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$f(x)=\dfrac{x}{2}+\sin^2 x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

B. Phần dành cho thí sinh theo chương trình không phân ban

Câu Va. 1. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số :

$f(x)=\sin^4 2x$

2. Tìm tập hợp tất cả các điểm P trong không gian cách đều ba điểm $A(1, 1, 1)$; $B(-1, 2, 0)$, $C(2, -3, 2)$.

C. Phần dành cho thí sinh theo chương trình phân ban

Câu Vb. 1. Chứng minh :

$$2^{n-1}C_n^1+2^{n-1}C_n^2+3.2^{n-3}C_n^3+4.2^{n-4}C_n^4+...+nC_n^n$$
$$=n.3^{n-1}$$

trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử.

2. Parabol $y^2=2x$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=8$ thành hai phần. Tính diện tích của mỗi phần đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1. Xét chiều biến thiên và cực trị của hàm số $f(x)=xe^{-3x}$

+ TXĐ : $\forall x\in R$

+ $f'(x)=e^{-3x}-3xe^{-3x}=e^{-3x}(1-3x)$

Ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{3e}$	↘

Từ đó suy ra các yêu cầu của bài toán.

2. + Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_o :

$$y=y'(x_o)(x-x_o)+y(x_o) \qquad (1)$$

Với $y(x_o)=\dfrac{x_o^3+1}{x_o}$, $y'=\dfrac{2x^3-1}{x^2}$

$\Rightarrow y'(x_o)=\dfrac{2x_o^3-1}{x_o^2}$, thay vào (1) và rút gọn ta được :

$$y=\frac{2x_o^3-1}{x_o^2}x+\frac{2-x_o^3}{x_o}\quad (x_o\ne 0)\qquad (2)$$

+ Giao điểm của (2) với các trục tọa độ sẽ là

$$A\left(0,\frac{2-x_o^3}{x_o}\right)\ ;\ B\left(\frac{x_o(x_o^3-2)}{2x_o^3-1},0\right)\quad (2x_o^3\ne 1)$$

+ Tam giác OAB có diện tích là :

$$S=\frac{1}{2}|y_A|.|x_B|=\frac{1}{2}\left|\frac{(x_o^3-2)^2}{2x_o^3-1}\right|=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow (x_o^3-2)^2=|2x_o^3-1|$

a) $(x_o^3-2)^2=2x_o^3-1\Leftrightarrow x_o=1, x_o=\sqrt[3]{5}$

b) $(x_o^3-2)^2=-(2x_o^3-1)\Leftrightarrow$ vô nghiệm.

Vậy hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là :

+ $y = x+1$ tại hoành độ $x_o = 1$

+ $y = \frac{9}{\sqrt[3]{25}}x - \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ tại hoành độ $x_o = \sqrt[3]{5}$

Câu II. 1. Giải BPT :

$$(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5} + \frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1) \le 0 \quad (3)$$

+ TXĐ : $\begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0 \\ 8x-2x^2-6 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

+ Với $x=1$: thay vào (3) : thỏa mãn

+ Với $x = 3$: thay vào (3) được

$\log_5\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5\frac{3}{\sqrt[3]{25}} \le 0$: không thỏa mãn do

$\log_5\frac{3}{\sqrt[3]{25}} > \log_5 1 = 0$

Vậy chỉ có 1 nghiệm là $x = 1$

2) Bạn đọc tự giải. Đáp số $x = 2$.

Câu III. Giải PT :

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1+8\sin2x\cos^2 2x} \qquad (4)$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \ge 0 & (5) \\ 4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = 1+8\sin2x\cos^2 2x & (6) \end{cases}$$

$(6) \Leftrightarrow 2\left[1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1+8\sin2x\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 2(1+\sin6x) = 1+8\sin2x(1-\sin^2 2x)$

$\Leftrightarrow 2(1+3\sin2x-4\sin^3 2x) =$

$= 1+8\sin2x-8\sin^3 2x \Leftrightarrow \sin2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12}+k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Kiểm tra điều kiện (5) dẫn đến phương trình có các nghiệm là :

$$x = \frac{\pi}{12}+2n\pi,\ x = \frac{5\pi}{12}+(2m+1)\pi\ (m, n \in Z)$$

Câu IV. 1. + Từ giả thiết suy ra rằng tại một đỉnh nào đó nếu có một góc phẳng $\ge 90^o$ thì hai góc còn lại cũng $\ge 90^o$ (do đó nếu có một góc phẳng $< 90^o$ thì hai góc còn lại cũng $< 90^o$).

Thật vậy giả sử $\angle BAC \ge 90^o$, khi đó

$$BC^2 \ge AB^2 + AC^2 \qquad (7)$$

Theo giả thiết ta có :

$$CD^2 + AB^2 = BC^2 + AD^2 \qquad (8)$$

$$BD^2 + AC^2 = BC^2 + AD^2 \qquad (9)$$

Từ (7), (8) suy ra :

$BC^2 + CD^2 + AB^2 \ge AB^2 + AC^2 + BC^2 + AD^2$

$\Rightarrow CD^2 \ge AC^2 + AD^2 \Rightarrow \angle CAD \ge 90^o$

Tương tự từ (7), (9) suy ra : $\angle BAD \ge 90^o$

+ Từ đây bằng phản chứng suy ra tứ diện phải có ít ra một mặt là tam giác nhọn.

2. Với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ta luôn có $\frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4}$,

$\sin^2 x \le 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x \le \frac{\pi}{4} + 1$, dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\pi}{2}$. Vậy $\max f(x) = \frac{\pi}{4} + 1$.

Câu Va. 1. $\int \sin^4 2x dx = \int \frac{1}{4}(1-\cos4x)^2 dx$

$= \int\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos4x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right)dx$

$= \int\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos4x + \frac{1}{8}\cos8x\right)dx$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin4x + \frac{1}{64}\sin8x + C$

2. Điểm $P(x, y, z)$ cách đều 3 điểm A (1, 1, 1), $B(-1, 2, 0)$, $C(2, -3, 2)$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} AP^2 = BP^2 \\ AP^2 = CP^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2+z^2 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+(y+3)^2+(z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z+1 = 0 \\ x-4y+z-7 = 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là giao tuyến của 2 mặt phẳng có phương trình trên.

Câu Vb. 1. Ta có

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + C_n^4 x^4 + .. + C_n^n x^n$

Đạo hàm 2 vế ta được : $n(1+x)^n =$

$= C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + 4C_n^4 x^3 + ... + nC_n^n x^{n-1}$

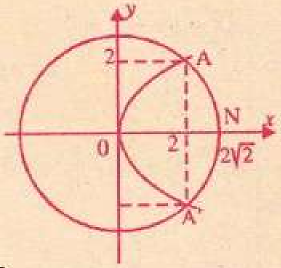
Thay $x = \frac{1}{2}$ ta được : $n . \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} =$

$= C_n^1 + 2C_n^2.2^{-1} + 3C_n^3.2^{-2} + 4C_n^4.2^{-3} + ... + nC_n^n.2^{-n+1}$

Nhân 2 vế với 2^{n-1} sẽ được đpcm.

2) Đường tròn và parabol đã cho cắt nhau tại hai điểm $A(2, 2)$, $A'(2, -2)$, đường tròn cắt trục hoành tại hai điểm $N'(-2\sqrt{2}, 0)$, $N(2\sqrt{2}, 0)$. Cả

đường tròn và parabol đều nhận trục hoành làm trục đối xứng.



Diện tích S_1 của phần $OANA'O$ được tính theo công thức :

$$S_1 = 2\left(\int_0^2 \sqrt{2x}\,.dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,.dx\right)$$

Ta có : $I = \int_0^2 \sqrt{2x}.dx = \sqrt{2}\,\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$

Đặt $K = \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,.\,dx$

Bằng phép đổi biến $x = 2\sqrt{2}\sin t$ ta được :

$$K = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\cos^2 t.dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4(1+\cos 2t)dt$$

$$= 4\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi - 2$$

Vậy : $S_1 = 2(I+K) = 2\left(\frac{8}{3} + \pi - 2\right) = 2\pi + \frac{4}{3}$

Diện tích phần còn lại của hình tròn là

$$S_2 = \pi(2\sqrt{2})^2 - S_1 = 6\pi - \frac{4}{3}$$

NGUYỄN PHÚ TRƯỜNG
(Hà Nội)

ĐOÀN ĐẠI BIỂU GIÁO DỤC THÁI LAN THĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC TUỔI TRẺ

Sáng 12.9.2000 tại trụ sở Nhà xuất bản Giáo dục 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội. Đoàn đại biểu Hội đồng Quốc gia Giáo dục Thái Lan đã có cuộc gặp gỡ trao đổi với cán bộ, biên tập viên Tòa soạn tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Đây là một hoạt động của đoàn trong chuyến tham quan tìm hiểu về công tác giáo dục của Việt Nam. Đoàn gồm có TS Sippanondha Ketudat, Ủy viên Hội đồng Quốc gia Giáo dục, giữ nhiều chức vụ trong Bộ Giáo dục, Bộ Công nghiệp và các tổ chức kinh tế, khoa học, TS Thongchai Chewprecha, Giám đốc Viện Phát triển giảng dạy Khoa học và Công nghệ Thái Lan, TS Chinnapat Bhumirat, bà Suchata Jinachitra, TS Usanee Phothisuk, ông Sompong Rujirawat... Về phía Việt Nam có ông Ngô Trần Ái, giám đốc NXB Giáo dục, PGS Vũ Dương Thụy, phó giám đốc NXB Giáo dục, một số cán bộ NXB, GS Nguyễn Cảnh Toàn và toàn bộ cán bộ biên tập công nhân viên của Toán học và Tuổi trẻ.

VKT

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA ÁO – BA LAN *(6-1996)*

Bài 1. Cho số nguyên $k \geq 1$. Chứng minh rằng có đúng 3^{k-1} số nguyên dương n có các tính chất sau :

(a) Số n viết trong hệ thập phân có đúng k chữ số.

(b) Số n chia hết cho 5

(c) Số $m = \frac{n}{5}$ có k chữ số lẻ.

Bài 2. Lục giác lồi $ABCDEF$ thỏa mãn các điều kiện sau :

(a) Các cạnh đối diện song song (nghĩa là $AB // DE$, $BC // EF$, $CD // FA$)

(b) Khoảng cách giữa các cạnh đối diện bằng nhau (nghĩa là $d(AB, DE) = d(BC, EF) = d(CD, FA)$, trong đó $d(g, h)$ là khoảng cách giữa các đường thẳng g và h).

(c) Các góc $\angle FAB$ và $\angle CDE$ là góc vuông.

Chứng minh rằng các đường chéo BE và CF cắt nhau tạo thành góc $45°$.

Bài 3. Các đa thức $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2...$) được định nghĩa quy nạp bởi : $P_0(x) = 0$, $P_1(x) = x$ và $P_n(x) = xP_{n-1}(x) + (1-x)P_{n-2}(x)$ với mọi $n \geq 2$.

Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, tìm tất cả các số thực x thỏa mãn phương trình $P_n(x) = 0$.

Bài 4. Các số thực x, y, z, t thỏa mãn các hệ thức : $x + y + z + t = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Chứng minh rằng : $-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0$.

Bài 5. Một đa diện lồi **P** và một mặt cầu **S** sắp xếp trong không gian sao cho mặt cầu S cắt mỗi cạnh AB của **P** ở hai điểm X, Y thỏa mãn $AX = XY = YB = \frac{AB}{3}$. Chứng minh rằng tồn tại mặt cầu **T** tiếp xúc với tất cả các cạnh của **P**.

