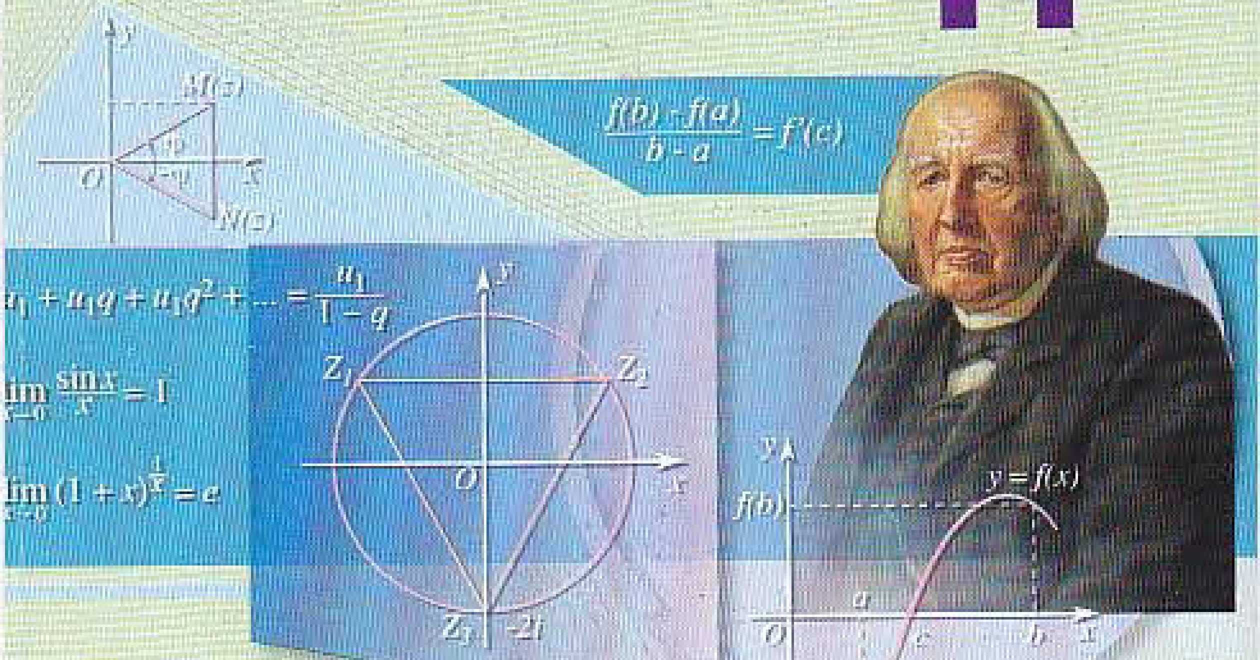
ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - TRẦN NAM DŨNG
NGUYỄN VŨ LƯƠNG - ĐẶNG HÙNG THẮNG

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN
ĐẠI SỐ và GIẢI TÍCH
11



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢNG PHIÊN ÂM
TÊN MỘT SỐ NHÀ KHOA HỌC NÊU TRONG SÁCH

Phiên âm La-tinh	Phiên âm Tiếng Việt
Archimedes	Ac-si-mét
Bernoulli	Béc-nu-li
Binet	Bi-nê
Bolzano	Bôn-da-nô
Bromwich	Brôm-uyt-sơ
Bunyakovsky	Bu-nhi-a-cốp-xki
Cauchy	Cô-si
Cesaro	Xê-da-rô
Descartes	Đề-các
Dirichlet	Đi-ric-lê
Euler	Ơ-le
Farey	Fa-rây
Fermat	Phéc-ma
Fibonacci	Phi-bô-na-si
Gauss	Gao-xơ
Green	Grin
Hardy	Hác-đi
Haros	Ha-rôt

Phiên âm La-tinh	Phiên âm Tiếng Việt
Jensen	I-en-xen
Lagrange	La-gờ-răn-giơ
Leathem	Li-them
Leibniz	Lai-bơ-nít
L'Huilier	Luyn-li-ê
L'Hôpital	Lô-pi-tan
Moivre	Moa-vrơ
Newton	Niu-tơn
Pascal	Pát-xơ-can
Roberval	Rô-béc-van
Rolle	Rô-lơ
Schwarz	Sơ-vác
Tao (Terence)	Tao (Tê-ren-xơ)
Taylor	Tây-lo
Wallis	U-a-lít
Weierstrass	Vai-ơ-tơ-rát
Well	U-en
Zenon	Dê-nông

Công ty Cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội -
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

13-2010/CXB/91-2190/GD Mã số : TYT86H0-CPD

LỜI NÓI ĐẦU

Bộ *Tài liệu chuyên toán 11* này là tiếp nối bộ *Tài liệu (giáo khoa) chuyên toán 10* đã được xuất bản năm 2009. Nó nhằm :

- Phục vụ việc dạy và học lớp 11 hệ chuyên Toán, thể hiện tinh thần chương trình chuyên Toán đã được Hội đồng chương trình Bộ duyệt, khá gần với chương trình và sách giáo khoa Toán nâng cao nhằm giúp học sinh có thể chuyển đổi từ việc học ở hệ chuyên sang hệ không chuyên và ngược lại.

- Làm một tài liệu giảng dạy cho giáo viên dạy các lớp chuyên Toán. Giúp học sinh các lớp chuyên tự học, giúp học sinh khá giỏi ở các lớp đại trà có tài liệu để có thể tự học, tự bồi dưỡng thêm.

Bộ sách *Tài liệu chuyên Toán lớp 11* bao gồm 4 cuốn :

- Tài liệu chuyên Toán – Đại số và Giải tích 11
- Tài liệu chuyên Toán – Hình học 11
- Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Đại số và Giải tích 11
- Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Hình học 11.

Chúng tôi đã mời được nhiều thầy dạy ở các trường chuyên, lớp chuyên (dạy các lớp bồi dưỡng thi toán quốc tế cũng như trong nước, dạy các khối chuyên ở các trường đại học,...) tham gia biên soạn để tài liệu sát với thực tiễn giảng dạy hệ chuyên ở nước ta, đồng thời giới thiệu được phần nào đôi nét giảng dạy ở hệ chuyên Toán của các trường đó.

Cuốn sách *Tài liệu chuyên Toán - Đại số và giải tích 11* này gồm 7 chương và 2 chuyên đề :

- Chương 1 (*Lượng giác*) do Thầy ***Nguyễn Vũ Lương*** (Trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội) viết về phương trình lượng giác, Chủ biên viết đa phần còn lại, trong đó có trình bày về số phức, nhấn mạnh số phức dưới dạng lượng giác.

- Chương 2 (*Thống kê*), chương 3 (*Tổ hợp và xác suất*) và chuyên đề 1 (*Tổ hợp*) do Thầy ***Đặng Hùng Thắng*** (Trường Đại học Khoa học tự nhiên Hà Nội) viết.

- Chương 4 (*Dãy số*), chương 5 (*Giới hạn*), chương 6 (*Đạo hàm*) do Thầy ***Trần Nam Dũng*** (Trường Đại học Khoa học tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh) viết. Trong các chương 5, 6 có trình bày sơ lược về lũy thừa với số mũ hữu tỉ, số mũ thực, sơ lược về hàm số mũ, hàm số lôgarit (học sinh sẽ được học cẩn thận hơn ở lớp 12).

- Chương 7 (*Ứng dụng đạo hàm*) do Thầy *Trần Nam Dũng* cộng tác với anh ***Võ Quốc Bá Cẩn***, sinh viên năm 4 Đại học Y Cần Thơ viết.

- Chuyên đề 2 (*Giới hạn của dãy số*) do Thầy *Trần Nam Dũng* cộng tác với anh ***Lê Phúc Lữ***, sinh viên năm 1 Đại học FPT, học xá Tp. Hồ Chí Minh viết.

Nhân dịp này, Thầy *Trần Nam Dũng* và *Chủ biên* bày tỏ lời cảm ơn đến các anh *Võ Quốc Bá Cẩn* và *Lê Phúc Lữ*.

Trong từng chương có nhiều ví dụ, nhiều bài tập, bài toán (kể cả bài thi của hệ chuyên, thi học sinh giỏi Toán quốc gia, quốc tế...). Các bài tập đều có lời giải hoặc hướng dẫn giải đầy đủ trong cuốn *Tài liệu chuyên Toán - Bài tập Đại số và Giải tích 11*.

Các tác giả cùng Chủ biên và Biên tập viên đã rất cố gắng phối hợp biên soạn, biên tập bộ sách này và hy vọng nó giúp ích cho nhiều thầy giáo, học sinh hệ chuyên Toán, tuy nhiên chúng tôi biết bộ sách vẫn có thể còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi mong độc giả lượng thứ cho các điều đó và hy vọng các thầy cô và các em học sinh trong quá trình dạy, học, đọc tài liệu này đóng góp ý kiến cho chúng tôi để lần tái bản sau, sách phục vụ được tốt hơn. Các góp ý xin gửi về :

Ban Toán, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội,

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B, Giảng Võ, Hà Nội.

Hà Nội, tháng 9 năm 2010

Chủ biên

Đoàn Quỳnh

Chương I

LƯỢNG GIÁC

§1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Phần này nhắc lại một số công thức lượng giác cơ bản, trình bày số phức dưới dạng lượng giác và ứng dụng.

I. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Trong phần tích vô hướng, Tài liệu chuyên Toán hình học 10 đã trình bày giá trị lượng giác của các góc (cung) liên kết và có nói đến một số công thức lượng giác cùng một số ứng dụng hình học, trong đó các công thức cộng đóng vai trò mấu chốt.

1. Công thức cộng

Với mọi góc lượng giác α, β, ta có :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Ta chỉ cần chứng minh công thức đầu tiên rồi từ đó dùng giá trị lượng giác của các góc liên kết để suy ra các công thức còn lại. Giả sử các điểm M và N nằm trên đường tròn lượng giác tâm O, gốc A sao cho góc lượng giác

$$(OA,OM)=\alpha,\ (OA,ON)=\beta$$

thì $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $\overrightarrow{ON}$ có tọa độ $(\cos\beta;\sin\beta)$, từ đó tích vô hướng $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Mặt khác $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos\widehat{NOM}=\cos\widehat{NOM}$ mà đã biết

$$\cos\widehat{NOM} = \cos(ON, OM) = \cos[(OA, OM) - (OA, ON)] = \cos(\alpha - \beta).$$

nên suy ra $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Từ đó dễ suy ra $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

(khi các biểu thức có nghĩa); chúng cũng được gọi là công thức cộng.

2. Công thức nhân đôi, nhân ba

Áp dụng công thức cộng với $\alpha = \beta$, ta suy ra với mọi góc lượng giác α :

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$ (khi các biểu thức có nghĩa).

Và cũng dễ thấy

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

3. Công thức hạ bậc

Từ công thức nhân đôi suy ra công thức hạ bậc:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích

Từ các công thức cộng, dễ dàng suy ra với mọi góc lượng giác α, β, ta có :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

Trong các công thức đó, đặt $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$ thì suy ra với mọi góc lượng giác x, y, ta có:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Tất cả các công thức trên được dùng nhiều khi giải phương trình lượng giác.

II. SỐ PHỨC VÀ DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA NÓ

1. Số phức

Một chuyên đề (không bắt buộc) ở chương trình chuyên toán lớp 10 đã đề cập đến số phức : Người ta xây dựng được một tập hợp số gọi là tập hợp số phức, kí hiệu $\mathbb{C}$, chứa tập hợp số thực $\mathbb{R}$, trong đó có hai phép toán cộng và nhân (mà khi thu hẹp lên $\mathbb{R}$ thì đó là phép toán cộng, nhân số thực) thỏa mãn các tính chất tương tự phép toán cộng và nhân số thực (giao hoán, kết hợp, phân phối...), trong đó mọi số thực âm đều có căn bậc hai, mọi phương trình đa thức đều có nghiệm.

Cụ thể là:

a) Mỗi số phức được viết dưới dạng $z=a+bi$, a, b là số thực, i là đơn vị ảo $(i^2=-1)$, a gọi là phần thực của z, b gọi là phần ảo của z.

Hai số phức gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng phần thực và cùng phần ảo.

Mỗi số thực a được đồng nhất với số phức z có phần ảo bằng 0, viết $z=a+0i=a$.

Mỗi số phức có phần thực bằng 0 gọi là số ảo ; vậy số ảo có dạng $z=bi$ $(b\in\mathbb{R})$.

Số phức $0=0+0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

b) Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$ được biểu diễn bởi điểm M có tọa độ $(a\ ;\ b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Các điểm trên trục Ox biểu diễn các số thực nên Ox còn được gọi là trục thực, các điểm trên trục Oy biểu diễn các số ảo nên Oy còn được gọi là trục ảo.

Mặt phẳng tọa độ Oxy dùng để biểu diễn các số phức còn được gọi là mặt phẳng phức.

Cũng coi mỗi vectơ $\vec{u}(a;\ b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn cho số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$.

c) Muốn cộng hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a,\ b,\ a',\ b' \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau, tức là

$$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

Khi biểu diễn số phức bởi vectơ trong mặt phẳng tọa độ (mặt phẳng phức), phép cộng số phức được diễn tả bởi phép cộng vectơ.

Từ đó dễ thấy phép cộng số phức có các tính chất giao hoán, kết hợp, có số 0 (để $z + 0 = 0 + z = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$) và mỗi số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$ có số đối $-z$ (sao cho $z + (-z) = (-z) + z = 0$) ; rõ ràng $-z = -a - bi$. Ta cũng coi phép trừ số phức $z - z'$ là phép cộng với số đối: $z - z' = z + (-z')$.

d) Muốn nhân hai số phức $z = a + bi$ và $w = c + di$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$, ta thực hiện một cách hình thức phép nhân hai biểu thức $a + bi$ và $c + di$ rồi thay $i^2 = -1$, cụ thể là :

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ví dụ : $(1 + 2i)(3 - i) = 5 + 5i$;

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \ (a,\ b \in \mathbb{R}).$$

Phép nhân số phức có tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối (đối với phép cộng) tương tự như phép nhân số thực.

(Rõ ràng coi $\mathbb{R}$ là tập con của $\mathbb{C}$ thì phép toán cộng, nhân số phức khi thu hẹp lên $\mathbb{R}$ là phép toán cộng, nhân số thực).

e) Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$ là số thực $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Nếu z được biểu diễn bởi điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hay bởi vectơ $\vec{u}$ thì $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ (khoảng cách từ M đến gốc tọa độ) và $|z| = |\vec{u}|$ (độ dài vectơ $\vec{u}$).

Rõ ràng $|z| = 0$ khi và chỉ khi $z = 0$ và nếu z là số thực thì $|z|$ là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

Dễ thử lại rằng $|zw| = |z|.|w|$ với mọi số phức z, w (nhưng ta có $|z + w| \le |z| + |w|$).

f) Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức $\bar{z} = a - bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$.

Nếu z được biểu diễn bởi điểm M trong mặt phẳng phức thì $\bar{z}$ được biểu diễn bởi điểm M' đối xứng với điểm M qua trục thực Ox.

Dễ thấy rằng với mọi số phức $z,\ w$, ta có:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w},\ \overline{zw} = \bar{z}.\bar{w}.$$

Ngoài ra cũng dễ thấy $|\bar{z}| = |z|$ với mọi số phức z, và $z.\bar{z} = |z|^2$ và nếu kí hiệu phần thực, phần ảo của z theo thứ tự là Rez, Imz thì

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

g) Cho số phức $w \neq 0$ thì với mọi số phức z, có một và chỉ một số phức z' sao cho $z = wz'$; đó chính là số phức $z' = \dfrac{1}{|w|^2} z\bar{w}$. Số phức z' được gọi là thương của z chia cho w và được viết là $\dfrac{z}{w}$. Vậy $\dfrac{z}{w} = \dfrac{1}{|w|^2} z\bar{w}$.

Để dễ nhớ phép chia z cho w, ta có thể viết $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{w\bar{w}}$.

Ví dụ : $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(1-i)^2}{1-(i)^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$.

Dễ thấy rằng $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$.

Số phức $\dfrac{1}{w}$ còn được viết là w^{-1} và gọi là (số) nghịch đảo của w. Rõ ràng

$$w^{-1}=\frac{\overline{w}}{|w|^2} \text{ và } \frac{z}{w}=z.\frac{1}{w}=z.w^{-1}.$$

Ví dụ : Vẫn kí hiệu $z^n=\underbrace{z.z...z}_{n \text{ lần}}$ với mọi số nguyên dương n thì rõ ràng vẫn có đẳng thức sau :

Khi $z\neq 1$: $1+z+z^2+z^3+...+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$

(vì dễ thử $(1+z+z^2+z^3+...+z^n)(1-z)=1-z^{n+1}$).

h) Cho số phức w thì số phức z sao cho $z^2=w$ gọi là một căn bậc hai của w. Viết $w=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R},\ i^2=-1)$, cần tìm $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R},\ i^2=-1)$ sao cho $(x+yi)^2=a+bi$, tức là tìm $(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b. \end{cases}$$

Hệ phương trình với hai ẩn số x, y đó tương đương với:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ \left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)^2=b^2 \\ bxy\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ bxy\geq 0 \end{cases}$$

Vậy khi $b=0$ tức khi w là số thực a thì

$x=\pm\sqrt{a}$, $y=0$ tức là $z=\pm\sqrt{a}$ nếu $a\geq 0$

và $x=0$, $y=\pm\sqrt{-a}$ tức là $z=\pm\sqrt{-a}\ i$ nếu $a<0$.

Khi $b>0$ thì $z=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\ i\right)$

và khi $b<0$ thì $z=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\ i\right)$.

Tóm lại : $w=0$ có đúng một căn bậc hai là 0.

$w\neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau khác 0 (hai số khác 0 có tổng bằng 0).

Ví dụ : $w=-3+4i$ có hai căn bậc hai là $\pm(1+2i)$.

Ứng dụng : Giải phương trình bậc hai $Az^2+Bz+C=0$ trong đó A, B, C là ba số phức cho trước, $A\neq 0$ (nghiệm cần tìm là số phức z).

Dễ thấy $Az^2+Bz+C=A\left(z^2+\frac{B}{A}z\right)+C=A\left(z+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2}{4A}+C$

$$=A\left(z+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A}.$$

nên nghiệm là $\frac{-B\pm\delta}{2A}$ trong đó δ là một căn bậc hai của biệt thức $\Delta=B^2-4AC$.

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm (đơn) khác nhau hoặc một nghiệm (kép).

Nói cách khác, có phân tích (với mọi z) :

$$Az^2+Bz+C=A(z-z_1)(z-z_2),$$

z_1, z_2 là hai số phức (phụ thuộc A, B, C).

Người ta chứng minh được định lí gọi là *định lí cơ bản* của đại số nêu lên một tính chất quan trọng của tập số phức $\mathbb{C}$: Mọi phương trình đa thức bậc n với hệ số phức

$$A_nz^n+A_{n-1}z^{n-1}+\ldots+A_1z^1+A_0=0$$

(A_n, A_{n-1},..., A_1, A_0 là những số phức cho trước, $A_n \neq 0, n \geq 1$) đều có ít nhất một nghiệm phức; từ đó suy ra nó có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt). Nói cách khác, có phân tích (với mọi z):

$$A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \ldots + A_1 z^1 + A_0 = A_n\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)\ldots\left(z - z_n\right)$$

(trong đó z_1, z_2,..., $z_n \in \mathbb{C}$).

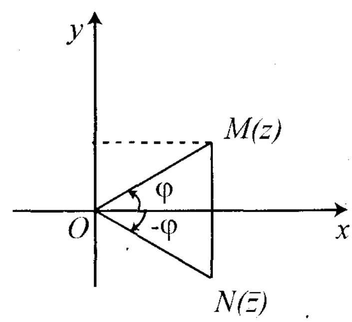
2. Dạng lượng giác của số phức

a) Argument của số phức khác 0

Nếu số phức $z \neq 0$ được biểu diễn bởi điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì số đo của góc lượng giác (Ox, OM) gọi là một argument của z. Vậy argument của $z \neq 0$ xác định sai khác $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (hình 1.1)

Rõ ràng nếu φ là một argument của số phức $z = x + yi \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$ thì $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$ nên

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$



Hình 1.1

Ngược lại, số phức $z \neq 0$ viết dưới dạng $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ với $r > 0$ thì $r = |z|$ và φ là một argument của z.

> Dạng $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ với $r > 0$ gọi là *dạng lượng giác* của số phức $z \neq 0$ (còn gọi là dạng môđun-argument của z).

Chú ý : • Người ta còn dùng kí hiệu arg$z$ để chỉ một argument của z và cũng đôi khi coi số phức $z = 0$ có argument là số thực tùy ý.

• Nếu φ là một argument của z thì $-\varphi$ là một argument của $\bar{z}$; từ đó khi $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \neq 0$ thì

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = \frac{1}{|z|}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right) = \frac{1}{|z|}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right).$$

Ví dụ : Mọi argument của $z = 1 - i$ là $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và mọi argument của

$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right)$ là $\frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác. Công thức Moivre và ứng dụng

Cho hai số phức

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)\quad (r,\ \rho,\ \varphi,\ \psi \in \mathbb{R},\ i^2 = -1)$$

thì theo công thức cộng trong lượng giác (xem lại mục I), ta có

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= r\rho[\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi)] \\ &= r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \end{aligned}$$

và từ đó, khi $w \neq 0$ (tức là $\rho \neq 0$), ta có:

$$\frac{z}{w} = z.\frac{1}{w} = \frac{r}{\rho}[\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)].$$

Như vậy : argument của tích hai số phức là tổng của các argument của hai số phức đó, còn argument của thương hai số phức là hiệu của các argument của hai số phức đó. Đây là ý nghĩa hình học (lượng giác) đẹp đẽ của tích, thương hai số phức.

Từ đó suy ra với mọi số nguyên dương n ta có:

$$z^n = \boxed{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Công thức này gọi là *công thức Moivre* (Khi $r \neq 0$, công thức đó cũng đúng cho n nguyên âm với quy ước $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. Coi $z^0 = 1$ khi $z \neq 0$).

Khi $r = 1$, ta được :

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$ (với mọi số nguyên n);

công thức này cũng được gọi là *công thức Moivre*.

Ví dụ : Để tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = \dfrac{(1-i)^2}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^3}$, ta có thể tính

$$|z| = \frac{|1-i|^2}{\left|-\sqrt{3}+i\right|^3} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$\arg z = 2\arg(1-i) - 3\arg\left(-\sqrt{3}+i\right) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\pi \ (\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

từ đó suy ra $z = -\dfrac{1}{4}$. □

Người ta thường nêu hai ứng dụng sau đây của công thức Moivre:

i) Tính căn bậc n của số phức w.

Cho số phức w và số nguyên dương n. Mỗi nghiệm của phương trình $z^n = w$ gọi là một căn bậc n của w. Rõ ràng $w = 0$ chỉ có một căn bậc n, đó là số $z = 0$.

Với $w \neq 0$, viết w dưới dạng lượng giác

$$w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ \ (r = |w| > 0).$$

Ta đi tìm $z = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, $\rho = |z| > 0$ sao cho $z^n = w$. Theo công thức Moivre, ta được

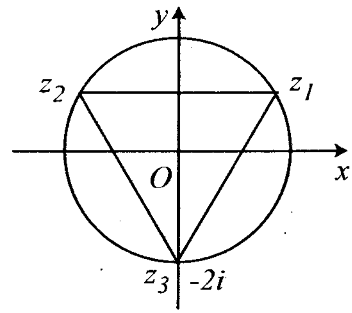
$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

và suy ra:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n}2\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Để ý rằng argument của số phức khác 0 xác định sai khác bội nguyên của 2π nên cho $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ta được n giá trị phân biệt của z. Vậy mỗi số phức $w \neq 0$ có n căn bậc n phân biệt; chúng được biểu diễn bởi các đỉnh của một n-giác đều nội tiếp đường tròn tâm tại gốc tọa độ O, bán kính $\sqrt[n]{r}$ (khi $n = 2$, đó là hai điểm đối xứng qua O : xem lại mục II.1.h).

Ví dụ : Do $w = 8i$ có một argument bằng $\frac{\pi}{2}$ nên ba căn bậc 3 của $8i$ là các số phức :



Hình 1.2

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

(xem hình 1.2)

ii) Ứng dụng vào lượng giác

Tính $\sin n\varphi, \cos n\varphi$ (n là số nguyên dương cho trước) theo các lũy thừa của $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Chẳng hạn khi $n = 3$, ta có:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (\cos\varphi)^3 + 3(\cos\varphi)^2(i\sin\varphi) + 3(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)$$

mà theo công thức Moivre thì vế trái bằng $\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$, nên suy ra:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

(xem lại phần I.2).

Tương tự, khi $n = 4$, do

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi + 4(\cos\varphi)^3(i\sin\varphi) + 6(\cos\varphi)^2(i\sin\varphi)^2 +$$

$$+4(\cos\varphi)(i\sin\varphi)^3 + (i\sin\varphi)^4$$

nên từ công thức Moivre suy ra

$$\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1, \qquad \sin 4\varphi = 8\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin\varphi.$$

c) Công thức Euler

Mọi số phức z với môđun bằng 1 đều viết được dưới dạng

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

($\varphi \in \mathbb{R}$, φ xác định sai khác $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Biểu thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ còn được viết tắt là $e^{i\varphi}$ (lũy thừa của số dương e với số mũ $i\varphi$ tương tự hình thức với lũy thừa e^n với n là số nguyên), tức là đặt $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (coi $e^0 = 1$). (Học sinh Anh, Mỹ còn viết cisφ để ghi biểu thức $\cos\varphi + i\sin\varphi$ vì các chữ cái c, i, s nhắc nhở đến cos, i, sin).

Khi đó quy tắc nhân số phức dưới dạng lượng giác được diễn tả thành

$$e^{i\varphi}.e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)},$$

quy tắc chia số phức thành

$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)},$$

và công thức Moivre trở thành

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi} \text{ (n là số nguyên).}$$

Rõ ràng $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$ và ta có :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

các công thức này được gọi là *công thức Euler*.

Ứng dụng : Với n nguyên dương cho trước, có thể tính tích $\cos^n\varphi$, $\sin^n\varphi$ theo $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, ..., $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$. Chẳng hạn:

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^4 = \cdot$$

$$=\frac{1}{2^4}\left[\left(e^{i\varphi}\right)^4+\left(e^{-i\varphi}\right)^4+4e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\left(\left(e^{i\varphi}\right)^2+\left(e^{-i\varphi}\right)^2\right)+6\left(e^{i\varphi}\right)^2\left(e^{-i\varphi}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{e^{i4\varphi}+e^{-i4\varphi}}{2}+4\frac{e^{i2\varphi}+e^{-i2\varphi}}{2}+\frac{6}{2}\right]=\frac{1}{8}(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3).$$

$$\sin^3\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)^3$$

$$=-\frac{1}{8i}\left[\left(e^{i\varphi}\right)^3-\left(e^{-i\varphi}\right)^3-3e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{e^{i3\varphi}-e^{-i3\varphi}}{2i}-3\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right]=\frac{1}{4}(-\sin 3\varphi+3\sin\varphi).$$

Chú ý :

Mọi số phức z có thể viết dưới dạng $z=|z|e^{i\varphi}$ (φ là một argument của z), dạng đó gọi là *dạng mũ của số phức* z .

BÀI TẬP

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

Sau đây là một số bài tập sử dụng các công thức lượng giác để xây dựng một số hệ thức lượng giác trong tam giác ABC.

1. Chứng minh rằng

a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

d) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

e) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

f) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

g) $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$.

SỐ PHỨC VÀ SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

2. Chứng minh rằng để tìm nghiệm thực của phương trình bậc 3 :

$$x^3+px+q=0,$$

(p, q là các hằng số thực cho trước, $p<0$, $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\le 0$),

có thể đặt $x=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos u$ rồi hãy giải phương trình bậc ba đó.

Ví dụ : Giải phương trình $x^3-3x-1=0$.

3. α là số ảo khác 0 cho trước. Chứng minh rằng số phức z thỏa mãn $\frac{z+\alpha}{z-\alpha}$ là số thực khi và chỉ khi z là số ảo khác α.

4. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $\frac{1+xi}{1-xi}$, $x\in\mathbb{R}$.

5. Chứng minh rằng với hai số phức α, β cho trước thì $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ là số ảo khi và chỉ khi $|\alpha|=|\beta|$ và $\alpha\ne\beta$.

6. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ. Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi có một trong các đẳng thức sau:

a) $\alpha+\beta j+\gamma j^2=0$, trong đó j là một nghiệm của phương trình $1+z+z^2=0$;

b) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$.

7. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt trên đường tròn đơn vị (đường tròn tâm O, bán kính 1) trong mặt phẳng tọa độ Oxy theo thứ tự biểu diễn các số phức α, β, γ.

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều khi và chỉ khi có một trong các điều kiện :

a) $\alpha+\beta+\lambda=0$

b) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$.

8. a) Cho hai số phức α, β biểu diễn bởi hai điểm phân biệt A, B trong mặt phẳng tọa độ. Chứng minh rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $\dfrac{\alpha+\beta z}{1+z}$ (trong đó z là số phức tùy ý, $|z|=1$ nhưng $z\neq-1$) là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

b) Chứng minh rằng $|z|\leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2z-i}{2+iz}\right|\leq 1$.

9. Tìm các số phức w để phương trình bậc hai đối với z sau đây

$$z^2+(w+1)z+w^2=0$$

có ít nhất một nghiệm thực.

10. Giải phương trình trên $\mathbb{C}$:

$$z^4+(z-4)^4=82.$$

11. Giải hệ phương trình ba ẩn phức z_1, z_2, z_3 sau:

$$\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ z_1+z_2+z_3=1\\ z_1z_2z_3=1\end{cases}$$

12. a) Tìm số nguyên dương n bé nhất để số phức $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^n$ là số thực (là số ảo).

b) Tìm số phức z biết $|z-1-i|=\sqrt{5}$ và argument của $z-i$ bằng $\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

c) Hỏi khi nào có số phức z mà argument của $z-2-i$ bằng $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ và một argument của $z-1$ bằng $\varphi\in\mathbb{R}$ với $\cos\varphi>0$, $\tan\varphi=l$ (l là số thực cho trước) ?

13. a) Tìm dạng lượng giác của số phức $\dfrac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}$ $(\varphi\in\mathbb{R})$ (giả sử mẫu số khác 0).

b) Tìm dạng lượng giác của số phức $(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)^8$ $(\varphi\in\mathbb{R})$.

c) Chứng minh rằng số phức z thỏa mãn $|z|=1,\ z\neq 1$ khi và chỉ khi có số thực a để $z=\dfrac{a+i}{a-i}$. Tính a khi $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

14. Dùng công thức Moivre (và công thức Euler) để tính :

a) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\varphi)+\cos(\alpha+2\varphi)+\ldots+\cos(\alpha+n\varphi)$,

$\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha+2\varphi)+\ldots+\sin(\alpha+n\varphi)$,

($\alpha,\ \varphi\in\mathbb{R}$, n nguyên dương cho trước);

b) $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi$,

$\sin\varphi+\sin 3\varphi+\sin 5\varphi+\ldots+\sin(2n-1)\varphi$,

($\alpha,\ \varphi\in\mathbb{R}$, n nguyên dương cho trước).

15. Chứng minh :

a) $z^{2n+1}-1=(z-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(z^2-2z\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$ $(z\in\mathbb{C})$

b) $z^{2n}-1=(z^2-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$ $(z\in\mathbb{C})$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, $\quad\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$,

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, $\quad\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$

(trong đó $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}u_k$ là tích các số $u_1,u_2,\ldots,u_n$).

§2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Các hàm số y = sin*x* và y = cos*x*

• Các hàm số y = sin*x* và y = cos*x* có tập xác định là $\mathbb{R}$, có tập giá trị là [–1; 1]. Hàm số y = sin*x* là hàm số lẻ, hàm số y = cos*x* là hàm số chẵn.

• Chúng là những hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở 2π. Thực vậy, số T mà $\sin(x+T)=\sin x$ với mọi x thì khi $x=\frac{\pi}{2}$, ta phải có $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, từ đó $\frac{\pi}{2}+T=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ (nhìn trên đường tròn lượng giác!), suy ra $T=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ngược lại, rõ ràng $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Tương tự, hàm số y = cos*x* có chu kì cơ sở 2π.

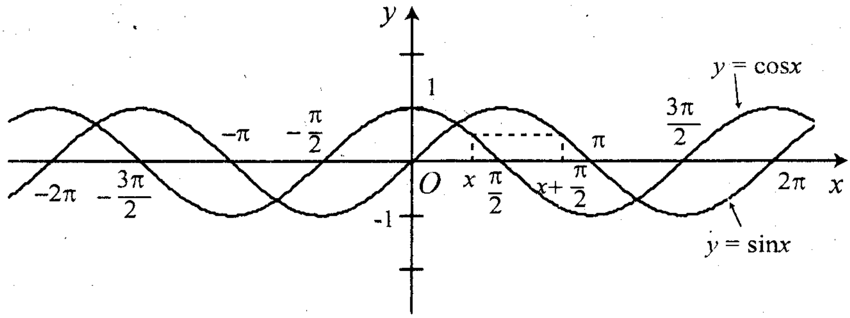
Vậy để khảo sát sự biến thiên của các hàm số này, chỉ cần xét chúng trên đoạn dài 2π.

• Với mỗi điểm *M* trên đường tròn lượng giác, gọi *H*, *K* theo thứ tự là hình chiếu của *M* trên trục hoành (trục côsin), trục tung (trục sin). Quan sát chuyển động của điểm *H*, điểm *K* khi *M* chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương một vòng, dễ thấy:

y = sin*x* đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$

y = cos*x* đồng biến trên $(-\pi;\ 0)$, nghịch biến trên $(0;\ \pi)$.

Biết các giá trị sin*x*, cos*x* tại các điểm đặc biệt $x=0,\ x=\pm\frac{\pi}{6},\ x=\pm\frac{\pi}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{3},\ x=\pm\frac{\pi}{2}$, dễ lập được bảng biến thiên của các hàm số *y* = sin*x* và $y=\cos x$ trên $[-\pi;\ \pi]$, phác họa được đồ thị của chúng rồi dùng tính chất tuần hoàn chu kì 2π của các hàm số y = sin$x$, y = cos$x$, phác họa được đồ thị của các hàm đó như trên hình 1.3



Hình 1.3

Chú ý :

Do $y = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên đồ thị của hàm số y = cos$x$ suy ra được từ đồ thị của hàm số y = sin$x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số y = sin$x$ sang trái đoạn có độ dài $\dfrac{\pi}{2}$.

• Hàm số $y = a\sin(\omega x + b) + c$ $(a,\ b,\ c,\ \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ vì

$$a\sin(\omega(x+T)+b)+c = a\sin(\omega x+b)+c,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\omega x + b + \omega T) = \sin(\omega x + b), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \omega T = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \ \Leftrightarrow T = k\frac{2\pi}{\omega}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dễ thấy tập giá trị của hàm số là $\left[-|a| + c\ ;\ |a| + c\right]$.

Đồ thị các hàm số đó có dạng tương tự đồ thị hàm số y = sin$x$ nên gọi chúng là *đường hình sin*. Rõ ràng hàm số

$$y = a\cos(\omega x + b) + c\ \ (a,\ b,\ c,\ \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$$

cũng là một hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

• Xét hàm số $y = a\sin x + b\cos x$ ($a,\ b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0$). Có thể viết

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên có $\alpha \in \mathbb{R}$ (xác định sai khác $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$) để $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, từ đó

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha).$$

Vậy $y = a\sin x + b\cos x$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở 2π, đồ thị là một đường hình sin (tập giá trị là $\left[-\sqrt{a^2+b^2};\ \sqrt{a^2+b^2}\right]$).

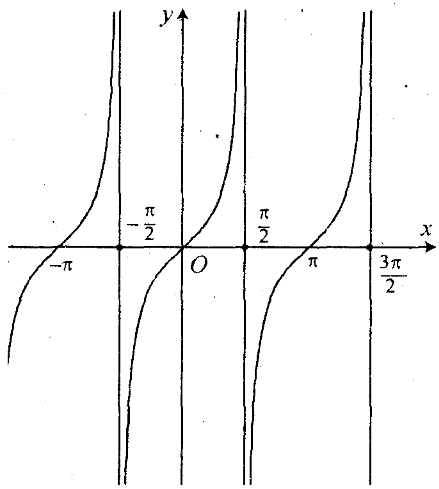
2. Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$, hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Chúng là những hàm số lẻ, có tập giá trị là $\mathbb{R}$; là những hàm số tuần hoàn với chu kì cơ sở π.

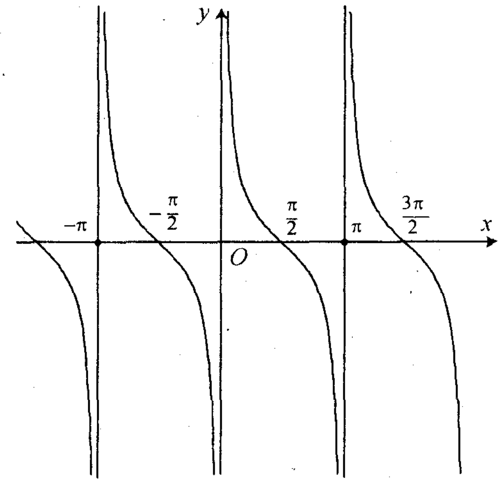
Hàm số y = $\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Đồ thị của nó nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận (tức là điểm M trên đồ thị có hoành độ càng gần $\frac{\pi}{2} + k\pi$ thì M càng xa gốc tọa độ O nhưng càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$). (Xem hình 1.4).

Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\ \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận. (Xem h.1.5).



$y = \tan x$

Hình 1.4



$y = \cot x$

Hình 1.5

3. Phương trình lượng giác cơ bản và hàm số lượng giác ngược

Các phương trình lượng giác $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$, trong đó x là ẩn số ($x \in \mathbb{R}$), m là số thực cho trước gọi là các phương trình lượng giác cơ bản.

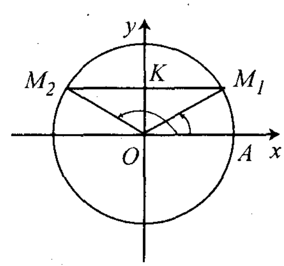
a) Phương trình sinx = m

1) Rõ ràng khi $|m| > 1$, phương trình vô nghiệm.

2) Khi $m = 1$ thì nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Khi $m = -1$ thì nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

3) Khi $|m| < 1$, xét đường tròn lượng giác gốc A, tâm O, lấy điểm K trên trục sin sao cho $\overline{OK} = m$, kẻ đường thẳng qua K vuông góc với trục sin cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1, M_2 thì số đo của mỗi góc lượng giác (OA, OM_1), (OA, OM_2) là một nghiệm của phương trình. (Xem hình 1.6).



Hình 1.6

Nếu số đo một góc lượng giác $(OA,\ OM_1)$ là α thì số đo của mọi góc lượng giác $(OA,\ OM_1)$ là $\alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ và số đo của mọi góc lượng giác $(OA,\ OM_2)$ là $\pi - \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $\sin x = m$ là

$$\{\alpha + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

và ta viết :

$$\boxed{\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

hoặc viết $\sin x = m \Leftrightarrow x = (-1)^k \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Nếu chọn M_1 thuộc phần bên phải trục tung của đường tròn lượng giác thì có thể xét số đo α của $(OA,\ OM_1)$ thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Số α đó là nghiệm duy nhất của phương trình $\sin x = m$ thỏa mãn điều kiện nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; còn được kí hiệu là $\arcsin m$ (đọc ác-xin-m).

Vậy coi $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ thì với $|m| \le 1$,

$$\boxed{x = \arcsin m \Leftrightarrow \sin x = m,\ \ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}}$$

và ta có

$$\boxed{\sin x = m \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin m + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

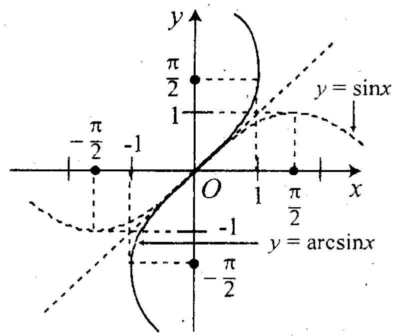
Cho m thay đổi thì $\arcsin m$ thay đổi theo và ta được hàm số (đôi khi kí hiệu m thành x, còn x thành y)

$$\begin{array}{ccc} [-1;\ 1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & y = \arcsin x. \end{array}$$

Nó là hàm số ngược của hàm số

$$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;\ 1]$$

$$x \mapsto y = \sin x.$$



Hình 1.7

(hai đồ thị của hai hàm số này (vẽ trong cùng hệ trục tọa độ) đối xứng với nhau qua đường phân giác $y = x$ của hệ tọa độ: xem hình 1.7).

Vì hàm số arcsin là hàm số (lượng giác) ngược của hàm sin nên trong máy tính còn được kí hiệu là $\sin^{-1}$.

Ví dụ : Giải phương trình $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

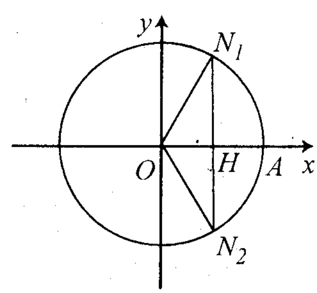
Dễ thấy $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ nên $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Phương trình cosx = m

Làm tương tự như trên đây, dễ thấy:

1) Rõ ràng khi $|m| > 1$, phương trình vô nghiệm.

2) Khi $|m| \le 1$, xét đường tròn lượng giác gốc A, tâm O, lấy điểm H trên trục côsin sao cho $\overline{OH} = m$, kẻ đường thẳng qua H vuông góc với trục côsin cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm N_1, N_2 (xem hình 1.8) thì số đo của mỗi góc lượng giác $(Ox,\ ON_1)$, $(Ox,\ ON_2)$ là một nghiệm của phương trình, từ đó suy ra nếu α là một nghiệm của phương trình $\cos x = m$ thì tập các nghiệm của nó là $\{\pm\alpha + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và viết:



Hình 1.8

$$\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dễ thấy phương trình có nghiệm duy nhất α thỏa mãn $0 \le \alpha \le \pi$. Số α đó được kí hiệu là arccos$m$ (đọc ác-cos-m).

Vậy với $|m| \le 1$, $\boxed{x = \arccos m \Leftrightarrow \cos x = m,\ 0 \le x \le \pi}$

và ta có

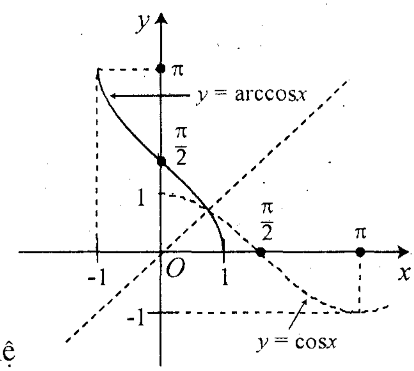
$$\boxed{\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm\arccos m + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Cho m thay đổi thì arccos$m$ thay đổi theo và ta được hàm số (đôi khi kí hiệu m thành x, còn x thành y)

$$\begin{aligned}[-1;\ 1] &\to [0;\ \pi]\\ x &\mapsto y = \arccos x.\end{aligned}$$

Nó là hàm số ngược của hàm số

$$\begin{aligned}[0;\ \pi] &\to [-1;\ 1]\\ x &\mapsto y = \cos x.\end{aligned}$$



Hình 1.9

Đồ thị của hai hàm số này (vẽ trong cùng hệ trục tọa độ) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$ (xem hình 1.9). Trong máy tính dùng kí hiệu $\cos^{-1}$ thay cho arccos.

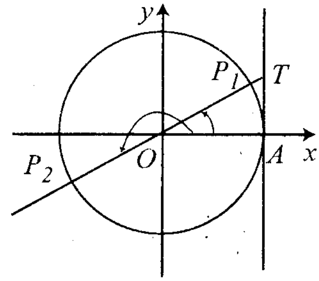
Ví dụ : Giải phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Dễ thấy $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ nên ta được

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{24} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

c) Phương trình tanx = m

Xét đường tròn lượng giác gốc A, tâm O, lấy điểm T trên trục tang sao cho $\overline{AT} = m$. Đường thẳng OT cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm P_1, P_2 đối xứng qua O, số đo của mỗi góc lượng giác $(Ox,\ OP_1)$, $(Ox,\ OP_2)$ là một nghiệm của phương trình (xem hình 1.10). Từ đó suy ra nếu α là một nghiệm của phương trình $\tan x = m$ thì tập nghiệm của phương trình đó là $\{\alpha + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ và ta còn viết :



Hình 1.10

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dễ thấy phương trình có nghiệm duy nhất α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Số α đó được kí hiệu là arctan$m$ (đọc là ác-tang-m). Vậy :

với $\forall m \in \mathbb{R}$, $\boxed{x = \arctan m \Leftrightarrow \tan x = m, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}$

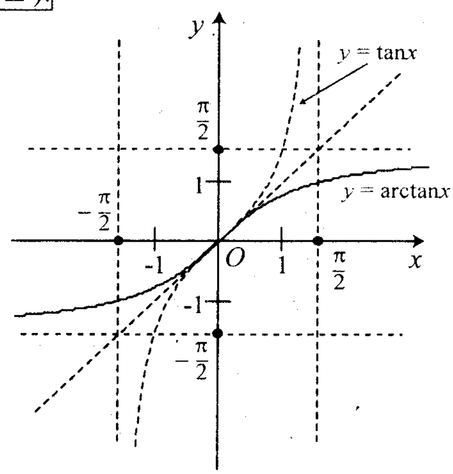
và ta có : $\boxed{\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).}$

Cho m thay đổi thì arctan$m$ thay đổi theo và ta được hàm số (đôi khi kí hiệu m thành x, còn x thành y) :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\mapsto y = \arctan x. \end{aligned}$$

Nó là hàm số ngược của hàm số

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \tan x. \end{aligned}$$



Hình 1.11

Đồ thị của hai hàm số đó (vẽ trong cùng hệ trục tọa độ) đối xứng qua đường thẳng $y = x$ (xem hình 1.11). Trong máy tính dùng kí hiệu $\tan^{-1}$ thay cho arctan.

d) Phương trình* cot*x* = *m

Khi $m = 0$, $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Khi $m \neq 0$, $\cot x = m \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{m} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{m} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Cũng có thể xét hàm số

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to (0; \pi) \\ x &\mapsto y = \operatorname{arccot} x \end{aligned}$$

(xác định bởi: $\operatorname{arccot} x = y \Leftrightarrow \cot y = x,\ 0 < y < \pi$),

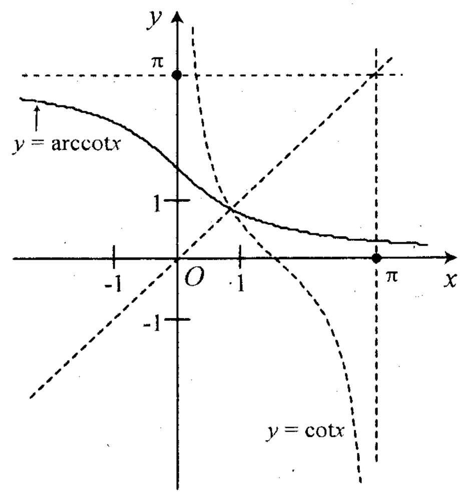
nó là hàm số ngược của hàm số

$$\begin{aligned} (0;\ \pi) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \cot x \end{aligned}$$

(Trên hình 1.12 có vẽ đồ thị hai hàm số đó).

Khi đó:

$\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



Hình 1.12

BÀI TẬP

16. Chứng minh

a) $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arccot}\frac{2}{11}$;

b) $\arctan\frac{4}{3} > \arctan\frac{1}{4} + 2\arctan\frac{1}{3}$;

c) $\arctan(-2) + \arctan(-3) = -\frac{3\pi}{4}$.

17. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, ta có

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccot}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arctan x = -\arctan(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

18. Chứng minh rằng với $x,\ y \in \mathbb{R},\ |x| \le 1,\ |y| \le 1$, ta có :

a) $\arcsin x + \arcsin y =$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ nếu } xy \le 0 \text{ hoặc } x^2+y^2 \le 1 \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ nếu } x>0, y>0, x^2+y^2>1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \text{ nếu } x<0, y<0, x^2+y^2>1. \end{cases}$$

b) $$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & \text{nếu } x+y \ge 0 \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & \text{nếu } x+y \le 0. \end{cases}$$

19. Chứng minh rằng với $x,\ y \in \mathbb{R},\ xy \ne 1$, ta có :

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan\dfrac{x+y}{1-xy} \text{ nếu } xy<1 \\ \pi + \arctan\dfrac{x+y}{1-xy} \text{ nếu } x>0, xy>1 \\ -\pi + \arctan\dfrac{x+y}{1-xy} \text{ nếu } x<0, xy>1. \end{cases}$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

I. MỘT SỐ NHẬN XÉT VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. Các bước giải một phương trình lượng giác

Giải phương trình lượng giác gồm ba bước cơ bản sau đây :

Bước 1 : Đặt điều kiện để phương trình xác định.

Bước 2 : Giải phương trình.

Bước 3 : Loại những nghiệm vi phạm điều kiện đặt ra ở bước 1. (Biểu diễn điều kiện, kết quả thu được ở bước 2 trên đường tròn lượng giác nếu cần).

Ví dụ 1. Giải phương trình $\dfrac{(\sin 3x - \sin x)(\cot^2 x - 1)}{\cos 3x + \cos x} = 0$.

Giải. Điều kiện :

$$\begin{cases}\cos 3x \neq -\cos x\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 3x \neq \cos(\pi - x)\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq -\dfrac{\pi}{2}+m\pi\\ x \neq l\pi\end{cases} \quad (k,m,l \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình đã cho tương đương hai trường hợp :

1) $\sin 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = x + 2k\pi\\ 3x = \pi - x + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

2) $\cot^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = 1\\ \cot x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x = \dfrac{3\pi}{4}+k\pi.\end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z}).$

Đối chiếu với điều kiện, ta thấy phương trình vô nghiệm. □

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{2\cos^2 x + \cos x - 1} = \sin x. \qquad (1)$$

Giải. Ta có $\qquad (1) \Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0\\ \sqrt{2\cos^2 x + \cos x - 1} = \sin x.\end{cases}$

Ta thấy nếu $\sin x < 0$ thì phương trình vô nghiệm nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \geq 0\\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0\\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = \sin^2 x.\end{cases}$$

Những x là nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + \cos x - 1 = \sin^2 x$ thì thỏa mãn $2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$ nên :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 1 - \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 3\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x = \dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x = \dfrac{2}{3} = \cos\alpha (0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}) \end{cases} \end{array} \right.$$

Ta thu được đáp số : $\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = \alpha + 2k\pi \end{array} \right.$ $(k \in \mathbb{Z})$ với $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$. □

2. Một số phương pháp giải chung

Có thể chia các phương pháp giải phương trình lượng giác thành ba loại chính.

- *Phương pháp biến đổi đẳng thức*

Trong phương pháp này, ta sử dụng các hằng đẳng thức để thu gọn phương trình hay biến đổi phương trình thành tích.

- *Phương pháp so sánh*

Ta sẽ sử dụng các bất đẳng thức đại số hay lượng giác để so sánh hai vế của phương trình và đi đến kết luận phương trình chỉ đúng khi và chỉ khi dấu đẳng thức của các bất đẳng thức xảy ra.

- *Phương pháp xét sự biến thiên*

Ta sẽ sử dụng tính chất của các hàm số để giải phương trình.

a) Phương pháp biến đổi đẳng thức

- ***Sử dụng các đẳng thức lượng giác***

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cot^3 2x + \cot x = 3 + \tan x$.

Giải. Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có đẳng thức $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\cot^3 2x + 2\cot 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\cot 2x - 1)(\cot^2 2x + \cot 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$. □

- ***Sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác và đại số***

Ví dụ 4. Giải phương trình $\quad 4\cos x - 2\sin x = 3 + \cos 2x$.

Giải. Phương trình đã cho được viết lại

$$(\cos x + \sin x) + 3(\cos x - \sin x) = 3 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x).$$

Sử dụng đẳng thức : $au + bv = ab + uv \Leftrightarrow (u-b)(v-a) = 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$(\cos x + \sin x - 3)(\cos x - \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Xét hai trường hợp :

a) $\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan\dfrac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.

Đáp số : $x = 2k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.□

Ví dụ 5. Giải phương trình $\cos 5x + \dfrac{1}{\cos x} + 4\sin 3x \sin x = 2$.

Giải. Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $\cos 5x = (\cos 5x + \cos 3x) - (\cos 3x + \cos x) + \cos x$

$$= 2\cos 4x \cos x - 2\cos 2x \cos x + \cos x.$$

Suy ra $\dfrac{\cos 5x}{\cos x} = 2\cos 4x - 2\cos 2x + 1 = 1 - 4\sin x \sin 3x$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với

$$\cos 5x + \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{\cos 5x}{\cos x} \Leftrightarrow (\cos 5x - 1)\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2k\pi}{5} \\ x = 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn điều kiện).}\square$$

2. Phương pháp so sánh

- ***Sử dụng bất đẳng thức lượng giác***

Ví dụ 6. Giải phương trình $\cos x + \cos 3x = \tan\dfrac{x}{4} + \cot\dfrac{x}{4}$.

Giải. Điều kiện : $\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

- Xét trường hợp $\tan\dfrac{x}{4} < 0$, ta có $\tan\dfrac{x}{4} + \cot\dfrac{x}{4} \leq -2$,

xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $\tan\dfrac{x}{4} = -1$, mà $\cos x + \cos 3x \geq -2$, xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $\cos x = \cos 3x = -1$.

Vậy phương trình được nghiệm đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\tan\dfrac{x}{4}=-1\\ \cos x=-1\end{cases} \Leftrightarrow x=-\pi+4k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

- Xét trường hợp $\tan\dfrac{x}{4}>0$, ta có $\tan\dfrac{x}{4}+\cot\dfrac{x}{4}\ge 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan\dfrac{x}{4}=1$, mà $\cos x+\cos 3x\le 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos x=\cos 3x=1$.

Vậy phương trình được nghiệm đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\tan\dfrac{x}{4}=1\\ \cos x=1\end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}.$$

Đáp số : $x=-\pi+4k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.□

- ***Sử dụng bất đẳng thức đại số***

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sin^4 x+\dfrac{1}{2}\cos^4 x=\dfrac{1}{3}$.

Giải. Sử dụng bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2\ge 3\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$, ta thu được

$$\sin^4 x+\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)^2\ge 3\left(\frac{\sin^2 x+\dfrac{\cos^2 x}{2}+\dfrac{\cos^2 x}{2}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin^2 x=\frac{\cos^2 x}{2}\Leftrightarrow 3\sin^2 x=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sin\alpha\\ \sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sin\beta\end{array}\right. \left(\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+2k\pi\\ x=\pi-\alpha+2k\pi\\ x=\beta+2l\pi\\ x=\pi-\beta+2l\pi\end{array}\right. \quad (k,l\in\mathbb{Z}).\square$$

Ví dụ 8. Giải phương trình $8\cot^2 x + 2\tan^8 x = 10$.

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 10 số hạng, ta có

$$\underbrace{(\cot^2 x + \cot^2 x + \ldots + \cot^2 x)}_{8 \text{ số hạng}} + (\tan^8 x + \tan^8 x) \geq 10.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cot^2 x = \tan^8 x \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

3. Phương pháp xét sự biến thiên

Ví dụ 9. Giải phương trình $\cos^3 3x - \sin^3 3x = (\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1)$.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\cos^3 3x - \sin^3 3x = \sin 3x - \cos 3x.$$

Giả sử $\cos 3x < \sin 3x \Rightarrow \cos^3 3x - \sin^3 3x < 0$, phương trình không thỏa mãn.

Giả sử $\cos 3x \geq \sin 3x \Rightarrow \cos^3 3x - \sin^3 3x \geq 0 \Rightarrow \sin 3x \geq \cos 3x$.

Vậy phương trình chỉ có nghiệm khi

$$\sin 3x = \cos 3x \Leftrightarrow \tan 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

II. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

1. Sử dụng công thức $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ để giải

Khi ta sử dụng các đẳng thức để giải phương trình, thực chất là đã thực hiện các phép biến đổi đại số, vì thế cách giải các phương trình lượng giác giống hệt cách giải một số phương trình và hệ phương trình đại số. Do đó, ở đây chúng tôi trình bày song song các phương trình lượng giác và các phương trình đại số hay hệ phương trình đại số có cách giải tương tự để các bạn dễ so sánh.

Ví dụ 10. Giải các phương trình, hệ phương trình

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = x + y. \end{cases}$

Giải. a) Ta có $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\sin x \cos x = 0.$$

Xét các trường hợp :

i) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

ii) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

iii) $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Kết hợp nghiệm, ta được đáp số : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x + y)xy = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \square$$

Ví dụ 11. Giải các phương trình, hệ phương trình

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^3 + y^3 = x - y \end{cases}$

Giải. a) Ta có $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left[2\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cos x\right] = 0.$$

* Trường hợp $\cos x = 0$ thì $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm của phương trình.

* Trường hợp $\cos x \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$, ta thu được

$$\tan^2 x - \tan x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = (x - y)(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2y^3 + yx^2 - xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y(2y^2 - xy + x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases} \qquad \square$$

Một số phương trình lượng giác được giải bằng các phép biến đổi hoàn toàn đại số. Dưới đây chúng ta xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 12. Giải các phương trình, hệ phương trình

a) $\cos^5 x - \sin^5 x = -\cos x + \sin x$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^5 - y^5 = -x + y. \end{cases}$

Giải. a) Phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$\cos^5 x + \cos x = \sin^5 x + \sin x.$$

Nếu $\cos x > \sin x$ thì vế trái > vế phải, suy ra phương trình vô nghiệm.

Nếu $\cos x < \sin x$ thì vế trái < vế phải, suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đúng khi và chỉ khi

$$\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^5 + x = y^5 + y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ đẳng thức (1) ta suy ra $x = y$.

Vậy ta được nghiệm của hệ là $\left[\begin{array}{l} x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \square \end{array}\right.$

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=1+\sqrt{\sin x\cos x}$.

Giải. Điều kiện : $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0$.

Đặt $u=\sqrt{\sin x}, v=\sqrt{\cos x}$, $(u, v \geq 0)$, ta được hệ $\begin{cases} u+v=1+uv \\ u^4+v^4=1. \end{cases}$

Ta có $1=u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2$

mà $u+v=1+uv$ nên ta có

$$1=[(1+uv)^2-2uv]^2-2u^2v^2 \Leftrightarrow 1=(u^2v^2+1)^2-2u^2v^2=u^4v^4+1 \Leftrightarrow uv=0.$$

Hệ trên tương đương với $\begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=1 \\ v=0. \end{cases}$

Vậy hệ đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \square$

Để biến đổi phương trình lượng giác, các bạn nên chú ý đến một số dạng tương đương của công thức Py-ta-go ($\sin^2 x+\cos^2 x=1$) *:*

$$\sin^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x),$$

$$\cos^2 x=(1-\sin x)(1+\sin x),$$

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}+\cos x=1 \quad (\text{khi } 1+\cos x \neq 0).$$

Ví dụ 14. Giải các phương trình

a) $\tan x=\cos x+\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

b) $\sqrt{3+\cos x}=2\cos x+\dfrac{3\sin^2 x}{1+\cos x}$

c) $\tan^2 x=\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

Giải. a) Điều kiện : $\cos x \neq 0$, $\cos x \neq -1$.

Áp dụng dạng tương đương của công thức Py-ta-go, ta có :

$$\tan x = \cos x + \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp điều kiện, được nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện $\cos x \neq -1$. Phương trình đã cho tương đương

$\cos x + \sqrt{3+\cos x} = 3 \Leftrightarrow 3 + \cos x = (3 - \cos x)^2 \Leftrightarrow \cos^2 x - 7\cos x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = 6\,(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1+\cos x}{1+\sin x} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{1-\sin x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\cos x)(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x} = 0$$

Xét các trường hợp :

a) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

b) $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ □

2. Phương trình dạng *A*sin*x* + *B*cos*x* = *C*

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ có dạng

$$A\sin x + B\cos x = C \qquad (*)$$

Có thể giải phương trình này theo cách sau :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Do $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$ nên có α sao cho

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Từ đó, (*) trở thành $\sin(x+\alpha) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $A^2 + B^2 \geq C^2$.

Ngoài cách giải trên, ta còn có thể giải bằng các cách khác.

a) Nếu $|A| = |C|$ hoặc $|B| = |C|$

Khi đó chúng ta giải phương trình nhờ hằng đẳng thức lượng giác.

Ví dụ 15. Giải các phương trình

a) $3\sin x - 2\cos x = 2$ b) $\sin x + 3\cos x = 1$.

Giải. a) Ta có

$$3\sin x - 2\cos x = 2 \Leftrightarrow 3\sin x = 2(1 + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\left(3\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Xét hai trường hợp :

- $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$.

- $3\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{2}{3} = \tan\alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = 2\alpha + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\sin x + 3\cos x = 1 \Leftrightarrow 3\cos x = 1 - \sin x$.

$$\Leftrightarrow 3\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan\dfrac{x}{2}=1\\ \tan\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}=\tan\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \dfrac{x}{2}=\alpha+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=2\alpha+2k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).\ \square$$

b) Nếu $|A| \neq |C|$, $|B| \neq |C|$

Cách giải : Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$. Khi đó $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ví dụ 16. Giải các phương trình

a) $3\sin x+\cos x=2$ b) $4\sin x+\cos x=3+\tan\dfrac{x}{2}$.

Giải. a) Nếu $x=\pi+2k\pi$ thì $\sin x=0$; $\cos x=-1$ không thỏa mãn phương trình.

Vậy $x=\pi+2k\pi$ không là nghiệm.