Bài 6. Cho các số tự nhiên k, n thỏa mãn $1 < k < n$. Giải hệ gồm n phương trình n ẩn số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ sau :

$x_i^3(x_i^2 + x_{i+1}^2 + ... + x_{i+k-1}^2) = x_{i-1}^2$ với $1 \leq i \leq n$, trong đó coi $x_{n+j} = x_j$ với mọi $j = 0, 1, 2,...$

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

ĐI TÌM MỘT LỜI GIẢI ĐẸP

CAO TRUNG CHINH
(GV trường chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình)

Trong sách "Hình học lớp 12" của các tác giả Văn Như Cương, Tạ Mân, Trần Nguyệt Quang, có bài toán đáng chú ý (Bài tập 11 trang 65).

Bài toán 1 : Tìm điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(D) : Ax + By + C = 0$ là tiếp tuyến của elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Cách giải 1. Thông thường, bài toán 1 được giải theo trình tự sau :

+ (D), (E) tiếp xúc

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By + C = 0 & (d) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (e) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

+ Vì $A^2 + B^2 \neq 0$ nên $A \neq 0$ hoặc $B \neq 0$.

Nếu $A \neq 0$ thì từ (d) suy ra : $x = -\dfrac{B}{A}y - \dfrac{C}{A}$ (d_a)

Nếu $B \neq 0$ thì từ (d) suy ra : $y = -\dfrac{B}{A}x - \dfrac{C}{A}$ (d_b)

+ Sau đó, tùy vào việc $A \neq 0$ hay $B \neq 0$ mà thế (d_a) hay (d_b) vào (e) nhằm chuyển bài toán tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thành bài toán tìm điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm kép.

+ Cuối cùng, ta có kết quả : (D) là tiếp tuyến của $(E) \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$

Mặc dù, trong bài toán 1, vai trò của x, y là bình đẳng nhưng sự bình đẳng này không được xem xét một cách đầy đủ trong suốt quá trình giải. Vì vậy, theo hướng giải trên, ta nhận được một lời giải đúng nhưng không đẹp.

Để khắc phục tình trạng này, tôi xin đưa ra một lời giải mới cho bài toán 1. Hi vọng rằng lời giải này phần nào thỏa mãn được mĩ cảm toán học của các bạn.

Cách giải 2. (D) là tiếp tuyến của (E)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aA\left(\dfrac{x}{a}\right) + bB\left(\dfrac{y}{b}\right) + C = 0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aAX + bBY + C = 0 \ (\Delta) \\ X^2 + Y^2 = 1 \ (T) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

trong đó $X = \dfrac{x}{a}$ và $Y = \dfrac{y}{b}$.

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng (Δ) và đường tròn (T) tiếp xúc.

$\Leftrightarrow$ Khoảng cách từ điểm $(0, 0)$ đến đường thẳng (Δ) bằng 1.

$$\Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{a^2A^2 + b^2B^2}} = 1 \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2.$$

Bài toán 1 đã được giải quyết với một lời giải hoàn toàn mới. Trong lời giải này, sự bình đẳng của x và y được duy trì trong suốt quá trình giải. Việc đặt ẩn mới $X = x/a$ và $Y = y/b$ đã chuyển bài toán xét tiếp tuyến của elip về xét tiếp tuyến của đường tròn. Với cách tiếp cận trên, bạn cũng sẽ tìm được một lời giải đẹp cho bài toán tương tự sau.

Bài toán 2 : Tìm điều kiện cần và đủ để đường thẳng $(D) : Ax + By + C = 0$ là tiếp tuyến của hypebol $(H) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Chúc các bạn thành công.

Giới thiệu
KÌ THI OLYMPIC THPT ĐỒNG BẰNG SÔNG CỬU LONG

ĐỖ THANH HÂN
(GV trường Trung học chuyên Bạc Liêu)

I. MỤC ĐÍCH CỦA KÌ THI

Kì thi Olympic ĐBSCL dành cho các trường chuyên THPT của các địa phương trong khu vực nhằm mục đích :

+ Tạo điều kiện cho học sinh giỏi trong khu vực giao lưu và học tập lẫn nhau, chuẩn bị cho kì thi học sinh giỏi quốc gia THPT.

+ Trao đổi kinh nghiệm về bồi dưỡng học sinh giỏi giữa giáo viên các bộ môn và cán bộ quản lí các cấp ở các địa phương.

+ Góp phần tích cực vào việc cải tiến nội dung và hình thức thi chọn học sinh giỏi.

II. TỔ CHỨC KÌ THI :

Kì thi được tổ chức vào tháng 12 (từ 20-12 đến 22-12). Nội dung bao gồm tất cả các môn thi học sinh giỏi quốc gia.

Đơn vị đăng cai tổ chức toàn bộ kì thi.

Thành phần mỗi đoàn gồm : trưởng đoàn, giáo viên coi thi, chấm thi và 3 học sinh dự mỗi môn thi. Mỗi đoàn tham dự môn nào phải có đề thi đề nghị kèm đáp án môn đó. Thời gian làm bài thi là 180 phút.

Kì thi diễn ra trong 3 ngày :

- *Ngày thứ nhất :* Các trưởng đoàn chọn ngẫu nhiên một ban chọn đề. Ban chọn đề chọn ngẫu nhiên các câu từ các đề thi đề nghị để được 1 đề chính thức cho kì thi và chuẩn bị đáp án (đề thi được chọn theo nguyên tắc có không quá 1 câu cho 1 đoàn).

- *Ngày thứ hai :* Buổi sáng : học sinh làm bài thi. Buổi chiều : Các trưởng đoàn rọc phách và các giám khảo chấm bài. Phương thức chấm : Mỗi cặp giám khảo chỉ chấm 1 câu trong bài thi. Học sinh tham quan danh lam thắng cảnh địa phương nơi đăng cai. Buổi tối : Đơn vị đăng cai chuẩn bị tổng kết. Học sinh các đoàn họp mặt giao lưu.

- *Ngày thứ ba :* Tổ chức lễ tổng kết và phát thưởng.

III. KHEN THƯỞNG:

Có hai loại khen thưởng :

+ Loại thông báo để địa phương khen (có kèm giấy khen của Ban tổ chức) : Giải nhất gồm 10% số học sinh dự thi, tiếp đến 15% số học sinh đạt giải nhì và 25% số học sinh đạt giải ba.

+ Loại phát thưởng trong buổi lễ tổng kết : gồm có 1 huy chương vàng, 1 huy chương bạc và 1 huy chương đồng (có kèm phần thưởng danh dự) cho các em có điểm số cao nhất trong số các em đạt giải nhất.

Sau đây xin giới thiệu đề thi 1999.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN ĐỒNG BẰNG SÔNG CỬU LONG
Lần thứ 7 – năm 1999

Bài 1. Cho n số a_i thuộc $[2000; 2001]$ $(i = 1, 2, ..., n)$

Chứng minh rằng

$$(2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_n})(2^{-a_1} + 2^{-a_2} + ... + 2^{-a_n}) \le \frac{9n^2}{8}$$

Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin b_i x$ với $a_i, b_i \in R$ $(i = 1, 2, ..., n)$ xác định trên $[-1, 1]$ thỏa điều kiện :

$|f(x)| \le |\sin x| \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Chứng minh : $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \le 1$

Bài 3. Trong một kì thi học sinh giỏi Đồng bằng sông Cửu Long có 14 đoàn tham gia. Ban tổ chức chọn mỗi đoàn 3 học sinh dự thi 3 môn : Toán, Lý, Hóa và sắp 42 học sinh đó vào 1 bàn tròn sao cho giữa 2 học sinh thi cùng 1 môn ngồi gần nhau nhất có đúng 2 học sinh thi môn khác. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

Bài 4. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Hai người chơi một trò chơi như sau : Người thứ nhất lấy một điểm C_1 trên đoạn AB. Tiếp theo, người thứ hai lấy một điểm A_1 trên đoạn BC. Tiếp theo, người thứ nhất lấy một điểm B_1 trên đoạn CA.

Mục đích người thứ nhất là : lấy C_1 và B_1 sao cho diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ lớn nhất. Mục đích của người thứ hai là : lấy A_1 sao cho diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ nhỏ nhất.

Vậy người thứ nhất đạt được diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu 2 người cùng chơi giỏi ?

Bài 5 : Cho hình hộp chữ nhật có kích thước a, b, c với $a < b < c$ và $a^2 + b^2 < c^2$. Gọi (α) là mặt phẳng qua tâm hình hộp và vuông góc với một đường chéo. Tính diện tích thiết diện theo a, b, c.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/280. Tìm m để phương trình

$$(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$$

có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-1$$

TRẦN HỒNG SƠN

(GV trường THPT bán công Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T2/280. Cho ba số thực a, b, c với $a \geq 2$, $b \geq 9$, $c \geq 1945$ và thỏa mãn : $a+b+c = 2000$. Tìm giá trị lớn nhất của tích abc.

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV trường THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Bài T3/280. Hàm số $f(x, y)$ xác định với mọi cặp số không âm (x, y) và thỏa mãn các điều kiện :

a) $f(0, y) = y + 1$

b) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$

c) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$

với mọi cặp số không âm x, y.

Tìm số nguyên k lớn nhất sao cho $f(4, 2000) - f(3, 2000)$ chia hết cho 2^k.

BÙI ĐỨC HIỀN

(GV khoa Toán ĐHSP Vinh)

Bài T4/280. Cho tam giác ABC cân $(AB = AC)$. Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B, C). Gọi r_1 và r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD và ACD. Xác định vị trí của D để tích r_1r_2 đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(GV trường Colette, Tp Hồ Chí Minh)

Bài T5/280. Trong một cuộc đấu cờ giữa các học sinh, mỗi người phải đấu với người khác một ván. Ở mỗi ván người thắng được 1 điểm, người thua được 0 điểm, còn ở ván hòa mỗi người được 0,5 điểm. Tham gia cuộc đấu này có các học sinh lớp A và lớp B, số học sinh lớp B nhiều gấp 10 lần số học sinh lớp A. Sau cuộc đấu tổng số điểm của học sinh lớp B bằng 4,5 lần tổng số điểm của học sinh lớp A. Hỏi kết quả các ván cờ của học sinh lớp A như thế nào ?

VŨ ĐÌNH HÒA

(Viện Công nghệ thông tin)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/280. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $5^n + 1$ chia hết cho 7^{2000}

LÊ QUANG NẪM

(SV khoa Toán ĐHKHTN, Tp Hồ Chí Minh)

Bài T7/280. Chứng minh rằng

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n}>\sin nx$$

trong đó n là số nguyên lớn hơn 1.

ĐINH THÀNH TRUNG

(SV khoa Toán ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T8/280. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: R \to R$ thỏa mãn : $f(x.f(y)) = y.f(x)$ với mọi số thực x, y.

ĐỖ QUANG DƯƠNG

(SV BK 46, K44 ĐH Bách Khoa Hà Nội)

Bài T9/280. Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4 trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi A_{ij}, A_{ik}, A_{ih} là hình chiếu vuông góc của A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ trên các cạnh A_kA_h, A_hA_j, A_jA_k của tam giác $A_jA_kA_h$. Gọi C_i là đường tròn (hoặc đường thẳng) qua ba điểm A_{ij}, A_{ik}, A_{ih} và E_i là đường tròn Ơle của tam giác $A_jA_kA_h$. Chứng minh rằng các đường tròn C_i và E_i cùng đi qua một điểm.

TRẦN VIỆT HÙNG

(Sở GD–ĐT Sóc Trăng)

Bài T10/280. Cho tứ diện $ABCD$ có bốn đường cao cắt nhau tại một điểm H. Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm M trong không gian thỏa mãn

$$HG_1 = HG_2 = HG_3 = HG_4$$

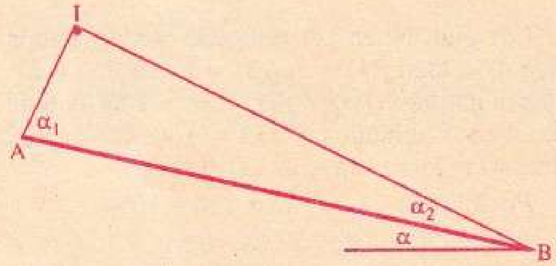
trong đó G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$.

NGUYỄN MINH PHƯƠNG

(SV BK 84, K43 ĐH Bách Khoa Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/280. Thanh AB dài 15cm, khối lượng không đáng kể, đầu A gắn vật nặng m_1 và đầu B gắn vật nặng $m_2 = \frac{m_1}{3}$. Người ta buộc một sợi dây vào hai đầu A, B của thanh và treo vào một đinh I cố định không ma sát sao cho thanh nằm cân bằng như trên hình vẽ.



Chiều dài dây treo $l = AI + IB = 20$cm.

1) Xác định các góc α_1, α_2 và α.

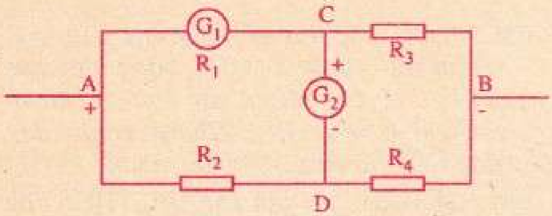
2) Cố định hai đoạn dây treo tại I. Tính chu kì "đung đưa" nhỏ của thanh AB trong mặt phẳng thẳng đứng.

Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.

LẠI THẾ HIỀN
(*GV THPT dân lập Lương Thế Vinh, Hà Nội*)

Bài L2/280. Tính số chỉ của 2 điện kế G_1 và G_2 trong mạch điện ở hình vẽ dưới, biết rằng :

$R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 3\Omega$; $R_4 = 4\Omega$; 2 điện kế có cùng điện trở ; R_1 có trị số (theo Ω) là số nguyên dương ; $U_{AB} = 7{,}4$V



TRẦN VĂN MINH
(*GV Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/280. Find the values of m such that the equation $(x^2-1)(x+3)(x+5) = m$ has four distinct roots x_1, x_2, x_3, x_4 satisfying the condition

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = -1$$

T2/280. Let a, b, c real numbers satisfying the conditions: $a \ge 2$, $b \ge 9$, $c \ge 1945$, $a+b+c = 2000$. Find the greatest value of the product abc.

T3/280. The function f, defined for every pair of non negative numbers (x, y), satisfies the conditions : a) $f(0, y) = y + 1$,

b) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$,

c) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$,

for all $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Find the greatest whole number k such that $f(4, 2000) - f(3, 2000)$ is divisible by 2^k.

T4/280. Let ABC be an isosceles triangle, $AB = AC$. Take a point D on the side BC (D distinct from B, C). Let r_1 and r_2 be respectively the inradii of triangles ABD and ACD.

Determine the position of D so that the product r_1r_2 attains its greatest value.

T5/280. In a chess-game among students, every one takes a chess-match with every other. The winner of a match obtains one point, the loser obtains no point and if the match is a draw, each opponent obtains 0,5 point.

The students taking part in this game are of class A and class B. The number of students of the class B is 10-fold the one of class A. After the game, the total point obtained by the students of the class B is 4,5-fold the one of class A. What are the results of its matches of every student of class A ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/280. Find all positive integers n such that $5^n + 1$ is divisible by 7^{2000}.

T7/280. Prove that

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} > \sin nx$$

for every integer $n > 1$.

T8/280. Find all continuous functions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfying the condition

$$f(x.f(y)) = y.f(x)$$

for all real numbers x, y.

T9/280. In plane, let be given four distinct points A_1, A_2, A_3, A_4, no three of which are collinear. Let A_{ij}, A_{ik}, A_{ih} be respectively the orthogonal projections of A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) on the sides A_kA_h, A_hA_j, A_jA_k of triangle $A_jA_kA_h$, let $\mathbf{C}_i$ be the circle (or the line) passing through the three points A_{ij}, A_{ik}, A_{ih} and let $\mathbf{E}_i$ be the Euler circle of triangle $A_jA_kA_h$.

Prove that the circles $\mathbf{C}_i$ and the circles $\mathbf{E}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) pass through a common point.

T10/280. Let be given a tetrahedron $ABCD$ such that the four altitudes of which are concurrent at point H. Prove that there exists one and only one point M in space satisfying the conditions $HG_1 = HG_2 = HG_3 = HG_4$ where G_1, G_2, G_3, G_4 are respectively the centroids of the tetrahedra $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$.

Bài T1/276. *Lập dãy số nguyên (a_n) ($n = 1, 2, 3,...$) như sau : $a_1 = 2$; số a_n bằng tổng các lũy thừa bậc 10 của tất cả các chữ số của số a_{n-1} với mọi $n = 2, 3, ...$ Chứng minh rằng trong dãy số đó tồn tại 2 số bằng nhau.*

Lời giải. (Của *Vũ Đình Thế*, 9A, THCS Phả Lại, Chí Linh, **Hải Dương**)

Ta có $a_1 = 2$, $a_2 = 2^{10} = 1024$, $a_3 = 1^{10} + 0^{10} + 2^{10} + 4^{10} \leq 4.9^{10}$. Ta sẽ chứng minh rằng mọi số trong dãy đều nhỏ hơn 10^{11}.

Thật vậy, với a_1, a_2, a_3 đều đúng. Giả sử đúng với k ($k \geq 1$), nghĩa là $a_k = \overline{c_m c_{m-1} \cdots c_1} < 10^{11}$ thì $c_m 10^{m-1} \leq a_k < 10^{11}$ nên $m \leq 11$.

Từ đó

$a_{k+1} = c_m^{10} + c_{m-1}^{10} + ... + c_1^{10} \leq 11.9^{10} < 99.10^9 < 10^{11}$

nghĩa là mệnh đề cũng đúng với $k+1$. Theo nguyên lí quy nạp kết luận được $a_n < 10^{11}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Nếu lấy 10^{11} số trong dãy số a_n thì vì dãy số này chỉ lấy không quá $10^{11} - 1$ giá trị nên trong 10^{11} số phải có ít nhất hai số bằng nhau.

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Phú Thọ:** *Lê Thanh Tùng*, 8C, *Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Nam Định:** *Ngô Huy Hoàng*, $8A_2$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** *Hồ Văn Hoàng*, 8A, THCS Quỳnh Lương, Quỳnh Lưu, *Đậu Văn Thiệu*, 9A, Hermann Gmeiner, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Hồ Thái Linh*, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Hương Khê; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Bá*, 8D, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 9/3, Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Thừa Thiên - Huế:** *Hoàng Trọng Minh Vĩ*, 7/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 9A, PTNK Nguyễn Trãi, tp Hải Dương; **Hải Phòng:** *Bùi Hải Nam*, 9B, PTNK Trần Phú; **Hà Nội :** *Đỗ Trung Tiến*, 9C, THPT Hà Nội - Amsterdam, *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/276. *Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn $P(1) = 3$, $P(3) = 11$, $P(5) = 27$. Tính giá trị của*

$$P(-2) + 7P(6)$$

Lời giải. Nhận xét rằng $f(x) = x^2 + 2$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 3$, $f(3) = 11$ và $f(5) = 27$. Suy ra đa thức $Q(x) = P(x) - x^2 - 2$ là đa thức bậc 4 có 3 nghiệm $x = 1$, $x = 3$ và $x = 5$. Vậy $Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-a)$. Ta có

$P(-2) = Q(-2) - f(-2) = 216 + 105a.$

$P(6) = Q(6) - f(6) = 128 - 15a.$

Suy ra

$P(-2) + 7P(6) = 216 + 105a + 7(128 - 15a) = 1112.$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Ninh: *Nguyễn Thị Dựng*, *Lê Đăng Nam*, 9A, THCS Yên Phong; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lâm Hưng*, 9 THCS Hồng Bàng, *Võ Đăng Khoa*, 7A1 THCS Đống Đa; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, *Phạm Văn Thắng*, 9, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, *Đặng Đình Trường*, 8A2, *Nguyễn Thành Nam*, *Hoàng Văn Trường*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, *Đỗ Minh Thành*, 9A, THCS Đào Sư Tích, *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu; **Hà Tây:** *Trần Ngọc Phương*, *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, *Nguyễn Thị Thu Hà*, 9C, THCS Sơn Tây, *Phạm Lạc Việt*, 9A, *Nguyễn Tuấn Nam*, 9A, THCS Thạch Thất; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, *Vũ Mạnh Trinh*, *Nguyễn Điệp Quỳnh*, *Nguyễn Nguyệt Tú*, 9A, *Đỗ Quang Trung*, *Vũ Hồng Minh*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, *Hoàng Minh Hải*, 8A, THCS Phan Bội Châu; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Ngọc Minh Chung*, 17 Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Văn Hùng*, 8, THCS Nguyễn Chí Diểu; **Hà Nội :** *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên, *Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương, *Đoàn Lương Tiến*, 9A, THCS Đông Thái; **Hà Tĩnh:** *Hồ Thái Linh*, *Nguyễn Quang Linh*, 7A, THCS Phan Đình Phùng, **Nghệ An:** *Nguyễn Tư Hoàn*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, *Hồ Quốc Huy*, *Trần Quang Vũ*, 9B, THCS Sông Hiếu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tiến Việt*, 8B, THCS Thái Nguyên, *Võ Xuân Minh*, 9A, THCS Cam Nghĩa; **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải*, *Bùi Quang Nhã*, *Hoàng Ngọc Minh*, 9C , *Phạm Minh Hoàng*, 9A, *Lê Thanh Tùng*, 8C, THCS Việt Trì, *Trần Tuấn Anh*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hồng Điệp*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Trần Sơn Tùng*, 7A, THCS Vĩnh Yên, *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, Châu Phong, *Kim Đình Trường*, 8B, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Phạm Minh Hữu*, 9A2, THCS Lê Lợi, *Nguyễn Văn Quang*, 9T, THCS Chu Văn An; **Yên Bái:** *Hoàng Thị Chinh*, 9C, THCS Yên Bình, *Nguyễn Tiến Dũng*, 9D, THCS Yên Thịnh, *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T3/276. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$, trong đó a, b, c là các số thực thuộc $[1 ; 2]$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $F = \dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc} \le 5$ với $a, b, c \in [1; 2]$. Thật vậy, do vai trò bình đẳng của a, b, c nên chỉ cần xét trường hợp $1 \le c \le b \le a \le 2$.

Xét $F_1 = a^3 + b^3 + c^3 - 5abc$ và
$F_2 = a^3 + b^3 + 1 - 5ab$

Ta có : $F_2 - F_1 = (1 - c^3) + 5ab(c-1)$
$= (c-1)(5ab - c^2 - c - 1)$

Vì $c \ge 1$ và $5ab - c^2 - c - 1 > 3ab - c^2 - c - 1 = (ab - c^2) + (ab - c) + (ab - 1) > 0$ do $a \ge b \ge c \ge 1$ nên $F_2 - F_1 \ge 0 \Rightarrow F_2 \ge F_1$.