Xét $x\neq\pi+2k\pi$, khi đó $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$ được

$$\frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=2\Leftrightarrow 6t+1-t^2=2+2t^2\Leftrightarrow 3t^2-6t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\\ t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}.\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp :

a) $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}=\tan\alpha\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}=\alpha+k\pi\Leftrightarrow x=2\alpha+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

b) $\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}=\tan\beta\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}=\beta+k\pi\Leftrightarrow x=2\beta+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Đáp số : $x=2\alpha+2k\pi; x=2\beta+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

với $\alpha=\arctan\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$; $\beta=\arctan\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$.

b) Điều kiện : $x\neq\pi+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$. Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$, ta thu được

$$\frac{8t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=3+t \Leftrightarrow 8t+1-t^2=t^3+3t^2+t+3$$

$$\Leftrightarrow t^3+4t^2-7t+2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+5t-2)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1\ ;\ t=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Xét các trường hợp :

- $\tan\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$.
- $\tan\frac{x}{2}=\frac{-5+\sqrt{33}}{2}=\tan\alpha \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\alpha+k\pi \Leftrightarrow x=2\alpha+2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$.
- $\tan\frac{x}{2}=\frac{-5-\sqrt{33}}{2}=\tan\beta \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\beta+k\pi \Leftrightarrow x=2\beta+2k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$. □

Nhận xét : Khi giải các phương trình có điều kiện phụ thì đặt $t=\tan\frac{x}{2}$ *thường tiện lợi hơn các cách đặt khác.*

Ví dụ 17. Giải các phương trình và hệ phương trình

a) $3\sin x+|2\cos x-1|=1$

b) $\begin{cases} 3\sin x+2\cos x=1 \\ \sin x\geq\frac{1}{2}. \end{cases}$

Giải. a) Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, ta thu được

$$\frac{6t}{1+t^2}+\left|\frac{2-2t^2}{1+t^2}-1\right|=1 \Leftrightarrow \frac{6t}{1+t^2}+\frac{|1-3t^2|}{1+t^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-3t^2\geq 0 \\ 6t+1-3t^2=1+t^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-3t^2\leq 0 \\ 6t-1+3t^2=1+t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t^2\leq\frac{1}{3} \\ 4t^2-6t=0 \end{cases} \\ \begin{cases} t^2\geq\frac{1}{3} \\ 2t^2+6t-2=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải ra ta được $t=0; t=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$. Suy ra

$$\left[\begin{array}{l}\tan\dfrac{x}{2}=0\\ \tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}=\tan\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=k\pi\\ \dfrac{x}{2}=\alpha+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2k\pi\\ x=2\alpha+2k\pi.\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}$, ta thu được

$$\begin{cases}\dfrac{6t}{1+t^2}+\dfrac{2-2t^2}{1+t^2}=1\\ \dfrac{2t}{1+t^2}\geq\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6t+2-2t^2=t^2+1\\ t^2-4t+1\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t^2-4t+1\leq 0\\ 3t^2-6t-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t^2-4t+1\leq 0\\ t=1\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\end{cases} \Leftrightarrow t=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra $\quad \tan\dfrac{x}{2}=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\tan\alpha \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=\alpha+k\pi \Leftrightarrow x=2\alpha+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.□

Một số phương trình đưa về dạng $A\sin x+B\cos x=C$

Sử dụng các phép biến đổi :

a) $\sin(x+\alpha)=\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x=a\sin x+b\cos x$ $(a=\cos\alpha; b=\sin\alpha)$.

b) $\cos(x+\alpha)=\cos\alpha\cos x-\sin\alpha\sin x=a\sin x+b\cos x(a=-\sin\alpha; b=\cos\alpha)$

c) $(a_1\sin x+b_1\cos x)(a_2\sin x+b_2\cos x)$

$=a_1a_2\sin^2 x+b_1b_2\cos^2 x+(a_1b_2+a_2b_1)\sin x\cos x$

$=a_1a_2\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)+b_1b_2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)+\left(\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{2}\right)\sin 2x$

$=A\sin 2x+B\cos 2x+C.$

$(A=\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{2},\ B=\dfrac{b_1b_2-a_1a_2}{2},\ C=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{2})$

để đưa phương trình về dạng $A\sin x+B\cos x=C$.

Ví dụ 18. Giải phương trình $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin x+2\cos x=3$.

Giải. Ta có

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin x+2\cos x=3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x+\sin x+2\cos x=3$$

$$\Leftrightarrow (1+\sqrt{3})\sin x=3(1-\cos x) \Leftrightarrow 2(1+\sqrt{3})\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=6\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\left[(1+\sqrt{3})\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\right]=0.$$

Xét hai trường hợp

a) $\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=k\pi \Leftrightarrow x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

b) $\tan\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{3}=\tan\alpha \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\alpha+k\pi \Leftrightarrow x=2\alpha+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.□

Ví dụ 19. Giải các phương trình

a) $(3\sin x+\cos x)(\cos x-2\sin x)=1$

b) $4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

c) $2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin 2x=1$.

Giải. a) Ta có

$$(3\sin x+\cos x)(\cos x-2\sin x)=1 \Leftrightarrow \cos^2 x-6\sin^2 x+\sin x\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{6(1-\cos 2x)}{2}+\frac{\sin 2x}{2}=1 \Leftrightarrow 7\cos 2x+\sin 2x=7$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=14\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x-7\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \tan x=\frac{1}{7}=\tan\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\alpha+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

b) Ta có

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 2\left[\sin(2x+\frac{\pi}{2})-\sin\frac{\pi}{6}\right]=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

c) Ta có :

$$2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin 2x=1 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}+4\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x)+\frac{1}{2}+4\sin 2x=1 \Leftrightarrow \cos 2x+(8-\sqrt{3})\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow 2(8-\sqrt{3})\sin x\cos x=2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin x\left[(8-\sqrt{3})\cos x-\sin x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \tan x=8-\sqrt{3}=\tan\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\alpha+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).\ \square$$

3. Phương trình có chứa biểu thức $\sin x \pm \cos x$

Khi gặp phương trình lượng giác có chứa biểu thức $\sin x\pm\cos x$, ta có thể tìm cách rút $(\sin x\pm\cos x)$ làm thừa số chung để đơn giản phương trình. Lưu ý một số cách biến đổi sau đây :

1) $\cos 2x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$

2) $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$

3) $1+\tan x=\dfrac{1}{\cos x}(\sin x+\cos x)$

4) $1+\cot x=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x+\cos x)$

5) $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin x+\cos x$

6) $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\cos x+\sin x$

7) $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$

8) $\sin 3x - \cos 3x = (\sin x + \cos x)(4\sin x\cos x - 1)$

9) $\cot x - \tan x = 2\cot 2x = \dfrac{2(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin 2x}$

10) $1 + \dfrac{4}{3}(\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} + \cos^3\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2}) = (\sin x + \cos x)^2$

11) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x = 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$.

Ví dụ 20. Giải phương trình sau : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Hướng dẫn. Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$4\cos 2x = \sin x + \cos x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(4\cos x - 4\sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \end{array}\right. .\square$$

Ví dụ 21. Giải phương trình $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \sin 3x - \cos 3x$.

Hướng dẫn. Điều kiện $\sin 2x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$4\cos 2x = \sin 3x - \cos 3x$

$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = (\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[2\sin 2x - 1 - 4(\cos x - \sin x)\right] = 0$.

Xét các trường hợp :

a) $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$.

b) $2\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) - 1 = 0$.

Đặt $t = \cos x - \sin x, |t| \leq \sqrt{2}$, khi đó $t^2 = 1 - \sin 2x$.

Thay vào ta được : $2(1 - t^2) - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 4t - 1 = 0$. $\square$

Ví dụ 22. Giải phương trình $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=1+\tan x$.

Hướng dẫn. Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\cos 2x=\frac{1}{\cos x}(\sin x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\frac{1}{\cos x}(\sin x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[\frac{1}{\cos x}-4\cos x+4\sin x\right]=0.$$

Xét hai trường hợp :

a) $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \tan x=-1$.

b) $2\sin 2x-4\cos^2 x+1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x-2(1+\cos 2x)+1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x-2\cos 2x=1$. □

Ví dụ 23. Giải phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos 2x$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với

$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x+\sin x\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin x+1)(\cos x-1)=0$. □

4. Dạng phương trình bậc 3.1

Phương trình có dạng :

$$A\sin^3 x+B\cos^3 x+C\sin^2 x\cos x+D\cos^2 x\sin x+E\cos x+F\sin x=0$$

được gọi là phương trình bậc 3.1 (vế trái là biểu thức bậc 3.1 của $\sin x, \cos x$, tức là tổng của biểu thức thuần nhất bậc 3 và biểu thức thuần nhất bậc 1).

Phương trình được giải như sau :

Bước 1 : Thay $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ để chuyển phương trình bậc 3.1 thành phương trình thuần nhất bậc 3. Phương trình tương đương với

$$(A\sin^3 x + B\cos^3 x + C\sin^2 x\cos x + D\cos^2 x\sin x)$$
$$+(E\cos x + F\sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (A+F)\sin^3 x + (B+E)\cos^3 x + (C+E)\sin^2 x\cos x + (D+F)\cos^2 x\sin x = 0$$

Bước 2 : Chia cả hai vế của phương trình trên cho $\cos^3 x \neq 0$ (cần xét riêng trường hợp $\cos x = 0$), ta được phương trình bậc 3 của $\tan x$ như sau :

$$(A+F)\tan^3 x + (C+E)\tan^2 x + (D+F)\tan x + (B+E) = 0.$$

Ví dụ 24. Giải phương trình $\sin^3 x + 3\cos x = 3\sin^2 x\cos x + 2\sin x$.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x = (2\sin x - 3\cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x - 3\cos^3 x = 0.$$

Ta thấy $\cos x = 0$ ($\Leftrightarrow \sin x = \pm 1$) không thỏa mãn phương trình. Chia hai vế của phương trình trên cho $\cos^3 x \neq 0$, ta nhận được

$$\tan^3 x + 2\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \ \square$$

Những biểu thức

$$\sin(3x+\alpha),\ \cos(3x+\alpha),\ \sin^3(x+\alpha),\ \cos^3(x+\alpha),$$
$$\sin(x+\alpha),\ \cos(x+\alpha),\ \sin(x+\alpha)\cos(2x+\beta),\ \cos(x+\alpha)\sin(2x+\beta),$$
$$\sin(x+\alpha)\sin(2x+\beta),\ \cos(x+\alpha)\cos(2x+\beta)$$

là các biểu thức lượng giác bậc 3.1. Sử dụng các công thức biến tích thành tổng, các công thức cộng cung, ta dễ dàng chứng minh được điều đó.

Ví dụ 25. Giải phương trình $\cos 3x = \cos x + \sin x$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\cos^3 x = 4\cos x + \sin x$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x = (4\cos x + \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 4\sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = 0$$

Chia hai vế cho $\cos^3 x \neq 0$, ta nhận được :

$$\tan^3 x + 4\tan^2 x + \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x(\tan^2 x + 4\tan x + 1) = 0 . \square$$

Ví dụ 26. Giải phương trình $\cos 2x \cos x = \cos x - \sin x$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với :

$$(2\cos^2 x - 1)\cos x = \cos x - \sin x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x = (2\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x - 2\sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = 0.$$

Chia hai vế cho $\cos^3 x \neq 0$, ta nhận được :

$$\tan^3 x - 2\tan^2 x + \tan x = 0$$
$$\Leftrightarrow \tan x(\tan^2 x - 2\tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = 1.\end{array}\right. \square$$

Ví dụ 27. Giải phương trình $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = \cos x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) = \cos x$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 4\sqrt{3}\sin^3 x = (4\cos x - 3\sqrt{3}\sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^3 x + 4\sin^2 x\cos x - 3\sqrt{3}\sin x\cos^2 x = 0.$$

Chia cả hai vế cho $\cos^3 x \neq 0$, ta thu được

$$\sqrt{3}\tan^3 x + 4\tan^2 x - 3\sqrt{3}\tan x = 0 . \square$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau :

20. $\sin 2x + \frac{1}{2}\tan x = \frac{3}{2} - \cos 2x$.

21. $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = \sin x\cos x$.

22. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{1}{16}\cos^8 2x$.

23. $\cos^2 3x + \sin^2 2x + \sin 5x \sin x = \cos 5x$.

24. $\tan 3x \tan x + \tan^2 x = \tan^2 2x$.

25. $3\sin x + 4\cos x = 5 + (4\tan x - 3)^2$.

26. $\sin 3x = 64\sin^9 x - 27\sin^3 x$.

27. $\frac{8}{\sin^3 2x} + \cot x = \tan^3 x$.

28. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \sin^4 x + \cos^4 x$

29. a) $\sin x + \cos x = 1 + \sqrt{\sin x \cos x}$

b) $\cos x - \sin x = 1 + \sqrt{\sin x \cos x}$.

30. a) $2\sin x + \cos x = 1$

b) $\cos x - 3\sin x = 3$.

31. $2\sin x + \cos x = 1 + \cot\frac{x}{2}$.

32. $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x + 4\sin x = 2$

33. a) $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x = 1$

b) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin^2 x = 1$.

34. $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1 + \sin 2x$.

35. $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 1 + \cot x$.

36. $\sin^3 x - \cos^3 x = \cos x - \sin x$.

37. $\sin 3x + \cos^3 x = \cos x + \sin x$.

38. $\cos 2x \sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin x$.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Bất phương trình lượng giác cơ bản

Các bất phương trình lượng giác cơ bản là các bất phương trình dạng

$$\sin x < a,\ \cos x < a,\ \tan x < a,\ \cot x < a$$

(trong đó x là số thực cần tìm, a là số thực cho trước)

và các bất phương trình có dạng tương tự, trong đó dấu < được thay bằng $\leq$, $>$ hoặc $\geq$.

Khi giải các bất phương trình lượng giác này cần để ý :

- Sử dụng việc biểu diễn số thực trên đường tròn lượng giác hoặc sử dụng đồ thị các hàm số lượng giác cơ bản.
- Trước hết hãy xét nghiệm trên một chu kì cơ sở của các hàm số đó rồi do tính chất tuần hoàn của chúng mà biểu diễn tất cả các nghiệm.

Bài toán 1. Giải bất phương trình $\sin x < a$.

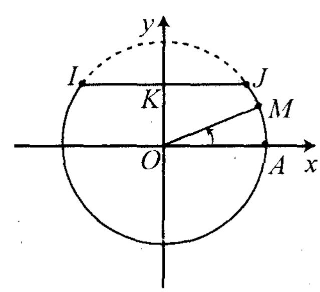
Cách giải. Rõ ràng khi $a \leq -1$ thì bất phương trình vô nghiệm ;

khi $a > 1$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ là nghiệm ;

khi $a = 1$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ không có dạng $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm.

Xét trường hợp $-1 < a < 1$.

Vẽ đường tròn lượng giác tâm O, gốc A và hệ trục tọa độ gắn với đường tròn đó (hình 1.13). Lấy điểm $K(0; a)$ trên trục tung. Kẻ đường thẳng d vuông góc với trục tung tại K; nó cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm I, J và chia đường tròn thành hai cung tròn mút I, J, một cung nằm phía trên đường thẳng d, một cung nằm phía dưới đường thẳng d.



Hình 1.13

M là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn số thực x (tức x là số đo một góc lượng giác (OA, OM)) thì dễ thấy : x thỏa mãn $\sin x < a$ khi và chỉ khi M thuộc cung lượng giác mút I, J (không kể hai điểm này) nằm phía dưới d.

Từ đó, xét x thuộc đoạn chu kì $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì

$$\sin x < a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a < x < \arcsin a$$

(nhớ lại rằng $-\frac{\pi}{2} < \arcsin a < \frac{\pi}{2}$).

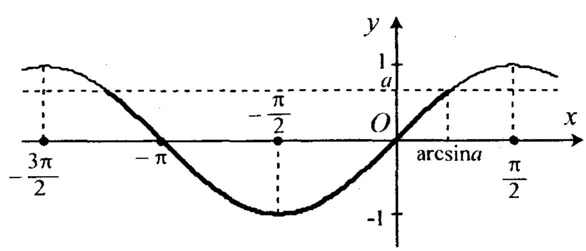
Vậy khi $-1 < a < 1$, tập nghiệm của bất phương trình $\sin x < a$ là hợp của các khoảng $(-\pi - \arcsin a + k2\pi\ ;\ \arcsin a + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Ta còn viết

$$\sin x < a \Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + k2\pi < x < \arcsin a + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).\ \square$$

Chẳng hạn : $\sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý. Khi $-1 < a < 1$, vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và đường thẳng $y = a$ (h.1.14) thì hoành độ các điểm của phần đồ thị nằm dưới đường thẳng đó (trừ hai giao điểm) cho các nghiệm của bất phương trình $\sin x < a$ mà $x \in \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



Hình 1.14

Bài toán 2. Giải bất phương trình $\sin x \geq a$, $a \in (-1;1)$.

Cách giải. Ta lập luận tương tự như trên, nhưng ở đây trước hết xét nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, khi đó dễ thấy $\sin x \geq a \Leftrightarrow \arcsin a \leq x \leq \pi - \arcsin a$.

Từ đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của các đoạn $[\arcsin a + k2\pi\ ;\pi - \arcsin a + k2\pi], k \in \mathbb{Z}$ và có thể viết :

$$\sin x \geq a \Leftrightarrow \arcsin a + k2\pi \leq x \leq \pi - \arcsin a + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\ \square$$

Chẳng hạn, $\sin x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình $\cos x \leq a$.

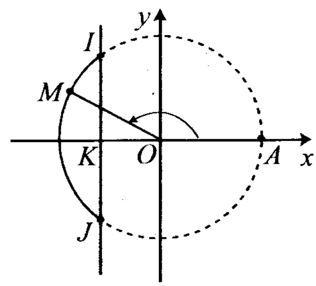
Cách giải. Rõ ràng khi $a < -1$ thì bất phương trình vô nghiệm ;

khi $a = -1$, tập nghiệm là $\{(2k+1)\pi \mid (k \in \mathbb{Z})\}$.

khi $a \geq 1$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ là nghiệm.

Xét trường hợp $-1 < a < 1$.

Vẽ đường tròn lượng giác tâm *O*, gốc *A* và hệ trục tọa độ gắn với đường tròn đó (hình 1.15). Lấy điểm $K(a;0)$ trên trục hoành. Kẻ đường thẳng *d* vuông góc với trục hoành tại *K*; nó cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm *I*, *J* và chia đường tròn thành hai cung tròn mút *I*, *J*, một cung nằm phía trái đường thẳng *d*, một cung nằm phía phải đường thẳng *d*.



Hình 1.15

M là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn số thực *x* (tức *x* là số đo một góc lượng giác (OA, OM)) thì dễ thấy *x* thỏa mãn $\cos x \leq a$ khi và chỉ khi *M* thuộc cung lượng giác mút *I*, *J* (kể cả hai điểm này) nằm phía trái d.

Từ đó, xét *x* thuộc đoạn chu kì $[0; 2\pi]$ thì

$$\cos x \leq a \Leftrightarrow \arccos a \leq x \leq 2\pi - \arccos a$$

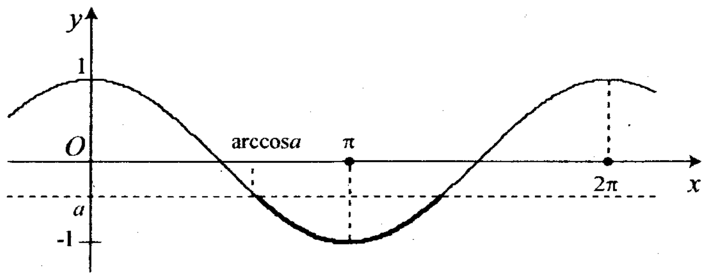
(nhớ lại rằng $0 < \arccos a < \pi$).

Vậy khi $-1 < a < 1$, tập nghiệm của bất phương trình $\cos x \leq a$ là hợp của các đoạn $[\arccos a + k2\pi\ ;\ 2\pi - \arccos a + k2\pi], k \in \mathbb{Z}$.

Ta còn viết $\cos x \leq a \Leftrightarrow \arccos a + k2\pi \leq x \leq 2\pi - \arccos a + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ $\square$

Chẳng hạn : $\cos x \leq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý. Khi $-1 < a < 1$, vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ và đường thẳng $y = a$ (h.1.16) thì hoành độ các điểm của phần đồ thị nằm dưới đường thẳng đó (kể cả hai giao điểm của đồ thị và đường thẳng) cho các nghiệm của bất phương trình $\cos x \le a$ mà $x \in [0; 2\pi]$.



Hình 1.16

Bài toán 4. Giải bất phương trình $\cos x > a$, $a \in (-1; 1)$.

Cách giải. Lập luận tương tự như trên, nhưng ở đây trước hết xét nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$, khi đó dễ thấy $\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a < x < \arccos a$.

Từ đó, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của các khoảng $(-\arccos a + k2\pi; \arccos a + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$. □

Chẳng hạn $\cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 5. Giải các bất phương trình $\tan x < a, \tan x \le a, \tan x > a, \tan x \ge a$.

Cách giải. Do trên khoảng chu kì $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \tan x$ đồng biến và có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên dễ thấy rằng với mọi số thực a cho trước, với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$:

$\tan x < a \Leftrightarrow x < \arctan a$; $\quad \tan x \le a \Leftrightarrow x \le \arctan a$

$\tan x > a \Leftrightarrow x > \arctan a$; $\quad \tan x \ge a \Leftrightarrow x \ge \arctan a$.

Vậy tập hợp các nghiệm của bất phương trình :

$\tan x < a$ là hợp của các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \arctan a + k\pi\right)$;

$\tan x \le a$ là hợp của các nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \arctan a + k\pi\right]$;

$\tan x > a$ là hợp của các khoảng $\left(\arctan a + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$;

$\tan x \geq a$ là hợp của các nửa khoảng $\left[\arctan a + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$. □

Chẳng hạn : $\tan x < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 6. Giải các bất phương trình $\cot x < a, \cot x \leq a, \cot x > a, \cot x \geq a$.

Cách giải. Do trên khoảng chu kì $(0;\pi)$, hàm số $y = \cot x$ nghịch biến và có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên dễ thấy rằng với mọi số thực a cho trước, tập hợp các nghiệm của bất phương trình :

$\cot x < a$ là hợp của các khoảng $(\operatorname{arccot} a + k\pi; (k+1)\pi)$;

$\cot x \leq a$ là hợp của các nửa khoảng $[\operatorname{arccot} a + k\pi; (k+1)\pi)$;

$\cot x > a$ là hợp của các khoảng $(k\pi; \operatorname{arccot} a + k\pi)$;

$\cot x \geq a$ là hợp của các nửa khoảng $(k\pi; \operatorname{arccot} a + k\pi]$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

Chẳng hạn : $\cot x \geq -1 \Leftrightarrow k\pi < x \leq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Một số bất phương trình lượng giác đơn giản

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $\cos\left(\dfrac{x}{4} - 1\right) \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải. Đặt $u = \dfrac{x}{4} - 1$ thì được $\cos u \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có

$$\cos u \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq u \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi,$$

tức là
$$\frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq \frac{x}{4} - 1 \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\cos\left(\dfrac{x}{4} - 1\right) \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4 + 3\pi + 8k\pi \leq x \leq 4 + 5\pi + 8k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. □

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x > 0$.

Giải. Ta có $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x < 0\\ \sin x > \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2k-1)\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các khoảng $((2k-1)\pi; 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ và các khoảng $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. □

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $12\cos^2 x + 7\sin x \le 13$.

Giải. Ta có $12\cos^2 x + 7\sin x \le 13 \Leftrightarrow 12\sin^2 x - 7\sin x + 1 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\sin x - \frac{1}{4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x \ge \frac{1}{3}\\ \sin x \le \frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\arcsin\frac{1}{3} + k2\pi \le x \le \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi\\ -\pi - \arcsin\frac{1}{4} + k2\pi \le x \le \arcsin\frac{1}{4} + k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các đoạn

$$\left[\arcsin\frac{1}{3} + k2\pi; \pi - \arcsin\frac{1}{3} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$$

và các đoạn $\left[-\pi - \arcsin\frac{1}{4} + k2\pi; \arcsin\frac{1}{4} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$. □

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$.

Giải. Ta có $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos 2x(2\cos x + 1)$.

Vậy $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x > 0\\ \cos x < -\frac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}\cos 2x < 0\\ \cos x > -\frac{1}{2}\end{cases}$

Dễ thấy $\cos 2x > 0 \Leftrightarrow x$ thuộc hợp các khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)$, $(k\in\mathbb{Z})$ với các khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{5\pi}{4}+k2\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$; còn $\cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ x thuộc hợp các khoảng $\left(\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\frac{4\pi}{3}+k2\pi\right)$, $(k\in\mathbb{Z})$. Suy ra

$$\begin{cases}\cos 2x > 0\\ \cos x < -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4}+k2\pi < x < \frac{5\pi}{4}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}).$$

Tương tự, $\cos 2x < 0 \Leftrightarrow x$ thuộc hợp các khoảng $\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)$, $(k\in\mathbb{Z})$ với các khoảng $\left(\frac{5\pi}{4}+k2\pi;\frac{7\pi}{4}+k2\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$; còn $\cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ x thuộc hợp các khoảng $\left(-\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Suy ra $\begin{cases}\cos 2x < 0\\ \cos x > -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x$ thuộc hợp các khoảng

$\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$ với các khoảng $\left(\frac{4\pi}{3}+k2\pi;\frac{7\pi}{4}+k2\pi\right)$, $(k\in\mathbb{Z})$.

Kết luận : Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{5\pi}{4}+k2\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$; $\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right),(k\in\mathbb{Z})$; $\left(\frac{4\pi}{3}+k2\pi;\frac{7\pi}{4}+k2\pi\right)$, $(k\in\mathbb{Z})$. □

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $2\sin x\cos x-(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}>0$.

Giải. Dễ thấy bất phương trình đó tương đương với

$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x > \frac{1}{2}\\ \cos x > \frac{1}{2}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin x < \frac{1}{2}\\ \cos x < \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Dùng đường tròn lượng giác, dễ thấy :

$$\begin{cases} \sin x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{, } (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{cases} \sin x < \dfrac{1}{2} \\ \cos x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k2\pi \text{, } (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các khoảng :

$\left(\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\right)$, $(k \in \mathbb{Z})$ và $\left(\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi\right)$, $(k \in \mathbb{Z})$. □

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $2\cos 2x + \sin 2x > \tan x$.

Giải. Điều kiện : $\cos x \neq 0$. Đặt $\tan x = t$ và thay $\cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ thì bất phương trình trở thành $t^3 + 2t^2 - t - 2 < 0$, tức là

$$(t-1)(t+1)(t+2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -2 \\ -1 < t < 1 \end{array}\right.$$

Vậy $\quad 2\cos 2x + \sin 2x > \tan x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x < -2 \\ -1 < \tan x < 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \arctan(-2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Từ đó, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của các khoảng

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \arctan(-2) + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

với các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. □

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $\sin(\cos x) > 0$.

Giải. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1;1]$.

Khi $\cos x \in [-1;0] \subset \left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ thì $\sin(\cos x) \le 0$.

Khi $\cos x \in (0;1] \subset \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin(\cos x) > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là tập $\{x | \cos x > 0\}$; đó là hợp các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$, $(k \in \mathbb{Z})$. □

Ví dụ 8. Giải bất phương trình $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x} > 1$.

Giải. Điều kiện của bất phương trình là $\sin x \ge 0$ và $\cos x \ge 0$. Khi đó

$\sqrt{\sin x} \ge \sin^2 x$ (và có đẳng thức nếu và chỉ nếu $\sin x = 0$ hoặc $\sin x = 1$)

$\sqrt{\cos x} \ge \cos^2 x$ (và có đẳng thức nếu và chỉ nếu $\cos x = 0$ hoặc $\cos x = 1$).

Vậy $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x} \ge \sin^2 x+\cos^2 x$, tức là $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x} \ge 1$ và có dấu đẳng thức khi và chỉ khi hoặc $\sin x = 0, \cos x = 1$ hoặc $\cos x = 0, \sin x = 1$.

Từ đó tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp các khoảng

$$\left(2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ (k \in \mathbb{Z}).\ \square$$

BÀI TẬP

Giải các bất phương trình sau :

39. $\cos 2x \sin x < 0$

40. $2\sin x\cos x-(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2} < 0$

41. $\cos 4x+\cos 2x < 0$

42. $2\tan 2x \le 3\tan x$

43. $\frac{\cos^2 2x}{\tan x} \ge 2\cos^2 x$

44. $\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 2x+\cos x} \le 2$

45. $4\sin x\sin 2x\sin 3x < \sin 4x$

46. $\sqrt{5-2\sin x} \ge 6\sin x-1$.

Chương II

THỐNG KÊ

§1. MẪU SỐ LIỆU VÀ TRÌNH BÀY MẪU SỐ LIỆU

1. Thống kê là gì ?

Những thông tin dưới dạng số liệu rất phổ biến trong khoa học và đời sống. Khi đọc một tờ báo, nghe một bản tin trên truyền hình,... chúng ta thường bắt gặp các con số thống kê.

> Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí số liệu.

Thống kê giúp ta thu thập, phân tích các số liệu một cách khoa học và rút ra các tri thức, thông tin chứa đựng trong các số liệu đó. Trên cơ sở này, chúng ta mới có thể đưa ra được những dự báo và những quyết định đúng đắn. Chính vì thế, thống kê đóng một vai trò cực kì quan trọng, một vai trò không thể thiếu trong rất nhiều hoạt động của con người, từ khoa học tự nhiên, kinh tế, nông nghiệp, y học cho tới khoa học xã hội, khoa học quản lí và hoạch định chính sách. Lenin đã từng ví von rằng thống kê giống như tai, như mắt của Nhà nước ; không có thống kê, Nhà nước như người mù và điếc. Ngay từ đầu thế kỉ 20, nhà khoa học người Anh H.D.Well đã cho rằng : "Trong tương lai không xa, kiến thức thống kê và tư duy thống kê phải trở thành một yếu tố không thể thiếu được trong học vấn phổ thông của mỗi công dân, giống như khả năng biết đọc biết viết vậy".

2. Mẫu số liệu

Ở lớp 7, ta đã làm quen với các khái niệm dấu hiệu, đơn vị điều tra và giá trị của dấu hiệu.

Chẳng hạn, trong một cuộc tổng điều tra dân số, ta cần biết về số nhân khẩu trong mỗi gia đình sống ở Hà Nội. Khi đó :

- Mỗi gia đình ở Hà Nội được gọi là một đơn vị điều tra
- Số nhân khẩu trong một gia đình được gọi là một dấu hiệu (kí hiệu là X)
- Giá trị của dấu hiệu X tại gia đình A chính là số nhân khẩu trong gia đình A.

Theo ngôn ngữ toán học, dấu hiệu X là một ánh xạ từ tập hợp tất cả các gia đình ở Hà Nội lên tập hợp các số tự nhiên.

Bây giờ ta định nghĩa khái niệm mẫu số liệu.

Định nghĩa

i) Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một *mẫu*. Số phần tử của một mẫu được gọi là *kích thước mẫu*. Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một *mẫu số liệu*. Mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là một *số liệu của mẫu*.

ii) Nếu thực hiện việc điều tra trên mọi đơn vị điều tra thì đó là điều tra toàn bộ.

iii) Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là điều tra mẫu.

Chú ý : Điều tra toàn bộ nói chung không được thực hiện khi số lượng các đơn vị điều tra quá lớn hoặc khi điều tra thì phải phá huỷ đơn vị điều tra. Người ta thường chỉ điều tra mẫu và dựa trên các thông tin thu được, phân tích, suy diễn để rút ra những kết luận và dự báo cần thiết liên quan tới toàn bộ đơn vị điều tra.

3. Trình bày một mẫu số liệu

a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Ví dụ 1

Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ/ha) của giống lúa đó trên 120 thửa ruộng có cùng diện tích 1ha. Xem xét mẫu số liệu này, điều tra viên nhận thấy :

10 thửa ruộng có năng suất 30 tạ

20 thửa ruộng có năng suất 32 tạ

30 thửa ruộng có năng suất 34 tạ

15 thửa ruộng có năng suất 36 tạ

10 thửa ruộng có năng suất 38 tạ

10 thửa ruộng có năng suất 40 tạ

5 thửa ruộng có năng suất 42 tạ

20 thửa ruộng có năng suất 44 tạ

Trong mẫu số liệu với kích thước $N = 120$ trên chỉ có 8 giá trị khác nhau là

$$30 \,;\, 32 \,;\, 34 \,;\, 36 \,;\, 38 \,;\, 40 \,;\, 42 \,;\, 44.$$

Mỗi giá trị này xuất hiện một số lần trong mẫu số liệu.

Định nghĩa

Giả sử trong một mẫu số liệu kích thước N có m giá trị khác nhau

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m .$$

i) Tần số của giá trị x_i (kí hiệu là n_i) là số lần xuất hiện của x_i trong mẫu số liệu.

ii) Tần suất của giá trị x_i (kí hiệu là f_i) là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm (%).

iii) Bảng sau đây được gọi là bảng phân bố tần số - tần suất (gọi tắt là bảng tần số - tần suất) :

Giá trị	x_1	x_2	......	x_m	
Tần số	n_1	n_2		n_m	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$
Tần suất (%)	f_1	f_2		f_m	

Chú ý : Bảng tần số - tần suất ở trên có dạng "ngang" với 3 dòng và $m + 2$ cột. Ta có thể trình bày bảng tần số - tần suất dưới dạng "dọc" (Chuyển hàng thành cột). Khi đó bảng sẽ có 3 cột và $m + 2$ dòng. Chẳng hạn bảng tần số - tần suất của mẫu số liệu trong ví dụ 1 (dạng ngang) là như sau :

Giá trị	30	32	34	36	38	40	42	44	
Tần số	10	20	30	15	10	10	5	20	$N = 120$
Tần suất (%)	8,3	16,7	25,0	12,5	8,3	8,3	4,2	16,7	

b) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Trong trường hợp ta có mẫu số liệu với kích thước lớn, ta thường thực hiện việc ghép số liệu thành các lớp sao cho mỗi số liệu thuộc vào một và chỉ một lớp. Mỗi lớp thường là một đoạn hoặc nửa khoảng. Việc phân lớp thế nào là tuỳ nhu cầu của ta trong mỗi tình huống cụ thể.

Định nghĩa

Giả sử ta xác định m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

i) Tần số của lớp C_i (kí hiệu n_i) là số số liệu của mẫu nằm trong lớp C_i.

ii) Tần suất của lớp C_i (kí hiệu f_i) là tỉ số giữa tần số n_i của lớp C_i và kích thước mẫu N

$$f_i = \frac{n_i}{N}.$$

Bảng sau đây được gọi là bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp của mẫu số liệu

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
C_1	n_1	f_1
C_2	n_2	f_2
...	...	...
C_m	n_m	f_m
	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$	

Ví dụ 2. Chọn 36 học sinh nam của một trường trung học phổ thông và đo chiều cao của họ, ta thu được mẫu số liệu sau (đơn vị : cm) :

160	161	161	162	162	162	163	163	163
164	164	164	164	165	165	165	165	165
166	166	166	166	167	167	168	168	168
168	169	169	170	171	171	172	172	174

Ta có thể ghép các số liệu trên thành 5 lớp là các đoạn

$$[160\,;\,162]\,;\,[163\,;\,165]\,;\ldots\,[172\,;\,174].$$

Khi đó ta có bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[160 ; 162]	6	16,7
[163 ; 165]	12	33,3
[166 ; 168]	10	27,8
[169 ; 171]	5	13,9
[172 ; 174]	3	8,3
	$N = 36$	

Bảng 1

Trong nhiều trường hợp, ta ghép lớp theo các nửa khoảng sao cho mút bên phải của một nửa khoảng cũng là mút bên trái của nửa khoảng tiếp theo. Chẳng hạn trong ví dụ 2 ở trên, ta có thể ghép các số liệu trên thành 5 lớp là các nửa khoảng

$$[159{,}5 ; 162{,}5) ; [162{,}5 ; 165{,}5) ; \ldots [171{,}5 ; 174{,}5).$$

Khi đó ta có bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[159,5 ; 162,5)	6	16,7
[162,5 ; 165,5)	12	33,3
[165,5 ; 168,5)	10	27,8
[168,5 ; 171,5)	5	13,9
[171,5 ; 174,5)	3	8,3
	$N = 36$	

Bảng 2

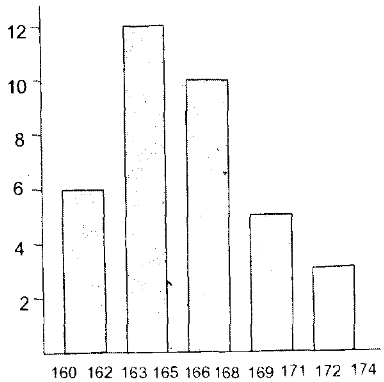
c) Biểu đồ

Tục ngữ có những câu: "Trăm nghe không bằng một thấy" ; "Một hình ảnh có giá trị hơn ngàn lời nói". Chính vì thế, để trình bày mẫu số liệu một cách trực quan sinh động, dễ nhớ và gây ấn tượng, người ta sử dụng biểu đồ. Sau đây là một số biểu đồ thông dụng nhất

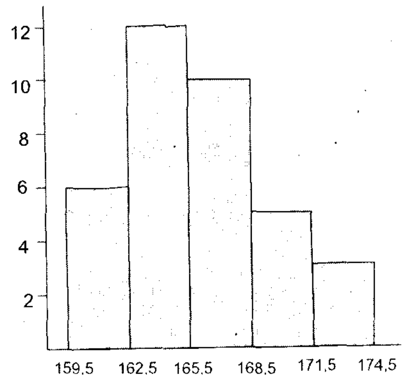
i) Biểu đồ tần số, tần suất hình cột : Đây là cách thể hiện rất tốt bảng phân bố tần số - tần suất.

Trên mỗi đoạn (hay nửa khoảng) xác định lớp, ta dựng một hình chữ nhật với đáy là đoạn đó (hay nửa khoảng đó) và chiều cao bằng tần số của lớp. Khi đó ta có biểu đồ tần số hình cột.

Hình 2.1 và hình 2.2 tương ứng là các biểu đồ tần số hình cột thể hiện bảng 1 và bảng 2. Chú ý là ở hình 2.2, giữa các cột không có khe hở.



Hình 2.1



Hình 2.2

Nếu trên mỗi đoạn (hay nửa khoảng) xác định lớp, ta dựng một hình chữ nhật với đáy là đoạn đó (hay nửa khoảng đó) và chiều cao bằng tần suất của lớp thì ta có biểu đồ tần suất hình cột.

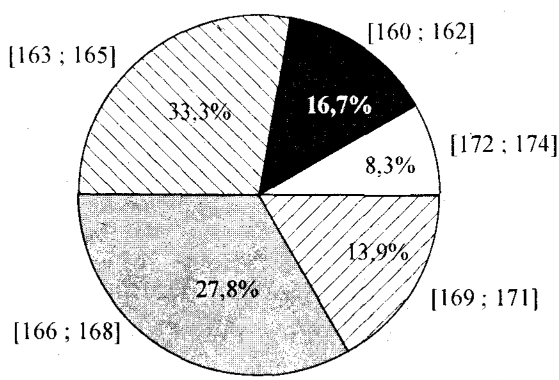
ii) Biểu đồ tần suất hình quạt

Biểu đồ hình quạt rất thích hợp cho việc thể hiện bảng phân bố tần suất ghép lớp. Hình tròn được chia thành những hình quạt. Mỗi lớp được tương ứng với một hình quạt mà diện tích của nó tỉ lệ với tần suất của lớp đó.

Ví dụ : Hình 2.3 là biểu đồ tần suất hình quạt thể hiện bảng 1. Cách vẽ như sau : lớp thứ nhất [160 ; 162] có tần suất là

$$16{,}7\% \approx 1/6.$$

Do đó hình quạt tương ứng sẽ chiếm 1/6 diện tích hình tròn. Số đo góc của hình quạt này là 1/6 của 360^o tức là 60^o. Ta dùng thước đo góc để dựng hình quạt nói trên. Tương tự, ta dựng các hình quạt cho các lớp còn lại. Hình thu được gọi là biểu đồ tần suất hình quạt thể hiện bảng 1.



Hình 2.3

BÀI TẬP

1. Điều tra về số tiền mua sách trong một năm của 40 sinh viên, ta có mẫu số liệu sau (đơn vị : nghìn đồng)

203	37	141	43	55	303	252	758	321	123
425	27	72	87	215	358	521	863	284	279
608	302	703	68	149	327	127	125	489	234
498	968	350	57	75	503	712	440	185	404

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 10 lớp. Lớp đầu tiên là đoạn [0 ; 99], độ dài mỗi đoạn là 99.

b) Lớp nào có mức chi tiêu chiếm tỉ lệ cao nhất ?

c) Có bao nhiêu phần trăm số sinh viên có mức chi tiêu cho mua sách trong khoảng từ 300 nghìn đồng tới dưới 700 nghìn đồng ?

d) Có bao nhiêu phần trăm số sinh viên có mức chi tiêu cho mua sách từ 500 nghìn đồng trở lên ?

e) Xét nhóm 12 sinh viên dùng nhiều tiền mua sách nhất. Người mua ít nhất trong nhóm này chi bao nhiêu ?

2. Bảng phân bố tần số sau đây ghi lại số vé bị ế trong 62 buổi hoà nhạc

Lớp	Tần số
[0 ; 4]	3
[5 ; 9]	8
[10 ; 14]	15
[15 ; 19]	18
[20 ; 24]	12
[25 ; 29]	6
Tổng	62

Tìm tỉ lệ phần trăm số buổi hoà nhạc có nhiều nhất 19 vé bị ế.

3. Với mỗi tỉnh, người ta ghi lại số phần trăm những trẻ mới sinh có trọng lượng dưới 2500g. Sau đây là kết quả khảo sát ở 43 tỉnh (đơn vị %)

5,1	5,2	5,2	5,8	6,4	7,3	6,5	6,9	6,6
7,6	8,6	6,5	6,8	5,2	5,1	6,0	4,6	6,9
7,4	7,7	7,0	6,7	6,4	7,4	6,9	5,4	7,0
7,9	8,6	8,1	7,6	7,1	7,9	8,0	8,7	5,9
5,2	6,8	7,7	7,1	6,2	5,4	7,4.		

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 5 lớp, lớp thứ nhất là nửa khoảng [4,5 ; 5,5).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

4. Doanh thu của 19 công ty trong năm vừa qua được cho như sau (đơn vị : triệu đồng)

17638	16162	18746	16602	17357	15420	19630
18969	17301	18322	18870	17679	18101	16598
20275	19902	17733	18405	18739		

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 6 lớp, lớp thứ nhất là nửa khoảng [15000 ; 16000).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

5. Kết quả của kì thi trắc nghiệm môn Vật lý với thang điểm 100 của 32 học sinh được cho trong mẫu số liệu sau

68	52	49	56	69	74	41	59
79	61	42	57	60	88	87	47
65	55	68	65	50	78	61	90
86	65	66	72	63	95	72	74

a) Hãy lập bảng phân bố tần số-tần suất ghép lớp gồm 6 lớp, lớp thứ nhất là nửa khoảng [40 ; 50).

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

§2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

Để nhanh chóng nắm bắt được những thông tin quan trọng chứa đựng trong mẫu số liệu, ta đưa ra một vài chỉ số gọi là các số đặc trưng của mẫu số liệu :

1. Số trung bình

Cho mẫu số liệu kích thước N : $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$.

Số trung bình của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức sau

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

- Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	......	x_m	
Tần số	n_1	n_2	....	n_m	$N=\sum_{i=1}^{m} n_i$

thì trong tổng $\sum_{i=1}^{N} x_i$ mỗi giá trị x_i xuất hiện đúng n_i lần. Thành thử công thức tính số trung bình trở thành

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{N}.$$

Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số - tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung bình theo cách sau : Giả sử các số liệu được chia thành m lớp $C_1, C_2, \ldots, C_m$, trong đó mỗi lớp C_i là một đoạn $[a_i; b_i]$ hoặc một nửa khoảng $[a_i; b_i)$. Ta gọi giá trị $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ là *giá trị đại diện* của lớp C_i. Các giá trị thuộc lớp C_i có thể coi như xấp xỉ bằng x_i. Gọi n_i là tần số của lớp C_i. Khi đó số trung bình của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$\overline{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{N}.$$

Ví dụ 1. Một nhà thực vật học đo chiều dài của 74 lá cây và trình bày mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số - tần suất sau (đơn vị : cm). Ta có bổ sung thêm một cột ghi giá trị đại diện của mỗi lớp.

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất (%)
[5,45; 5,85)	5,65	5	6,8
[5,85; 6,25)	6,05	9	12,2
[6,25; 6,65)	6,45	15	20,3
[6,65; 7,05)	6,85	19	25,7
[7,05; 7,45)	7,25	16	21,6
[7,45; 7,85)	7,65	8	10,8
[7,85; 8,25)	8,05	2	2,7
		$N = 74$	

Khi đó số trung bình của mẫu số liệu trên xấp xỉ là

$$\overline{x} \approx \frac{5 \times 5,65 + 9 \times 6,05 + \cdots + 2 \times 8,05}{74} \approx 6,8 . \square$$

Ý nghĩa của số trung bình : Số trung bình của mẫu số liệu dùng làm đại diện cho các giá trị trong mẫu số liệu.

2. Số trung vị

Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước N. Sắp xếp các số liệu trong mẫu theo thứ tự không giảm

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N .$$

+ Nếu N là một số lẻ thì số liệu $x_{\frac{N+1}{2}}$ (số liệu đứng chính giữa) được gọi là số trung vị.

+ Nếu N là một số chẵn thì trung bình cộng của $x_{\frac{N}{2}}$ và $x_{\frac{N}{2}+1}$ được gọi là số trung vị.

Số trung vị được kí hiệu là M_e.

Ví dụ 2. Một Ban giám khảo gồm 11 vị tham gia chấm điểm một kì thi. Số điểm dành cho thí sinh A của 11 vị giám khảo đó được sắp xếp từ thấp đến cao như sau (thang điểm 100)

$$0 \quad 0 \quad 63 \quad 65 \quad 69 \quad 70 \quad 72 \quad 78 \quad 81 \quad 85 \quad 89.$$

Tính số trung bình và số trung vị. Hỏi số điểm nào nên chọn để dùng làm điểm chung của Ban giám khảo cho thí sinh A ?

Giải. Dễ thấy số trung bình $\overline{x} \approx 61,1$ và số trung vị là 70.

Quan sát dãy điểm trên, ta thấy hầu hết các giám khảo (9 vị) đều cho điểm cao hơn số trung bình. Mặt khác có đúng một nửa số giám khảo cho điểm trên số trung vị. Vậy ta nên lấy số trung vị 70 làm số điểm chung của Ban giám khảo. □

Chú ý : Khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch rất lớn với nhau thì số trung bình và số trung vị cũng khác biệt lớn. Khi đó số trung bình không đại diện tốt cho các số liệu trong mẫu, số trung vị làm đại diện tốt hơn.

Ví dụ 3. Điều tra về số học sinh trong 28 lớp học và sắp xếp theo thứ tự tăng dần, ta thu được mẫu số liệu sau :

38	39	39	40	40	40	40	40	40	41
41	41	42	42	43	43	43	43	44	44
44	44	44	45	45	46	47	47		

Tính số trung bình và số trung vị. So sánh hai số đó.

Giải. Dễ thấy số trung bình $\overline{x} \approx 42,32$. Số liệu đứng thứ 14 là 42; số liệu đứng thứ 15 là 43. Vậy số trung vị là

$$M_e = \frac{42+43}{2} = 42,5.$$

Ta thấy số trung bình và số trung vị xấp xỉ nhau. □

Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch rất lớn với nhau thì số trung bình và số trung vị xấp xỉ nhau.

• Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số - tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung vị theo cách sau :

Giả sử mẫu số liệu kích thước N được chia làm m lớp, trong đó mỗi lớp là một nửa khoảng có độ dài h

Lớp	Tần số
$[a_1; a_2)$	n_1
$[a_2; a_3)$	n_2
...	...
...	...
...	...
$[a_m; a_{m+1})$	n_m
	N

kí hiệu $S_l = \sum_{i=1}^{l} n_i$.

Ta xác định số nguyên dương k thoả mãn bất đẳng thức

$$S_{k-1} < \frac{N}{2} \le S_k$$

tức là trong dãy $S_1 < S_2 < \cdots < S_m = N$

k là số nguyên dương đầu tiên thoả mãn $S_k \ge \frac{N}{2}$.

Đặt $p = \frac{N}{2} - S_{k-1}$. Khi đó số trung vị được tính xấp xỉ bởi công thức

$$M_e \approx a_k + \frac{hp}{n_k}.$$

Ví dụ 4. Mẫu số liệu ghi lại trọng lượng của 96 quả táo (đơn vị : gam) được trình bày trong bảng phân bố tần số - tần suất sau

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[85,5 ; 87,5)	13	13,5
[87,5 ; 89,5)	16	16,7
[89,5 ; 91,5)	14	14,6
[91,5 ; 93,5)	27	28,1
[93,5 ; 95,5)	14	14,6
[95,5 ; 97,5)	12	12,5
	$N = 96$	

Tính gần đúng số trung vị.

Giải. Ta có $\frac{N}{2} = \frac{96}{2} = 48$.

Ta có $13 + 16 + 14 = 43 < 48$ và $13 + 16 + 14 + 27 = 70 > 48$ nên $k = 4$.

Ta có $a_4 = 91,5; n_4 = 27$.

Khi đó $p = 48 - 43 = 5$. Độ dài khoảng ở mỗi lớp là h = 2. Vậy

$$M_e \approx a_4 + \frac{hp}{n_4} = 91,5 + \frac{10}{27} \approx 91,87. \square$$

3. Mốt

Cho mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số :

Giá trị	x_1	x_2	......	x_m	
Tần số	n_1	n_2	......	n_m	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là M_0.

$M_0 = x_k$ nếu $n_k \geq n_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$.

Chú ý. Từ định nghĩa ta thấy một mẫu số liệu có thể có một hay nhiều mốt.

Ví dụ 5. Một cửa hàng bán 6 loại quạt với giá tiền là 100, 150, 300, 350, 400, 500 (đơn vị: nghìn đồng). Trong mùa hè vừa qua, cửa hàng bán được 2152 chiếc và sổ bán hàng thống kê như sau :

Loại quạt	100	150	300	350	400	500	
Số quạt bán được	256	353	534	300	534	175	$N = 2152$

Tính số trung bình và mốt của mẫu số liệu trên. Nêu ý nghĩa.

Giải. Số trung bình là 290,491 đồng. Đó là giá trung bình của một chiếc quạt được bán ra ở cửa hàng.

Ta thấy mẫu số liệu trên có hai mốt là 300 và 400 (tương ứng với cùng tần số là 534). Đó là giá tiền của hai loại quạt được khách hàng mua nhiều nhất.

Cục thuế thì quan tâm tới giá trung bình một chiếc quạt được bán ra để từ đó xác định doanh thu của cửa hàng. Song điều mà chủ cửa hàng quan tâm nhất là : Loạt quạt nào được nhiều người mua nhất ? Đó là loại quạt giá 300 nghìn đồng và 400 nghìn đồng. □

• Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số - tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng mốt theo cách sau :

Giả sử mẫu số liệu kích thước N được chia làm m lớp, trong đó mỗi lớp là một đoạn hoặc một nửa khoảng. Ta xác định lớp có tần số cao nhất và giá trị đại diện của lớp có tần số cao nhất này được xem là mốt của bảng phân bố tần số ghép lớp.

Ví dụ 6. Tính mốt của bảng phân bố tần số trong ví dụ 4.

Giải. Lớp có tần số lớn nhất là [91,5 ; 93,5). Do đó

$$M_0 = \frac{91,5 + 93,5}{2} = 92,5\,. \ \square$$

4. Phương sai và độ lệch chuẩn

Cho mẫu số liệu kích thước N là $\{ x_1, x_2, ..., x_N \}$ có $\overline{x}$ là số trung bình.

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s^2, được tính bởi công thức sau

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N}. \qquad (1)$$

Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là s, được gọi là độ lệch chuẩn

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N}}.$$

Chú ý : Phương sai có thể tính theo công thức sau đây

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \frac{C}{N} - \frac{B^2}{N^2}} \qquad (2)$$

ở đó $B = \sum_{i=1}^{N} x_i$; $C = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$.

Công thức này thường được sử dụng trong tính toán.

Thật vậy ta có $B = N\overline{x}$. Vậy

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 = C - 2B\overline{x} + N\overline{x}^2 = C - 2N\overline{x}^2 + N\overline{x}^2 = C - N\overline{x}^2 = C - \frac{B^2}{N}$$

Suy ra $$s^2 = \frac{C}{N} - \frac{B^2}{N^2} \square$$

- Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	......	x_m	
Tần số	n_1	n_2	......	n_m	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$

thì trong tổng $\sum_{i=1}^{N} x_i$ và $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$, mỗi giá trị x_i xuất hiện đúng n_i lần. Thành thử công thức tính phương sai (2) trở thành

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2}$$

Ví dụ 7. Sản lượng lúa (đơn vị: tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số - tần suất sau :

Giá trị	20	21	22	23	24	
Tần số	5	8	11	10	6	$N = 40$
Tần suất (%)	12,5	20	27,5	25	15	

a) Tính số trung bình.

b) Tính số trung vị và mốt.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải:

a) Ta có $\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = 884$. Vậy $\overline{x} = \frac{884}{40} = 22,1$.

b) Ta có $x_{20} = x_{21} = 22$. Vậy $M_e = 22$.

Dễ thấy $M_0 = 22$.

c) Ta có $$\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 = 19598.$$

Vậy $$s^2 = \frac{19598}{40} - \frac{884^2}{40^2} = 1,54.$$

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{1,54} \approx 1,24$. □

• Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số - tần suất ghép lớp thì ta thường tính gần đúng số trung bình theo cách sau : Các số liệu được chia thành m lớp $C_1, C_2, ..., C_m$, trong đó mỗi lớp C_i là một đoạn $[a_i; b_i]$ hoặc một nửa khoảng $[a_i; b_i)$. Ta gọi giá trị $x_i = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ là giá trị đại diện của lớp C_i. Các giá trị thuộc lớp C_i có thể coi như xấp xỉ bằng x_i. Gọi n_i là tần số của lớp C_i. Khi đó phương sai của mẫu số liệu này được tính xấp xỉ theo công thức

$$s^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2.$$

Ví dụ 8.

Tính gần đúng phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu nêu trong ví dụ 1.

Giải. Ta có

$$\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 502,9$$

$$\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 = 3443,385$$

Vậy

$$s^2 \approx \frac{3443,385}{74} - \frac{502,9^2}{74^2} \approx 0,347.$$

$$s \approx \sqrt{0,347} \approx 0,589. \square$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

Từ công thức tính phương sai trong định nghĩa ta thấy phương sai là trung bình cộng của bình phương khoảng cách từ mỗi số liệu tới số trung bình. Như vậy phương sai đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị (thứ nguyên) thì đơn vị của phương sai là bình phương đơn vị của số liệu.

Độ lệch chuẩn là căn bậc hai của phương sai, do đó nó cũng là một số đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Khi số liệu có đơn vị (thứ nguyên) thì độ lệch chuẩn và số liệu có cùng đơn vị.

BÀI TẬP

6. Số tiền điện phải trả (đơn vị : nghìn đồng) của 50 hộ trong khu phố A được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây

Lớp	Tần số
[375 ; 449)	6
[450 ; 524)	15
[525 ; 599)	10
[600 ; 674)	6
[675 ; 749)	9
[750 ; 824)	4

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

7. Thời gian để 30 con chuột thoát khỏi mê cung trong một thí nghiệm về động vật được ghi lại như sau (đơn vị : phút)

1,97	0,6	4,02	3,20	1,15	6,06	4,44	2,02	3,37	3,65
1,74	2,75	3,81	9,70	8,29	5,63	5,21	4,55	7,60	3,16
3,77	5,36	1,06	1,71	2.47	4,25	1,93	5,15	2,06	1,65

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp với 6 lớp, lớp thứ nhất là [0,595 ; 2,115).

b) Tính số trung bình $\overline{x}$ và độ lệch chuẩn s.

c) Có bao nhiêu phần trăm số liệu nằm trong khoảng ($\overline{x} - s$; $\overline{x} + s$) ? trong khoảng ($\overline{x} - 2s$; $\overline{x} + 2s$) ?

8. Người ta chọn một số bút bi của hai hãng sản xuất A, B và thử xem sử dụng bao nhiêu giờ thì hết mực. Kết quả thu được như sau (đơn vị : giờ) :

Loại bút A : 23 25 27 28 30 35.

Loại bút B : 16 22 28 33 46.

a) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn về thời gian sử dụng của mỗi loại bút.

b) Giả sử hai loại bút trên có cùng một giá. Dựa vào sự khảo sát trên, ta nên mua loại bút nào ?

9. Trạm kiểm soát giao thông trên đường cao tốc đo tốc độ của 50 chiếc ôtô và thu được kết quả sau (đơn vị : km/h) :

74	66	65	55	48	56	50	65	75	67
76	68	50	65	60	65	60	51	68	76
68	77	63	65	52	52	63	65	80	70
65	81	71	63	53	45	65	55	71	64
55	70	64	45	66	64	40	66	55	71.

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp với 9 lớp, lớp đầu tiên là [39,5 ; 44,5).

b) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn (xấp xỉ) dựa trên bảng phân bố tần số này.

10. Tại các trường PTTH của tỉnh A, số học sinh trung bình trong mỗi lớp của khối 10 là 41, của khối 11 là 37 và của khối 12 là 23.

Biết rằng số học sinh trung bình mỗi lớp của khối 11+12 là 29; số học sinh trung bình mỗi lớp của khối 10+12 là 33.

i) Chứng minh rằng số lớp 10 bằng 1,25 lần số lớp 12 và số lớp 11 bằng 0,75 lần số lớp 12.

ii) Tìm số học sinh trung bình mỗi lớp của khối 10 + 11.

Chương III

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

PHẦN 1.

TỔ HỢP

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

Tiết này trình bày hai quy tắc đếm cơ bản, nhờ đó có thể tính chính xác và nhanh chóng số phần tử của một tập hợp mà không cần đếm trực tiếp bằng cách liệt kê

1. Quy tắc cộng

a) Quy tắc cộng

Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng sau :

i) Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và có m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n + m$ cách.

ii) Một cách tổng quát, giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Phương án A_i có n_i cách thực hiện ($i = 1, 2, \ldots, k$). Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách.

b) Tính số phần tử của hợp hai tập hợp

Bản chất toán học của quy tắc cộng i) là công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp không giao nhau :

Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau thì

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Một cách tổng quát, bản chất toán học của quy tắc cộng ii) là công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau.

Quy tắc cộng cho nhiều tập hợp đôi một không giao nhau được phát biểu như sau :

Cho n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ *đôi một không giao nhau. Khi đó*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp hai tập hợp bất kì (có thể không rời nhau). Khi đó ta có :

Định lí 1 *(Công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp bất kì)*

Cho A và B là hai tập hợp hữu hạn bất kì. Khi đó ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1)$$

Chứng minh. Chú ý rằng B và $A \setminus B$ là hai tập hợp không giao nhau và $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ nên

$$|A \cup B| = |B| + |A \setminus B|. \quad (2)$$

Mặt khác $A \cap B$ và $(A \setminus B)$ là hai tập hợp không giao nhau và $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ nên $|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|$, do đó :

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được (1). □

Ví dụ 1. Một lớp học có 25 học sinh học khá môn Toán, 24 học sinh học khá môn Ngữ văn, 10 học sinh học khá cả môn Toán và môn Ngữ văn và 3 học sinh không học khá cả môn Toán lẫn môn Ngữ văn. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh ?

Giải. Gọi A là tập hợp các học sinh học khá môn Toán, B là tập hợp các học sinh học khá môn Ngữ văn. Theo bài ra ta có

$$|A| = 25 ; \quad |B| = 24 ;$$

$$|A \cap B| = 10.$$

Khi đó $A \cup B$ là tập hợp các học sinh học khá môn Toán hoặc môn Ngữ văn.

Theo định lí 1 ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 24 - 10 = 39.$$

Vậy lớp học có 39 + 3 = 42 học sinh. □

c) Tính số phần tử của hợp ba tập hợp

Với ba tập hợp bất kì, ta có định lí sau :

Định lí 2 *(Công thức tính số phần tử của hợp ba tập hợp bất kì)*

Cho A, B, C là ba tập hợp. Khi đó

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \quad (4)$$

Chứng minh. Theo định lí 1 ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \quad (5)$$

Mặt khác cũng theo định lí 1

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C| \quad (6)$$

và $|A \cap (B \cup C)| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|$

$$= |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|. \quad (7)$$

Thay (6) và (7) vào (5) ta được (4). □

Ví dụ 2. Trong một kì thi đại học, trong số các thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A có 51 em đạt điểm giỏi môn Toán, 73 em đạt điểm giỏi môn Vật lí, 64 em đạt điểm giỏi môn Hoá học, 32 em đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 45 em đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hoá học, 21 em đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hoá học và 10 em đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí, Hoá học. Có 767 em mà cả ba môn đều không có môn nào đạt điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A ?

Giải. Kí hiệu A, B, C tương ứng là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi môn Toán, Vật lí và Hoá học. Theo bài ra ta có :

$|A| = 51$; $|B| = 73$; $|C| = 64$;

$|A \cap B| = 32$; $|B \cap C| = 45$; $|A \cap C| = 21$; $|A \cap B \cap C| = 10$.

Khi đó $A \cup B \cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn Toán, Vật lí và Hoá học. Theo định lí 2 ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 51 + 73 + 64 - 32 - 45 - 21 + 10 = 100.$$

Vậy số thí sinh dự thi vào trường Đại học Sư phạm ở khối A là 100 + 767 = 867. □

2. Quy tắc nhân

a) Quy tắc nhân

i) Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

ii) Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, \dots, A_k$. Giả sử rằng công đoạn A_1 có thể làm theo n_1 cách. Với mỗi $i \geq 2$ và với mỗi cách thực hiện các công đoạn $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ thì công đoạn A_i có thể thực hiện theo n_i cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 n_2 \dots n_k$ cách.

b) Tính số phần tử của tích Descartes của hai tập hợp

Giả sử công đoạn đầu có thể tiến hành theo n cách : $a_1, a_2, \dots, a_n$. Công đoạn thứ hai có thể tiến hành theo m cách $b_1, b_2, \dots, b_m$.

Như vậy nếu công đoạn đầu tiến hành theo cách a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), công đoạn thứ hai tiến hành theo cách b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) thì việc thực hiên công việc được mô tả bởi cặp (a_i, b_j).

Thành thử tập hợp tất cả các cách thực hiện công việc được mô tả bởi tập hợp tất cả các cặp $\{(a_i, b_j)\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$), tức là tích Descartes $A \times B$ của hai tập hợp A và B.

Như vậy bản chất toán học của quy tắc nhân là :

Định lí 3

> Số phần tử của tích Descartes $A \times B$ của hai tập hợp hữu hạn A và B bằng số phần tử của A nhân với số phần tử của B
>
> $$|A \times B| = |A|.|B|.$$

c) Tính số phần tử của tích Descartes của nhiều tập hợp

Một cách tổng quát, bản chất toán học của quy tắc nhân ii) cho công việc nhiều công đoạn là công thức tính số phần tử của tích Descartes của nhiều tập hợp.

Định lí 4

> Cho k tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$. Tập hợp tất cả các bộ $\{(a_1, a_2, ..., a_k)\}$ với $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ được gọi là tích Descartes của k tập hợp $A_1, A_2, ..., A_k$ và kí hiệu là $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$. Ta có quy tắc nhân sau đây
>
> $$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_k| = |A_1||A_2|...|A_k|.$$

Chứng minh định lí 4 dễ dàng bằng phương pháp quy nạp, sử dụng nhận xét

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_k \times A_{k+1} = (A_1 \times A_2 \times ... \times A_k) \times A_{k+1}.$$

Ví dụ 3. Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{0 ; 1\}$.

Khi đó các phần tử của tích Descartes $A \times B \times C$ là

$$A \times B \times C = \{(a,x,0) ; (a,x,1) ; (a,y,0) ; (a,y,1) ; (b,x,0) ; (b,x,1) ; (b,y,0) ; (b,y,1) ; (c,x,0) ; (c,x,1) ; (c,y,0) ; (c,y,1)\}.$$

Số phần tử của $A \times B \times C$ là 3.2.2 = 12. □

BÀI TẬP

1. Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá 1000 mà chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5.