Xét $F_3 = a^3 + 1 + 1 - 5a$ ta có :
$F_3 - F_2 = (1 - b^3) + 5a(b-1)$
$= (b-1)(5a - b^2 - b - 1)$

Vì $b \ge 1$ và $5a - b^2 - b - 1 > (2a-b^2) + (a-b) + (a-1) \ge 0$ do $2 \ge a \ge b \ge 1$ nên $F_3 - F_2 \ge 0 \Rightarrow F_3 \ge F_2$

Do đó : $F_3 \ge F_2 \ge F_1$

Nhưng $F_3 = a^3 - 5a + 2 = (a-2)(a^2+2a-1) \le 0 \Rightarrow F_1 \le F_2 \le F_3 \le 0 \Rightarrow F \le 5$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$; $b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của F là $5 \Leftrightarrow (a, b, c) \in \{(2; 1; 1), (1; 2; 1); (1; 1; 2)\}$.

Nhận xét. 1) Đây là bài khó đối với các bạn THCS, đặc biệt là việc dự đoán $F \le 5$. Rất ít bạn gửi lời giải về tòa soạn và trong các bạn gửi về thì rất ít bạn giải đúng. Thậm chí có bạn dùng cả đạo hàm để giải ! Có bạn làm quá tắt đến mức khó hiểu.

2) Các bạn có lời giải tốt là rõ ràng là :

Phú Thọ : *Triệu Thu Lan*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 9/3 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tp Biên Hòa; **Hà Nam:** *Nguyễn Hữu Quang*, 9A, THCS nội trú Kim Bảng; **Hải Phòng:** *Hoàng Đức Giang Nguyên*, 9T, Chu Văn An ; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, *Vũ Quốc Mỹ*, 9A, THCS Trưng Vương; **Khánh Hòa:** *Trần Bình Minh, Nguyễn Minh Châu*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hải Dương:** *Đỗ Quang Trung*, 9B, *Nguyễn Thành Nam*, 9B, THPT Nguyễn Trãi; **Hà Tây:** *Phan Anh Dũng*, 9B, THCS Trần Phú, Quốc Oai; **Nam Định:** *Ngô Huy Hoàng*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên.

3) Bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ** có lời giải rất đẹp : Ta có : $F = \dfrac{a^2}{bc} + \dfrac{b^2}{ca} + \dfrac{c^2}{ab}$

Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên giả sử $1 \le a \le b \le c \le 2$. Khi đó : $(a-b)(b^2 - c^2) \ge 0$

$$\Rightarrow b^3 \le ab^2 + bc^2 - ac^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{ca} \le \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{c}{b} \qquad (1)$$

Mặt khác : $\dfrac{a^2}{bc} \le \dfrac{a^2}{ac} = \dfrac{a}{c} \qquad (2)$

và $\dfrac{c^2}{ab} \le \dfrac{2c}{ab} \le \dfrac{2c}{b} \qquad (3)$

Do đó, từ (1), (2), (3) ta có :

$$F \le \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \qquad (4)$$

Vì $b \le c \le 2 \le 2b$ nên $\dfrac{2b}{c} \ge 1, \dfrac{c}{b} \ge 1 > \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2b}{c} - 1\right)\left(\frac{c}{b} - \frac{1}{2}\right) \ge 0 \Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \le \frac{5}{2} \quad (5).$$

Tương tự : $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} \le \dfrac{5}{2}$.

Từ (4), (5), (6) ta có $F \le 5$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1$, $c = 2$. Vậy F lớn nhất bằng 5.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/276. *Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \ge 4 - \frac{2r}{R}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (theo bạn *Trần Xuân Dũng*, 7A, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**)

Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Sử dụng các công thức quen thuộc

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ta có $\dfrac{2r}{R} = \dfrac{8S^2_{ABC}}{pabc} = \dfrac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$

$$= \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{abc}$$

$$= \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc}$$

$$= \frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-a^3-b^3-c^3-2abc}{abc}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{2r}{R} =$$

$$= \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + 6 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

$\leq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ do áp dụng BĐT $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$ với các số dương x, y.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn làm theo cách trên nhưng nhiều bạn biến đổi dài dòng. Một số bạn không xét xem khi nào đẳng thức xảy ra.

2) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Triệu Văn Tiến*, 8A, THCS Lâm Thao, *Triệu Thu Lan, Phạm Minh Hoàng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Đinh Thái Sơn, Hoàng Ngọc Minh, Trần Thanh Hải, Bùi Quang Nhã*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, PTDL Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh; **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nam:** *Nguyễn Hữu Quang*, 9A, THCS nội trú Kim Bảng; **Nam Định:** *Ngô Huy Hoàng*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu, *Phùng Văn Doanh*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; *Đỗ Quang Trung*, 9B, *Phạm Thành Trung*, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương, *Nguyễn Tuấn Đạt*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Vũ Đình Thế*, 9A, THCS Phả Lại, Chí Linh; **Hải Phòng:** *Nguyễn Diệu Ly*, 9A1, THCS Hồng Bàng, *Phạm Minh Hữu*, 9A2, THCS Lê Lợi, *Phạm Anh Minh*, 8A, *Bùi Tuấn Anh*, 7A, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ninh:** *Đỗ Việt Anh*, 8B, THCS Lê Quý Đôn, Yên Hưng; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đình Dũng*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Văn Thanh*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Đậu Minh Hoàng, Vũ Minh Triều*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Trần Thị Như Ngọc*, 8A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Nguyễn Thị Hà Chung*, 8B, THCS Xuân Hòa, Nam Đàn, *Phan Đức Tuấn*, 9E, THCS Đội Cung, Vinh, *Trần Đình Trung*, 9A, THCS Hermann Gmeiner, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Châu*, 9A1, THCS Bình Lộc, Can Lộc; **Kon Tum:** *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 8A, THCS chuyên Kon Tum; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Đức Quang Huy*, 9B, THCS chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Duân*, 8C, THCS Lương Thế Vinh, Tx Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình, Trương Hồng Thái*, 9/15 THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Nai:** *Đào Thị Phương Tuyền*, 8/3, *Lê Phương*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận, *Nguyễn Hoàng Hiến*, 9/20 THCS Hồng Bàng; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8/2, THCS Mỹ Hóa; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Công Thắng*, 9A1, THCB Tx Cao Lãnh.

VIỆT HẢI

Bài T5/276. *Cho tam giác ABC. Lấy điểm P trên cạnh BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của P lên AB, AC. Gọi M, N là các điểm trên AB, AC tương ứng sao cho PM//AC và PN//AB. So sánh diện tích các tam giác PHK và PMN.*

Lời giải. Ta có $\angle HPK = 180^\circ - \angle A$. Kí hiệu S là diện tích thì

$S_{PHK} = \frac{1}{2}HP \times PK \times \sin(180^\circ - \angle A)$

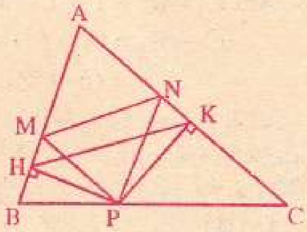
$= \frac{1}{2}HP \times PK \times \sin\angle A \leq \frac{1}{2}MP \times PN \times \sin\angle A =$

$\frac{1}{2}MP \times PN \times \sin\angle MPN = S_{PMN}$

(Do $MP \geq HP$, $PN \geq PK$ và $PM//AC$, $PN//AB$)

Vậy $S_{PHK} \leq S_{PMN}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$, $N \equiv K$ tức $\angle A$ vuông.



Nhận xét.

1. Bài này có thể rút bớt giả thiết *PM//AC* kết quả vẫn không đổi. Các bạn thử chứng minh bài toán đó.

2. Giải tốt bài này có các bạn :

Yên Bái: *Phạm Bích Ngọc*, 9C, THPT Lê Hồng Phong; **Thái Nguyên:** *Trần Đức Phong*, 8A1, THCS Chu Văn An; **Bắc Giang:** *Nguyễn Tuyết Mai*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Thị Hòa*, 9B, THCS Đức Thắng, Hiệp Hòa, **Phú Thọ:** *Trần Tuấn*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Thị Phượng*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Hải Dương:** *Phạm Văn Hùng*, 9A1, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc, *Phạm Thanh Trung*, 9A, Nguyễn Trãi, **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Phòng:** *Trần Xuân Dũng*, 7A, PTNK Trần Phú, *Phạm Anh Minh*, 8A PTTH 7A, PTNK Trần Phú, *Phạm Anh Minh*, 8A, THPT NK Trần Phú, **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên; **Nam Định:** *Phạm Thanh Hải*, 8A2, Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Thanh Hóa:** *Phạm Thị Vân Anh*, 8A, THCS TT Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Tư Hoàn*, 8B, Đặng Thai Mai, Vinh, *Võ Văn Thành*, 9B, Đặng Thai Mai, Vinh, *Đậu Minh Hoàng*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Linh*, 7A, THCS Phan Đình Phùng, Hương Khê, **Đắc Lắc:** *Ngô Thị Huyền Trang*, 7A1, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột

VŨ KIM THỦY

Bài T6/276. *Chứng minh rằng*

$$a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq 0$$

trong đó a, b, c là các số thực.

Lời giải.

Xét $E = a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3$

Đặt $x = a+b$, $y = b+c$, $z = c+a$, khi đó

$$4E = 2(x+z-y)x^3 + 2(y+x-z)y^3 + 2(z+y-x)z^3$$
$$= 2(x^4+y^4+z^4) + 2(zx^3-yx^3+xy^3-zy^3+yz^3-xz^3)$$
$$= x^4 + y^4 + 2xy(y^2-x^2) + y^4 + z^4 + 2yz(z^2-y^2) + z^4 + x^4 + 2zx(x^2 - z^2)$$
$$= (y^2-x^2+xy)^2 + x^2y^2 + (z^2-y^2+yz)^2 + y^2z^2 + (x^2 - z^2 + zx)^2 + z^2x^2 \geq 0$$

Từ đó $E \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải sai do biến đổi nhầm hoặc do nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với một số có thể âm (chẳng hạn ab), hoặc suy từ $f(a, b, c) + g(a, b, c) \geq 0$ ra $f(a, b, c) \geq 0$ hoặc $g(a, b, c) \geq 0$ cho mọi a, b, c. Bạn Ngô Quốc Anh, 11A Toán, PTCT ĐHKHTN Hà Nội nhận xét rằng cũng bằng cách chứng minh trên ta có bất đẳng thức :

$$a(a+b)^5 + b(b+c)^5 + c(c+a)^5 \geq 0$$

với mọi số thực a, b, c.

2) Các bạn sau cũng có lời giải ngắn gọn :

Thái Bình: *Lưu Hoài Nam*, THPT Phụ Dực, Quỳnh Phụ. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Long*, 11A, THPT Tiên Du; **Phú Thọ:** *Bùi Quang Nhã*, 8C, *Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Dư Thái*, 11CT, PTCT ĐHKH huế; **Lào Cai:** *Nguyễn Việt Hà*, 11A, THPT Cam Đường; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thanh Tùng*, 12A, THPT Trần Quốc Tuấn; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, Lê Quý Đôn, **Lâm Đồng:** *Phan Đình Hải Sơn*, 11A10, THPT Bảo Lộc; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Trí*, 10A, *Vũ Ngọc Minh*, 11A, PTCT, ĐHSP; *Nguyễn Mạnh Long*, 11N, THPT Thăng Long; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/276. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^{1999}.e^{2x}dx > \frac{\pi^{2001}}{2001} + \frac{\pi^{2002}}{2002}$$

Lời giải. Trước hết chúng ta chứng minh bất đẳng thức

$e^{2x} > 2(x^2 + x)$ với mọi $x > 0$.

Thật vậy, xét hàm số

$f(x) = e^{2x} - 2(x^2 + x), \quad x \geq 0$

Ta có $f(0) = 1 > 0$ và với $x \geq 0$

$$f'(x) = 2.e^{2x} - 4x - 2$$
$$f''(x) = 4e^{2x} - 4$$

Từ $f''(x) > 0$ ($\forall x > 0$) suy ra $f'(x)$ là hàm số tăng (thực sự).

Do đó $f'(x) > f'(0) = 0 \ \forall x > 0$.

Bởi vậy $f(x)$ với $x \geq 0$ là hàm số tăng. Hệ quả là $f(x) > f(0) = 1$ ($\forall x > 0$).

Áp dụng ta có

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^{1999}.e^{2x}dx > \int_0^{\pi} x^{1999}(x^2 + x)dx = \frac{\pi^{2002}}{2002} + \frac{\pi^{2001}}{2001} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều giải như trên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/276. *Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ.*

Lời giải. (Dựa theo ý của bạn *Trần Trung Duy*)

Gọi số đó là $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Vì A có 6 chữ số khác nhau và không có 2 chữ số lẻ kề nhau nên A hoặc có 1, 2 hay 3 chữ số lẻ.

a) A có 1 chữ số lẻ :

- Nếu a_1 lẻ : số các số A là 5.5.4.3.2.1 = 600

- Nếu a_1 chẵn : a_1 có 4 khả năng chọn trong tập $\{2, 4, 6, 8\}$. Số cách chọn $a_2a_3a_4a_5a_6$ trong đó có đúng 1 số lẻ là 5.5.4.3.2 = 600.

Vậy có 4.600 = 2400 số A với a_1 chẵn.

Tổng cộng có 2400 + 600 = 3000 số A khi A có 1 chữ số lẻ.

b) A có 2 chữ số lẻ :

- Nếu a_1 lẻ : a_1 có 5 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, $a_3a_4a_5a_6$ có 4.4.3.2.4= 384 cách chọn. Vậy có 1 5.5.384 = 9600 số A

- Nếu a_1 chẵn : có 4 cách chọn a_1, có 6 cách chọn hai vị trí không kề nhau của hai số lẻ trong $a_2a_3a_4a_5a_6$ mà số này còn lại 5.4.4.3.2 = 480 cách chọn. Vậy có 4.6.480 = 11520 số A.

Tổng cộng có 9600 + 11520 = 21120 số A khi A có hai chữ số lẻ không kề nhau.

c) A có ba chữ số lẻ :

- Nếu a_1 lẻ : có 5 cách chọn a_1, 5 cách chọn a_2. Có 3 cách chọn hai vị trí không kề nhau của hai số lẻ trong $a_3a_4a_5a_6$. Vậy có 5.5.3.4.3.4.3 = 10800 số A.

- Nếu a_1 chẵn: có 4 cách chọn a_1. Có 1 cách chọn ba vị trí không kề nhau của ba số lẻ trong $a_2a_3a_4a_5a_6$. Vậy có 4.5.4.3.4.3 = 2880 số A.

Tổng cộng có: 10800 + 2880 = 13680 số A khi A có 3 chữ số lẻ không kề nhau.

Tóm lại có: 3000 + 21120 + 13680 = 37800 số A thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Nhiều bạn tham gia giải bài này nhưng rất ít bạn có đáp số đúng. Có bạn ra đáp số đúng nhưng lập luận sai. Các bạn có lời giải tốt : *Trần Trung Duy*, 11T THPT Nha Trang, **Khánh Hòa ;** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C THCS Việt Trì, **Phú Thọ;** *Phạm Thúy Hằng*, 11CT Nguyễn Du, **Đắc Lắc**; *Trần Thanh Tùng*, 11 THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định;** *Nguyễn Xuân Trường*, 10 THPT chuyên **Vĩnh Phúc;** *Lại Bá Linh*, 11A, THPT Đông Hưng, **Thái Bình**; *Phạm Đức Hiệp*, 10 THPT Trần Phú, **Hải Phòng;** *Nguyễn Đăng Thành*, 11T, THPT Gia Định, *Nguyễn Vũ Thiên Nga*, 10T, THPT Lê Hồng Phong, **Tp Hồ Chí Minh.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/276. *Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$\frac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B}+\frac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C}+\frac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}$$

Lời giải. (của *Nguyễn Trung Kiên*, 10A2, PTCT, ĐHSP **Hà Nội**)

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski ta có :

$$1+2\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\cos^2 x$$
$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\cos x\right)^2$$
$$=\frac{2}{3}(1+\cos x)^2=\frac{8}{3}\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)\qquad (*)$$

Vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$T=\frac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B}+\frac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C}+\frac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{(1+2\cos^2 A)(1+2\cos^2 B)(1+2\cos^2 C)}}{\sin A\sin B\sin C}}$$
$$\geq\sqrt{6}\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}$$

do áp dụng (*) và $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

Theo bất đẳng thức quen thuộc :

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$$

ta có : $T\geq\sqrt{6}\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=\sqrt{6}\,.\,\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều và giá trị T nhỏ nhất bằng $3\sqrt{2}$.

Nhận xét. 1) Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Ba bạn giải sai. Nhiều bạn biến đổi quá phức tạp, khá nhiều bạn phải dùng đến công cụ đạo hàm.

2) Bạn Ngô Quốc Anh, 11A, PTCT-tin, ĐHKHTN **Hà Nội** đã đề xuất bài toán tổng quát : Cho ΔABC và số k nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{\sqrt{1+k\cos^2 A}}{\sin B}+\frac{\sqrt{1+k\cos^2 B}}{\sin C}+\frac{\sqrt{1+k\cos^2 C}}{\sin A}$$

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Đặng Ngọc Minh*, 11T, THPT Hà Nội-Amsterdam; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 11B, THPT Trần Nhật Duật; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Quang*, 11T, PTNK, ĐHKHTN, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Vĩnh Phúc:** *Trần Mạnh Cường*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** *Chu Ngọc Hưng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*, 10T2, THPT Lê Khiết...

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/276. *Cho tứ diện ABCD vuông ở D. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường cao DH với các cạnh DA, DB, DC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$p=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos^2\gamma}+\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos\gamma+\cos\alpha}{\cos^2\beta}$$

Lời giải. (của *Nguyễn Hoa Cương*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**)

Đặt : $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$, $z=\cos\gamma$, ta có :
$x=\frac{DH}{DA}, y=\frac{DH}{DB}, z=\frac{DH}{DC}$;
ta được : $x^2+y^2+z^2=1$ (vì trong tứ diện $ABCD$ vuông ở D ta có hệ thức :

$$\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DB^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{DH^2})$$

trong đó $0<x, y, z<1$ do đó các góc α, β và γ đều nhọn. Ta có :

$$(x+y+z)p=(x+y+z)\left(\frac{y+z}{x^2}+\frac{z+x}{y^2}+\frac{x+y}{z^2}\right)$$
$$=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+\left(\frac{y+z}{x}\right)^2+\left(\frac{z+x}{y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2$$
$$\geq\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)^2$$

$$\geq 2 + 2 + 2 + \frac{1}{3}.6^2 = 18 \quad (1)$$

(theo BĐT Côsi-Bunhiacôpski)

Mặt khác, cũng theo BĐT Côsi, thì :

$$0 < x+y+z \leq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = \sqrt{3} \quad (2)$$

Từ các BĐT (1) và (2) ta được :

$p \geq \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ $\Leftrightarrow DA = DB = DC$ Kết luận : p đạt giá trị nhỏ nhất bằng $6\sqrt{3}$ khi và chỉ khi tứ diện $ABCD$ vuông cân ở D (khi đó $ABCD$ cũng là chóp tam giác đều đỉnh D).

Lời giải 2. (*Phạm Đức Hiệp*, 10T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**; *Nguyễn Văn Thắng*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Xuân Trường*, 10A, THPT Xuân Trường, **Nam Định**).

Cũng kí hiệu x, y, z như lời giải 1 và đặt $q = 2(x+y+z)$. Xét tích pq và biểu diễn tích này dưới dạng sau (để áp dụng trực tiếp được BĐT Bunhiacôpski) :

$$pq = qp =$$

$$= [(y+z) + (z+x) + (x+y)]\left[\frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2} + \frac{x+y}{z^2}\right]$$

$$\geq \left(\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}\right)^2 \geq 6^2 = 36 \quad (3)$$

(vì $x, y, z > 0$)

Từ (2) và (3) ta thu được kết quả cần tìm như lời giải 1.

Lời giải 3. (*Trần Thế Phiên*, 10A1, THPT Bình Sơn, **Quảng Ngãi**).

Cũng kí hiệu như trên, nhưng xét tổng : $p + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, sau đó áp dụng BĐT Côsi-Bunhiacopski. Ta được :

$$p + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\geq \frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{3}.9\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad (4)$$

Từ (4) ta được :

$$p \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2.\frac{9}{x+y+z} = \frac{18}{x+y+z} \quad (5)$$

(Để ý rằng để thu được bác BĐT (4) và (5), ta đã hai lần sử dụng BĐT quen thuộc : $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$)

Nhận xét. 1) Những lời giải nêu trên ngắn gọn, chỉ đòi hỏi vận dụng BĐT thuộc chương trình Toán các lớp PTCS và chuyển việc xét p thành việc xét tích hoặc tổng chứa p để sử dụng được các BĐT.

Đáng tiếc đã có 17 lời giải cho đáp số sai. Hầu hết lời giải còn lại đều biến đổi cồng kềnh, phức tạp vì xét trực tiếp biểu thức p hoặc đưa bài toán về việc tìm cực trị của một hàm số (đại số).

2) Bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, Phú Thọ đã biến đổi p về dạng :

$$p = (x+y)\left(\frac{x-y}{xy}\right)^2 + (y+z)\left(\frac{y-z}{yz}\right) + (z+x)\left(\frac{z-x}{zx}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Từ đó, vì $x, y, z > 0$ suy ra : $p \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ như trong lời giải 3 của bạn Phiên.

Một số bạn liên hệ với bài toán T2/253 hoặc đề xuất, mở rộng thành một số BĐT Đại số khác từ bài toán được xét.

3) Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tương đối gọn gàng :

Hà Nội: *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Hà Nội-Amsterdam; *Nguyễn Mạnh Long*, 11N, THPT Thăng Long, *Bùi Việt Dũng*, PTCT ĐHSP Hà Nội; *Hoàng Tùng*, 12A, CT-ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Thu*, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Đắc Tùng*, 12A3, THPT chuyên, *Dương Hà Phú*, 12A1, THPT chuyên; *Nguyễn Hoài Vũ*, 12A1, THPT chuyên; *Trần Anh Tuấn*, 12A1, THPT Liễn Sơn, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Bùi Quang Nhã*, 9C, THCS Việt Trì; **Hưng Yên:** *Hàn Ngọc Đức*, 11C, THPT Mỹ Hào; **Nam Định:** *Đào Tiến Thành*, 12T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp Nam Định, *Bùi Văn Tùng*, 11b, THPT Trần Nhật Duật, Tp Nam Định; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp*, 11T, THPT Lam Sơn, *Hoàng Minh Tiến*, 11B3, THPT Bỉm Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Tất Thắng*, 12A, PTCT ĐHSP Vinh; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Tp Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Anh*, 12T, ĐHKHTN-ĐHQG; *Nguyễn Đăng Thành*, 11A1, THPT Gia Định; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Công Thắng*, 9A1, THCB thị xã Cao Lãnh.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/276. *Một thanh AB đồng chất, thiết diện đều có chiều dài l = 100cm và thiết diện*

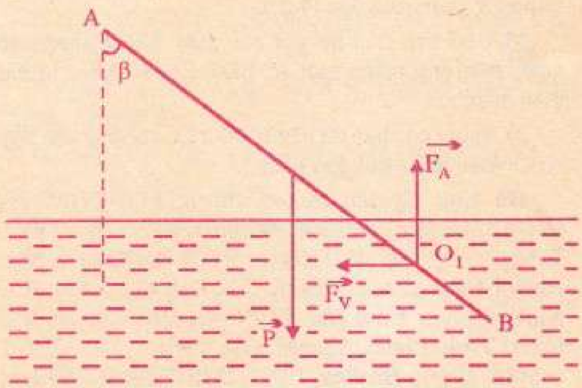
$S = 50cm^2$. Đầu A được gắn với một trục quay cố định cách mặt nước h = 30cm. Đầu B được thả vào nước và có thể chuyển động trên mặt phẳng song song với dòng chảy. Ở trạng thái cân bằng thanh ngập 1/4 chiều dài. Lấy $D_{nước} = 1000\ kg/m^3$; $g = 10m/s^2$.

1) Xác định khối lượng riêng D_o của thanh.

2) Khi nước chảy với vận tốc đều ta thấy thanh bị ngập 1/3 chiều dài. Biết rằng lực ép của nước chảy tác dụng vào thanh là $F_v = \mu v$, trong đó v là vận tốc chảy của nước, $\mu = 0,5kg/s$. Hãy xác định chiều chảy và vận tốc của nước.

Hướng dẫn giải

1) Trọng lực $\vec{P}$ của thanh đặt ở trung điểm O của thanh, lực đẩy Acsimet $\vec{F_A}$ đặt tại trung điểm của phần chìm trong nước, cách trục A một đoạn $\frac{7l}{8}$.



Áp dụng điều kiện cân bằng của thanh :

$$P\frac{l}{2}\sin\alpha = F_A \cdot \frac{7l}{8}\sin\alpha \Rightarrow P = \frac{7}{4}F_A$$

$$\Rightarrow D_oVg = \frac{7}{4}D_n\frac{V}{4}g \Rightarrow D_o = \frac{7}{16} = 437{,}5\text{kg/m}^3.$$

2) Thanh ngập sâu hơn nên lực ép của nước chảy $\vec{F_v}$ hướng về phía trục và có điểm đặt là trung điểm O_1 của phần chìm, cách A một đoạn $\frac{5l}{6}$. Khi thanh cân bằng ta có ;

$$P.\frac{l}{2}\sin\beta + F_v\frac{5l}{6}\cos\beta = F'_A\frac{5l}{6}\sin\beta$$

$$\Rightarrow F_v = \left(F'_A - \frac{3}{5}P\right)tg\beta$$

$$= \left(\frac{D_n}{3} - \frac{3}{5}D_o\right) lSg\,\frac{\sqrt{\left(\frac{2l}{3}\right)^2 - h^2}}{h}$$

$$\Rightarrow v = \frac{F_v}{\mu} = \frac{17}{720}\frac{D_n lSg}{\mu h}\sqrt{4l^2 - 9h^2}$$

$\approx 14{,}06$ m/s.

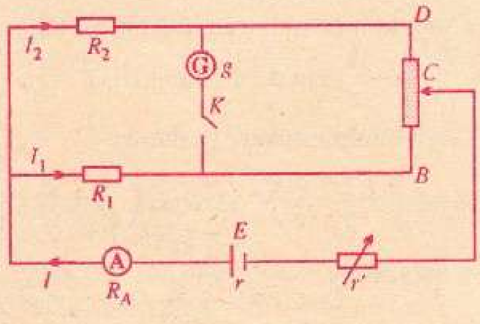
Nước chảy về phía đường thẳng đứng qua A với vận tốc $v \approx 14{,}06$m/s.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Đồng Tháp: *Nguyễn Thanh Thuận*, 11T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Yên Bái:** *Trần Việt Yên*, 11A2, THPT chuyên Yên Bái; **Hà Nội:** *Nông Hồng Dương*, 10A2, THPT Trần Phú; **Quảng Bình:** *Dương Lê Quang, Dương Đức Anh*, 10 Lí, THPT NK Quảng Bình **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 11, *Phan Nguyên Như*, 12/7, THPT Trần Cao Vân, Tam Kì; **Vĩnh Long:** *Lâm Hữu Khánh Phương*, 11T, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tx Vĩnh Long; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 10 lí 1, THPT Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Trần Tuấn Nghĩa, Nguyễn Duy Hưng, Nguyễn Thế Cương*, 12A3, *Trần Bá Bách*, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Yên:** *Đỗ Tuyên Kỳ*, 11 Lí, *Đàm Văn Thành*, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Thừa Thiên - Huế:** *Phùng Quốc Trí*, 11 chuyên Lí, Quốc học Huế; **Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, THPT Phan Bội Châu; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 lí, THPT chuyên Tuyên Quang

MAI ANH

Bài L2/276. *Cho mạch điện như hình vẽ bên : $R_1 = 6\Omega$; $R_2 = 12\Omega$; $R_A \approx 0$; $g = 6\Omega$; $I = 1{,}56A$; $E = 15{,}6V$; $r = 1\Omega$; $R_{BD} = 18\Omega$.*



1) Khi K mở, con chạy C ở đầu trên D của biến trở ($R_{CD} = 0$). Hãy tính r' và điện trở tương đương của mạch ngoài từ A đến C.

2) Đóng K, di chuyển con chạy C. Muốn giữ cho I luôn luôn vẫn bằng 1,56A như ở câu (1), đồng thời biến đổi R_{CD} người ta phải biến đổi cả r'. Tính R_{CD}, R, I_1, I_2, I_g trong các trường hợp :

a) Vẫn giữ r' như ở câu (1);

b) r' = 0,6Ω;

c) r' = 2,4Ω.

Chiều của dòng I_g phụ thuộc R_{CD} như thế nào ?

Hướng dẫn giải.

1) Khi K mở và C trùng D;

$$R = \frac{R_2(R_1 + R_{BD})}{R_2 + (R_1 + R_{BD})} = 8(\Omega);$$

$$r' = \frac{E}{I} - (R+r) = 1(\Omega)$$

2) K đóng và $I = 1,56$A:

$$+ U_{BD} = 6I_g = 12I_2 - 6(I - I_2) \Rightarrow I_2 = \frac{I_g + I}{3}$$

$$\Rightarrow I_3 = I_2 + I_g = \frac{4I_g + I}{3};$$

$$+ U_{BD} = 6I_g = (18 - R_{CD})(I - I_3) - R_{CD}I_3$$

$$\Rightarrow I_g = \frac{I}{30}(12 - R_{CD}).$$

Ta thấy : – Nếu $R_{CD} = 12\Omega \Rightarrow I_g = 0$

– Nếu $R_{CD} > 12\Omega \Rightarrow I_g < 0$: dòng I_g chạy từ D đến B;

– Nếu $R_{CD} < 12\Omega \Rightarrow I_g > 0$: dòng I_g chạy từ B đến D.

+ Ta có : $U_{AC} = R_{CD}I_3 + 12I_2$

$$\Rightarrow R = \frac{U_{AC}}{I} = \frac{(12 - R_{CD})(4R_{CD} + 12)}{90} + \frac{R_{CD} + 12}{3}$$

$$\Rightarrow 2R_{CD}^2 - 33R_{CD} - 252 + 45R = 0 \ (1)$$

a) Với $r' = 1\Omega \Rightarrow R = \frac{E}{I} - (r + r') = 8(\Omega)$.

Thay R vào (1) :

$$2R_{CD}^2 - 33R_{CD} + 108 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm : $R_{CD} = 12\Omega$ và $R_{CD} = 4,5\Omega$.

– Với $R_{CD} = 12\Omega \Rightarrow I_g = 0$;

$I_2 = 0,52A$; $I_1 = I - I_2 = 1,04A$;

– Với $R_{CD} = 4,5\Omega \Rightarrow I_g = 0,39A$;

$I_2 = 0,65A$; $I_1 = I - I_2 = 0,91A$;

b) Với r' = 0,6Ω $\Rightarrow R = 8,4\Omega$.

Thay R vào (1) :

$$2R_{CD}^2 - 33R_{CD} + 126 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm :

$$R_{CD} = 10,5\Omega \text{ và } R_{CD} = 6\Omega.$$

– Với $R_{CD} = 10,5\Omega \Rightarrow I_g = 0,078A$;

$I_2 = 0,546A$; $I_1 = 1,014A$

- Với $R_{CD} = 6\Omega \Rightarrow I_g = 0,312A$;

$I_2 = 0,624A$; $I_1 = 0,936A$.

c) Với $r' = 2,4\Omega \Rightarrow R = 6,6\Omega$.

Thay R vào (1) :

$$2R_{CD}^2 - 33R_{CD} + 45 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm : $R_{CD} = 15\Omega$ và $R_{CD} = 1,5\Omega$.

– Với $R_{CD} = 15\Omega$

$\Rightarrow I_g = -0,156A$; $I_2 = 0,468A$; $I_1 = 1,092A$;

– Với $R_{CD} = 1,5\Omega \Rightarrow I_g = 0,546A$;

$I_2 = 0,702A$; $I_2 = 0,858A$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Tiền Giang: *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Nam Định:** *Trần Văn Tiến*, 10A3, THPT Hải Hậu; **Nghệ An:** *Lê Minh Nguyên*, 12A3, *Lê Ngọc Tuấn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Thị Việt Thảo*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn; **Yên Bái:** *Trần Việt Yên*, 11A2, THPT chuyên Yên Bái; **Hà Tây:** *Trần Văn Chính*, 11 Lí 2, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 11T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 12C2 (Lí), THPT chuyên Tuyên Quang; **Quảng Bình:** *Dương Đức Anh*, 10 lí, THPT NK Quảng Bình; **Phú Yên:** *Đàm Văn Thành*, 10T2, *Nguyễn Cao Huynh*, 11 chuyên Lí, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Phú Thọ:** *Bùi Cao Cường*, 11B1, THPT Long Châu Sa, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Trần Tuấn Nghĩa*, *Lê Thị Thu Hường*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc **Bắc Giang:** *Đặng Ngọc Sâm*, 11A1, THPT Lạng Giang; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Tiến*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 11B3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn

MAI ANH

CHỮ KÍ ĐIỆN TỬ LÀ GÌ ?

VŨ ĐÌNH HÒA
(*Viện công nghệ thông tin*)

1. Chữ kí điện tử được công nhận chính thức !

Các bạn đều biết rằng trong đời sống hiếm thấy hai người có chữ kí giống hệt nhau. Muốn mạo chữ kí của một người nào đó là việc không dễ vì không đoán nổi chữ kí của họ được viết như thế nào. Ngay cả khi biết chữ kí của người khác cũng khó ai bắt chước kí giống hệt như chữ kí của họ. Vì những lí do đó, chữ kí được dùng vào việc bảo đảm lời cam kết sau mỗi đơn từ hoặc văn bản.