2. Trong một khu phố gồm 53 hộ, thống kê cho thấy có 30 hộ đặt mua báo A, 18 hộ đặt mua báo B và 26 hộ đặt mua báo C. Có 9 hộ đặt mua báo A và B ; 16 hộ đặt mua báo A và C; 8 hộ đặt mua báo B và C. Có 47 hộ đặt mua ít nhất một tờ báo. Hỏi :

a) Có bao nhiêu hộ không mua tờ báo nào ?

b) Có bao nhiêu hộ mua cả ba tờ báo ?

c) Có bao nhiêu hộ mua báo A và B nhưng không mua báo C ?

d) Có bao nhiêu hộ chỉ mua báo A mà không mua báo B và C ?

3. Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai người phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau ?

4. Tìm số các số nguyên dương không lớn hơn 1000 mà chia hết cho 4 hoặc cho 7.

5. Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả sau :

Bộ phim A có 28 người đã xem ;

Bộ phim B có 26 người đã xem ;

Bộ phim C có 14 người đã xem ;

Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B ;

Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C ;

Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C ;

Có 2 người xem cả ba bộ phim A, B, C.

Xác định số người không đi xem bất cứ phim nào trong ba bộ phim ấy.

6. Trong một trường có ba câu lạc bộ (CLB) Toán, Văn và Ngoại ngữ. Có 28 học sinh tham gia ít nhất một trong ba CLB. Biết rằng :

a) Số học sinh chỉ tham gia CLB Toán, Văn bằng số học sinh chỉ tham gia duy nhất CLB Toán.

b) Số học sinh chỉ tham gia CLB Văn, Ngoại ngữ gấp 5 lần số học sinh tham gia cả ba CLB.

c) Có 6 học sinh chỉ tham gia CLB Toán, Ngoại ngữ.

d) Không có học sinh nào chỉ tham gia duy nhất một CLB Văn hoặc duy nhất một CLB ngoại ngữ.

e) Số học sinh tham gia cả ba CLB là một số nguyên dương chẵn.

Hãy tìm số học sinh chỉ tham gia CLB Toán và Văn và số học sinh tham gia cả ba CLB.

7. Một con bò có thể mang virut A, virut B hoặc virut C ; có thể mang đồng thời hai hoặc nhiều hơn các virut nói trên ; và cũng có thể không mang virut nào. Trong bản báo cáo của một nông trường nuôi bò cho biết :

"Kiểm tra 1200 con bò thì có 675 con có virut A ; 682 con có virut B ; 684 con có virut C ; 195 con có virut A và B ; 467 con có virut A và C ; 318 con có virut B và C ; 165 con có virut A, B, C".

Hãy chỉ ra rằng các số liệu trong báo cáo là không chính xác.

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

1. Hoán vị

Định nghĩa

> Cho tập hợp A có n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự cho ta một hoán vị của tập hợp A.
>
> Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là P_n.

Định lí 1

> $$P_n = n! = n(n-1)...2.1.$$

Chứng minh. Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A có n phần tử là công việc gồm n công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất : có n cách thực hiện. Sau khi thực hiện công đoạn 1, công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai : có $n-1$ cách thực hiện. Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ 1, 2, ..., $i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i : có $n-i+1$ cách thực hiện.

Công đoạn cuối cùng (công đoạn thứ n) có 1 cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $n(n-1)....2.1 = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị. □

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa

> Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên dương k với $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).
>
> Số các chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là A_n^k.

Nhận xét : Từ định nghĩa, ta thấy một hoán vị của tập hợp A có n phần tử là một chỉnh hợp chập n của A.

Định lí 2

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Chứng minh : Việc thiết lập một chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là công việc gồm k công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất : có n cách thực hiện. Sau khi thực hiện công đoạn 1, công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai : có $n - 1$ cách thực hiện. Sau khi thực hiện xong $i - 1$ công đoạn (chọn $i - 1$ phần tử của A vào các vị trí thứ 1, 2, ..., $i - 1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i : có $n - i + 1$ cách thực hiện. Công đoạn cuối cùng (công đoạn thứ k) có $n - k + 1$ cách thực hiện.

Theo quy tắc nhân, ta có $n(n - 1)...(n - k + 1)$ cách lập một chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử, tức là có $n(n - 1)...(n - k + 1)$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử. □

3. Tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên dương k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con có k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là C_n^k.

Định lí 3

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa, ta có mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Do đó, từ một tổ hợp chập k của A, ta lập được k! chỉnh hợp chập k của A. Vậy $A_n^k = k!C_n^k$ hay $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. □

Chú ý. Ta quy ước $0! = 1$ và $C_n^0 = A_n^0 = 1$.

Với quy ước đó thì định lí 2 và 3 đúng cho cả $k = 0$ và $k = n$.

Định lí 4 *(Hai tính chất cơ bản của số C_n^k)*

a) Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$. Khi đó

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

b) *(Hằng đẳng thức Pascal)*

Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Khi đó

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Chứng minh

a) Suy ra từ công thức $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \ \square \end{aligned}$$

4. Một số ví dụ

Ví dụ 1

a) Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm 6 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu vectơ (khác vectơ 0) có điểm đầu và điểm cuối thuộc P ?

b) Trong mặt phẳng cho một tập hợp Q gồm 7 điểm phân biệt, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh đều thuộc Q ?

Giải.

a) Mỗi vectơ được xác định bởi một cặp (A, B) trong đó A là điểm đầu, B là điểm cuối. Vậy số vectơ cần tìm là $A_6^2 = 30$.

b) Mỗi tam giác tương ứng duy nhất với một tập con 3 điểm của Q. Vậy số tam giác cần tìm là $C_7^3 = 35$. □

Ví dụ 2. Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ đi tham gia chiến dịch "Mùa hè xanh" của Đoàn. Hỏi thầy có bao nhiêu cách chọn ?

Giải. Ta có C_{20}^4 cách chọn 4 học sinh nam và có C_{15}^3 cách chọn 3 học sinh nữ. Theo quy tắc nhân, số cách chọn 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ là

$$C_{20}^4 . C_{15}^3 = 2204475. \square$$

Ví dụ 3. Chứng minh hằng đẳng thức

$$C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2$$

a) Bằng biến đổi đại số

b) Bằng suy luận tổ hợp.

Giải

a) Ta có $2C_n^2 + n^2 = n(n-1) + n^2 = n(2n-1) = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = C_{2n}^2$.

b) Xét hai tập B và C không giao nhau, mỗi tập gồm n phần tử. Đặt $A = B \cup C$.

Để chọn ra hai phần tử của A, ta có thể thực hiện theo một trong ba phương án sau :

+ Phương án 1 : Chọn hai phần tử của B.

Phương án này có thể thực hiện theo C_n^2 cách.

+ Phương án 2 : Chọn hai phần tử của C.

Phương án này có thể thực hiện theo C_n^2 cách.

+ Phương án 3 : Gồm hai công đoạn : Chọn một phần tử của B (có n cách chọn) rồi chọn tiếp một phần tử của C (có n cách chọn).

Theo quy tắc nhân, phương án 3 có $n.n = n^2$ cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, ta có $C_n^2 + C_n^2 + n^2 = 2C_n^2 + n^2$ cách chọn hai phần tử của A.

Mặt khác số cách chọn hai phần tử của A là C_{2n}^2.

Vậy $C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2$. $\square$

BÀI TẬP

8. Hỏi có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 7, 8, 9 ?

9. Cho $3 \le k \le n$. Chứng minh rằng

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

10. Cho m, n và r là các số nguyên dương sao cho $r<m$, $r<n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k} = C_{m+n}^r.$$

11. Cho n, r là các số nguyên dương. Chứng minh bằng quy nạp rằng

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^k = C_{n+r+1}^r.$$

12. Trong một nhóm có 5 người A, B, C, D, E.

a) Có bao nhiêu cách xếp năm người này thành hàng ngang sao cho A và B đứng cạnh nhau ?

b) Có bao nhiêu cách xếp năm người này thành hàng ngang sao cho C và D không đứng cạnh nhau ?

13. Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà biểu diễn thập phân không có các chữ số 6, 7, 8, 9 ?

14. Một lớp học có n học sinh ($n > 3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và chỉ định một em trong nhóm làm nhóm trưởng. Số học sinh trong nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n. Gọi T là số cách chọn.

a) Chứng minh rằng $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$.

b) Chứng minh rằng $T = n(2^{n-1} - 2)$.

c) Từ đó suy ra đẳng thức $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$.

§3. NHỊ THỨC NEWTON

1. Công thức nhị thức Newton

Ở các lớp dưới, ta đã biết các hằng đẳng thức sau cho ta khai triển của $(a+b)^2$ và $(a+b)^3$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Một cách tổng quát, khai triển của $(a+b)^n$ được cho bởi công thức sau :

Định lí 1

> Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có
>
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
>
> (quy ước $a^0 = b^0 = 1$).

Công thức này được gọi là *công thức nhị thức Newton* (gọi tắt là *nhị thức Newton*).

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh khẳng định $P(n)$ sau :

Với mỗi số thực x và mỗi số nguyên dương n ta có

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k . \tag{1}$$

Chứng minh bằng quy nạp theo n. Rõ ràng $P(1)$ đúng. Giả sử $P(n)$ đúng. Ta có

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} \tag{2}$$

Lại có

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k &= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k \\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k + x^{n+1} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Thay (3) vào (2) và áp dụng hằng đẳng thức Pascal, ta được

$$(1+x)^{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)x^k+x^{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k x^k+x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k x^k.$$

Vậy $P(n+1)$ đúng. Theo nguyên lí quy nạp ta có $P(n)$ đúng với mọi n.

Trở lại định lí. Nếu $a = 0$ thì công thức hiển nhiên đúng. Giả sử $a \neq 0$. Đặt $x=\dfrac{b}{a}$ và áp dụng (1) ta có

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{b^k}{a^k}.$$

Thành thử $\quad (a+b)^n=a^n\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^n=a^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{b^k}{a^k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$. □

Chú ý. Công thức trên là khai triển của $(a+b)^n$ theo luỹ thừa giảm của a và luỹ thừa tăng của b. Ta cũng có thể viết khai triển của $(a+b)^n$ theo luỹ thừa tăng của a và luỹ thừa giảm của b.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Hệ quả

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Vậy, nếu n chẵn ta có

$$(a-b)^n=a^n-C_n^1a^{n-1}b+\cdots-C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

Nếu n lẻ ta có

$$(a-b)^n=a^n-C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}-b^n.$$

Chứng minh. Thật vậy ta có

$$(a-b)^n=(a+(-b))^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k.\ \square$$

Ví dụ 1. Viết khai triển của $(x-2)^6$

Giải. Ta có
$$(x-2)^6 = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k C_6^k x^{6-k} 2^k = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k a_k x^{6-k}$$

ở đó $\quad a_k = C_6^k 2^k$.

Ta có : $a_0 = 1$; $a_1 = 12$; $a_2 = 60$; $a_3 = 160$; $a_4 = 240$; $a_5 = 192$; $a_6 = 64$.

Thành thử

$$(x-2)^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64 . \ \square$$

Ví dụ 2. Chứng minh công thức khai triển nhị thức Newton bằng suy luận tổ hợp.

Giải. Khi khai triển $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$ theo quy tắc phân phối của phép nhân, ta được một tổng các đơn thức dạng $x_1x_2...x_n$ trong đó mỗi x_i bằng a hoặc b.

Bây giờ ta thực hiện việc ghép các số hạng đồng dạng.

Khi tất cả n giá trị x_i bằng a, ta nhận được đơn thức a^n. Chỉ có một đơn thức như vậy.

Khi $n-1$ giá trị x_i bằng a và giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-1}b$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn một số bằng b trong n số $x_1, x_2, ..., x_n$, tức là bằng C_n^1. Do đó ta thu được số hạng $C_n^1 a^{n-1}b$.

Khi $n-2$ giá trị x_i bằng a và hai giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-2}b^2$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn hai số bằng b trong n số $x_1, x_2, ..., x_n$, tức là bằng C_n^2. Do đó ta thu được số hạng $C_n^2 a^{n-2}b^2$.

Tiếp tục như vậy, khi $n-k$ giá trị x_i bằng a và k giá trị còn lại bằng b, ta nhận được đơn thức $a^{n-k}b^k$. Số các đơn thức như thế bằng số cách chọn k số bằng b trong n số $x_1, x_2, ..., x_n$, tức là bằng C_n^k. Do đó ta thu được số hạng $C_n^k a^{n-k}b^k$.

Cuối cùng, khi tất cả n giá trị bằng b, ta được đơn thức b^n. Chỉ có một đơn thức như vậy

Vậy $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \ \square$$

2. Tam giác Pascal

Tam giác Pascal (xem bảng dưới) là một bảng số được lập theo quy luật sau

+ Đỉnh của tam giác được ghi số 1.

+ Hàng thứ nhất được ghi hai số 1.

+ Nếu đã có hàng thứ n ($n \geq 1$) thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Tam giác Pascal

Định lí 2

> Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm các số
>
> $$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 1$, khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng với n.

Xét hàng thứ $n+1$: Giả sử các số ở hàng này là $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$.

Theo cách xây dựng tam giác, ta có $a_0 = 1 = C_{n+1}^0$; $a_{n+1} = 1 = C_{n+1}^{n+1}$.

Xét $1 \leq k \leq n$. Theo cách xây dựng tam giác và giả thiết quy nạp, ta có

$$a_k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Mặt khác, theo hằng đẳng thức Pascal

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Thành thử $a_k = C_{n+1}^k$.

Vậy khẳng định đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lí quy nạp, khẳng định đúng với mọi n. □

BÀI TẬP

15. Tìm số hạng không chứa x (số hạng tự do) trong khai triển của $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$ nếu biết rằng

$$C_n^2 - C_n^1 = 44.$$

16. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển của $(1 + x^2 - x^3)^8$.

17. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^8$.

18. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right)^{20}$.

19. Tìm số hạng không chứa x (số hạng tự do) trong khai triển của $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^8$.

20. Tìm số hạng không chứa x (số hạng tự do) trong khai triển của $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

21. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

PHẦN 2.

XÁC SUẤT

§4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

a) Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà

- Kết quả của nó không dự đoán trước được

- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể của nó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

b) Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω.

Ví dụ 1. Xét hành động "Gieo hai đồng xu". Dễ thấy đây là một phép thử. Nếu dùng kí hiệu S để chỉ đồng xu lật sấp và dùng kí hiệu N để chỉ đồng xu lật ngửa thì không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{SN, SS, NN, NS\}.$$

2. Biến cố

a) Một biến cố A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó tuỳ thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.

Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A.

c) Biến cố chắc chắn là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.

d) Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$ và được kí hiệu là $\varnothing$.

3. Xác suất của biến cố

Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói về biến cố, ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến cố kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hoá các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hoặc bằng 1 gọi là xác suất của biến cố đó.

Xác suất của biến cố A được kí hiệu bởi $P(A)$. Nó đo lường khả năng khách quan xuất hiện biến cố A.

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất

Giả sử phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Khi đó xác suất của một biến cố A liên quan tới T là tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho A và số kết quả có thể.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Như vậy, việc giải một bài toán tính xác suất của một biến cố A theo định nghĩa cổ điển sẽ được quy về một bài toán tổ hợp : đếm số kết quả có thể của T và đếm số kết quả thuận lợi cho A. Cụ thể chúng ta có ba bước sau :

Bước 1 : Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.

Bước 2 : Xác định tập con A mô tả biến cố A rồi tính số phần tử của A, tức là đếm số kết quả thuận lợi cho A.

Bước 3 : Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.

Nói chung việc tính số các kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn nhiều so với việc tính số các kết quả thuận lợi cho A (bước 2). Để giải tốt các bài toán tính xác suất, các bạn phải nắm chắc phần tổ hợp.

Một giả thiết quan trọng khi áp dụng định nghĩa cổ điển là các kết quả của phép thử T (tức là các phần tử của Ω) được coi là đồng khả năng. Điều đó có nghĩa là tất cả các kết quả của T đều có khả năng xuất hiện như nhau, ta không có một lí do gì để cho rằng kết quả này lại hay xảy ra hơn kết quả kia.

Chẳng hạn : Nếu phép thử T liên quan tới gieo súc sắc, tung đồng tiền, ta giả thiết con súc sắc, đồng tiền được chế tạo cân đối, đồng chất thì các kết quả của T là đồng khả năng. Khi nói tới việc "chọn ngẫu nhiên" một phần tử trong một tập hợp nào đó, ta phải hiểu là việc chọn vô tư, không thiên vị, do đó mỗi phần tử đều có khả năng được chọn như nhau.

Ví dụ 2. Trong một nhóm có k người. Biết rằng không có ai sinh vào năm nhuận.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố : "Trong nhóm k người không có hai người nào có ngày sinh trùng nhau". Xác định tập con A mô tả biến cố A.

c) Gọi B là biến cố : "Không có người nào trong nhóm có ngày sinh trùng với ngày Quốc khánh 2/9". Xác định tập con B mô tả biến cố B.

d) Giả thiết rằng các phần tử của không gian mẫu là đồng khả năng. Tính $P(A)$ và $P(B)$.

e) Kí hiệu $P(k)$ là xác suất để trong nhóm k người không có hai người nào có ngày sinh trùng nhau và $Q(k)$ là xác suất để trong nhóm k người không có người nào trong nhóm có ngày sinh trùng với ngày Quốc khánh 2/9. Chứng minh rằng $P(k)$, $Q(k)$ giảm theo k.

Giải. a) Để cho gọn ta kí hiệu $n = 365$.

Gọi t_i là ngày sinh của người thứ i ($t_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) (Thí dụ nếu người thứ i sinh vào ngày 3/2 thì $t_i = 34, \ldots$). Như vậy không gian mẫu là

$$\Omega = \{(t_1, t_2, \ldots, t_k), 1 \le t_i \le n, t_i \in N\}.$$

b) $A = \{(t_1, t_2, \ldots, t_k), 1 \le t_i \le n, t_i \in N, t_i \ne t_j\}$.

c) Giả sử ngày Quốc khánh 2/9 là ngày thứ m trong năm. Khi đó

$$B = \{(t_1, t_2, \ldots, t_k), 1 \le t_i \le n, t_i \in N, t_i \ne m\}.$$

d) Mỗi thành phần t_i có n cách chọn. Vậy theo quy tắc nhân $|\Omega| = n^k$.

Mỗi phần tử của A chính là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Do đó

$$|A| = A_n^k.$$

Vậy $P(A) = \dfrac{A_n^k}{n^k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}$.

Ta có $B = \{(t_1, t_2, ..., t_k), 1 \le t_i \le n, t_i \in N, t_i \ne m\}$. Mỗi thành phần t_i có $n - 1$ cách chọn. Do đó $|B| = (n-1)^k$.

Vậy $P(B) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$.

e) $P(k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-2}{n}\right)$

$= P(k-1)$.

$Q(k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k < \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = Q(k-1)$.

Ta có bảng sau cho giá trị gần đúng của $P(k)$ và $Q(k)$ với một vài giá trị của k.

k	3	4	5	10
$P(k)$	0,9918	0,9836	0,9729	0,8830
$Q(k)$	0,9918	0,9890	0,9863	0,9729

Bằng máy tính bỏ túi, có thể chỉ ra giá trị bé nhất k để $P(k) < 0,5$ là $k = 23$, để $Q(k) < 0,5$ là 252. □

b) Định nghĩa thống kê của xác suất

Trong định nghĩa cổ điển của xác suất, ta cần giả thiết phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Nếu giả thiết đó bị vi phạm thì định nghĩa đó sẽ được thay bởi định nghĩa sau gọi là định nghĩa thống kê của xác suất.

Xét phép thử T và biến cố A liên quan với T. Ta tiến hành lặp đi lặp lại N lần phép thử T. Giả sử trong N lần thực hiện phép thử T đó, biến cố A xuất hiện $k = k(N)$ lần. Người ta chứng minh được rằng khi N tiến ra vô cùng thì tỉ số $\frac{k(N)}{N}$ luôn dần tới một giới hạn xác định. Giới hạn đó được gọi là xác suất của A, tức là

$$P(A) = \lim \frac{k(N)}{N}.$$

Trong trường hợp phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng thì xác suất của biến cố A theo định nghĩa thống kê cũng trùng với xác suất của biến cố A theo định nghĩa cổ điển.

Tỉ số $\frac{k(N)}{N}$ được gọi là tần suất của A trong N lần thực hiện phép thử T. Khi N càng lớn thì tần suất càng gần với xác suất. Thành thử tần suất được xem như giá trị gần đúng của xác suất. Số phép thử N càng lớn thì sai số giữa tần suất và xác suất càng bé.

Ví dụ 3. Một công ty bảo hiểm nhân thọ đã thống kê được trong 100000 đàn ông 50 tuổi có 568 người chết trong vòng một năm sau đó. Nếu xét biến cố A : "Một người đàn ông 50 tuổi sẽ chết trong vòng một năm sau đó" thì tần suất của biến cố này với $N = 100000$ là

$$\frac{568}{100000} = 0,00568.$$

Như vậy xác suất để một người đàn ông 50 tuổi sẽ chết trong vòng một năm sau đó xấp xỉ bằng 0,00568. □

4. Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố : "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó.

b) Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

c) Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A" được gọi là biến cố đối của A. Biến cố đối của A kí hiệu là $\overline{A}$.

Rõ ràng A và $\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc và hợp của chúng là một biến cố chắc chắn

$$\Omega = A \cup \overline{A}.$$

d) Quy tắc cộng xác suất

- Nếu hai biến cố A, B xung khắc với nhau thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là k biến cố đôi một xung khắc với nhau thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k).$$

Từ quy tắc cộng xác suất, ta suy ra :

e) Công thức tính xác suất biến cố đối

Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ của biến cố A là

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Thật vậy, vì $P(\Omega) = 1$; A và $\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc và $\Omega = A \cup \overline{A}$ nên từ quy tắc cộng suy ra $1 = P(A) + P(\overline{A})$.

Ví dụ 4. Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

Giải. Gọi A là biến cố : "Rút được một thẻ có số chẵn và một thẻ có số lẻ" và B là biến cố : "Rút được cả hai thẻ có số chẵn". Khi đó biến cố : "Kết quả nhận được là một số chẵn" là biến cố $A \cup B$.

Do A và B xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dễ thấy $P(A) = \dfrac{C_5^1 C_4^1}{C_9^2} = \dfrac{20}{36}$, $P(B) = \dfrac{C_4^2}{C_9^2} = \dfrac{6}{36}$.

Thành thử $P(A \cup B) = \dfrac{20}{36} + \dfrac{6}{36} = \dfrac{13}{18}$. □

Ví dụ 5. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi.

a) Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu.

b) Tính xác suất để chọn được hai viên bi khác màu.

Giải :

a) Gọi A là biến cố "Chọn được hai viên bi xanh", B là biến cố "Chọn được hai viên bi đỏ", C là biến cố "Chọn được hai viên bi vàng". Khi đó biến cố "Chọn được hai viên bi cùng màu" là biến cố $A \cup B \cup C$. Do A, B, C đôi một xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Dễ thấy $P(A) = \dfrac{C_4^2}{C_9^2} = \dfrac{6}{36}, P(B) = \dfrac{C_3^2}{C_9^2} = \dfrac{3}{36}, P(C) = \dfrac{C_2^2}{C_9^2} = \dfrac{1}{36}.$

Thành thử

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

b) Biến cố "Chọn được hai viên bi khác màu" là biến cố đối của biến cố "chọn được hai viên bi cùng màu". Từ đó xác suất để chọn được hai viên bi khác màu là

$$1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}. \ \square$$

5. Quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B đều xảy ra" kí hiệu là AB được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố : "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2...A_k$, được gọi là giao của k biến cố đó.

b) Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Chúng được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kì trong các biến cố trên không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

c) Quy tắc nhân xác suất

- Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

- Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k).$$

Chú ý :

- Nếu A và B độc lập thì ta cũng có A và $\overline{B}$ độc lập ; $\overline{A}$ và B độc lập ; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập. Do đó nếu A, B độc lập thì ta còn có các đẳng thức

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$$

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

- Trong trường hợp một trong các đẳng thức trên bị vi phạm thì hai biến cố A và B không độc lập với nhau.

Ví dụ 6. Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Xét các biến cố A, B, C sau đây :

A : "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm"

B : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là 7"

C : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc lớn hơn hay bằng 8.

a) Tính $P(B)$

b) Tính $P(A)$

c) Tính $P(C)$.

d) Hai biến cố B và C có xung khắc hay không ?

e) Hai biến cố A và B có độc lập hay không ?

Giải

a) Các kết quả thuận lợi cho B là : (1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1).

Vậy $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

b) Gọi A_i (i = 1,2) là biến cố : "Con súc sắc thứ i ra mặt 6 chấm".

Thay vì tính $P(A)$, ta tính $P(\overline{A})$. Ta có $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$. Theo đẳng thức (3) ta có

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = (1-P(A_1))(1-P(A_2)) = \frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{25}{36} = \dfrac{11}{36}$.

c) Biến cố C xảy ra khi và chỉ khi một trong các biến cố sau xảy ra :

C_1 : Con súc sắc I ra mặt 2 chấm và con súc sắc II ra mặt 6 chấm.

$$P(C_1) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

C_2 : Con súc sắc I ra mặt 3 chấm và con súc sắc II ra mặt 5 hoặc 6 chấm.

$$P(C_2) = \frac{1}{6}.\frac{2}{6} = \frac{2}{36}.$$

C_3 : Con súc sắc I ra mặt 4 chấm và con súc sắc II ra mặt 4, 5 hoặc 6 chấm.

$$P(C_3) = \frac{1}{6}.\frac{3}{6} = \frac{3}{36}.$$

C_4 : Con súc sắc I ra mặt 5 chấm và con súc sắc II ra mặt 3, 4, 5 hoặc 6 chấm.

$$P(C_4) = \frac{1}{6}.\frac{4}{6} = \frac{4}{36}.$$

C_5 : Con súc sắc I ra mặt 6 chấm và con súc sắc II ra mặt 2, 3, 4, 5 hoặc 6 chấm.

$$P(C_5) = \frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

Từ đó, theo quy tắc cộng xác suất ta được

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) + P(C_5) = \frac{15}{36}.$$

Chú ý : Ta cũng có thể tính $P(A)$ và $P(C)$ tương tự như tính $P(B)$ bằng cách đếm các kết quả thuận lợi cho A và cho C. Có 11 kết quả thuận lợi cho A và 15 kết quả thuận lợi cho C. Tuy nhiên cách làm này dài và dễ sai sót.

d) Rõ ràng B và C không đồng thời xảy ra, do đó B và C là xung khắc.

e) Xét biến cố AB : "tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là 7, trong đó có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm."

Các kết quả thuận lợi cho AB là (1 ; 6), (6 ; 1). Do đó $P(AB) = \dfrac{2}{36}$.

Lại có $P(A).P(B) = \dfrac{11}{36}.\dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{216}$.

Ta có $P(AB) \neq P(A)P(B)$. Vậy A, B không độc lập với nhau. □

6. Quy tắc cộng mở rộng

Trong trường hợp A, B là hai biến cố bất kì, không nhất thiết xung khắc, để tính xác suất của biến cố $A \cup B$, ta có định lí sau đây gọi là quy tắc cộng xác suất mở rộng cho hai biến cố bất kì.

Định lí 1

> Cho A và B là hai biến cố bất kì. Khi đó
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Chứng minh. Ta có

$$A = AB \cup A\overline{B},\ B = AB \cup B\overline{A}$$

$$A \cup B = AB \cup A\overline{B} \cup B\overline{A}.$$

Mặt khác các biến cố AB, $A\overline{B}$, $B\overline{A}$ là đôi một xung khắc. Theo quy tắc cộng

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}), \quad P(B) = P(AB) + P(B\overline{A})$$

và $$P(A \cup B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(B\overline{A}).$$

Do đó $$P(A \cup B) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB). \ \square$$

Ví dụ 7. Trong tỉnh A, tỉ lệ học sinh học giỏi môn Văn là 9%, học giỏi môn Toán là 12% và học giỏi cả hai môn là 7%.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh A. Tính xác suất để

a) Học sinh đó học giỏi Văn hoặc học giỏi Toán.

b) Học sinh đó không học giỏi Văn và không học giỏi Toán.

Giải. a) Gọi A là biến cố : "Học sinh đó giỏi Văn" ; B là biến cố : "Học sinh đó giỏi Toán". Khi đó biến cố "Học sinh đó học giỏi Văn hoặc học giỏi Toán" là biến cố $A \cup B$, biến cố "Học sinh đó học giỏi cả Văn và Toán" là biến cố AB. Bài ra yêu cầu tính $P(A \cup B)$. Theo định lí 1 ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}09 + 0{,}12 - 0{,}07 = 0{,}14.$$

b) Biến cố "Học sinh đó không học giỏi Văn và không học giỏi Toán" là biến cố đối của biến cố "Học sinh đó học giỏi Văn hoặc học giỏi Toán". Vậy xác suất của biến cố này là $1 - 0{,}14 = 0{,}86$. □

Chú ý. Dùng quy tắc cộng xác suất mở rộng này, ta có thể giải câu b của ví dụ 6 theo cách khác như sau :

Gọi A_i $(i = 1, 2)$ là biến cố : "Con súc sắc thứ i ra mặt 6 chấm".

Ta có : $A = A_1 \cup A_2$. Theo công thức cộng xác suất mở rộng, ta có

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \qquad (*)$$

Ta có $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{6}$.

Vì việc gieo hai con súc sắc là độc lập nên hai biến cố A_1, A_2 độc lập. Thành thử, theo quy tắc nhân xác suất, ta có

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{36}.$$

Thay vào (*) ta được $P(A) = \dfrac{11}{36}$. □

Quy tắc cộng mở rộng cho ba biến cố bất kì được cho bởi định lí sau :

Định lí 2

Cho A, B, C là ba biến cố bất kì. Khi đó ta có

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

Chứng minh. Theo định lí 1

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P(AC \cup BC). \qquad (1)$$

Lại theo định lí 1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2)$$

$$P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC). \qquad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta được điều phải chứng minh. □

Ví dụ 8. Một nhà xuất bản phát hành ba đầu sách tham khảo A, B, C. Thống kê cho thấy có 50% học sinh mua sách A ; 70% học sinh mua sách B ; 60% học sinh mua sách C ; 30% học sinh mua cả sách A và sách B ; 40% học sinh mua cả sách B và sách C ; 20% học sinh mua cả sách A và sách C. Biết rằng mỗi học sinh đều mua ít nhất một trong ba cuốn sách.

Chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất để :

a) Em đó mua cả ba đầu sách A, B, C.

b) Em đó mua đúng hai trong ba đầu sách tham khảo nói trên.

Giải

a) Gọi A là biến cố : "Em đó mua sách A", B là biến cố : "Em đó mua sách B" và C là biến cố " Em đó mua sách C". Theo bài ra ta có

$$P(A) = 0{,}5 \; ; P(B) = 0{,}7 \; ; P(C) = 0{,}6 \; ;$$

$$P(AB) = 0{,}3 \; ; P(BC) = 0{,}4 \; ; P(AC) = 0{,}2.$$

và $A \cup B \cup C$ là biến cố chắc chắn, do đó $P(A \cup B \cup C) = 1$.

Theo định lí 2 ta có

$$\begin{aligned} 1 &= P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= 0{,}5 + 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}3 - 0{,}4 - 0{,}2 + P(ABC) = 0{,}9 + P(ABC). \end{aligned}$$

Suy ra $P(ABC) = 0{,}1$.

Vậy xác suất để em đó mua cả ba đầu sách A, B, C là 0,1.

b) Gọi H là biến cố : "Em đó mua đúng hai trong ba đầu sách tham khảo nói trên". Ta có $H = AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

Các biến cố $AB\overline{C}$, $A\overline{B}C$, $\overline{A}BC$ xung khắc từng đôi nên theo quy tắc cộng, ta có

$$P(H) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC). \qquad (1)$$

Lại có : $AB = AB\overline{C} \cup ABC$. Theo quy tắc cộng, ta có

$$P(AB) = P(AB\overline{C}) + P(ABC).$$

Suy ra $\qquad P(AB\overline{C}) = P(AB) - P(ABC) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2.$

Tương tự $P(A\overline{B}C) = P(AC) - P(ABC) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1,$

$$P(\overline{A}BC) = P(BC) - P(ABC) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3.$$

Thay vào (1) ta được $P(H) = 0{,}6$. □

BÀI TẬP

22. Gieo một con súc sắc được chế tạo cân đối đồng chất ba lần liên tiếp. Gọi A là biến cố : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc trong ba lần gieo bằng 9".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Mô tả tập Ω_A các kết quả thuận lợi cho A.

c) Tính $P(A)$.

23. Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả trắng, 2 quả đỏ và 1 quả đen.

24. Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam, 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên hai người. Tính xác suất để :

a) Hai người được chọn có họ Nguyễn.

b) Hai người được chọn có cùng họ.

c) Hai người được chọn là hai anh em ruột.

d) Hai người được chọn có cùng họ và khác giới tính.

25. Gieo ba con súc sắc cân đối và đồng chất. Xét các biến cố sau :

A : "Số chấm trên mặt xuất hiện của ba con khác nhau"

B : "Có ít nhất một con xuất hiện mặt 6 chấm".

a) Tính $P(A)$

b) Tính $P(B)$

c) Tính $P(AB)$. Hỏi A, B có độc lập hay không ?

26. An và Bình học ở hai nơi khác nhau. Xác suất để An và Bình đạt điểm giỏi về môn Toán trong kì thi cuối năm tương ứng là 0,92 và 0,88.

a) Tính xác suất để cả hai đều đạt điểm giỏi.

b) Tính xác suất để cả hai đều không đạt điểm giỏi.

c) Tính xác suất để có ít nhất một trong hai bạn đạt điểm giỏi.

27. Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. An lấy ngẫu nhiên một viên bi (lấy xong không trả vào hộp). Tiếp đó đến lượt Bình lấy ngẫu nhiên một viên bi. Tính xác suất để Bình lấy được viên bi xanh.

28. Một xạ thủ thi bắn bia. Biết rằng xác suất bắn trúng vòng 10 là 0,2 ; vòng 9 là 0,25 và vòng 8 là 0,15. Nếu trúng vòng k thì được k điểm. Giả sử xạ thủ đó bắn ba phát một cách độc lập. Xạ thủ đạt loại giỏi nếu anh ta đạt ít nhất 28 điểm.

Tính xác suất để xạ thủ này đạt loại giỏi.

29. Một máy bay có 5 động cơ trong đó cánh phải có 3 động cơ, cánh trái có 2 động cơ. Xác suất bị trục trặc của mỗi động cơ ở cánh phải là 0,1; của mỗi động cơ ở cánh trái là 0,05. Các động cơ hoạt động độc lập.

a) Tính xác suất để có đúng bốn động cơ bị hỏng.

b) Biết rằng máy bay chỉ bay an toàn khi nó có ít nhất hai động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay bay an toàn.

c) Biết rằng máy bay chỉ bay an toàn khi trên mỗi cánh của nó có ít nhất một động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay bay an toàn.

30. Gieo hai con súc sắc cân đối. Xét các biến cố sau :

A : "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 5 chấm"

B : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 7".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$.

b) Tính $P(AB)$.

31. Gieo ba con súc sắc cân đối. Xét các biến cố sau :

A : "Tổng số chấm xuất hiện là 8".

B : "Có ít nhất một con xuất hiện nốt 1".

a) Tính $P(A)$, $P(B)$

b) Tính $P(AB)$.

§5. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

1. Định nghĩa

Đại lượng X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hợp hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

2. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Để hiểu rõ về X, ta cần quan tâm tới xác suất để X nhận các giá trị nói trên là bao nhiêu, tức là cần tính các xác suất $p_i = P(X = x_i)$, trong đó $\{X = x_i\}$ là biến cố "X nhận giá trị x_i" ($i = 1, 2, ..., n$).

Các thông tin về X như vậy được trình bày dưới dạng bảng sau đây :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Bảng 1

Bảng này được gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Như vậy, việc lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc bao gồm hai bước :

Bước 1 : Thiết lập dòng đầu tiên của bảng, tức là xác định tập hợp các giá trị có thể $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ của X.

Bước 2 : Thiết lập dòng thứ hai của bảng, tức là tính các xác suất $p_i = P(X = x_i)$, trong đó $\{X = x_i\}$ là biến cố "X nhận giá trị x_i".

Bước 1 nói chung tương đối dễ. Bước 2 đòi hỏi ta phải tính một loạt các xác suất, do đó khó hơn và mất nhiều thời gian hơn. Vì rằng các biến cố $(X = x_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$) là đôi một xung khắc với nhau và hợp của chúng là biến cố chắc chắn, do đó theo quy tắc cộng ta suy ra $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$. Đó là một điều kiện cần để bảng phân bố xác suất của X được thiết lập đúng. (Điều kiện này không là điều kiện đủ). Như vậy, để kiểm tra ta có thể cộng các số của dòng thứ hai của bảng. Nếu kết quả không bằng 1 thì chắc chắn bảng ta lập là sai. Nếu tổng bằng 1 thì cũng chưa đảm bảo bảng ta lập là đúng.

Ví dụ 1. Một túi có 10 chiếc thẻ đỏ và 6 chiếc thẻ xanh. Chọn ngẫu nhiên ra ba tấm thẻ.

a) Gọi X là số thẻ đỏ trong ba thẻ rút ra. Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Giả sử rút mỗi tấm thẻ đỏ được 5 điểm và rút mỗi tấm thẻ xanh được 8 điểm. Gọi Y là số điểm thu được. Lập bảng phân bố của Y.

Giải : a) $P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{16}^3}=\dfrac{2}{56}$, $\quad P(X=1)=\dfrac{C_{10}^1 C_6^2}{C_{16}^3}=\dfrac{15}{56}$

$$P(X=2)=\frac{C_{10}^2 C_6^1}{C_{16}^3}=\frac{27}{56},\qquad P(X=3)=\frac{C_{10}^3}{C_{16}^3}=\frac{12}{56}.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{12}{56}$

b) Ta có $Y = 5X + (3 - X)8 = 24 - 3X$.

Từ đó $\quad P(Y = 15) = P(X = 3) = \dfrac{12}{56}$; $\quad P(Y = 18) = P(X = 2) = \dfrac{27}{56}$;

$$P(Y = 21) = P(X = 1) = \frac{15}{56};\qquad P(Y = 24) = P(X = 0) = \frac{2}{56}.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của Y là

Y	15	18	21	24
P	$\frac{12}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{2}{56}$

3. Khái niệm độc lập của hai biến ngẫu nhiên rời rạc

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc. X nhận các giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, Y nhận các giá trị $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$.

Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập với nhau nếu với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và mọi $j = 1, 2, \ldots, m$, hai biến cố $A = \{X = x_i\}$ và $B = \{Y = y_j\}$ là độc lập.

Biến cố giao AB là biến cố "X nhận giá trị x_i và Y nhận giá trị y_j" và được viết là $\{X = x_i; Y = y_j\}$.

Nếu X và Y độc lập thì theo quy tắc nhân ta có

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Ví dụ 2. Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân bố xác suất của X và Y được cho như sau

X	0	1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Bảng 2. Bảng phân bố của X

Y	0	1	2	3
P	0,05	0,3	0,5	0,15

Bảng 3. Bảng phân bố của Y

Giả sử X và Y độc lập.

a) Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $Z = X + Y$.

b) Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên $W = XY$.

Giải. Để dễ theo dõi các giá trị của Z và W, ta lập bảng sau đây :

X / Y	0	1	2	3
0	$Z = 0$ $W = 0$	$Z = 1$ $W = 0$	$Z = 2$ $W = 0$	$Z = 3$ $W = 0$
1	$Z = 1$ $W = 0$	$Z = 2$ $W = 1$	$Z = 3$ $W = 2$	$Z = 4$ $W = 3$
2	$Z = 2$ $W = 0$	$Z = 3$ $W = 2$	$Z = 4$ $W = 4$	$Z = 5$ $W = 6$
3	$Z = 3$ $W = 0$	$Z = 4$ $W = 3$	$Z = 5$ $W = 6$	$Z = 6$ $W = 9$

Giá trị của $Z = X + Y$ và $W = XY$ ứng với $X = i$, $Y = j$ được ghi ở ô có cột i và dòng j.

a) Từ bảng trên ta thấy Z nhận các giá trị 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Ta có

$P(Z = 0) = P(X = 0; Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01.$

$$P(Z = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0)$$
$$= 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}075.$$

Tương tự

$P(Z = 2) = P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0) = 0{,}21.$

$$P(Z = 3) = P(X = 0)P(Y = 3) + P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) + P(X = 3)P(Y = 0) = 0{,}305.$$

$P(Z = 4) = P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 3)P(Y = 1) = 0{,}275.$

$P(Z = 5) = P(X = 2)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 2) = 0{,}11.$

$P(Z = 6) = P(X = 3)P(Y = 3) = 0{,}015.$

Vậy bảng phân bố xác suất của Z là

Z	0	1	2	3	4	5	6
P	0,01	0,075	0,21	0,305	0,275	0,11	0,015

b) Từ bảng trên ta thấy W nhận các giá trị 0; 1; 2; 3; 4; 6; 9.

$$P(W = 0) = P((X = 0) \cup (Y = 0)) = P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0)P(Y = 0)$$
$$= 0{,}2 + 0{,}05 - 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}24.$$

$P(W = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = 0{,}09$

$P(W = 2) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = 0{,}27$

$P(W = 3) = P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 1) = 0{,}075$

$P(W = 4) = P(X = 2)P(Y = 2) = 0{,}2$

$P(W = 6) = P(X = 2)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 2) = 0{,}11$

$P(W = 9) = P(X = 3)P(Y = 3) = 0{,}015.$

Vậy bảng phân bố xác suất của W là

W	0	1	2	3	4	6	9
P	0,24	0,09	0,27	0,075	0,2	0,11	0,015

4. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân bố xác suất :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

a) Kì vọng

Kì vọng của X, kí hiệu là $E(X)$, là một số được tính theo công thức sau

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Ý nghĩa : Kì vọng $E(X)$ là một số cho ta ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế $E(X)$ còn được gọi là giá trị trung bình của X.

Chú ý : Kì vọng của X không nhất thiết thuộc tập giá trị của X.

Ví dụ 3. Trở lại ví dụ 1. Hãy tính kì vọng của X.

Giải : Từ bảng phân bố của X, ta tìm được

$$E(X)=\frac{1(15)+2(27)+3(12)}{56}=\frac{105}{56}. \ \square$$

b) Phương sai và độ lệch chuẩn

i) Phương sai của X, kí hiệu là $V(X)$, là một số được tính theo công thức sau

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i$$

trong đó $\mu = E(X)$.

ii) Độ lệch chuẩn của X, kí hiệu là $\sigma(X)$, là căn bậc hai của phương sai

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)} .$$

Ý nghĩa : Phương sai $V(X)$ và độ lệch chuẩn $\sigma(X)$ là một số dương. Chúng đo mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh kì vọng của X, trong đó $V(X)$ có thứ nguyên (đơn vị đo) là bình phương thứ nguyên của X còn $\sigma(X)$ có cùng thứ nguyên với X.

Tính chất :

i) $V(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$. ii) $V(X) > [E(X)]^2$.

Chứng minh

i) Ta có

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2)p_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\mu^2\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Vì $\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=\mu, \sum_{i=1}^{n}p_i=1$ nên ta có

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\mu^2.$$

ii) Do i) và $V(X) > 0$. □

Ví dụ 4. Số vụ vi phạm luật giao thông trên đoạn đường A vào tối thứ bảy hàng tuần là một biến ngẫu nhiên X có bảng phân bố xác suất sau

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Giải. Ta có $E(X) = 2,3$. Để tính $V(X)$, ta áp dụng tính chất i)

$$V(X)=\ 0^2(0,1)+1^2(0,2)+\cdots+5^2(0,1)-(2,3)^2=2,01.$$

Độ lệch chuẩn $\sigma(X)=\sqrt{2.01}\approx 1,418$. □

BÀI TẬP

32. Hai xạ thủ A và B tập bắn một cách độc lập với nhau. Mỗi người bắn hai phát đạn. Xác suất bắn trúng của A và của B trong mỗi lần bắn tương ứng là 0,4 và 0,5.

Gọi X là số phát trúng của A, Y là số phát trúng của B và $Z = |X - Y|$ là chênh lệch giữa số phát trúng của hai người. Lập bảng phân bố xác suất của X, Y, Z.

33. Trong một chiếc hòm có 10 tấm thẻ trong đó có 4 thẻ ghi số 1, ba thẻ ghi số 2, hai thẻ ghi số 3 và một thẻ ghi số 4.

Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ rồi cộng hai số trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được. Lập bảng phân bố xác suất của X.

34. Một đồng tiền cân đối, đồng chất được gieo ba lần liên tiếp. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp. Lập bảng phân bố xác suất của X. Tính $E(X)$ và $V(X)$.

35. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất một cách độc lập.

a) Gọi X là tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc. Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Gọi Y là số chấm lớn nhất của hai con súc sắc. Lập bảng phân bố của Y.

36. Trong một chiếc hộp có 4 tấm thẻ đánh số 1, 2, 3 và 4. Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là kết quả thu được. Tính $E(X)$.

Chương IV

CẤP SỐ VÀ DÃY SỐ

Cấp số và dãy số là những khái niệm quan trọng trong chương trình Toán phổ thông, đặc biệt là đối với chương trình chuyên Toán. Các bài toán về dãy số khá đa dạng, khai thác các tính chất số học, đại số, giải tích, lượng giác của chúng. Trong chương này, chúng ta nghiên cứu các bài toán cơ bản nhất của dãy số, chủ yếu liên quan đến các tính chất đại số của chúng, đó là bài toán tìm số hạng tổng quát và tính tổng n số hạng đầu tiên.

§1. DÃY SỐ

Phần này trình bày định nghĩa và các khái niệm cơ bản liên quan đến dãy số ; các cách xác định một dãy số. Giới thiệu khái niệm dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn, dãy số tuần hoàn.

1. Định nghĩa và ví dụ

Ta đã làm quen với khái niệm dãy số ở các lớp dưới. Nói tới dãy số, ta hiểu đó là kết quả thu được khi viết liên tiếp các số theo một quy tắc nào đó. Chẳng hạn, khi viết liên tiếp các luỹ thừa với số mũ tự nhiên của $-\frac{1}{2}$ theo thứ tự tăng dần của số mũ, ta được dãy

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0, \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^5, \ldots \quad (1)$$

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n là số nằm ở vị trí thứ n (kể từ trái qua phải) của dãy số (1), ta có

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Điều đó cho thấy dãy số (1) thể hiện một quy tắc mà nhờ nó, ứng với mỗi số nguyên dương n, ta xác định được duy nhất một số thực u_n. Vì thế, ta có thể coi dãy số (1) là một hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương.

Định nghĩa 1

> *Dãy số* là một hàm số từ S vào $\mathbb{R}$, trong đó :
>
> $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ đối với *dãy số hữu hạn*, hoặc
>
> $S = \mathbb{N}$ đối với *dãy số vô hạn* bắt đầu từ chỉ số 0
>
> $S = \mathbb{N}^*$ đối với dãy số vô hạn bắt đầu từ chỉ số 1.

Với dãy số $f : S \to \mathbb{R}$, ta thường kí hiệu $f(i)$ là f_i.

Ví dụ 1. Hàm số $u(n) = \frac{1}{n+1}$, xác định trên tập $\mathbb{N}^*$, là một dãy số. Dãy số này có vô số số hạng :

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{4}, \ldots$$

Ví dụ 2. Hàm số $v(n) = \sqrt{9-n}$ xác định trên $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ là một dãy số. Dãy số này có hữu hạn số hạng :

$$u_1 = \sqrt{8}, u_2 = \sqrt{7}, \ldots, u_9 = 0.$$

Dãy số thường được kí hiệu là $(a_i)_{i=1}^{n}$; $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ hay dưới *dạng khai triển*

$a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

hoặc đơn giản là (a_i) khi đã rõ tập S.

Chẳng hạn, có thể kí hiệu dãy số ở ví dụ 1 bởi $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{i=1}^{\infty}$, và khi viết dãy số đó dưới dạng khai triển, ta được :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Dãy số ở ví dụ 2 có thể kí hiệu bởi $\left(\sqrt{9-i}\right)_{i=1}^{9}$ hay dưới dạng khai triển (liệt kê) :

$$\sqrt{8}, \sqrt{7}, \ldots, 1, 0.$$

Các số a_i được gọi là các *số hạng* của dãy số, trong đó a_1 (hoặc a_0) là *số hạng đầu tiên*, a_i là số hạng thứ i. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ được gọi là *tổng của n số hạng đầu tiên*. Với dãy số hữu hạn $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta gọi a_n là *số hạng cuối cùng*, n là *số số hạng* còn S_n là *tổng tất cả các số hạng* của dãy số.

Nếu a_i là số nguyên với mọi i thuộc S thì ta nói (a_i) là dãy số nguyên. Ví dụ : dãy (a_n) với $a_n = (-1)^n n$, dãy Fibonacci là những dãy số nguyên.

H1. *Hãy tìm số hạng thứ 9, thứ 99, thứ 999 trong dãy số cho ở ví dụ 1.*

2. Cách xác định một dãy số

Dãy số có thể được xác định (cho) bằng các cách dưới đây :

1) *Cho dãy số bằng cách liệt kê các phần tử* (dùng cho các dãy số hữu hạn). Ví dụ : Xét dãy các chữ số trong hệ thập phân 0, 1, 2, ..., 9 ; hoặc xét dãy các số nguyên tố nhỏ hơn 20 : 2, 3, 5, 7, 11,13, 17, 19.

2) *Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.*

Ví dụ : Cho dãy số $(a_i)_{i=1}^n$ xác định bởi $a_i = \dfrac{1}{1+i^2}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

3) *Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi.*

Ví dụ 3. Xét dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1$ và với mọi $n \geq 1$ thì

$$u_{n+1} = 2u_n + 1. \qquad (2)$$

Rõ ràng, với cách cho như trên, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (u_n) :

- Do u_1 đã biết nên áp dụng (2) cho $n = 1$, ta tìm được u_2

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2.1 + 1 = 3.$$

- Vì biết u_2 nên áp dụng (2) cho $n = 2$, ta tìm được u_3

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2.3 + 1 = 7.$$

Tiếp tục quá trình trên, ta sẽ tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (u_n). □

Sau đây là một số ví dụ khác về dãy số cho bởi hệ thức truy hồi :

+ Cho dãy số (F_n) xác định bởi

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ với mọi } n = 1, 2, \ldots \qquad \text{(Dãy số Fibonacci)}$$

+ Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 2009$, a_{n+1} bằng tổng bình phương các chữ số của a_n với mọi $n = 1, 2, \ldots$

H2. *Với dãy số (a_n) xác định ở trên, hãy xác định a_4.*

4) *Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.*

Ví dụ : cho dãy các số nguyên tố (tức là dãy 2, 3, 5, 7, 11, ...), cho dãy các hợp số nguyên dương (tức là dãy 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...). Một ví dụ khác : Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không có hai bít 1 kề nhau. Khi đó dãy số (a_n) xác định.

Chú ý là một dãy số có thể cho bằng nhiều cách. Chẳng hạn, dãy số (u_n) ở ví dụ 3 còn có thể cho bởi công thức của số hạng tổng quát như sau :

$$u_n = 2^n - 1, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Trong số các cách xác định dãy số thì cách thứ 2 và cách thứ 3 là quan trọng nhất và thường được sử dụng nhất.

H3. *Thử tìm một hệ thức truy hồi xác định dãy số cho ở ví dụ 1.*

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

Vì dãy số là một hàm số từ $\mathbb{N}$ (hay một tập con của $\mathbb{N}$) vào $\mathbb{R}$ nên một cách tự nhiên, ta có thể nghĩ đến khái niệm dãy số tăng, giảm như sau : Dãy số (u_n) là dãy số tăng nếu $u_n < u_m$ với mọi $n < m$. Tuy nhiên do đặc thù của tập hợp các số tự nhiên, điều kiện này có thể thay thế bằng một điều kiện tương đương nhưng đơn giản hơn, đó là $u_n < u_{n+1}$ với mọi n. Ta có định nghĩa :

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số tăng* nếu với mọi n, ta có $u_n < u_{n+1}$.

Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số giảm* nếu với mọi n, ta có $u_n > u_{n+1}$.

Ví dụ 4

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2$ là một dãy số tăng, vì với mọi n ta luôn có

$$u_n = n^2 < (n+1)^2 = u_{n+1}.$$

b) Dãy số (u_n) ở ví dụ 1 là một dãy số giảm, vì với mọi n ta luôn có

$$u_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = u_{n+1}.$$

H4. *Hãy cho một ví dụ về dãy số tăng, một ví dụ về dãy số giảm và một ví dụ về dãy số không tăng cũng không giảm.*

H5. *Chứng minh rằng nếu (u_n) là dãy số tăng (theo định nghĩa trên) thì với mọi $m > n$, ta có $u_m > u_n$.*

4. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 3

a) Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M.$$

b) Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq m.$$

c) Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới ; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, m \leq u_n \leq M.$$

Ví dụ 5

a) Dãy số (u_n) nói ở phần a) ví dụ 4 là dãy số bị chặn dưới vì $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 1$.

Tuy nhiên, dãy số đó không bị chặn trên, vì không có số M để cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M.$$

Nói cách khác, với mọi M ta đều tìm được n sao cho $u_n > M$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ là dãy số bị chặn, vì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta luôn có

$$0 < \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} < 2. \square$$

Ghi chú : Vì các dãy số hữu hạn thì hiển nhiên là bị chặn nên ta chỉ xét tính bị chặn đối với các dãy vô hạn.

5. Dãy số tuần hoàn

Tương tự như khái niệm dãy số tăng, khái niệm dãy số tuần hoàn cũng được cảm sinh một cách tự nhiên từ khái niệm hàm số tuần hoàn.

Định nghĩa 4

> Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số tuần hoàn* nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $u_{n+k} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.
>
> Số nguyên dương k, nếu tồn tại, được gọi là *chu kì tuần hoàn* của dãy số.

Ví dụ 6.

a) Dãy số $u_n = 2^n \bmod 10$ (tức là chữ số tận cùng của 2^n) là dãy số tuần hoàn với chu kì 4 :

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, \ldots$$

b) Dãy các chữ số thập phân sau dấu phẩy của $\sqrt{2}$ không tuần hoàn :

$$4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, \ldots$$

c) Dãy số (u_n) xác định bởi $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}$ với $n = 1, 2, 3, \ldots$ tuần hoàn với chu kì 6 :

$$1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, \ldots \square$$

BÀI TẬP

1. Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_2 = -2$ và $u_{n+1} = u_n - 2u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

c) (u_n) là dãy các hợp số nguyên dương sắp theo thứ tự tăng dần.

2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 5 \text{ và } u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có

$$u_n = 2^n + 3^n.$$

3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên CA, ... và cứ tiếp tục như thế. Đặt $u_n = CA_n$. Hãy cho dãy số (u_n) nói trên bởi hệ thức truy hồi.

4. Hãy xét tính tăng, giảm, bị chặn trên, bị chặn dưới của các dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$

c) Dãy số (a_n) với $a_{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

5. Xét các dãy số (u_n), (v_n) xác định như sau :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \; v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng còn (v_n) là dãy số giảm ;

b) Chứng minh rằng (u_n), (v_n) là các dãy số bị chặn.

6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số tăng.

b) Chứng minh rằng $u_n = 1 + (n-1).2^n$ với mọi $n \geq 1$.

7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1, \; u_2 = 2, \; u_{n+1} = au_n - u_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

a) Chứng minh rằng với $a = \sqrt{3}$ thì dãy số (u_n) tuần hoàn

b) Chứng minh rằng với $a = \dfrac{3}{2}$ thì dãy số (u_n) không tuần hoàn.

§2. CẤP SỐ

Có những dãy số xác định bởi quy luật đặc biệt gọi là cấp số. Có hai dạng cấp số cơ bản thường gặp nhất là cấp số cộng và cấp số nhân.

1. Cấp số cộng

Quan sát dãy các số tự nhiên $0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$, ta thấy các số hạng của nó có một mối liên hệ đặc biệt : kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và 1.

Ta còn gặp nhiều dãy số khác cũng có tính chất tương tự như dãy số trên trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học, kĩ thuật cũng như trong thực tế cuộc sống. Người ta gọi các dãy số như vậy là những cấp số cộng.

Định nghĩa 1

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước đó và một số d không đổi. Nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng} \Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + d.$$

u_1 được gọi là *số hạng đầu tiên*, u_k là *số hạng thứ k* của cấp số cộng ; d được gọi là *công sai* của cấp số cộng. Nếu cấp số cộng là hữu hạn và có n số hạng thì n gọi là *số số hạng* còn u_n được gọi là *số hạng cuối* của cấp số cộng.

Sở dĩ có thuật ngữ công sai này là vì

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \ldots = u_n - u_{n-1} = d,$$

tức d là sai biệt chung của các số hạng kề nhau của dãy số.

Ngoài các cấp số cộng có hữu hạn phần tử, người ta còn xét những cấp số cộng có vô hạn phần tử. Ví dụ dãy các bội số dương của 3 là một cấp số cộng có vô hạn phần tử với số hạng đầu là 3 và công sai là 3.

Ví dụ 1

a) Dãy các số tự nhiên lẻ $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

b) Dãy số

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

là một cấp số cộng với công sai $d = 5$.

H1. *Trong các dãy số sau, dãy nào là một cấp số cộng? Vì sao?*

a) Dãy các số nguyên tố lẻ nhỏ hơn 10.

b) Dãy các hợp số nhỏ hơn 10.

c) –5, –2, 1, 4, 7, 10.

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

Định lí sau đây nêu lên các tính chất cơ bản của cấp số cộng :

Định lí 1

a) *Tính chất đặc trưng của cấp số cộng* : Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

b) *Số hạng tổng quát của cấp số cộng* : Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức sau :

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

c) *Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng* : Giả sử (u_n) là một cấp số cộng. Với mỗi số nguyên dương n, gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó ($S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$). Khi đó ta có

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Chứng minh

a) Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n). Với mọi $k \geq 2$, ta có

$$u_{k+1} = u_k + d, \qquad u_{k-1} = u_k - d.$$

Từ hai đẳng thức trên ta được

$$u_{k+1} + u_{k-1} = 2u_k \text{ với mọi } k \geq 2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Công thức đúng khi $n = 1$, vì $u_1 = u_1 + 0.d$. Giả sử công thức đúng khi $n = k$, ($k \in \mathbb{N}^*$), tức là $u_k = u_1 + (k-1)d$. Khi đó ta có

$$u_{k+1} = u_k + d = [u_1 + (k-1)d] + d = u_1 + kd.$$

Vậy công thức cũng đúng khi $n = k + 1$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

a) Để ý rằng $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \ldots = u_n + u_1$ nên ta có

$$\begin{aligned} 2S_n &= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (u_n + u_{n-1} + \ldots + u_1) \\ &= (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_n + u_1) \\ &= n(u_1 + u_n). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ theo thứ tự cũng lập thành một cấp số cộng (giả sử $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$).

Giải. $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} = \frac{b-c}{(c+a)(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = (b-c)(b+c) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 - c^2$$

tức là khi và chỉ khi a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. □

H2. *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1$ và $u_3 = 3$. Hãy tìm u_2 và u_4.*

Ví dụ 3. Một đội công nhân trồng các trụ điện từ cây số 3 đến cây số 5 của đường tỉnh lộ. Cứ 200m trồng một trụ. Hỏi có tất cả bao nhiêu trụ điện được trồng?

Giải. Các trụ điện được trồng tại các điểm có khoảng cách 3000m, 3200m, …., 5000m. Như vậy các khoảng cách này lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là 3000, số hạng cuối là 5000 và công sai là 200. Số trụ điện chính là số số hạng của cấp số. Gọi n là số số hạng. Theo công thức tính số hạng thứ n, ta có

$$5000 = u_n = u_1 + (n-1)d = 3000 + 200(n-1)$$

suy ra $$n=\frac{5000-3000}{200}+1=11.$$

Vậy có tất cả 11 trụ điện được trồng. □

H3. *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 13$ và công sai $d = -3$. Hãy tìm u_{31}.*

Ví dụ 4. Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau :

Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là 9 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,6 triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty.

Giải. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n (triệu đồng) là mức lương của người kĩ sư ở quý làm việc thứ n cho công ty. Theo giả thiết của bài toán, ta có

$$u_1 = 9 \text{ và } u_{n+1} = u_n + 0{,}6 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai d = 0,6.

Vì mỗi năm có 4 quý nên 3 năm có 12 quý. Như thế, theo yêu cầu của bài toán, ta phải tính tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).

Theo định lí 1b), ta có $u_{12} = 9 + (12 - 1).0{,}6 = 15{,}6$.

Do đó, theo định lí 1c), ta được

$$S_{12}=\frac{12(9+15{,}6)}{2}=147{,}6 \text{ (triệu đồng).}$$ □

Ghi chú :

a) Ta có thể tổng quát hoá phương pháp sử dụng ở lời giải của ví dụ 3 thành công thức tính số số hạng của một cấp số cộng khi biết số hạng đầu, số hạng cuối và công sai :

Số số hạng = [(số hạng đầu – số hạng cuối) : công sai] + 1.

Đây chính là công thức của bài toán trồng cây quen thuộc ở cấp 2.

b) Khi chứng minh công thức ở phần c) của định lí 1, ta đã dùng ý tưởng của Gauss (lúc còn là 1 cậu bé) khi ông tính tổng 1 + 2 + ... + 99 + 100 rằng 1 + 100 = 2 + 99 = ... = 50 + 51 gồm 50 cặp số, mỗi cặp có tổng bằng 101.

c) Từ phần b và c của định lí 1, dễ dàng suy ra

$$S_n=\frac{\left[2u_1+(n-1)d\right]n}{2}.$$

H4. *Cho cấp số cộng có số hạng đầu là –18, số hạng cuối là 36 và công sai là 3. Hãy tính tổng các số hạng của cấp số đó.*

H5. *"Em sẽ chọn phương án nào?"*

Khi kí hợp đồng lao động dài hạn với các kĩ sư được tuyển dụng, công ty liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động tự lựa chọn, cụ thể :

- Ở phương án 1 : Người lao động sẽ được nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên, và kể từ năm làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

- Ở phương án 2 : Người lao động sẽ được nhận 7 triệu đồng cho quý làm việc đầu tiên, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý.

Nếu em là người kí hợp đồng lao động với công ty liên doanh A thì em sẽ chọn phương án nào?

2. Cấp số nhân

Xét bài toán :

Một ngân hàng quy định như sau đối với việc gửi tiết kiệm theo thể thức có kì hạn : "Khi kết thúc kì hạn gửi tiền mà người gửi không đến rút tiền thì toàn bộ số tiền (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sẽ được chuyển gửi tiếp với kì hạn như kì hạn mà người gửi đã gửi" (Thể thức này thường gọi là "thể thức lãi kép").

Giả sử có một người gửi 10 triệu đồng với kì hạn 1 tháng vào ngân hàng nói trên và giả sử lãi suất của loại kì hạn này là 0,7%.

a) Hỏi nếu 6 tháng sau, kể từ ngày gửi, người đó mới đến ngân hàng để rút tiền thì số tiền rút được (gồm cả vốn và lãi) là bao nhiêu?

b) Cũng câu hỏi như trên, với giả thiết thời điểm rút tiền là 1 năm sau kể từ ngày gửi.

Với mỗi số tự nhiên n, kí hiệu u_n là số tiền người đó rút được (kể cả vốn và lãi) sau n tháng kể từ ngày gửi. Khi đó, theo giả thiết của bài toán ta có :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \times 0{,}007 = u_{n-1} \times 1{,}007 \quad \forall n \geq 2.$$

Như vậy, ta có dãy số (u_n) mà kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và 1,007.

Người ta gọi các dãy số có tính chất tương tự như dãy số (u_n) nói trên là những cấp số nhân.

Định nghĩa 2

> *Cấp số nhân* là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước đó và một số q không đổi. Nghĩa là
>
> $$(u_n) \text{ là cấp số nhân} \Leftrightarrow \forall\, n \geq 2,\ u_n = u_{n-1}.q.$$

u_1 được gọi là *số hạng đầu tiên*, u_k là *số hạng thứ k* của cấp số nhân, q được gọi là *công bội* của cấp số nhân. Nếu cấp số nhân là hữu hạn và có n số hạng thì n gọi là *số số hạng* còn u_n được gọi là *số hạng cuối* của cấp số nhân.

Ví dụ 5

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n-1}$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội q = 2.

b) Dãy số $-2, 6, -18, 54, -162$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -2$, số hạng cuối là -162, số số hạng là 5 và công bội $q = -3$.

H6. *Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?*

a) 4 ; 6 ; 9 ; 13,5.

b) –1,5 ; 3 ; –6 ; –12 ; 24 ; –48 ; 96 ; –192.

c) 7 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1.

d) 7 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0.

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{5}{2}$ và $u_{n+1} = 3u_n - 1$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy cho biết số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Giải. Từ công thức xác định dãy số (v_n) và (u_n), ta có

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = 3u_n - 1 - \frac{1}{2} = 3(u_n - \frac{1}{2}) = 3v_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó suy ra dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

và công bội $q = 3$. □

Các tính chất cơ bản của cấp số nhân được phát biểu trong định lí sau.

Định lí 2

a) *Tính chất đặc trưng của cấp số nhân :*

Nếu (a_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}.$$

b) *Số hạng tổng quát của cấp số nhân* :

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức sau :

$$u_n = u_1.q^{n-1}.$$

c) *Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân :*

Giả sử (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó ($S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$). Khi đó ta có

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Chứng minh. Phần a) và b) có thể chứng minh hoàn toàn tương tự với phép chứng minh phần a) và b) của định lí 1.

Chứng minh phần c)

Ta có $qS_n = qu_1 + qu_2 + \ldots + qu_{n-1} + qu_n = u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1}$

Do đó $S_n - qS_n = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1q^n = u_1(1-q^n)$

hay $(1-q)S_n = u_1(1-q^n)$.

Từ đó, do $q \neq 1$, suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 7. Trở lại bài toán ở phần mở đầu.

Theo yêu cầu của bài toán, ta cần tính u_6 và u_{12}. Do (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 10^7 + 10^7.0,007 = 10^7.1,007$ và công bội $q = 1,007$ nên theo định lí 2, phần b) ta có

$$u_n = 10^7.1,007.(1,007)^{n-1} = 10^7.(1,007)^n \ \forall\, n \geq 1.$$

Suy ra $u_6 = 10^7.(1,007)^6 \approx 10.427.419$ (đồng),

$u_{12} = 10^7.(1,007)^{12} \approx 10.873.107$ (đồng). □

H7. *Dân số thành phố A hiện nay là 3 triệu người. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số hàng năm của thành phố A là 2%. Hỏi dân số của thành phố A sau 10 năm nữa sẽ là bao nhiêu?*

Ví dụ 8. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 24$ và $u_4 = 48$. Hãy tính tổng mười số hạng đầu tiên của cấp số đó.

Giải. Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có

$$q = \frac{u_4}{u_3} = \frac{48}{24} = 2.$$

Do đó, theo định lí 2, phần b), ta được : $24 = u_3 = u_1.q^2 = u_1.4$. Suy ra $u_1 = 6$. Vì thế, theo phần c), ta được

$$S_{10} = \frac{6.(1-2^{10})}{1-2} = 6138.\ □$$

H8. *Đố vui. Một hào đổi lấy năm xu?*

Tương truyền, vào một ngày nọ, có một nhà toán học đến gặp một nhà tỉ phú và đề nghị được "bán" tiền cho ông ta theo thể thức sau : Liên tục trong 30 ngày, mỗi ngày nhà toán học "bán" cho nhà tỉ phú 10 triệu đồng với giá 1 đồng ở ngày đầu tiên và kể từ ngày thứ hai, mỗi ngày nhà tỉ phú phải "mua" với giá gấp đôi giá của ngày hôm trước. Không một chút đắn đo, nhà tỉ phú đồng ý ngay tức thì, lòng thầm cảm ơn nhà toán học nọ đã mang lại cho ông ta một cơ hội hốt tiền "nằm mơ cũng không thấy".

Hỏi nhà tỉ phú đã lãi được bao nhiêu trong cuộc "mua-bán" kì lạ này ?

BÀI TẬP

8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{13} = 31$, $u_{31} = -13$.

Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số đó.

9. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm số đo ba góc đó.

10. Tổng của số hạng thứ 3 và số hạng thứ 9 của một cấp số cộng bằng 8. Hãy tìm tổng 11 số hạng đầu tiên của cấp số đó.

11. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Biết rằng m, n là hai số nguyên dương phân biệt thoả mãn điều kiện $S_m = S_n$.

Chứng minh rằng $S_{m+n} = 0$.

12. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

13. Tính các tổng sau :

a) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân có 100 số hạng với số hạng đầu là 1, công bội là $\frac{1}{2}$.

b) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

14. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

§3. MỘT SỐ DÃY SỐ ĐẶC BIỆT KHÁC

Bên cạnh cấp số cộng, cấp số nhân, còn có một số dãy số thường gặp khác như cấp số nhân cộng, dãy số Fibonacci, dãy số Farey... Phần này giới thiệu sơ lược về các dãy số đó và ứng dụng các kiến thức về cấp số nhân để giải quyết hai bài toán cơ bản : tìm số hạng tổng quát và tìm tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số.

1. Cấp số nhân cộng

Trong ví dụ 3 ở §1 và ví dụ 6 ở §2, ta đã gặp các dãy số có hệ thức truy hồi tương ứng là $u_{n+1} = 2u_n + 1$ và $u_{n+1} = 3u_n - 1$. Ta thấy rằng mỗi số hạng tiếp sau bằng số hạng trước đó nhân với một hằng số, sau đó kết quả lại được cộng với một hằng số. Ta gọi một cấp số như thế là cấp số nhân cộng. Một cách tổng quát, ta có định nghĩa :

Định nghĩa

Dãy số (u_n) được gọi là cấp số nhân cộng nếu với mọi $n \geq 1$ ta có

$$u_{n+1} = qu_n + d \ (q,\ d \text{ là hằng số}).$$

Trong trường hợp $q = 1$, ta có (u_n) là cấp số cộng với công sai d và trong trường hợp $d = 0$, ta có (u_n) là cấp số nhân với công bội q.

Tiếp theo ta giả sử rằng $q \neq 1$.

Hai bài toán cơ bản liên quan đến cấp số nhân cộng có thể giải được dễ dàng dựa vào tính chất của cấp số nhân.

Ví dụ 1. (*Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân cộng*)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$, $a_{n+1} = qa_n + d$ với mọi $n \geq 1$ $(q \neq 1)$. Hãy tìm công thức tổng quát cho a_n.

Giải. Đặt $a_n = b_n + c$ với c là một hằng số mà ta sẽ chọn thích hợp. Thay vào hệ thức truy hồi, ta có

$$b_{n+1} + c = q(b_n + c) + d \Leftrightarrow b_{n+1} = qb_n + (q-1)c + d.$$

Bây giờ, ta chọn $c = \dfrac{d}{1-q}$ thì ta có $(q-1)c + d = 0$, do đó $b_{n+1} = qb_n$.

Như vậy (b_n) là cấp số nhân với công bội q và số hạng đầu $b_1 = a_1 - c = a - \frac{d}{1-q}$.

Từ đó ta có công thức tổng quát tính b_n là $\quad b_n = \left(a - \frac{d}{1-q}\right)q^{n-1}$.

Suy ra $a_n = \left(a - \frac{d}{1-q}\right)q^{n-1} + \frac{d}{1-q} = a.q^{n-1} + \frac{d(1-q^{n-1})}{1-q}$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = x$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 lên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 lên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 lên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 lên CA, ... và cứ tiếp tục như thế. Hãy tìm giá trị của x sao cho $A_{100} \equiv A_1$.

Giải. Sử dụng tính chất của tam giác nửa đều, ta lần lượt tìm được

$$CB_1 = \frac{x}{2},\ AB_1 = a - \frac{x}{2},\ AC_1 = \frac{a}{2} - \frac{x}{4},\ BC_1 = \frac{a}{2} + \frac{x}{4},\ BA_2 = \frac{a}{4} + \frac{x}{8},\ CA_2 = \frac{3a}{4} - \frac{x}{8}.$$

Như vậy, nếu đặt $u_n = CA_n$ thì ta có $u_1 = x$ và $u_{n+1} = \frac{3a}{4} - \frac{u_n}{8}$. Làm theo cách làm tổng quát ở ví dụ 1 (ở đây $q = \frac{-1}{8}$ và $d = \frac{3a}{4}$), ta đặt $u_n = v_n + \frac{2a}{3}$ và thay vào hệ thức truy hồi thì được

$$v_{n+1} + \frac{2a}{3} = \frac{3a}{4} - \frac{1}{8}\left(v_n + \frac{2a}{3}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = -\frac{1}{8}v_n.$$

Từ đó suy ra $\quad v_n = \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} v_1 = \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x - \frac{2a}{3}\right)$

và như vậy $\quad u_n = \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x - \frac{2a}{3}\right) + \frac{2a}{3}$.

Quay trở lại bài toán, ta thấy yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm x sao cho $u_{100} = u_1$, và theo tính toán ở trên thì điều này tương đương với

$$\left(-\frac{1}{8}\right)^{99}\left(x - \frac{2a}{3}\right) + \frac{2a}{3} = x \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $x=\dfrac{2a}{3}$ là giá trị cần tìm. (Thực ra lúc này, các điểm A_i $\left(i=\overline{1,100}\right)$ đều trùng nhau). □

H1. *Hãy thiết lập công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân cộng có số hạng đầu bằng a và cặp công sai, công bội là (d, q).*

2. Dãy số Fibonacci

Dãy số Fibonacci là dãy số 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... với tính chất : tất cả các số hạng, kể từ số hạng thứ ba, bằng tổng của hai số hạng kề trước nó, nói cách khác

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \text{ với mọi } n\geq 2.$$

Dãy số này được mang tên Leonardo da Pisa, hay còn gọi là Fibonacci (con trai của Bonacci), người đã mô tả sự xuất hiện của dãy số này trong cuốn Liber Abaci (1202) mặc dù trước đó dãy số này đã được nhắc tới trong một số công trình của các nhà toán học Ấn Độ.

Dãy số Fibonacci xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều bài toán và hiện tượng thiên nhiên. Ngoài bài toán thỏ đẻ con (được mô tả trong Liber Abaci), thi pháp Sankrit (được mô tả trong một số công trình cổ Ấn Độ), dãy số Fibonacci còn xuất hiện trong thực vật học (cấu trúc hạt hướng dương), động vật học (mô hình sinh sản lí tưởng của bầy ong)...

Số Fibonacci có nhiều ứng dụng trong khoa học và thực tế, trong đó có thể nhắc tới mối liên hệ giữa số Fibonacci và tỷ lệ vàng, các ứng dụng của số Fibonacci trong lí thuyết mã hoá thông tin, trong thị trường tài chính, trong lí thuyết thuật toán ... Số Fibonacci nổi tiếng và được nghiên cứu nhiều đến nỗi có hẳn một tạp chí toán học về dãy số này, được gọi tên là Fibonacci Quarterly.

Dưới đây ta xem xét một số tính chất cơ bản của dãy số Fibonacci.

Để tiện lợi cho việc tính toán, ta định nghĩa dãy số Fibonacci bắt đầu từ F_0 :

$$F_0=0, F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \text{ với mọi } n\geq 1. \qquad (1)$$

Định lí dưới đây nêu ra một số đẳng thức liên quan đến số Fibonacci.

Định lí 1

> Với dãy số Fibonacci định nghĩa ở (1), ta có các hệ thức sau :
>
> i) $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
>
> ii) $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}, \sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
>
> iii) $\sum_{i=0}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$
>
> iv) $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$
>
> v) $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Chứng minh. Các tính chất trên đây và nhiều đẳng thức khác liên quan đến dãy số Fibonacci có thể chứng minh bằng nhiều cách : sử dụng định nghĩa tổ hợp (F_n là số các chuỗi gồm các số 1 và số 2 có tổng bằng $n-1$), sử dụng công thức Binet (sẽ được trình bày ở phần dưới) và sử dụng công thức truy hồi (chứng minh bằng quy nạp). Dưới đây ta trình bày chứng minh cho các đẳng thức iii) và v).

iii) Khi $n = 1$, đẳng thức đã cho trở thành $1 = 1.2 - 3 + 2$, đúng. Giả sử ta đã có

$$\sum_{i=0}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2.$$

Khi đó

$$\sum_{i=0}^{n+1} iF_i = \sum_{i=0}^{n} iF_i + (n+1)F_{n+1} = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 + (n+1)F_{n+1}$$
$$= (n+1)(F_{n+1} + F_{n+2}) - (F_{n+2} + F_{n+3}) + 2 = (n+1)F_{n+3} - F_{n+4} + 2$$

tức là đẳng thức đúng với $n + 1$. Theo nguyên lí quy nạp toán học, ta có điều phải chứng minh.

v) Ta có

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_n^2 + (F_n - F_{n+1})F_{n+1} = -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2)$$

Từ đó, kiểm tra đẳng thức với $n = 1$, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, ta sẽ sử dụng kiến thức về cấp số nhân để tìm ra công thức tổng quát cho dãy Fibonacci.

Để làm điều này, ta tìm hai số α, β sao cho $\alpha + \beta = 1$ và $\alpha\beta = -1$. Khi đó hệ thức truy hồi $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ có thể viết lại thành

$$F_{n+1} = (\alpha+\beta)F_n - \alpha\beta F_{n-1} \Leftrightarrow F_{n+1} - \alpha F_n = \beta(F_n - \alpha F_{n-1}).$$

Như vậy nếu đặt $G_n = F_n - \alpha F_{n-1}$ thì ta có $G_1 = F_1 - F_0 = 1$ và $G_{n+1} = \beta G_n$. Áp dụng tính chất của cấp số nhân, ta suy ra $G_n = \beta^{n-1}$.

Bây giờ, để tính F_n, ta viết

$$F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-1}$$

$$F_{n-1} - \alpha F_{n-2} = \beta^{n-2}$$

....

$$F_1 - \alpha F_0 = 1$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với 1, nhân đẳng thức thứ 2 với α, đẳng thức thứ 3 với α^2, ..., đẳng thức thứ n với α^{n-1}, rồi cộng tất cả các đẳng thức thu được vế theo vế, ta được

$$F_n - \alpha^n F_0 = \beta^{n-1} + \beta^{n-2}\alpha + \ldots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Tức là $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

Cuối cùng, để ý rằng α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ và như vậy $\{\alpha, \beta\} = \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$, ta có định lí sau.

Định lí 2. (*Công thức Binet*)

Với dãy số Fibonacci định nghĩa ở (1), ta có công thức tính số hạng tổng quát F_n như sau

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Hệ quả

a) Do $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$ nên khi n càng lớn thì số hạng thứ hai càng nhỏ, ta có thể viết $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Điều này có nghĩa là khi n lớn, F_n tăng như một cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Từ công thức Binet, ta có thể chứng minh dễ dàng được rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Đẳng thức này nói lên mối liên hệ của dãy số Fibonacci với *tỉ lệ vàng*.

3. Dãy số Farey

Hầu hết các dãy số mà chúng ta nghiên cứu ở trên đều được định nghĩa bằng công thức truy hồi. Dưới đây chúng ta sẽ tìm hiểu về dãy số Farey, một dãy số được định nghĩa bằng cách mô tả cách xác định các số hạng của dãy.

Trong toán học, ***dãy số Farey*** bậc n là dãy số gồm các phân số tối giản nằm giữa 0 và 1 có mẫu số không lớn hơn n và sắp theo thứ tự tăng dần.

Mỗi một dãy số Farey đều bắt đầu bằng giá trị 0, được kí hiệu bởi phân số $\frac{0}{1}$, và kết thúc bởi giá trị 1, được kí hiệu bởi phân số $\frac{1}{1}$. Từ định nghĩa, ta thấy rằng với $k < n$ thì dãy số Farey bậc k là dãy con của dãy số Farey bậc n.

Ví dụ 3. Dãy số Farey bậc nhỏ hơn hoặc bằng 8 là các dãy số sau :

$$F_1=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right)$$

$$F_2=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right)$$

$$F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$

$$F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$$

$$F_5 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right)$$

$$F_6 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right)$$

$$F_7 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right)$$

$$F_8 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}\right).$$

Tiếp theo, chúng ta nêu ra một số tính chất cơ bản của dãy số Farey.

Các phân số đứng kề nhau trong một dãy số Farey bất kì được gọi là ***cặp Farey*** và chúng có các tính chất sau :

Tính chất 1

Nếu $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là các số kề nhau trong dãy số Farey, với $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì hiệu của chúng $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ bằng $\frac{1}{bd}$.

Chẳng hạn $\frac{1}{3}$ và $\frac{2}{5}$ là cặp Farey trong F_5 và hiệu của chúng bằng $\frac{1}{15}$.

Chứng minh. Vì $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$ nên điều này tương đương với

$$bc - ad = 1.$$

Ta chứng minh điều này bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, khẳng định đúng. Ta giả sử khẳng định đã đúng cho F_{n-1} và ta chứng minh nó đúng cho F_n.

Giả sử $\frac{h}{k}, \frac{h'}{k'}$ là các số kề nhau trong F_{n-1} được chia tách bởi $\frac{h''}{k''}$ thuộc F_n $\left(\frac{h}{k} < \frac{h''}{k''} < \frac{h'}{k'}\right)$.

Giả sử $\qquad kh'' - hk'' = r > 0,\ k''h' - h''k' = s > 0. \qquad (1)$

Giải hệ phương trình này với ẩn h'', k'', chú ý rằng ta có $kh' - hk' = 1$, ta được

$$h'' = sh + rh',\ k'' = sk + rk' \qquad (2)$$

ở đây $(r, s) = 1$ vì $(h'', k'') = 1$.

Bây giờ ta xét tập hợp S tất cả các phân số dạng

$$\frac{H}{K} = \frac{\mu h + \lambda h'}{\mu k + \lambda k'}. \qquad (3)$$

trong đó μ, λ là các số nguyên dương và $(\mu, \lambda) = 1$. Như vậy $\frac{h''}{k''}$ thuộc S. Mỗi một phân số thuộc S đều nằm giữa $\frac{h}{k}$ và $\frac{h'}{k'}$ và đều tối giản, vì mọi ước số chung của H và K đều chia hết

$$k(\mu h + \lambda h') - h(\mu k + \lambda k') = \lambda$$

và

$$-k'(\mu h + \lambda h') + h'(\mu k + \lambda k') = \mu.$$

Vì mỗi một phân số của S sớm hay muộn sẽ xuất hiện trong F_q nào đó và nó sẽ xuất hiện lần đầu tiên khi K nhỏ nhất, tức là khi $\lambda = 1$ và $\mu = 1$. Phân số này phải là $\frac{h''}{k''}$, như thế

$$h'' = h + h',\ k'' = k + k'.$$

Nếu ta thế các giá trị này của h'', k'' vào (1), ta sẽ được $r = s = 1$. Như vậy tính chất 1 đã được chứng minh cho F_n. □

Điều ngược lại cũng đúng và được phát biểu thành tính chất 2 (bạn đọc hãy tự chứng minh điều này).

Tính chất 2

Nếu như $bc - ad = 1$ với các số nguyên dương a, b, c và d với $a < b$ và $c < d$ thì $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là các số kề nhau trong dãy số Farey bậc $\max\{b, d\}$.

Tính chất 3

> Nếu $\frac{p}{q}$ kề với các số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ trong một dãy số Farey nào đó với $\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\frac{c}{d}$ thì $\frac{p}{q}$ là mediant của $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, nói cách khác,
>
> $$\frac{p}{q}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Điều này có thể suy ra dễ dàng từ tính chất thứ nhất, vì nếu

$$bp-aq=qc-pd=1,$$

thì

$$bp+pd=qc+aq, p(b+d)=q(a+c),$$

suy ra

$$\frac{p}{q}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Từ đây suy ra rằng *nếu* $\frac{a}{b}$ *và* $\frac{c}{d}$ *là các số kề nhau trong dãy số Farey thì số hạng đầu tiên sẽ xuất hiện ở giữa chúng khi bậc của dãy số Farey tăng lên sẽ là* $\frac{a+c}{b+d}$ *trong dãy số Farey bậc* $b+d$.

Ví dụ số hạng đầu tiên xuất hiện giữa $\frac{1}{3}$ và $\frac{2}{5}$ sẽ là $\frac{3}{8}$, xuất hiện trong F_8.

Dãy số Farey được đặt theo tên của nhà địa chất người Anh John Farey, người đã công bố bức thư về dãy số này trong tạp chí Philosophical Magazine năm 1816. Farey đưa ra phỏng đoán không có chứng minh rằng mọi số hạng mới trong mở rộng của dãy Farey bằng *mediant* của các số kề nó. Bức thư của Farey được Cauchy đọc và sau đó Cauchy đã đưa ra chứng minh trong cuốn sách *Exercises de mathématique* của ông, và gán kết quả này cho Farey. Trong thực tế, một nhà toán học khác, C.Haros, đã công bố một kết quả tương tự vào năm 1802 độc lập với Farey và Cauchy.

BÀI TẬP

15. Tìm số hạng tổng quát và tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

16. Bằng phương pháp tương tự như trong ví dụ 1, hãy tìm công thức cho số hạng tổng quát của dãy số xác định bởi

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = q.a_n + d.\alpha^n \text{ với mọi } n \geq 1,\ \alpha \neq q.$$

17. Giả sử F_n là số hạng thứ n của dãy Fibonacci, xác định bởi (1).

Chứng minh rằng

a) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$;

b) $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$;

c) $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

18. Dãy Lucas là dãy số xác định bởi

$$L_1 = 1, L_2 = 3 \text{ và } L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Hãy tìm công thức tổng quát cho L_n.

19. Giả sử F_n, L_n tương ứng là số hạng thứ n của dãy Fibonacci và dãy Lucas. Chứng minh rằng $F_{2n} = F_n.L_n$ với mọi số nguyên dương n.

20. Hãy lập các dãy số Farey bậc 9, bậc 10.

21. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là các phân số với $ad - bc = 1$ và $d \geq b$ thì $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ là các số hạng liên tiếp trong dãy số Farey bậc d.

Chương V

GIỚI HẠN

Giới hạn là một trong những khái niệm căn bản của giải tích, là khởi nguồn của phép tính vi phân và tích phân. Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về khái niệm giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số, các phương pháp tính giới hạn của hàm số, các tính chất cơ bản của giới hạn hàm số. Một nội dung quan trọng và cũng là một phần tiếp nối rất tự nhiên của giới hạn hàm số là khái niệm hàm số liên tục và các tính chất cơ bản của hàm số liên tục cũng được đề cập đến trong chương này. Phần chuyên sâu về giới hạn dãy số sẽ được đề cập tới trong chuyên đề "Giới hạn của dãy số".

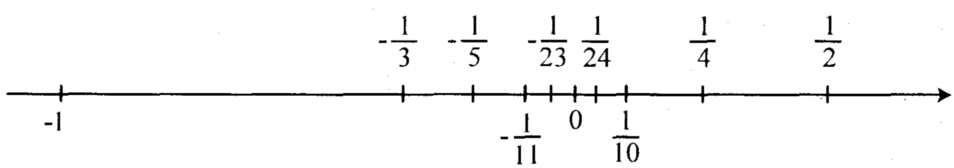
§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, tức là dãy số

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{10}, -\frac{1}{11}, \ldots$$

Biểu diễn các số hạng của dãy số đã cho trên trục số, ta thấy khi n tăng thì các điểm biểu diễn chụm lại quanh điểm 0 (hình 4.1)



Hình 4.1

Khoảng cách $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ từ điểm u_n đến điểm 0 trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn. Điều này được giải thích rõ hơn trong bảng sau :

n	1	2	3	…	10	11	12	…	23	24	25	…	50	51	52	…
$\|u_n\|$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	…	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{25}$	…	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{52}$	…

- Mọi số hạng của dãy đã cho, kể từ số hạng thứ 11 trở đi, đều cách 0 một khoảng nhỏ hơn $\frac{1}{10}$ tức là

$$|u_n - 0| = |u_n| < \frac{1}{10} \text{ với mọi } n > 10.$$

- Mọi số hạng của dãy đã cho, kể từ số hạng thứ 24 trở đi, đều cách 0 một khoảng nhỏ hơn $\frac{1}{23}$, tức là

$$|u_n - 0| = |u_n| < \frac{1}{23} \text{ với mọi } n > 23.$$

H1. *Với những n nào thì ta có* $|u_n - 0| < 0.01$? $|u_n - 0| < 0.001$?

Như vậy, mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều cách 0 một khoảng nhỏ hơn một số dương tùy ý cho trước. Ta nói rằng dãy số $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ có giới hạn là 0.

Một cách tổng quát, ta có :

Định nghĩa 1

> Ta nói rằng *dãy số (u_n) có giới hạn L* (hay có giới hạn là L) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều cách L một khoảng nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

Nói cách khác, ta có

$$\lim u_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ sao cho } \forall n > n_0 \text{ thì } |u_n - L| < \varepsilon.$$

(Kí hiệu $\lim u_n = L$ còn được viết là $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L$, đọc là dãy (u_n) có giới hạn là L khi n dần đến vô cực).

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\lim \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Giải. Với mọi $\varepsilon > 0$, xét bất phương trình

$$\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon. \qquad (*)$$

Ta thực hiện các phép biến đổi đơn giản

$$\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}-1.$$

Vậy nếu chọn $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]>\frac{2}{\varepsilon}-1$ thì ta có bất đẳng thức (*) đúng với mọi $n > n_0$.

Theo định nghĩa ta có $\lim\frac{n-1}{n+1}=1$. □

H2. *Cho k là một số nguyên dương. Chứng minh rằng* $\lim\frac{1}{n^k}=0$.

2. Một số tính chất cơ bản của giới hạn dãy số

Việc tính giới hạn dãy số dựa vào định nghĩa thực sự không đơn giản, đặc biệt là với những dãy số có công thức phức tạp. Trong phần này, ta nghiên cứu một số tính chất cơ bản của giới hạn dãy số, cho phép đưa phép tính giới hạn của một dãy số bất kì cho trước về việc tính giới hạn của những dãy số đơn giản hơn.

Định lí 1

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó

$\lim (u_n + v_n) = L + M$, $\quad\lim (u_n - v_n) = L - M$,

$\lim (u_n.v_n) = LM$, $\quad\lim (cu_n) = cL$,

$\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $\lim(u_n + v_n) = L + M$. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự (xem thêm phần bài tập).

Vì $\lim u_n = L$ nên với mọi $\frac{\varepsilon}{2}>0$, tồn tại n_1 sao cho với mọi $n > n_1$ thì

$$|u_n - L|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Tương tự, vì $\lim v_n = M$ nên với mọi $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, tồn tại n_2 sao cho với mọi $n > n_2$ thì

$$|v_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Như vậy, nếu đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì với mọi $n > n_0$, ta có các bất đẳng thức (1), (2) đều thỏa mãn. Khi đó, với mọi $n > n_0$:

$$|(u_n + v_n) - (L + M)| = |u_n - L + v_n - M| \leq |u_n - L| + |v_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Như vậy theo định nghĩa ta có $\lim(u_n + v_n) = L + M$. □

Ví dụ 2. Tìm $\lim \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^2}$.

Giải. Ta có

$$\lim \frac{n^2 - 3n + 1}{n^2} = \lim\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim 1 - 3\lim\frac{1}{n} + \lim\frac{1}{n^2} = 1 - 3.0 + 0 = 1. \ \square$$

Ví dụ 3. Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$.

Giải. Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$u_n = \frac{2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}}.$$

Vì $\lim\left(2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}\right) = \lim 2 - \lim\dfrac{4}{n} + \lim\dfrac{3}{n^2} + \lim\dfrac{3}{n^3} = 2$

và $\lim\left(1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}\right) = \lim 1 - \lim\dfrac{5}{n^2} + \lim\dfrac{7}{n^3} = 1 \neq 0$

nên $\lim u_n = \dfrac{2}{1} = 2$. □

Định lí 2

> Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó
>
> a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.
>
> b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Chứng minh.

Ta chứng minh khẳng định b). Khẳng định phần a) được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Dễ thấy nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$.

Nếu $L = 0$ thì do bất đẳng thức $\left|\sqrt{u_n}\right| < \varepsilon$ tương đương với bất đẳng thức $|u_n| < \varepsilon^2$ nên khẳng định đúng.

Nếu $L > 0$ thì tồn tại n_1 sao cho với mọi $n > n_1$ thì $|u_n - L| < \frac{L}{2}$. Từ đó với mọi $n > n_1$ ta có $u_n > \frac{L}{2}$.

Vì $\lim u_n = L$ nên với mọi $\varepsilon_1 > 0$, tồn tại n_2 sao cho với mọi $n > n_2$ thì $|u_n - L| < \varepsilon_1$. Ta có đánh giá

$$\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{L}\right| = \left|\frac{u_n - L}{\sqrt{u_n} + \sqrt{L}}\right|.$$

Như vậy với $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì ta có

$$\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{L}\right| < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\frac{L}{2}} + \sqrt{L}} = \varepsilon.$$

Do ε_1 nhỏ tùy ý và $L > 0$ nên ε nhỏ tùy ý và ta có điều phải chứng minh. □

***Định lí 3** (Định lí kẹp)*

> Xét 3 dãy số (u_n), (v_n), (w_n). Giả sử với mọi n ta có $u_n \leq v_n \leq w_n$.
>
> Khi đó nếu $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

Chứng minh. Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh kết luận của định lí cho trường hợp $L = 0$.

Vì $\lim u_n = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_1 sao cho với mọi $n > n_1$: $|u_n| < \varepsilon$, tức là $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$.

Tương tự, tồn tại n_2 sao cho với mọi $n > n_2$: $|w_n| < \varepsilon$, tức là $-\varepsilon < w_n < \varepsilon$.

Như vậy, với mọi $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ta có $-\varepsilon < u_n \le v_n \le w_n < \varepsilon$.

Theo định nghĩa, ta có $\lim v_n = 0$. □

Hệ quả.

1) Nếu $u_n \le c$ với mọi n thì $\lim u_n \le c$ (nếu giới hạn tồn tại).

2) Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng $\lim \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$.

Giải. Ta có $\left|\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ và $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

H3. *Chứng minh rằng nếu* $|q| < 1$ *thì* $\lim q^n = 0$.

(Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli và định lí 3, xem thêm định lí 4, mục 5)

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Xét cấp số nhân vô hạn

$$u_1, u_1q, u_1q^2, \ldots, u_1q^n, \ldots$$

có công bội q với $|q| < 1$ (gọi là một *cấp số nhân lùi vô hạn*).

Ta biết rằng tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là

$$S_n = u_1 + u_1q + \ldots + u_1q^{n-1} = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}q^n.$$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$. Do đó $\lim S_n = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Ta gọi giới hạn đó là *tổng của cấp số nhân* đã cho và viết

$$S_n = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

H4. *Tìm tổng của cấp số nhân* $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

Ví dụ 5. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,777... dưới dạng phân số.

Giải. Ta có $0,777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \ldots$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{7}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$. Do đó $0,777\ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$. □

H5. *Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,313131... dưới dạng phân số.*

4. Dãy số có giới hạn vô cực

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

Ta thấy rằng khi n tăng thì u_n trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn. Nói cách khác, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn một số dương lớn tùy ý.

Ta nói rằng dãy số $(2n - 3)$ có giới hạn là $+\infty$.

Một cách tổng quát ta có

Định nghĩa 2

> Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
>
> Khi đó ta viết $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$.
>
> Như vậy : $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > M$.

Áp dụng định nghĩa trên, ta có thể chứng minh rằng :

a) $\lim n = +\infty$ b) $\lim \sqrt{n} = +\infty$ c) $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

Hoàn toàn tương tự, ta có định nghĩa :

Định nghĩa 3

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Khi đó ta viết $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$.

Nói cách khác $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow u_n < M$.

Vì $+\infty$ và $-\infty$ không phải là các số thực nên các định lí ở phần 2 nói chung không còn đúng với các giới hạn vô cực. Bằng cách sử dụng định nghĩa, ta có thể chứng minh được các tính chất sau đây :

1) Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

2) Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim u_n.v_n = \pm\infty$, trong đó dấu + hoặc – được chọn theo đúng quy tắc nhân dấu thông thường.

3) Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim u_n.v_n = \pm\infty$, trong đó dấu + hoặc – được chọn theo đúng quy tắc nhân dấu thông thường.

4) Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và (v_n) có dấu xác định kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \pm\infty$ trong đó dấu + hoặc – được chọn theo đúng quy tắc chia dấu thông thường.

5) Nếu $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = L$ thì $\lim (u_n + v_n) = \pm\infty$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim(3n^2 - 101n - 51)$.

Giải. Ta có $3n^2 - 101n - 51 = n^2\left(3 - \dfrac{101}{n} - \dfrac{51}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(3 - \dfrac{101}{n} - \dfrac{51}{n^2}\right) = 3 > 0$ nên $\lim(3n^2 - 101n - 51) = +\infty$. □

H6. *Tìm*

a) $\lim(n\sin n - 2n^3)$ b) $\lim \dfrac{1}{n\sin n - 2n^3}$.

Ví dụ 7. Tìm $\lim \dfrac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n}$.

Giải. Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = \frac{3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}}.$$

Vì $\lim\left(3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}\right) = 3 > 0, \lim\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ và $\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2} > 0$ với mọi n nên

$$\lim \frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = +\infty. \square$$

H7. *Tìm* $\lim \dfrac{-2n^3 + n}{3n - 2}$.

5. Một số giới hạn thường gặp

Phần này trình bày một số giới hạn cơ bản mà chúng ta thường sử dụng trong khi tìm giới hạn dãy số.

Định lí 4

1) Nếu k là số nguyên dương thì $\lim n^k = +\infty$ và $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.

2) Nếu k là số nguyên dương lớn hơn 1 thì $\lim \sqrt[k]{n} = +\infty$ và $\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$.

3) Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$. Nếu $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty$.

Chứng minh. Kết quả 1, 2 có thể chứng minh dễ dàng bằng định nghĩa và ta bỏ qua chứng minh này. Để chứng minh 3), ta xét trường hợp $|q|<1$ và đặt $a=\dfrac{1}{|q|}>1$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$a^n=(1+a-1)^n\geq 1+n(a-1)>0.$$

Từ đó suy ra

$$0<\frac{1}{a^n}\leq\frac{1}{1+n(a-1)}<\frac{1}{n(a-1)}.$$

Mặt khác lim 0 = 0 và $\lim\dfrac{1}{n(a-1)}=0$ nên theo định lí 3 ta có $\lim\dfrac{1}{a^n}=0$, tức là $\lim|q|^n=0$, suy ra $\lim q^n=0$.□

Ví dụ 8. Cho a, b là hai số thực dương phân biệt. Đặt $u_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}$.

Hãy tìm $\lim u_n$.

Giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a>b$. Khi đó

$$u_n=\sqrt[n]{a^n+b^n}=\sqrt[n]{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}=a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Vì $\lim(1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n)=1$ và $1<\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}<1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ nên áp dụng định lí 3, ta có

$$\lim\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=1.$$

Từ đó suy ra $\lim u_n=a$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có $\lim u_n=\max\{a,b\}$.□

BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{1}{n(n+1)}$ b) $\lim \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ c) $\lim \dfrac{2n-1}{2n+2}$.

2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{n^2+n}}$ b) $\lim \dfrac{3^n}{1+2^n+3^n}$ c) $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

3. a) Chứng minh rằng $\lim \sqrt[n]{2} = 1$.

b) Chứng minh rằng $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Hướng dẫn. Sử dụng định lí kẹp.

4. Hãy biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,1428571428571... dưới dạng phân số.

5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(2^n - 3^n\right)$ b) $\lim(n + \sin n)$ c) $\lim \sqrt[3]{n^3+3n+1}$.

6. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(\sqrt{n^2+n+1} - n)$ b) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n$.

7. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$,..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$,... Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n$ theo thứ tự là chu vi và diện tích tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$. Ta thấy rằng khi $x = 2$ thì hàm số không xác định. Tuy nhiên với mọi $x \neq 2$ thì $f(x)$ hoàn toàn xác định. Như vậy, nếu xét dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ các số thực khác 2 thì dãy số $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ xác định. Ta quan tâm đến câu hỏi : Nếu $\lim x_n = 2$ thì $\lim f(x_n) = ?$

Vì $x_n \neq 2$ nên $f(x_n) = \dfrac{2x_n^2 - 8}{x_n - 2} = 2(x_n + 2)$ với mọi n.

Do đó $\lim f(x_n) = \lim 2(x_n + 2) = 2(\lim x_n + 2) = 2(2 + 2) = 8$.

Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là 8 khi x dần đến 2.

Một cách tổng quát ta có

Định nghĩa 1

> Giả sử $(a\,;\,b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a\,;\,b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a\,;\,b) \setminus x_0$ (tức là $x_n \in (a\,;\,b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi n) mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.
>
> Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Định nghĩa 1 nêu lên mối liên hệ chặt chẽ giữa khái niệm giới hạn dãy số và giới hạn hàm số. Rõ ràng, với định nghĩa trên, các tính chất và định lí của giới hạn dãy số sẽ được chuyển sang các tính chất và định lí về giới hạn hàm số một cách tự nhiên.

Bên cạnh định nghĩa trên, để thuận tiện hơn trong việc tìm một số giới hạn bằng định nghĩa, cũng như chứng minh một số tính chất đặc trưng cho giới hạn hàm số, ta đưa ra một định nghĩa khác tương đương cho khái niệm giới hạn hàm số. Định nghĩa này được đưa ra dựa trên quan sát là khi giá trị x_n gần với x_0 thì giá trị $f(x_n)$ gần với L. Điều này đúng với mọi dãy số $x_n \to x_0$ nên cũng đúng với mọi số gần x_0.

Định nghĩa 2

> Giả sử $(a\ ;\ b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi số dương nhỏ tùy ý ε, tồn tại số dương δ sao cho nếu $x \in (a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$, x cách x_0 một khoảng không quá δ thì $f(x)$ cách L một khoảng không quá ε.

Như vậy :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$, ta có

$$f(x_n) = x_n \cos\frac{1}{x_n}.$$

Vì $|f(x_n)| = |x_n|\left|\cos\dfrac{1}{x_n}\right| \leq |x_n|$ và $\lim|x_n| = 0$ nên $\lim f(x_n) = 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0. \square$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$.

Giải. Ta minh họa cách dùng định nghĩa 2 để giải bài toán này. Với mọi $\varepsilon > 0$, ta cần tìm $\delta > 0$ để với x thỏa mãn điều kiện $|x - 4| < \delta$ thì ta có $\left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$.

Ta có $\left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$ tương đương với

$$2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < x < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 .$$

$$\Leftrightarrow -4\varepsilon + \varepsilon^2 < x - 4 < 4\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Như vậy nếu chọn $\delta = 4\varepsilon - \varepsilon^2$ thì với $|x - 4| < \delta$, ta sẽ có $\left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$. Và điều đó có nghĩa là ta có $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$. □

b) Giới hạn vô cực

Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm được định nghĩa tương tự như giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm. Chẳng hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ có nghĩa là với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\setminus x_0$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$. Hoặc nếu theo ngôn ngữ định nghĩa 2 thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{(x-1)^2} = +\infty$.

Giải.

Cách 1. (Sử dụng định nghĩa qua dãy số)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 1$ và $\lim x_n = 1$, ta có $f(x_n) = \dfrac{3}{(x_n - 1)^2}$.

Vì $\lim 3 = 3 > 0$, $\lim (x_n - 1)^2 = 0$ và $(x_n - 1)^2 > 0$ với mọi n nên $\lim f(x_n) = +\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{(x-1)^2} = +\infty$.

Cách 2. (Sử dụng định nghĩa qua ngôn ngữ ε, δ).

Với mọi $M > 0$, ta xét bất phương trình

$$\frac{3}{(x-1)^2} > M \Leftrightarrow |x - 1| < \sqrt{\frac{3}{M}}. \quad (1)$$

Như vậy với mọi $M > 0$, ta chỉ cần chọn $\delta = \sqrt{\dfrac{3}{M}}$ thì theo (1), với mọi $x \neq 1$,

$|x - 1| < \delta$, ta có $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2} > M$.

Từ đó theo định nghĩa : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{(x-1)^2} = +\infty$. □

c) Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giới hạn của hàm số tại vô cực (khi x dần đến $+\infty$ hoặc $-\infty$) được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số tại một điểm.

Định nghĩa 3

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; +\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có

$$\lim f(x_n) = L.$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$.

Trên ngôn ngữ ε-δ, ta có định nghĩa sau :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x > M, \left|f(x) - L\right| < \varepsilon .$$

Các giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 4

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ vì với mọi $\varepsilon > 0$, nếu chọn $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ thì với mọi $x > M$ ta có

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \varepsilon .$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ vì với mọi $M > 0$, nếu chọn $N = \sqrt{M}$ thì với mọi $x > N$ ta có

$$f(x) = x^2 > N^2 = M.$$

H1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k ta có*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty, & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ *d)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.

2. Tính chất về giới hạn của hàm số

Dựa vào định nghĩa của giới hạn hàm số và áp dụng các định lí về giới hạn của dãy số, có thể chứng minh được các định lí sau về giới hạn hàm số

Định lí 1

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$; b) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$;

c) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = LM$.

Đặc biệt, nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0} \left[cf(x)\right] = cL$.

d) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Để dễ nhớ, ta phát biểu

Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương của các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 1 vừa nêu và các định lí 2, 3 tiếp theo vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Nhận xét

Nếu k là một số nguyên dương và a là hằng số thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x\to x_0} ax^k = \lim_{x\to x_0} a.\lim_{x\to x_0} x.\lim_{x\to x_0} x\ldots\lim_{x\to x_0} x = a\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^k = ax_0^k.$$

Ví dụ 5. Tìm

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5x^2+7\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+x^2}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5x^2+7\right)=\lim\limits_{x\to 2}x^3-5\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}7=2^3-5.2^2+7=-5.$

b) Với $x\neq -1$ ta có $\dfrac{x^2-x-2}{x^3+x^2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+1)}=\dfrac{x-2}{x^2}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2}=-3.$ □

Nhận xét

Dễ thấy rằng nếu $P(x)$ là một đa thức bất kì thì $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P\left(x_0\right)$.

H2. *Tìm* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+2x}$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x+10}{x^3+3x-3}$.

Giải. Chia tử và mẫu của phân thức cho x^3 (x^3 là lũy thừa bậc cao nhất của x trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{2x^2-x+10}{x^3+3x-3}=\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}} \text{ với mọi } x\neq 0.$$

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}\right)=2\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2}+10\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^3}=2.0-0+10.0=0$

và $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)=1$

nên theo định lí 1d, ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x+10}{x^3+3x-3}=\dfrac{0}{1}=0.$ □

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi x thuộc $J \setminus \{x_0\}$, J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 7. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}}$.

Giải. Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7} = 2$ nên $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}} = \sqrt{2}$. □

H3. *Tìm* $\lim\limits_{x\to -1} |x^3 + 7x|$ *và* $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{x^3 + 7x}$.

***Định lí 3** (Định lí kẹp)*

Cho ba hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. Giả sử tồn tại khoảng J chứa x_0 sao cho với mọi x thuộc $J \setminus \{x_0\}$ ta có bất đẳng thức $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Khi đó nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

thì ta cũng có $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Ví dụ 8. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$.

Giải. Ta có $-|x| \leq x\cos\dfrac{1}{x} \leq |x|$ với mọi $x \neq 0$ mà $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ nên theo định lí 3, ta có $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$. □

H4. *Chứng minh rằng* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2^{[x]}} = 0$.

3. Giới hạn một bên

Trong định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ta giả thiết hàm số f xác định trên tập hợp $(a;\, b) \setminus \{x_0\}$, trong đó $(a;\, b)$ là một khoảng chứa điểm x_0. Như vậy, các giá trị được xét của x là các giá trị gần x_0, bao gồm cả giá trị lớn hơn lẫn nhỏ hơn x_0. Khái niệm giới hạn một bên xuất hiện khi ta chỉ xét các giá trị của hàm số với $x > x_0$ hoặc chỉ xét các giá trị của hàm số với $x < x_0$.

Định nghĩa 4

> Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0\,;\, b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có *giới hạn bên phải* là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;\, b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $f(x_n) = L$.
>
> Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Định nghĩa giới hạn bên trái được phát biểu tương tự :

Định nghĩa 5

> Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a\,;\, x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có *giới hạn bên trái* là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;\, x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $f(x_n) = L$.
>
> Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Định nghĩa giới hạn một bên vô cực được phát biểu tương tự.

Cũng như trong trường hợp định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, với giới hạn một bên, ta cũng có định nghĩa tương đương bằng ngôn ngữ ε-δ như sau :

Định nghĩa 6

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0\ ;\ b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có *giới hạn bên phải* là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, ta luôn tìm được số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x > x_0$, $x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+.$$

Nói cách khác

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x > x_0, x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Định nghĩa giới hạn bên trái, giới hạn một bên vô cực được phát biểu tương tự.

Nhận xét

1) Hiển nhiên nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

2) Điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là : Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

3) Các định lí 1, 2, 3 trong phần 2 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^+$ hoặc $x \to x_0^-$.

Ví dụ 9. Gọi sign (đọc là signum) là hàm dấu

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 \text{ khi } x < 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ 1 \text{ khi } x > 0 \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sign}(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sign}(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$ (nếu có).

Giải. Với $x < 0$ ta có $\operatorname{sign}(x) = -1$. Do đó

$$\lim_{x\to 0^-} \text{sign}(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1.$$

Tương tự ta có $\quad \lim_{x\to 0^+} \text{sign}(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$

Vì $\lim_{x\to 0^-} \text{sign}(x) \neq \lim_{x\to 0^+} \text{sign}(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x\to 0} \text{sign}(x)$. □

H5. *Tìm giới hạn bên phải, giới hạn bên trái và giới hạn (nếu có) của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ khi } x < -1 \\ 2x^2 - 3 \text{ khi } x \geq -1 \end{cases}$$

khi x dần đến -1.

4. Sơ lược về hàm số mũ và hàm số lôgarit

Trong phần này, nhằm phục vụ cho các vấn đề liên quan đến hàm số mũ, hàm số lôgarit có trong chương này và các chương sau, chúng ta nêu ra định nghĩa lũy thừa với số mũ thực và các tính chất của nó mà không chứng minh, từ đó đưa đến khái niệm hàm số mũ và hàm số lôgarit. Chi tiết về vấn đề mở rộng khái niệm lũy thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit sẽ được trình bày trong chương trình lớp 12.

- Với số thực $a > 0$ và số nguyên dương n, ta có định nghĩa lũy thừa bậc n của a như sau:

$$a^n = a.a...a \ (n \text{ số } a) \quad \text{và quy ước } a^0 = 1.$$

Nói cách khác, lũy thừa bậc n của a có thể được định nghĩa bằng quy nạp như sau:

$$a^0 = 1, \ a^{n+1} = a^n.a.$$

Nếu n là số nguyên âm thì ta định nghĩa: $a^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$.

Như vậy ta đã định nghĩa được lũy thừa nguyên của một số thực dương bất kì.

- Với $n \geq 2$ và với $a > 0$, ta thừa nhận có số $b > 0$ duy nhất sao cho $b^n = a$, kí hiệu là $b = \sqrt[n]{a}$ và gọi là căn bậc n của a.

Bây giờ với số thực $a > 0$ bất kì và số hữu tỉ $r = \frac{p}{q}$, trong đó $(p, q) = 1$, $q > 1$ (trường hợp $q = 1$ thì r là số nguyên và a^r đã được định nghĩa ở trên), ta định nghĩa

$$a^r = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p .$$

Như vậy, ta đã định nghĩa được lũy thừa r của số thực dương a với r là một số hữu tỉ.

- Cuối cùng với $a > 0$ và x là một số thực bất kì. Xét (r_n) là một dãy số hữu tỉ có giới hạn là x khi n dần đến vô cùng. Khi đó dãy số (a^{r_n}) sẽ hội tụ đến một giới hạn hữu hạn (chúng ta bỏ qua phép chứng minh chi tiết kết quả này). Ta định nghĩa

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} .$$

Như vậy, với $a > 0$ cố định, với mỗi số thực x, ta đều xác định được giá trị a^x. Ta gọi tương ứng này là ***hàm số mũ với cơ số a.***

Hàm số này có những tính chất cơ bản sau :

1) $a^x.a^y = a^{x+y} \quad \forall\, a > 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \forall\, a > 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

3) $\left(a^x\right)^y = a^{xy} \quad \forall\, a > 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

4) $a^x.b^x = \left(ab\right)^x \quad \forall\, a, b > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

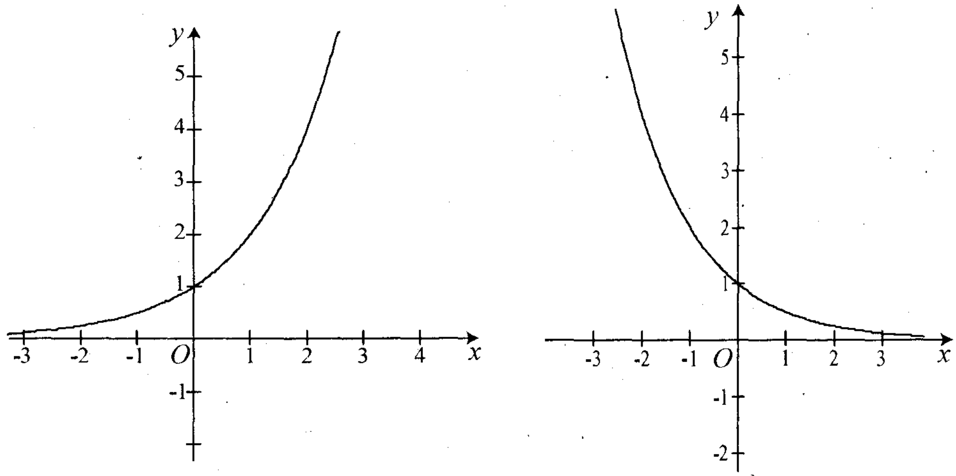
5) Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

6) Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

7) Nếu $0 < a < 1$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

8) Nếu $a > 1$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$

Các tính chất 5, 6, 7, 8 có thể được thấy rõ qua đồ thị của hàm số mũ (h.4.2) :



$y = 2^x$ $\qquad$ $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Hình 4.2

- Theo như tính chất 5, 6, 7 và 8 thì với $a > 0$, $a \neq 1$, hàm số $y = a^x$ là một song ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}^+$. Như thế hàm số $y = a^x$ sẽ có hàm số ngược. Ta kí hiệu hàm số này là $y = \log_a x$. Theo định nghĩa ta có

$$\log_a\left(a^x\right) = x \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R} \text{ và } a^{\log_a x} = x \text{ với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R}^+.$$

Từ tính chất của hàm số mũ và định nghĩa hàm số ngược, có thể suy ra những tính chất cơ bản sau đây của hàm lôgarit :

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \;\; \forall\, a > 0, a \neq 1, \forall\, x, y > 0$

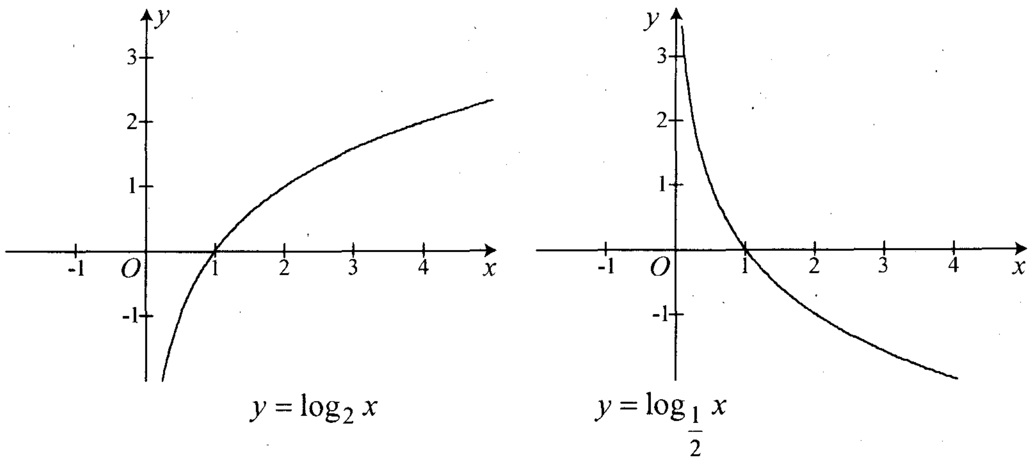
2) $\log_a\left(b^x\right) = x\log_a b \;\; \forall\, a > 0, a \neq 1, \forall\, b > 0$

3) Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}^+$

4) Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$

5) Nếu $a, b, x > 0$, $a, b \neq 1$ thì ta có $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (công thức đổi cơ số).

Các tính chất cơ bản của hàm số lôgarit, coi như hàm số ngược của hàm số mũ, được thể hiện qua đồ thị của nó như dưới đây (h.4.3) :



Hình 4.3

- Cuối cùng, chúng ta giới thiệu một hằng số đặc biệt có vai trò quan trọng trong toán học. Xét dãy số $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Ta có thể chứng minh được dãy số này tăng và bị chặn trên bởi 3, từ đó suy ra dãy số này có giới hạn hữu hạn (xem chi tiết trong chuyên đề dãy số). Ta đặt giới hạn này là e, tức là

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

e là một số vô tỉ, $e \approx 2,71...$

Hàm số e^x có những tính chất đặc biệt và người ta thường dùng e làm cơ số cho các hàm số mũ dùng trong giải tích (các tính chất này sẽ lần lượt được giới thiệu trong chương này và chương đạo hàm). Hàm ngược của hàm e^x (hay $\exp(x)$, viết tắt của chữ exponent) là $\log_e x$ còn được kí hiệu là $\ln x$ (đọc là lôgarit tự nhiên của x hay lôgarit Neper của x).

5. Các dạng vô định

Khi giải các bài toán về giới hạn, ta có thể gặp một số trường hợp sau đây:

1) Tìm $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \text{ hoặc } \lim f(x) = \pm\infty,\ \lim g(x) = \pm\infty.$$

2) Tìm $\lim[f(x)g(x)]$, trong đó $\lim f(x) = 0,\ \lim g(x) = \pm\infty.$

3) Tìm $\lim[f(x) - g(x)]$, trong đó

$$\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim f(x) = \lim g(x) = -\infty.$$

4) Tìm $\lim f(x)^{g(x)}$, trong đó $\lim f(x) = 1,\ \lim g(x) = \infty$.

5) Tìm $\lim f(x)^{g(x)}$, trong đó $\lim f(x) = 0,\ \lim g(x) = 0$.

(Khi $x \to x_0$ hoặc $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

Khi đó không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cũng như các quy tắc tìm giới hạn vô cực. Ta gọi đó là các dạng vô định và kí hiệu chúng, theo thứ tự là

1) $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ 2) $0.\infty$ 3) $\infty - \infty$ 4) 1^{∞} 5) 0^0.

Các dạng 4 và 5 có thể đưa về dạng 1, 2 bằng phép lôgarit hóa hoặc sử dụng các giới hạn đặc biệt (xem bài 5). Ta xem xét một số ví dụ cho các dạng 1, 2, 3.

Khi tìm giới hạn các dạng này, ta cần thực hiện một vài phép biến đổi để có thể sử dụng được các định lí hoặc quy tắc đã biết. Làm như vậy được gọi là *khử dạng vô định*.

a) Dạng $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 10. Tìm $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$.

Giải. Đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Để khử dạng vô định, ta nhân cả tử số và mẫu số cho lượng liên hợp $\sqrt{x+2} + 2$.

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

với $x \neq 2$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$. □

Ví dụ 11. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2}$.

Giải. Ta có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Với mọi $x>0$, ta có

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}=x\sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

Do đó $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+2}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{2}{x}}$.

Từ đây $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{2}{x}}=1$. □

H6. *Tìm* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, *trong đó m, n là những số nguyên dương.*

b) Dạng 0.∞

Ví dụ 12. Tìm $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Giải. Đây là dạng vô định $0.\infty$. Để khử dạng vô định này, ta cần đến giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. (Xem thêm mục 7).

Để đưa về dạng này, ta đặt $y=x-1\Leftrightarrow x=y+1$ và biến đổi

$$(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=y\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi y}{2}\right)=-y\cot\left(\frac{\pi y}{2}\right)=-\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

Từ đó $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}-\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$. □

c) Dạng $\infty-\infty$

Ví dụ 13. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

Giải. Đây là dạng vô định $\infty-\infty$. Để khử dạng vô định, ta biến đổi (với $x>0$)

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

Từ đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$. □

H7. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

6. Một số giới hạn đặc biệt

Phần này giới thiệu một số giới hạn đặc biệt thường gặp khi khử dạng vô định.

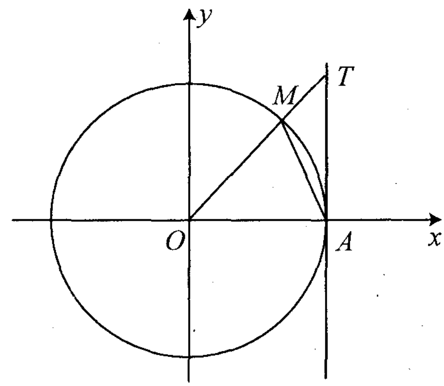
a) Giới hạn đặc biệt thứ nhất : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Chứng minh. Vì $x\to 0$ nên ta chỉ cần xét x trong một khoảng nào đó chứa điểm 0, chẳng hạn $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ và $x\neq 0$.

Trước hết giả sử $x \in (0\,;\,\frac{\pi}{2})$.

Trên đường tròn lượng giác, ta đặt cung AM có số đo bằng x rad. Tia OM cắt trục tang tại điểm T (hình 4.4). Ta có diện tích tam giác OAM < diện tích hình quạt OAM < diện tích tam giác OAT, tức là

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$



Hình 4.4

Vì $x \in (0;\,\frac{\pi}{2})$ nên $\sin x > 0$; do đó chia các vế của các bất đẳng thức trên cho $\frac{1}{2}\sin x$, ta được :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$

Vì $\cos x > 0$ với $x \in (0\,;\,\frac{\pi}{2})$ nên từ (1) suy ra: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. (2)

Nếu $x \in (-\frac{\pi}{2}\,;\,0)$ thì $-x \in (0;\,\frac{\pi}{2})$; áp dụng công thức (2) với $-x$, ta được

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \text{ hay } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Vậy với mọi $x \in (-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2})$ và $x \neq 0$, ta luôn có (2).

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$. Theo định lí 3, từ (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. □

Giới hạn này thường được sử dụng khi tính giới hạn của các biểu thức có chứa hàm số lượng giác.

Ví dụ 14. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$. □

b) Giới hạn đặc biệt thứ hai : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Điều này tương đương với

$$\lim_{y\to +\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e.$$

Và điều này suy ra từ định nghĩa của số e và bất đẳng thức kẹp

$$\left(1+\frac{1}{[y]+1}\right)^{[y]}\le\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\le\left(1+\frac{1}{[y]}\right)^{[y]+1}.$$

Để chứng minh $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ hay là $\lim\limits_{y\to -\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e$,

ta đặt $t=-y$ thì $\lim\limits_{y\to -\infty}(1+\frac{1}{y})^y=\lim\limits_{t\to +\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim\limits_{t\to +\infty}(1+\frac{1}{t-1})^t=e.$

Như vậy ta có đpcm.□

Giới hạn này thường được sử dụng để khử dạng vô định 1^{∞}.

Ví dụ 15. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Giải. Ta có

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\frac{-1}{2}}$$

(xem VD 14 và để ý rằng $\lim\limits_{t\to t_0}e^t=e^{t_0}$ (xem định lí 2, §3)).□

Giới hạn đặc biệt thứ hai còn có thể viết dưới dạng

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}\quad\text{và}\quad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}.$$

H8. *Sử dụng giới hạn đặc biệt thứ hai, hãy chứng minh các giới hạn đặc biệt trên.*

Ví dụ 16. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}.\ln 3=\ln 3$

Tương tự $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}=\ln 2$.

Từ đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x-1}{x}-\dfrac{2^x-1}{x}\right)=\ln 3-\ln 2$. □

Ngoài các giới hạn đặc biệt trên, có một số giới hạn hữu ích khác như sau :

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$ $(a>1,\ n>0)$ - So sánh hàm lũy thừa với hàm mũ

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}=0$ $(a>1,\ \varepsilon>0)$ - So sánh hàm log với hàm lũy thừa.

Ta thừa nhận không chứng minh các kết quả đó.

Ví dụ 17. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

Giải.

Đây là dạng vô định 0^0. Ta đưa về dạng vô định $0.\infty$ bằng cách lấy lôgarit biểu thức dưới dấu lim. Cuối cùng ta biến đổi

$$x\ln x=-x\ln\frac{1}{x}=-\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=e^0=1$. □

BÀI TẬP

8. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+2}$.

9. Cho hàm số $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ và hai dãy số $(x_n'),(x_n'')$ với

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi},\ x_n''=\frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}.$$

a) Tìm giới hạn của các dãy số (x_n'), (x_n''), $(f(x_n'))$, $(f(x_n''))$.

b) Tồn tại hay không giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$?

10. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

11. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)}{(2x+3)^5}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^3-3x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

12. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\le 2\\ 4x-3 & \text{khi } x>2.\end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ (nếu có).

13. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$

14. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\log_x 2$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x - 2}$.

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm, ta không giả thiết hàm số xác định tại điểm đó. Hơn nữa, nếu hàm số xác định tại điểm được xét thì giới hạn (nếu có) và giá trị hàm số tại điểm đó không nhất thiết bằng nhau. Tuy nhiên, với những hàm số thường gặp như các hàm đa thức, các hàm phân thức hữu tỉ, các hàm số lượng giác ..., giới hạn và giá trị hàm số tại mỗi điểm mà nó xác định bằng nhau. Các hàm số có tính chất vừa nêu có vai trò quan trọng trong Giải tích và các ngành Toán học khác. Người ta gọi chúng là các *hàm số liên tục*.

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 1

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$. Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm x_0.

Ví dụ 1

a) Hàm số $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ vì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 = f(x_0).$$

b) Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} \text{ khi } x\neq 0\\ 0 \text{ khi } x=0\end{cases}$

gián đoạn tại điểm $x = 0$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$.

H1. *Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=|x|$ tại điểm $x = 0$.*

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$$

tại điểm $x = 0$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ và $f(0) = 0$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ nên hàm số f gián đoạn tại điểm $x = 0$. □

H2. *Xét tính liên tục của hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\leq 1\\ x-1 & \text{khi } x>1\end{cases}$$

tại điểm $x = 1$.

Ghi chú :

Theo định nghĩa, một hàm số có thể gián đoạn tại điểm x_0 vì các lí do sau:

+ Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nhưng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. Trong trường hợp này, ta có thể định nghĩa lại giá trị $f(x_0)$ để hàm số trở nên liên tục tại x_0. Ta gọi x_0 là *điểm gián đoạn loại 1.*

+ Không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Trong trường hợp này cũng có thể xảy ra hai trường hợp :

- Tồn tại giới hạn bên trái và giới hạn bên phải tại x_0 nhưng hai giới hạn này không bằng nhau. Ta gọi x_0 là *điểm nhảy* của hàm số *f*.

- Một trong hai giới hạn trên hoặc cả hai không tồn tại.

Ta gọi x_0 là *điểm gián đoạn loại 2.*

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

Định nghĩa 2

> a) Giả sử hàm số f xác định trên tập J, trong đó J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng. Ta nói rằng **hàm số f liên tục trên J** nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.
>
> b) Hàm số f xác định trên đoạn $[a\ ;\ b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và
>
> $$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1\ ;\ 1]$.

Giải. Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1\ ;\ 1]$.

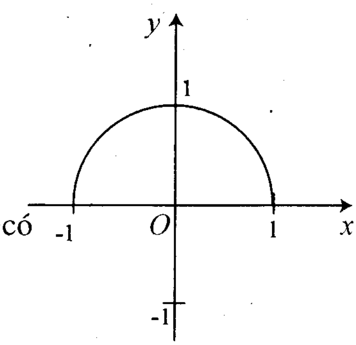
Vì với mọi $x_0 \in (-1\ ;\ 1)$ ta có

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0)$$

nên hàm số liên tục trên khoảng $(-1;\ 1)$. Ngoài ra ta có

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$$

và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$.



Hình 4.5

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1\ ;\ 1]$ (hình 4.5).□

Chú ý

Tính liên tục của các hàm số trên các nửa khoảng $[a\ ;\ b)$, $(a\ ;\ b]$, $[a\ ;\ +\infty)$ và $(-\infty\ ;\ b]$ được định nghĩa tương tự như tính liên tục của hàm số trên một đoạn.

H3. *Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}$ liên tục trên nửa khoảng $[-1, +\infty)$.*

Qua các ví dụ đã xét, chẳng hạn ví dụ 3, ta thấy hàm số liên tục trên một khoảng hoặc một đoạn có đồ thị là một đường "liền nét". Trong ví dụ 2, hàm số f gián đoạn tại điểm $x = 0$; đồ thị của nó không phải là đường "liền nét".

Từ định lí 1 trong §2, dễ dàng suy ra

Định lí 1

> • Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).
>
> • Nếu hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm x_0 và hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $g(x_0)$ thì hàm số $h(x)=f(g(x))$ liên tục tại điểm x_0.

Hệ quả 1

> Hàm đa thức, hàm phân thức hữu tỉ và hàm căn thức của các đa thức và phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng (tức là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của chúng).

Ngoài các hàm số được nói đến ở hệ quả 1, các hàm số sơ cấp còn được xây dựng từ các hàm số sơ cấp cơ bản: hàm lượng giác, hàm mũ và hàm lôgarit. Định lí dưới đây cho chúng ta câu trả lời về tính liên tục của các hàm số này.

Định lí 2

> 1) Các hàm lượng giác $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.
>
> 2) Hàm số $y=e^x$ liên tục trên $\mathbb{R}$;
>
> 3) Hàm số $y=\ln x$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh chi tiết định lí này xin xem ở bài tập 3 và bài tập 6 phần bài tập bổ sung.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$

a) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ b) $y=e^x(\sin x+x\cos x)$

Giải. a) Hàm số $\ln x$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$, hàm số $x+\sqrt{x^2+1}$ liên tục và nhận giá trị dương với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, do đó, theo định lí 1 (về sự liên tục của hàm hợp), ta có $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Vì e^x, $\sin x$, x, $\cos x$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên theo định lí 1, hàm số $y=e^x(\sin x+x\cos x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. □

Chú ý.

Các hàm số c (hằng số), x, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, e^x, $\ln x$ được gọi là các *hàm số sơ cấp cơ bản*. Các hàm số thu được từ các hàm số sơ cấp cơ bản bằng cách lấy tổng, hiệu, tích, thương và phép lấy hàm hợp được gọi là các *hàm số sơ cấp*. Như vậy, nhờ các định lí 1 và định lí 2, ta có ***các hàm số sơ cấp liên tục trên miền xác định của chúng***.

H4. *Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.*

3. Tính chất của hàm số liên tục

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và có giá trị khác nhau tại hai đầu mút, chẳng hạn $f(a)<f(b)$. Một cách trực quan, vì đồ thị hàm số là một "đường liền nét" nên hàm số phải nhận tất cả các giá trị nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Đây chính là một tính chất quan trọng của hàm số liên tục. Ta phát biểu tính chất này dưới dạng định lí.

Định lí 3

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a)\neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm c thuộc $(a ; b)$ sao cho $f(c)=M$.

Hệ quả 2

> Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm c thuộc $(a\ ;\ b)$ sao cho $f(c)=0$.

H5. *Hãy chứng tỏ rằng từ hệ quả 2, ta có thể suy ra định lí 3.*

Chứng minh hệ quả 2

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, $f(c)\neq 0$ với mọi $c\in(a\ ;\ b)$.

Vì có thể thay f bằng $-f$, ta có thể giả sử $f(a)<0$, $f(b)>0$.

Ta sẽ xây dựng một dãy các đoạn thẳng $[a_n\ ;\ b_n]\subseteq[a\ ;\ b]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

1) $[a_1\ ;\ b_1]\supset[a_2\ ;\ b_2]\supset\ldots\supset[a_n\ ;\ b_n]\supset\ldots$;

2) $\lim(b_n-a_n)=0$;

3) $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$.

Khi đó, theo bổ đề về dãy các đoạn thẳng lồng nhau (xem chuyên đề giới hạn dãy số), ta có $\lim a_n=\lim b_n=c$. Vì hàm số f là liên tục nên ta có $\lim f(a_n)=\lim f(b_n)=f(c)$. Mặt khác, do $f(a_n)<0$ và $f(b_n)>0$ nên $\lim f(a_n)\leq 0$ và $\lim f(b_n)\geq 0$. Từ đó suy ra $f(c)=0$, mâu thuẫn với điều giả sử.

Bây giờ ta nêu ra thuật toán xây dựng dãy các đoạn thẳng $[a_n;\ b_n]$ như sau :

+ Đầu tiên, ta đặt $a_1=a$, $b_1=b$, khi đó, theo giả thiết $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$.

+ Nếu $[a_n;b_n]$ đã được xác định và $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Ta xét $z=\dfrac{a_n+b_n}{2}$. Vì $f(z)\neq 0$ nên xảy ra đúng một trong hai trường hợp $f(z)>0$ hoặc $f(z)<0$.

Trong trường hợp thứ nhất, ta đặt $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=z$;

Trong trường hợp thứ hai, ta đặt $a_{n+1}=z$, $b_{n+1}=b_n$.

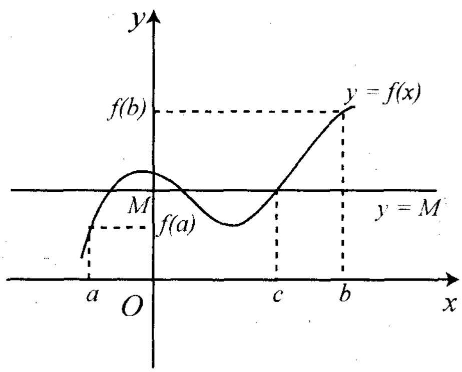
Thế thì các điều kiện 1, 2, 3 nói trên đều được thỏa mãn.

Hệ quả 1 được chứng minh hoàn toàn và do đó định lí 3 được chứng minh. □

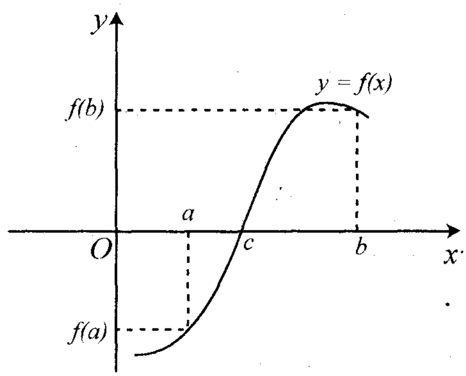
Hệ quả trên chính là một công cụ đơn giản nhưng rất mạnh để chứng minh một phương trình là có nghiệm trên một khoảng đã cho.

Ý nghĩa hình học của định lí và hệ quả

> *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a\ ;\ b)$.*
>
> *Đặc biệt, nếu f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a\ ;\ b)$.*



Hình 4.6



Hình 4.7

Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng (0 ; 1).

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$ liên tục trên đoạn [0 ; 1]. Ta có $f(0) = -1$ và $f(1) = 1$. Vì $f(0)f(1) < 0$ nên theo hệ quả 1, tồn tại $c \in (0\ ;\ 1)$ sao cho $f(c) = 0$, tức là phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0 ; 1). □

Bên cạnh tính chất quan trọng nói trên, hàm số liên tục trên một đoạn còn có một tính chất sâu sắc khác, đó là nó luôn đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn này.

Định lí 4. *(Định lí Weierstrass)*

> Cho f là một hàm số liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Khi đó f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn này.

Định lí 4 (ta thừa nhận không chứng minh) chỉ đảm bảo sự tồn tại của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục trên một đoạn mà không chỉ ra cách tìm chúng. Nhưng điều này là rất quan trọng về mặt lí luận, vì trong nhiều trường hợp, ta không thể đi tìm một đối tượng nào đó mà trong thực tế nó có thể không tồn tại. Trong các chương sau, ta sẽ nêu ra cách tìm các giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số liên tục trên một đoạn.

4. Một số ứng dụng của hàm số liên tục

Trong phần 3, ta đã thấy một ứng dụng rất quan trọng của hàm liên tục là chứng minh một phương trình có nghiệm thuộc một khoảng đã cho. Trong phần này, ta đề cập chi tiết hơn về các ứng dụng của hàm liên tục.

Trước hết, tính chất của hàm liên tục có thể sử dụng để tính giới hạn :

Nếu f là một hàm số liên tục và $\lim a_n = c$ thì ta có $\lim f(a_n) = f(c)$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim \sin\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

Giải. Vì $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

và $\sin x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$\lim \sin\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \sin\left(\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right) = \sin\frac{1}{2}.\ \square$$

Hệ quả 1 ở phần 3 có thể áp dụng nhiều lần để "khoanh vùng" các nghiệm của một phương trình và trong một số trường hợp, tìm ra số nghiệm của phương trình.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Giải. Vì $f(x) = x^3 - 3x + 1$ là một đa thức bậc 3 nên nó không có quá 3 nghiệm. Mặt khác do $f(-2) = -1 < 0, f(0) = 1 > 0, f(1) = -1 < 0, f(2) = 3 > 0$ nên trên (–2 ; 0) phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm x_1, trên (0 ; 1) có ít nhất 1 nghiệm x_2 và trên (1 ; 2) có ít nhất 1 nghiệm x_3. Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh. □

Tính chất của hàm số liên tục đặc biệt hiệu quả trong các bài toán tìm điều kiện có nghiệm của một phương trình :

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và có giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên đoạn này tương ứng là M_1 và M_2 thì phương trình $f(x) = m$ có nghiệm x thuộc $[a\ ;\ b]$ khi và chỉ khi $M_1 \le m \le M_2$.

Ví dụ 8. Tìm tất cả các giá trị *m* sao cho phương trình $x + \sqrt{1 - x^2} = m$ có nghiệm.

Giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa là $-1 \le x \le 1$.

Hàm số $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ xác định và liên tục trên [–1, 1].

Với x thuộc [–1 ; 1], ta có

$$x \ge -1, \sqrt{1 - x^2} \ge 0 \text{ suy ra } f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \ge -1 + 0 = -1,$$

dấu bằng xảy ra khi $x = -1$, do đó ta có $f_{\min} = -1$.

Tiếp theo, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, ta có

$$f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \le \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)(x^2 + 1 - x^2)} = \sqrt{2},$$

dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, do đó ta có $f_{\max} = \sqrt{2}$.

Áp dụng quy tắc nói trên, ta kết luận phương trình $x + \sqrt{1 - x^2} = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le \sqrt{2}$. □

Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ thì $f(x)$ chỉ đổi dấu khi x thay đổi qua các điểm mà tại đó giá trị hàm số bằng 0. Tính chất này có thể sử dụng để giải một số bất phương trình mà chúng ta không thể đưa về dạng tích của các nhị thức.

Ví dụ 9. Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}>\sqrt[3]{3x+1}.$$

Giải. Có thể lập phương hai vế của bất phương trình để được

$$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)+2x-1>3x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)>1.$$

Đến đây tình hình vẫn không khả quan hơn vì vẫn còn các căn thức và nếu lập phương thêm một lần nữa thì căn thức vẫn còn.

Khó khăn này có thể giải quyết được nếu ta xét phương trình tương ứng:

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt[3]{3x+1}. \qquad (1)$$

Sau khi lập phương hai vế và rút gọn như ở trên, ta được

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}\right)=1. \qquad (2)$$

Vẫn là phương trình có chứa các căn thức, nhưng điều khác biệt ở đây là ta có thể thảy (1) vào (2) để được một phương trình hệ quả

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}\sqrt[3]{3x+1}=1. \qquad (3)$$

Và với phương trình này thì lập phương hai vế, ta được

$$(x-1)(2x-1)(3x+1)=1 \Leftrightarrow 6x^3-7x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{7}{6}.$$

Thử lại, chỉ có nghiệm $x=\frac{7}{6}$ thỏa mãn (1).

Do $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x+1}$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f chỉ đổi dấu khi qua điểm $x=\frac{7}{6}$. Mặt khác ta có $f(0)<0$ và $f(2)>0$ nên $f(x)<0$ trên $(-\infty; \frac{7}{6})$ và $f(x)>0$ trên $(\frac{7}{6}, +\infty)$.

Từ đó nghiệm của bất phương trình đã cho là $x>\frac{7}{6}$. □

BÀI TẬP

15. Chứng minh rằng:

a) Các hàm số $f(x)=x^3-x+2$ và $g(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2\\ 3 & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 2$.

c) Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.

16. Chứng minh rằng:

a) Hàm số $f(x)=\left(x^2-2\right)^2+2$ liên tục trên $\mathbb{R}$

b) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ liên tục trên khoảng $(-1 ; 1)$

c) Hàm số $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$

d) Hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

17. Sử dụng bất đẳng thức $|\sin x| \leq |x|$ với mọi x, hãy chứng minh tính liên tục của hàm số $y = \cos x$ tại điểm $x = x_0$ bất kì.

18. Tìm tất cả các điểm gián đoạn của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos \pi x}{4-x^2}}$ c) $y = x - [x]$ d) $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

19. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, phương trình bậc ba

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

luôn có ít nhất một nghiệm thực.

20. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=m.$$

21. Giải bất phương trình : $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{7-x}>2$.

Chương VI

ĐẠO HÀM

§1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

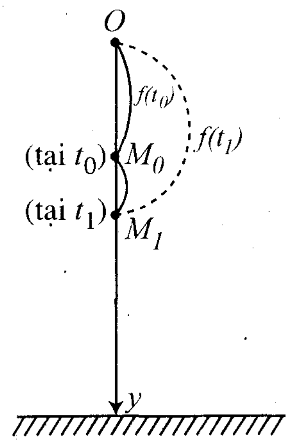
1. Ví dụ mở đầu

Từ vị trí O (ở một độ cao nhất định nào đó), ta thả một viên bi cho rơi tự do xuống đất và nghiên cứu chuyển động của viên bi. Trong *Vật lí 10* ta đã biết: Nếu chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống đất, gốc O là vị trí ban đầu của viên bi (tại thời điểm $t = 0$) và bỏ qua sức cản của không khí thì phương trình chuyển động của viên bi là

$$y = f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (g là gia tốc rơi tự do, } g = 9{,}8 \text{ m/s}^2\text{)}.$$

Giả sử tại thời điểm t_0, viên bi ở vị trí M_0 có toạ độ $y_0 = f(t_0)$; tại thời điểm t_1 ($t_1 > t_0$), viên bi ở vị trí M_1 có toạ độ $y_1 = f(t_1)$. Khi đó, trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1, quãng đường viên bi đi được là $M_0M_1 = f(t_1) - f(t_0)$ (h. 5.1). Vậy vận tốc trung bình của viên bi trong khoảng thời gian đó là

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}. \qquad (1)$$



Hình 5.1

Nếu $t_1 - t_0$ càng nhỏ thì tỉ số (1) càng phản ánh chính xác hơn sự nhanh chậm của viên bi tại thời điểm t_0. Từ đó, người ta xem giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ khi t_1 dần đến t_0 là *vận tốc tức thời* tại thời điểm t_0 của viên bi, kí hiệu là $v(t_0)$. Nói cách khác:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Nhiều vấn đề của toán học, vật lí, hoá học, sinh học, ... dẫn đến bài toán tìm giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

trong đó $y = f(x)$ là hàm số nào đó.

Trong toán học, người ta gọi giới hạn đó, nếu có và hữu hạn, là *đạo hàm của hàm số $y = f(x)$* tại điểm x_0.

2. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

a) Khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

Định nghĩa 1

> Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là
>
> $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Trong định nghĩa trên, nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Chú ý

1) Số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là *số gia của biến số* tại điểm x_0; số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là *số gia của hàm số* ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

2) Số Δx không nhất thiết chỉ mang dấu dương.

3) Δx, Δy là những kí hiệu, không nên nhầm lẫn rằng: Δx là tích của Δ với x, Δy là tích của Δ với y.

b) Quy tắc tính đạo hàm theo định nghĩa

Ta có quy tắc tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ theo định nghĩa như sau:

Quy tắc

> Muốn tính đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta thực hiện hai bước sau:
>
> *Bước 1:* Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0
>
> *Bước 2:* Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Trong quy tắc trên và đối với mỗi hàm số được xét dưới đây, ta luôn hiểu Δy là số gia của hàm số ứng với số gia Δx đã cho của biến số tại điểm đang xét.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải. Đặt $f(x) = x^2$, ta thực hiện quy tắc trên như sau :

- Tính Δy :

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (2+\Delta x)^2 - 2^2 = \Delta x(2+\Delta x).$$

- Tìm giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x) = 4.$$

Vậy $f'(2) = 4$. □

Nhận xét

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0.

Thật vậy, giả sử hàm số f có đạo hàm $f'(x_0)$, tức là $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Ta có $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0).0 = 0.$$

Do đó $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Điều này chứng tỏ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Từ đó suy ra rằng hàm số f liên tục tại điểm x_0.

H1. *Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 4$.*

H2. *Hãy nêu ví dụ một hàm số xác định tại điểm x_0 nhưng không có đạo hàm tại x_0.*

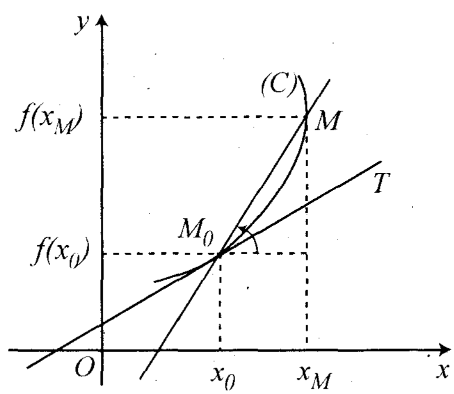
3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, ta kí hiệu x_M là hoành độ của nó và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$. Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua M_0 với hệ số góc k_0 là *vị trí giới hạn* của cát tuyến M_0M khi M di chuyển dọc theo (C) dần đến M_0.

Đường thẳng M_0T được gọi là *tiếp tuyến* của (C) tại điểm M_0, còn M_0 gọi là *tiếp điểm*.

Bây giờ ta giả sử hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0.

Chú ý rằng tại mỗi vị trí của M trên (C), ta luôn có $k_M = \dfrac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0}$ (h. 5.2)



Hình 5.2

Vì hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 nên

$$f'(x_0) = \lim_{x_M \to x_0} \frac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0} = \lim_{x_M \to x_0} k_M = k_0.$$

Từ đó ta có thể phát biểu ý nghĩa hình học của đạo hàm như sau:

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

GHI NHỚ

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ có phương trình là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Giải.

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại $x_0 = -1$.

- Tính Δy

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (-1 + \Delta x)^3 - (-1)^3 = \Delta x(3 - 3\Delta x + \Delta x^2).$$

- Tính giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3 - 3\Delta x + \Delta x^2) = 3.$$

Vậy $f'(-1) = 3$.

Ngoài ra ta có $f(x_0) = f(-1) = (-1)^3 = -1$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3(x + 1) - 1$, hay $y = 3x + 2$. □

H3. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số* $y = \dfrac{1}{x}$ *tại điểm* $M_0(2; \dfrac{1}{2})$.

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét sự chuyển động của một chất điểm. Giả sử quãng đường s đi được của nó là một hàm số $s = s(t)$ của thời gian t ($s = s(t)$ còn được gọi là phương trình chuyển động của chất điểm).

Tương tự như ví dụ mở đầu, khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì tỉ số

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

càng phản ánh chính xác độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0. Người ta gọi giới hạn

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \text{ (nếu có)}$$

là *vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t_0.

Từ đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm như sau :

Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Chẳng hạn, trong ví dụ mở đầu, ta có

$$f(t) - f(t_0) = \frac{1}{2}g(t^2 - t_0^2) = \frac{1}{2}g(t + t_0)(t - t_0).$$

Do đó, đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ là

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2}g(t + t_0) = gt_0.$$

Vậy vận tốc của viên bi tại t_0 là $v(t_0) = f'(t_0) = gt_0$.

H4. *Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng:*

(A) 2 m/s ; *(B) 3 m/s ;* *(C) 4 m/s ;* *(D) 5 m/s.*

Chọn kết quả đúng trong các kết quả trên.

5. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

a) Khái niệm

Cho hàm số f xác định trên tập J, trong đó J là một khoảng hoặc là hợp của những khoảng nào đó. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2

1) Hàm số f gọi là *có đạo hàm trên J* nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc J.

2) Nếu hàm số f có đạo hàm trên J thì hàm số f' xác định bởi

$$\begin{aligned} f': J &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

gọi là *đạo hàm của hàm số f*.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^3$ trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Giải. Với mọi x thuộc khoảng $(-\infty, +\infty)$, ta có:

- $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2)$;

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty, +\infty)$ và $y' = 3x^2$. □

H5. *a) Chứng minh rằng hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm đó.*

b) Chứng minh rằng hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm đó.

b) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Ta có định lí sau

Định lí

a) Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$;

b) Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 1$;

c) Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$;

d) Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0, +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Chứng minh

Qua hoạt động **H5**, ta đã chứng minh các kết luận a) và b). Sau đây ta chứng minh hai kết luận còn lại.

c) Với mỗi x thuộc $\mathbb{R}$, ta tính đạo hàm của hàm số tại điểm x theo định nghĩa :

• Tính Δy: Áp dụng công thức nhị thức Newton đối với $(x + \Delta x)^n$, ta có

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}.\Delta x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x.\Delta x^{n-1} + \Delta x^n.$$

• Tìm giới hạn (chú ý rằng $C_n^1 = n$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}.\Delta x + \ldots + C_n^{n-1} x.\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Vậy hàm số đã cho có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$.

d) Với mỗi x thuộc khoảng $(0, +\infty)$ ta có

• $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Vậy hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

$\boxed{\textbf{H6.}}$ *Cho ví dụ một hàm số xác định và liên tục tại điểm x = 0 nhưng không có đạo hàm tại điểm này.*

Ví dụ 4. a) Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^4$.

b) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 9$.

Giải.

a) Với $y = x^4$, ta có $y' = 4x^3$ (với mọi x thuộc $\mathbb{R}$).

b) Với $y = \sqrt{x}$, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (với mọi x thuộc $(0; +\infty)$).

Do đó $y'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$. □

6. Đạo hàm một bên

Ta đã biết đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 là giới hạn sau đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1)$$

Nếu thay vì xét giới hạn (1), ta xét giới hạn một bên của cùng biểu thức đó thì giới hạn một bên ấy, nếu tồn tại, sẽ được gọi là *đạo hàm một bên* của hàm số đã cho tại điểm x_0.

a) Khái niệm đạo hàm một bên tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho hàm số f xác định trên nửa khoảng $[x_0; b)$. Giới hạn bên phải (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần tới x_0 được gọi là *đạo hàm bên phải* của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0^+)$ hoặc $y'(x_0^+)$.

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên trái của hàm số f xác định trên nửa khoảng $(a; x_0]$, kí hiệu là $f'(x_0^-)$ hoặc $y'(x_0^-)$, cũng được định nghĩa tương tự, nghĩa là

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải được gọi chung là *đạo hàm một bên.*

Từ định nghĩa và các kết quả đã biết về giới hạn một bên, ta dễ dàng suy ra:

1) Nếu hàm số f xác định trên khoảng $(a; b)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thuộc khoảng đó thì nó cũng có đạo hàm bên phải và bên trái tại x_0 và $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$.

2) Ngược lại, nếu hàm số f xác định trên khoảng $(a; b)$ có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm x_0 sao cho $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ thì nó cũng có đạo hàm tại x_0.

3) Tuy nhiên, một hàm số có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm x_0 vẫn có thể không có đạo hàm tại điểm x_0 (khi $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$).

Sau đây là một số ví dụ

Ví dụ 5. Xét hàm số $y = x^2$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm tại $x = 3$, do đó nó có đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái tại $x = 3$ và

$$y'(3^+) = y'(3^-) = y'(3) = 6. \ \square$$

Ví dụ 6. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2|x|$.

Ta có

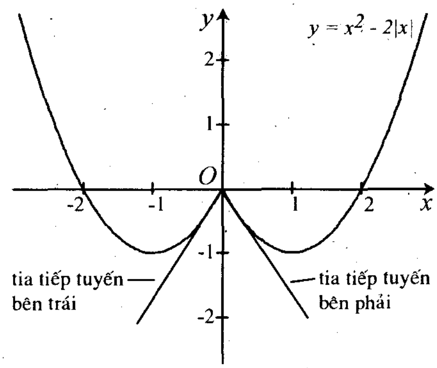
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x} = -2,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x} = 2.$$

Do đó tại điểm $x = 0$, hàm số f có đạo hàm bên phải $f'(0^+) = -2$ và đạo hàm bên trái $f'(0^-) = 2$, nhưng không có đạo hàm tại điểm đó. $\square$

Cùng với khái niệm đạo hàm một bên, người ta còn xây dựng khái niệm *tia tiếp tuyến một bên* của đường cong tại một điểm. Tia tiếp tuyến bên phải của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M_0 có hoành độ x_0 có hệ số góc bằng đạo hàm bên phải $f'(x_0^+)$. Điều tương tự cũng xảy ra đối với tia tiếp tuyến bên trái (h. 5.3)

Nếu tại điểm x_0 hàm số f có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái, nhưng chúng không bằng nhau thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là *gãy* tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.



Hình 5.3

b) Đạo hàm của hàm số trên một nửa khoảng hay một đoạn

Định nghĩa 4

> Cho hàm số f xác định trên tập K, trong đó K là một nửa khoảng hay một đoạn.
>
> Hàm số f được gọi là có đạo hàm trên nửa khoảng $K = [a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$ và có đạo hàm bên phải tại a (tương tự nếu $K = [a; +\infty)$).
>
> Hàm số f được gọi là có đạo hàm trên nửa khoảng $K = (a; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$ và có đạo hàm bên trái tại b (tương tự nếu $K = (-\infty; b]$).
>
> Hàm số f được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a; b)$, có đạo hàm bên phải tại a và đạo hàm bên trái tại b.

Ví dụ 7. Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm bằng 1 trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ và có đạo hàm bằng -1 trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$. □

BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0.

a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$; b) $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$.

2. Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2\ ;\ 4)$, $B(2 + \Delta x\ ;\ 4 + \Delta y)$ trên parabol đó.

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng 1 ; 0,1 và 0,01.

b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết :

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng 1

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

4. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$,

trong đó $g = 9{,}8$ m/s^2 và t được tính bằng giây (s).

a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0,001, biết $t = 5$ và Δt lần lượt bằng 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

b) Tìm vận tốc tại thời điểm $t = 5$.

5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ trên $(0, +\infty)$.

6. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x\,|\,x\,|$ tại điểm $x_0 = 0$ (nếu có).

7. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ khi } x<1 \\ x^2+2 \text{ khi } 1 \le x \le 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 \text{ khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $f'(x)$.

§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Nói chung, việc tính đạo hàm bằng định nghĩa thường phức tạp. Bài này sẽ cung cấp cho chúng ta những quy tắc tính đạo hàm, nhờ đó việc tính đạo hàm của một hàm số phức tạp sẽ được quy về tính đạo hàm của những hàm số đơn giản hơn.

Để tiện cho việc diễn đạt, kể từ bài này, ta sẽ sử dụng kí hiệu J để chỉ *tập con của $\mathbb{R}$ gồm một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng.*

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

Một trong những quy tắc xây dựng các hàm số mới là sử dụng các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các hàm số cơ bản. Chẳng hạn hàm đa thức là tổng của các hàm đơn thức. Về phần mình, đơn thức $a.x^k = a.\underbrace{x.x...x}_{k \text{ lần}}$. Định lí sau đây cho chúng ta quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số.

Định lí 1

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì các hàm số $y = u(x) + v(x)$, $y = u(x) - v(x)$, $y = u(x).v(x)$ và $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ (với trường hợp cuối ta cần điều kiện $v(x) \neq 0$ với mọi x thuộc J) cũng có đạo hàm và

a) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$

b) $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$

c) $[u(x)v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

Đặc biệt nếu k là hằng số thì $[k.u(x)]' = k.u'(x)$

d) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Ghi chú. Các công thức trên có thể viết gọn là

$$(u \pm v)' = u' \pm v',\ (uv)' = u'v + uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Chứng minh.

a) Tại mỗi điểm $x \in J$, ta có

$\Delta y = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]$

$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Vậy $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

b) Kết luận này được chứng minh tương tự phần a.

c) Tương tự như phần a, với mỗi điểm $x \in J$, ta có

$\Delta y = u(x + \Delta x).v(x + \Delta x) - u(x).v(x)$

$= [u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x)$

$= \Delta u.v(x) + u(x).\Delta v + \Delta u.\Delta v$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u.v(x) + u(x).\Delta v + \Delta u.\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) + \lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u.\Delta v}{\Delta x}.$$

Để ý rằng

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x) = \left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]v(x) = u'(x).v(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u(x).v'(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u.\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = u'(x).v'(x).0 = 0,$$

ta có kết quả

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Khi $v(x) = k$ (hằng số) thì $v'(x) = 0$ nên ta có $[k.u(x)]' = k.u'(x)$.

d) Kết luận này được chứng minh tương tự như ở phần *c*. □

H1. *Cách tính đạo hàm như sau đúng hay sai, tại sao?*

$$[x^3.(x^2-1)]' = (x^3)'.(x^2-1)' = 3x^2.2x = 6x^3.$$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trong mỗi trường hợp sau

a) $f(x) = \dfrac{x^8}{4} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x$

b) $f(x) = (2x^2+1)\sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

Giải.

a) $f'(x) = \left(\dfrac{x^8}{4} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x\right)' = \dfrac{1}{4}(x^8)' - \dfrac{2}{3}(x^6)' + 3(x)' = 2x^7 - 4x^5 + 3.$

b) $f'(x) = \left[(2x^2+1)\sqrt{x}\right]' = (2x^2+1)'\sqrt{x} + (2x^2+1)(\sqrt{x})'$

$$= 4x\sqrt{x} + (2x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 5x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{c) } f'(x) = \left[\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right]' = \frac{(x^2-x+1)'(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}. \ \square$$

H2. a) *Chứng minh rằng nếu các hàm số u, v và w có đạo hàm trên J thì hàm số f xác định bởi f(x) = u(x).v(x).w(x) (với mọi x thuộc J) cũng có đạo hàm trên J và* $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

b) *Áp dụng, tính đạo hàm của hàm số* $y = x^2(1-x)(x+2)$ *tại điểm* $x = -2$.

H 3. a) *Chứng minh rằng nếu hàm số v(x) có đạo hàm trên J và* $v(x) \neq 0$ *với mọi x thuộc J thì ta có* $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

b) *Áp dụng, tính đạo hàm của hàm số* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Nhận xét

Có thể mở rộng kết quả phần *a, b* của định lí trên cho tổng hay hiệu của nhiều hàm số: *Nếu các hàm số u, v, ..., w có đạo hàm trên J thì trên J ta có*

$$(u \pm v \pm ... \pm w)' = u' \pm v' \pm ... \pm w'.$$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Trong chương trình lớp 10, chúng ta đã làm quen với khái niệm hàm hợp. Nhiều hàm số được xây dựng từ các hàm số đơn giản hơn bằng phép hợp các hàm số. Chẳng hạn hàm số $f(x) = (x^2 + x + 1)^5$ là hợp của hai hàm $g(x) = x^5$ và $h(x) = x^2 + x + 1$, tức là $f(x) = g(h(x))$. Ta có thể tính đạo hàm của hàm số này bằng cách khai triển biểu thức $(x^2 + x + 1)^5$ hoặc áp dụng công thức đạo hàm của hàm tích nhiều lần, tuy nhiên cách làm đó sẽ rất cồng kềnh. Hơn nữa cách làm như vậy sẽ không thể áp dụng cho một số hàm số hợp phức tạp hơn, chẳng hạn như hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. Định lí dưới đây cho phép chúng ta tính đạo hàm của hàm hợp $f(x) = g(h(x))$ khi biết cách tính đạo hàm của g và h.

Định lí 2

a) Nếu hàm số $h = h(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = g(h)$ có đạo hàm tại điểm $h_0 = h(x_0)$ thì hàm số hợp $f(x) = g[h(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0, và

$$f'(x_0) = g'(h_0).h'(x_0).$$

b) Nếu giả thiết trong phần a) được thỏa mãn đối với mọi điểm x thuộc J thì hàm số hợp $y = f(x)$ có đạo hàm trên J, và

$$f'(x) = g'[h(x)].h'(x).$$

Ghi chú. Công thức thứ hai trong định lí trên còn được viết gọn là

$$f'_x = g'_h.h'_x.$$

Chứng minh.

Theo định nghĩa của đạo hàm, ta có

$$h(x_0+\Delta x) - h(x_0) = h'(x_0)).\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$$

trong đó $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$.

Tương tự,

$$g(h(x_0)+\alpha) - g(h(x_0)) = g'(h(x_0)).\alpha + \eta(\alpha).\alpha$$

trong đó $\eta(\alpha) \to 0$ khi $\alpha \to 0$. Ta cũng quy ước theo định nghĩa $\eta(0) = 0$.

Bây giờ

$$\begin{aligned} g(h(x_0+\Delta x)) - g(h(x_0)) &= g\big(h(x_0) + h'(x_0).\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x\big) - g(h(x_0)) \\ &= \alpha_\delta g'(h(x_0)) + \eta(\alpha_\delta).\alpha_\delta \end{aligned}$$

trong đó $\alpha_\delta = h'(x_0).\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$.

Nhận xét rằng khi $\Delta x \to 0$ thì $\dfrac{\alpha_\delta}{\Delta x} \to h'(x_0)$ và $\alpha_\delta \to 0$ và do đó $\eta(\alpha_\delta) \to 0$. Từ đây ta suy ra rằng

$$\frac{g(h(x_0+\Delta x)) - g(h(x_0))}{\Delta x} \to h'(x_0).g'(h(x_0)) \text{ khi } \Delta x \to 0. \ \square$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x^3 + 1)^{100}$ b) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Giải.

a) Ta có $y = f(g(x))$ với $g(x) = x^3 + 1, f(x) = x^{100}$, $g'(x) = 3x^2, f'(x) = 100x^{99}$.

Từ đó

$y' = f'(g(x)).g'(x) = 100(x^3 + 1)^{99}.3x^2 = 300x^2(x^3 + 1)^{99}$.

b) Tương tự

$y = f(g(x))$ với $g(x) = x^2 + x + 1, f(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = 2x + 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ và

$$y' = f'(g(x)).g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}. \ \square$$

Chú ý: Công thức đạo hàm của hàm hợp có thể mở rộng cho trường hợp hợp của nhiều hàm số, chẳng hạn với $y = f(g(h(x)))$ thì ta có

$$y' = f'(g(h(x))).g'(h(x)).h'(x).$$

H4. *Tính đạo hàm của hàm số* $y = ((x^2 + 2)^3 + 3)^4$.

3. Đạo hàm của hàm số ngược

Trong lớp các hàm số sơ cấp có nhiều hàm số được xây dựng như hàm ngược của một hàm số sơ cấp khác. Chẳng hạn hàm căn (bậc n) là hàm ngược của hàm luỹ thừa, hàm lôgarit là hàm ngược của hàm mũ. Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách tính đạo hàm của các hàm số ngược.

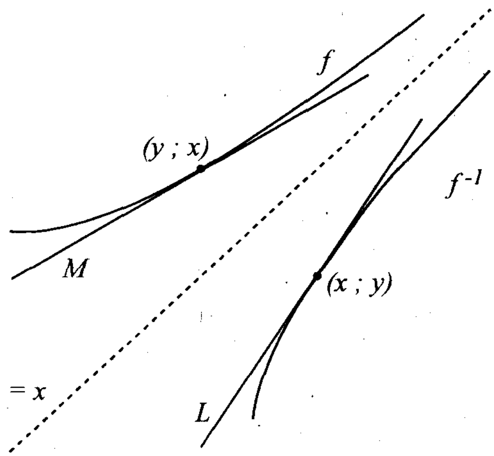
Định lí 3

Giả sử hàm số $f : I \to J$ là một hàm khả nghịch (tức là có hàm ngược). Khi đó nếu f có đạo hàm khác 0 tại điểm $f^{-1}(x_0)$ thì f^{-1} cũng có đạo hàm tại điểm x_0 và ta có đẳng thức

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Chứng minh. Chứng minh chi tiết và đầy đủ của định lí này là khá phức tạp. Ta bỏ qua phép chứng minh này. Ở đây ta đưa ra hai cách lí giải ở mức độ ý tưởng cho kết quả thú vị này.

a) Giải thích hình học. Ta biết rằng ý nghĩa hình học của đạo hàm tại một điểm là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm đó. Nhưng do đồ thị của hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$ nên nếu k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0 ; y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f^{-1}(x)$ tại điểm $(y_0 ; x_0)$ sẽ là $\frac{1}{k}$. Từ đó dẫn tới kết quả trên. (h. 5.5)



Hình 5.5

b) Giải thích giải tích. Nếu ta đã chứng minh được sự tồn tại đạo hàm của hàm ngược thì công thức trên đây có thể giải thích một cách dễ dàng nhờ vào định lí đạo hàm của hàm hợp. Thật vậy, vì ta có $f(f^{-1}(x)) = x$ với mọi x thuộc J nên theo định lí về đạo hàm của hàm hợp

$$f'(f^{-1}(x)).(f^{-1})'(x) = 1.$$

Từ đó ta có công thức trên đây.

Ví dụ 3. Hàm số $f(x) = x^3$ có hàm ngược là $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Ta có $f'(x) = 3x^2$ nên theo công thức ở trên ta có

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

với mọi $x \neq 0$. □

H5. *Biết rằng* $(e^x)' = e^x$, *hãy tìm* $(\ln x)'$.

4. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Trong bài trước, ta đã biết đạo hàm của các hàm số luỹ thừa $y = x^n$. Như vậy, bằng cách sử dụng định lí 1, ta có thể tính đạo hàm của các hàm đa thức, phân thức. Trong phần này, ta sẽ đưa ra công thức tính đạo hàm cho một số hàm số cơ bản khác như hàm số căn thức, hàm số lượng giác, hàm số mũ, hàm số lôgarit.

Định lí 4

> Cho n là một số nguyên dương, $n \geq 2$.
>
> a) Nếu n chẵn thì hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và
>
> $y = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
>
> b) Nếu n lẻ thì hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ có đạo hàm trên $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ và
>
> $y = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Ta có thể chứng minh định lí 4 dựa vào định nghĩa đạo hàm. Tuy nhiên, có thể thấy định lí 4 là hệ quả trực tiếp của định lí 3 áp dụng cho hàm $f(x) = x^n$ xác định trên $[0; +\infty)$ (với n chẵn) và $\mathbb{R}$ (với n lẻ).

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sqrt[5]{x}$ b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ c) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$.

Giải.

a) Ta có theo định lí 4 : $y = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

b) Áp dụng định lí 4 và định lí 2, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}.2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

c) Áp dụng kết quả câu b và công thức đạo hàm của tích hai hàm số, ta có

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + x.\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \ \square$$

Định lí 5

a) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, và $(\sin x)' = \cos x$.

b) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, và $(\cos x)' = -\sin x$.

c) Hàm số $y = \tan x$ có đảo hàm trên mỗi khoảng

$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$, và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

d) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm trên mỗi khoảng $\left(k\pi; (k+1)\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$, và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Chứng minh

a) Ta tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ bằng cách sử dụng định nghĩa và giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

• Tính Δy : Ta có

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$= 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

• Tính giới hạn :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} . \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = 1.\cos x = \cos x.$$

Vậy $(\sin x)' = \cos x$.

b) Phép chứng minh hoàn toàn tương tự phần a.

c) Với x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ thì $\cos x \neq 0$. Từ đó, áp dụng công thức đạo hàm của thương hai hàm số, ta có

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'.\cos x - \sin x.(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

d) Phép chứng minh hoàn toàn tương tự phần c. □

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sin 2x$

b) $y = \sin^2 x\cos^3 x$

c) $y = \tan(\cos x)$

d) $y = \cot^3 2x$.

Giải.

a) Ta có $y' = \cos 2x.(2x)' = 2\cos 2x$.

b) Ta có $y' = 2\sin x(\sin x)'.\cos^3 x + \sin^2 x.3\cos^2 x.(\cos x)'$
$= 2\sin x\cos^4 x - 3\sin^3 x\cos^2 x$.

c) Ta có $y' = \dfrac{1}{\cos^2(\cos x)}(\cos x)' = \dfrac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)}$.

d) Ta có $y' = 3\cot^2 2x.(\cot 2x)'.(2x)' = 3\cot^2 2x.\dfrac{-1}{\sin^2(2x)}.2 = -\dfrac{6\cos^2 2x}{\sin^4 2x}$. □

Định lí 6

a) Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.

b) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x.\ln a$

c) Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên $(0 ; +\infty)$ và $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

d) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên $(0 ; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Chứng minh

a) Ta tính đạo hàm của hàm số $y = e^x$ bằng cách sử dụng định nghĩa và giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

• Tính Δy : Ta có $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x}-1)$.

• Tính giới hạn : Ta có

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x.$$

Vậy $(e^x)' = e^x$.

b) Ta có $a^x = e^{x\ln a}$ nên áp dụng kết quả phần a và công thức đạo hàm hàm hợp, ta có

$$(a^x)' = e^{x\ln a}.(x\ln a)' = e^{x\ln a}.\ln a = a^x.\ln a.$$

c) Hàm $y = \ln x$ chính là hàm số ngược của hàm số $y = e^x$ nên theo công thức tính đạo hàm của hàm ngược, ta có

$$(\ln x)'=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x} \text{ với mọi } x \text{ thuộc } (0\ ;+\infty).$$

d) Ta có $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ nên từ đây áp dụng kết quả câu c, ta có

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.\ \square$$

Chú ý. Từ công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \ln x$, ta suy ra nếu $y = \ln(u(x))$ thì $y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, và từ đó $u'(x) = u(x).y'$. Công thức này có ý nghĩa là nếu tính được đạo hàm của hàm số $y = \ln(u(x))$ thì ta sẽ tìm được đạo hàm của hàm số $y = u(x)$.

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=e^{x^2}$

b) $y=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$ với $x\in(-1\ ;+\infty)$.

Giải.

a) Ta có $(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$.

b) Ta có $y' = \frac{1}{1+x} - \frac{1.(x+1) - x.1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$. □

H6. *Các công thức tính đạo hàm sau đây có đúng không?*

$(x^x)' = x^x \ln x$?　　　　$(x^x)' = x.x^{x-1} = x^x$?

Nếu không đúng, hãy thử tìm cách tính đúng.

GHI NHỚ

Bảng đạo hàm của một số hàm số thường gặp

$(c)' = 0$ (c là hằng số).

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, n \geq 1.$　　　　$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, n \geq 1.$

$(\sin x)' = \cos x.$　　　　$(\cos x)' = -\sin x.$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$　　　　$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$\left(e^x\right)' = e^x.$　　　　$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$　　　　$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

BÀI TẬP

8. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$;　　b) $y = (x-1)^5(x+1)^7$;

c) $y = \frac{x^2+1}{x^4+1}$;　　d) $y = (x+1)^3(x+2)^4(x+3)^5$.

9. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;　　b) $y = \sin(x^2) + x.\cos(x^2)$;

c) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;　　d) $y = (x^3 + x^2 + x + 1).e^{x^2+x}$.

10. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ b) $y=\dfrac{\sin x-1}{\sin x+\cos x}$.

11. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0=\dfrac{1}{3}$

b) $y=\sqrt{x+2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0=2$.

12. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.

13. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0\ ;-1)$.

14. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét ?

§3. CÁC ĐỊNH LÍ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Phần này trình bày các định lí cơ bản của giải tích, được gộp chung dưới tên gọi các định lí giá trị trung bình. Các định lí này sẽ lí giải sự liên quan của đạo hàm đến các tính chất quan trọng của hàm số như tính tăng giảm, cực trị, các giá trị trung bình. Những ứng dụng của các định lí này nói riêng và đạo hàm nói chung sẽ được đề cập tới ở chương sau và ở Tài liệu chuyên Toán Đại số và Giải tích 12.

Như thường lệ, ta kí hiệu J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng trong $\mathbb{R}$.

1. Bổ đề Fermat

Định nghĩa

> Cho hàm số f xác định trên J. Xét điểm x_0. Một khoảng mở chứa x_0 được gọi là một *lân cận* của x_0. Điểm x_0 được gọi là *điểm cực đại* của hàm số f nếu tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho
>
> $$f(x) \le f(x_0)\ \forall x \in U.$$

Tương tự, điểm x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của hàm số f nếu tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U$.

Giá trị hàm số f tại điểm cực đại được gọi là *giá trị cực đại*, giá trị hàm số f tại điểm cực tiểu được gọi là *giá trị cực tiểu.*

Các điểm cực đại, cực tiểu được gọi chung là các *điểm cực trị*. Các giá trị cực đại, cực tiểu được gọi chung là *cực trị*.

Chú ý. Cực trị của f trên J nói chung không phải là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất trên J. Chúng chỉ là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số f trong lân cận U. Vì thế người ta còn dùng thuật ngữ *cực trị địa phương* để mô tả tình huống này.

Làm thế nào để phát hiện ra các điểm cực trị của một hàm số f ? Đối với các hàm số có đạo hàm trên J, định lí dưới đây cho chúng ta một điều kiện cần để điểm x_0 thuộc J là điểm cực trị của f.

Định lí 1. *(Bổ đề Fermat)*

Cho f là một hàm số có đạo hàm trên $(a\,;\,b)$. Nếu $x_0 \in (a\,;\,b)$ là một điểm cực trị của f thì ta có $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh.

Ta chứng minh cho trường hợp x_0 là điểm cực đại. Trường hợp x_0 là điểm cực tiểu được chứng minh tương tự.

Vì hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 nên nó có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại x_0, ngoài ra hai giá trị này bằng nhau.

Ta có $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Do x_0 là điểm cực đại nên $f(x) - f(x_0) \leq 0$ khi x đủ gần x_0. Vì đây là giới hạn bên phải nên $\Delta x > 0$. Do đó phân số dưới dấu giới hạn ≤ 0 và do đó $f'(x_0^+) \leq 0$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được rằng $f'(x_0^-) \geq 0$.

Cuối cùng, do $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ nên từ các bất đẳng thức nói trên, ta suy ra $f'(x_0) = 0$. □

Như vậy, với các hàm số có đạo hàm thì cực trị chỉ có thể đạt được tại các điểm có đạo hàm bằng 0.

Ví dụ 1. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$ xác định trên [0 ; 1]. Ta có

$$f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}},\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Ta có thể kiểm tra được rằng với mọi x thuộc [0 ; 1] thì $f(x)\le f(\frac{1}{2})$, từ đó $x_0=\frac{1}{2}$ là điểm cực đại của hàm số. □

Trong chương sau, chúng ta sẽ làm rõ hơn cách sử dụng đạo hàm để tìm tất cả các điểm cực trị của một hàm số.

H1. *Hãy nêu ví dụ một hàm số f xác định trên [a ; b], đạt cực đại tại điểm x_0 thuộc (a ; b) nhưng không có đạo hàm tại x_0.*

H2. *Hãy nêu ví dụ một hàm số có đạo hàm trên (a ; b), có đạo hàm bằng 0 tại điểm x_0 thuộc (a ; b) nhưng không đạt cực trị tại điểm này.*

2. Định lí Rolle

Một hệ quả quan trọng của bổ đề Fermat và cũng là định lí mở đầu trong chuỗi các định lí về giá trị trung bình là định lí sau:

Định lí 2. *(Định lí Rolle)*

> Nếu hàm số f liên tục trên $[a ; b]$, có đạo hàm trên $(a ; b)$ và $f(a)=f(b)$ thì tồn tại c thuộc $(a ; b)$ sao cho $f'(c)=0$.

Chứng minh. Để chứng minh định lí Rolle, ta sẽ sử dụng bổ đề Fermat và tính chất sau đây của hàm liên tục: "Nếu f là một hàm số liên tục trên đoạn $[a ; b]$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó".

Nếu cả hai giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f đều đạt tại biên thì do giả thiết $f(a)=f(b)$, ta suy ra GTLN = GTNN và như vậy f là hàm hằng, suy ra $f'(c)=0$ với mọi c thuộc $(a ; b)$.

Trong trường hợp ngược lại, phải có một trong hai giá trị đó đạt được tại điểm c thuộc $(a ; b)$. Khi đó c là điểm cực trị và như vậy, theo bổ đề Fermat ta có $f'(c)=0$, điều phải chứng minh. □

Định lí Rolle có ý nghĩa vật lí là:

Trên đường thẳng, một chất điểm xuất phát tại thời điểm a. Đến thời điểm b chất điểm này quay lại điểm xuất phát. Định lí Rolle nói rằng, cho dù không biết tốc độ của chất điểm như thế nào nhưng trong khoảng thời gian $(a\ ;\ b)$ phải có một thời điểm c mà chất điểm được xem như ngừng lại (vận tốc tại c bằng 0).

Định lí Rolle thường được dùng để khảo sát, đánh giá số nghiệm của các phương trình, đặc biệt là các phương trình đa thức.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

có đúng 3 nghiệm thực.

Giải. Vì $f(-2) = -21 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -3 < 0$ và $f(2) = 23 > 0$ nên phương trình trên có nghiệm x_1, x_2, x_3 với $-2 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$. Ta chứng minh phương trình $f(x) = 0$ không thể có nhiều hơn 3 nghiệm. Thực vậy, giả sử ngược lại, tồn tại 4 nghiệm của f là $a < b < c < d$. Khi đó áp dụng định lí Rolle, ta suy ra phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm. Mặt khác ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 5 = 0.$$

Phương trình cuối chỉ có hai nghiệm thực. Mâu thuẫn. □

H3. *Phương trình dạng $x^m + x^n + c = 0$ với m, n nguyên dương có thể có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm ?*

3. Định lí Lagrange

Định lí Lagrange là một mở rộng tự nhiên của định lí Rolle. Nếu trong khoảng thời gian t từ a đến b, chất điểm di chuyển trên đường thẳng từ khoảng cách $s(a)$ đến khoảng cách $s(b)$ (so với gốc toạ độ) thì vận tốc trung bình trong khoảng thời gian này là $\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}$. Định lí Lagrange khẳng định rằng tồn tại một thời điểm c thuộc $(a\ ;\ b)$ sao cho vận tốc tức thời tại thời điểm này bằng vận tốc trung bình.

Định lí 3 *(Định lí Lagrange)*

> Nếu hàm số f liên tục trên $[a\ ;\ b]$, có đạo hàm trên $(a\ ;\ b)$ thì tồn tại c thuộc $(a\ ;\ b)$ sao cho
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng định lí Rolle để chứng minh định lí Lagrange. Xét hàm số

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

thì ta có $g(a)=f(a)$ và

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a).$$

Rõ ràng g liên tục trên $[a\ ;\ b]$, có đạo hàm trên $(a\ ;\ b)$ và $g(a)=g(b)$ nên theo định lí Rolle, tồn tại c thuộc $(a\ ;\ b)$ sao cho $g'(c)=0$. Nhưng điều này có nghĩa là tồn tại c sao cho

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).\ \square$$

Định lí Lagrange, với ý nghĩa trình bày ở trên, còn được gọi là *định lí giá trị trung bình*. Ngoài ra, nếu áp dụng định lí Lagrange cho $a=x$, $b=x+\Delta x$, ta có thể viết

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x$$

với $c\in(x, x+\Delta x)$. Với dạng này, định lí Lagrange còn được gọi là *định lí về số gia hữu hạn*.

Để ý rằng $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ là hệ số góc của dây cung nối hai điểm $(a\ ;f(a))$ và $(b\ ;f(b))$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$, còn $f'(c)$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=c$ thuộc đường cong, ta có thể phát biểu ý nghĩa hình học của định lí Lagrange như sau : Nếu hàm số f liên tục trên $[a\ ;\ b]$ và có đạo hàm trên $(a\ ;\ b)$ thì tồn tại điểm c thuộc $(a\ ;\ b)$ sao cho tiếp tuyến tại điểm $(c\ ;f(c))$ song song với dây cung AB nối hai điểm $(a\ ;f(a))$ và $(b\ ;f(b))$.

Định lí Lagrange có nhiều ứng dụng quan trọng mà ta sẽ đề cập tới trong phần ứng dụng của đạo hàm. Dưới đây ta xét một ví dụ :

14B-ĐSVGT 11

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với $a > 0$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+1} < \ln\left(1+\frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a}.$$

Giải. Xét hàm số $y = f(x) = \ln x$ xác định trên đoạn $[a; a+1]$. Vì hàm số f liên tục và có đạo hàm trên khoảng xác định nên theo định lí Lagrange, sẽ có số $c \in (a\,;\, a+1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(a+1) - f(a)}{a+1-a} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln\left(1+\frac{1}{a}\right).$$

Do $c \in (a\,;\, a+1)$ nên $a < c < a+1$. Lại do $a > 0$ nên $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$.

Vậy ta có được bất đẳng thức trên. □

H4. *Chứng minh rằng với mọi x, y, ta có bất đẳng thức* $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

4. Định lí Cauchy

Nếu đặt $g(x) = x$ thì biểu thức của định lí Lagrange có thể viết dưới dạng

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Một câu hỏi đặt ra là nếu thay g bằng một hàm số khả vi bất kì thì tính chất nêu trên còn đúng không? Định lí Cauchy dưới đây sẽ trả lời cho câu hỏi đó.

Định lí 4 *(Định lí Cauchy)*

> Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a\,;\, b]$, có đạo hàm trên $(a\,;\, b)$ và $g'(x) \neq 0$ với mọi x thuộc $(a\,;\, b)$ thì tồn tại $c \in (a\,;\, b)$ sao cho
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

thì ta có $h(a) = h(b) = 0$, hàm số $h(x)$ liên tục trên $[a\,;\, b]$ và có đạo hàm trên $(a\,;\, b)$. Do đó, áp dụng định lí Rolle cho hàm số $h(x)$, ta có tồn tại c sao cho $h'(c) = 0$, tức là $(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$

và đó chính là điều phải chứng minh. □

5. Quy tắc L'Hôpital

Định lí Cauchy có thể được sử dụng để chứng minh quy tắc L'Hôpital, một quy tắc khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ rất hiệu quả.

Định lí 5. (*Quy tắc L'Hôpital*)

> Xét V là lân cận của điểm x_0, f và g là hai hàm số liên tục trên V và có đạo hàm trên $V \setminus \{x_0\}$. Giả sử
>
> $$f(x_0) = g(x_0) = 0; \ \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$
>
> Khi đó ta có $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$.

Chứng minh. Xét x thuộc $V \setminus \{x_0\}$. Áp dụng định lí Cauchy cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên $[x_0 ; x]$, ta có tồn tại c thuộc $(x_0 ; x)$ sao cho

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bây giờ cho $x \to x_0$ thì ta có $c \to x_0$ và do đó vế phải dần tới a (theo giả thiết thứ hai). Vậy ta có

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a. \square$$

Mặc dù không phải là phương pháp vạn năng nhưng quy tắc L'Hôpital là cách đơn giản nhất để tìm giới hạn vì thay cho việc biến đổi biểu thức để khử dạng vô định thì ta chỉ cần tính đạo hàm.

Ví dụ 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Giải. Áp dụng quy tắc L'Hôpital ta có

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}. \square$$

H5. *Quy tắc L'Hôpital có thể áp dụng để tính giới hạn sau được không? Tại sao ?*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Ghi chú.

• Quy tắc L'Hôpital còn có thể áp dụng cho các dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Tuy nhiên, trong phạm vi chương trình, ta chỉ phát biểu và chứng minh tình huống đơn giản nhất nói trên.

• Chú ý quy tắc L'Hôpital sẽ không còn đúng nếu giới hạn không có dạng vô định.

BÀI TẬP

15. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0 ; 1)$.

16. Cho $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$.
Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

17. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$, có đạo hàm trên $(a ; b)$. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 \neq x_2$. Chứng minh rằng phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, hơn nữa biểu thức $f'(x)$ phải đổi dấu.

18. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có bất đẳng thức

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

19. Cho $0 < a < b$ và f là một hàm liên tục trên $[a ; b]$, có đạo hàm trên $(a ; b)$. Chứng minh rằng tồn tại c thuộc $(a ; b)$ sao cho

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(c) - cf'(c).$$

20. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

21. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}$.

§4. VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO

1. Vi phân

a) Vi phân của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đẳng thức trên cho thấy: nếu $|\Delta x|$ khá nhỏ thì tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rất gần với $f'(x_0)$, do đó ta có thể coi rằng $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

hay $\quad \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$

Ta có khái niệm vi phân của hàm số tại một điểm như sau:

> Tích $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) và được kí hiệu là $df(x_0)$, tức là
>
> $$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ 1. Vi phân của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ là

$$df\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\Delta x = \cos\frac{\pi}{4}\Delta x = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta x. \ \square$$

H1. *Tính vi phân của hàm số* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ *tại điểm* $x_0 = 2$, *ứng với* Δx *lần lượt bằng 0,2 và 0,02 (làm tròn kết quả đến hàng* 10^{-3}*).*

b) Vi phân của hàm số

Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là

$$df(x) = f'(x)\Delta x. \qquad (2)$$

Đặc biệt, với hàm số $y = x$, ta có $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$. Do đó ta có thể viết (2) dưới dạng

$$df(x) = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx.$$

Ví dụ 2.

a) $d(x^3 - 2x^2 + 1) = (x^3 - 2x^2 + 1)'dx = (3x^2 - 4x)dx$.

b) $d(\sin^2 x) = (\sin^2 x)'dx = 2\sin x\cos x dx = \sin 2x dx$. □

2. Ứng dụng của vi phân trong tính gần đúng

Từ (1) và định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm, ta thấy:

Khi $|\Delta x|$ khá nhỏ thì số gia của hàm số tại điểm x_0 ứng với số gia Δx xấp xỉ bằng vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx đó, tức là

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Từ đó ta có

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (3)$$

Công thức (3) cho phép ta tính xấp xỉ giá trị của hàm số f tại điểm $x_0 + \Delta x$ khi việc tính các giá trị $f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là khá đơn giản.

Ví dụ 3. Tính giá trị của $\sqrt{4,01}$ (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

Giải. Do 4,01 = 4 + 0,01 nên ta sẽ xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 4$ với số gia $\Delta x = 0,01$. Áp dụng công thức (3), ta được

$$f(4,01) \approx f(4) + f'(4).0,01, \text{ hay}$$

$$\sqrt{4,01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0,01 = 2,0025.$$

Vậy $\sqrt{4,01} \approx 2,0025$ □

H2. *Hãy kiểm tra lại kết quả tính gần đúng nói trên bằng 2 cách*

a) Tính $2,0025^2$;

b) Dùng máy tính bỏ túi tính $\sqrt{4,01}$.

3. Đạo hàm cấp hai

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. Hàm số này có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Ta thấy rằng $y' = f'(x)$ cũng là một hàm số có đạo hàm và đạo hàm của nó là

$$[f'(x)]' = (3x^2 - 2x)' = 6x - 2.$$

Ta gọi đó là *đạo hàm cấp hai* của hàm số ban đầu.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau đây

Định nghĩa

> Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm f và kí hiệu là f'', tức là
>
> $$f'' = (f')'.$$
>
> f' còn được gọi là *đạo hàm cấp một* của hàm số f. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là y''.

Ví dụ 4. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = x^2(x^2 - 2)^2$ b) $y = \tan x$.

Giải

a) $y = x^6 - 4x^4 + 4x^2$; $y' = 6x^5 - 16x^3 + 8x$; $y'' = 30x^4 - 48x^2 + 8$.

b) $y' = 1 + \tan^2 x$; $y'' = (1 + \tan^2 x)' = 2\tan x(1+\tan^2 x)$. □

H3. *Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:*

a) $y = \sqrt{x}$; *b)* $y = \sin x$.

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Ta đã biết: Nếu một chất điểm chuyển động có phương trình $s = s(t)$ thì vận tốc tại thời điểm t_0 của chất điểm đó là $v(t_0) = s'(t_0)$.

Bây giờ nếu t_0 nhận một số gia Δt thì $v(t_0)$ nhận một số gia là $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$.

Khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ càng phản ánh chính xác sự biến thiên vận tốc của chất điểm tại thời điểm t_0.

Trong cơ học, giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ khi Δt dần đến 0 được gọi là gia tốc tức thời tại thời điểm t_0 (hay gia tốc tại thời điểm t_0) của chất điểm đó, và được kí hiệu là $a(t_0)$. Vậy

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Do đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai như sau :

Gia tốc (tức thời) $a(t_0)$ tại thời điểm t_0 của một chất điểm chuyển động cho bởi phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm cấp hai của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là

$$a(t_0) = s''(t_0).$$

Gia tốc tại thời điểm t_0 đặc trưng cho sự biến đổi vận tốc chuyển động tại thời điểm đó.

Ví dụ 5. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(Phương trình này gọi là phương trình dao động điều hòa).

Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$v(t) = S'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t là

$$a(t) = S''(t) = v'(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi). \ \square$$

H4. *Phương trình chuyển động của một chất điểm là $S(t) = 2 + 6t - t^2$ (S tính bằng mét (m), t tính bằng giây (s)). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4s$.*

5. Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp một f' và đạo hàm cấp hai f'' của hàm số f còn được kí hiệu lần lượt là $f^{(1)}$ và $f^{(2)}$. Nếu $f^{(2)}$ là một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó gọi là đạo hàm cấp ba của hàm số, kí hiệu là $f^{(3)}$. Tương tự, đạo hàm cấp n của một hàm số được định nghĩa bằng quy nạp như sau:

Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n - 1$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là *đạo hàm cấp n* của hàm số f và kí hiệu là $f^{(n)}$. Nói cách khác.

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]', \ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là $y^{(n)}$.

Ví dụ 6. a) Đối với hàm số $y = x^3 + 7x^2 - 4x$, ta có

$y' = 3x^2 + 14x - 4$, $y'' = 6x + 14$, $y^{(3)} = 6$ và $y^{(n)} = 0$ với mọi $n \geq 4$.

b) Đối với hàm số $y = \sin x$ ta có:

$$y' = \cos x \text{ ; } y'' = (\cos x)' = -\sin x \text{ ; } y^{(3)} = (-\sin x)' = -\cos x \text{ ;}$$

$$y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x \text{ ; } y^{(5)} = (\sin x)' = \cos x. \ \square$$

H5. *Quan sát ví dụ 5b, hãy tìm công thức tổng quát tính $y^{(n)}$ với $y = \sin x$.*

BÀI TẬP

22. Tính vi phân của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ b) $y = x\sin x$ c) $y = x^2 + \sin^2 x$ d) $y = e^x \ln x$.

23. Áp dụng công thức (3), tìm giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)

a) $\dfrac{1}{0,9995}$ b) $\ln(1,001)$ c) $\cos 61^0$.

24. Chứng minh rằng nếu f và g là các hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì $f.g$ cũng có đạo hàm đến cấp 2 và ta có công thức

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x).$$

25. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp được kèm theo.

a) $f(x) = x^4 - \cos 2x$, tìm $f^{(4)}(x)$ b) $f(x) = \cos^2 x$, tìm $f^{(5)}(x)$

c) $f(x) = (x + 10)^6$, tìm $f^{(n)}(x)$.

26. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và $v(t)$ tính bằng mét/giây (m/s). Tìm gia tốc của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 4$

b) Tại thời điểm mà vận tốc chuyển động bằng 11.

27. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có

a) Nếu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$

b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

28. Cho $f(x) = \sqrt{x}$. Hãy tính $f^{(n)}(x)$.

Chương VII

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

§1. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Ngay từ năm lớp 10, chúng ta đã được làm quen với khái niệm về hàm *đơn điệu* (*đồng biến* hay *nghịch biến*) như sau :

> Giả sử $\mathbb{I}$ là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và f là một hàm xác định trên $\mathbb{I}$. Khi đó
>
> Hàm f được gọi là *đồng biến* trên $\mathbb{I}$ nếu
>
> $$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}, x_1 < x_2, \text{ ta có } f(x_1) < f(x_2).$$
>
> Hàm f được gọi là *nghịch biến* trên $\mathbb{I}$ nếu
>
> $$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}, x_1 < x_2, \text{ ta có } f(x_1) > f(x_2).$$

Như vậy, để xác định được tính đơn điệu của một hàm số, ta có thể sử dụng phép so sánh trực tiếp như định nghĩa trên. Tuy nhiên, ở đây chúng ta sẽ được làm quen với một công cụ mới hiệu quả hơn, tường minh hơn, đó là sử dụng đạo hàm.

Chú ý rằng định nghĩa trên còn có thể được phát biểu như sau :

Nếu hàm số f xác định trên $\mathbb{I}$ thì

a) *f đồng biến trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi với mọi x tùy ý thuộc $\mathbb{I}$, ta có*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0 \text{ với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ thỏa mãn } x+\Delta x \in \mathbb{I}.$$

b) *f nghịch biến trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi với mọi x tùy ý thuộc $\mathbb{I}$, ta có*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0 \text{ với mọi } \Delta x \neq 0 \text{ thỏa mãn } x+\Delta x \in \mathbb{I}.$$

Từ đây, chuyển qua giới hạn, dễ thấy ta có định lí sau :

Định lí 1

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathbb{I}$. Khi đó
>
> a) Nếu f đồng biến trên $\mathbb{I}$ thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$.
>
> b) Nếu f nghịch biến trên $\mathbb{I}$ thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$.

Ngoài ra, người ta cũng chứng minh được định lí đảo của định lí này vẫn đúng :

Định lí 2

> *Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $\mathbb{I}$. Khi đó*
>
> a) *Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$ thì f đồng biến trên $\mathbb{I}$.*
>
> b) *Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$ thì f nghịch biến trên $\mathbb{I}$.*
>
> c) *Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$ thì f có giá trị không đổi trên $\mathbb{I}$.*

Định lí này cho ta một điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng.

Nhận xét. Khoảng $\mathbb{I}$ trong định lí trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết "Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó." Chẳng hạn: *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a\,;\,b)$ thì f đồng biến trên đoạn $[a\,;\,b]$.*

Người ta thường diễn đạt khẳng định này qua bảng biến thiên như sau :

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(a)$	↗	$f(b)$

H. *Sử dụng định lí Lagrange, hãy chứng minh định lí 2.*

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ trên đoạn $[0\,;\,1]$.

Giải. Dễ thấy hàm số đã cho liên tục trên $[0\,;\,1]$. Lại có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0, \quad \forall x \in (0;\,1).$$

Do vậy, theo định lí 2, ta có f đồng biến trên $[0\,;\,1]$. □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Giải. Tính đạo hàm của $f(x)$, ta được $f'(x) = 2x\cos(x^2) > 0$ với mọi $x \in (0; 1)$. Do đó theo định lí 2, ta có $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; 1)$.

Từ hai định lí ở trên, ta thấy việc xét chiều biến thiên của một hàm số có đạo hàm có thể được tiến hành thông qua việc xét dấu đạo hàm của nó. □

Ví dụ 3. Xét chiều biến thiên của hàm số

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}.$$

Giải. Dễ thấy tập xác định của y là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có

$$y' = x - \frac{8}{x^2} = \frac{x^3 - 8}{x^2} = \frac{(x-2)[(x+1)^2 + 3]}{x^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 2]$, đồng biến trên $[2; +\infty)$. □

Ví dụ 4. Xét chiều biến thiên của hàm số sau

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 1.$$

Giải. Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có

$$y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Dễ thấy $y' = 0$ chỉ tại $x = 1$ và $y' > 0$ với mọi $x \neq 1$.

Ta có bảng biến thiên của y như sau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy, hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

Qua ví dụ này, ta rút ra được một nhận xét như sau :

Nhận xét.

Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$ (hoặc $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$) và phương trình $f'(x) = 0$ chỉ có một số hữu hạn nghiệm trên $\mathbb{I}$ thì f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{I}$.

BÀI TẬP

1. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau

a) $y = 4x^3 - 3x + 1$

b) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 1$

c) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + 2$

d) $y = 3x + \dfrac{1}{x}$

e) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

f) $y = \sqrt{1 - x^2}$

g) $y = x\left(1993 + \sqrt{1995 - x^2}\right)$

h) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

2. Chứng minh rằng

a) Hàm số $y = \dfrac{13x+12}{22x+12}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

b) Hàm số $y = \dfrac{2x^2+3x}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó

c) Hàm số $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

d) Hàm số $f(x) = x - \sin^2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số

$$y = f(x) = 3x^3 + mx^2 + x + 2$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4. Với các giá trị nào của m, hàm số

$$y = f(x) = 3x + \frac{m}{x-1}$$

đồng biến trên từng khoảng xác định của nó ?

5. Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $\sin x \le x$ nếu $x \ge 0$

b) $\sin x > x$ nếu $x < 0$.

6. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi x

$$\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}.$$

7. Cho $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng

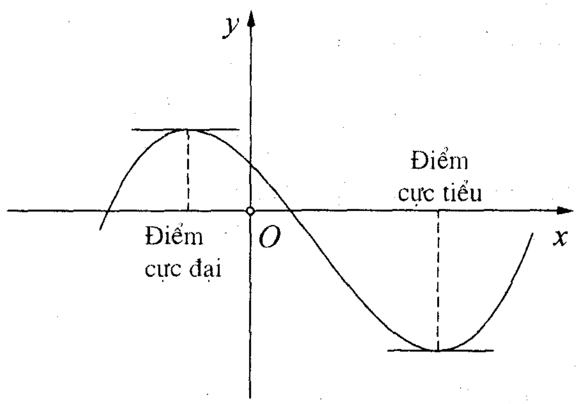
$$2\sin x + \tan x > 3x.$$

§2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Trong chương trước, chúng ta đã được làm quen với khái niệm *cực trị* của hàm số, biết được thế nào là *cực đại*, thế nào là *cực tiểu*. Vấn đề đặt ra là làm sao để tìm được các điểm cực trị của hàm số? Dưới đây, chúng ta sẽ cùng xem xét vấn đề này.

1. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x)$ bên dưới, ta thấy nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và nếu đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tại điểm $(x_0\ ;\ f(x_0))$ thì tiếp tuyến đó vuông góc với trục tung ; tức là hệ số góc của nó bằng 0 : $f'(x_0) = 0$.



Như vậy, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì rõ ràng $f'(x_0) = 0$. Đây chính là nội dung của định lí mà ta đã chứng minh ở phần trước :

Định lí 1 (*Bổ đề Fermat*).

> Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý

a) Đây chỉ là *điều kiện cần* vì điều ngược lại không đúng. Hàm số f có thể có đạo hàm bằng 0 tại x_0 nhưng x_0 có thể không là điểm cực trị của nó. Chẳng hạn, hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x + 1$ mà ta đã xét ở ví dụ 4, §1 có đạo hàm bằng 0 tại $x = 1$, nhưng $x = 1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

b) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó nó không có đạo hàm. Chẳng hạn, ta xét hàm số $y = f(x) = |x|$. Hàm này xác định trên $\mathbb{R}$, có

$$f(0) = 0 \text{ và } f(x) > 0, \ \forall x \neq 0.$$

Do đó theo định nghĩa về cực trị, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. Thế nhưng, ta lại dễ thấy hàm này không có đạo hàm tại $x = 0$.

Như vậy, *một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của nó bằng* 0, *hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.*

2. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Định lí sau cho ta một điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị.

Định lí 2

> Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó
>
> a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.
>
> b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Nói một cách khác,

> a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.
>
> b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh

a) Do f liên tục trên nửa khoảng $(a; x_0]$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ nên f nghịch biến trên $(a; x_0]$, từ đó suy ra

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in (a; x_0).$$

Tương tự, do f liên tục trên nửa khoảng $[x_0; b)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ nên hàm số đồng biến trên $[x_0; b)$. Do đó

$$f(x) > f(x_0), \quad \forall x \in (x_0; b).$$

Vậy $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$, nghĩa là f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Chứng minh tương tự như phần a.

Kết quả của định lí trên có thể được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau :

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$ (cực đại)	↘	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$ (cực tiểu)	↗	

Từ định lí này, chúng ta suy ra được một quy tắc tìm cực trị của hàm số. Quy tắc đó là

Quy tắc 1

- Tính $f'(x)$.
- Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ bị đổi dấu khi x đi qua x_i thì có nghĩa là hàm số đạt cực trị tại x_i.

Ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Giải. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính đạo hàm của y, ta có

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1).$$

Phương trình $y' = 0$ có các nghiệm $x = -1$, $x = 0$ và $x = 1$.

Ta có bảng biến thiên của y như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ với giá trị cực đại là 3, đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$ với giá trị cực tiểu là 2. □

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x} + 3$.

Giải. Ta thấy hàm số đã cho xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}.$$

Do $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 1$.

Ta có bảng biến thiên của y như sau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra y đạt cực tiểu tại $x = 1$ với giá trị cực tiểu là 6. Hàm số không có cực đại. □

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = |x - 1|$.

Giải. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $$y = \begin{cases} 1-x & \text{với } x<1 \\ x-1 & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$$

Từ đó $$y' = \begin{cases} -1 & \text{với } x<1 \\ 1 & \text{với } x > 1. \end{cases}$$

(Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=1$).

Sau đây là bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu là 0. Hàm số không có cực đại. □

Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng đạo hàm cấp 2 để tìm cực trị của hàm số. Người ta đã chứng minh được định lí sau.

Định lí 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp 1 trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0. Khi đó

a) Nếu $f''(x_0)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

b) Nếu $f''(x_0)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

H *Dựa vào định lí 2, hãy chứng minh định lí 3.*

Từ định lí này, ta có thêm một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số :

Quy tắc 2

- Tính $f'(x)$.
- Tìm các nghiệm x_i $(i=1, 2, \ldots)$ của phương trình $f'(x)=0$.
- Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

  + Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i.

  + Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x.$$

Giải. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$y' = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3).$$

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x = 2$ và $x = -3$. Tính tiếp đạo hàm cấp 2 của y, ta được

$$y'' = 2x + 1.$$

Do $y''(2) = 5 > 0$ và $y''(-3) = -5 < 0$ nên sử dụng định lí trên, ta đi đến kết luận: hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = -3$ với giá trị cực đại tương ứng là $\frac{27}{2}$, và đạt cực tiểu tại $x = 2$ với giá trị cực tiểu tương ứng là $-\frac{22}{3}$. □

Nhận xét. Đôi khi việc tính các giá trị của hàm tại các "không điểm" của đạo hàm (tức điểm x mà $f'(x) = 0$) gặp khó khăn vì vấp phải những tính toán phức tạp (nếu không có máy tính trong tay). Thật ra, có một số kinh nghiệm giúp ta "đơn giản hóa" công việc này. Chẳng hạn, với hàm phân thức $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ và thỏa mãn $v'(x_0) \neq 0$. Khi đó ta có thể thấy rằng

$$f(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Thật vậy, ta có $$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}.$$

Do $f'(x_0) = 0$ nên $u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0) = 0,$

suy ra $$\frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Mà $\frac{u(x_0)}{v(x_0)} = f(x_0)$ nên ta có $f(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

Ví dụ sau đây sẽ cho thấy rõ ý nghĩa của "kinh nghiệm ít ỏi" này trong tính toán.

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x-6}{11x^2+38x-85}$.

Giải. Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \left\{-5, \dfrac{17}{11}\right\}$. Ta có

$$y' = \frac{-11x^2+132x+143}{(11x^2+38x-85)^2} = \frac{11(13-x)(x+1)}{(11x^2+38x-85)^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 13.$$

Để lập bảng biến thiên của y, ta cần tính các giá trị $y(-1)$ và $y(13)$. Việc tính $y(-1)$ có thể được thực hiện khá dễ dàng, thế nhưng $y(13)$ thì lại khác. Nếu bạn thay số trực tiếp vào sẽ gặp phải những phép tính lớn, rất dễ mắc lỗi đặc biệt là trong điều kiện không có máy tính trong tay.

Bây giờ, ta hãy thử sử dụng "kinh nghiệm" trên xem thế nào nhé! Hàm số đã cho có dạng phân thức $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) = x-6$ và $v(x) = 11x^2+38x-85$. Ta có

$$u'(x) = 1, \quad v'(x) = 22x+38.$$

Từ đây, ta tính được

$$y(-1) = \frac{u'(-1)}{v'(-1)} = \frac{1}{22(-1)+38} = \frac{1}{16}, \quad y(13) = \frac{u'(13)}{v'(13)} = \frac{1}{22\cdot 13+38} = \frac{1}{324}.$$

Đến đây thì ta có thể lập bảng biến thiên của y được rồi. Ta có :

x	$-\infty$		-5		-1		$\frac{17}{11}$		13		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{16}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{324}$	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu là $\dfrac{1}{16}$ tại $x = -1$ và đạt cực đại là $\dfrac{1}{324}$ tại $x = 13$. □

BÀI TẬP

8. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x + 3$

b) $y = -16x^3 + 3x^2 + 1$

c) $y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 3$

d) $y = 2x + 1 + \dfrac{8}{x-2}$.

9. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 4}$

c) $y = x\sqrt{3 - x}$

d) $y = x^2 - 4|x| + 3$.

10. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{8 - x^2}$

c) $y = x - \sin 2x$

d) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

11. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x$ với $x \in [0; \pi]$

b) $y = 2\sin x + \cos 2x$ với $x \in [0; \pi]$.

12. Tìm các hệ số a, b, c, d của hàm số

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$.

13. Xác định các hệ số a, b, c sao cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2.

14. Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$, hàm số

$$y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$$

luôn có cực đại và cực tiểu.

§3. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Trong cuộc sống có rất nhiều vấn đề liên quan đến cực trị (ở đây là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất). Ví dụ, bạn là một nhà kinh doanh, bạn vừa nghiên cứu ra một sản phẩm mới và muốn tung ra thị trường, bạn cần tính toán số lượng sản phẩm đưa ra và giá thành sao cho phù hợp với túi tiền của người dân và thu được lợi nhuận nhiều nhất. Trong xây dựng, người ta cần tính toán làm sao cho hao tốn chi phí vật liệu ít nhất nhưng vẫn đảm bảo an toàn sử dụng, ...

Những *bài toán cực trị của đời sống* như thế thường dẫn đến việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp cho trước. Như vậy, các bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đóng một vai trò không nhỏ trong cuộc sống nói chung và trong toán học nói riêng.

Trong phần này, ta sẽ ứng dụng tính đơn điệu và cực trị của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

a) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathbb{I}$ sao cho

$$f(x) \le f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{I}$$

thì $M = f(x_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số f trên $\mathbb{I}$, kí hiệu là

$$M = \max_{x \in \mathbb{I}} f(x).$$

b) Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathbb{I}$ sao cho

$$f(x) \ge f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{I}$$

thì $m = f(x_0)$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số f trên $\mathbb{I}$, kí hiệu là

$$m = \min_{x \in \mathbb{I}} f(x).$$

Như thế, để chứng tỏ một số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của hàm số f trên tập $\mathbb{I}$, ta cần chỉ rõ

a) $f(x) \le M$ (hoặc $f(x) \ge m$) với mọi $x \in \mathbb{I}$;

b) Tồn tại $x_0 \in \mathbb{I}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2} \text{ trên đoạn } [-1;\,3].$$

Giải. Dễ thấy $3+2x-x^2=(3-x)(x+1)\geq 0$ với mọi $x\in[-1;\,3]$. Do đó $f(x)$ luôn xác định trên đoạn này và $f(x)\geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=-1$ hoặc $x=3$. Đây chính là giá trị nhỏ nhất của f.

Tiếp theo ta đi tìm giá trị lớn nhất của f.

Do $3+2x-x^2=4-(x-1)^2\leq 4$ nên $f(x)\leq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Vậy giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[-1;\,3]$ là 2.

Đối với các bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp nào đó, phương pháp thường được sử dụng là lập bảng biến thiên của hàm số trên tập hợp đó rồi suy ra các giá trị cần tìm (nếu có).

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=\frac{x}{4x^2-8x+9} \text{ trên đoạn } [0;\,2].$$

Giải. Dễ thấy hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ và do đó xác định với mọi $x\in[0;\,2]$. Ta có

$$f'(x)=\frac{9-4x^2}{(4x^2-8x+9)^2}.$$

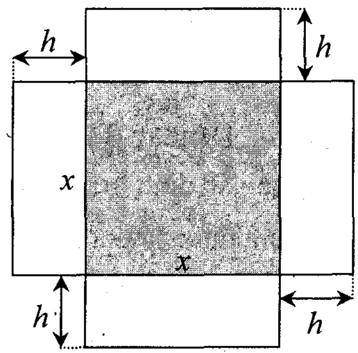
Trên đoạn $[0;\,2]$, phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm duy nhất là $x=\frac{3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{9}$

Từ bảng biến thiên suy ra : $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x)=0$ và $\max\limits_{x\in[0;\,2]} f(x)=\frac{1}{4}$. □

Ví dụ 3. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình bên. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và có thể tích là 500 (cm^3).



a) Hãy biểu diễn h theo x.

b) Tìm diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x.

c) Tìm giá trị của x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

Giải.

a) Thể tích của hộp là $V = x^2h$.

Theo giả thiết, $V = 500$ (cm^3), do đó $h = \dfrac{500}{x^2}$.

b) Diện tích của mảnh các tông có giá trị bằng tổng diện tích đáy của hộp và 4 mặt bên, tức là

$$S(x) = x^2 + 4hx.$$

Theo trên ta có $h = \dfrac{500}{x^2}$. Thay vào biểu thức của $S(x)$, ta được

$$S(x) = x^2 + \frac{2000}{x}.$$

c) Ta cần tìm $x > 0$ sao cho $S(x)$ có giá trị nhỏ nhất. Để thực hiện điều này, ta tiến hành khảo sát $S(x)$ trên $(0; +\infty)$. Ta có

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}, \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên của $S(x)$ như sau

x	0		10		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	300	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là 300, đạt được khi $x=10$. Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x=10$ (cm). □

Nhận xét. Người ta đã chứng minh được rằng *hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó* (đây chính là nội dung của định lí Weierstrass).

Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm. Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a; b)$ thì ta có quy tắc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$ như sau:

Quy tắc

- Tìm các điểm x_i $(i=0, 1, \ldots)$ thuộc $(a;b)$ mà tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- Tính $f(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots)$, $f(a)$ và $f(b)$.
- So sánh các giá trị tìm được. Số lớn nhất trong các giá trị đó chính là giá trị lớn nhất của f trên đoạn $[a; b]$, còn số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của f trên đoạn $[a; b]$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=\frac{2x^2+5x+4}{x+2} \text{ trên đoạn } \left[-\frac{3}{2}; 1\right].$$

Giải. Dễ thấy hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$. Ta có

$$f(x)=2x+1+\frac{2}{x+2},$$

do đó

$$f'(x)=2-\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{2(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}.$$

Trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; 1\right]$, $f'(x)=0$ chỉ tại một điểm $x=-1$. Ta có

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=2, \quad f(-1)=1, \quad f(1)=\frac{11}{3}.$$

Sử dụng quy tắc trên, ta suy ra

$$\min_{x\in\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} f(x)=f(-1)=1 \text{ và } \max_{x\in\left[-\frac{3}{2}; 1\right]} f(x)=f(1)=\frac{11}{3}. \square$$

BÀI TẬP

15. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ trên đoạn $[-3;3]$

b) $f(x)=5x^2-6x+13$ trên đoạn $[0;2]$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}$ trên đoạn $[-3;6]$

d) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$

e) $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$

f) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$.

16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

b) $f(x)=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$

c) $f(x)=\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$.

17. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng? Khi đó, có bao nhiêu căn hộ được cho thuê?

18. Một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính $a = \text{const}$. Gọi $x(x > 2)$ là chiều cao của hình chóp.

a) Tính thể tích của hình chóp.

b) Tìm điều kiện của x để hình chóp có thể tích nhỏ nhất.

19. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên đều dài 1 mét. Tính góc $\alpha = \widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ sao cho hình thang có diện tích lớn nhất và tính diện tích lớn nhất đó.

20. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

21. Cho hàm số f xác định trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$g(x) = f(x)f(1-x) \text{ trên đoạn } [-1;1].$$

§4. XÉT TÍNH LỒI, LÕM VÀ TÌM ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ

1. Tính lồi, lõm của đồ thị hàm số

Định nghĩa 1

> Giả sử $\mathbb{I}$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Một hàm f được gọi là *lõm* trên $\mathbb{I}$ nếu và chỉ nếu với mọi $\alpha, \beta \geq 0$ thỏa mãn $\alpha + \beta = 1$, ta có
>
> $$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \geq 0.$$
>
> Trong trường hợp ngược lại (tức bất đẳng thức ngược chiều đúng), ta nói f là một hàm *lồi* trên $\mathbb{I}$.

Chú ý : Trong một số sách Toán ở nước ngoài, khái niệm lồi, lõm của hàm số được hiểu ngược lại, nghĩa là hàm lõm ở định nghĩa trên lại được gọi là hàm *lồi* (*lồi dưới*) và hàm lồi ở định nghĩa trên lại được gọi là hàm *lõm* (*lồi trên*).

Định lí sau đây cho phép ta nhận biết một hàm số lồi, lõm khi nào.

Định lí 1

> Giả sử f có đạo hàm trên $\mathbb{I}$. Khi đó f lõm trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm tăng không nghiêm ngặt (knn) trên $\mathbb{I}$.

Chứng minh

- Trước hết, ta giả sử f lõm trên $\mathbb{I}$. Ta cần chứng minh $f'(x)$ tăng knn trên $\mathbb{I}$, nghĩa là :

$$f'(x_1) \leq f'(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}, x_1 < x_2.$$

Từ định nghĩa hàm lõm, với mọi $x_1 < x < x_2$, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2\right) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại như sau

$$(x_2 - x + x - x_1)f(x) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2),$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x)\left[f(x) - f(x_1)\right] \leq (x - x_1)\left[f(x_2) - f(x)\right],$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (1)$$

Bây giờ, cho $x \to x_1^+$, ta được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Lại cho $x \to x_2^-$ trong (1), ta có

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

- Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $f'(x)$ tăng knn $\Rightarrow f$ lõm trên $\mathbb{I}$.

Trong phần trên, ta đã sử dụng biến đổi tương đương để có (1), do đó nếu chứng minh được (1) đồng nghĩa với việc ta đã chứng minh được hàm f lõm trên $\mathbb{I}$.

Theo định lí Lagrange, ta thấy tồn tại $x_1 < x_3 < x < x_4 < x_2$ sao cho

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(x_3), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(x_4).$$

Vì $x_3 < x_4$ và $f'(x)$ tăng knn trên $\mathbb{I}$ nên ta có $f'(x_3) \leq f'(x_4)$, từ đây đưa đến

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

tức (1) được chứng minh. □

Từ định lí này, ta suy ra một hệ quả trực tiếp đơn giản và rất hay được sử dụng.

Hệ quả

Nếu f liên tục trên $\mathbb{I}$ và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{I}$ thì f lõm trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$.

Từ đây, ta có thể chứng minh một số tính chất thú vị của hàm lồi, hàm lõm :

a) Nếu f có đạo hàm và lõm trên khoảng $\mathbb{I}$ thì tiếp tuyến tại mọi điểm ($\in \mathbb{I}$) của nó đều nằm phía dưới đồ thị của hàm f.

b) Nếu f có đạo hàm và lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ thì tiếp tuyến tại mọi điểm ($\in \mathbb{I}$) của nó đều nằm phía trên đồ thị của hàm f.

c) Nếu f là hàm lõm trên đoạn $[a\,;\,b]$ thì ta có $f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}$ với mọi $x \in [a; b]$, hay nói một cách khác, giá trị lớn nhất của hàm f trên $[a\,;\,b]$ sẽ đạt được tại đầu mút của đoạn $[a\,;\,b]$. Tương tự, nếu f là hàm lồi trên đoạn $[a\,;\,b]$ thì giá trị nhỏ nhất của nó trên đoạn này sẽ đạt được tại đầu mút của đoạn $[a, b]$.

Tính chất a) có thể phát biểu lại như sau: Nếu $f''(x) \geq 0$ trên $\mathbb{I}$ thì ta có

$$f(x) - f'(x_0)(x-x_0) - f(x_0) \geq 0 \text{ với mọi } x_0, x \text{ thuộc } \mathbb{I}.$$

Điều này có thể chứng minh dễ dàng nếu sử dụng định lí Lagrange 2 lần :

$$\begin{aligned} f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0) &= f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \\ &= f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \\ &= f''(c')(c-x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

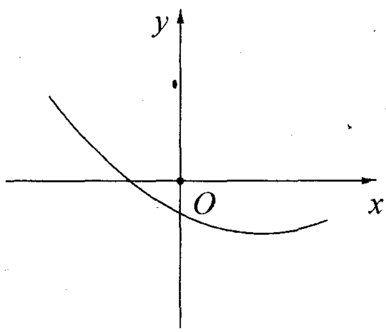
với c nằm giữa x_0 và x ; c' nằm giữa c và x_0.

Do $c-x_0$ và $x-x_0$ cùng dấu và $f''(c') \geq 0$ nên ta có đpcm. □

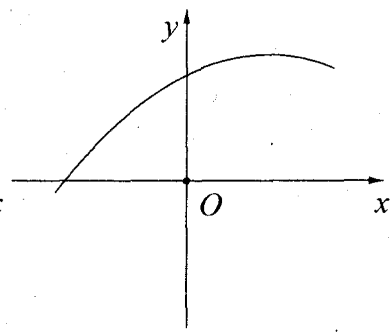
Tính chất c) là một tính chất thú vị và cũng rất hay được ứng dụng để tìm cực trị của hàm lõm.

H *Hãy chứng minh tính chất c).*

Từ tính chất a), b), dễ thấy đồ thị hàm lõm, hàm lồi có dạng như ở hình sau :



Hàm lõm



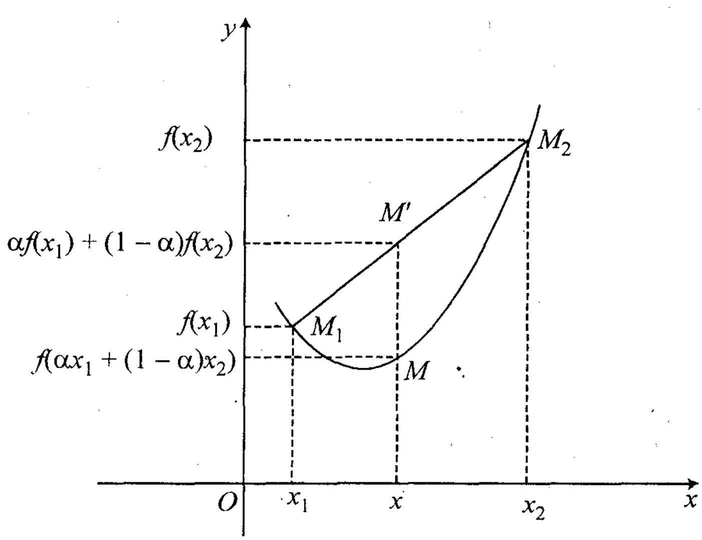
Hàm lồi

Ví dụ 1. Xét tính lồi, lõm của các hàm số $f(x) = x^2 + 3x + 3$, $g(x) = -x^2 + 1$.

Giải. Ta có $f''(x) = 2 > 0$ nên theo hệ quả trên, $f(x)$ lõm trên $\mathbb{R}$. Lại có $g''(x) = -2 < 0$ nên theo hệ quả trên, $g(x)$ lồi trên $\mathbb{R}$. □

Ý nghĩa hình học của hàm lõm

Giả sử f lõm trên $\mathbb{I}$. Lấy bất kì $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$ với $x_1 < x_2$. Gọi $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$, khi đó ta thấy $M'(x; y)$ nằm trên đoạn thẳng M_1M_2 khi và chỉ khi $\exists \alpha \in [0; 1]$ sao cho $\overrightarrow{M_2M'} = \alpha \overrightarrow{M_2M_1}$.



Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x - x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \\ y - f(x_2) = \alpha[f(x_1) - f(x_2)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \\ y = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \end{cases}$$

Vì f lõm trên $\mathbb{I}$ nên ta có

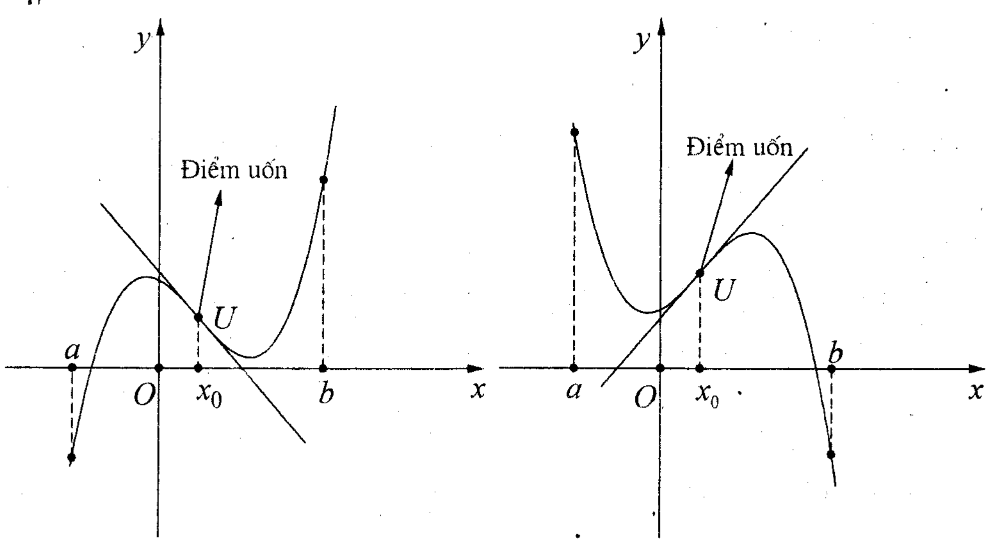
$$y_M = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) = y_{M'}.$$

Như vậy, *hàm số $f(x)$ lõm trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi với mọi cặp điểm M_1, M_2 thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, cung M_1M_2 của đồ thị luôn nằm phía dưới đoạn thẳng M_1M_2.*

2. Điểm uốn của đồ thị

Định nghĩa 2

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0. Nếu đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ lõm trên một trong hai khoảng $(a; x_0)$, $(x_0; b)$ và lồi trên khoảng còn lại, thì $U(x_0; f(x_0))$ được gọi là *điểm uốn* của đồ thị (C). Nói cách khác, điểm uốn của đồ thị là điểm phân chia hai phần lồi, lõm của đồ thị.



Ta dễ thấy : *Tiếp tuyến tại điểm uốn đi xuyên qua đồ thị (nghĩa là : trên một trong hai khoảng $(a; x_0)$, $(x_0; b)$, tiếp tuyến tại x_0 nằm phía dưới đồ thị và trên khoảng còn lại, tiếp tuyến đó nằm phía trên đồ thị).*

Từ những kết quả trên về tính lồi, lõm của đồ thị, ta dễ dàng suy ra định lí sau

Định lí 2

> Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng $\mathbb{I}$ chứa điểm x_0. Nếu $f''(x_0)=0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $U(x_0\,;f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Định lí này cho chúng ta một cách xác định điểm uốn của đồ thị.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số

$$y=x^3-2x^2.$$

Giải.

Ta có $y'=3x^2-4x$, $y''=6x-4$.

Từ đó dễ thấy $y''=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$,

$y''>0$ khi $x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ và $y''<0$ khi $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

Như vậy, hàm số đã cho lõm trên $\left[\dfrac{2}{3};\,+\infty\right)$ và lồi trên $\left(-\infty;\,\dfrac{2}{3}\right]$.

Điểm $U\left(\dfrac{2}{3};y\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)\equiv U\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{16}{27}\right)$ chính là điểm uốn của đồ thị hàm số.□

Chú ý.

Một hàm số có thể có nhiều điểm uốn. Chẳng hạn, hàm số $y=x^4-6x^2$ có hai điểm uốn là $U_1(-1,\,-5)$ và $U_2(1,\,-5)$.

BÀI TẬP

22. Xét tính lồi, lõm của đồ thị các hàm số sau

a) $y=x^3-3x^2+x+1$

b) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+5$

c) $y = x^4 - 5x^3 + x + 2$

d) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + x + 1.$

23. Chứng minh rằng mọi hàm đa thức bậc ba đều có một điểm uốn và điểm uốn đó chính là tâm đối xứng của đồ thị.

24. Giả sử f là một hàm liên tục trên khoảng $\mathbb{I}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{I}.$$

Chứng minh rằng khi đó f là hàm lõm trên $\mathbb{I}$, tức ta có

$$(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y) \geq f((1-\alpha)x+\alpha y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{I},\ \alpha \in [0\ ;\ 1].$$

25. Xác định a và b để điểm $I(2;-6)$ là điểm uốn của đồ thị hàm số

$$y = ax^3 + bx^2 + x - 4.$$

26. Tìm a để đồ thị hàm số $y = x^4 - ax^2 + 3$

a) Có hai điểm uốn

b) Không có điểm uốn nào.

27. Chứng minh rằng trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5,$$

tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất.

28. Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

có ba điểm uốn thẳng hàng.

Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm uốn.

§5. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Trong phần giới thiệu về khái niệm đạo hàm, chúng ta đã nêu ra ý nghĩa hình học của đạo hàm - đó chính là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đang xét trên đồ thị hàm số. Trong phần này, ta xem xét bài toán về phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số và một số vấn đề liên quan.

1. Phương trình tiếp tuyến tại một điểm nằm trên đồ thị

Nhắc lại là nếu $M(x_0, y_0)$ là một điểm nằm trên đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ thì phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ tại điểm $M(2;0)$.

Giải. Ta có $M(2;0)$ thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x$.

Ta có $f'(x) = 2x - 2$, $f'(2) = 2$. Từ đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng

$$y - 0 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 4. \square$$

Chú ý rằng hai thuật ngữ *tiếp tuyến của đồ thị tại M* và *tiếp tuyến của đồ thị qua M* là khác nhau. Trước hết, tiếp tuyến của đồ thị tại M chỉ tồn tại khi M nằm trên đồ thị, còn tiếp tuyến của đồ thị qua M có thể tồn tại ngay cả khi M không nằm trên đồ thị. Mặt khác, và điều này rất quan trọng: nếu M nằm trên đồ thị thì số tiếp tuyến qua M có thể nhiều hơn 1, trong khi tiếp tuyến tại M chỉ có 1 (với phương trình được nêu ở trên). Dưới đây ta trình bày phương pháp tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ (nói chung M không thuộc đồ thị (C)).

Giả sử đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và tiếp xúc với (C) tại điểm $N(x_1; y_1)$. Khi đó phương trình d có dạng $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$.

Vì d đi qua M nên ta có

$$y_0 - y_1 = f'(x_1)(x_0 - x_1). \qquad (*)$$

Ngoài ra ta còn có $\quad y_1 = f(x_1). \qquad (**)$

Thay (**) vào (*), ta được phương trình

$$y_0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_0 - x_1).$$

Đây chính là phương trình để tìm ra hoành độ các tiếp điểm. Số nghiệm của phương trình này chính là số tiếp tuyến của (C) đi qua M (hay kẻ từ M). □

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ kẻ từ điểm $M\left(\frac{7}{9};-1\right)$.

Giải. Giả sử tiếp tuyến d cần tìm tiếp xúc với đồ thị tại điểm $(x_1; y_1)$. Khi đó phương trình của d có dạng

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - (4x_1^3 - 3x_1) = (12x_1^2 - 3)(x - x_1).$$

Vì d đi qua điểm $M\left(\frac{7}{9};-1\right)$ nên ta có

$$-1 - (4x_1^3 - 3x_1) = (12x_1^2 - 3)\left(\frac{7}{9} - x_1\right).$$

Rút gọn hai vế, ta được phương trình

$$6x_1^3 - 7x_1^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(6x_1^2 - x_1 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_1 = -\frac{1}{3}.$$

Từ đó ta tìm được các phương trình tiếp tuyến tương ứng là

$$y - 1 = 9(x - 1),\ y + 1 = 0,\ y - \frac{23}{27} = -\frac{5}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right). \ □$$

Sử dụng phương trình tiếp tuyến tại một điểm thuộc đồ thị và phương pháp lập luận tương tự như trên, ta còn giải được bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị song song với một đường thẳng đã cho (nói cách khác : với hệ số góc cho trước).

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x^2$ song song với đường thẳng $y = 6x$.

Giải. Giả sử tiếp tuyến cần tìm tiếp xúc với đồ thị hàm số tại điểm $M(x_1; y_1)$ thì phương trình tiếp tuyến đã cho có dạng

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Tiếp tuyến này song song với đường thẳng $y = 6x$ nên ta có

$$f'(x_1) = 6 \Leftrightarrow 12x_1^2 - 6x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng là

$$y - 1 = 6(x-1) \text{ và } y + \frac{5}{4} = 6\left(x + \frac{1}{2}\right). \square$$

2. Giao điểm của hai đồ thị

Các đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi $y_0 = f(x_0)$ và $y_0 = g(x_0)$, tức $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x). \end{cases}$$

Như vậy hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên là nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x).$$

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Ví dụ 4. Với các giá trị nào của *m*, đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt ?

Giải. Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = m$, tức là

$$x^4 - 2x^2 - m - 3 = 0. \qquad (1)$$

Đặt $X = x^2, X \geq 0$, ta được

$$X^2 - 2X - m - 3 = 0. \qquad (2)$$

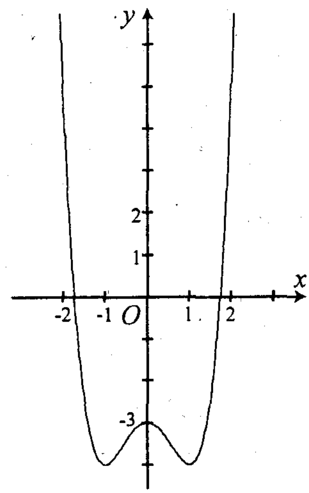
Đường thẳng cắt đường cong tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương X_1, X_2 phân biệt, tức là

$$\begin{cases}\Delta' > 0 \\ X_1X_2 > 0 \\ X_1 + X_2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4>0 \\ -m-3>0 \\ 2>0\end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -3. \square$$

Nhận xét

Có thể giải bài toán trên bằng đồ thị như sau:

Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ được cho trong hình bên.



Đồ thị của hàm số $y = m$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành. Dựa vào đồ thị hai hàm số đã cho, ta thấy ngay rằng đường thẳng và đường cong đã cho cắt nhau tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$-4 < m < -3.$$

Phương pháp đồ thị tỏ ra hiệu quả hơn phương pháp phương trình đại số vì nói chung, ta chỉ có thể biện luận dễ dàng đối với phương trình bậc hai.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $4x^3 - 3x = m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Giải. Khảo sát hàm số $y = 4x^3 - 3x$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	1	↘	−1	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra các giá trị m cần tìm là $-1 < m < 1$. $\square$

H1. *Chứng minh rằng với mọi giá trị m, đường thẳng $y = x - m$ cắt đường cong $y = \dfrac{-x^2 + 2x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt.*

3. Sự tiếp xúc của hai đường cong

Định nghĩa

> Giả sử hai hàm số f và g có đạo hàm tại điểm x_0. Ta nói rằng hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ *tiếp xúc* với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu M là một điểm chung của chúng và hai đường cong có tiếp tuyến chung tại M. Điểm M được gọi *tiếp điểm* của hai đường cong đã cho.

Hiển nhiên các đồ thị của hai hàm số đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi

$$y_0 = f(x_0),\ y_0 = g(x_0) \text{ và } f'(x_0) = g'(x_0).$$

Từ đó dễ dàng suy ra rằng

> Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình
>
> $$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$
>
> có nghiệm và nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng hai đường cong

$$y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2 \text{ và } y = x^2 + x - 2$$

tiếp xúc với nhau tại một điểm nào đó.

Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong đã cho tại điểm đó.

Giải.

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình :

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x^3+\dfrac{5}{4}x-2=x^2+x-2 \\ \left(x^3+\dfrac{5}{4}x-2\right)'=\left(x^2+x-2\right)' \end{cases}$$

Ta có

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+\dfrac{5}{4}x-2=x^2+x-2 \\ 3x^2+\dfrac{5}{4}=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy hai đường cong đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến chung tại điểm M của hai đường cong là $y'\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm M là

$$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4} \text{ hay } y=2x-\frac{9}{4}.\square$$

H2. *Chứng minh rằng đường cong $y=x^3-x$ tiếp xúc với parabol $y=x^2-1$ tại một điểm nào đó. Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.*

Ví dụ 7. Chứng minh rằng đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của parabol $y=ax^2+bx+c$ khi và chỉ khi phương trình

$$ax^2+bx+c=px+q \qquad \text{hay} \qquad ax^2+(b-p)x+c-q=0 \qquad (3)$$

có nghiệm kép, tức là $\Delta=(b-p)^2-4a(c-q)=0$.

Chứng minh. Ta đã biết : đường thẳng và parabol tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=px+q \\ \left(ax^2+bx+c\right)'=(px+q)' \end{cases} \text{hay} \begin{cases} ax^2+bx+c=px+q \\ 2ax+b=p \end{cases} \qquad (4)$$

có nghiệm.

Nếu đường thẳng tiếp xúc với parabol thì hệ phương trình trên có nghiệm. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của hệ phương trình trên. Khi đó, vì $a \neq 0$ nên từ (4) ta có $x_0 = \frac{p-b}{2a}$. Thay vào (3), ta được

$$\frac{a(p-b)^2}{4a^2} + \frac{(b-p)(p-b)}{2a} + c - q = 0.$$

Từ đó suy ra $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$.

Vậy phương trình (3) có nghiệm kép.

Đảo lại, nếu phương trình (3) có nghiệm kép x_0 thì $x_0 = \frac{p-b}{2a}$. Hiển nhiên $x = x_0$ cũng là nghiệm của phương trình (4). Vậy hệ phương trình trên có nghiệm. Do đó đường thẳng là tiếp tuyến của parabol. □

Chú ý

Có thể áp dụng điều khẳng định trong ví dụ 7 để xét sự tiếp xúc của đường thẳng và parabol. Nói chung, một đường cong bậc hai và một đường thẳng tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình xác định hoành độ giao điểm của chúng có nghiệm kép.

Ví dụ 8. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1 ; -2)$ và tiếp xúc với parabol $y = x^2 - 2x$.

Giải. Phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1 ; -2)$ và có hệ số góc m là $y = m(x-1) - 2$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol đã cho là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x = m(x-1) - 2$, tức là

$$x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0. \qquad (5)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (5) có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ hoặc } m = -2.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của parabol đã cho đi qua điểm A. Đó là hai đường thẳng

$$y = 2(x-1) - 2 \text{ hay } y = 2x - 4$$

$$\text{và } y = -2(x-1) - 2 \text{ hay } y = -2x. \square$$

BÀI TẬP

29. a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1.$$

b) Gọi (C) là đồ thị của $f(x)$. Tìm các giao điểm của đường cong (C) với parabol

$$(P):\ g(x) = 2x^2 + 1.$$

c) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) và (P) tại một giao điểm của chúng.

d) Xác định các khoảng trên đó (C) nằm phía trên hoặc phía dưới (P).

30. Cho parabol (P) : $y = x^2 - 2x$.

a) Tìm tập hợp tất cả những điểm mà từ đó có thể kẻ đến (P) đúng 1 tiếp tuyến.

b) Tìm tập hợp tất cả những điểm mà từ đó có thể kẻ đến (P) hai tiếp tuyến và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

31. a) Hãy chứng minh định lí sau :

Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi f(x) có cực đại, cực tiểu và $f(x_{CĐ})f(x_{CT}) < 0$.

b) Áp dụng định lí trên, chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình $x^3 + px + q = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $q^2 + \dfrac{4p^3}{27} < 0$.

32. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{3}$.

b) Chứng minh rằng trong miền $x \geq -\frac{3}{4}$, tiếp tuyến nói trên luôn nằm trên đồ thị (C).

c) Từ đó suy ra khẳng định sau: Nếu x, y, z là các số thực không nhỏ hơn $-\frac{3}{4}$ và có tổng bằng 1 thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

33. Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

$$f(x)=-x^2+3x+6,\ g(x)=x^3-x^2+4 \text{ và } h(x)=x^2+7x+8$$

tiếp xúc với nhau tại điểm $A(-1\ ;\ 2)$.

34. Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số

$$f(x)=\frac{x^2+3x}{2} \text{ và } g(x)=\frac{3x}{x+2}$$

tiếp xúc với nhau. Xác định tọa độ tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

35. Một viên đạn được bắn ra với vận tốc ban đầu $v_0 > 0$ từ một nòng súng đặt ở gốc tọa độ O, nghiêng một góc α với mặt đất (nòng súng nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy và tạo với trục Ox một góc α). Biết quỹ đạo chuyển động của viên đạn là parabol

$$(\gamma_\alpha): y=-\frac{g}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2+x\tan\alpha \text{ (} g \text{ là gia tốc trọng trường).}$$

Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, (γ_α) luôn tiếp xúc với parabol (Γ) có phương trình là

$$y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2+\frac{v_0^2}{2g}$$

và tìm tọa độ tiếp điểm ((Γ) được gọi là *parabol an toàn*).

Chuyên đề 1

TỔ HỢP

Chương trình phổ thông (lớp 11) đã trang bị cho học sinh hai quy tắc đếm cơ bản (quy tắc cộng và quy tắc nhân), các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp. Nhờ đó học sinh có thể giải được khá nhiều các bài toán tổ hợp cơ bản, tương đối đơn giản. Tuy nhiên đối với những bài toán tổ hợp phức tạp, cần có các phương pháp "cao cấp" hơn, sắc bén hơn. Các dạng toán nâng cao này thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia hay quốc tế. Chuyên đề này nhằm cung cấp một số phương pháp để có thể công phá được các dạng toán khó trong tổ hợp.

1. SỬ DỤNG CÔNG THỨC BAO HÀM VÀ LOẠI TRỪ

Bản chất toán học của quy tắc cộng (phát biểu cho công việc với nhiều phương án) là công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau. Cụ thể ta có

Cho n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một không giao nhau. Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp n tập hợp bất kì (không nhất thiết rời nhau). Khi đó ta có quy tắc cộng cho số phần tử của hợp của n tập hợp bất kì, thường được gọi là công thức bao hàm và loại trừ.

Định lí *(Công thức bao hàm và loại trừ)*

Cho n tập hợp hữu hạn $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < k \le n} |A_i \cap A_k| +$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Định lí này có thể chứng minh tương đối dễ bằng phương pháp quy nạp, xin dành cho bạn đọc.

Ví dụ 1

Hỏi trong tập $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho 2, 3, 5, 7 ?

Giải. Ta đếm xem trong tập S có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7. Kí hiệu

$$A_1 = \{k \in S : k \text{ chia hết cho } 2\},$$

$$A_2 = \{k \in S : k \text{ chia hết cho } 3\},$$

$$A_3 = \{k \in S : k \text{ chia hết cho } 5\},$$

$$A_4 = \{k \in S : k \text{ chia hết cho } 7\}.$$

Khi đó $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ là tập các số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7. Dễ thấy với mỗi số nguyên dương m thì số các số trong S chia hết cho m là $\left[\frac{280}{m}\right]$. Do đó

$$|A_1| = \frac{280}{2} = 140\ ;\ |A_2| = \left[\frac{280}{3}\right] = 93\ ;\ |A_3| = \frac{280}{5} = 56\ ;\ |A_4| = \frac{280}{7} = 40\ ;$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{6}\right] = 46\ ;\ |A_1 \cap A_3| = \left[\frac{280}{10}\right] = 28\ ;\ |A_1 \cap A_4| = \left[\frac{280}{14}\right] = 20\ ;$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{15}\right] = 18\ ;\ |A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{21}\right] = 13\ ;\ |A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{35}\right] = 8\ ;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{30}\right] = 9\ ; \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{42}\right] = 6\ ;$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{70}\right] = 4\ ; \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{105}\right] = 2\ ;$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{210}\right] = 1.$$

Sử dụng công thức bao hàm và loại trừ, ta tìm được

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216.$$

Thành thử, trong tập S có $280 - 216 = 64$ số không chia hết cho 2, 3, 5, 7. □

Ví dụ 2. (*Công thức Φ - hàm Euler*)

Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, kí hiệu $\Phi(n)$ là số các số nguyên dương bé hơn n và không có ước số chung với n. Chứng minh rằng

$$\Phi(n) = n\prod_{i=1}^{m}\left(1 - p_i^{-1}\right)$$

trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_m$ là tất cả các ước nguyên tố phân biệt của n.

Hàm $\Phi(n)$ được gọi là hàm Euler. Nó đóng một vai trò quan trọng trong nhiều bài toán số học.

Giải. Kí hiệu $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ta đếm xem trong tập S có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Gọi $A_i = \{k \in S : k$ chia hết cho $p_i\}$, (i = 1, 2, ..., m).

Khi đó $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ là tập các số chia hết cho ít nhất một trong các số $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Ta có

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}.$$

Do đó theo công thức bao hàm và loại trừ

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right| = \sum_{i=1}^{m}\frac{n}{p_i} - \sum_{1 \le i < k \le m}\frac{n}{p_i p_k} + \sum_{1 \le i < j < k \le m}\frac{n}{p_i p_j p_k} - \cdots + (-1)^{m+1}\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m}$$

Vì $\Phi(n)$ là số các số không chia hết cho tất cả các số $p_1, p_2, \ldots, p_m$ nên

$$\begin{aligned}
\Phi(n) &= n - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m\right| \\
&= n\left(1 - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i < k \le m}\frac{1}{p_i p_k} - \sum_{1 \le i < j < k \le m}\frac{1}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_m}\right) \\
&= n\prod_{i=1}^{m}\left(1 - p_i^{-1}\right). \square
\end{aligned}$$

2. THIẾT KẾ CÁC CÔNG ĐOẠN THÍCH HỢP

Để áp dụng được quy tắc nhân, điều cốt yếu là phải thiết kế một mô hình gồm việc thực hiện liên tiếp các công đoạn.

Quy tắc nhân phát biểu : Với mỗi cách thực hiện ở công đoạn trước thì công đoạn thứ k có thể làm theo n_k cách. Như vậy : số cách thực hiện ở mỗi công đoạn phải không phụ thuộc vào cách nào đã được thực hiện ở công đoạn trước đó. Thành thử, muốn sử dụng được quy tắc nhân, trong mô hình của ta gồm việc thực hiện liên tiếp các công đoạn, số cách thực hiện ở mỗi công đoạn phải như nhau với mọi cách đã được thực hiện ở công đoạn trước đó.

Ví dụ 3. Có 4 người A, B, C, D cần chọn vào các chức giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT. Giả sử việc chọn nhân sự phải thỏa mãn yêu cầu : ông A không thể được chọn làm giám đốc, chức chủ tịch HĐQT phải là ông C hoặc ông D. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải. Có một lời giải như sau : Việc chọn ba vị trí giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT có thể tiến hành theo 3 công đoạn :

Công đoạn 1. Chọn giám đốc : Có 3 cách chọn chức giám đốc (chọn B, C, D).

Công đoạn 2. Chọn kế toán trưởng : Có ba cách chọn kế toán trưởng từ ba người còn lại.

Công đoạn 3. Chọn chủ tịch HĐQT : Có hai cách chọn (ông C hoặc ông D).

Theo quy tắc nhân thì số cách là 3.3.2 = 18.

Cách này không đúng : Vì số cách thực hiện công đoạn 3 phụ thuộc vào kết quả của các công đoạn 1, 2 trước đó : Nếu ở các công đoạn trước, ông C và ông D không được chọn thì công đoạn 3 mới có hai cách. Còn nếu C hoặc D đã được chọn thì ở công đoạn 3 chỉ có một cách hoặc thậm chí không có.

Tuy nhiên nếu ta thiết kế việc chọn ba vị trí giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT tiến hành theo 3 công đoạn khác thì vẫn có thể áp dụng quy tắc nhân. Cụ thể :

Công đoạn 1. Chọn chủ tịch HĐQT : Luôn có hai cách chọn : C hoặc D.

Công đoạn 2. Chọn giám đốc : Ta luôn có hai cách chọn dù ở kết quả của công đoạn 1 thế nào. Sau công đoạn 1 còn ba người trong đó có ông A. Bỏ ông A ra ta còn hai người có thể chọn vào chức giám đốc.

Công đoạn 3. Chọn kế toán trưởng : luôn có hai cách (từ hai người còn lại).

Vậy kết quả là có 2.2.2 = 8 cách chọn. Đây là đáp số đúng. □

Ví dụ 4

a) Giả sử có 8 vận động viên bóng bàn tham dự một giải đấu. Trong vòng đầu của giải, ban tổ chức cần phân ra 4 cặp đấu. Hỏi có bao nhiêu cách ghép thành 4 cặp đấu ?

b) Giả sử có $2n$ vận động viên bóng bàn tham dự một giải đấu. Trong vòng đầu của giải, ban tổ chức cần phân ra n cặp đấu. Hỏi có bao nhiêu cách ghép thành n cặp đấu ?

c) Từ b) chứng tỏ rằng với mỗi số nguyên dương n, ta có

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n) \text{ chia hết cho } 2^n.$$

Giải

a) Ta thiết kế việc thực hiện chọn theo các công đoạn sau :

Công đoạn 1 : Chọn 2 người trong 8 người làm thành cặp đấu thứ nhất. Có C_8^2 cách chọn.

Công đoạn 2 : Chọn 2 người trong 6 người còn lại để làm thành cặp đấu thứ hai. Có C_6^2 cách chọn.

Công đoạn 3 : Chọn 2 người trong 4 người còn lại để làm thành cặp đấu thứ ba. Có C_4^2 cách chọn.

Công đoạn 4 : Có $C_2^2 = 1$ cách chọn : Hai người còn lại sẽ làm thành cặp đấu thứ tư.

Theo quy tắc nhân có $C_8^2\, C_6^2\, C_4^2\, C_2^2$ cách chọn. Vì thứ tự 4 cặp đấu không được xét đến nên số cách ghép thành 4 cặp đấu là

$$\frac{C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2}{4!} = 105.$$

b) Lí luận tương tự như trên, số cách ghép thành n cặp đấu là

$$T = \frac{C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 \ldots C_4^2 C_2^2}{n!}.$$

c) Dễ biến đổi

$$T = \frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{(n+1)(n+2)...(2n-1)2n}{2^n}.$$

Vì T là một số nguyên dương nên công thức này chứng tỏ

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n) \text{ chia hết cho } 2^n. \ \square$$

3. SỬ DỤNG PHÉP SONG ÁNH

Giả sử rằng có n người đến dự một buổi nói chuyện trong một hội trường gồm 200 ghế. Giả sử rằng mỗi người chỉ chiếm một ghế ngồi và mỗi ghế chỉ có nhiều nhất một người ngồi. Nếu ta biết rằng mọi người đều có chỗ ngồi thì ta kết luận được $n \leq 200$. Nếu ta biết thêm rằng không có ghế nào trống thì ta biết ngay là $n = 200$. Nếu có một số người phải đứng vì không có ghế thì ta suy ra $n > 200$.

Như vậy có thể xác định hay ước lượng số phần tử của một tập hợp A nào đó thông qua một tập hợp B mà ta đã biết số phần tử của nó nhờ một phép tương ứng giữa A và B.

Cho ánh xạ $f : A \to B$. Nhớ lại rằng :

+ Ánh xạ f được gọi là một đơn ánh nếu với hai phần tử bất kì $a_1, a_2 \in A$, khi $a_1 \neq a_2$ thì $f(a_1) \neq f(a_2)$, tức là $f(a_1) = f(a_2)$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2$.

+ Ánh xạ f được gọi là một toàn ánh nếu với mọi $b \in B$ đều tồn tại $a \in A$ để $f(a) = b$.

+ Ánh xạ f được gọi là một song ánh nếu với mọi $b \in B$ tồn tại duy nhất $a \in A$ để $f(a) = b$.

Rõ ràng f là song ánh khi và chỉ khi f đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

Định lí

Cho A và B là hai tập hợp hữu hạn.

+ Nếu có một đơn ánh $f : A \to B$ thì $|A| \leq |B|$

+ Nếu có một toàn ánh $f : A \to B$ thì $|A| \geq |B|$

+ Nếu có một song ánh $f : A \to B$ thì $|A| = |B|$.

Ví dụ 5. Cho tập $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Một tập con B của A gọi là một *tập cân* nếu trong tập đó số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. (Tập rỗng là một tập cân vì số các số chẵn và số các số lẻ trong tập rỗng đều bằng 0). Hỏi A chứa bao nhiêu tập cân ?

Chẳng hạn với $n = 2$ thì $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Dễ dàng chỉ ra A có 6 tập con cân là các tập sau : $\varnothing$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.

Giải. Kí hiệu $X = \{2, 4, \ldots, 2n\}$ là tập hợp tất cả các số chẵn của A và $Y = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ là tập hợp tất cả các số lẻ của A. Gọi $\mathscr{C}$ là họ tất cả các tập cân của A và N là họ các tập con của A có đúng n phần tử.

Ta lập một ánh xạ f từ $\mathscr{C}$ vào N như sau : Giả sử B là một tập cân. Kí hiệu B_1, B_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của B. Khi đó đặt

$$f(B) = B_1 \cup (Y \setminus B_2).$$

Do B là tập cân nên $|B_1| = |B_2|$. Thành thử

$$|f(B)| = |B_1| + |Y \setminus B_2| = |B_1| + |Y| - |B_2| = |Y| = n.$$

Vậy $f(B) \in N$.

Ta chứng minh f là một song ánh.

+ f là đơn ánh : Giả sử $f(B) = f(C)$. Suy ra

$$B_1 \cup (Y \setminus B_2) = C_1 \cup (Y \setminus C_2).$$

Vì B_1, C_1 là tập các số chẵn ; $(Y \setminus B_2), (Y \setminus C_2)$ là tập các số lẻ nên từ đó suy ra

$$B_1 = C_1 \ ; \ Y \setminus B_2 = Y \setminus C_2.$$

Do đó $B_1 = C_1$; $B_2 = C_2$ hay $B = C$.

+ f là một toàn ánh : Giả sử $M \in N$ là một tập con của A có n phần tử. Kí hiệu M_1, M_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của M. Đặt $B_1 = M_1$; $B_2 = Y \setminus M_2$ và $B = B_1 \cup B_2$. Ta có

$|B_1| = |M_1|$;

$|B_2| = |Y| - |M_2| = n - |M_2| = |M| - |M_2| = |M_1|$.

Vậy $|B_1| = |B_2|$, do đó B là một tập cân. Rõ ràng

$$f(B) = B_1 \cup (Y \setminus B_2) = M_1 \cup M_2 = M.$$

Vì có một song ánh giữa họ các tập cân và họ các tập con có n phần tử của A nên theo định lí trên, số các tập cân của A bằng số các tập con có n phần tử của A. Vậy A có tất cả là C_{2n}^{n} tập cân. □

Ví dụ 6. Cho trước số nguyên dương n và số nguyên dương r thoả mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $X = \{1, 2, ..., n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của X đồng thời có hai tính chất sau :

+ A chứa r phần tử.

+ A không chứa hai số nguyên liên tiếp.

Chẳng hạn với $n = 7$, $r = 3$, $X = \{1, 2, \ldots, 7]$. Các tập con A của X có ba phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp là các tập được liệt kê dưới đây

$$\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 4, 7\},$$
$$\{1, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}.$$

Như vậy có 10 tập có tính chất đã nêu.

Giải. Gọi $\mathcal{A}$ là họ tất cả các tập con của X có tính chất đã nêu, $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập con có r phần tử của tập hợp

$$Y = \{1, 2, \ldots, n - (r - 1)\}.$$

Ta thiết lập một ánh xạ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ như sau : Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\} \in \mathcal{A}$. Ta có thể giả thiết $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_r$. Đặt

$$b_1 = a_1; b_2 = a_2 - 1; b_3 = a_3 - 2; \ldots; b_i = a_i - (i - 1); \ldots; b_r = a_r - (r - 1).$$

Vì $a_{i+1} - a_i \geq 2 \Rightarrow b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - i - a_i + i - 1 = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1$.

Do đó $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_r \leq n - r + 1$.

Ta định nghĩa

$$f(A) = B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r\} = \{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, ..., a_i - (i - 1), ..., a_r - (r - 1)\}.$$

Ta có $B \in \mathcal{B}$, do vậy f là một ánh xạ từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$. Ta sẽ chứng minh f là song ánh.

$+f$ là đơn ánh : Từ công thức $b_i = a_i - (i-1)$ suy ra $a_i = b_i + i - 1$. Do đó nếu $f(A) = f(A')$ thì $A = A'$.

$+f$ là toàn ánh : Giả sử $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r\} \in \mathscr{B}$.

Xét tập $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, ở đó

$$a_1 = b_1; a_2 = b_2 + 1; a_3 = b_3 + 2; \ldots; a_i = b_i + i - 1; \ldots; a_r = b_r + r - 1.$$

Ta có $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_r \leq n - r + 1 + r - 1 = n$, $b_i = a_i - (i-1)$ và

$$a_{i+1} - a_i = b_{i+1} + i - b_i - i + 1 = b_{i+1} - b_i + 1 \geq 2.$$

do đó $A \in \mathscr{A}$, $f(A) = B$.

Vì có một song ánh giữa A và họ các tập con có r phần tử của Y nên theo định lí trên, số các tập A có tính chất đã nêu bằng số các tập con có r phần tử của Y. Vậy có tất cả C_{n-r+1}^{r} các tập con của X có tính chất đã nêu. □

Ví dụ 7. Một cửa hàng kem có bán ba loại kem : kem xoài, kem sôcôla và kem sữa. Một nhóm có 6 người vào ăn kem và gọi 6 cốc kem.

a) Hỏi họ có bao nhiêu sự lựa chọn ?

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn trong đó cả ba loại kem đều có mặt ?

Giải. Ta thử liệt kê một vài sự lựa chọn

+ 2 kem xoài, 1 kem sô cô la, 3 kem sữa

+ 1 kem xoài, 4 kem sô cô la, 1 kem sữa

+ 2 kem sô cô la, 4 kem sữa

+ 3 kem xoài, 3 kem sữa.

Một sự lựa chọn : "a kem xoài, b kem sôcôla và c kem sữa" được kí hiệu bởi một bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thoả mãn $a + b + c = 6$.

Chẳng hạn bốn sự lựa chọn ở trên được kí hiệu là các bộ (2, 1, 3) ; (1, 4, 1) ; (0, 2, 4) và (3, 0, 3).

Với mỗi bộ ba (a, b, c) như vậy, ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân (dãy gồm các chữ số 0 và 1) theo quy tắc sau : viết liên tiếp từ trái sang phải : a số 1, số 0, b số 1, số 0, rồi c số 1.

$$\underbrace{11...1}_{a}0\underbrace{11...1}_{b}0\underbrace{11...1}_{c}$$

Như vậy mỗi bộ ba (a, b, c) được tương ứng với một dãy nhị phân độ dài 8 (tức là gồm 8 kí tự) trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Chẳng hạn $(2, 1, 3) \rightarrow 11010111$

$(1, 4, 1) \rightarrow 10111101$

$(0, 2, 4) \rightarrow 01101111$

$(3, 0, 3) \rightarrow 11100111$.

Rõ ràng phép tương ứng đó là một đơn ánh. Ngược lại, với mỗi dãy 8 kí tự với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 khi ta đếm từ trái sang phải mà có : a số 1, số 0, b số 1, số 0 và c chữ số 1 thì dãy đó sẽ ứng với bộ (a, b, c) thoả mãn $a + b + c = 6$.

Chẳng hạn dãy 10110111 sẽ ứng với bộ (1, 2, 3) tức là ứng với sự lựa chọn : 1 kem xoài, 2 kem sôcôla và 3 kem sữa, dãy 01011111 ứng với bộ (0, 1, 5) tức là ứng với sự lựa chọn 1 kem sôcôla và 5 kem sữa.

Như vậy, ta đã thiết lập một song ánh giữa tập hợp các sự lựa chọn với tập hợp các dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0. Do đó số các sự lựa chọn bằng số các dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Mặt khác, một dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để ghi số 0 (6 vị trí còn lại ghi số 1). Thành thử có $C_8^2 = 28$ dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.

Do đó số các sự lựa chọn là 28.

b) Một sự lựa chọn : "a kem xoài, b kem sô cô la và c kem sữa" được kí hiệu bởi một bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện

$$a + b + c = 6.$$

Với mỗi bộ (a, b, c) thoả mãn điều kiện trên, ta cho tương ứng với bộ (x, y, z) với $x = a - 1$; $y = b - 1$; $z = c - 1$. Khi đó (x, y, z) là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $x + y + z = a + b + c - 3 = 3$. Dễ kiểm tra rằng đây là một phép song ánh giữa tập các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 6$ với tập các bộ ba (x, y, z) là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $x + y + z = a + b + c - 3 = 3$. Bằng suy luận tương tự như câu a), ta tìm được số các sự lựa chọn là $C_5^2 = 10$. □

Ví dụ 8. Cho hai số nguyên dương m, n với $m < n$.

a) Tìm số bộ $(a_1, a_2, ..., a_m)$ trong đó $a_1, a_2, ..., a_m$ là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{m} a_i = n$.

b) Tìm số bộ $(a_1, a_2, ..., a_m)$ trong đó $a_1, a_2, ..., a_m$ là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{m} a_i = n$.

Giải. Bằng lí luận tương tự như trong ví dụ 7, ta có kết quả là

a) C_{n+m-1}^{m-1} b) C_{n-1}^{m-1}. □

Ví dụ 9. Có sáu chiếc bánh xe, mỗi chiếc có 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9. Người chơi lần lượt quay 6 chiếc bánh xe này để nhận được bộ 6 chữ số $(a_1, a_2, ..., a_6)$. Người chơi sẽ nhận được giải thưởng nếu tổng ba chữ số đầu bằng tổng ba chữ số cuối. Tính xác suất thắng của người chơi.

Giải. Không gian mẫu là

$$\Omega = \{(a_1, a_2, ..., a_6), 0 \le a_i \le 9\}.$$

Do đó số trường hợp có thể là $|\Omega| = 10^6$.

Số trường hợp thuận lợi là số các bộ $(a_1, a_2, ..., a_6), 0 \le a_i \le 9$ thoả mãn điều kiện

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6. \qquad (1)$$

Nhận xét. Số bộ cần tìm bằng số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_6), 0 \le x_i \le 9$ thoả mãn điều kiện :

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 27. \qquad (2)$$

Thật vậy, với mỗi bộ $(a_1, a_2, ..., a_6), 0 \le a_i \le 9$ thoả mãn (1), ta đặt

$$x_i = a_i (i = 1,2,3);$$
$$x_i = 9 - a_i (i = 4,5,6)$$

Khi đó ta có bộ $(x_1, x_2, ..., x_6), 0 \le x_i \le 9$ và

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{3} a_i + 27 - \sum_{i=4}^{6} a_i = 27$$

khi và chỉ khi $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$.

Dễ thấy phép tương ứng này là song ánh.

Gọi S là tập các bộ số tự nhiên $(x_1, x_2, ..., x_6)$ thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 27.$$

Với mỗi k = 1, 2, ..., 6, gọi A_k là tập các bộ số tự nhiên $(x_1, x_2, ..., x_6)$ thoả mãn điều kiện $x_k \ge 10$ và $\sum_{i=1}^{6} x_i = 27$.

Rõ ràng số cần tìm là $|S| - \left|\bigcup_{k=1}^{6} A_k\right|$.

Theo ví dụ 8a ta có $|S| = C_{32}^5 = 201376$.

Để tính $\left|\bigcup_{k=1}^{6} A_k\right|$, ta sẽ dùng công thức bao hàm và loại trừ.

+ Tính $|A_1|$: Ta đặt tương ứng bộ số tự nhiên $(x_1, x_2, ..., x_6) \in A_1$ với bộ số tự nhiên $(y_1, y_2, ..., y_6)$, ở đó

$$y_1 = x_1 - 10; y_i = x_i \ (i = 2,3,...,6).$$

Ta có $\sum_{i=1}^{6} y_i = 27 - 10 = 17$.

Dễ thấy đây là phép song ánh. Như vậy ta có phép song ánh giữa A_1 với tập các bộ số tự nhiên $(y_1, y_2, ..., y_6)$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{6} y_i = 17$.

Do đó theo ví dụ 8a ta có $|A_1| = C_{22}^5 = 26334$.

Tương tự $|A_k| = 26334$ với mọi $k = 2, 3, \ldots, 6$.

+ Tính $|A_1 \cap A_2|$: Ta đặt tương ứng bộ số tự nhiên $(x_1, x_2, ..., x_6) \in A_1 \cap A_2$ với bộ số tự nhiên $(y_1, y_2, ..., y_6)$, ở đó

$$y_i = x_i - 10\ (i = 1,2)\ ;\quad y_i = x_i\ (i = 3,...,6).$$

Ta có $\sum_{i=1}^{6} y_i = 27 - 20 = 7$.

Dễ thấy đây là phép song ánh. Như vậy ta có phép song ánh giữa $A_1 \cap A_2$ với tập các bộ số tự nhiên $(y_1, y_2, ..., y_6)$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{6} y_i = 7$.

Do đó theo ví dụ 8a ta có $|A_1 \cap A_2| = C_{12}^5 = 792$

Tương tự $|A_i \cap A_k| = 792$ với mọi $1 \le i < k \le 6$.

Rõ ràng $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$ với mọi $1 \le i < j < k \le 6$.

Từ đó theo công thức bao hàm và loại trừ

$$\left|\bigcup_{k=1}^{6} A_k\right| = 6.26334 - C_6^2.792 = 146124.$$

Thành thử số bộ thoả mãn (1) tức là số trường hợp thuận lợi là

$$|S| - \left|\bigcup_{k=1}^{6} A_k\right| = 201376 - 146124 = 55252.$$

Từ đó ta có xác suất thắng cuộc là

$$P = \frac{55252}{10^6} = 0,055252. \ \square$$

4. THIẾT LẬP QUAN HỆ TRUY HỒI

Đây là một phương pháp rất hiệu quả để giải quyết nhiều bài toán tổ hợp khó. Các ví dụ sau đây sẽ minh hoạ điều đó.

Ví dụ 10. (*Bài toán tháp Hà nội*)

Tương truyền rằng tại một ngôi tháp ở Hà nội có một tấm đế bằng đồng, trên đó có đặt ba chiếc cọc bằng kim cương. Lúc khai thiên lập địa, trên cọc số 1, Phật tổ Như Lai đã xếp 64 chiếc đĩa bằng vàng có đường kính khác nhau sao cho các đĩa có đường kính lớn hơn xếp ở dưới, các đĩa ở phía trên càng ở trên cao càng nhỏ dần. Các nhà sư được yêu cầu chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2 với quy tắc sau :

- Mỗi lần chỉ được chuyển đi một chiếc đĩa.
- Trong quá trình di chuyển không được đặt đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ (do đó cần thiết phải có thêm chiếc cọc trung gian thứ ba).

Giả sử mỗi lần chuyển một chiếc đĩa mất một giây. Hỏi các nhà sư cần ít nhất là bao nhiêu năm để chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2 ?

Giải. Giả sử lúc đầu trên cọc số 1 có n chiếc đĩa. Gọi u_n là số lần ít nhất để chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2.

Ta thử tính một vài giá trị của u_n.

Với $n = 2$. Ta cần thực hiện ba phép chuyển sau

- Chuyển đĩa bé sang cọc số 3.
- Chuyển đĩa lớn sang cọc số 2.
- Chuyển đĩa bé về cọc số 2.

Vậy $u_2 = 3$.

Với $n = 3$. Ta cần thực hiện theo ba giai đoạn sau

- Chuyển hai đĩa ở phía trên sang cọc số 3. Như đã thấy ở trường hợp $n = 2$, ta cần 3 phép chuyển.
- Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc số 2.
- Chuyển hai đĩa ở cọc số 3 về cọc số 2. Như đã thấy ở trường hợp $n = 2$, ta cần 3 phép chuyển.

Vậy ta cần 3 + 1 + 3 = 7 phép chuyển. Do đó $u_3 = 7$.

Trường hợp $n = 3$ gợi ý cho ta thiết lập hệ thức truy hồi mà dãy (u_n) phải thoả mãn. Để chuyển được n chiếc đĩa theo quy tắc trên, ta phải thực hiện theo ba công đoạn sau :

- Công đoạn 1 : Chuyển $(n-1)$ đĩa ở phía trên chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 3 theo quy tắc trên. Ta cần u_{n-1} phép chuyển. Chiếc đĩa lớn nhất vẫn giữ nguyên ở cọc số 1 khi di chuyển $(n-1)$ chiếc đĩa ở trên nó.
- Công đoạn 2 : Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc số 2.
- Công đoạn 3 : Chuyển $(n-1)$ đĩa ở cọc số 3 về cọc số 2 và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất. Ta cần u_{n-1} phép chuyển.

Do vậy để chuyển n chiếc đĩa từ cọc số 1 sang cọc số 2, ta cần

$$u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1.$$

Vậy ta có hệ thức truy hồi sau

$$u_n = 2u_{n-1} + 1.$$

Từ hệ thức truy hồi này, ta có thể lập được công thức của số hạng tổng quát của dãy. Bằng quy nạp, dễ chứng minh được

$$u_n = 2^n - 1.$$

Với $n = 64$ thì $u_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.531.615$.

Đó là số lần chuyển đĩa mà các nhà sư phải thực hiện để hoàn thành công việc. Nếu mỗi lần chuyển một đĩa mất 1 giây thì cần đến hơn 500 tỉ năm, các nhà sư mới chuyển được tất cả 64 chiếc đĩa sang cọc số 2. □

Ví dụ 11 (*IMO 1979, bài số 6*)

Giả sử A và E là hai đỉnh đối diện của một bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ đỉnh A. Tại mỗi đỉnh của bát giác (trừ đỉnh E), ở mỗi cú nhảy, con ếch chỉ có thể nhảy tới hai đỉnh kề với đỉnh đó. Khi con ếch nhảy vào đỉnh E, nó sẽ bị kẹt vĩnh viễn ở đó. Cho trước số nguyên dương n. Hỏi với n cú nhảy, có bao nhiêu cách để con ếch nhảy vào đỉnh E.

Giải

Gọi a_n là số cách để con ếch nhảy vào đỉnh E. Dễ thấy $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; $a_4 = 2$. Giả sử từ A, theo chiều kim đồng hồ, các đỉnh lần lượt là

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to A.$$

Từ A con ếch đến B phải cần một số lẻ cú nhảy. Từ B con ếch đến C phải cần một số lẻ cú nhảy. Từ C con ếch đến D phải cần một số lẻ cú nhảy. Từ D con ếch đến E phải cần một số lẻ cú nhảy. Vậy số cú nhảy đến E phải là một số chẵn. Nói cách khác, nếu n lẻ thì không có cách nào nhảy vào E. Vậy $a_{2k-1} = 0$.

Ta tính a_{2k}.

Xuất phát từ A, với hai cú nhảy đầu tiên, con ếch có thể có các cách sau

1) $A \to B \to A$

2) $A \to H \to A$

3) $A \to B \to C$

4) $A \to H \to G$.

Nếu theo cách 1) thì số cách tới E là a_{2k-2}.

Nếu theo cách 2) thì số cách tới E là a_{2k-2}.

Gọi c_n, g_n lần lượt là số cách để con ếch, xuất phát tương ứng từ C, G, nhảy vào đỉnh E với n cú nhảy. Vì lí do đối xứng, ta có $c_n = g_n$. Vậy nếu theo cách 3) thì số cách tới E là c_{2k-2} ; nếu theo cách 4) thì số cách tới E là g_{2k-2}. Theo quy tắc cộng, ta có

$$a_{2k} = a_{2k-2} + a_{2k-2} + c_{2k-2} + g_{2k-2} = 2a_{2k-2} + 2c_{2k-2}. \qquad (3)$$

Xuất phát từ C, với hai cú nhảy đầu tiên, con ếch có thể có các cách sau :

1c) $C \to B \to A$

2c) $C \to B \to C$

3c) $C \to D \to C$

4c) $C \to D \to E$.

Nếu theo cách 1c) thì số cách tới E là a_{2k-2}. Nếu theo cách 2c) thì số cách tới E là c_{2k-2}. Nếu theo cách 3c) thì số cách tới E là c_{2k-2}. Nếu theo cách 4c) thì số cách tới E là 0.

Theo quy tắc cộng ta có

$$c_{2k} = a_{2k-2} + 2c_{2k-2}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) rút ra

$$c_{2k} = a_{2k} - a_{2k-2} \Rightarrow c_{2k-2} = a_{2k-2} - a_{2k-4}.$$

Thay vào (3) ta được $\quad a_{2k} = 4a_{2k-2} - 2a_{2k-4}$.

Đặt $u_k = a_{2k}$ ta có $\quad u_k = 4u_{k-1} - 2u_{k-2}$.

Với $u_1 = a_2 = 0; u_2 = a_4 = 2$.

Bằng cách giải phương trình đặc trưng, ta đi đến công thức sau

$$a_{2k} = u_k = \frac{(2+\sqrt{2})^{k-1} - (2-\sqrt{2})^{k-1}}{\sqrt{2}} \quad (k = 1,2,\ldots). \ \square$$

Ví dụ 12. Cho số nguyên dương n và tập $S = \{1, 2, ..., n\}$. Tìm số các tập con (kể cả tập rỗng) của S mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.

Giải. Gọi a_n là số phải tìm. Dễ thấy $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$. (Chẳng hạn với $n = 3$ có 5 tập con của S có tính chất đã nêu là $\varnothing$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1 ; 3\}$).

Gọi O_n là họ các tập con có tính chất đã nêu. Mỗi tập $A \in O_{n+2}$ gồm hai loại :

+ Loại 1 gồm các tập chứa $n + 2$.

+ Loại 2 gồm các tập không chứa $n + 2$.

Nếu A là tập loại 1 thì A không chứa $n + 1$. Do đó nếu bỏ đi khỏi A phần tử $n + 2$, ta được một tập con của O_n. Ngược lại, với mỗi tập con B của O_n thì tập $A = B \cup \{n+2\}$ là tập loại 1 của O_{n+2}. Thành thử số tập loại 1 là a_n.

Nếu A là tập loại 2, rõ ràng A là một tập con của O_{n+1} và ngược lại. Thành thử số tập loại 2 là a_{n+1}. Do đó ta có quan hệ sau :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Mặt khác, với dãy Fibonacci (F_n), ta có $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Vì $a_1 = F_3 = 2, a_2 = F_4 = 3$ ta suy ra $a_n = F_{n+2}$. Vậy

$$a_n = F_{n+2} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{\sqrt{5}}, \text{ ở đó } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \ \square$$

Ví dụ 13. Cho số nguyên dương n và $S = \{1, 2, ..., n\}$. Tìm số các tập con A của S mà A chứa đúng hai số nguyên dương liên tiếp.

Giải. Gọi O_n là họ các tập con có tính chất đã nêu và $|O_n| = a_n$. Mỗi tập $A \in O_{n+2}$ gồm ba loại :

+ Loại 1 gồm các tập chứa $n + 2$ và $n + 1$.

+ Loại 2 là các tập chứa $n + 2$ nhưng không chứa $n + 1$.

+ Loại 3 gồm các tập không chứa $n + 2$.

- Nếu A là tập loại 1 thì A cũng không chứa n vì nếu A chứa n thì A chứa 2 cặp số nguyên liên tiếp là $(n, n + 1)$ và $(n + 1, n + 2)$. Bỏ đi khỏi A hai phần tử $n+1$, $n + 2$, ta được một tập con A' của $\{1, 2, ..., n - 1\}$ không chứa hai số nguyên dương liên tiếp. Ngược lại với mỗi tập con A' của $\{1, 2, ..., n - 1\}$ không chứa hai số nguyên dương liên tiếp thì tập $A = A' \cup \{n + 2, n + 1\}$ là tập loại 1. Phép tương ứng này là song ánh. Thành thử theo ví dụ 12 ở trên, số tập loại 1 là F_{n+1}.

- Nếu A là tập loại 2 thì A không chứa $n + 1$. Do đó nếu bỏ đi khỏi A phần tử $n + 2$, ta được một tập con của O_n. Ngược lại, với mỗi tập con B của O_n thì tập $A = B \cup \{n + 2\}$ là một tập loại 2. Vậy số tập loại 2 là a_n.

- Mỗi tập loại 3 rõ ràng là một tập con của O_{n+1} và ngược lại. Thành thử số tập loại 3 là a_{n+1}. Do đó ta có hệ thức sau

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + F_{n+1}.$$

Tiếp theo ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$a_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}.$$

Thật vậy, dễ thấy công thức trên đúng với $n=1, n=2$. Giả sử công thức trên đúng với n, $n+1$. Ta có

$$2(n+2)F_{n+3}-(n+3)F_{n+2}=2(n+2)(F_{n+2}+F_{n+1})-(n+3)F_{n+2}$$

$$=(n+1)F_{n+2}+2(n+2)F_{n+1}$$

$$=2(n+1)F_{n+2}-(n+1)\left(F_{n+1}+F_n\right)+2(n+1)F_{n+1}$$

$$=2(n+1)F_{n+2}+(n+3)F_{n+1}-(n+1)F_n$$

$$=[2(n+1)F_{n+2}-(n+2)F_{n+1}]+[2nF_{n+1}-(n+1)F_n]+5F_{n+1}$$

$$=5(a_{n+1}+a_n+F_{n+1}) \text{ (do giả thiết quy nạp)}$$

$$=5a_{n+2}.$$

Vậy $$a_{n+2}=\frac{2(n+2)F_{n+3}-(n+3)F_{n+2}}{5}.$$

Tức là công thức trên đúng với $n+2$. Do đó công thức trên được chứng minh.

Thay công thức đã biết của F_n, ta được công thức của a_n. □

5. DÙNG SUY LUẬN TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH HẰNG ĐẲNG THỨC

Nhiều đẳng thức đại số có thể chứng minh khá dễ dàng nhờ áp dụng các suy luận tổ hợp và áp dụng công thức nhị thức Newton. Ta minh hoạ phương pháp này bằng một số ví dụ sau.

Ví dụ 14. Cho n, r là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^{k}=C_{n+r+1}^{r}.$$

Giải

Ta xét các dãy $(x_1,\ldots,x_{n+r+1})$ gồm $n+1$ chữ số 1 và r chữ số 0. Với mỗi dãy như thế, ta quan tâm đến chữ số 1 cuối cùng (tức là bên phải nó không còn chữ số 1 nào). Vị trí của nó có thể là một trong các vị trí $n+1$, $n+2$,..., $n+1+r$.

Ta nói một dãy thuộc loại k nếu vị trí của chữ số 1 đứng cuối cùng là $n + 1 + k$ ($k = 0, 1, 2, .., r$).

Ta tính xem có bao nhiêu dãy loại k. Đứng sau chữ số 1 cuối cùng là một dãy gồm $r - k$ chữ số 0 và đứng trước nó là một dãy gồm $n + k$ chữ số trong đó có k chữ số 0 và n chữ số 1. Dễ thấy có C_{n+k}^{k} dãy gồm $n + k$ chữ số, trong đó có k chữ số 0 và n chữ số 1. Vậy có C_{n+k}^{k} dãy thuộc loại k. Theo quy tắc cộng, ta suy ra số các dãy gồm $n + 1$ chữ số 1 và r chữ số 0 là $\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^{k}$.

Mặt khác, dễ thấy có C_{n+r+1}^{r} dãy gồm $n + 1$ chữ số 1 và r chữ số 0 (bằng số cách chọn r vị trí cho số 0 trong $n + r + 1$ vị trí). Thành thử

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^{k} = C_{n+r+1}^{r}. \ \square$$

Ví dụ 15. Cho n là số nguyên dương. Tính

a) $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i}$; b) $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1}$

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n$.

Giải. Xét tập X có n phần tử. Ta hãy tính xem X có bao nhiêu tập con có một số chẵn phần tử và có bao nhiêu tập con có một số lẻ phần tử.

Gọi Φ là họ các tập con của X có một số chẵn các phần tử và Ψ là họ các tập con của X có một số lẻ các phần tử.

Đầu tiên xét trường hợp n là số lẻ. Xét ánh xạ f từ Φ vào Ψ như sau : $f(A) = X \setminus A$. Vì $|X \setminus A| = |X| - |A| = n - |A|$ nên $|A|$ là chẵn khi và chỉ khi $|X \setminus A|$ là lẻ. Vậy f là một song ánh, do đó $|\Phi| = |\Psi|$. Mà $|\Phi| + |\Psi|$ = số các tập con của $X = 2^n$ nên ta suy ra $|\Phi| = |\Psi| = 2^{n-1}$.

Tiếp theo, ta xét trường hợp n là số chẵn. Lấy phần tử $a \in X$ và xét tập $Y = X \setminus \{a\}$. Khi đó $|Y| = n - 1$, do đó Y có một số lẻ các phần tử. Mỗi tập con A có một số chẵn phần tử của X gồm hai loại :

Loại 1 : $a \notin A$: Khi đó A là tập con có số chẵn phần tử của Y.

Loại 2 : $a \in A$. Khi đó $A = \{a\} \cup B$, ở đó B là tập con có số lẻ phần tử của Y.

Vì $|Y| = n - 1$ lẻ nên theo chứng minh trên ta có

+ Số tập hợp loại 1 bằng số tập con có số chẵn phần tử của Y, do đó là 2^{n-2}.

+ Số tập hợp loại 2 bằng số tập con có số lẻ phần tử của Y, do đó là 2^{n-2}.

Vậy số tập con có số chẵn phần tử của X là $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

Vậy $|\Phi| = 2^{n-1}$. Vì $|\Phi| + |\Psi| = 2^n$ nên $|\Phi| = |\Psi| = 2^{n-1}$.

Mặt khác, số các tập con của X có $2i$ phần tử là C_n^{2i} ($i = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$) và số các tập con của X có có $2i + 1$ phần tử là C_n^{2i+1} ($i = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$).

Thành thử

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} = |\Phi| = 2^{n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1} = |\Psi| = 2^{n-1}$.

Theo a) và b) ta có

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = |\Phi| - |\Psi| = 0. \square$$

Ví dụ 16. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $n > 1$, ta có

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$.

Giải. Đặt $a = 1$, $b = x$ trong công thức nhị thức Newton, ta thu được

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) theo x, ta được

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}. \tag{2}$$

Trong (2) cho $x = 1$, ta được công thức a)

b) Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=1}^{n} [k(k-1)+k]C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = T + S. \tag{3}$$

Theo (2) ta có

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1} = n + \sum_{k=2}^{n} kC_n^k x^{k-1}. \tag{4}$$

Lấy đạo hàm hai vế của (4) theo x, ta được

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2}. \tag{5}$$

Trong (5) cho $x = 1$ ta được

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = T. \tag{6}$$

Từ (6), a) và (3) ta rút ra

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = T + S = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

$$= n2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}. \square$$

Ví dụ 17. Cho số nguyên dương n. Tính theo n tổng

$$\sum \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!},$$

trong đó tổng chạy trên tất cả các bộ (i, j, k) với i, j, k là các số tự nhiên thoả mãn điều kiện $i + j + 2k = n$.

Giải. Giả sử ta có 3 loại đoạn thẳng : màu đỏ, màu xanh và màu trắng. Các đoạn thẳng màu đỏ và màu xanh có độ dài một đơn vị ; đoạn thẳng màu trắng có độ dài hai đơn vị.

Ta cần ghép các đoạn thẳng đó lại để làm thành một chiếc cán cờ có độ dài n, có phân biệt điểm đầu (đỉnh) và điểm cuối (tay nắm). Hỏi có bao nhiêu cách thiết kế ?

Mỗi cách thiết kế gồm hai công đoạn :

Công đoạn 1 : Chọn một bộ ba số tự nhiên (i, j, k) thoả mãn điều kiện $i + j + 2k = n$. Lấy ra i đoạn màu đỏ, j đoạn xanh và k đoạn trắng.

Công đoạn 2 : Ghép thành chiếc cán cờ : Dễ thấy có $\dfrac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$ cách ghép.

Gọi a_n là số cách thiết kế có thể có. Như vậy

$$a_n = \sum \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

trong đó tổng chạy trên tất cả các bộ (i, j, k) với i, j, k là các số tự nhiên thoả mãn điều kiện $i + j + 2k = n$.

Mỗi cán cờ A có độ dài $n + 2$ gồm ba loại :

+ Loại 1 : Đỉnh của nó là đoạn thẳng màu đỏ

+ Loại 2 : Đỉnh của nó là đoạn thẳng màu xanh

+ Loại 3 : Đỉnh của nó là đoạn thẳng màu trắng.

Nếu A thuộc loại 1 thì khi bỏ đi đoạn thẳng màu đỏ, ta được một cán cờ độ dài $n + 1$. Ngược lại, mỗi cán cờ B độ dài $n + 1$ khi ghép thêm vào đỉnh đoạn thẳng màu đỏ, ta được cán cờ A loại 1 độ dài $n + 2$. Vậy số cán cờ loại 1 có độ dài $n + 2$ là a_{n+1}.

Tương tự, số cán cờ loại 2 có độ dài $n + 2$ là a_{n+1} ; số cán cờ loại 3 có độ dài $n + 2$ là a_n. Thành thử ta có hệ thức truy hồi

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n.$$

Từ điều kiện ban đầu $a_1 = 2, a_2 = 3$, ta tìm được

$$a_n = \frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-2\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}. \square$$

BÀI TẬP

1. Kí hiệu S là tập hợp tất cả các số nguyên dương s có tính chất :

   i) Các chữ số của s là khác nhau

   ii) Các chữ số của s thuộc tập hợp $\{1, 3, 5, 7\}$.

   Hãy tính :

   a) Số phần tử của S

   b) Tổng tất cả các số có ba chữ số của S

   c) Tổng tất cả các số của S.

2. a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau ?

   b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho mỗi bà đều ngồi cạnh chồng của mình ?

3. Một nhóm 6 người vào một quán ăn.

   Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 người này ngồi vào ba bàn tròn giống hệt nhau trong đó yêu cầu mỗi bàn phải có ít nhất một người ?

4. Một dãy tam phân độ dài n là một dãy gồm n chữ số mà mỗi chữ số chỉ nhận một trong ba giá trị $\{0 ; 1 ; 2\}$. Tìm số các dãy tam phân độ dài 10 mà trong đó có hai chữ số 0, ba chữ số 1 và năm chữ số 2.

5. Một đoàn khách du lịch gồm n người được xếp vào r khách sạn $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Yêu cầu đặt ra là đưa n_i khách ở tại khách sạn S_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, trong đó $n_1, n_2, \ldots, n_r$ là các số tự nhiên đã cho thoả mãn điều kiện

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

   Chứng minh rằng số cách phân phối khách thoả mãn yêu cầu trên là

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}.$$

   Nhờ công thức trên, hãy suy ra rằng với mỗi số nguyên dương m, ta có

$$(4m)! \text{ chia hết cho } 2^{3m}.3^m.$$

6. Cho trước số nguyên dương $n > 3$.

a) Tìm số các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $a + b + c = n$.

b) Tìm số các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = n$.

7. Tìm số các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên thoả mãn điều kiện

$$0 \leq a \leq 5 \,;\, 0 \leq b \leq 6 \,;\, 0 \leq c \leq 7 \text{ và } a + b + c = 15.$$

8. Tìm số các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

i) Tổng của chúng bằng 15

ii) Trong ba số a, b, c có ít nhất một số lớn hơn hay bằng 7.

9. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số trong đó có 3 chữ số lẻ khác nhau và ba chữ số chẵn khác nhau, mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần ?

10. Cho n là số nguyên dương, $n > 3$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 C_n^k = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

Chuyên đề 2

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Trong các chương *Dãy số* và *Giới hạn*, chúng ta đã trình bày một số định nghĩa, tính chất và định lí cơ bản về dãy số và giới hạn dãy số. Đấy là những kiến thức căn bản trong chương trình phổ thông, chủ yếu phục vụ cho việc xây dựng khái niệm giới hạn hàm số và tiếp sau đó là khái niệm đạo hàm. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ trình bày những kiến thức chuyên sâu hơn về giới hạn của dãy số, các phương pháp để chứng minh sự hội tụ của một dãy số và tìm giới hạn của dãy số ở mức độ nâng cao.

Để độc giả dễ theo dõi và nghiên cứu nội dung chuyên đề, chúng tôi sẽ lặp lại một số định nghĩa và kết quả (không chứng minh) đã nhắc tới ở các chương trước.

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Ta nhắc lại định nghĩa khái niệm dãy số và một số đặc tính liên quan.

Định nghĩa 1

Dãy số là một hàm số từ $\mathbb{N}$ vào một tập hợp số ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hay một tập con nào đó của các tập hợp trên). Các số hạng của dãy số thường được kí hiệu là u_n, v_n, x_n, y_n, ... thay vì $u(n)$, $v(n)$, $x(n)$, $y(n)$, ... Bản thân dãy số thì được kí hiệu là (u_n), (v_n), (x_n), $(y_n),\ldots$

Vì dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số nên nó cũng có các tính chất của một hàm số.

Định nghĩa 2

Dãy số (x_n) được gọi là dãy *tăng không nghiêm ngặt* (viết tắt là knn) (*giảm knn*) nếu với mọi n, ta có $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$. Dãy số tăng hoặc dãy số giảm (knn) được gọi chung là *dãy đơn điệu*.

Dãy số (x_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực M sao cho với mọi n ta có $x_n \le M$.

Dãy số (x_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực m sao cho với mọi n ta có $x_n \ge m$.

Một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là *dãy bị chặn*.

Dãy số (x_n) được gọi là *tuần hoàn* với chu kì k nếu $x_{n+k} = x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dãy số tuần hoàn với chu kì 1 gọi là *dãy hằng*.

Khái niệm giới hạn dãy số đã được đưa ra ở chương V. Ta nhắc lại định nghĩa hình thức cho khái niệm này.

Định nghĩa 3

Ta nói dãy số (x_n) có *giới hạn hữu hạn a* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và ε) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ta nói dãy số (x_n) *dần đến* $+\infty$ nếu với mọi số thực dương M lớn tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và M) sao cho với mọi $n > N_0$, ta có $x_n > M$.

$$\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : x_n > M.$$

Tương tự,

$$\lim x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall P < 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : x_n < P.$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy *hội tụ*. Dãy số không có giới hạn hữu hạn hoặc dần đến vô cùng ($+\infty$ hoặc $-\infty$) gọi là dãy *phân kì*.

Để tìm giới hạn dãy số, ta có thể dùng định nghĩa (nếu đã biết giá trị của giới hạn) hoặc sử dụng các định lí và tính chất dưới đây.

Định lí 1. (*Tổng, hiệu, tích, thương các dãy hội tụ*)

Nếu $(x_n),(y_n)$ là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là a, b thì các dãy số (x_n+y_n), (x_n-y_n), $(x_n.y_n)$, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là $a+b$, $a-b$, $a.b$, $\dfrac{a}{b}$. (Trong trường hợp dãy số thương, ta giả sử $y_n \neq 0$ và $b \neq 0$).

Định lí 2. (*Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức*)

Cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn ℓ; nếu $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N_0$, ta có $a \le x_n \le b$ thì $a \le \ell \le b$.

Định lí 3. (*Định lí kẹp*)

Cho ba dãy số $(x_n),(y_n),(z_n)$, trong đó (x_n) và (z_n) có cùng giới hạn hữu hạn L, và $\exists N_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_0$ ta có $x_n \le y_n \le z_n$. Khi đó (y_n) cũng có giới hạn là L.

Các định lí trên đã được trình bày ở các chương trước cùng với các ví dụ áp dụng. Vì thế, trong chuyên đề này chúng ta sẽ chỉ sử dụng chúng trong lời giải các bài toán và ví dụ.

Việc tìm giới hạn của một dãy số, đương nhiên, không đơn giản chỉ dừng lại ở mức độ áp dụng định nghĩa hoặc các định lí 1, 2, 3 nói trên. Trong khá nhiều trường hợp, việc tìm giới hạn của một dãy số được chia thành 2 công đoạn :

1) Chứng minh dãy số đó hội tụ;
2) Trên cơ sở sự hội tụ đó, tìm giới hạn của dãy số.

Chúng ta hãy cùng tìm hiểu thêm điều đó qua ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ 1. Với dãy số $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ (1), nếu ta chứng minh được dãy hội tụ và có giới hạn là L thì rõ ràng, bằng cách *chuyển đẳng thức* (1) *qua giới hạn*, ta có $L = \sqrt{L+2}$, từ đó suy ra $L = 2$. □

Việc chứng minh sự tồn tại giới hạn trước khi chuyển sang giới hạn là cần thiết. Ví dụ, với dãy số $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n}, n = 1, 2, 3, \ldots$, nếu ta bỏ qua bước chứng minh tồn tại giới hạn $\lim x_n = L$ mà hấp tấp chuyển công thức truy hồi qua giới hạn, ta sẽ đưa ra kết luận sai lầm là $\lim x_n = \sqrt{2}$. Trên thực tế thì dãy này không hội tụ vì nó là dãy tuần hoàn dạng 1, 2, 1, 2, 1, 2, …

Chính vì những lí do nói trên, việc tìm ra các điều kiện để một dãy số hội tụ là rất quan trọng. Các định lí tiếp sau sẽ nêu lên các điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ để một dãy hội tụ.

Trước hết, ta có một điều kiện cần đơn giản:

Định lí 4

> Mọi dãy số hội tụ thì bị chặn.

Chứng minh. Giả sử (x_n) hội tụ và $\lim x_n = L$. Theo định nghĩa, với $\varepsilon = 1$, tồn tại N_0 sao cho với mọi $n > N_0$ thì $-1 < x_n - L < 1$, suy ra $L - 1 < x_n < L + 1$. Bây giờ nếu đặt

$$M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}, L+1\},\ m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_0}, L-1\}$$

thì ta có: $m \le x_n \le M$ với mọi n = 1, 2, 3, … Như vậy (x_n) bị chặn. □

Dễ thấy rằng đây không phải là điều kiện đủ. Chẳng hạn dãy 1, 2, 1, 2, 1, 2, … vừa nói tới ở trên là bị chặn nhưng không hội tụ.

Tuy nhiên, nếu bổ sung thêm điều kiện đơn điệu thì ta sẽ có một dãy hội tụ. Đó chính là nội dung của định lí quan trọng sau.

Định lí 5

> Một dãy tăng knn và bị chặn trên hay một dãy giảm knn và bị chặn dưới thì hội tụ. Nói ngắn gọn hơn, một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Phép chứng minh định lí nền tảng này dựa vào một tính chất quan trọng của tập các số thực : Một tập bị chặn trên thì có chặn trên đúng, một tập bị chặn dưới thì có chặn dưới đúng. Ta bỏ qua phép chứng minh định lí này.

Ta có thể sử dụng định lí này để chứng minh dãy số ở ví dụ 1 chẳng hạn là hội tụ. Thật vậy, ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng:

i) $x_{n+1} > x_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, 3, ...$

ii) $x_n < 2$ với mọi $n = 0, 1, 2, 3, ...$

H *Hãy thực hiện các chứng minh trên.*

Như thế, áp dụng định lí 5, ta suy ra (x_n) hội tụ. Và bằng cách chuyển qua giới hạn như đã nêu ở trên, ta tìm được giới hạn của dãy số đã cho là 2.

Định lí 5, ngược lại, chỉ là điều kiện đủ để một dãy số là hội tụ. Một dãy số hội tụ thì nhất thiết bị chặn nhưng không nhất thiết đơn điệu. Ví dụ dãy số (x_n) với $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ về 0 nhưng không phải là dãy đơn điệu.

Định lí dưới đây đơn giản nhưng khá hữu ích trong các bài toán về tính giới hạn của dãy số.

Định lí 6

Nếu dãy (x_n) tăng knn và có giới hạn là L thì ta có $x_n \le L$ với mọi n.

Nếu dãy (x_n) giảm knn và có giới hạn là L thì ta có $x_n \ge L$ với mọi n.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh a), vì b) hoàn toàn tương tự.

Giả sử ngược lại, tồn tại k sao cho $x_k > L$. Khi đó, vì dãy số (x_n) tăng knn nên ta có $x_n \ge x_k$ với mọi $n > k$. Áp dụng định lí 2, ta có $L = \lim x_n \ge x_k > L$, mâu thuẫn. □

Định lí dưới đây là một kết quả quan trọng khác, xuất hiện nhiều trong việc chứng minh các tính chất của hàm số liên tục.

Định lí 7. (*Về dãy các đoạn thẳng lồng nhau*)

Cho hai dãy số thực (a_n), (b_n) sao cho:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*: a_n \le b_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*: [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$

c) $b_n - a_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Khi đó tồn tại duy nhất số thực L sao cho $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{L\}$.

Chứng minh.

Theo điều kiện b) thì $a_{n+1} \geq a_n$ và $b_{n+1} \leq b_n$, suy ra (a_n) là dãy tăng knn, còn (b_n) là dãy giảm knn. Từ đây, kết hợp với điều kiện a) ta có $a_n \leq b_1$ với mọi n và $b_n \geq a_1$ với mọi n. Như vậy (a_n) là dãy tăng knn và bị chặn trên, còn (b_n) là dãy giảm knn và bị chặn dưới.

Theo định lí 5, tồn tại $\lim a_n = A$ và $\lim b_n = B$. Do $b_n - a_n \to 0$ khi $n \to +\infty$ nên $A = B = L$. Theo mệnh đề 6 thì $a_n \leq L \leq b_n$ với mọi n, suy ra

$$\{L\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n].$$

Tính duy nhất của L là hiển nhiên. □

Định lí 8. *(Bolzano-Weierstrass)*

Từ một dãy bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.

Chứng minh.

Xét dãy (a_n) bị chặn, tức là tồn tại m và M sao cho đoạn $[m; M]$ chứa tất cả các số hạng của (a_n).

Ta xây dựng dãy các đoạn thẳng $[x_n; y_n]$ theo quy tắc sau:

$$x_1 = m,\ y_1 = M.$$

Đặt $t = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$. Vì $[x_1; y_1]$ chứa tất cả các số hạng của (a_n) nên một trong hai đoạn $[x_1; t]$, $[t; y_1]$ phải chứa vô số các số hạng của (a_n). Nếu đoạn $[x_1; t]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) thì ta đặt $x_2 = x_1$, $y_2 = t$. Nếu $[x_1; t]$ chỉ chứa hữu hạn các số hạng của (a_n) (khi đó $[t; y_1]$ chứa vô số các số hạng của (a_n)) thì ta đặt $x_2 = t$, $y_2 = y_1$. Tương tự như thế, nếu ta đã xây dựng được đoạn $[x_k; y_k]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) thì sẽ xây dựng được đoạn $[x_{k+1}; y_{k+1}]$ là một trong hai nửa của $[x_k; y_k]$ và cũng chứa vô số các số hạng của (a_n).

Như thế, ta xây dựng được dãy các đoạn thẳng $[x_k; y_k]$ lồng nhau, có $y_k - x_k = \dfrac{M-m}{2^{k-1}} \to 0$ và mỗi đoạn $[x_k; y_k]$ chứa vô số các số hạng của (a_n).

Bây giờ ta chọn dãy con $\left(a_{i_j}\right)$ của (a_n) như sau:

$a_{i_1} = a_1$. Giả sử $a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}$ đã được chọn thì ta sẽ chọn chỉ số i_{j+1} sao cho:

1) $i_{j+1} > i_j$;
2) $a_{i_{j+1}} \in [x_{j+1}; y_{j+1}]$.

Việc chọn này luôn thực hiện được vì $[x_{j+1}; y_{j+1}]$ chứa vô số các số hạng của (a_n).

Theo định lí về dãy các đoạn thẳng lồng nhau thì tồn tại duy nhất số thực L là giao của tất cả các đoạn thẳng $[x_k; y_k]$ và dễ thấy theo cách chọn, L chính là giới hạn của dãy con $\left(a_{i_j}\right)$, tức là ta đã trích ra được một dãy con hội tụ từ (a_n). □

Định nghĩa 4

> Dãy (x_n) được gọi là dãy Cauchy nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > N_0$ thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

H *Chứng minh rằng nếu (x_n) là dãy Cauchy thì (x_n) bị chặn.*

Định lí 9. (*Tiêu chuẩn Cauchy*)

> Dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Chứng minh. Nếu dãy (x_n) hội tụ về giới hạn hữu hạn L thì $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall m > N_0$ ta có $|x_m - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó với mọi $m, n > N_0$, ta có:

$$|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)| \le |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suy ra (x_n) là dãy Cauchy.

Ngược lại, giả sử (x_n) là dãy Cauchy. Khi đó dãy (x_n) bị chặn. Theo định lí Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con $\left(x_{i_k}\right)$của (x_n) có giới hạn hữu hạn L.

Ta chứng minh L cũng chính là giới hạn của (x_n). Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại k_0 sao cho với mọi $k > k_0$, ta có$|x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mặt khác, do (x_n) là dãy Cauchy nên tồn tại N_0 sao cho với mọi $m,n > N_0$, ta có

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do $i_k \to +\infty$ nên tồn tại $k > k_0$ sao cho $i_k > N_0$. Bây giờ xét $m > N_0$ bất kì, ta có:

$$|x_m - L| = |(x_m - x_{i_k}) + (x_{i_k} - L)| \le |x_m - x_{i_k}| + |x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Suy ra $\lim x_n = L$. □

Tiêu chuẩn Cauchy dùng để khảo sát sự hội tụ của một dãy số mà ta không tính được (hoặc dự đoán được) giới hạn (và do đó không thể dùng định nghĩa).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số (x_n) xác định bởi $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Giải. Ta có với $m > n$ thì :

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Do đó với mọi $\varepsilon > 0$, nếu chọn N_0 là số nguyên lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$ thì với mọi $m,n > N_0$, ta có:

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{\min\{m,\ n\}} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon.$$

Như vậy dãy (x_n) là dãy Cauchy và do đó hội tụ. □

§2. MỘT SỐ DẠNG DÃY SỐ ĐẶC BIỆT

1. Dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$

Đây là dạng dãy số thường gặp nhất trong các bài toán về giới hạn dãy số. Dãy số này sẽ hoàn toàn xác định khi biết f và giá trị ban đầu x_0. Do vậy sự hội tụ của dãy số sẽ phụ thuộc vào tính chất của hàm số $f(x)$ và x_0. Một đặc điểm quan trọng khác của dãy số dạng này là : nếu f là liên tục và a là giới hạn của dãy số thì a phải là nghiệm của phương trình $x = f(x)$.

Từ đây, chúng ta có thể sử dụng hai "kịch bản" sau để tìm giới hạn của dãy số :

1) Chứng minh sự hội tụ của dãy số, sau đó giải phương trình $x = f(x)$ để tìm giới hạn.
2) Giải phương trình $x = f(x)$ để tìm nghiệm (chẳng hạn L), sau đó chứng minh $\lim x_n = L$ bằng cách sử dụng định nghĩa.

Theo "kịch bản" thứ nhất, chúng ta có một số kết quả cơ bản như sau :

Định lí 1

> Cho I là một khoảng đóng của $\mathbb{R}$ và hàm số $f : I \to I$. Xét dãy số (x_n) xác định bởi: $x_0 = a \in \mathrm{I}, x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n = 0,1,2,3,...$.
>
> a) Nếu f là hàm số tăng knn trên I thì (x_n) sẽ là dãy đơn điệu. Dãy số này tăng knn hay giảm knn tuỳ theo vị trí của x_0 so với x_1.
>
> b) Nếu f là hàm số giảm knn trên I thì các dãy con $(x_{2k}),(x_{2k+1})$ là các dãy đơn điệu (và ngược chiều nhau).
>
> c) Giả sử f liên tục trên I. Nếu $\lim x_n = L$ thì $L \in I$, chuyển qua giới hạn trong biểu thức $x_{n+1} = f(x_n)$, ta suy ra $L = f(L)$.

Chứng minh.

a) Giả sử f là hàm số tăng knn trên I. Khi đó nếu $x_0 \le x_1$ thì ta có $f(x_0) \le f(x_1)$, tức là $x_1 \le x_2$. Tiếp tục như thế, bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng $x_n \le x_{n+1}$ với mọi n, sủy ra dãy (x_n) tăng knn.

Trường hợp $x_0 > x_1$, chứng minh tương tự ta được dãy (x_n) giảm knn.

b) Nếu f là hàm số giảm knn trên I thì $f \circ f$ là hàm số tăng knn trên I, do đó (x_{2k}) và (x_{2k+1}) là các dãy đơn điệu. Ngoài ra, nếu chẳng hạn $x_0 \le x_2$ thì ta có $f(x_0) \ge f(x_2)$, tức là $x_1 \ge x_3$, suy ra dãy (x_{2k+1}) giảm knn còn dãy (x_{2k}) tăng knn.

c) Hiển nhiên. □

Ví dụ 1. (*Vô địch sinh viên Moskva*, 1982)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 1982$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{4-3x_n}, n = 0,1,2,\ldots$.

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Tính toán trực tiếp, ta thấy $0 < x_2 < 1$, $x_3 > x_2$. Vì $f(x) = \dfrac{1}{4-3x}$ là một hàm số tăng knn từ $[0;1]$ vào $[0;1]$ nên từ đây, $(x_n)_{n\ge 2}$ là một dãy số tăng knn và bị chặn trên bởi 1, do đó có giới hạn. Dễ thấy $x_2 < \dfrac{1}{3}$, từ đó, bằng quy nạp suy ra $x_n < \dfrac{1}{3}$ $\forall\, n \ge 2$ nên ta loại giá trị $a = 1$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$. □

H1. *Với những giá trị nào của x_0 thì dãy số trên xác định với mọi x và có giới hạn ? Khi nào thì giới hạn là 1 ? Khi nào thì giới hạn là $\dfrac{1}{3}$?*

Ví dụ 2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_n}$ với $n = 0,1,2,\ldots$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Đặt $f(x) = (\sqrt{2})^x$ thì dãy số có dạng $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$. Ta thấy $f(x)$ là hàm số tăng knn và $x_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$. Từ đó, do $f(x)$ là hàm số tăng knn nên ta có

$$x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1,\ x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \ldots$$

Suy ra (x_n) là dãy số tăng knn.

Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < 2$ với mọi n.

Thật vậy, điều này đúng với $n = 0$.

Giả sử ta đã có $x_k < 2$ thì rõ ràng $x_{k+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_k} < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Theo nguyên lí quy nạp, ta có $x_n < 2$ với mọi n.

Vậy dãy $\left(x_n\right)$ tăng knn và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn.

Gọi a là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức truy hồi : $x_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_n}$ sang giới hạn, ta được $a = \left(\sqrt{2}\right)^a$. Ngoài ra ta cũng có $a \le 2$.

Xét phương trình $x = \left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$. Khảo sát hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$, ta thấy rằng phương trình trên chỉ có một nghiệm bé hơn e và một nghiệm lớn hơn e.

Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có một nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện không vượt quá 2. Từ đó suy ra $a = 2$.

Vậy giới hạn của $\left(x_n\right)$ khi n dần đến vô cùng là 2. □

Trong trường hợp $f(x)$ là hàm giảm knn, ta có thể chứng minh dãy hội tụ bằng cách chứng minh hai dãy con đã nói ở định lí 1 cùng hội tụ về một giới hạn.

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $u_0 = a \ge 0, u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$.

Giải. Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng $u_n \ge 0$ với mọi n.

Xét hàm số $f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$, $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$, nó là hàm liên tục. Ta có:

$$\forall x \in [0;+\infty), f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó, nếu $\left(u_n\right)$ hội tụ thì nó chỉ có thể hội tụ đến 1.

Hàm số f khả vi trên $[0;\ +\infty)$ và $\forall x \in [0;+\infty), f'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \le 0$, suy ra f giảm knn.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\lim u_{2k} = 1$ và $\lim u_{2k+1} = 1$.

Xét $g = f \circ f : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$, $g(x) = \dfrac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$ thì g là một hàm tăng knn vì f giảm knn.

Ta tính:

$$g(x) - x = -\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(1+x^2)^2+4}$$

$$= -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}.$$

Ta xét các trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* $u_0 = a \in [0\,;1]$.

Khi ấy với mọi $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \in [0\,;1]$ và $u_{2k+1} \in [1;\infty]$. Vậy với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$u_{2k+2} - u_{2k} = g(u_{2k}) - u_{2k} \geq 0$$

$$u_{2k+3} - u_{2k+1} = g(u_{2k+1}) - u_{2k+1} \leq 0$$

Do đó (u_{2k}) tăng knn và (u_{2k+1}) giảm knn.

Hơn nữa, vì $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \leq 1 \leq u_{2k+1}$ nên ta suy ra rằng (u_{2k}) hội tụ đến một giới hạn L_1 thuộc $[0;1]$ và (u_{2k+1}) hội tụ đến một giới hạn L_2 thuộc $[1;\infty)$.

Vì g liên tục trên $[0;\infty)$ và vì phương trình $g(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = 1$ trên $[0;\infty)$ nên ta suy ra $L_1 = L_2 = 1$.

Từ đó ta được $\lim u_n = 1$.

• *Trường hợp 2:* $u_0 = a \in [1;\infty]$:

Vì $u_1 = f(u_0) = f(a) \in [0;1]$, ta quy về trường hợp trên (bằng cách thay u_0 bởi u_1) và có cùng một kết luận $\lim u_n = 1$. □

Trong một số trường hợp, hàm số đã cho không đơn điệu trên cả tập xác định mà chỉ đơn điệu trên miền giá trị mà các số hạng của dãy nhận được. Ta cần xác định miền đó càng hẹp càng tốt để trên đó, hàm số đã cho đơn điệu và áp dụng phương pháp đánh giá này trên dãy số đã cho.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) thoả mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải. Ta thấy $u_n > 0, \forall n$ và từ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 1 + \frac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 - \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1},$$

ta có : $1 < u_n < 2, \forall n$.

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in (1;2) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3(1 - x^2)}{x^2 + x + 1} < 0$.

Suy ra là hàm này nghịch biến trên $(1;2)$.

Dãy số đã cho có thể viết dưới dạng: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 1. \end{cases}$

Ta thấy: $u_1 = 1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 > u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5$.

Tiến hành tương tự, suy ra:

$u_1 < u_3 < u_5 < .... \Rightarrow$ Dãy u_{2n+1} tăng knn và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là $\alpha \in [1;2]$.

$u_2 > u_4 > u_6 > ... \Rightarrow$ Dãy u_{2n} giảm knn và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là $\beta \in [1;2]$.

Ta có: $\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}). \end{cases}$

Chuyển qua giới hạn, ta có: $\begin{cases} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$.

$$\Rightarrow \alpha - \beta = f(\beta) - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\beta^2 + 4\beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1}.$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=3\left(\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}-\frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}\right) \Leftrightarrow \alpha-\beta=\frac{3(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha-\beta=0\\ 3(\alpha\beta-1)=(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)\end{array}\right.$$

Vì $\alpha,\beta \in [1;2]$ nên $3(\alpha\beta - 1) \le 9 \le (\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)$, do đó phương trình thứ hai có nghiệm $\alpha = \beta = 1$ (loại vì (u_{2n+1}) tăng nghiêm ngặt và $u_1 = 1$). Vậy $\alpha=\beta=t$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = t$, hai dãy con đó có cùng giới hạn là t.

Ta thấy t phải thoả mãn đẳng thức :

$$t=\frac{t^2+4t+1}{t^2+t+1} \Leftrightarrow t^3-3t=1 \ (*).$$

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm $|t|\le 2$. Đặt $t=2\cos\varphi,\ \varphi\in[0;\pi]$, thay vào phương trình (*) ở trên, ta được :

$$8\cos^3\varphi-6\cos\varphi=1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}.$$

Do $\varphi\in[0;\pi]$ nên $\varphi=\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}$, tương ứng với các nghiệm của (*) là:

$$t=2\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{5\pi}{9};2\cos\frac{7\pi}{9}.$$

Phương trình (*) đó có đủ 3 nghiệm nên nó không có nghiệm $|t|>2$.

Trong các nghiệm này, chỉ có $t=2\cos\frac{\pi}{9}\in[1;2]$ thoả mãn và đây cũng chính là giới hạn cần tìm.

Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2\cos\frac{\pi}{9}$. □

Khó khăn nhất là gặp các hàm số không đơn điệu. Trong trường hợp này, ta phải xét từng khoảng đơn điệu của nó và sự hội tụ của hàm số sẽ tuỳ thuộc vào giá trị ban đầu.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2$$

có giới hạn hữu hạn.

Giải. Hàm số $f(x) = 2 - x^2$ tăng knn trên $(-\infty, 0)$ và giảm knn trên $(0; +\infty)$. Phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$. Đó là những dữ kiện quan trọng trong lời giải bài toán này.

+ Đầu tiên, ta nhận xét rằng nếu $a < -2$ thì $f: (-\infty, -2) \to (-\infty, -2)$ và là hàm tăng knn, $x_1 = 2 - a^2 < x_0$ nên dãy số (x_n) giảm knn. Nếu dãy (x_n) bị chặn dưới thì nó hội tụ về nghiệm của phương trình $f(x) = x$, điều này mâu thuẫn vì dãy giảm knn và $x_0 < -2$.

Vậy (x_n) không bị chặn dưới, tức không có giới hạn hữu hạn.

+ Nếu $a > 2$ thì $x_1 < -2$ và ta cũng suy ra (x_n) không có giới hạn hữu hạn.

+ Với $a = -2$ hoặc $a = 1$ thì dãy số có giới hạn.

+ Xét $a \in (-2; 2]$. Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại n sao cho $x_n = -2$ hoặc $x_n = 1$.

Thật vậy, giả sử (x_n) có giới hạn hữu hạn là b và $x_n \notin \{-2; 1\}$ với mọi n. Khi đó $b = -2$ hoặc $b = 1$. Giả sử $b = -2$ thì tồn tại N_0 sao cho x_n nằm trong lân cận của -2 với mọi $n \geq N_0$. Nhưng nếu $x_n = -2 + \varepsilon$ thì $x_{n+1} = -2 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 > x_n$, suy ra dãy (x_n) tăng knn kể từ $n = N_0$ và không thể dần về -2. Nếu $b = 1$ thì kể từ $n \geq N_0$ nào đó, x_n thuộc lân cận của 1. Ta có:

$$x_{n+2} - x_n = 2 - (2 - x_n^2)^2 - x_n = (2 - x_n - x_n^2)(x_n^2 - x_n - 1).$$

Tại lân cận của 1 thì $x_n^2 - x_n - 1 < 0$.

Vì nếu $x_n < 1$ thì $x_{n+1} > 1$ (và ngược lại $x_n > 1$ thì $x_n < 1$, chúng ta đang xét trong lân cận điểm 1!) nên có thể giả sử $x_n > 1$.

Khi đó $2 - x_n - x_n^2 < 0$ suy ra $x_{n+2} > x_n$. Tiếp tục như vậy, suy ra :

$$1 < x_n < x_{n+2} < \ldots < x_{n+2k} < \ldots,$$

mâu thuẫn với giả thiết $b = 1$. Vậy điều giả sử là sai, tức là dãy số chỉ có giới hạn khi tồn tại n sao cho $x_n = -2$ hoặc $x_n = 1$.

Sau khi thu được kết quả này, ta sử dụng hàm ngược $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2-x}$ để xây dựng tất cả các giá trị a thoả mãn điều kiện đầu bài. □

Trong ví dụ trên, ta đã sử dụng giả thiết tồn tại giới hạn để thu gọn miền D, từ đó một hàm có biến thiên phức tạp trở thành một hàm đơn điệu.

Như vậy, tính đơn điệu đã giúp chúng ta giải quyết khá nhiều trường hợp tìm giới hạn dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Tuy nhiên, gặp một số dãy số có sự biến thiên phức tạp, phương pháp hàm đơn điệu có thể sẽ không áp dụng được. Trong trường hợp đó ta có thể nghĩ đến *nguyên lí ánh xạ co.*

Định nghĩa

> Cho I là một khoảng đóng. Hàm số $f : I \to I$ được gọi là một *hàm số co* trên I nếu tồn tại số thực q, $0 < q < 1$ sao cho
>
> $|f(x) - f(y)| \le q.|x - y|$ với mọi x, y thuộc I.

Định lí 2

> Cho I là một khoảng đóng bị chặn. Nếu $f(x)$ là một hàm số co trên I thì dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = a \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ. Giới hạn của dãy số là nghiệm duy nhất trên I của phương trình $x = f(x)$.

Chứng minh

Với mọi $n > m$ thì áp dụng định nghĩa hàm số co, ta có:

$$|x_n - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| \le q.|x_{n-1} - x_{m-1}| \le \ldots \le q^m.|x_{n-m} - x_0| \quad (*)$$

Từ đây $|x_n - x_0| \le |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \ldots + |x_1 - x_0|$

$$\le (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)|x_1 - x_0|,$$

suy ra (x_n) bị chặn. Xét $\varepsilon > 0$.

Từ (*), do $q < 1$ và $|x_{n-m} - x_0|$ bị chặn nên ta suy ra tồn tại N_0 sao cho

$$q^n |x_{n-m} - x_0| < \varepsilon \;\; \forall n, m > N_0.$$

Suy ra (x_n) là dãy Cauchy và do đó nó hội tụ. □

Ví dụ 6. (*Đề dự bị VMO 2008*)

Cho số thực a và dãy số thực (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Giải. Đặt $f(x) = \ln(3 + \cos x + \sin x) - 2008$ thì:

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}.$$

Từ đó, sử dụng đánh giá $|\cos x - \sin x| \le \sqrt{2}$, $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng dụng định lí Lagrange cho x, y thuộc $\mathbb{R}$, do hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại z thuộc $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y).$$

Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \le q.|x - y|$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Bây giờ áp dụng định lí 2, ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 7. (*VMO*, 2000)

Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tìm tất cả các giá trị của c để với mọi giá trị $x_0 \in (0; c)$, x_n xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$.

Giải. Để x_1 tồn tại thì $c - \sqrt{c + x_0} \ge 0$ với mọi $x_0 \in (0; c) \Leftrightarrow c(c-1) \ge x_0$ với mọi $x_0 \in (0; c)$, suy ra $c \ge 2$.

Với $c \ge 2$ thì $0 < x_1 < \sqrt{c}$.

Nếu $0 < x_n < \sqrt{c}$ thì $c - \sqrt{c + x_n} > c - \sqrt{2c} > 0$, suy ra x_{n+1} tồn tại và ta cũng có $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$.

Đặt $f(x)=\sqrt{c-\sqrt{c+x}}$ thì $f'(x)=\dfrac{-1}{4\sqrt{c+x}\sqrt{c-\sqrt{c+x}}}$.

Với mọi $x\in(0;\sqrt{c})$ ta có

$$(c+x)(c-\sqrt{c+x})>c(c-\sqrt{c+\sqrt{c}})\geq 2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})>\frac{1}{4}.$$

Từ đó suy ra $|f'(x)|<q<1$ với mọi $x\in(0;\sqrt{c})$, tức $f(x)$ là hàm số co trên $(0;\sqrt{c})$, suy ra dãy số đã cho hội tụ.

Vậy tất cả các giá trị c cần tìm là $c\geq 2$. □

Theo kịch bản thứ hai, ta giải phương trình $f(x)=x$ rồi chọn nghiệm L phù hợp và xét hiệu $|x_n-L|$, tìm cách sử dụng hệ thức truy hồi để đánh giá hiệu số này và chứng minh $\lim x_n=L$ bằng định nghĩa.

Ví dụ 8. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1\in(1;2)$ và $x_{n+1}=1+x_n-\dfrac{x_n^2}{2}$.

Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải. Giả sử x_n có giới hạn là a thì $a=1+a-\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}$ (loại giá trị $a=-\sqrt{2}$ vì dễ thấy $x_n>0\ \forall n$).

Ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh $\lim x_n=\sqrt{2}$.

Ta có $|x_{n+1}-\sqrt{2}|=\left|1+x_n-\dfrac{x_n^2}{2}-\sqrt{2}\right|=\left|x_n-\sqrt{2}\right|\left|\dfrac{\sqrt{2}+x_n-2}{2}\right|$.

Tiếp theo ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $1<x_n<\dfrac{3}{2}$ với mọi $n=2,\ 3,\ \ldots$

Từ đó, suy ra: $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}<\left|\dfrac{\sqrt{2}+x_n-2}{2}\right|<\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2}=q<1$.

Như thế ta luôn có $|x_{n+1}-\sqrt{2}|<q\,|x_n-\sqrt{2}|$.

Suy ra $|x_{n+1}-\sqrt{2}|<q^n|x_1-\sqrt{2}|$.

Vì $0<q<1$ nên với n đủ lớn thì q^n nhỏ tuỳ ý, suy ra $\lim x_n=\sqrt{2}$. □

Ví dụ 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{3}{u_n^2}\right)$ với mọi $n=1, 2, 3,\ldots$ Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải. Trước hết ta nhận xét rằng tất cả các số hạng của dãy số đều dương. Hơn nữa, kể từ số hạng thứ 2, áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng-trung bình nhân, ta có

$$u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-1}+\frac{3}{u_{n-1}^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_{n-1}}{2}+\frac{u_{n-1}}{2}+\frac{3}{u_{n-1}^2}\right)\geq\frac{1}{2}3\sqrt[3]{\frac{u_{n-1}}{2}.\frac{u_{n-1}}{2}.\frac{3}{u_{n-1}^2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\quad(*)$$

Nếu dãy số có giới hạn là a thì chuyển hệ thức truy hồi sang giới hạn, ta được

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a^2}\right)\Rightarrow a=\sqrt[3]{3}.$$

Dựa vào thông tin này, ta xét

$$u_{n+1}-\sqrt[3]{3}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{3}{u_n^2}\right)-\sqrt[3]{3}=\frac{1}{2u_n^2}(u_n^3-2\sqrt[3]{3}u_n^2+3)$$

$$=\frac{1}{2u_n^2}(u_n-\sqrt[3]{3})(u_n^2-\sqrt[3]{3}u_n-\sqrt[3]{9}).$$

Sử dụng (*), ta dễ dàng chứng minh được

$$\left|\frac{u_n^2-\sqrt[3]{3}u_n-\sqrt[3]{9}}{2u_n^2}\right|<\frac{3}{4}\quad\text{với } n\geq 2.$$

Từ đó suy ra

$$|u_{n+1}-\sqrt[3]{3}|\leq\frac{3}{4}|u_n-\sqrt[3]{3}|\quad\text{với mọi } n\geq 2.$$

Cuối cùng, áp dụng điều này nhiều lần, ta có

$$|u_n-\sqrt[3]{3}|\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}|u_2-\sqrt[3]{3}|.$$

Từ đó suy ra u_n có giới hạn là $\sqrt[3]{3}$ khi n dần đến ∞. Đó chính là điều phải chứng minh và cũng là giá trị cần tìm. □

2. Dãy số dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ và định lí trung bình Cesaro

Đây là trường hợp đặc biệt của dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Tuy nhiên, với dãy số dạng này, vấn đề hội tụ của (x_n) thường không được đặt ra (vì quá đơn giản và giới hạn chỉ có thể là 0 hoặc ∞). Ở đây, ta sẽ có một yêu cầu cao hơn là tìm bậc tiệm cận của (x_n), cụ thể là tìm β sao cho $x_n = O(n^\beta)$, tức là $\left|\frac{x_n}{n^\beta}\right|$ bị chặn. Với các dãy số có dạng này, định lí trung bình Cesaro sẽ tỏ ra rất hữu hiệu.

Định lí 3. *(Định lí trung bình Cesaro)*

> Nếu dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình cộng $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$ cũng có giới hạn là a.

Định lí này có thể phát biểu dưới dạng tương đương như sau:

> Nếu $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim \frac{x_n}{n} = a$.

(Thật vậy, chỉ cần xét dãy (y_n) với $y_n = x_{n+1} - x_n$).

Ta chứng minh định lí ở cách phát biểu 2. Rõ ràng chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a = 0$.

Vì $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$, ta có $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Khi đó, với mọi $n > N_0$:

$$\left|\frac{x_n}{n}\right| \leq \frac{|x_{N_0}| + |x_{N_0+1} - x_{N_0}| + \ldots + |x_n - x_{n-1}|}{n} < \frac{|x_{N_0}|}{n} + \frac{(n - N_0)\varepsilon}{n}.$$

Giữ cố định N_0, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $\frac{|x_{N_0}|}{N_1} < \varepsilon$. Khi đó với mọi $n > N_1$, ta sẽ có $\left|\frac{x_n}{n}\right| < 2\varepsilon$. Vậy $\lim \frac{x_n}{n} = 0$. □

Định lí trung bình Cesaro có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc tìm giới hạn dãy số và có thể phát biểu cho các trung bình khác như trung bình nhân, trung bình điều hoà, trung bình luỹ thừa. Về các ứng dụng đó, chúng ta sẽ đề cập tới ở cuối phần này. Trước hết, ta khai thác cách phát biểu 2 của định lí để áp dụng cho các dãy số có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^{\alpha}$: Để tìm số β sao cho $\frac{x_n}{n^{\beta}}$ có giới hạn hữu hạn, theo định lí trung bình Cesaro, ta chỉ cần tìm γ sao cho $x_{n+1}^{\gamma} - x_n^{\gamma}$ có giới hạn hữu hạn a. Khi đó, $\lim \frac{x_n^{\gamma}}{n} = a$, suy ra $\lim \frac{x_n}{n^{\frac{1}{\gamma}}} = a^{\frac{1}{\gamma}}$, tức là $\beta = \frac{1}{\gamma}$.

Ví dụ 10. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_0 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Chứng minh rằng $\lim nx_n = 1$.

Giải. Trong bài này, $\beta = -1$ nên ta sẽ thử với $\gamma = -1$. Dễ dàng chứng minh được $\lim x_n = 0$. Ta có:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} = \frac{x_n^2}{(x_n - x_n^2)x_n} = \frac{1}{1 - x_n} \to 1.$$

Từ đó áp dụng định lí trung bình Cesaro, suy ra $\lim \frac{1}{nx_n} = 1$.

Từ đó $\lim nx_n = 1$ (đpcm). □

Ví dụ 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = \sin(x_n)$.

Chứng minh rằng $\lim\left(\sqrt{n}x_n\right) = \sqrt{3}$.

Giải. Dãy số đã cho không trực tiếp có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^{\alpha}$ nhưng kết luận của bài toán gợi cho chúng ta đến định lí trung bình Cesaro. Vì $\beta = -\frac{1}{2}$ nên ta sẽ thử với $\gamma = -2$. Dễ dàng chứng minh được rằng $\lim x_n = 0$. Xét

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n} \to \frac{1}{3}$$

(áp dụng quy tắc L'Hôpital cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$).

Từ đó, theo định lí trung bình Cesaro : $\lim\dfrac{1}{nx_n^2}=\dfrac{1}{3}$, suy ra $\lim\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$. □

Như vậy, ta có thể tìm γ nếu biết β. Trong trường hợp không biết β thì ta phải dự đoán.

Ví dụ 12. (*Chọn đội tuyển Việt Nam, 1993*)

Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1=1$ và $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$.

Hãy tìm tất cả các số thực β để dãy số $\dfrac{a_n^\beta}{n}$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Giải. Trước hết ta chứng minh $a_n\to\infty$ khi $n\to\infty$. Thật vậy, ta có

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2\sqrt{a_n}+\frac{1}{a_n}>a_n^2+2 \text{ (do } a_n\ge 1 \text{ với mọi } n).$$

Từ đó $a_{n+1}^2>1+2n$, suy ra điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán, xét biểu thức:

$$a_{n+1}^{\frac{3}{2}}-a_n^{\frac{3}{2}}=\left(a_n+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{3}{2}}-a_n^{\frac{3}{2}}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\dfrac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}}.$$

Đặt $x_n=\dfrac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}$ thì $x_n\to 0$ khi $n\to\infty$. Do đó:

$$\lim(a_{n+1}^{\frac{3}{2}}-a_n^{\frac{3}{2}})=\lim\frac{(1+x_n)^{\frac{3}{2}}-1}{x_n}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x}=\frac{3}{2} \text{ (Quy tắc L'Hôpital)}$$

Từ đó suy ra $\lim \frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2}$.

Với $\beta > \frac{3}{2}$ suy ra giới hạn bằng ∞, với $\beta < \frac{3}{2}$ suy ra giới hạn bằng 0.

Vậy $\beta = \frac{3}{2}$ là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán. □

H2. 1) *Làm sao có thể dự đoán được giá trị β?*

2) α và β có mối quan hệ gì?

Định lí trung bình Cesaro còn có thể mở rộng cho các trung bình khác như trung bình nhân, trung bình bình phương, trung bình điều hoà. Dưới đây ta nêu ra phát biểu định lí trung bình Cesaro cho trung bình nhân và xem xét một ứng dụng nổi tiếng của định lí này.

Định lí 4

> Nếu dãy số dương (x_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình nhân $\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\right)$ cũng có giới hạn là a.

Chứng minh. Vì $\lim x_n = a$ và hàm số $y = \ln x$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ nên ta có

$$\lim(\ln x_n) = \ln a.$$

Theo định lí 3, ta có

$$\lim \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} = \ln a \Leftrightarrow \lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a \quad □$$

Ví dụ 13. Chứng minh rằng $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Đây là một kết quả khá nổi tiếng. Từ kết quả này có thể suy ra công thức tiệm cận để tính $n!$, cụ thể ta có $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Sự xuất hiện của hằng số e gợi cho chúng ta đến giới hạn đặc biệt $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Áp dụng định lí 4 cho dãy $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, ta được điều phải chứng minh.

H3.

1) *Hãy thực hiện chi tiết chứng minh trên.*

2) *Dựa theo chứng minh trên, hãy chứng minh* $\lim\left(\dfrac{a^n}{n!}\right) = 0$.

3. Dãy số dạng tổng và phương pháp sai phân

Để tính tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số, một trong những phương pháp hiệu quả nhất là phương pháp sai phân: Để tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (a_n), ta tìm hàm số $f(n)$ sao cho $a_n = f(n+1) - f(n)$.

Khi đó $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = f(n+1) - f(0)$.

Một trong những ví dụ kinh điển chính là phương pháp mà Bernoulli và các nhà toán học khác của thế kỉ XVIII đã đưa ra để tìm công thức tính tổng các luỹ thừa mũ k bất kì $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

Dùng phương pháp hệ số bất định, họ tìm đa thức $f_k(n)$ sao cho $n^k = f_k(n+1) - f_k(n)$ và từ đó tìm được $S(n,k) = f_k(n+1) - f_k(0)$. Phương pháp này hiệu quả hơn phương pháp xây dựng công thức truy hồi, vì để tính S_k ta không cần phải dùng đến các công thức tính $S_{k-1}, S_{k-2}, \ldots$

Khi dự đoán các hàm f, ta có thể sử dụng tích phân rồi tương tự hoá qua. Ví dụ tích phân của đa thức bậc k là đa thức bậc $k+1$.

Vậy thì từ $\Delta f_k = f_k(n+1) - f_k(n) = n^k$ suy ra f_k phải có bậc $k+1$.

Ví dụ 14. Lập công thức tính tổng $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Giải. Ta tìm hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho $f(n+1) - f(n) = n^2$ với mọi n.

Điều này tương đương với

$$\left[a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d\right] - \left[an^3 + bn^2 + cn + d\right] = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow 3an^2+(3a+2b)n+(a+b+c)=n^2, \forall n\in\mathbb{N}$.

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được $3a=1,\ 3a+2b=0,\ a+b+c=0$.

Từ đó: $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}$ còn d có thể lấy bất kì.

Để cho tiện, ta chọn $d=0$.

Cuối cùng, ta có: $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2=$

$=\left(f(2)-f(1)\right)+\left(f(3)-f(2)\right)+...+\left(f(n+1)-f(n)\right)=f(n+1)-f(1)=$

$=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Tuy nhiên, khác với tích phân, đôi khi các hàm rời rạc không có "nguyên hàm". Trong trường hợp đó ta không tính được tổng mà chỉ có thể đánh giá tổng bằng các bất đẳng thức.

Ví dụ 15. Tìm phần nguyên của tổng $S=\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}}$.

Giải. Ta cần tìm một đánh giá cho S. Nhận xét rằng hàm $\frac{1}{\sqrt{x}}$ có nguyên hàm là $2\sqrt{x}$, ta xét hàm số: $f(n)=2\sqrt{n}$. Khi đó:

$$f(n+1)-f(n)=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Suy ra: $$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<f(n+1)-f(n)<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Từ đó: $2(\sqrt{101}-1)<S<2(\sqrt{100}-1)+1$, suy ra $[S]=18$. □

Ví dụ 16. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, đặt $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Chứng minh rằng: $\lim u_n=+\infty$.

Giải. Ta cần chứng minh BĐT: $x\geq\ln(x+1),\ \forall x>0$. Thật vậy:

Xét hàm số: $f(x)=x-\ln(x+1),\ x>0 \Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0, \forall x>0$.

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra: $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x > \ln(x+1),\ \forall x > 0$.

Trong BĐT này, thay x bởi $\frac{1}{x} > 0$, ta cũng có:

$$\frac{1}{x} > \ln\frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\frac{x+1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln(x+1) - \ln x, \forall x > 0.$$

Đưa vào tổng cần chứng minh, ta có:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1) - \ln(k)\right] = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$, mà $\lim\left[\ln(n+1)\right] = +\infty$

nên: $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$. Ta có đpcm. □

H4. *Hãy chứng minh lại kết quả này bằng nhận xét* $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geq \frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 17. (*Đề đề nghị Toán quốc tế* 2001)

Cho $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + ... + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Giải. Đặt vế trái của bất đẳng thức là A. Áp dụng bất đẳng thức *Bunyakovski*, ta có

$$A^2 \leq n\left[\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} + ... + \frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^2}\right].$$

Để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} + ... + \frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^2} < 1.$$

Nhưng điều này là hiển nhiên do bất đẳng thức :

$$\frac{x_k^2}{\left(1+x_1^2+x_2^2+...+x_k^2\right)^2} \leq \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_{k-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+...+x_k^2}. \ \square$$

Ví dụ 18. Xét dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cho bởi : $x_{n+2} = \dfrac{(n-1)x_{n+1} + x_n}{n}$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị ban đầu x_1, x_2, dãy số đã cho hội tụ.

Tìm giới hạn của dãy như một hàm số theo x_1, x_2.

Giải. Từ công thức của dãy số, ta có:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{(x_{n+1} - x_n)}{n} = \frac{(x_n - x_{n-1})}{n(n-1)} = \dots = \frac{(-1)^n (x_2 - x_1)}{n!}.$$

Từ đó suy ra:

$$x_{n+2} = (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1 = x_1 + (x_2 - x_1).K_n$$

trong đó $K_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$. Ta sử dụng kết quả (không chứng minh) : $K_n \to \frac{1}{e}$ khi $n \to +\infty$ (từ công thức Taylor cho hàm số e^x với $x = 1$).

Từ đây suy ra dãy số có giới hạn và giới hạn đó bằng : $x_1 + \frac{(x_2 - x_1)}{e}$. □

H5. *1) Có thể tổng quát hoá bài toán trên như thế nào?*

2) Hãy tìm sai phân của các hàm số $\arctan(n)$.

Từ đó đặt ra bài toán tính tổng tương ứng.

3) Từ công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ *có thể lập ra công thức tính tổng nào?*

BÀI TẬP

1. Cho dãy số (a_n) thoả mãn : $\lim a_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

Chứng minh rằng : $\lim \sqrt[3]{3n}.a_n = 1$.

2. Cho dãy số (a_n) thoả mãn : $a_1 \in (0\,;1)$ và $a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $n = 1,2,3,\dots$

Chứng minh rằng : $\lim na_n = 1$.

3. Cho dãy số (x_n) thoả mãn

$$x_0 = 2, x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}, n = 0,1,2,\dots.$$

Tính phần nguyên của tổng $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

4. Chứng minh rằng :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}.$$

5. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi :

$$x_0=0, x_1=2, x_{n+2}=2^{-x_n}+\frac{1}{2}, n=0,1,2,...$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Tìm giới hạn đó.

6. Xét tính hội tụ của dãy sau tuỳ theo giá trị của a:

$$\begin{cases} x_1=a\neq -1 \\ x_{n+1}=\dfrac{3\sqrt{2x_n^2+2}-2}{2x_n+\sqrt{2x_n^2+2}}, \ n=1,2,3,... \end{cases}$$

7. Cho $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ và dãy (u_n) thoả mãn : $u_0=k\in\mathbb{R},\ u_{n+1}=f(u_n),\ n=0,1,2,...$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là một song ánh và dãy (u_n) đã cho xác định khi và chỉ khi $k\neq v_n,\forall n$, trong đó (v_n) được xác định bởi :

$v_0=\dfrac{-d}{c}, v_{n+1}=f^{-1}(v_n), n=0,1,2,...$ (lưu ý rằng dãy (v_n) này có thể không xác định kể từ một số thứ tự nào đó).

b) Đặt $\Delta=(d-a)^2+4bc$. Biện luận theo Δ sự hội tụ của dãy (u_n).

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

1. Phương pháp dãy số phụ

Khi khảo sát sự hội tụ của một dãy số, ta thường dùng định lí về dãy đơn điệu và bị chặn. Nếu dãy không đơn điệu thì có thể thử xét dãy với chỉ số chẵn và với chỉ số lẻ. Tuy nhiên, có những dãy số có "hành vi" phức tạp hơn nhiều.

Chúng tăng giảm rất bất thường. Trong một số trường hợp như thế, ta có thể xây dựng 1 (hoặc 2) dãy số phụ đơn điệu, chứng minh các dãy số phụ có giới hạn và sau đó chứng minh dãy số ban đầu có cùng giới hạn. Tất nhiên, dãy số phụ phải được xây dựng từ dãy số chính.

Ví dụ 1. Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}$.

Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

Giải. Xét hai dãy

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \text{ và } m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}.$$

Ta chứng minh M_n là dãy số giảm knn và m_n là dãy số tăng knn. Thật vậy, ta sẽ chứng minh $a_{n+4} \le \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$. Từ đây suy ra M_{n+1} bằng a_{n+1} hoặc a_{n+2} hoặc a_{n+3} và rõ ràng khi đó $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \ge M_{n+1}$.

Thật vậy, nếu $a_{n+4} \ge a_{n+3}$ thì $\dfrac{2}{a_{n+3} + a_{n+2}} \ge a_{n+3}$, suy ra $2 \ge (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$.

Khi đó

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_{n+3}} - a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+3}} - \frac{2}{a_{n+2} + a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4}$$

$$= 2.\frac{a_{n+2}}{(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} \ge a_{n+4}, \text{ suy ra đpcm.}$$

Ta đã chứng minh được M_n giảm knn. Tương tự m_n tăng knn. Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ. Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.

Suy ra dãy (a_n) hội tụ và $\lim a_n = 1$. □

Ví dụ 2. Cho (u_n) là dãy bị chặn thoả mãn: $2a_{n+2} \le a_n + a_{n+1}, \forall n$.

Chứng minh rằng dãy (a_n) này hội tụ.

Giải. Đặt $A_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$. Ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy:

$$a_{n+2} \le \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \le A_n \Rightarrow A_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \le \max\{a_{n+1}, A_n\} = A_n.$$

Do dãy (a_n) bị chặn nên dãy (A_n) cũng bị chặn, đồng thời theo nhận xét trên thì dãy (A_n) giảm knn nên nó hội tụ. Đặt $\lim A_n = \ell$.

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N nguyên dương sao cho với mọi $n > N$ thì :

$$\ell - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Theo định nghĩa của (A_n), suy ra: $a_n \le A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}$.

- Nếu $a_n \ge \ell - \frac{\varepsilon}{3}$ thì suy ra: $\ell - \frac{\varepsilon}{3} \le a_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell$.
- Nếu $a_n < \ell - \frac{\varepsilon}{3}$ thì theo định nghĩa của (A_n), ta được $a_{n+1} > \ell - \frac{\varepsilon}{3}$. Suy ra :

$$a_n \ge 2a_{n+1} - a_{n-1} \ge 2\left(\ell - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\ell + \frac{\varepsilon}{3}\right) = \ell - \varepsilon,$$

tức là : $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell$.

Vậy trong mọi trường hợp, dãy đã cho đều có giới hạn hữu hạn. □

2. Xây dựng dãy hội tụ bằng phương trình

Có thể xây dựng dãy số hội tụ về một số α xuất phát từ một phương trình có nghiệm là α theo cách sau:

Ví dụ 3. Xét $\alpha = \sqrt{2}$, α là nghiệm của phương trình $\alpha^2 = 2$. Ta viết lại dưới dạng $\alpha = \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha + \frac{2}{\alpha}}{2}$ và ta thiết lập dãy số x_n thoả mãn $x_0 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$. Nếu dãy này hội tụ thì giới hạn sẽ là $\sqrt{2}$. Tương tự như vậy, ta có thể xây dựng được dãy số tiến về căn bậc k của m như sau:

$$x_0 = a, \; x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{m}{x_n^{k-1}}}{2}.$$

Cũng với giới hạn cần đến là $\sqrt{2}$, ta có thể xây dựng một dãy số khác theo "phong cách" như vậy:

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}.$$

Tất nhiên, trong tất cả các ví dụ trên, ta chỉ có được phương trình với nghiệm theo ý muốn khi đã chứng minh được sự hội tụ của dãy số. Vì vậy, cần cẩn thận với cách thiết lập bài toán kiểu này. Ví dụ, với dãy số $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ thì không phải với x_0 nào dãy cũng hội tụ, và không phải lúc nào giới hạn cũng là $\sqrt{2}$.

Một cách tổng quát, ta có thể dùng phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ Newton để xây dựng các dãy số. Để tìm nghiệm của phương trình $F(x) = 0$, phương pháp Newton đề nghị chọn x_0 tương đối gần nghiệm đó và xây dựng dãy truy hồi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

khi đó dãy x_n sẽ dần đến nghiệm của phương trình $F(x) = 0$.

Ví dụ 4. Xét hàm số $F(x) = x^2 - 2$ thì $\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x^2 - 2}{2x}$ và ta được dãy số

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}.$$

Xét hàm số $F(x) = x^3 - x$ thì $\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1}$ và ta được dãy số

$$x_{n+1} = 2.\frac{x_n^3}{3x_n^2 - 1}.$$

3. Dãy số là nghiệm của một họ phương trình phụ thuộc biến n

Xét một họ phương trình $F(n,x)=0$. Nếu với mỗi n, phương trình $F(n,x)=0$ có nghiệm duy nhất x_n trên một miền D nào đó thì dãy số (x_n) đã được xác định. Từ mối liên hệ giữa các hàm $F(n,x)=0$, dãy số này có thể có những tính chất rất thú vị.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ldots+\frac{1}{x-n}=0$$

có nghiệm duy nhất x_n thuộc khoảng (0 ; 1). Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Giải. Do x_n được xác định duy nhất với hàm số

$$f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\ldots+\frac{1}{x-n}$$

liên tục và đơn điệu trên (0 ; 1). Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của nó. Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của x_n, ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn, mọi thứ đều ổn với $0<x_n<1$. Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$ là: $f_{n+1}(x)=f_n(x)+\dfrac{1}{x-n-1}$.

Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của (x_n).

Lời giải cụ thể như sau:

Rõ ràng x_n được xác định một cách duy nhất, $0<x_n<1$. Ta có :

$$f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)+\frac{1}{x_n-n-1}=\frac{1}{x_n-n-1}<0,$$

trong khi đó $f_{n+1}(0^+)>0.$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0;x_n)$, có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1}<x_n$. Tức là dãy số (x_n) giảm knn. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên nó có giới hạn hữu hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn này bằng 0.

Thật vậy, giả sử phản chứng $\lim x_n = a > 0$.

Khi đó, do $\ln(n+1) \to \infty$ nên tồn tại số nguyên dương N sao cho với mọi $n > N$ ta có $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}$.

Khi đó với $n > N$, ta có:

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \ldots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0. \ \square$$

Ví dụ 6. *(VMO 2007)*

Cho số thực $a > 2$ và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \ldots + x + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Gọi nghiệm đó là x_n, chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

Giải. Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$.

Dễ dàng nhận thấy $0 < x_n < 1$. Ta sẽ chứng minh (x_n) tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$.

Ta xét:

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \ldots + x + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1,$$

Và ta cũng có $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 2 > a$ nên ta chỉ cần chứng minh $ax_n + 1 < a$ là sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$. Như vậy, cần chứng minh $x_n < \frac{a-1}{a}$.

Thật vậy, nếu $x_n \geq \frac{a-1}{a}$ thì:

$$f_n(x_n) \geq a^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}}$$

$$= (a-1)^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n + a - (a-1)\left(\frac{a-1}{a}\right)^n > a$$

(do $a-1>1$), vô lí vì $f_n(x_n)=a$.

Vậy dãy số (x_n) tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ. □

Nhận xét: Một lần nữa, mối liên hệ $f_{n+1}(x)=xf_n(x)+1$ lại giúp chúng ta tính được mối quan hệ giữa x_n và x_{n+1}. Từ lời giải trên, ta có thể chứng minh được rằng $\lim x_n=\dfrac{a-1}{a}$. Thật vậy, đặt $c=\dfrac{a-1}{a}<1$, theo tính toán ở trên:

$$f_n(c)-f_n(x_n)=kc^n \text{ (với } k=(a-1)\left((a-1)^9-1\right)>0\text{)}.$$

Theo định lí Lagrange thì:

$$f_n(c)-f_n(x_n)=f'(\xi)(c-x_n) \text{ với } \xi \text{ thuộc } (x_n;\, c).$$

Nhưng $f'(\xi)=(n+10)a^{10}\xi^{n+9}+n\xi^{n-1}+\ldots+\xi+1>1$ nên từ đây suy ra:

$$kc^n>c-x_n.$$

Do đó: $c-kc^n<x_n<c\Rightarrow \lim x_n=c$.

Ví dụ 7. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x-1}+\ldots+\frac{1}{n^2x-1}=\frac{1}{2}$$

có một nghiệm duy nhất $x_n>1$.

Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

Giải. Việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x_n>1$ là hiển nhiên.

Mối liên hệ $f_{n+1}(x)=f_n(x)+\dfrac{1}{(n+1)^2x-1}$ cho thấy x_n là dãy số tăng (ở đây $f_n(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4x-1}+\ldots+\dfrac{1}{n^2x-1}-\dfrac{1}{2}$). Đề bài cho sẵn giới hạn của x_n là 4, điều đó làm cho bài toán trở nên dễ hơn nhiều.

Tương tự như cách chứng minh $\lim x_n=c$ ở nhận xét trên, ta sẽ dùng định lí Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa x_n và 4. Để làm điều này, ta cần tính $f_n(4)$ với $f_n(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4x-1}+\ldots+\dfrac{1}{n^2x-1}-\dfrac{1}{2}$.

Rất may mắn, bài toán $f_n(4)$ này liên quan đến một dạng tổng quen thuộc.

*Cụ thể như sau :

Đặt $f_n(x)$ như trên và gọi x_n là nghiệm lớn hơn 1 duy nhất của $f_n(x)=0$.

Ta có:

$$f_n(4)=\frac{1}{4-1}+\frac{1}{16-1}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4n+2}.$$

Sử dụng định lí Lagrange, ta có:

$$\frac{1}{4n+2}=\left|f_n(x_n)-f(4)\right|=\left|f'(c)\right|.\left|x_n-4\right| \text{ với } c\in(x_n;4).$$

Nhưng do $|f_n'(c)|=\frac{1}{(c-1)^2}+\frac{4}{(4c-1)^2}+\ldots>\frac{1}{9}$

nên từ đây $\left|x_n-4\right|<\frac{9}{4n+2}$, suy ra $\lim x_n=4$. □

Để tạo ra các phương trình có nghiệm duy nhất trên một khoảng nào đó, có thể sử dụng tổng của các hàm đơn điệu. Riêng với hàm đa thức, ta có thể sử dụng quy tắc Descartes về số nghiệm dương của phương trình: *Nếu dãy các hệ số của phương trình đổi dấu k lần thì phương trình có không quá k nghiệm dương.*

Ví dụ phương trình $x^4-x^2-nx-1=0$ có nghiệm dương duy nhất x_0, còn phương trình $x^4-x^2+nx-1=0$ có nhiều nhất ba nghiệm dương.

Khi xây dựng các hàm $F(n,x)$, có thể sử dụng công thức truy hồi. Như trong ví dụ 5 thì $F(n+1,x)=F(n,x)+\frac{1}{x-n-1}$. Xây dựng $F(n,x)$ kiểu này, dãy nghiệm x_n sẽ dễ có những quy luật thú vị hơn.

Ví dụ với dãy số ví dụ 5, ta có :

$$F(n+1,x_n)=F(n,x_n)+\frac{1}{x_n-n-1}<0.$$

Từ đây, do $\lim\limits_{x\to 0^+} F(n+1,x)=+\infty$, ta suy ra x_{n+1} nằm giữa 0 và x_n, tức dãy x_n giảm.

H *1) Có thể xây dựng dãy số nào với họ hàm số $F(x)=x(x-1)...(x-n)$?*

2) Cho $0<a_1<a_2<...<a_n<...$ là một dãy số dương tăng nghiêm ngặt. Xét họ phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a_1}+...+\frac{1}{x-a_n}=0$ có nghiệm duy nhất x_n thuộc $(0;a_1)$.

Khi nào thì x_n dần về 0 khi n dần đến vô cùng ?

BÀI TẬP

8. Cho (a_n) là dãy bị chặn thoả mãn:

$$F_{n+2}.a_{n+2}\le F_{n+1}a_{n+1}+F_n.a_n, \forall n=1,2,3,...,$$

trong đó (F_n) là dãy Fibonacci. Chứng minh dãy (a_n) hội tụ.

9. Dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1>0$, $a_2>0$ và $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$.

Chứng minh rằng dãy số (a_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

10. Cho trước bốn số thực dương a,b,A,B. Xét dãy số (x_n):

$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+2}=A\sqrt[3]{x_{n+1}^2}+B\sqrt[3]{x_n^2},\ n=1,2,3,...$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ và tìm giới hạn đó.

11. Tìm các giá trị $a\in\mathbb{R}$ sao cho dãy (x_n) sau đây hội tụ:

$$x_0=a,\ x_{n+1}=\frac{4x_n^5+x_n^2-x_n-1}{5x_n^4+x_n}, n=0,1,2,...$$

12. Cho ba số thực dương a,b,c và các dãy số $(a_k),(b_k),(c_k), k=0,1,2,...$ được xác định như sau:

1) $a_0=a,\ b_0=b,\ c_0=c$.

2) $a_{k+1}=a_k+\frac{2}{b_k+c_k},\ b_{k+1}=b_k+\frac{2}{c_k+a_k},\ c_{k+1}=c_k+\frac{2}{a_k+b_k}, k\ge 0$.

Chứng minh các dãy $(a_k),(b_k),(c_k)$ này dần tới vô cực khi n tiến tới vô cực.

13. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x+1$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n.

Chứng minh rằng x_n dần đến 1 khi n dần đến vô cùng và tính $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$.

14. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình:

$$x^n = x^2 + x + 1$$

có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n.

Hãy tính số thực a sao cho giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

§4. LÍ THUYẾT DÃY SỐ DƯỚI CON MẮT TOÁN CAO CẤP

1. Rời rạc hoá các khái niệm và định lí của lí thuyết hàm biến số thực

Dãy số là hàm số, do đó nó có đầy đủ các tính chất chung của hàm số. Tuy nhiên, do tính chất đặc biệt của tập $\mathbb{N}$, một số khái niệm như đạo hàm, tích phân không được định nghĩa cho các dãy số. Nhưng thực ra, dãy số cũng có các khái niệm tương ứng với các khái niệm này. Bằng cách so sánh và phép tương tự, ta có thể tìm được những định lí thú vị của lí thuyết dãy số. Đó là quá trình rời rạc hoá.

Rời rạc hoá của đạo hàm $f'(x)$ chính là sai phân $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ của dãy số. Cũng như đạo hàm của hàm biến số thực, sai phân dùng để xét tính tăng giảm của dãy số. Tương tự như vậy, ta định nghĩa sai phân cấp 2 và dùng để đo tính lồi lõm của dãy. Rời rạc hoá của khái niệm tích phân chính là khái niệm tổng: $S(x_n) = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$.

Hai khái niệm này ngược nhau: $\Delta(S(x_n)) = x_n, S(\Delta x_n) = x_n + c$.

Ví dụ 1. *(Định lí Stolz)*

Xét hai dãy số (x_n) và (y_n), trong đó (y_n) là dãy số dương tăng và dần đến vô cùng. Thế thì $\lim\frac{x_n}{y_n}=\lim\frac{(x_n-x_{n-1})}{(y_n-y_{n-1})}$ với giả thiết là giới hạn ở vế phải tồn tại.

(So sánh với quy tắc L'Hôpital)

Chứng minh. Đặt $\lim\frac{(x_n-x_{n-1})}{(y_n-y_{n-1})}=A$. Theo định nghĩa giới hạn, với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại N_1 sao cho với mọi $n\geq N_1$, ta có: $\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-A\right|<\varepsilon$, từ đó

suy ra : $A-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<A+\varepsilon$.

Từ đây, do (y_n) là dãy tăng nên ta có :

$$(A-\varepsilon)(y_{N_1}-y_{N_1-1})<x_{N_1}-x_{N_1-1}<(A+\varepsilon)(y_{N_1}-y_{N_1-1})$$

$$\dots$$

$$(A-\varepsilon)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<(A+\varepsilon)(y_n-y_{n-1}).$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được:

$$(A-\varepsilon)(y_n-y_{N_1-1})<x_n-x_{N_1-1}<(A+\varepsilon)(y_n-y_{N_1-1}).$$

Chia hai vế cho y_n, ta được:

$$A-\varepsilon+\frac{x_{N_1-1}-(A-\varepsilon)y_{N_1-1}}{y_n}<\frac{x_n}{y_n}<A+\varepsilon+\frac{x_{N_1-1}-(A+\varepsilon)y_{N_1-1}}{y_n}$$

Vì y_n dần đến vô cùng nên tồn tại $N_2>N_1$ sao cho:

$$\frac{x_{N_1-1}-(A-\varepsilon)y_{N_1-1}}{y_n}>-\varepsilon \text{ và } \frac{x_{N_1-1}-(A+\varepsilon)y_{N_1-1}}{y_n}<\varepsilon \text{ với mọi } n>N_2.$$

Khi đó với mọi $n>N_2$, ta có $A-2\varepsilon<\frac{x_n}{y_n}<A+2\varepsilon$ và điều này có nghĩa là $\lim\frac{x_n}{y_n}=A$. □

H1. *Điều kiện y_n tăng và dần đến vô cùng có cần thiết không ?*

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu dãy số (x_n) thoả mãn điều kiện $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \geq 0$ và k_1, k_2, ..., k_r là các số tự nhiên thoả mãn điều kiện $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = r.k$ thì:

$$x_{k_1} + x_{k_2} + \ldots + x_{k_r} \geq r.x_k$$

(*So sánh với bất đẳng thức Jensen*).

Ví dụ 3. Cho dãy số (x_n) thoả mãn điều kiện $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} \geq 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$. Ngoài ra $x_0 = x_{n+1} = 0$. Chứng minh rằng $x_k \leq 0$ với mọi $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

(Đạo hàm cấp hai không âm, suy ra đạo hàm cấp một là hàm tăng knn và chỉ có nhiều nhất một nghiệm, suy ra chiều biến thiên của hàm số chỉ có thể là từ 0 giảm đến cực tiểu rồi tăng lên 0).

Ví dụ 4. Cho dãy số dương (a_n). Biết rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = A < +\infty$.

Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Chứng minh rằng tổng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2 a_k}{S_k^2}$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Hướng dẫn. Dịch sang ngôn ngữ hàm số, ta có bài toán sau "Nếu $f(x)$ là hàm số tăng từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$ và tồn tại tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ thì cũng tồn tại tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 f(x)dx}{F^2(x)}$, trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$". Bài này có thể giải bằng phương pháp tích phân từng phần như sau:

$$\int\limits_0^A \frac{xdx}{F(x)} = \frac{1}{2}\int\limits_0^A \frac{d(x^2)}{F(x)} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{x^2}{F(x)}\right|_0^A + \int\limits_0^A \frac{x^2 f(x)dx}{F^2(x)} \right).$$

Như vậy chỉ cần chứng minh tồn tại $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{F(x)}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{F(x)}$.

H2. 1) *Định lí Rolle có dạng rời rạc như thế nào ?*

2) Công thức tính tích phân từng phần có dạng rời rạc như thế nào ?

2. Sử dụng xấp xỉ trong dự đoán kết quả

Trong nhiều trường hợp, dự đoán được kết quả đã là một nửa, thậm chí 2/3 lời giải. Chúng ta đã gặp nhiều tình huống là lời giải đầu tiên thu được một cách rất khó khăn, nhưng sau đó thì hàng loạt lời giải đẹp hơn, gọn hơn xuất hiện. Vì sao chúng ta không nghĩ ngay được những lời giải đẹp? Vì chúng ta chưa biết đáp số. Khi biết rồi thì có thể định hướng dễ dàng hơn rất nhiều. Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một số ứng dụng của xấp xỉ trong việc dự đoán kết quả.

Trong ví dụ về dãy số $x_{n+1} = \sin(x_n)$, chúng ta đã áp dụng định lí trung bình Cesaro để tìm giới hạn $\sqrt{n}x_n$, mặc dù dãy số không có dạng quen thuộc $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^{\alpha}$. Thế nhưng, nếu để ý rằng $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$, mà tại lân cận của 0 thì $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, ta sẽ thấy tính quy luật của kết quả đã tìm được ở trên.

Với phương pháp tương tự, ta có thể thấy dãy dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^{\alpha}$ ở hàng loạt các dãy số có bề ngoài khác hẳn như:

$$x_{n+1} = \ln(1+x_n), \quad x_{n+1} = x_n \cos x_n, \quad x_{n+1} = \arctan(x_n)...$$

(Dĩ nhiên, phải kiểm tra điều kiện $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$).

Ta cũng có thể giải thích được vì sao trong bài toán $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ ở phần trên, ta đã tìm được số $\dfrac{3}{2}$.

Ta có $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt{a_n}} = a_n\left(1 + \dfrac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Vì $a_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên với mọi β, ta có

$$a_{n+1}^{\beta} = a_n^{\beta}\left(1+\frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)^{\beta} \approx a_n^{\beta}\left(1+\frac{\beta}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right) = a_n^{\beta} + \beta a_n^{\beta-\frac{3}{2}}.$$

Do đó để hiệu số này xấp xỉ hằng số, ta chọn $\beta = \frac{3}{2}$.

Ta xét một ví dụ khác :

Ví dụ 5. (*ĐHSP*, 2000)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi :

$$a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}.$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn.

Giải. Dễ thấy (a_n) là dãy tăng knn. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh dãy (a_n) bị chặn trên. Ta có

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} < a_n\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right].$$

Từ đây suy ra

$$a_{n+1} < \left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]\ldots\left[1+\frac{1}{2.3}\right]a_2 = \left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]\ldots\left[1+\frac{1}{2.3}\right].$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh tích $\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]\ldots\left[1+\frac{1}{2.3}\right]$ bị chặn. Kết quả này không phức tạp và có thể chứng minh hoàn toàn sơ cấp. Tuy nhiên, những kinh nghiệm về dãy số $\frac{1}{n(n+1)}$ gợi cho chúng ta nhớ tới mối quan hệ giữa tích trên và tổng $\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Theo hướng đó, chúng ta có thể đưa ra một kết quả tổng quát hơn và kết quả đó được dự đoán từ việc sử dụng xấp xỉ.

Giả sử rằng (x_n) là dãy số thực sao cho tổng $x_1+\ldots+x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Khi đó $x_n\to 0$ khi $n\to+\infty$. Vì vậy, với n đủ lớn thì $x_n\approx\ln(1+x_n)$. Do đó tổng $\ln(1+x_1)+\ldots+\ln(1+x_n)$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$ và có nghĩa là tích $(1+x_1)\ldots(1+x_n)$ cũng vậy. Ta có định lí:

Định lí

> Cho dãy số thực (x_n). Khi đó nếu tổng $x_1+\ldots+x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to\infty$ thì tích $(1+x_1)\ldots(1+x_n)$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.

H3. *1) Mệnh đề đảo của định lí trên có đúng không ?*

2) Cho $n>3$ và x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n-x^2-x-1=0$. Có thể dự đoán được $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n-1)$?

BÀI TẬP

15. Cho dãy số (a_n) thoả mãn : $a_1=5, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}, n=1,2,3,\ldots$

Chứng minh rằng : $45<a_{1000}<45,1$.

16. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1=1, \quad u_2=2 \\ u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n \end{cases}, n=1,2,3,\ldots$$

Đặt $x_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $n=1,2,3,\ldots$. Tính giới hạn : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

17. Cho dãy số (u_n) thoả mãn

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_{2n}+u_{2n+1}\right)=2010 \text{ và } \lim_{n\to+\infty}\left(u_{2n}+u_{2n-1}\right)=2011.$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.

18. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $u_1=u_2=1, u_{n+1}=4u_n-5u_{n-1}$ với mọi $n\geq 2$.

Chứng minh rằng với mọi số thực $a > \sqrt{5}$, ta đều có : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{a^n} = 0$.

19. Tính giới hạn sau : $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

20. Cho dãy số thực (u_n) thoả mãn : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 1 \\ \forall p, q \in \mathbb{N}^*, u_{p+q} \leq u_p.u_q. \end{cases}$

Xét $v_n = \dfrac{\ln u_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (v_n) hội tụ.

21. Cho dãy số dương (a_n) thoả mãn :

$$a_1 > 0,\ a_{n+1}^p \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \forall n \geq 1 \text{ với } p \text{ cho trước, } 0 < p < 2.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c > 0$ sao cho $a_n > nc, \forall n$.

22. Khảo sát sự hội tụ của dãy :

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

23. Cho $\alpha \in (0\,;2)$. Tính giới hạn của dãy sau theo các giá trị $u_0,\ u_1$ cho trước :

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1-\alpha)u_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

24. Cho a là số thực dương bất kì lớn hơn 1. Tính $\lim \dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a + \dfrac{a^2}{2} + \ldots + \dfrac{a^n}{n}\right)$.

25. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) được xác định bởi :

$$x_0 = \sqrt{1996},\ x_{n+1} = \frac{a}{x_n^2 + 1},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

có giới hạn hữu hạn khi n dần tới vô cùng.

26. Cho dãy số thực (a_n) thoả mãn : $e^{a_n} + n.a_n = 2, \forall n$.

Chứng minh rằng : $\lim n(1 - n.a_n) = 1$.

27. Cho dãy số thực dương (x_n) được xác định bởi :

$$x_1 = 1,\ x_2 = 9,\ x_3 = 9,\ x_4 = 1,\ x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n.x_{n+1}.x_{n+2}.x_{n+3}},\ n \geq 1.$$

Chứng minh dãy này có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

CHỈ DẪN LỊCH SỬ

1. Nhà toán học Hy Lạp cổ đại Archimedes của Syracuse (khoảng 287-khoảng 212 trước CN) là người đầu tiên phát triển ý tưởng giới hạn để tính diện tích các hình phẳng và thể tích trong thế kỉ III trước Công nguyên. Bằng cách chia các hình này thành các mảnh nhỏ mà có thể tính xấp xỉ được, sau đó tăng số lượng các mảnh, giới hạn của tổng các mảnh sẽ cho giá trị cần tìm. Công trình của Archimedes, cuốn sách *Phương pháp (The Method)*, bị thất lạc cho đến năm 1906, khi các nhà toán học khám phá ra rằng Archimedes đã đi đến rất gần với việc khám phá ra phép tính của các đại lượng vô cùng bé.

   Vì các tác phẩm của Archimedes không được biết tới cho đến tận thế kỉ XX, các nhà toán học khác đã phát triển khái niệm giới hạn hiện đại. Nhà toán học người Anh Issac Newton (1643-1727) và nhà toán học người Đức Gottfried Leibniz (1646-1716) một cách độc lập với nhau đã phát triển những nguyên lí chung của phép tính vi tích phân (trong đó lí thuyết giới hạn đóng một vai trò quan trọng) trong thế kỉ XVII.

2. Nhà toán học người Pháp Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) đã có những đóng góp quan trọng cho lí thuyết giới hạn nói riêng và giải tích nói chung. Ông là người đã đưa ra định nghĩa dưới ngôn ngữ "ε-δ" cho khái niệm giới hạn.

3. Nhà toán học người Đức Karl Weierstrass (1815-1897) được coi là "cha đẻ của giải tích hiện đại". Ông là người đầu tiên chú ý đến logic của giải tích và đưa ra định nghĩa chặt chẽ cho các khái niệm liên tục đều, nhờ đó tìm ra các chứng minh chặt chẽ cho định lí giá trị trung bình, định lí Bolzano-Weierstrass, định lí về sự tồn tại GTLN và GTNN của hàm liên tục trên một compact.

4. Kí hiệu ∞ được đưa ra đầu tiên bởi nhà toán học người Anh John Wallis (1616-1703) vào năm 1655 trong công trình *Số học vô hạn* (Arithmetica Infinitorum) và công trình *Về các đường conic* (De sectionibus conicis). Kí hiệu này được người La Mã dùng để biểu thị số 1000, một số được coi là rất lớn.

5. ***Kí hiệu lim.*** (có dấu chấm) được dùng đầu tiên bởi Simon L'Huilier (1750-1840) vào năm 1786 trong công trình *Giáo trình sơ cấp về cơ sở của giải tích* (Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs). Năm 1841, Weierstrass sử dụng kí hiệu lim (không có dấu chấm) và đến năm 1850 thì sử dụng kí hiệu $\lim\limits_{x=c}$.

Kí hiệu mà chúng ta sử dụng một cách thông dụng hiện nay $\lim_{x \to a}$ có thể được bắt nguồn từ nhà toán học người Anh John Gaston Leathem (1871-1923) trong cuốn sách xuất bản năm 1905 *Tích phân thể tích và mặt sử dụng trong vật lí* (*Volume and Surface Integrals Used in Physics*). Kí hiệu này bắt đầu được công nhận và sử dụng rộng rãi sau khi nó xuất hiện trong hai cuốn sách xuất bản năm 1908: *Nhập môn lí thuyết chuỗi vô hạn* (An Introduction to the Theory of Infinite Series) của Thomas John I'Anson Bromwich (1875-1929) và *Giáo trình toán lí thuyết* (A Course of Pure Mathematics) của Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

6. ***Phương pháp của Gauss.*** Đó là cách mà Carl Gauss khi còn nhỏ đã dùng để tính nhanh tổng $1 + 2 + \ldots + 99 + 100$.

7. ***Bài toán bàn cờ cổ Ấn Độ.*** Nhà hiền triết sau khi dạy vua chơi cờ, được vua ban thưởng đã yêu cầu "Tôi chỉ cần ở ô thứ nhất lấy 1 hạt gạo, ô thứ hai lấy 2 hạt gạo, ô thứ ba lấy 4 hạt gạo, cứ thế cho đến ô cuối cùng". Nhà vua hào hứng nhận lời và kết quả là nhà vua đã phải mở tất cả các kho gạo ra mà cũng không đủ. Bạn có thể hình dung con số đó lớn thế nào không?

8. ***Nghịch lí Zenon.*** Thời cổ đại người ta đưa ra lí luận là nếu Achilles chấp con rùa một đoạn s thì anh ta sẽ không thể đuổi kịp rùa, cho dù anh ta chạy nhanh gấp đôi rùa. Lí luận đó dựa trên "cơ sở" là $t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \ldots \to \infty$.

9. ***Định lí Dirichlet*** (1837). Nếu một cấp số cộng gồm các số nguyên dương có số hạng đầu và công sai nguyên tố cùng nhau thì cấp số đó chứa vô số số nguyên tố.

10. ***Định lí Green-Tao*** (2004). Tập hợp các số nguyên tố chứa các cấp số cộng độ dài tuỳ ý ; nói cách khác, với mọi $k \geq 3$, tồn tại dãy $p_1, p_2, \ldots, p_k$ các số nguyên tố sao cho $p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \ldots = p_k - p_{k-1}$.

11. ***Thi pháp Sankrit và dãy số Fibonacci.*** Dãy số Fibonacci đã được biết đến ở thời Ấn Độ cổ đại, nơi chúng được sử dụng trong vận luật (thi pháp), trước khi được biết đến ở Châu Âu. Các nghiên cứu thuộc về Pingala (200 trước CN), Virahanka (thế kỉ 6 sau CN), Gopala (khoảng 1135 sau CN), và Hemachandra (khoảng 1150 sau CN). Động cơ nghiên cứu đến từ thi pháp Sankrit, ở đó âm

tiết dài có độ dài 2 và âm tiết ngắn có độ dài 1. Mỗi một mẫu độ dài n có thể được thành lập bằng cách thêm một âm tiết ngắn vào mẫu độ dài $n-1$ hoặc thêm một âm tiết dài vào mẫu độ dài $n-2$; như vậy các nhà thi pháp đã chứng minh được rằng số mẫu độ dài n bằng tổng hai số trước nó trong dãy số.

12. ***Tỉ lệ vàng.*** Trong toán học và trong mỹ thuật, hai số được gọi là có *Tỉ lệ vàng* nếu *tỉ lệ giữa tổng hai số và số lớn hơn* bằng *tỉ lệ giữa số lớn hơn và số nhỏ hơn*. Tỉ lệ vàng là một hằng số toán học vô tỉ, gần bằng 1.6180339887. Tỉ lệ vàng còn được gọi là *phép chia vàng, trung bình vàng*. Tỉ lệ vàng thường được kí hiệu bằng chữ cái Hy Lạp φ (đọc là phi).

13. ***Vài nét về sự ra đời của khái niệm đạo hàm***

Phép tính đạo hàm còn được gọi là *phép tính vi phân* đã được manh nha từ nửa đầu thế kỉ XVII.

Sau khi Descartes (1596-1650) phát minh ra phương pháp xác định tọa độ một điểm trong hệ trục tọa độ vuông góc (ngày nay gọi là hệ tọa độ Descartes vuông góc) và cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị thì ông và các nhà toán học Roberval (1602-1675), Fermat (1601-1665) đã đặt ra các bài toán: Tìm tiếp tuyến của đường cong, tìm cực đại và cực tiểu của hàm số. Để giải quyết những bài toán này, các ông đã tiếp cận được điều "cốt lõi" của khái niệm đạo hàm.

Có thể xem Fermat là người đi tiên phong trong lĩnh vực xây dựng "phép tính vi phân". Ông là người đầu tiên giải quyết một số bài toán liên quan đến vấn đề cực trị và vấn đề tiếp tuyến trên cơ sở các "vô cùng bé". Điều này không xa với khởi thủy của khái niệm đạo hàm.

Tuy nhiên, phải đến nửa cuối thế kỉ XVII, các nhà toán học mới đặt được nền móng vững chắc cho phép tính vi phân. Các nhà toán học có công lớn trong lĩnh vực này phải kể đến Newton (1642-1727) và Leibniz (1646-1716). Trong lời nói đầu của một tác phẩm của mình in năm 1684, Leibniz đã viết : "Với sự hiểu biết về phép tính mà tôi gọi là vi phân, người ta có thể giải quyết được các bài toán tìm cực đại, cực tiểu và tìm tiếp tuyến".

Đến cuối thế kỉ XVIII và đầu thế kỉ XIX, phép tính vi phân và bạn đồng hành với nó là phép tính tích phân đã được xây dựng hoàn chỉnh bởi các nhà toán học Gauss (1777-1855), Abel (1802-1829), Cauchy (1789-1857) và Weierstrass (1815-1897).

14. ***Các kí hiệu toán học liên quan đến đạo hàm***

Newton, một trong hai ông tổ của phép tính vi tích phân đã biểu diễn đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai bằng các kí hiệu $\dot{x}, \ddot{x}$. Ngày nay, các kí hiệu này vẫn còn được sử dụng trong cơ học, phương trình vật lí toán.

Leibniz là người đầu tiên đã đưa ra các kí hiệu *dy*, *dx*, $\frac{dy}{dx}$ trong một công trình của mình về phép tính vi phân (1675). Chữ *d* được lấy từ chữ cái đầu tiên của chữ *differentiation*. Kí hiệu $\frac{dy}{dx}$ để chỉ đạo hàm cấp một, $\frac{d^2y}{dx^2}$ cho đạo hàm cấp hai hiện nay vẫn là kí hiệu được sử dụng một cách thông dụng trong toán học.

Kí hiệu $f'(x), f''(x), f'''(x)$... mà chúng ta sử dụng trong tài liệu này cũng như trong các tài liệu toán phổ thông ở Việt Nam được đưa ra bởi Lagrange (1736-1813) trong công trình *Lí thuyết hàm giải tích (1797),* và trước đó (1772) thì các kí hiệu $u' = \frac{du}{dx}$, $du = u'dx$ cũng đã được ông sử dụng trong một công trình khác.

Tương tự với kí hiệu vi phân *d* được xuất phát từ chữ *differentiation*, kí hiệu $v(t)$ dành cho vận tốc xuất phát từ chữ *velocity* (ở đây người ta không dùng speed để nhấn mạnh tính có hướng của vận tốc, speed chỉ để chỉ độ lớn của vectơ vận tốc), kí hiệu $a(t)$ dành cho gia tốc xuất phát từ chữ *acceleration*, còn chữ Δx dành cho số gia của biến số *x* được lấy từ chữ *displacement* (dịch chuyển).

15. ***Fermat và các bài toán cực trị***

Tên tuổi của Fermat gắn liền với nhiều bài toán cực trị trong hình học, vật lí, giải tích. Chính ông đã xét bài toán "Chia đoạn thẳng đã cho thành hai phần sao cho tích của chúng là lớn nhất". và sử dụng một số lí luận rất gần với đạo hàm để giải quyết bài toán.

Đường đi của một tia sáng từ một điểm đến một điểm khác tuân theo nguyên lí Fermat: "Tia sáng luôn đi theo đường đi ngắn nhất về thời gian". Từ nguyên lí này, bằng đạo hàm, người ta chứng minh được luật Snellius về khúc xạ.

Trong hình học sơ cấp, bài toán Fermat yêu cầu tìm điểm *M* nằm trong tam giác *ABC* sao cho tổng khoảng cách từ *M* đến các đỉnh của tam giác là nhỏ nhất. Điểm này được gọi là điểm Fermat của tam giác.

tiết dài có độ dài 2 và âm tiết ngắn có độ dài 1. Mỗi một mẫu độ dài *n* có thể được thành lập bằng cách thêm một âm tiết ngắn vào mẫu độ dài *n* – 1 hoặc thêm một âm tiết dài vào mẫu độ dài *n* – 2 ; như vậy các nhà thi pháp đã chứng minh được rằng số mẫu độ dài *n* bằng tổng hai số trước nó trong dãy số.

12. ***Tỉ lệ vàng***. Trong toán học và trong mỹ thuật, hai số được gọi là có *Tỉ lệ vàng* nếu *tỉ lệ giữa tổng hai số và số lớn hơn* bằng *tỉ lệ giữa số lớn hơn và số nhỏ hơn*. Tỉ lệ vàng là một hằng số toán học yô tỉ, gần bằng 1.6180339887. Tỉ lệ vàng còn được gọi là *phép chia vàng, trung bình vàng*. Tỉ lệ vàng thường được kí hiệu bằng chữ cái Hy Lạp φ (đọc là phi).

13. ***Vài nét về sự ra đời của khái niệm đạo hàm***

Phép tính đạo hàm còn được gọi là *phép tính vi phân* đã được manh nha từ nửa đầu thế kỉ XVII.

Sau khi Descartes (1596-1650) phát minh ra phương pháp xác định tọa độ một điểm trong hệ trục tọa độ vuông góc (ngày nay gọi là hệ tọa độ Descartes vuông góc) và cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị thì ông và các nhà toán học Roberval (1602-1675), Fermat (1601-1665) đã đặt ra các bài toán: Tìm tiếp tuyến của đường cong, tìm cực đại và cực tiểu của hàm số. Để giải quyết những bài toán này, các ông đã tiếp cận được điều "cốt lõi" của khái niệm đạo hàm.

Có thể xem Fermat là người đi tiên phong trong lĩnh vực xây dựng "phép tính vi phân". Ông là người đầu tiên giải quyết một số bài toán liên quan đến vấn đề cực trị và vấn đề tiếp tuyến trên cơ sở các "vô cùng bé". Điều này không xa với khởi thủy của khái niệm đạo hàm.

Tuy nhiên, phải đến nửa cuối thế kỉ XVII, các nhà toán học mới đặt được nền móng vững chắc cho phép tính vi phân. Các nhà toán học có công lớn trong lĩnh vực này phải kể đến Newton (1642-1727) và Leibniz (1646-1716). Trong lời nói đầu của một tác phẩm của mình in năm 1684, Leibniz đã viết : "Với sự hiểu biết về phép tính mà tôi gọi là vi phân, người ta có thể giải quyết được các bài toán tìm cực đại, cực tiểu và tìm tiếp tuyến".

Đến cuối thế kỉ XVIII và đầu thế kỉ XIX, phép tính vi phân và bạn đồng hành với nó là phép tính tích phân đã được xây dựng hoàn chỉnh bởi các nhà toán học Gauss (1777-1855), Abel (1802-1829), Cauchy (1789-1857) và Weierstrass (1815-1897).

14. ***Các kí hiệu toán học liên quan đến đạo hàm***

Newton, một trong hai ông tổ của phép tính vi tích phân đã biểu diễn đạo hàm cấp một và đạo hàm cấp hai bằng các kí hiệu $\dot{x}, \ddot{x}$. Ngày nay, các kí hiệu này vẫn còn được sử dụng trong cơ học, phương trình vật lí toán.

Leibniz là người đầu tiên đã đưa ra các kí hiệu *dy*, *dx*, $\frac{dy}{dx}$ trong một công trình của mình về phép tính vi phân (1675). Chữ *d* được lấy từ chữ cái đầu tiên của chữ *differentiation*. Kí hiệu $\frac{dy}{dx}$ để chỉ đạo hàm cấp một, $\frac{d^2y}{dx^2}$ cho đạo hàm cấp hai hiện nay vẫn là kí hiệu được sử dụng một cách thông dụng trong toán học.

Kí hiệu $f'(x), f''(x), f'''(x)$... mà chúng ta sử dụng trong tài liệu này cũng như trong các tài liệu toán phổ thông ở Việt Nam được đưa ra bởi Lagrange (1736-1813) trong công trình *Lí thuyết hàm giải tích (1797)*, và trước đó (1772) thì các kí hiệu $u' = \frac{du}{dx}$, $du = u'dx$ cũng đã được ông sử dụng trong một công trình khác.

Tương tự với kí hiệu vi phân *d* được xuất phát từ chữ *differentiation*, kí hiệu *v*(*t*) dành cho vận tốc xuất phát từ chữ *velocity* (ở đây người ta không dùng speed để nhấn mạnh tính có hướng của vận tốc, speed chỉ để chỉ độ lớn của vectơ vận tốc), kí hiệu *a*(*t*) dành cho gia tốc xuất phát từ chữ *acceleration*, còn chữ Δx dành cho số gia của biến số *x* được lấy từ chữ *displacement* (dịch chuyển).

15. ***Fermat và các bài toán cực trị***

Tên tuổi của Fermat gắn liền với nhiều bài toán cực trị trong hình học, vật lí, giải tích. Chính ông đã xét bài toán "Chia đoạn thẳng đã cho thành hai phần sao cho tích của chúng là lớn nhất" và sử dụng một số lí luận rất gần với đạo hàm để giải quyết bài toán.

Đường đi của một tia sáng từ một điểm đến một điểm khác tuân theo nguyên lí Fermat: "Tia sáng luôn đi theo đường đi ngắn nhất về thời gian". Từ nguyên lí này, bằng đạo hàm, người ta chứng minh được luật Snellius về khúc xạ.

Trong hình học sơ cấp, bài toán Fermat yêu cầu tìm điểm *M* nằm trong tam giác *ABC* sao cho tổng khoảng cách từ *M* đến các đỉnh của tam giác là nhỏ nhất. Điểm này được gọi là điểm Fermat của tam giác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng, *Đại số và Giải tích 11 nâng cao*, Nhà xuất bản Giáo dục 2007.

[2] Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Trần Thị Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng, *Đại số và Giải tích 12 nâng cao*, Nhà xuất bản Giáo dục 2008.

[3] B.M.Egorov, P.T.Dybov, N.V.Miroshin, S.F.Smirnova, *Tuyển tập các bài toán thi môn Toán*, Nhà xuất bản Khoa học, Matxcơva (tiếng Nga).

[4] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to theory of numbers*,

[5] Lê Quang Hoàng Nhân, *Giáo trình Toán cao cấp (Phần Giải tích)*, Nhà xuất bản Thống kê, 2008.

[6] Jean-Marie Monier, *Giải tích 1, 2, 3, 4*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999 - 2000.

[7] Bách khoa toàn thư mở Wikipedia.

[8] http://science.jrank.org/pages/3934/Limit-History.html, *Lịch sử khái niệm giới hạn.*

[9] http://jeff560.tripod.com/calculus.html, *Những cách dùng sớm nhất của các kí hiệu của Giải tích.*

[10] Lê Hải Châu, *Tuyển tập các đề thi toán quốc tế.*

[11] Titu Andreescu, Razvan Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhauser 2000.

[12] A. Gardiner, *The Mathematical Olympiad Hanbook*, Oxford, 1997.

[13] Titu Andreescu, Zuming Feng: *Mathematical Olympiads 1998-1999, 1999-2000, 2000-2001*, MAA, 2000-2002

[14] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer 1997

[15] G.Polya, G.Szego: *Các bài tập và định lí của giải tích*, Nauka 1977 (Tiếng Nga)

[16] Cupsov, Nesterenko ... : *Thi vô địch toán toàn Liên Xô*, Prosvesenie, 1999 (Tiếng Nga)

[17] *400 bài toán từ American Mathematical monthly*, Mir, 1977 (Tiếng Nga)

[18] *Đề thi toán của Việt Nam, các nước và khu vực*

[19] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (THTT), Parabola, Kvant, American Mathematical monthly (AMM).

MỤC LỤC