Khi thời đại kĩ nghệ thông tin bắt đầu với sự ra đời của máy tính điện tử thì văn bản mang tính pháp lí chỉ khi có chữ kí tay phía dưới. Nhưng nếu có theo dõi thông tin trên đài báo và tivi hẳn các bạn đều biết rằng Quốc hội Mỹ vừa chính thức phê chuẩn công nhận chữ kí điện tử trong việc mua bán từ xa qua mạng Internet. Có nghĩa là từ nay về sau, nếu bạn có xem được một quảng cáo bán hàng trên mạng Internet và nếu bạn điền tên tuổi của mình và điền chữ kí điện tử của mình vào cuối mẫu đơn mua hàng rồi gửi lại cho công ty bán hàng của Mỹ thì việc mua bán được coi như xảy ra. Nếu bạn từ chối và không trả tiền hàng do nhân viên của hãng đem tới hoặc được gửi qua bưu điện thì bạn có nguy cơ phải ra tòa và nộp phạt vì tội gian lận.

2. Cơn ác mộng có xảy ra ?

Bạn nghĩ sao nếu sau một ngày làm việc mệt mỏi ở công sở hoặc ở trường về nhà thì bạn nhận được một kiện hàng, một mặt hàng nào đó mà bạn không bao giờ nghĩ tới chuyện mua nó, chẳng hạn một chiếc máy cày. Bạn càng lúng túng hơn vì trong hóa đơn kèm theo là một khoản tiền khủng khiếp mà bạn không có khả năng thanh toán. Sự việc sẽ làm bạn cảm thấy như rơi vào bẫy rất khó thoát khi biết trong trường hợp bạn từ chối và gửi trả lại kiện hàng thì sẽ phải thanh toán một khoản tiền phạt cùng với một lệ phí nhất định nào đó...

Phải chăng nếu chữ kí điện tử được công nhận thì có thể xảy ra rất nhiều nhầm lẫn hoặc những vụ việc bị lợi dụng hoặc bị mạo danh còn tồi tệ hơn thế nữa...

3. Sự thật về chữ kí điện tử

Những hình dung của bạn về hậu quả việc công nhận chữ kí điện tử có thể xảy ra thật nếu như không có sự giúp đỡ của những nhà toán học. Trước hết chữ kí điện tử không đơn giản là tên đánh máy của bạn trong văn bản. Để tránh sự lạm dụng cũng như mạo danh chữ kí điện tử, các nhà toán học đã nghĩ ra một biện pháp an toàn bảo đảm tính pháp lí cho chữ kí của bạn. Đó là biện pháp sử dụng phương pháp toán học của mật mã khóa công khai được đề xướng bởi ba nhà toán học Mỹ là Rivest, Shamir và Adlermann năm 1979. Theo phương pháp này, bạn phải thông báo cho công ty bán hàng một chìa khóa giải mã e và một số nguyên n bằng tích hai số nguyên tố p và q nào đó. Còn bạn giữ chìa khóa lập mã d. Tên của bạn được thay bằng một số P thu được theo phương pháp thế mỗi chữ cái trong tên của bạn bằng số thứ tự của nó (gồm 2 chữ số trong bảng chữ cái : a được thay bằng 01, b bởi 02...). Số d và số e được chọn có tính chất là

$$e \times d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

ở đây $\varphi(n)$ là hàm số Ơle của n. Tên bạn được gửi đi dưới dạng bộ số $C = P^d \pmod{n}$. Người nhận được thư tín của bạn có thể nhanh chóng áp dụng công thức $P = C^e \pmod{n}$ để xác nhận được đây đúng là tên thật của bạn.

Với nguyên tắc tương tự, công ty bán hàng có thể giữ bí mật việc mua bán với bạn bằng cách dùng e để mã hóa văn bản mua bán (mà bạn phải dùng d để giải ra khi đọc).

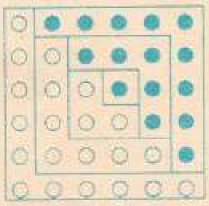
Với giới hạn giải thích sơ lược nguyên tắc hoạt động của việc sử dụng chữ kí điện tử, bài viết này không thể đi sâu vào lí thuyết mật mã khóa công khai cũng như những nguyên lí toán học của lí thuyết độ phức tạp thuật toán để chứng minh rằng khi p và q được chọn đủ lớn thì thời gian tính toán phân tích được n ra tích các số nguyên tố p và q về nguyên tắc không thực hiện được trong một đời người. Bạn thấy đấy, toán học cùng công nghệ thông tin đã làm nên một cuộc cách mạng trong thương mại, các văn bản pháp lí...

TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp bìa 2)*

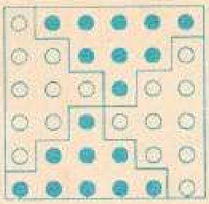
Giải đáp : CÔNG THỨC TÍNH TỔNG TỪ NHỮNG VIÊN BI

1) Hình 2 (278 THTT 8/2000) và các hình 2a, 2b gợi ý công thức

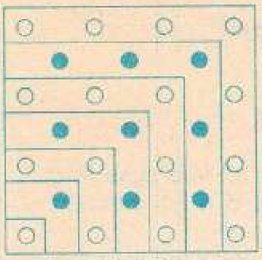
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \left(= \frac{1}{4}(2n)^2\right)$$



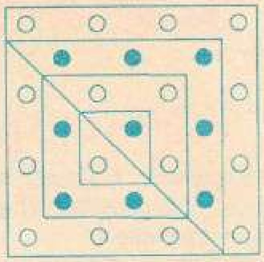
Hình 2a



Hình 2b



Hình 3a



Hình 3b

2) Hình 3 (278 THTT 8/2000) và các hình 3a, 3b gợi ý công thức

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) + (2n-3) + \ldots + 5 + 3 + 1 = n^2 + (n-1)^2$$

Các bạn dưới đây được nhận tặng phẩm :

1) *Nguyễn Hữu Hùng*, lớp 10/5, trường THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế
2) *Nguyễn Công Anh*, lớp 6C, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, Bắc Ninh
3) *Đồng Khánh Toàn*, lớp 9A, THCS Minh Khai, Tp Thanh Hóa
4) *Nguyễn Tôn Phong*, lớp 12C1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar, Đắc Lắc

THTT

Sai lầm ở đâu ? *(Tiếp trang 24)*

cạnh khác CD tại Q. Khi đó do đa giác lồi nằm về một phía của đường thẳng AB nên $MP > MQ$. Nếu khoảng cách từ M tới CD là MT thì $MP > MQ \geq MT$ mâu thuẫn với MP là khoảng cách ngắn nhất từ M tới các cạnh. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bạn Vinh sẽ nhận được quà tặng của CLB. (Xin cho biết địa chỉ mới thật nhanh nhé ! Cảm ơn).

KIHIVI

CÓ SƠ HỞ GÌ KHÔNG ?

Bài toán: Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$xy + yz + zx - \frac{9}{4}xyz$$

Lời giải. (Trong một cuốn sách).

Ta có : $x^2 \geq x^2 - (y-z)^2 = (x-y+z)(x+y-z)$
$= (1-2y)(1-2z)$ (1)

Tương tự : $y^2 \geq (1-2z)(1-2x)$ (2)

$z^2 \geq (1-2x)(1-2y)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$(xyz)^2 \geq (1-2x)^2(1-2y)^2(1-2z)^2$ (4)

$\Rightarrow xyz \geq (1-2x)(1-2y)(1-2z) =$
$= 1 - 2(x+y+z) + 4(xy+yz+zx) - 8xyz =$
$= 4(xy+yz+zx) - 8xyz - 1$

$\Rightarrow xy+yz+zx - \frac{9}{4}xyz \leq \frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$, lúc đó giá trị lớn nhất của biểu thức là $\frac{1}{4}$.

Lời giải trên có sơ hở gì không ? Nếu có... bạn sửa chữa lời giải trên như thế nào ?

VŨ ĐỨC SƠN

(Lớp Toán Cơ - K41, ĐHKHTN Hà Nội)

ĐÍNH CHÍNH

Trong mục *Đề ra kì này* của các số báo lần trước có một số lỗi, xin sửa lại như sau :

Bài T6/278. THTT số 278 (8/2000)

Thay "$u_0 = 1$" bởi "$u_0 = 0$".

Bài T8/279. THTT số 279 (9/2000)

Thay câu "x, y, z là các số thực thuộc [0; 1]" bởi "x, y, z, t là các số thực thuộc [0; 1]".

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Ngày sinh may mắn lần này rơi vào ngay trước ngày nhà giáo Việt Nam. Chỉ có 4 hội viên sinh ngày 19 tháng 11 :

1) *Nguyễn Đình Thành*, sinh năm 1982, thôn Cốc Phong, Chí Tân, Châu Giang, Hưng Yên

2) *Nguyễn Hữu Quyền*, sinh năm 1983, lớp 11A4, THPT Đan Phượng, Hà Tây

3) *Bùi Thị Bích Nguyệt*, sinh năm 1982, số nhà 68A, phố Chợ, Phù Lỗ, Sóc Sơn, Hà Nội.

4) *Hà Trung Kiên*, sinh năm 1983, lớp 12A1, THPT Lạc Long Quân, thị xã Hòa Bình

Có đúng 4 bạn thích ngày sinh này là :

1) *Lý Việt Trường*, Bưu điện Long Đất, huyện Long Đất, Bà Rịa - Vũng Tàu.

2) *Lê Văn Thọ*, lớp 10 chuyên Toán, trường ĐHKH Huế.

3) *Nguyễn Hữu Chung*, số 8 Nguyễn Huy Tự, Bạch Đằng, Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội

4) *Hà Việt Hùng*, 11B, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân, Thanh Hóa

Hai bạn Kiên và Hùng đặc biệt may mắn vì đây là lần thứ hai được nhận quà của CLB.

Các hội viên CLB hãy lạc quan và đặt hi vọng vào các lần sau nhé !

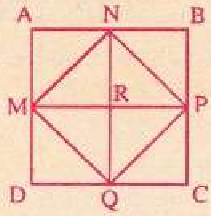
CLB

9 HÌNH VUÔNG KHÁC NHAU

Nếu bạn Bình nói đúng thì chín hình vuông này phải ở các hàng khác nhau và các cột khác nhau. Tổng độ rộng của 9 hàng này phải bằng tổng độ rộng của 9 cột tương ứng. Vì tờ giấy hình vuông do đó : hàng còn lại và cột còn lại có độ rộng như nhau nên giao của chúng sẽ là một hình vuông thứ 10. Hình vuông thứ 10 này có thể bằng một trong chín hình vuông trên (hoàn toàn thiết kế được tình huống này - các bạn thử xem ?) và như vậy bạn Bình có thể nói đúng. Nếu hình vuông thứ 10 này không bằng hình vuông nào trong 9 hình vuông (cũng thiết kế được) thì bạn Bình nói sai. Như vậy chưa khẳng định được Bình nói đúng hay sai. Nếu Bình nói : "Chỉ có 9 hình vuông thôi và kích thước 9 hình vuông khác nhau" thì câu nói là hoàn toàn sai ! Rất tiếc không có bạn nào bình luận đúng.

NGỌC MAI

THAY CHỮ CÁI BỞI CHỮ SỐ



Bạn hãy dùng tất cả các chữ số từ 1 đến 9 để thay vào các chữ cái ở hình bên sao cho các tổng 4 số ở đỉnh mỗi hình vuông đều bằng nhau. Chỉ cần thay đúng, không cần lí luận.

ANPHA

Giải đáp

NHÀ VẬT LÍ THÔNG MINH

Nhiều bạn gửi thư về khen nhà vật lí : "thật khéo léo và triệt để", không chê vào đâu được", ai ngờ lại có lời giải hay thế !", vân vân và vân vân. Nhưng cũng có những bạn tinh hơn, phát hiện ra khi đa giác ở vị trí cân bằng thì có hai khả năng : chân đế là cạnh đa giác hoặc chân đế là đỉnh đa giác. Ôi ! Nếu chân đế là đỉnh đa giác thì... lời giải chưa được gì cả ! Tiếc lắm thay !

Xin giới thiệu các ý tưởng chứng minh của các "chuyên gia" sau đây :

Cách 1. (*Cao Xuân Vinh*, 12B, THPT Nghĩa Đàn, Nghệ An)

Nếu mọi chân đường vuông góc từ M tới các cạnh đều nằm ngoài cạnh thì tất cả các tam giác có một đỉnh là M và hai đỉnh còn lại là hai đỉnh thuộc cùng một cạnh của đa giác đều là các tam giác tù (mà không tù tại M). Kí hiệu các đỉnh đa giác lần lượt là $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Nếu $\angle MA_2A_1 > 90^\circ$ thì góc MA_iA_{i+1} nhọn vì $A_1A_2...A_n$ là đa giác lồi, suy ra $\angle MA_{i+1}A_i > 90^\circ$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$ (A_{n+1} trùng A_1) nên $MA_1 > MA_2 > MA_3 > ... MA_n > MA_1$ vô lí.

Lập luận tương tự, nếu $\angle MA_1A_2 > 90^\circ$ thì $\angle MA_iA_{i+1} > 90^\circ$ với $i = 1, 2, ..., n$ nên :
$MA_2 > MA_1 > MA_n > MA_{n-1} > ... > MA_2$ vô lí.

Chứng tỏ giả sử ban đầu là sai, suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. (V.V Praxolov)

Kẻ các đường thẳng vuông góc từ M tới các đường thẳng chứa cạnh đa giác. Giả sử khoảng cách ngắn nhất từ M tới các đường thẳng chứa cạnh là MP và P thuộc đường thẳng AB. Ta chứng minh P không thể ở phần kéo dài của cạnh AB. Giả sử P ở ngoài cạnh AB thì MP sẽ cắt một

(*Xem tiếp trang 23*)

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp :

CỘNG XOAY

• Giả sử bảng trong hình 1 (khi chưa xoay) thỏa mãn bài toán. Ta có

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Hình 1

$$\overline{a_1a_2a_3}+\overline{a_4a_5a_6}+\overline{a_7a_8a_9}=2000$$

Suy ra

$$100(a_1+a_4+a_7)+10(a_2+a_5+a_8)+a_3+a_6+a_9$$

$=2000$ nên $(a_3+a_6+a_9)\,\vdots\,10$.

Nếu $a_3+a_6+a_9=20$ thì $(a_2+a_5+a_8+2)\,\vdots\,10$, do đó $a_2+a_5+a_8$ bằng 8 hoặc 18. Suy ra

$a_1+a_4+a_7$ bằng 19 hoặc 18.

Từ đó $a_1+a_2+...+a_9>45$. Vô lí.

Nên $a_3+a_6+a_9=10$ (1)

Từ đó $a_2+a_5+a_8$ bằng 9 hoặc 19.

Lập luận như trên chỉ có $a_2+a_5+a_8=9$ (2). Khi đó $a_1+a_4+a_7=19$ (3) nên $a_1+a_2+...+a_9=19+9+10=38$. Vì $45-38=7$ nên chữ số bị loại là 7.

• Khi xoay bảng ta có

$$\overline{a_7a_4a_1}+\overline{a_8a_5a_2}+\overline{a_9a_6a_3}=2000$$

Lập luận tương tự trên có $a_1+a_2+a_3=10$ (4)

$a_4+a_5+a_6=9$ (5)

$a_7+a_8+a_9=19$ (6)

Từ (1) (2) (6) suy ra

$$a_7+a_8+a_9=a_2+a_5+a_8+a_3+a_6+a_9$$

hay $a_7=a_2+a_5+a_3+a_6$, từ đó $a_7\ge 0+1+2+3=6$. Vậy a_7 chỉ có thể là 6, 8 hoặc 9.

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6) có

$a_1+a_4=a_8+a_9=19-a_7$ (7)

$a_1+a_2=a_6+a_9=10-a_3$ (8)

$a_8+a_2=a_6+a_4=9-a_5$ (9)

Từ (7) (8) (9) lần lượt thay $a_7=6$, 8, 9 ta tìm được bảng thỏa mãn đề bài. Chú ý rằng nếu bảng ở hình 1 thỏa mãn thì bảng trong hình 2 (khi chưa xoay) cũng thỏa mãn. Dưới đây là 6 bảng ứng với hình 1, từ đó các bạn có thể viết thêm 6 bảng nữa ứng với hình 2.

a_9	a_6	a_3
a_8	a_5	a_2
a_7	a_4	a_1

Hình 2

9	1	0
4	3	2
6	5	8

5	4	1
6	3	0
8	2	9

6	4	0
5	3	1
8	2	9

6	3	1
5	4	0
8	2	9

6	1	3
4	0	5
9	8	2

4	1	5
6	0	3
9	8	2

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : *Trần Tuấn Anh*, 11A5, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An, *Kiều Mạnh Hùng*, 19A1 Toán ĐHSP Vinh, *Hoàng Xuân Dương*, Hồng Tiến, Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn, Nghệ An; *Nguyễn Thị Nguyên*, Phúc Hậu, Lũng Sơn, Tiên Du, Bắc Ninh; *Nguyễn Thành Trung* B, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ, *Nguyễn Hà Giang*, 7A2, THCS Lâm Thao, Phú Thọ, *Nguyễn Tiến Yết*, 10T1 THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây, *Kiều Thị Hòa*, 9C THCS Thạch Thất, Hà Tây, *Đỗ Minh Thành*, 9A, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ, Trực Ninh, Nam Định, *Ngô Đức Tiến*, 10C3, THPT Ngô Quyền, Hải Phòng, *Doãn Trọng Hoàn*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, Thanh Hóa, *Lê Thị The*, 10A1, THPT Hoằng Hóa II, Thanh Hóa.

Đáng khen Nghiêm Thái Dương lớp 3A1, tiểu học Lý Tự Trọng, Thái Bình là bạn đọc nhỏ tuổi nhất cũng tìm được 1 đáp án.

BÍNH NAM HÀ

NIÊU CƠM THẠCH SANH

Thạch Sanh có niêu cơm đựng nhiều hơn 2 bát cơm và đem chia cơm cho binh sĩ theo cách sau đây. Mỗi lần lấy ra một nửa số cơm có trong niêu đem chia nhưng bớt vào niêu 1 bát. Hỏi Thạch Sanh có thể chia cơm vô hạn lần không ?

XUÂN TRUNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO - HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
Toán tuổi thơ
PHỤ TRƯƠNG CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ DÀNH CHO BẬC TIỂU HỌC VÀ ĐẦU CẤP THCS

Người bạn mới

Chỉ còn ít ngày nữa là TOÁN TUỔI THƠ chào đời. Trong suốt một tháng qua, được sự giới thiệu của các bạn đọc TH&TT, biết bao cánh thư từ khắp mọi miền đất nước đã bay về với TOÁN TUỔI THƠ. Cuộc **Thi giải toán qua thư** đã được hưởng ứng nhiệt liệt của các bạn nhỏ. Khi cầm TOÁN TUỔI THƠ số đầu tiên trên tay, các bạn sẽ nín thở tìm xem : Ai là những người giành chiến thắng ở 5 bài toán đầu tiên ? TOÁN TUỔI THƠ số đầu tiên có những điều gì thú vị ? Xin hé **một phần bí mật** với các bạn nhé ! Một nhân vật dí dỏm và đáng yêu sẽ là bạn của mọi bạn nhỏ xuất hiện : ANH COMPA VUI... TÍNH. Các bạn sẽ được nhiều thầy giáo giỏi nổi tiếng trao đổi về **Cách học Toán** và **phương pháp giải toán**. Các bạn sẽ được đến GÓC SÂN CHƠI với nhiều tiết mục lí thú. Các bạn sẽ được nhớ đến TỀ THIÊN ĐẠI THÁNH với **chiếc gậy Như Ý**, được trở thành BAO CÔNG để xử một vụ án. Các bạn sẽ cùng cu Tí lang thang với **7 giấc mơ kì lạ** trong một xứ sở huyền bí mà quen thuộc. Các bạn còn biết một **Cuộc thi toán Quốc tế** dành cho học sinh Tiểu học... Ôi ! Còn gì nữa nhỉ ? À ! TOÁN TUỔI THƠ còn được nhà văn Nguyễn Quang Thân (tác giả của cuốn sách **Chú bé có tài mở khóa** quen thuộc) ưu ái dành cho một truyện tranh dài kì : **Vụ mất tích của Ngỗng Còm và Vịt Béo** với những tình tiết hấp dẫn, bất ngờ và được thể hiện bởi nét vẽ tài hoa của những họa sĩ rất gần với bạn nhỏ. Vân vân và vân vân...

Với tinh thần HỌC mà CHƠI, CHƠI mà HỌC, TOÁN TUỔI THƠ sẽ mãi mãi là người bạn thông minh, vui tính và thân thiết của các bạn.

Có thể đặt mua TOÁN TUỔI THƠ ở các trường Tiểu học, Phòng Tiểu học hoặc Công ty Sách - Thiết bị trường học thuộc Sở GD-ĐT, các cơ sở bưu điện. Các bạn đừng để lỡ ngay từ số đầu tiên.

Xin chào tất cả và hẹn ngày ra mắt.

TOÁN TUỔI THƠ

MÓN QUÀ CHÀO THIÊN NIÊN KỈ MỚI

SỔ LỊCH 2001 của TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

Lần đầu tiên, Toán học & Tuổi trẻ sẽ gửi tới các bạn cuốn **Sổ lịch** như là một món quà ý nghĩa chào đón thiên niên kỉ mới. Bạn có thể mua cho mình hoặc tặng những ai mà bạn yêu thích và đặc biệt các thầy cô giáo dạy Toán nhân ngày nhà giáo Việt Nam năm nay.

Sổ lịch sẽ cung cấp cho các bạn nhiều thông tin cần thiết :

• Chân dung các nhà Toán học mà các bạn đã biết tên

• Các công thức Toán học thường sử dụng

• Các thông tin quan trọng về đất nước và các mốc lịch sử cần nhớ của dân tộc.

• Địa chỉ liên lạc của các trường Đại học và Cao đẳng, các Sở Giáo dục và Đào tạo, các Công ty Sách và Thiết bị trường học trong cả nước.

• Những trang dành cho các bạn tự ghi những thông tin cần nhớ của riêng mình.

• Đặc biệt là có một bảng dương lịch dùng cho rất nhiều năm, dễ dàng tra cứu theo cách của những người làm Toán.

Sổ lịch khổ 15,5 × 23,5, giấy đẹp với 240 trang, giá 25.000 đồng sẽ luôn ở bên bạn suốt năm đầu của thiên niên kỉ mới.

Hãy đặt mua theo địa chỉ :

TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ.
57 Giảng Võ, Hà Nội
Điện thoại : 04.5142648 và 04.5142650.
Fax : 04.5142648

THTT

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT82M0
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2000
Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng