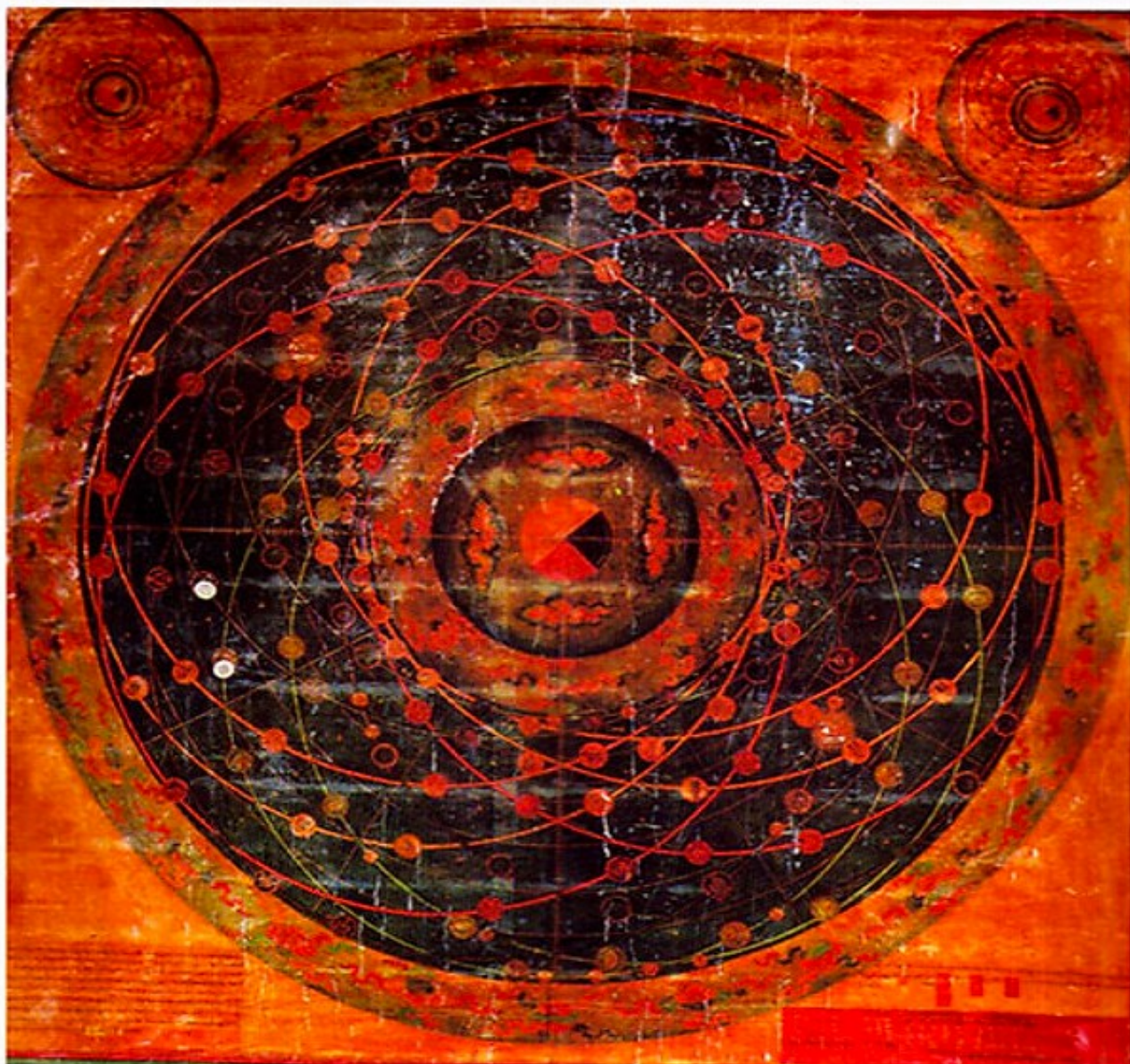


TRUNG TÂM VĂN HÓA PHẬT GIÁO LIỄU QUÁN HUẾ
Hong Dương Nguyễn Văn Hai

ĐẠO PHẬT LÀ TOÁN HỌC



NHÀ XUẤT BẢN HỒNG ĐỨC

TRUNG TÂM VĂN HÓA PHẬT GIÁO (LIỄU QUÁN HUỆ)
Hồng Dương Nguyễn Văn Hai

ĐẠO PHẬT LÀ TOÁN HỌC



NHÀ XUẤT BẢN HỒNG ĐỨC

Mục Lục

Lời đầu sách	2
Bài Kệ Hồi Hương	9
Tương đối Vật lý	9
Chương I: Đạo Phật là Toán học	10
1.1 Phật là Lý Duyên khởi	10
1.2 Câu hỏi Tôn tại Nguyên thủy	11
Chú thích	13
Chương II: Vũ trụ Toán học	16
2.1 Khoa học nhận thức và sự kết nối giữa vật lý học và toán học¹	16
2.1.1 Tổng quát	16
2.1.2 Vật lý học: Thí nghiệm, Thống nhất Khái niệm, và Toán học	17
2.1.3 Toán học: Vật lý học Nguyên thủy, Tiên đề, Định lý, và Vẻ đẹp.	18
2.2 Có thật Toán học là sự dung hợp phức tạp của phát minh và phát hiện?	20
2.2.1 Năng lực phi thường của Toán học	20
2.2.2 Toán học = Nghệ thuật + Khoa học	22
2.2.3 Một chuyện tình toán học.	26
2.2.4 Toán học được phát minh hay phát hiện?	32
Chú thích	35
Chương III: Vũ trụ Toán học Tegmark	138
3.1 Một buổi nói chuyện về vũ trụ, một cấu trúc toán học.	138
3.1.1 Những gì cấu thành vũ trụ?	138
3.1.2 Toán học về ý thức	139
3.2 Câm lại và tính toán đi!	139
3.3 Ý thức là một trạng thái vật chất	143
3.4 Tư tưởng và Công trình của Tegmark	144
3.5 Tập sách "Our Mathematical Universe" của Tegmark	150
Chi tiết các Chương trong Ba Phần của sách:	151
3.6 Bình luận về "Our Mathematical Universe"	152
3.7 Được làm bằng toán học?	153
3.7.1 Toán học ứng dụng	153
3.7.2 ... so với toán học thuần túy	154
3.7.3 Hai nghĩa của "là" ("is")	154
3.8 Có chăng những vũ trụ song song?	155
3.8.1 Hiểu toán học theo nghĩa đen	156
3.8.2 Vũ trụ phân nhánh	156
3.8.3 Rất vui được gặp tôi?	157
3.8.4 Cái tôi nào thực tồn?	157
3.9 Jeremy Butterfield bình luận "Our Mathematical Universe"	157
3.9.1 Vũ trụ đa trọng tầng I	158

3.9.2	Vũ trụ đa trọng tầng II	159
3.9.3	Vũ trụ đa trọng tầng III	159
3.9.4	Vũ trụ đa trọng tầng IV	160
3.10	Giải đáp một số thắc mắc	160
	Chú thích	162
Chương IV:	Tính tương đối của Tồn tại	163
4.1	Thông điệp sự tồn tại	163
4.2	Luận cứ Logic	163
4.2.1	Luận cứ Vị nhân Cuối cùng (The Final Anthropic Argument)	163
4.2.3	Luận cứ Tiên đề hóa	165
4.2.3a	Thông điệp	167
4.3	Bác bỏ các phản bác thông thường	167
4.3.1	Không tương thích với các định lý của Gödel?	167
4.3.2	Không tương thích với tính Ngẫu nhiên Lượng tử?	169
4.3.2	Lập luận đáp ứng Hữu thần luận	169
4.4	Kết luận	170
	Chú thích	170

Lời đầu sách

[Tôi kính lễ bái bậc Chánh giác, bậc tối thắng trong hết thảy các nhà thuyết pháp, đã thuyết giảng Duyên khởi là bất diệt và bất sinh, bất đoạn và bất thường, bất nhất và bất dị, bất lai và bất xuất, là sự tịch diệt mọi hý luận, và là an ổn.]

Tập sách “**Đạo Phật là Toán học**” gồm có bốn chương: I. Đạo Phật là Toán học; II. Vũ trụ toán học; III. Vũ trụ toán học Tegmark và IV. Tính tương đối của Tồn tại. Ngay vào đầu **Chương Một**, tác giả biện minh cho thấy *Phật là lý Duyên khởi*, là nguyên lý về cách thức vận pháp đồng thời câu khởi. Phật hay Duyên khởi được thông diễn theo nhiều phương thức khác nhau, chẳng hạn, như trong các diễn giải sau đây. Với tổ tín, muốn đồn ngộ thời phải tin quả quyết “Ta là Phật”. Địa vị sơ tâm phải là địa vị thành tựu đồn ngộ. Và câu “Ta là Phật” có nghĩa là “Ta là lý Duyên khởi”, và theo thuật ngữ Hoa Nghiêm, “Ta đồng nhất thể với Pháp giới”. Nếu theo Bồ tát Long Thọ, Duyên khởi được minh định đồng nghĩa với Không, thời “Ta là Phật” hàm ngụ sự thực chứng vạn hữu đều Không. Nếu Phật đồng nhất với lý Duyên khởi và mọi pháp hiện khởi đều do duyên sinh thời mọi pháp bản nguyên là Phật.

Duyên khởi không gì khác hơn là tính tương đối của tồn tại (the relativity of existence), thường được phát biểu là “hiện khởi tương y tương đối”. *Xét về mặt logic học*, tính tương đối của tồn tại phải sinh từ một tập hợp các tiên đề, chẳng phải là sự sáng tạo ex nihilo cái gì đó từ Không. Như vậy, *về mặt logic học*, Duyên khởi — ‘Cái này có thời cái kia có; cái này không thời cái kia không; cái này sinh thời cái kia sinh; cái này diệt thời cái kia diệt’ — là một *cấu trúc toán học*, nghĩa là, *những thực thể trừu tượng cùng với những quan hệ giữa chúng*. Nếu cường điệu tính cách cấu trúc toán học của Duyên khởi xét theo logic học, thời ta có thể nói: Duyên khởi hay Phật là Toán học.

Nhưng Phật và Pháp vốn là nhất như cho nên đạo Phật và Phật là một. Vậy có thể xướng lên, *về mặt logic học*, “Đạo Phật là Toán học”. Điều đó bao hàm luôn ý nghĩa “Vũ trụ là Toán học”, bởi vì Nhất thiết pháp là Vũ trụ và “Như Lai thuyết: Nhất thiết pháp giai thị Phật pháp” (Kinh Kim Cang).

Tưởng nên tìm hiểu thêm về cấu trúc toán học, một khái niệm tiêu chuẩn của logic toán học hiện đại theo Tegmark. Như được định nghĩa, một cấu trúc toán học là những thực thể trừu tượng cùng với những quan hệ giữa

chúng. Ví dụ quen thuộc: số nguyên và số thực. Ở đây, chúng ta xét cấu trúc toán học gọi là nhóm với hai phần tử, tức là, phép cộng modulo hai. Nó liên quan đến hai phần tử mà chúng ta có thể đánh dấu "0" và "1" thỏa mãn các quan hệ sau đây.

{

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$11 + 0 = 1$$

$$11 + 1 = 0$$

Hai mô tả tương tự (2) và (3):

$$e \times e = e$$

{

$$e \times a = a \quad (2)$$

$$a \times e = a$$

$$a \times a = e$$

và

{

Chẵn và chẵn thành chẵn

Chẵn và lẻ thành lẻ (3)

Lẻ và chẵn thành lẻ

Lẻ và lẻ thành chẵn

(1), (2) và (3) tuy nhìn khác nhau, nhưng nếu đồng nhất hóa "0" -> "e" -> "chẵn"; "1" -> "a" -> "lẻ" ; "+" -> "x" -> "và", "=" -> "==" -> "thành" - thời sẽ thấy chúng mô tả cùng một cấu trúc toán học, bởi vì bản thân các ký hiệu là chỉ đánh dấu chứ chẳng có ý nghĩa nội tại. Các thuộc tính nội tại duy nhất của các thực thể là những thuộc tính được thể hiện bởi các mối quan hệ giữa chúng.

Có nhiều phương thức tương đương mô tả cùng một cấu trúc, và một cấu trúc toán học đặc thù có thể định nghĩa như là một lớp tương đương các mô tả (equivalence class of descriptions). Ví dụ: Giả thuyết Vũ trụ Toán học (MUH = The Mathematical Universe Hypothesis) của Tegmark, tức là, thực tế vật lý ngoại tại mô tả bởi thuyết về Nhất thiết (TOE = Theory of Everything) là một cấu trúc toán học.

Nhưng thế giới vật lý của chúng ta không ngừng biến chuyển với thời gian trong lúc các cấu trúc toán học không thay đổi, chúng chỉ tồn tại. Vậy làm sao thế giới của chúng ta có thể là một cấu trúc toán học?

Einstein có thể giúp chúng ta trả lời những câu hỏi như vậy. Ông dạy rằng có hai phương thức tư lượng tương đương về thực tế vật lý của chúng ta: hoặc như một chốn 3- thứ nguyên gọi là *không gian* (space), nơi mà sự biến chuyển với thời gian, hoặc như một chốn 4- thứ nguyên gọi là *không-thời gian* (spacetime) chỉ đơn thuần tồn tại, bất biến, chẳng bao giờ được sinh ra và chẳng bao giờ bị hủy diệt. Hai phương thức ấy tương ứng với hai lối nhìn thực tế, một của con ếch và một của con chim (3.2 Cầm ... lại và tính toán đi!). Quan điểm của con chim là tổng quan ngoại bộ của một nhà vật lý học nghiên cứu cấu trúc toán học của thực tế vật lý giống như một con chim đang quan sát phong cảnh từ trên cao nhìn xuống. Quan điểm của con ếch là lối nhìn nội bộ của một quan sát viên sống trong thế giới cấu trúc mô tả, giống như một con ếch sống trong phong cảnh con chim quan sát.

Về diện toán học, không-thời gian là một không gian với bốn thứ nguyên, ba thứ nguyên đầu là của không gian, và thứ nguyên thứ tư là thời gian. Hãy lưu ý không-thời gian không tồn tại bên trong không gian và thời gian. Trái lại, không gian và thời gian tồn tại trong nó. Theo Tegmark, thực tế vật lý ngoại tại là một cấu trúc toán học, nghĩa là, theo định nghĩa, một thực thể trừu tượng, bất biến, tồn tại bên ngoài không gian và thời gian, cấu trúc toán học đó tương ứng với quan điểm của con chim về thực tế của chúng ta, vì vậy nó phải bao gồm không-thời gian, chứ không chỉ không gian (3.2 Cầm .. lại và tính toán đi!).

Liên hệ với Duyên khởi là Nguyên tắc Lý do đủ - ‘Không có gì xảy ra mà không có lý do đủ’ - và Câu hỏi Tồn tại nguyên thủy - ‘Tại sao phải có một cái gì đó, hơn là không có gì?’ - cả hai đều do Leibniz chế định. Heinrich biện minh cho thấy chỉ có *tương đối vật lý* (physical relativism) mới có thể giúp chúng ta trả lời thỏa đáng câu hỏi của Leibniz (4.2.1 Luận cứ Vị nhân cuối cùng).

Câu hỏi Tồn tại Nguyên thủy gây bối rối cho hầu hết các nhà vật lý học cũng như các nhà vũ trụ học. Vũ trụ học (thông trưởng hiện đại đưa ra một số kiến giải mới về vấn đề này. Vũ trụ khởi đầu từ một dao động lượng tử nhỏ. Một lượng nhỏ năng lượng ấy phần nào giống như năng lượng cất giữ trong một dây cung. Nguyên lý bất định Heisenberg (trong những khoảng thời gian đủ nhỏ cho phép vi phạm nguyên tắc bảo toàn năng lượng trong phút chốc. Cái bong bóng năng lượng ấy sau đó thông trưởng theo cấp số nhân và vũ trụ tăng trưởng đa số cấp lượng chỉ trong khoảnh khắc của một giây.

Stephen Hawking đưa ra một kiến giải nhằm giải đáp câu hỏi của Leibniz, cho rằng bởi vì có một định luật như sự hấp dẫn và vật lý học lượng tử, vũ trụ có thể và sẽ tự tạo ra từ không. Sự sáng tạo tự khởi là lý do có cái gì đó hơn là không có gì, tại sao vũ trụ tồn tại, tại sao chúng ta tồn tại. Khuyết điểm của kiến giải Hawking là toán học đó thực ra căn cứ trên thuyết tương đối rộng và vật lý học lượng tử, hai thứ này đâu phải là “không”. Vì thế, chẳng phải là sự sáng tạo *ex nihilo* cái gì đó từ không, mà nói cho đúng, phái sinh vũ trụ, ngay phút này, từ một tập hợp các tiên đề.

Theo Heinrich, *Những sự vật duy nhất có tính chất một cách khách quan là những sự vật khả dĩ chứng minh là chân chẳng sử dụng bất kỳ tiên đề nào và kinh nghiệm tự ý thức có thể được phái sinh một cách toán học từ tập hợp các tiên đề nào đó. Trên quan điểm của tính tự ý thức ấy, tồn tại toán học là tồn tại vật lý.*

Chương Hai bàn về sự kết nối giữa *Vật lý học* và *Toán học* trong khoa học nhận thức và đặt câu hỏi *Toán học được phát minh hay phát hiện?* Tâm con người được phú cho những cảm tri nguyên thủy bẩm sinh như là không gian, khoảng cách, vận động, biến cách, dòng thời gian, vật chất. Theo khoa học nhận thức, những khái niệm trừu tượng của toán học được dựng lên trong não từ những cảm tri nguyên thủy đó. Vì vậy, tất cả sự bao la của toán học, cùng với những định lý tốt đẹp của nó, trụ trong tâm, và chẳng ‘ở ngoài đó’.

Khác với toán học là một ngôn ngữ chính xác trong đó những phát biểu đúng có thể được chứng minh khởi đầu từ một tập hợp tiên đề, sử dụng logic, vật lý học là một khoa học thực nghiệm (do đó, tùy thuộc kỹ thuật học) về thế giới chúng ta quan sát, nơi mà các thí nghiệm ghép đôi với những bước nhảy vọt lớn của sự thống nhất khái niệm.

Trong vật lý học, kết quả thực nghiệm được mô tả theo phương thức các khái niệm cụ thể - những khái niệm này cũng được dựng lên từ những cảm tri nguyên thủy của chúng ta.

Vật lý học lý thuyết được xét như là một ngành ứng dụng của toán học, các tiên đề của nó được thi thiết là do các quan sát thế giới vật lý làm động cơ thúc đẩy. Trong vật lý học, các thí nghiệm có tầm quan trọng cơ bản, không giống như trong toán học, mục tiêu là tìm cầu các quan hệ logic và ưu nhĩa giữa các khái niệm trừu tượng do tâm sáng tạo.

Mục đích của vật lý học lý thuyết là mô tả tính tuần quy thực nghiệm quan sát được của thế giới vật lý theo một phương thức rõ ràng, chính xác và logic. Não sử dụng những khái niệm trừu tượng được xác định rõ ràng mà tâm đã ẩn dụ hóa từ những cảm tri nguyên thủy của chúng ta. Cụ thể và trừu tượng đều phái sinh từ cái nguyên thủy cho nên sự kết nối giữa vật lý và toán không có gì huyền bí, nhưng tự nhiên. Sự kết nối đó được dựng lên trong não con người, nơi mà một tập hợp con nhỏ bé của toán học nhân loại rộng lớn được trang bị để mô tả tính tuần quy của vũ trụ.

Trong vật lý học, sử dụng toán học chỉ đến vào giai đoạn sau, khi chúng ta tìm kiếm một ngôn ngữ chính xác để mô tả các hiện tượng vật lý được quan sát. Luôn luôn, thí nghiệm và khái niệm trước, và sau đó mới lập công thức toán học. Toán học mà các nhà vật lý học sử dụng phần lớn tương đối đơn giản, chẳng bao giờ đã động đến sự lựa chọn điều kiện dầu! Toán học mô tả các định luật vật lý học cần được bổ sung bởi những điều kiện dầu. Những gì định đoạt những điều kiện ban đầu của vũ trụ? Có những quy luật toán học cho chúng hay không? Chúng ta không biết, chưa biết được.

Toán học giống như vật lý học bắt rễ từ những cảm tri nhân loại nguyên thủy. Với một dị biệt đáng kể: trong toán học, chẳng có chỗ cho vật chất (chất liệu), và mở rộng ra, cho ánh sáng! Đối với chúng ta, đó là sự khác biệt to lớn giữa vật lý học và toán học, từ đó tất cả các dị biệt khác nảy mầm.

Đoạn sách trong Phần này lược trình lịch sử vật lý học cùng với cả một lâu đài nguy nga toán học được cung cấp với những định lý đẹp và vĩ đại, và sự thống nhất thông qua số học, đại số, hình học, và giải tích. Toán học tưởng như không phải là một nơi làm thí nghiệm.

Một tính năng thống nhất của toán học hiện nay là có thể hoàn toàn đặt cơ sở trên một xử lý thuyết tập hợp theo phương thức tiên đề, và phái sinh từ một tập hợp tiên đề, chẳng hạn ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice). Nhưng tại sao các tiên đề đặc thù ấy; đặc biệt tại sao Axiom of Choice (Tiên đề Chọn)? Gödel chỉ cho biết nếu ZF nhất trí thì ZFC nhất trí. Một số toán học gia không ưa Axiom of Choice, nhưng phần đông cho rằng Tiên đề Chọn làm toán học phong phú hơn. Đối với chúng ta, tự bản thân của những phong cách như vậy chứng tỏ *toán học là một kinh doanh của con người, chứ chẳng phải một chân tính Plato phổ biến 'ở ngoài kia'.*

Căn cứ trên những *cảm tri nguyên thủy* chặt chẽ của con người như đối tượng, kích thước, hình dạng, mẫu hình và biến chuyển, loài người dựng lên những khái niệm *trừu tượng* như số, điểm, tuyến, lượng vô cùng bé, vô hạn, phương trình, nhóm, độ cong, và nhiều hơn thế nữa, trên đó tính bao la của toán học được xây dựng. Cũng cùng những cảm tri nguyên thủy ấy phát sinh những khái niệm *cụ thể* về vật lý học thực nghiệm như lực, khối lượng, chuyển động, diện tích, phép quay, và những khái niệm toán/vật lý học như trường và đối xứng. (Chúng ta không phân biệt giữa những khái niệm trừu tượng của vật lý học lý thuyết và toán học). Trong khoa học nhận thức, trong ứng dụng của nó vào toán học, nhằm mục đích chứng minh theo phương thức khoa học, các khái niệm trừu tượng của toán học được xây dựng trên các cảm tri nguyên thủy, sử dụng những gì chúng ta được biết như *án dụ khái niệm* (conceptual metaphor). Khi nào chúng ta tìm cách mô tả chính xác những tương hỗ quan hệ giữa những khái niệm cụ thể cơ sở của vật lý học thực nghiệm, tất nhiên chúng ta phải nương vào những khái niệm trừu tượng của toán học. Vì cả cái cụ thể và cái trừu tượng cùng được xây dựng trên cùng cái nguyên thủy, điều đó phá bỏ tính chất thần bí của sự thành công phi thường của toán học trong vật lý học.

Theo các nhà khoa học, toán học quả có một năng lực phi thường. Xét kỹ, chúng ta thấy sự thành công của toán học trong việc giải thích thế giới quanh chúng ta hiện có hai diện, một diện gọi là “tích cực”. Khi các nhà vật lý học lạc đường đi vào mê cung của tự nhiên, họ dùng phương thức toán học dè dặt sáng bước đi của họ. Newton quan sát một quả táo rơi, mặt trăng và thủy triều trên bãi biển, chẳng phải là những phương trình toán học. Thế mà ông ta bằng cách nào đó có thể trích ra từ tất cả những hiện tượng tự nhiên ấy những định luật toán học của tự nhiên minh bạch, ngắn gọn, và chính xác đến mức khó tin. Tương tự như vậy, James Clerk Maxwell (1831-79) mở rộng cái khuôn khổ vật lý học cổ điển để bao hàm *tất cả* những hiện tượng điện và từ được biết đến vào những năm 1860. Ông thực hiện điều đó thông qua chỉ bốn phương trình toán học. Thuyết tương đối rộng của Einstein thậm chí đáng kinh ngạc hơn: đó là một ví dụ hoàn hảo của một thuyết toán học chính xác phi thường, tự hợp, về cái gì đó cơ bản như cấu trúc không gian và thời gian.

Diện thứ hai, diện “tiêu cực”, là diện của tính hiệu dụng huyền bí của toán học. Khái niệm và quan hệ được các nhà toán học tham tác chỉ trên phương diện lý tính thuần túy, tuyệt đối chẳng nghĩ đến ứng dụng, biến thành sau nhiều thập niên (hay đôi khi nhiều thế kỷ) những giải pháp bất ngờ cho những vấn đề đặt cơ sở trong thực tế vật lý! Chẳng hạn, lấy trường hợp nhà toán học khác thường người Anh, Godfrey Harold Hardy (1877-1947), rất tự hào về sự thật là công việc của ông bao gồm không có gì ngoại trừ toán học thuần túy. Ông tưởng rằng toán học của ông thuần túy lý thuyết, chẳng phải và không thể đem ứng dụng, mà chỉ để thưởng thức cái đẹp của nó. Nhưng ông sai rồi! Một trong các công trình của ông tái sinh với danh hiệu định luật Hardy-Weinberg, một nguyên lý cơ bản được các nhà di truyền học sử dụng để nghiên cứu tiến trình phát triển của dân số. Ngay cả thuyết trừu tượng về các số (Number theory) của ông đã được nhà toán học người Anh, Clifford Cocks, sử dụng để sáng tạo một bước đột phá trong mật mã (cryptography): sự phát triển của mã (the development of code). Các mã là rất cần thiết cho truyền thông quân sự, hoàn toàn không đúng với phát biểu của Hardy: “chưa ai khám phá được bất cứ mục đích chiến tranh nào do lý thuyết số phục vụ.” Như vậy, ngay cả Hardy, một trong các nhà phê bình lớn tiếng chỉ trích toán học ứng dụng, cũng bị kéo vào sự sản sinh các thuyết toán học hữu dụng.

Còn rất nhiều trường hợp toán học như vậy, ngỡ là chỉ lý thuyết thuần túy đầu ngờ một thời gian về sau biến thành công cụ cần thiết để giải thích những khám phá hay sáng tạo mới. Ví dụ: hình học Riemann, thuyết Nhóm,

khái niệm những mẫu hình toán học đối xứng, V..V...

Do kinh nghiệm với hình học Euclid, chúng ta có thể khởi đầu từ bất kỳ tập hợp tiên đề nào tùy thích, với điều kiện là chúng nhất trí tự bản thân và dung nạp lẫn nhau, và tìm ra những hậu quả logic của chúng. Theo phương thức đó, chúng ta sáng tạo một ngành toán học. Các định nghĩa và định đề chủ yếu chẳng phải được mang lại bằng kinh nghiệm, cũng chẳng phải là tất yếu của tư tưởng. Nhà toán học hoàn toàn tự do, trong giới hạn của trí tưởng tượng của mình, dựng lập những thể giới mình thích. Những gì nhà toán học phải tưởng tượng là một vấn đề của tính khí bất thường của mình. Bằng cách ấy, nhà toán học không khám phá những nguyên tắc cơ bản của vũ trụ, cũng không trở thành quen biết những ý niệm về Thượng Đế. Nếu thông qua thực nghiệm, ông ta tìm ra những tập hợp thực thể tuân theo cùng chung phương án logic như những thực thể toán học của ông, nhiên hậu ông đã áp dụng toán học của ông vào thế giới bên ngoài: ông đã sáng tạo một ngành khoa học. Tại sao thế giới bên ngoài phải tuân theo những định luật logic, tại sao, trong thực tế, khoa học khả thể, khoa học có thể được, đó là hai câu hỏi không dễ gì giải đáp. Tuy nhiên, có dấu hiệu trong những thuyết vật lý học hiện đại khiến một số khoa học gia nghi ngờ liệu vũ trụ cuối cùng sẽ biến thành lý tính hay không, liệu các hiện tượng tự nhiên phải tuân theo bất kỳ hình học đặc biệt nào không.

Vì toán học là một hoạt động hoàn toàn tự do như nói trên, không bị điều kiện bởi thế giới bên ngoài, nên được gọi là một nghệ thuật thay vì một khoa học. Toán học, phần lớn, là một cam kết tập thể. Đơn giản hóa và thống nhất hóa duy trì sự cân bằng với sự phát triển và mở rộng không ngừng nghỉ. Chúng hiển thị bất đoạn một sự thống nhất phi thường mặc dầu toán học quá rộng để bị một cá nhân khổng chế.

Ngang đây, xin kể một chuyện tình toán học. Đây là câu chuyện của Edward Frenkel, một thần đồng toán học người Nga, trở thành giáo sư tại Harvard năm 21 tuổi, hiện nay dạy tại Berkeley và theo chủ nghĩa Plato. Câu chuyện tình toán học của ông được ông kể lại trong cuốn hồi ký mới rất hấp dẫn của ông: *Tình yêu và Toán học* (Love & Math). Lúc còn nhỏ, ông mê vẻ đẹp của toán học như một coup de foudre. Ở tuổi thiếu niên, khi thực hiện một khám phá toán học mới, thời giống như nụ hôn đầu. Ngay cả khi những hi vọng của ông về nghề nghiệp bị chính sách Xô viết chống Do Thái làm khô héo, ông được sự nâng đỡ của niềm đam mê và niềm vui làm toán học. Và ông muốn mọi người cùng chia sẻ với ông niềm đam mê và niềm vui đó.

Trong câu chuyện này, có một thách thức. Toán học là trừu tượng và khó khăn, vẻ đẹp của nó dường như không thể tiếp cận được với hầu hết chúng ta. Khoảng giữa thế kỷ 19 một cuộc cách mạng đã xảy ra trong toán học: trọng điểm chuyển từ tính toán giới hạn trong khoa học tới sự tự do sáng tạo các cấu trúc mới, ngôn ngữ mới. Các chứng minh toán học, với tất cả logic nghiêm cẩn của chúng, coi giống như những tự sự, tình tiết và tiểu tình tiết, khúc chiết và quyết định. Đó là thứ toán học phần đông chưa bao giờ thấy.

Để cấp cho người đọc một cái nhìn thoáng qua tình yêu của ông với vẻ đẹp của toán học cao hơn, Frenkel đi thẳng vào công trình phát triển toán học đầy hứng khởi trong nửa thế kỷ sau: *Chương trình Langlands* (Langlands Program). Chương trình này được Robert Langlands, một toán gia người Canada, ở Institute for Advanced Study tại Princeton (kế thừa Văn phòng cũ của Einstein), thiết lập vào những năm 1960 nhằm trở thành một học thuyết thống nhất rộng lớn của toán học. Hầu hết các nhà toán học chuyên nghiệp không hề hay biết về Chương trình Langlands cho đến những năm 1990, khi chương trình này hiện ra trong tiêu đề giải quyết Định lý Cuối cùng của Fermat (Fermat's Last Theorem).

Kể từ đó, phạm vi của Chương trình đã mở rộng ra ngoài toán học thuần túy tới biên giới của vật lý học lý thuyết. Frenkel có lẽ là người đầu tiên cố gắng giải thích Chương trình Langlands - theo ông, “mã nguồn của tất cả các môn toán” - cho những độc giả không có cơ sở toán học. Vì thế, sách của ông là ba sự thật: một lá thư tình theo khuôn Plato gửi cho toán học; một nỗ lực giải thích cho ngoại hành một số ý niệm về một vở kịch-đang-tiến hành tối rộng lớn; và một giải thích tự truyện, khi thời cổ vũ khi thời khôi hài, ngay chính ông đã làm thế nào để trở thành một diễn viên lãnh đạo trong vở kịch đó.

Hơn hết, tình yêu của Frenkel đối với thế giới Plato toán học chính là chủ trương của Frenkel trong *Tình yêu và Toán học* thường được gọi là chủ nghĩa Plato toán học (Mathematical Platonism). Nên biết có nhiều loại Platonism, và cũng có nhiều cách thông diễn toán học. Theo Frenkel, cái thế giới thường được gọi thế giới Plato toán học là nơi cư trú các khái niệm và ý niệm toán học. Plato là triết gia Hy Lạp đầu tiên tranh luận rằng các thực thể toán học đều độc lập với những hoạt động lý tính của chúng ta. Nhà vật lý toán học rất được hoan

nghe, Roger Penrose, viết trong tập sách *The Road to Reality* (Con Đường đến Thực tế) của ông, những tuyên bố toán học thuộc về thế giới Plato toán học chính là những khẳng định đúng một cách khách quan. Bảo rằng một tuyên bố toán học nào đó có một tồn tại theo khuôn Plato, tức nó đúng theo một nghĩa khách quan. Giống vậy, các ý tưởng toán học có một tồn tại theo khuôn Plato tại vì chúng là những ý tưởng khách quan.

Frenkel, giống Penrose, tin rằng thế giới Plato toán học tách rời khỏi cả hai thế giới, vật lý và tâm thức. Penrose chỉ cho thấy chủ trương thông diễn một cách chủ quan tất sẽ nhanh chóng dẫn chúng ta tới những khẳng định hiển nhiên vô nghĩa, nhấn mạnh tính năng độc lập của tri thức toán học với bất kỳ hoạt động nào của con người.

Thế giới Plato toán học cũng tồn tại độc lập với thực tế vật lý. Ví dụ: Thiết bị của thuyết trường quy phạm (gauge theory) ban đầu được các nhà toán học phát triển chẳng cần quy chiếu vật lý học. Trong thực tế, chỉ có ba trong số các mô hình mô tả các lực của tự nhiên (lực điện từ, yếu, và mạnh). Chúng tương ứng với ba nhóm Lie cụ thể (nhóm vòng tròn, $SU(2)$, và $SU(3)$, theo thứ tự), mặc dầu có một thuyết trường quy phạm cho bất kỳ nhóm Lie nào. Có rất nhiều ví dụ khác về những lý thuyết toán học phong phú không trực tiếp liên quan đến bất kỳ loại thực tế vật lý nào.

Nguồn gốc của những khả năng vô hạn của tri thức toán học chính là *tính khách quan* của nó. Tính này phân biệt toán học với bất kỳ loại nỗ lực nào khác của con người. Sự hiểu biết những gì ở đằng sau tính khách quan ấy sẽ soi sáng những bí ẩn sâu sắc nhất của thực tế vật lý, ý thức, và những tương hỗ quan hệ giữa chúng. Nói cách khác, càng gần thế giới Plato toán học, chúng ta càng có nhiều năng lực hiểu biết thế giới quanh ta và vị trí của chúng ta trong đó.

Sau câu chuyện tình toán học, đã đến lúc bàn về hai câu hỏi sau đây. Câu đầu: Toán học được phát minh hay phát hiện? Câu thứ hai: Những gì đã cấp cho toán học những quyền năng giải thích và dự đoán? Phương thức huyền bí toán học nắm bắt thế giới tự nhiên đã thu hút sự chú ý đặc biệt của các nhà khoa học. Ở cốt lõi của huyền bí này là một luận điểm mà các nhà toán học, vật lý học, triết học và khoa học nhận thức đã có trong nhiều thế kỷ: *toán học là một tập hợp công cụ được sáng tạo, như Einstein tin tưởng? Hay toán học hiện tồn tại trong một cảnh giới triêu tượng nào đó và con người chỉ khám phá những tính chân của nó?*

Theo Mario Livio, nếu chỉ đơn giản hỏi toán học là được phát minh hay phát hiện, chúng ta bỏ quên khả năng của một câu trả lời phức tạp: *cả sáng tạo và khám phá đóng một vai trò quan trọng*. Cả hai giải thích tại sao toán học thao tác quá tốt đẹp. Tuy nhiên, loại bỏ phép nhị phân giữa sáng tạo và khám phá cũng chưa hoàn toàn giải thích tính hữu hiệu bất hợp lý của toán học. Toán học thực sự là một kết hợp phức tạp các phát minh và phát hiện. Câu hỏi thứ hai trở nên phức tạp hơn. Chắc chắn sự chọn lựa các chủ đề chúng ta giải quyết theo phương thức toán học đóng một vai trò quan trọng trong tính hữu hiệu được biết của toán học. Nhưng chung cuộc toán học không thao tác nếu không có những tính năng phổ biến cần phải khám phá. Chúng ta có thể hỏi: Tại sao chung cuộc có những luật phổ biến của tự nhiên? Hay hỏi tương đương, tại sao vũ trụ của chúng ta bị chi phối bởi một số đối xứng? Chưa ai tìm ra được lời giải đáp các câu hỏi ấy, tuy nhiên, có lẽ cần ghi nhận rằng trong một vũ trụ chẳng có những thuộc tính nói trên, tính phức tạp và cuộc sống sẽ chẳng bao giờ xuất hiện, và chúng ta sẽ không có mặt ở đây để đặt câu hỏi.

Bây giờ bước qua **Chương Ba: Vũ trụ Toán học Tegmark**. Xin ghi ra đây những đề tài được bàn đến trong Chương đó. Trước hết là (3.1) cuộc nói chuyện của Tegmark tại The Bell House, Moravian College, Bethlehem, PA, ngày 15 tháng Giêng 2014, căn cứ trên tập sách 'Our Mathematical Universe'. Đề tài kế tiếp là (3.2) Bài: *Câm .. lại và tính toán đi!* (Shut up and calculate), Tegmark chủ trương tiếp cận vật lý học một cách cực đoan, trong đó thực tế vật lý ngoại tại được giả thiết là thuần túy toán học. Tiểu luận trình bày giả thiết "tất cả chỉ là phương trình" và thảo luận những hàm ý của nó. Sau đó là (3.3) Bài: *Ý thức như là một trạng thái vật chất* (Consciousness as a State of Matter), với năng lực xử lý thông tin đặc biệt. Tegmark đề xuất bốn nguyên tắc cơ bản có thể phân biệt vật chất ý thức với những hệ vật lý khác như ba chất rắn, lỏng và khí: thông tin (information), tích hợp (integration), độc lập (independence) và động lực học (dynamics). Ý niệm này lấy cảm hứng từ thuyết thông tin tích hợp (integrated information theory = IIT) của nhà thần kinh học Giulio Tononi, University of Wisconsin in Madison. Theo IIT, muốn chứng minh cái gì đó có ý thức, thời phải chứng minh hai đặc điểm: (1) một tồn thể có ý thức phải có khả năng lưu trữ, xử lý và thu hồi một lượng lớn thông tin; (2) thông tin này phải được tích hợp trong một toàn thể thống nhất, không thể chia thành các phần độc lập. Thuận theo IIT, Tegmark đề xuất hai loại vật chất. Một, "computronium", đáp ứng các yêu cầu của đặc điểm thứ nhất. Hai,

“perceptronium”, làm tất cả các điều trên, nhưng theo phương thức tạo nên toàn bộ không thể phân chia, đúng như Tononi mô tả. Kế tiếp là (3.4) trình bày tư tưởng và công trình của Tegmark. (3.5) mô tả cuốn sách “Our Mathematical Universe” của Tegmark. (3.6) ghi lại những bình luận về cuốn sách ấy. (3.7) và (3.8) đặt nghi vấn, theo thứ tự, “Được làm bằng toán học?” và “Có chăng những vũ trụ song song?” (3.9) đặc biệt dành cho bình luận cuốn “Our Mathematical Universe” của Jeremy Butterfield, một triết gia tại University of Cambridge. Cuối cùng, (3.10) Tegmark giải đáp một số thắc mắc về ý tưởng thế giới vật lý của chúng ta là một đối tượng toán học không lồ.

Chương Bốn, chương cuối cùng của tập sách “Đạo Phật là Toán học”, bàn về *tính tương đối của tồn tại*. Nói đúng hơn, chương này trình bày ý tưởng ‘*Tương đối Vật lý*’ (Physical Relativism) như một cách thông diễn sự tồn tại (an Interpretation of Existence) của Stuart B. Heinrich.

Mặc dầu vật lý học hiện đại thành công trong việc xây dựng các lý thuyết toán học có thể dự đoán kết quả các thí nghiệm quy mô lượng tử, vẫn có vấn đề là sự thông diễn vật lý các lý thuyết này không ngừng gây nhiều tranh biện nghị luận. Hầu giải quyết vấn đề, Heinrich đưa ra những luận cứ logic (4.2) để hỗ trợ một cách thông diễn mới về sự tồn tại mà ông gọi là *tương đối vật lý*. Tương đối vật lý đề xướng chẳng những một trả lời cho câu hỏi của Leibniz, nhưng cũng còn cung cấp một cách thông diễn tính ngẫu nhiên trong vật lý học lượng tử. Rồi từ đó đi đến sự phân biệt rõ ràng giữa tồn tại vật lý học và tồn tại toán học, cho phép chúng ta ước lượng quan điểm “it from bit” của Wheeler.

Cuối cùng, phần ‘4.3 Bác bỏ các phản bác thông thường’ tập trung vào việc bác bỏ các phản bác định lý bất toàn của Gödel -Kurt Gödel- và bàn đến lập luận đáp ứng Hữu thần luận.

Kết luận cơ bản của ý tưởng tương đối vật lý là các quan sát viên tự ý thức có thể tồn tại trong các hệ tiên đề chẳng có biểu hiện khách quan, và sự khác biệt giữa một vũ trụ thực và một vũ trụ trừu tượng được định nghĩa theo toán học chỉ là một lối nhìn.

Tương đối vật lý không phải là một lý thuyết về vật lý học bởi vì nó không đưa ra các phát biểu khả chứng nghiệm. Thay vào đó, nó là một cái khung để thông diễn ý nghĩa của sự tồn tại và vai trò của vật lý học. Mặc dầu không đưa ra các dự đoán cụ thể, tương đối vật lý là một chủ trương thích đáng bởi vì nó cung cấp các câu trả lời đơn giản cho một số câu hỏi triết học sâu sắc nhất về sự tồn tại mà các nhà vật lý học đã phải vật lộn với: nó chỉ cách tránh nghịch lý trong giải thích sự tồn tại của chúng ta; nó chấp thuận một ứng dụng rộng lớn hơn phương cách lý luận vị nhân để mô tả các tiên đề cơ bản của vật lý học; nó cho phép chúng ta trả lời câu hỏi của Leibniz và nó cho phép chúng ta mô tả những ý tưởng cốt lõi của vật lý học, như khái niệm không- thời gian. Hơn nữa, dựa trên duy chỉ đơn thuần logic của tính nhất trí, tương đối vật lý không đòi hỏi chứng minh bằng thực nghiệm.

Bài Kệ Hồi Hưởng

Nghĩa lý rộng sâu của chư Phật
Tôi nay tổng quát nói đã rồi
Nguyễn đem công đức về Pháp tánh
Tất cả chúng sanh đều được lợi.

(*Phật Pháp rộng sâu rất nhiệm màu, Trăm nghìn muôn kiếp khó tìm cầu, ... học và hành Phật Pháp thật tinh tấn, làm sáng tỏ nghĩa lý Như Lai thâm diệu. Nam mô Bốn sư Thích Ca Mâu Ni Phật!*) _(_)_

Tương đối Vật lý

Chương I: Đạo Phật là Toán học

Chương II: Vũ trụ Toán học

Chương III: Vũ trụ Toán học Tegmark

Chương IV: Tính Tương đối của Tồn tại

Chương I: Đạo Phật là Toán học

1.1 Phật là Lý Duyên khởi

1.2 Câu hỏi Tồn tại Nguyên thủy

Đạo Phật là Toán học

• * ® * •

Trong bài ‘Phật giáo là “*in như sự thật*”’, Thầy Trí Quang viết: “đặc điểm của Phật giáo là “*In như sự thật*”: Lý thuyết, phương pháp cùng kết quả đều hợp lý, đều như thật. Phật giáo không chen chủ quan của mình vào trước hay trong khi suy nghiệm sự thật, và chân lý của đạo Phật là lời kết luận sau sự suy nghiệm trung thực ấy. Đạo Phật chỉ thấy và chỉ nói những sự thật mà sự vật có, không thêm không bớt. Đạo Phật, nhân đó, cảm đoán những tín ngưỡng và những hành động không phát sinh từ sự hiểu biết như thật, luôn theo, đạo Phật không công nhận những kết quả của tín ngưỡng mê mờ, hành động manh động là hợp lý. Cho nên đạo Phật cũng gọi là đạo Như Thật.” Nhưng Phật là gì?

1.1 Phật là Lý Duyên khởi

Trong Phật giáo tiếng “Phật” có rất nhiều nghĩa. Tuy nhiên ở đây tiếng ấy có thể định nghĩa y cứ trên hai câu kinh: “Thế Tôn đã nói như sau, ‘Ai thấy được lý duyên khởi, người ấy thấy được Pháp; ai thấy được Pháp, người ấy thấy được lý duyên khởi.’” (*Trung Bộ*, kinh 28 *Đại kinh đầu chấn voi*), và “Này Vakkali, ai thấy Pháp, người ấy thấy Ta. Ai thấy Ta người ấy thấy Pháp. Này Vakkali, đang thấy Pháp là thấy Ta. Đang thấy Ta là thấy Pháp.” (*Tương Ưng Bộ*, Phẩm Trưởng lão. s 22, 87) Hai câu này hợp lại dẫn đến kết luận **Phật là lý duyên khởi, là nguyên lý về cách thức vạn pháp đồng thời câu khởi**. Ví dụ: Có tổ tín, muốn đồn ngộ thời phải tin quả quyết “Ta là Phật”. Địa vị sơ tâm phải là địa vị thành tựu đồn ngộ. Và câu “Ta là Phật” có nghĩa là “Ta là lý Duyên khởi”, và theo thuật ngữ Hoa Nghiêm, “Ta đồng nhất thể với Pháp giới”. Nếu theo Bồ tát Long Thọ, Duyên khởi được minh định đồng nghĩa với Không, thời “Ta là Phật” hàm ngụ sự thực chứng vạn hữu đều Không. Nếu Phật đồng nhất với lý Duyên khởi và mọi pháp hiện khởi đều do duyên sinh thời mọi pháp bản nguyên là Phật.

Như vậy, ở đây, sự thật về tồn tại (existence) hay thực tế (reality) là định lý y tánh duyên khởi pháp (pratītya-samutpāda = lý Duyên khởi) mà đức Phật đã chứng nghiệm trong 21 ngày ngồi tại cội Bồ đề. Duyên khởi có thể hiểu là ‘hiện khởi trong sự hỗ tương lệ thuộc’ hay ‘do các duyên phối hợp mà pháp sinh khởi’. Phần đầu của tên (pratītya) loại bỏ tà kiến chấp thường, vì pháp có là do các duyên phối hợp cho nên không thường hằng. Phần sau (samutpāda) ngăn chặn tà kiến chấp đoạn, vì có sự sinh khởi các pháp khi duyên hội đủ. Cả hai phần gộp lại biểu thị Trung đạo, nghĩa là không chấp thường không chấp đoạn.

Một cách giải thích khác: ‘Toàn bộ y duyên tánh này tác động hỗ tương lệ thuộc, khởi lên những pháp đồng đẳng với nhau.’ Như vậy, sự vật trong vũ trụ sinh khởi không do một quyền năng siêu nhiên như Thượng Đế. Vũ trụ không phải là hơi thở, là một giấc mộng của đấng Phạm Thiên (Brahman), nghĩa là vạn vật không phát sinh từ một Nguyên nhân Tối sơ, một Bản thể tuyệt đối có tính chất thường tịch, vô sinh, và vô trụ, đồng nhất với tự thể (ātman) tức căn đề bất diệt của hiện tượng con người. Tất cả không phát xuất từ một nguyên nhân cho nên vạn hữu nhất định xuất hiện do nhiều nhân. Nói khác, tất cả đều là sản phẩm do hỗ tương lệ thuộc, hiện hữu quan hệ trong tiến trình nhân duyên.

Đúng hơn, khái niệm Duyên khởi là một khái niệm về Không, tại vì không có một cái gì vượt ra ngoài (siêu nhiên), nằm bên trong (bản thể), hay ở khoảng giữa (đối thiên trung) các hỗ tương lệ thuộc. Không ở đây không phải khái niệm ‘không’ đối đãi với khái niệm ‘có’. Không ở đây là thực tại của vạn hữu vượt thoát mọi khái niệm của nhận (thức thông thường, là một tấm vải trên đó duyên sinh tô vẽ những bức họa vô cùng sắc sảo. Như thế, Không đến trước nhưng không phải trước trong thời gian vì thời gian giả định một chuỗi duyên sinh. Cái đến trước có nghĩa là cái căn bản. Khi người ta có thể nghĩ đến duyên sinh hay tương đối tính được, là vì Không đã sẵn trong chúng. (D. T. Suzuki, Thiền luận. Tập Hạ) Câu cuối diễn tả cùng một ý nghĩa với khẩu quyết lòng danh của Bồ tát Long Thọ: “Dĩ hữu Không nghĩa có/ Nhất thiết pháp đắc thành/” (trong bài tụng Trung luận XXIV. 14). Dịch thoát: ‘Mọi pháp do Không mà có’ hay “Các pháp phải Không (vô tự tính) thời mới có thể hiện hữu”. Vì do duyên sinh sự hữu của vạn vật lệ thuộc nhân duyên, nghĩa là sự hữu không có yếu tính quyết định nên toàn là giả hữu. Đối với những sự vật của thế giới thường nghiệm, sự giả hữu của chúng tùy thuộc vào nhân duyên nên

không thể có tự tính mà hiện hữu được. Điều này cho thấy câu nói của ngài Long Thọ, ‘Phải Không mới Có’, không có gì đáng gọi là nghịch lý.

Duyên khởi không gì khác hơn là **tính tương đối của tồn tại** (the relativity of existence), thường được phát biểu là **‘hiện khởi tương y tương đối’**. Xét về mặt logic học, tính tương đối của tồn tại phải sinh từ một tập hợp các tiền đề, chẳng phải là sự sáng tạo ex nihilo cái gì đó từ Không. Như vậy, về mặt logic học, **duyên khởi là một cấu trúc toán học**, nghĩa là, *những tồn thể trừu tượng cùng với những quan hệ giữa chúng*. Nếu cường điệu tính cách cấu trúc toán học của Duyên khởi xét theo logic học, thời ta có thể **nói: Duyên khởi hay Phật là Toán học**.

Tuy nhiên ai cũng biết rằng Phật giáo lấy đức Phật làm trung tâm để phát khởi và cũng lấy Phật làm trung tâm để triển khai.¹ Do đó, đối với nền giáo lý của Phật giáo, bất luận khảo sát về bộ môn nào, nếu không căn cứ vào nhân cách và sự tự giác của đức Phật thì quyết không thể nào hiểu được chân ý nghĩa của nó: đó là một quy tắc nhất định. Nếu nói theo sự tự giác của đức Phật thì Phật giáo là kết quả cái trí “vô sư tự ngộ” của đức Phật, nghĩa là, Phật giáo được thành lập bởi cái kết quả của lời nói và việc làm của đức Phật, cho nên, nói đến Phật giáo mà lìa xa đức Phật thì mất hẳn cái bảo chứng đệ nhất về thỏa đáng tính thể nghiệm. Đó là lý do tại sao **Phật và Pháp vốn là nhất như**. Đứng trên lập trường Phật Pháp nhất như, đạo Phật và Phật là một. Vậy có thể xướng lên, về mặt logic học, **“Đạo Phật là Toán học”**. Điều đó bao hàm luôn ý nghĩa **“Vũ trụ là Toán học”**, bởi vì Nhất thiết pháp là Vũ trụ và “Như Lai thuyết: **Nhất thiết pháp giai thị Phật pháp**” (Kinh Kim Cang).

Trong tập Luận giải Trung luận Tánh khởi và Duyên khởi (2003) có đề cập tài năng toán học của đức Phật khi đem “thể gian nhập vào nghĩa số lượng mà đức Phật đã biết”, tài năng mà Phổ diệu kinh (Lalitavistara) cũng kể lại trong một cuộc thi đếm số lượng Ngài đã thắng giải, đến độ vị giám khảo phải bái phục. Nay xin trích ra trong phần Chú thích đoạn kinh ấy bằng Anh ngữ như một phụ lục.²

1.2 Câu hỏi Tồn tại Nguyên thủy

Trong quá trình lịch sử hiện đại, chúng ta thấy những tiến bộ trong sinh học, hóa học, vật lý học và vũ trụ học về một bức tranh rõ ràng hơn về cách *như thế nào* (how) chúng ta xuất hiện tồn tại trong vũ trụ này. Tuy nhiên, mặc dầu tất cả những tiến bộ đó, dường như chúng ta không tiến bộ thực tế chút nào đối với việc trả lời câu hỏi căn bản *tại sao?* (why?).

Năm 510 BCE trước CN, Parmenides lý luận cho rằng *ex nihilo nihil fit*, “không có gì đến từ không có gì”, nghĩa là, vũ trụ tại hiện tại bao hàm một vũ trụ vĩnh hằng chẳng có thời điểm cụ thể của sáng tạo. Các triết gia Hy Lạp về sau, như Aristotle và Plato, chia sẻ quan điểm ấy, nhưng không thực sự trả lời câu hỏi. Năm 1697, Leibniz³ tìm kiếm **“một lý do đầy đủ tại sao phải có một thế giới bất kỳ nào hơn là không có.”** Ông tuyên bố 4, **“không có gì xảy ra mà không có lý do đủ,”** câu này bây giờ được biết như là *Nguyên tắc Lý do đủ* (PSR=Principle of Sufficient Reason), và ông tổng quát hóa câu hỏi căn bản: **“tại sao phải có một cái gì đó, hơn là không có gì?”**, câu này bây giờ được biết như là *Câu hỏi Tồn tại Nguyên thủy* (PEQ=Primordial Existence Question).

Câu hỏi Tồn tại Nguyên thủy gây bối rối cho hầu hết các nhà vật lý học cũng như các nhà vũ trụ học. Richard Dawkins gọi đó là một “câu hỏi tìm kiếm đòi hỏi phải có một câu trả lời giải thích”⁵, và Sam Harris bảo rằng “bất kỳ người trung thực trí tuệ nào cũng sẽ thừa nhận họ không biết tại sao vũ trụ tồn tại. Các nhà khoa học, tất nhiên, sẵn sàng thừa nhận không biết gì về chuyện ấy.”⁶

Vũ trụ học thông trưởng (= thông hóa bành trưởng; inflationary cosmology) hiện đại đưa ra một số kiến giải mới về vấn đề này. Một thuộc tính sinh khởi (generic property) của phép thông trưởng là vũ trụ khởi đầu từ một dao động lượng tử nhỏ⁷. Theo Vilenkin⁸, “một lượng nhỏ năng lượng chứa trong cái độ cong (ban đầu) ấy, phần nào giống như năng lượng cất giữ trong một dây cung. Nguyên lý bất định Heisenberg trong những khoảng thời gian đủ nhỏ cho phép vi phạm nguyên tắc bảo toàn năng lượng trong phút chốc. Cái bong bóng sau đó thông trưởng theo cấp số nhân (inflated exponentially) và vũ trụ tăng trưởng đa số cấp lượng chỉ trong khoảnh khắc của một giây.” Stephen Hawking đưa ra một kiến giải nhằm giải đáp câu hỏi của Leibniz, cho rằng “bởi vì có một định luật như sự hấp dẫn (gravity) [và vật lý học lượng tử], vũ trụ có thể và sẽ tự tạo ra từ không. Sự sáng tạo tự khởi là lý do có cái gì đó hơn là không có gì, tại sao vũ trụ tồn tại, tại sao chúng ta tồn tại.”⁹ Nói cách khác, Hawking tin rằng câu hỏi của Leibniz đã được giải đáp.

Khuyết điểm của logic trên là ngay cả khi toán học về sự sáng tạo tự khởi là chính xác, toán học đó thực ra căn cứ trên thuyết tương đối rộng và vật lý học lượng tử, hai thứ này đâu phải là “không”. Vì thế, chẳng phải là sự sáng tạo *ex nihilo* cái gì đó từ không, mà nói cho đúng, phái sinh vũ trụ, ngay phút này, từ một tập hợp các tiên đề. Đây là một kết quả không có gì đặc sắc, bởi vì cho bất kỳ tập hợp các phát biểu phi mâu thuẫn (non-contradictory statements) nào, chúng ta luôn luôn có thể phái sinh các phát biểu đó từ một tập hợp các tiên đề bằng cách sử dụng các phát biểu như tiên đề. Hawking trình bày một luận điểm về vũ trụ có thể được phái sinh từ một tổ giảm thiểu các tiên đề, nhưng ông đã không làm gì để trả lời câu hỏi *tại sao* những tiên đề ấy (của M-thuyết, hay của thuyết tương đối rộng và vật lý học lượng tử) là đúng, ông cũng chẳng chỉ cho thấy chúng là tập hợp tiên đề cơ bản nhất khả hữu. Vì vậy, ông hoàn toàn không động đến câu hỏi của Leibniz.

Hầu hết các nhà vật lý học đều nhận thức được vấn đề này. Brian Greene cụ thể chỉ cho thấy vũ trụ học thông thường hiện đại không thể giải quyết câu hỏi của Leibniz, và nói thêm rằng “Nếu một mình logic phản nào đòi hỏi vũ trụ tồn tại và chỉ phối bởi một bộ luật duy nhất với các phối liệu độc đáo, thời có lẽ chúng ta đã có một câu chuyện tín phục. Nhưng đến nay, đó là không có gì ngoài một giấc mộng ban ngày!”¹⁰

Như Greene ghi nhận, “Ngay cả khi một học thuyết vũ trụ học tìm cách phát triển sự giải đáp câu hỏi của Leibniz, chúng ta có thể hỏi tại sao học thuyết đặc thù ấy - những giả thiết, thành phần, và phương trình của nó - là thích hợp, do đó, đẩy câu hỏi về nguyên thủy thoái một bước xa hơn”¹¹ Vấn đề quy thoái vô hạn (infinite regress) ấy đã được hiểu biết từ xưa¹². Trong thực tế, đó không chỉ là một câu hỏi tò mò, bởi vì những giả thiết tự nhiên của chúng ta về chủ đề này dẫn tới một mâu thuẫn logic.

Nếu câu S là chân (đúng) một cách khách quan, thời “bất S” (not S) là một mâu thuẫn, và một mâu thuẫn trong một hệ hữu hạn các tiên đề nào đó có thể chứng minh là giả (sai). Tuy nhiên, một chứng minh “bất S” là giả đồng thời cũng chứng minh “S là chân”, nghĩa là, bất kỳ phát biểu nào là chân *một cách khách quan* thời có thể chứng minh với một chứng minh *khách quan*.

Chẳng có bao nhiêu sự vật có thể được chứng minh là chân một cách khách quan, bởi vì bất kỳ chứng minh nào ý vào các tiên đề là chẳng khách quan nếu chẳng chứng minh các tiên đề cũng chân một cách khách quan. Một chứng minh cần phải theo một chuỗi hữu hạn các bước, vì thế, nó không thể là một quy thoái vô hạn. Vậy để thực sự là khách quan, một chứng minh phải chẳng có tất cả mọi tiên đề. Tuy nhiên, những sự vật duy nhất khả dĩ chứng minh là chân chẳng có tiên đề đều là những lặp thừa (tautologies).

Định lý 1. Những sự vật duy nhất có tính chân một cách khách quan là những sự vật khả dĩ chứng minh là chân chẳng sử dụng bất kỳ tiên đề nào.

Nếu sự chúng ta tồn tại là một tính chân khách quan, thời theo Định lý 1, tất phải có một chứng minh khách quan phái sinh sự tồn tại của chúng ta chẳng sử dụng bất kỳ tiên đề nào. Điều đó là bất khả thể, là không thể được, bởi vì sự tồn tại của chúng ta chẳng phải là một lặp thừa logic. Do đó, khi giả thiết chúng ta tồn tại một cách khách quan, chúng ta vấp phải một mâu thuẫn.

Cách giải quyết duy nhất nghịch lý đó là thừa nhận giả thiết cho rằng sự tồn tại của chúng ta có tính chân một cách khách quan là một mâu thuẫn phải bác bỏ. Điều đó không có nghĩa kết luận nổi tiếng *cogito ergo sum*, hay “Tôi tư lượng, vì thế tôi tồn tại” của Descartes là sai; nói cho đúng, nó có nghĩa sự tồn tại là chẳng khách quan, mà là tương đối đối với tập hợp tiên đề nào đó, và *sự tồn tại tương đối không trở ngại kinh nghiệm tự ý thức*. Như thế, dự tưởng về sự tồn tại vật lý không sai biệt với sự tồn tại toán học¹³ liên quan đến tập hợp tùy ý các tiên đề xác định thực tế của chúng ta.

Định lý 2. Kinh nghiệm tự ý thức có thể được phái sinh một cách toán học từ tập hợp các tiên đề nào đó. Trên quan điểm của tính tự ý thức ấy, tồn tại toán học là tồn tại vật lý.

Đáng lưu ý là một học thuyết rất gần đạt được mục tiêu nói trên đã được đề xuất bởi Tegmark, được gọi là Giả thuyết Vũ trụ Toán học (The Mathematical Universe Hypothesis; MUH) hay Thuyết Toàn thể Tối chung (Ultimate Ensemble Theory).

Chú thích

1. Kimura Taiken. Tiểu thừa Phật giáo Tư tưởng Luận. Hòa Thượng Thích Quảng Độ Việt dịch. Phật học Viện Quốc tế xuất bản. 2533 - 1989. Tr. 57.

2. Story of how the young Buddha passes his maths test

King Suddhodana then asked the *Bodhisattva*: “Can you, my son, rival the skill of the great mathematician Arjuna in the knowledge of mathematics?”

“Sire, I can,” he replied. So the *Bodhisattva* was told to show his ability.

§ I. The Bodhisattva knows up to ten numerations

The great mathematician Aijuna asked the *Bodhisattva*: “Young man, do you know the procedure of numeration called *kotisatottara*, more than a hundred kotis?”

The *Bodhisattva* answered: “I do.” [usually a *koti* is ten million or 10^7]

“Weil then, how must one proceed to enumerate more than a hundred kotis?”

I he *Bodhisattva* replied: “A hundred kotis is called *ayuta*; a hundred ayutas is called *niyuta*’, a hundred niyutas called *kankara*’ a hundred kankaras is called *vivara*; and a hundred vivaras is called *akshobhya*, a hundred aksobhyas is carried *vivaha*; a hundred vivahas is called *ulsanga*; a hundred utsangas is called *bahulcr*; a hundred bahulas is called *nagabala*’ a hundred nagabalas is called *titila*’, a hundred titilas is called *vyavasthanaprajnapti*’, a hundred vyavasthanaprajnaptis is called *hetuhilcr*; and a hundred hetuhilas is called *karahu*’, a hundred karahus is called *hetvindriycr*; a hundred hetvindriyas is a *samapta lambha*’ a hundred samaptalambhas is known as *gananagatir*, a hundred gananagatis is called *niravaravadycr*; a hundred niravaravadyas is called *mudrabala*’, a hundred mudrabaia is called *sarvabala*’ and a hundred sarvabalas is called *visamjnagati*’. a hundred visamjnagatis is a *sarvasamjna*’, a hundred sarvasamjnas is a *vibhutangama*’, and a hundred vibhutangamas is called *tallaksana*. [then 100^{23} kotis would mark 10^{53}]

“Now with the numeration cailed *tailaksana* one could take even Meru, the king of mountains, as a subject of calculation and measure it. And next is the numeration called *dvajagravati*’, with the help of this numeration one could take all the sands of the river Ganges as a subject of calculation and measure them.

Above this is the numeration called *dvajagraiisamani*’ and above this is the numeration of *vahanaprajnapti*’, next comes the numeration called *ingo*; above this is the numeration of *kuruta*.

Again above this is the numeration called *sarvaniksepa*, with the help of which one could take the sands of ten Ganges rivers as a subject for calculation and measure them all.

.And again above this is the numeration called *agrasara*, with the help of which one could take the sands of a hundred kotis of Ganges rivers as a subject of calculation measure them all. [these sands of the Gangeses would be too few for their respective numerations]

“And again above this is the highest numeration called *uttaraparamamvajahpravesa*, which is said to penetrate the most subtle atoms. Except for a Tathagata, or a *Bodhisattva* who has reached the purest essence of Enlightenment, or a *Bodhisattva* who has been initiated into all the Dharma, there is no being who knows this numeration, except myself or a *Bodhisattva* like me, who has arrived at his last existence, but has not yet left home.”

§2. Counting the atoms in a yojana and the Earth’s mass

Arjuna said: “Young man, how must one proceed in the numeration which penetrates the dust of the most subtle atoms?”

[counting back this list of lengths an *atom* would measure between 1 and 1000 picometer, in reality its diameter is 60 to 600 pm]

The *Bodhisattva* said: “Seven subtle atoms make a *fine particle*’ seven fine particles make a *small particle*’, seven small particles make a particle called *vatayanaraja*’ and seven particles of vatayanaraja make a particle called *sasarajcr*; seven particles of sasaraja make a particle called *edakaraja*’ seven particles of edakaraja make a particle of *gorajcr*; seven particles of goraja make a *likсарaja*’, seven likсарaja make a *sarsapa*; seven sarsapas make an *adyava*; seven adyavas make an *anguli*’, twelve angui make a *parvcr*; two parva make a *haster*; four hastas make a *dhanu*’, a thousand dhanu make a *krosa* of the country of Magadha; four krosas make *ityojana*. [a yojana measures a day’s march of a royal army in distance, here covering about $108 \cdot 10^{12}$ atoms] And now who among you knows the mass of one yojana, and how many of these subtle atoms it contains?”

Arjuna said: “I myself am even more astonished than others of lesser knowledge. Let the young prince show us the mass of a yojana, and explain how many subtle particles are found in it.”

The *Bodhisattva* replied: “In the *mass of ayojana* there are a complete niyuta of aksobhyas plus thirty hundred thousand of niyutas of kotis plus sixty hundreds of kotis plus thirty-two kotis and five times a hundred thousand and twelve thousand. [a ‘mass’ of 1000300000000000060320512000 atoms?] Such is the calculation of subtle particles in the mass of a yojana.

By this procedure, there are here in the land of *Jambu* seven thousand yojanas; in the land of *Aparagodana*, eight thousand yojanas; in the land *Purvavideha*, nine thousand yojanas; in the land of *Uttarakuru*, ten thousand yojanas. [Earth 34000 yojanas ~ mass 3.4E32 atoms]

§3. Three thousand great thousandfold world in essence incalculable

(continuing with this method, beginning with the worlds composed of hmr continents, there are a hundred kotis of *yworlds with four continents* and a hundred kotis of *great oceans*; there are the hundred kotis of (*ukravalas* and of *Maha Cakravalas*’, the hundred kotis of *Sumerus*, kings of mountains; the hundred kotis of realms of the *Four Great Kṛings** the hundred kotis of realms of the *Thirty-three gods*’ the hundred kotis of realms of the *Yama gods*’, the hundred kotis of *Tusita* realms; the hundred kotis of *Nirmanarata* realms; and the hundred kotis of *Parinṛmita vasavartin* realms. There are the hundred kotis of *Brahma* realms;

the hundred kotis of *Brahmapurohita* realms; the hundred kotis of *Brahmaparsadya* realms; the hundred kotis of *Mahabrahma* realms; the hundred kotis of *Paritabha* realms; the hundred kotis of *Apramanabha* realms; the hundred kotis of *Abhasvarana* realms; the hundred kotis of *Parittasubha* realms; the hundred kotis of *Apramanasubha* realms; the hundred kotis of *Subhakrtsna* realms; the hundred kotis of *Anabhraka* realms; the hundred kotis of *Punyaprasava* realms; the hundred kotis of *Brhatphala* realms; the hundred kotis of *Asangisattva* realms; the hundred kotis of *Abtha* realms; the hundred kotis of *Atapa* realms; the hundred kotis of *Sudrsa* realms; the hundred kotis of *Sudarsana* realms; and the hundred kotis of *Akanisiha* realms. [3000 kotis of worlds in total, maybe 3×10^{10}]

“All together these are said to be the whole of the *three thousand great thousands of worlds*, spread out and developed. All the calculations of the essence of the yojana includes the many hundreds of yojanas of subtle particles in this mass of three thousand great thousands of worlds, the many thousands of yojanas, the many kotis of yojanas, and the many niyutas of yojanas.

And how many subtle particles are there? It passes beyond calculation, it is incalculable. There are an incalculable number of subtle atoms in the mass of the three thousand great thousands of worlds.”

§4. Admiration of this mathematical lesson

While this lesson on enumeration was being taught by the Bodhisattva, the great mathematician Arjuna and the multitude of Sakyas listened with pleasure, joy, and happiness. Everyone there was filled with great admiration, and each of them presented the Bodhisattva with garments and ornaments. The great mathematician Arjuna then uttered these two verses:

“The hundreds of kotis and the ayutas, the nayutas and the niyutas, the procession of the kankaras, the vivahas, and the aksobhyas as well: this supreme knowledge I do not have - he is above me.

One with such knowledge of numbers is incomparable!

“And doubtless, o Sakyas, he could calculate the dust of the three thousand worlds, as well as all the herbs, the woods, the medicinal plants, and even the drops of water, in the time it takes to say ‘Hum’.

How could these five hundred Sakyas do anything more wonderful?”

Then gods and men by the hundreds of thousands uttered cries of admiration and joy.

And the *devaputras* in the expanse of the sky recited this verse:

“The concepts and the ideas, the reasonings good or bad, small or great, the workings of the minds of all the beings of the three times: all this he knows perfectly through a single movement of his mind.”

Thus, o monks, the Bodhisattva distinguished himself by his superiority over all the other young Sakyas. And as they continued their contests - in jumping, in swimming, in running and all the rest - the Bodhisattva again and again demonstrated his superiority...

3. G.w. Leibniz. On the ultimate origination of things. Technical report, Publishers name, 1697. Reprinted in G.H.R. Parkinson & M. Morris, 1973, Leibniz: Philosophical writings (pp. 136-144). London: J.M. Dent & Sons.
4. G.w. Leibniz. Principles of nature and of grace founded on reason. Technical report, 1714. Reprinted in G.H.R. Parkinson & M. Morris, 1973, Leibniz: Philosophical writings (pp. 195-204). London: J.M. Dent & Sons.
5. Robert Davvkins. *The God delusion*. Houghton Mifflin, New York, 2006.
6. Sam Harris. *Letter to a Christian nation*. A.A.Knopf, New York, 2006. P74
7. Stephen Hawking. *A Brief History of Time*. Bantam Books, 1988. P129.
8. Alexander Vilenkin. Birth of inflationary universes. *Phys. Rev. D*, 27:2848-2855, Jun 1983. doi: 10.1103/PhysRevD.27.2848. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.2848>,
9. Stephen Hawking and Leonard Mlodinow. *The Grand Design*. Alinlin Books, 2012. P180.
10. Brian Greene. *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality*. Knopf, New York, 2004. P310
11. Brian Greene. *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the texture of Reality*. Knopf, New York, 2004. “Even if a cosmological theory were to make headway on this [Leibniz’s] question, we could ask why that particular theory - its assumptions, ingredients, and equations - was relevant, thus merely pushing the question of origin one step further back.” P310.

¹² Torkel Franzén. Gödel’s Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005. P38.

¹³ D. Hilbert and P. Bernays. *Grundlagen der Mathematik*. Springer, Berlin, 1934.

Chương II: Vũ trụ Toán học

2.1 Khoa học Nhận thức và sự kết nối giữa vật lý học và toán học

2.1.1 Tổng quát

2.1.2 Vật lý học

2.1.3 Toán học

2.2 Có thật Toán học là sự dung hợp phức tạp của phát minh và phát hiện?

2.2.1 Năng lực phi thường của Toán học

2.2.2 Toán học = Nghệ thuật + Khoa học

2.2.3 Một chuyện tình toán học

2.2.4 Toán học được phát minh hay phát hiện?

2.2.4a Sáng tạo và Khám phá

2.2.4b Chọn lựa và Tiến hóa

2.2.4c Tính đối xứng của Tự nhiên

Vũ trụ Toán học

2.1 Khoa học nhận thức và sự kết nối giữa vật lý học và toán học¹

2.1.1 Tổng quát

Tâm con người được phú cho những cảm tri nguyên thủy bẩm sinh như là không gian, khoảng cách, vận động, biến cách, đồng thời gian, vật chất. Theo khoa học nhận thức (cognitive Science), những khái niệm trừu tượng của toán học không phải Plato tính² (Platonic). Chúng được dựng lên trong não từ những cảm tri nguyên thủy đó, theo phương thức sử dụng các ẩn dụ khái niệm³ (conceptual metaphors). Các cơ chế nhận thức dĩ tri phát sinh ngôn ngữ cực kỳ chính xác và logic của toán học. Do đó, tất cả sự bao la của toán học, cùng với những định lý tốt đẹp của nó, là toán học nhân loại (human mathematics). Nó trụ trong tâm, và chẳng ‘ở ngoài đó’ (out there).

Vật lý học là một khoa học thực nghiệm trong đó kết quả thực nghiệm được mô tả theo phương thức các khái niệm cụ thể - những khái niệm này cũng được dựng lên từ những cảm tri nguyên thủy của chúng ta. Mục đích của vật lý học lý thuyết là mô tả tính tuần quy (regularity) thực nghiệm quan sát được của thế giới vật lý theo một phương thức rõ ràng, chính xác và logic. Để thực hiện điều đó, não cần sử dụng những khái niệm trừu tượng được xác định rõ ràng mà tâm đã ẩn dụ hóa từ những cảm tri nguyên thủy của chúng ta. Bởi vì cụ thể và trừu tượng đều phát sinh từ cái nguyên thủy, sự kết nối giữa vật lý và toán không có gì huyền bí, nhưng tự nhiên. Sự kết nối đó được dựng lên trong não con người, nơi mà một tập hợp con nhỏ bé của toán học nhân loại rộng lớn được trang bị để mô tả tính tuần quy của vũ trụ. Vật lý học lý thuyết nên được xét như là một ngành của toán học, mà các tiên đề của nó được thi thiết là do các quan sát thế giới vật lý làm động cơ thúc đẩy. Chúng ta sử dụng ví dụ về thuyết lượng tử (quantum theory) để chứng minh nhân tính của kết nối vật lý-toán học: đôi khi hư nhược, không hoàn mỹ. Nhưng những khuyết điểm như vậy, chúng ta không cho là nghiêm trọng (bởi vì chẳng có thí nghiệm nào được biết là vi phạm thuyết lượng tử). Thái độ đó chứng tỏ tầm quan trọng cơ bản của các thí nghiệm trong vật lý học. Điều này không giống như trong toán học, mục tiêu là tầm cầu các quan hệ logic và ưu nhĩa giữa các khái niệm trừu tượng do tâm sáng tạo.

2.1.2 Vật lý học: Thí nghiệm, Thống nhất Khái niệm, và Toán học

Toán học là một ngôn ngữ chính xác trong đó những phát biểu đúng có thể được chứng minh khởi đầu từ một tập hợp tiên đề, sử dụng logic. Cả một lâu đài nguy nga toán học được cung cấp với những định lý đẹp và vĩ đại, và sự thống nhất thông qua số học, đại số, hình học, và giải tích. Toán học tuồng như không phải là một nơi làm thí nghiệm. Mặt khác, vật lý học là một khoa học thực nghiệm (do đó, tùy thuộc kỹ thuật học = technology) về thế giới chúng ta quan sát, nơi mà các thí nghiệm ghép đôi với những bước nhảy vọt lớn của sự thống nhất khái niệm. Toán học dùng trong vật lý học chỉ đến vào giai đoạn sau, khi chúng ta tìm kiếm một ngôn ngữ chính xác để mô tả các hiện tượng vật lý được quan sát.

Một cái nhìn thoáng qua lịch sử vật lý học sẽ làm chứng cho những nhận định trên. Hàng ngàn năm trước, vật lý học có những khởi đầu chất lượng, phi-toán học trong những cảm tri nguyên thủy về vật chất, ánh sáng, hình dạng, thức biệt mẫu hình, không gian, thời gian, vận động, và đếm số cơ bản. [Đếm số cơ bản (elementary counting), hay cảm giác số tự (number sense), đạt được bằng các mạch kết nối vĩnh viễn (hardwired; ngạnh tuyến) trong não và là một khái niệm trọng yếu chung cho cả vật lý học và toán học].

Ban đầu, một quan sát/thí nghiệm có ý nghĩa tối trọng yếu, liên quan đến chuyển động của mặt trời, mặt trăng, và các hành tinh đối với bối cảnh của thiên cầu cố định. Tri thức nền tảng về các hình dạng hình học (như hình tròn) được dùng để mô tả chuyển động của chúng chung quanh quả đất. Nhiều thế kỷ sau, một bước nhảy vọt lớn về khái niệm đưa đến công nhận rằng sự mô tả tự nhiên của chúng ta sẽ đơn giản hơn nếu giả thiết quả đất và các hành tinh chuyển động chung quanh mặt trời. Đó là một phát triển lịch sử độc lập với toán học. Nhờ kỹ thuật tiên bộ, những quan sát phi phạm đã tạo ra hình dạng quỹ đạo của Hỏa tinh. Sau đó, các khái niệm về lực và gia tốc được thi thiết, tiếp theo là một trong những nguyên lý thống nhất lớn nhất trong vật lý học: lực đẩy các hành tinh chung quanh mặt trời giống như lực hấp dẫn khiến sự vật trên quả đất rơi xuống nền. Toán học nhảy vào khi Kepler suy đoán quỹ đạo của Hỏa tinh là một elip, và khi Newton suy diễn từ thí nghiệm như thế nào lực và gia tốc tương quan về mặt số lượng, như thế nào lực hấp dẫn giảm sút khi khoảng cách gia tăng, và như thế nào luật chuyển động kết hợp với luật hấp dẫn chỉ cho thấy quỹ đạo các hành tinh quanh mặt trời là hình elip. vẻ đẹp toán học tuyệt vời hiện ra trong chứng minh của Newton, và sự thành công đáng kinh ngạc của những chứng minh như vậy tất nhiên là chủ đề của cuộc thảo luận này. Xin nhấn mạnh một lần nữa, trong vật lý học, quan sát/thí nghiệm, và khái niệm và sự thống nhất chúng đến trước, và sự nhập cuộc của toán học đến sau nhưng rất trọng thể.

Chắc chắn, tiến trình đó lặp đi lặp lại suốt lịch sử vật lý học. Xin trình bày tiến trình đó như sau. Các thí nghiệm tri tục về điện học và từ học qua nhiều thế kỷ, và sự phát triển khái niệm về một trường (a field), cuối cùng dẫn đến sự hiểu biết khái niệm công nhận điện lực và từ lực là hai khía cạnh của cùng một điện từ trường, tiếp theo sau là sự lập công thức toán học chính xác về điện động lực học Maxwell. Do quan sát thấy rõ tích số độ điện thẩm và độ từ thẩm bằng nghịch đảo của tốc độ ánh sáng bình phương⁴, Maxwell nhảy vọt thêm một bước, khám phá ánh sáng là một sóng điện từ. Sự bất lực của vật lý học cổ điển dự đoán quang phổ bức xạ của hắc thể (black-body) được quan sát qua thí nghiệm đã gợi ý cho Planck khái niệm mới về các nguyên tử phát xạ và hấp thụ ánh sáng theo phương thức lượng tử rời rạc (in discrete quanta), tiếp theo sau là công thức bức xạ của Planck. Sự thiếu khả năng của vật lý học cổ điển giải thích những đặc điểm của hiệu ứng quang điện (photo-electric effect) gợi ý Einstein quan niệm ánh sáng bao gồm những lượng tử rời rạc, tiếp sau đó là quan hệ toán học chính xác giữa năng lượng và tần số của photon. Bohr đề xướng khái niệm động lượng góc lượng tử hóa (quantised angular momentum) để giải thích các quang phổ của hydro. Cuối cùng, Schrödinger và Dirac đặt các công trình của Planck, Einstein và Bohr trên một cơ sở toán học vững chắc, trong những phương trình cực kỳ thanh lịch và phổ quát. Luôn luôn, thí nghiệm và khái niệm trước, và sau đó lập công thức toán học.

Đôi khi, một khái niệm trở nên lỗi thời, lạc hậu, cho nên phải thay nó đi. Thí nghiệm Michelson-Morley không thành công phát hiện sự chuyển động của quả đất thông qua giả thuyết ether khiến Einstein và nhiều khoa học gia khác buông bỏ ether, và tìm cầu một tập hợp các biến đổi tọa độ toán học cho phép tốc độ ánh sáng không biến đổi đối với tất cả các quan sát viên không tăng tốc đối với các hệ quán tính (quan sát viên quán tính; inertial observer). Ngay cả trong trường hợp thuyết tương đối rộng, bảo rằng thuyết ấy được xây dựng thuần túy trên diễn dịch lực, chúng ta thận trọng khi nhận xét như thế. Gốc rễ nằm trong sự thật thí nghiệm đáng lưu ý là các đối tượng đủ tất cả khối lượng rơi trong trường trọng lực cùng một gia tốc, từ đó một bước nhảy vọt khái niệm dẫn đến trọng lực là độ cong không-thời gian. Theo sau bước nhảy vọt đó là rất nhiều năm Einstein phải vật lộn với toán học, trước khi đạt được các phương trình trường (field equations) chính xác. Ngay cả sau đó, phạm vi để mở hầu có bao gồm hay không hằng số vũ trụ (cosmological constant), và chỉ đến nay, tuồng như một trăm năm sau, mới tìm ra lời giải đáp theo phương thức quan sát thiên văn!

Vào những dịp khác, một học thuyết toán học nhất trí được dựng lên căn cứ trên sự hiểu biết thực nghiệm đương thời, nhưng không được thí nghiệm chứng thực. Chẳng hạn, học thuyết vô hướng tương đối về trọng lực (relativistic scalar theory of gravitation) xem như bất khả hành, bởi vì không dự đoán được sự bẻ cong ánh sáng. Hoặc trường hợp các phương trình Maxwell đối xứng cao độ với những đơn cực có từ tính mà chẳng có bằng chứng gì về từ lượng (magnetic charges). Do đó, chúng ta không tin các phương trình ấy mô tả tự nhiên, mặc dầu chúng đẹp hơn điện động lực học Maxwell thường nghiệm.

Toán học mà các nhà vật lý học sử dụng phần lớn là tương đối đơn giản, chỉ một tập hợp con nhỏ của lâu đài toán học thuần túy nguy nga tráng lệ. Cũng cần để ý đến toán học mà các nhà vật lý học dùng chẳng bao giờ đã động đến sự lựa chọn điều kiện đâu! Toán học mô tả các định luật vật lý học cần được bổ sung bởi những điều kiện đâu. Những gì định đoạt những điều kiện đâu của vũ trụ? Có những quy luật toán học cho chúng hay không? Chúng ta không biết, chưa biết được.

Chúng ta có thể xét xem vật lý học lý thuyết như cái tập hợp con toán học thuần túy mà tiên đề và khái niệm là do các thí nghiệm trên thế giới vật lý làm động cơ thúc đẩy.

Hậu quả các định luật vật lý học giống như các định lý đi theo từ các tiên đề. Trên quan điểm đó, không có gì đáng ngạc nhiên khi thấy các nhà vật lý học lớn đôi lúc sử dụng những phương trình của họ để dự đoán kết quả của các thí nghiệm trong tương lai. Chẳng hạn, dự đoán của Dirac về phản-vật chất (anti-matter), và dự đoán của Einstein về sự bẻ cong ánh sáng. Định luật lý thuyết là một sự mô tả toán học toàn diện chính xác các hiện tượng nằm trong lĩnh vực của nó, động cơ thúc đẩy bởi thí nghiệm, và dự báo các thí nghiệm sẽ tới, cho đến khi có một thí nghiệm làm lộ ra giới hạn của luật, buộc chúng ta phải tìm kiếm một luật tổng quát hơn.

2.1.3 Toán học: Vật lý học Nguyên thủy, Tiên đề, Định lý, và Vẻ đẹp.

Điều đáng nói trước tiên là toán học giống như vật lý học bắt rễ từ những cảm tri nhân loại nguyên thủy: hình dạng, thức biệt mẫu hình, đếm, không gian, thời gian, và biến chuyển. Với một dị biệt đáng kể: trong toán học, chẳng có chỗ cho vật chất (chất liệu), và mở rộng ra, cho ánh sáng! Đối với chúng ta, đó là sự khác biệt to lớn giữa vật lý học và toán học, từ đó tất cả các dị biệt khác nảy mầm. Vật chất trong toán học thích hợp chừng nào nó giúp trong sự trừu tượng hóa, và để đi đến ý tưởng trực quan về một tập hợp (các đối tượng). Nhưng các loại tập hợp mà một nhà toán học quan tâm đến như tập hợp các số nguyên, tập hợp các số siêu việt, tập hợp hết thảy các tam giác trên một phẳng, V.V...tương phản với, chẳng hạn, tập hợp các hành tinh trong hệ mặt trời, hay tập hợp các hạt cơ bản mà một nhà vật lý học quan tâm đến. Sau đây là phần biện minh cho điểm cộng đồng của nhiều cảm tri nguyên thủy của con người, cơ sở trên đó cả vật lý học và toán học được dựng lên, đối với chúng ta là duyên cớ của “sự công hiệu bất hợp lý của toán học trong vật lý học” (the unreasonable efficacy of mathematics in physics)⁵.

Trừu tượng từ đếm, hình dạng, mẫu hình, và không gian- thời gian-biến chuyển, toán học nhận được những thực thể cơ bản chưa định nghĩa như các số tự nhiên, điểm và tuyến. Bằng cách cho định nghĩa/tiên đề cùng với những phép toán và quan hệ giữa chúng, tiếp theo là tổng quát hóa, các nhà toán học phát triển những chủ đề cổ điển về lý thuyết số, đại số học, hình học và giải tích. Một chương trình nỗ lực khuếch đại sự thống nhất thông qua những phát triển như là hình học đại số, thuyết số đại số và hình học số học hiện đang diễn tiến.

Ví dụ nổi bật nhất về trừu tượng toán học và tổng quát hóa, và động cơ thúc đẩy như thế nào có lẽ đến từ sự phát triển hệ thống số. Suốt nhiều thế kỷ, các nhà toán học cố gắng tìm hiểu những gì hiện giờ đang được giảng dạy tại các trường Trung học. Duyên cớ của các số tự nhiên là những đối tượng trong thế giới vật lý, nhưng tự kỷ trừu tượng rất nhanh thành những thực thể, chẳng cần tham chiếu những đối tượng vật lý. Các định luật cơ bản của số học (tính giao hoán, tính kết hợp, tính phân bố) chỉ phôi cách cộng và nhân các số. Sự tiến dần số zero và phép trừ, cùng với hệ thống ký hiệu (notational System) Ấn độ để biểu tượng các số nguyên, và nguyên lý quy nạp toán học đánh dấu tiền bộ quan trọng.

Thế giới hấp dẫn và đẹp của các số nguyên tố bao gồm chứng minh quan trọng định lý số nguyên tố, giả thuyết của Goldbach chưa được chứng minh (mọi số chẵn có thể biểu hiện như một tổng số của hai số nguyên tố), và phát biểu chưa được chứng minh (có vô số các cặp số nguyên tố p và $p+2$), định lý cuối cùng của Fermat chỉ được chứng minh gần đây, công trình của nhiều nhà toán học xuất sắc trong nhiều thế kỷ, Phân số liên tục, phương trình Diophantine, và nhiều hơn nữa. Tất cả những sự biến toán học đó khiến chúng ta tin rằng các số có một cuộc sống riêng của chúng. Nhưng chúng sống ở đâu? Sau đây, chúng ta sẽ tìm cách giải thích, mặc dầu xuất hiện như biểu tượng, chúng sống trong não con người, và không nơi nào khác.

Các số nguyên âm được tiến dần nhằm cho phép trừ một số lớn hơn từ một số nhỏ hơn có ý nghĩa. Các số hữu tỷ (rational numbers) được tiến dần để cho phép chia b/a có ý nghĩa đầu số b chẳng phải là một bội số của a . Một lần nữa, tổng quát hóa được thực hiện với sự bảo đảm các tiên đề nguyên thủy được bảo tồn bởi hệ thống rộng hơn, nếu không thì chỉ là một tổng quát hóa vô dụng. Các số vô tỷ tìm thấy vị trí của chúng trên đường thẳng số như những số thập phân phi-trùng phức vô hạn (non-repeating infinite decimals). Khái niệm về giới hạn, chuỗi vô

hạn, và Liên tục thực (real continuum) được phát minh và lợi ích bao la cho vật lý học lý thuyết. Hình học giải tích xuất hiện: mỗi đối tượng và phép toán hình học có thể ánh xạ tới số. Đem lướt ra mắt phân tích pháp toán học cái vô hạn, tính đếm được (denumerability) của các số hữu tỷ, tính không đếm được của Liên tục (continuum), bản số của các tập hợp vô hạn, số siêu hạn, trạng thái bất khả phân định của giả thuyết Liên tục của Cantor (Chẳng có tập hợp với bản số lớn hơn bản số của tập hợp các số nguyên, nhưng nhỏ hơn bản số của tập hợp các thực số). Ngoài ra còn có thuyết tập hợp phi - Cantor của Cohen, trong đó giả thuyết Liên tục không đúng. Cho đến nay, khởi đầu từ cảm tri nguyên thủy phép đếm, chúng ta đã xây dựng nương trên năng lực của sự tổng quát hóa đầy ý nghĩa. Đem một lãnh vực xa lạ hơn, rất cần tới thế giới các phức số (vẫn còn tùy thuộc các luật cơ bản của số học) để cấp ý nghĩa cho lời giải các phương trình bậc hai. Thuyết hàm với một biến số phức **nảy** nở; tuy nhiên giả thuyết Riemann vẫn còn là bài toán **ì** tiếng chưa được giải quyết trong toán học, và sẽ có **những hệ quả** quan trọng cho sự hiểu biết các số nguyên tố.

Trừu tượng các hình dạng dẫn tới hình học, chẳng ví dụ nào tốt hơn công trình lịch sử trong *Elements* của Euclid, nơi mà phương pháp diễn dịch toán học hiện đại từ các tiên đề lần đầu tiên được trình bày, hơn hai ngàn năm về trước. Với trừu tượng hơn nữa, chúng ta biết được ngoài hình học Euclid, phẳng còn thừa nhận một hình học afin (affine geometry), bảo tồn tuyến thẳng và tuyến song song, nhưng không khoảng cách, và hình học xạ ảnh (projective geometry) chẳng bảo tồn tính song song. Vứt bỏ định đề thứ năm của Euclid, các hình học gia phát minh những hình học cong, dọn đường cho công trình lớn của Riemann về các siêu diện với độ cong tùy ý, và hình học vi phân. Các không gian với thứ nguyên tùy ý (kể cả vô hạn) được tiến dẫn.

Sự khảo sát các hình dạng độc lập với các thuộc tính metric và xạ ảnh phát sinh trường của tôpô (topology). Sớm hơn hết là công thức của Euler cho hình đa diện. Bài toán Bốn Màu chỉ được giải quyết mới đây (1977), sau hàng ngàn giờ thao tác trên máy vi tính và chứng minh được giản hóa năm 1997 và sau đó năm 2005. Khái niệm thứ nguyên được tổng quát hóa như một tính năng của tôpô. Thứ nguyên (hình thể biến lập) Hausdorff xuất hiện mật thiết trong thuyết hình thể biến lập (theory of fractals) của Mandelbrot. Trong nghiên cứu tôpô, một lần nữa, chúng ta thấy sự trừu tượng làm toán học phong phú thêm như thế nào.

Sự thức biệt mẫu hình, với những kiện nhập từ số học, là cơ sở của đại số học. Ở đây, các định luật cơ bản của số học được tu chỉnh, phát sinh những khái niệm về nhóm, trường, vành và lý tưởng. Mỗi một trong chúng tự bản thân trở thành một ngành toán học. Hình học đại số là hiện đại hóa hình học giải tích của Descartes nghiên cứu phương trình cho những đường cong và mặt trong các thứ nguyên cao hơn, sử dụng số phức, dẫn đến định nghĩa các đa dạng đại số. Serre và Grothendieck đóng góp lớn cho thế kỷ 20. Hình học số học phối hợp hình học đại số với lý thuyết số. Đây là một trường con của thuyết số đại số nghiên cứu những cấu trúc đại số liên quan đến các số đại số. Sự trừu tượng sâu sắc này được kế tiếp bởi tổng hợp và thống nhất sâu sắc trong toán học thuần túy.

Phép tính vi tích phân (calculus) đương nhiên là trừu tượng từ quan sát vận động và biến chuyển, và đến với khái niệm mới về các vô cùng bé. Căn nguyên nằm trong hai vấn đề: xác định các tiếp tuyến của một đường cong (sự ra đời của phép tính vi phân) và xác định diện tích bên trong một đường cong (sự ra đời của phép tính tích phân). Thiên tài của Newton và Leibniz là nhận ra sự nối kết giữa hai phép tính ấy. Không có gì lạ về phép tính vi tích phân, được phát minh để hiểu biết chuyển động, cách mệnh hóa cơ học và vật lý học. Khái niệm toán học và tự nhiên hoàn toàn hòa hợp. Hiện nay các nhà vật lý học sử dụng phép tính vi tích phân trong công việc của họ có lẽ hơn bất kỳ ngành toán học nào khác.

Một tính năng thống nhất của toán học hiện nay là có thể hoàn toàn đặt cơ sở trên một xử lý thuyết tập hợp theo phương thức tiên đề, và phái sinh từ một tập hợp tiên đề, chẳng hạn ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice). Nhưng tại sao các tiên đề đặc thù ấy; đặc biệt tại sao Axiom of Choice (Tiên đề Chọn)? Gödel chỉ cho biết nếu ZF nhất trí thì ZFC nhất trí. Một số toán học gia không ưa Axiom of Choice, nhưng phần đông cho rằng Tiên đề Chọn làm toán học phong phú hơn. Đối với chúng ta, tự bản thân của những phong cách như vậy chứng tỏ *toán học là một kinh doanh của con người, chứ chẳng phải một chân tính Plato phổ biến 'ở ngoài kia'*

Căn cứ trên những *cảm tri nguyên thủy* chặt chẽ của con người như đối tượng, kích thước, hình dạng, mẫu hình và biến chuyển, loài người dựng lên những khái niệm *trừu tượng* như số, điểm, tuyến, lượng vô cùng bé, vô hạn, phương trình, nhóm, độ cong, và nhiều hơn thế nữa, trên đó tính bao la của toán học được xây dựng. Cũng cùng những cảm tri nguyên thủy ấy phát sinh những khái niệm *cụ thể* về vật lý học thực nghiệm như lực, khối lượng, chuyển động, điện tích, phép quay, và những khái niệm toán/vật lý học như trường và đối xứng. (Chúng ta không phân biệt giữa những khái niệm trừu tượng của vật lý học lý thuyết và toán học). Trong khoa học nhận thức, trong

ứng dụng của nó vào toán học, nhằm mục đích chứng minh theo phương thức khoa học, các khái niệm trừu tượng của toán học được xây dựng trên các cảm tri nguyên thủy, sử dụng những gì chúng ta được biết như *ẩn dụ khái niệm* (conceptual metaphor). Khi nào chúng ta tìm cách mô tả chính xác những tương hỗ quan hệ giữa những khái niệm cụ thể cơ sở của vật lý học thực nghiệm, tất nhiên chúng ta phải nương vào những khái niệm trừu tượng của toán học. Vì cả cái cụ thể và cái trừu tượng cùng được xây dựng trên cùng cái nguyên thủy, điều đó phá bỏ tính chất thần bí của sự thành công phi thường của toán học trong vật lý học.

2.2 Có thật Toán học là sự dung hợp phức tạp của phát minh và phát hiện?

2.2.1 Năng lực phi thường của Toán học

Toán học có hai loại đặc tính thường chỉ được liên kết với một vị thần. Đó là có mặt khắp mọi nơi cùng một lúc (vô sở bất tại) và vạn năng (vô sở bất năng). Nhà vật lý học người Anh James Jean (1877-1946) có lần viết: “Vũ trụ dường như được thiết kế bởi một nhà toán học thuần túy.” Toán học dường như quá hữu hiệu trong sự mô tả và giải thích không những vũ trụ ở quy mô lớn, mà ngay cả một số doanh nghiệp tối hỗn loạn của con người.

Trong khi các nhà vật lý học nỗ lực chế định những học thuyết về vũ trụ, các nhà phân tích thị trường chứng khoán gài đầu dự đoán sự sụp đổ vị lai của thị trường, các nhà thần kinh sinh vật học thử tìm cách dựng lập các mô hình chức năng não, hay các nhà thống kê tình báo quân đội đang cố gắng tối ưu hóa sự phân phối tài nguyên, tất cả các chuyên gia ấy đều sử dụng toán học. Hơn nữa, mặc dầu dùng những hình thức học triển khai trong các ngành toán học khác nhau, các chuyên gia ấy vẫn tham khảo cùng chung môn toán học toàn cầu nối liền thông suốt. Những gì đã phú cho toán học một quyền năng khó tin như vậy? Hay, như Einstein có lần tự hỏi: “sao có thể toán học, một sản phẩm của tư tưởng của con người độc lập với kinh nghiệm, phù hợp tuyệt vời các đối tượng của thực tế vật lý?”

Cảm giác hết sức hoang mang nói trên đã có từ thời cổ Hy Lạp. Đặc biệt là Pythagoras và Plato, hai vị này kinh hãi nhận thấy toán học rõ ràng có khả năng uốn nắn và dẫn hướng vũ trụ, trong khi tưởng như tồn tại bên trên quyền năng của con người để cải biến, dẫn hướng, hay ảnh hưởng vũ trụ.

Hàng nghìn năm nghiên cứu toán học đầy ấn tượng tốt và tư biện triết học thậm thâm uyên bác góp phần tương đối rất ít trong việc làm sáng tỏ bí ẩn của toán học. Roger Penrose, nhà vật lý toán học nổi tiếng của Oxford, nhận thấy huyền bí không chỉ đơn thuần một mà bội ba. Ông giám định có ba “thế giới” khác nhau: thế giới của cảm tri có ý thức, thế giới vật lý, và thế giới Plato các hình thức toán học. Thế giới đầu là nhà của tất cả hình ảnh của não - chúng ta nhận diện các con của chúng ta như thế nào, chúng ta tận hưởng một hoàng hôn ngoạn mục như thế nào, hay chúng ta phản ứng với những hình ảnh kinh hoàng của chiến tranh như thế nào. Đây cũng là thế giới bao hàm yêu thương, ganh ghét, và định kiến, cũng như cảm tri của chúng ta về âm nhạc, về khí vị thực phẩm, và về sợ hãi. Thế giới thứ hai là thế giới chúng ta thường đề cập như thực tế vật lý. Hoa thật, những viên aspirin, những đám mây trắng, và những máy bay phản lực đều ở trong thế giới đó, cũng như các thiên hà, hành tinh, nguyên tử, tim khi, và não người. Thế giới Plato các hình thức toán học, theo Penrose, có một thực tế hiện thực khả dĩ so sánh với thực tế hiện thực của thế giới vật lý và thế giới trí tuệ, là quê hương của toán học. Trong đó, chúng ta tìm thấy các số tự nhiên 1, 2, 3, 4, ..., tất cả các hình dạng và định lý của hình học Euclid, các định luật về chuyển động của Newton, huyền học, học thuyết tai biến, và những mô hình toán học các đặc tính của thị trường chứng khoán. Và bây giờ, theo Penrose, xuất hiện ba huyền bí. Thứ nhất, thế giới của thực tế vật lý tưởng như tuân theo những quy luật hiện trụ trong thế giới các hình thức toán học. Đây là một nan đề khiến Einstein bối rối, Giải Nobel Vật lý học Eugene Wigner (1902-1995) lặc lỡ: “Sự phù hợp của ngôn ngữ toán học với việc chế định các định luật vật lý học là một kỳ tích, một món quà tuyệt vời mà chúng ta không hiểu và chẳng xứng đáng. Chúng ta nên biết ơn nó và hy vọng nó sẽ vẫn còn có giá trị trong công việc nghiên cứu vị lai và nó sẽ mở rộng, tốt hơn hoặc tệ hơn, cho niềm vui của chúng ta, cũng mặc dầu có lẽ cho sự không hiểu nổi của chúng ta, cho các ngành học tập rộng lớn.”⁶

Thứ hai, bản thân của tâm cảm tri - chốn ở của những cảm tri có ý thức của chúng ta - bằng cách nào đó tìm cách xuất hiện từ thế giới vật lý. Làm thế nào *tâm* có thể phát sinh từ *vật chất* theo đúng nghĩa từng chữ? Có bao giờ chúng ta có thể chế định một học thuyết về hoạt động của ý thức có tính cách mạch lạc và thuyết phục như, chẳng hạn, học thuyết hiện tại của chúng ta về điện từ? Cuối cùng, vòng tròn được đóng lại một cách bí ẩn. Các tâm cảm tri ấy có khả năng kỳ diệu tiến nhập thế giới toán học bằng cách phát hiện hay sáng tạo và trình bày rõ một kho tàng các hình thức và khái niệm toán học trừu tượng.

Penrose không đưa ra lời giải thích nào cho bất kỳ một trong ba huyền bí, chỉ kết luận một cách vắn tắt: “Chắc chắn thực sự không có ba thể giới, mà chỉ có *một*, chân bản tính tự nhiên của nó chúng ta thậm chí không lướt mắt qua.”

Xét kỹ, chúng ta thấy sự thành công của toán học trong việc giải thích thế giới quanh chúng ta hiện có hai diện, một diện đáng kinh ngạc hơn diện kia. Thứ nhất, có một diện có thể gọi là “tích cực”. Khi các nhà vật lý học lạc đường đi vào mê cung của tự nhiên, họ dùng phương thức toán học để rọi sáng bước đi của họ - những công cụ họ sử dụng và phát triển, những mô hình họ dựng lập, và những giải thích họ cần đến, tất cả đều là toán học trong bản thân tự nhiên. Tự thân của phương thức đó quả thật là một phép màu. Newton quan sát một quả táo rơi, mặt trăng và thủy triều trên bãi biển, chẳng phải là những phương trình toán học. Thế mà ông ta bằng cách nào đó có thể trích ra từ tất cả những hiện tượng tự nhiên ấy những định luật toán học của tự nhiên minh bạch, ngắn gọn, và chính xác đến mức khó tin. Tương tự như vậy, James Clerk Maxwell (1831-79) mở rộng cái khuôn khổ vật lý học cổ điển để bao hàm *tất cả* những hiện tượng điện và từ được biết đến vào những năm 1980. Ông thực hiện điều đó thông qua chỉ bốn phương trình toán học. Thuyết tương đối rộng của Einstein thậm chí đáng kinh ngạc hơn: đó là một ví dụ hoàn hảo của một thuyết toán học chính xác phi thường, tự hợp, về cái gì đó cơ bản như cấu trúc không gian và thời gian.

Diện thứ hai có thể gọi là diện “tiêu cực” của tính hiệu dụng huyền bí của toán học. So sánh với diện này, diện tích cực hóa ra mờ nhạt. Khái niệm và quan hệ được các nhà toán học tham tác chỉ trên phương diện lý tính thuần túy, tuyệt đối chẳng nghĩ đến ứng dụng, biến thành sau nhiều thập niên (hay đôi khi nhiều thế kỷ) những giải pháp bất ngờ cho những vấn đề đặt cơ sở trong thực tế vật lý! Làm thế nào điều ấy khả dĩ hiện thực? Chẳng hạn, lấy trường hợp nhà toán học khác thường người Anh, Godfrey Harold Hardy (1877-1947), rất tự hào về sự thật là công việc của ông bao gồm không có gì trừ toán học thuần túy mà ông tuyên bố dứt khoát trong tập sách “A mathematician’s Apology” của ông: “Không có một khám phá nào của tôi đã gây ra, hay có thể gây ra, trực tiếp hay gián tiếp, cho tốt hay xấu, dị biệt tối thiểu với tác dụng thú vị của thế giới.”⁷ Hardy tưởng rằng toán học của ông thuần túy lý thuyết, chẳng phải và không thể đem ứng dụng, mà chỉ để thưởng thức cái đẹp của nó. Nhưng ông sai rồi! Một trong các công trình của ông tái sinh với danh hiệu định luật Hardy- Weinberg, một nguyên lý cơ bản được các nhà di truyền học sử dụng để nghiên cứu tiến trình phát triển của dân số. Ngay cả thuyết trừu tượng về các số (Number theory) của ông đã được nhà toán học người Anh, Clifford Cocks, sử dụng để sáng tạo một bước đột phá trong mật mã (cryptography): sự phát triển của mã (the development of code). Các mã là rất cần thiết cho truyền thông quân sự, hoàn toàn không đúng với phát biểu của Hardy: “chưa ai khám phá được bất cứ mục đích chiến tranh nào do lý thuyết số phục vụ.” Như vậy, ngay cả Hardy, một trong các nhà phê bình lớn tiếng chỉ trích toán học ứng dụng, cũng bị kéo vào sự sản sinh các thuyết toán học hữu dụng.

Nhưng đó chỉ là đỉnh của tảng băng trôi. Kepler và Newton phát hiện quỹ đạo của các hành tinh của thái dương hệ có hình elip; là những đường cong được nhà toán học Hy Lạp Menaechmus (350 BC) nghiên cứu hai ngàn năm về trước. Các loại hình học mới do Bernhard Riemann (1826-66) tiến dẫn biến thành công cụ Einstein sử dụng để giải thích cấu trúc vũ trụ. Một “ngôn ngữ” toán học gọi là thuyết Nhóm (Group theory) do thần đồng trẻ Évariste Galois (1811-32) khai triển, đơn giản là để xác định tính khả giải của các phương trình đại số, nhưng hiện nay đã biến thành ngôn ngữ các nhà vật lý học, kỹ sư, các nhà ngôn ngữ học, và ngay cả các nhà nhân chủng học sử dụng để mô tả tất cả các đối xứng của thế giới. Hơn nữa, khái niệm những mẫu hình toán học đối xứng, theo một nghĩa nào đó, biến toàn bộ quá trình khoa học lộn ngược. Qua nhiều thế kỷ, con đường hiểu biết sự vận hành của vũ trụ khởi đầu với một bộ sưu tập các sự thật thực nghiệm hoặc quan sát từ đó bằng phép thử và sai, các nhà khoa học cố gắng chế định các định luật tổng quát của tự nhiên. Kế hoạch là bắt đầu quan sát địa phương rồi từng mảnh một chắp lại với nhau những sự thật quan sát được. Qua thế kỷ 20, được biết các thiết kế toán học được xác định rõ ràng là hạ tầng cơ sở của thế giới bên trong nguyên tử, cho nên các nhà vật lý học hiện đại khởi đầu bằng cách làm ngược lại. Họ đưa những nguyên lý đối xứng toán học lên đầu, nhấn mạnh rằng các định luật của tự nhiên và quả thật các khối xây dựng cơ bản của vật chất phải thuận theo một số mẫu hình, và họ suy diễn những định luật tổng quát từ những yêu cầu ấy. Làm thế nào tự nhiên hay biết tuân theo những đối xứng toán học trừu tượng ấy?

2.2.2 Toán học = Nghệ thuật + Khoa học

Với những tiến bộ trong sự phát triển hình học phi-Euclid và sự ứng dụng nó vào các hiện tượng vật lý bởi Einstein, chúng ta thấy rõ hình học Euclid chẳng những không phải là một tất yếu của tư tưởng, mà thậm chí

chẳng phải là hình học tiện lợi nhất để áp dụng vào không gian đương hiện. Vì thế, có một sự biến cải sâu sắc trong trạng thái chúng ta gán cho các thực thể toán học, và một ước tính khác về ý nghĩa các hoạt động của nhà toán học. Chúng ta có thể khởi đầu từ bất kỳ tập hợp tiên đề nào tùy thích, với điều kiện là chúng nhất trí tự bản thân và dung nạp lẫn nhau, và tìm ra những hậu quả logic của chúng. Bằng cách làm như vậy chúng ta **sáng tạo một ngành toán học**. Các định nghĩa và định đề chủ yếu chẳng phải được mang lại bằng kinh nghiệm, cũng chẳng phải là tất yếu của tư tưởng. Nhà toán học hoàn toàn tự do, trong giới hạn của trí tưởng tượng của mình, dựng lập những thế giới mình thích. Những gì nhà toán học phải tưởng tượng là một vấn đề của tính khí bất thường của mình. Bằng cách ấy, nhà toán học không khám phá những nguyên tắc cơ bản của vũ trụ, cũng không trở thành quen biết những ý niệm về Thượng Đế. Nếu thông qua thực nghiệm, ông ta tìm ra những tập hợp thực thể tuân theo cùng chung phương án logic như những thực thể toán học của ông, nhiên hậu ông đã áp dụng toán học của ông vào thế giới bên ngoài: ông đã **sáng tạo một ngành khoa học**. Tại sao thế giới bên ngoài phải tuân theo những định luật logic, tại sao, trong thực tế, khoa học khả thể, khoa học có thể được, đó là hai câu hỏi không dễ gì giải đáp. Tuy nhiên, có dấu hiệu trong những thuyết vật lý học hiện đại khiến một số khoa học gia nghi ngờ liệu vũ trụ cuối cùng sẽ biến thành lý tính hay không, liệu các hiện tượng tự nhiên phải tuân theo bất kỳ hình học đặc biệt nào không.

Vì toán học là một hoạt động hoàn toàn tự do như nói trên, không bị điều kiện bởi thế giới bên ngoài, nên được gọi là một nghệ thuật thay vì một khoa học. Nó độc lập với thế giới bên ngoài. Mặc dầu nó có thể dùng để làm sáng tỏ các hiện tượng tự nhiên, nó đúng là “chủ quan”, đúng là một sản phẩm của trí tưởng tượng tự do sáng tạo. Và chẳng khó khăn gì để khám phá ra các nhà toán học bị kích lệ bởi cùng một động cơ và kinh nghiệm cùng độ vừa lòng như các nghệ sĩ khác. Văn học toán học đầy rẫy thuật ngữ mỹ học, và nhà toán học thường nói họ không mấy quan tâm đến kết quả, mà chính cái đẹp của phương pháp nương vào đó tìm thấy kết quả mới làm cho họ thấy thú vị và có ý nghĩa.

Nhưng nói toán học là một nghệ thuật không có nghĩa toán học là một trò tiêu khiển. Nghệ thuật chẳng phải là cái gì đó tồn tại chỉ để đáp ứng một mỹ cảm. Nghệ thuật xứng đáng với cái tên cho thấy một khía cạnh nào đó của thực tế. Đó là điều có thể có được bởi vì ý thức của chúng ta và thế giới bên ngoài chẳng phải là hai thực thể độc lập với nhau. Khoa học tiến bộ đến mức khá dể cho biết thế giới bên ngoài là, ít nhất là phần lớn, một sáng tạo của chúng ta. Và chúng ta hiểu biết phần lớn những gì chúng ta đã tạo ra bằng cách hiểu biết những quy luật của chúng ta, những quy luật y cứ vào đó chúng ta phải sáng tạo. Có vẻ như nhà toán học, trong việc sáng tạo nghệ thuật của mình, đang trưng bày sự vận hành của tâm chúng ta đã tạo ra vũ trụ vật chất không-thời gian chúng ta biết. Toán học cũng như âm nhạc hay bất kỳ nghệ thuật nào khác, là một trong những phương tiện dẫn chúng ta tới một tự ngã ý thức hoàn chỉnh. Ý nghĩa của toán học đúng là nằm trong sự thật nó là một nghệ thuật. Bằng cách cho chúng ta hay về bản thân tự nhiên của tâm chúng ta, toán học cho chúng ta hay nhiều điều tùy thuộc tâm chúng ta. Chúng ta là những người theo đúng phép của vũ trụ. Thậm chí có thể chúng ta kinh nghiệm không gì khác hơn là những gì chúng ta sáng tạo, và sáng tạo toán học tối vĩ đại của chúng ta là tự thân thế giới vật chất.

Tóm lại, toán học có một ý nghĩa sâu sắc trong vũ trụ chẳng phải vì nó trưng bày những nguyên tắc chúng ta phải tuân theo, mà chính vì nó trưng bày những nguyên tắc chúng ta áp đặt. Toán học chỉ cho chúng ta những tự kỷ quy luật và những điều kiện cần của kinh nghiệm. Chức năng thực của nghệ thuật là gia tăng sự tự giác của chúng ta, làm cho chúng ta hiểu rõ hơn về chúng ta, và vì thế, hiểu rõ hơn vũ trụ trong đó chúng ta đang sống. Và vì toán học, theo cách riêng của nó, cũng thực hiện chức năng của nghệ thuật, cho nên chẳng những quyến rũ về mặt mỹ học mà còn có ý nghĩa sâu sắc về mặt khoa học. Ngoài tính hữu ích của nó trong đời sống thực tế, yêu cầu được yêu chuộng của toán học căn cứ trên sự thật: Toán học là một nghệ thuật, và một nghệ thuật vĩ đại.

Toán học được phát triển nguyên là cho mục đích thực tế, như kế toán, đo lường, và cơ học. Ngay cả những khám phá lớn của thế kỷ XVII như lượng vô cùng bé và toán tích phân, trước hết là những công cụ chính để giải các bài toán cơ học, thiên văn học, và vật lý học. Lẽ cố nhiên ngay từ đầu toán học là một loại ý niệm hóa (idealization), nhưng trong một thời gian dài đã không được xa ra khỏi thực tế, hay, chính xác hơn, khỏi nhận thức của chúng ta về thực tế. Khi các nhà toán học đi xa hơn theo hướng ý niệm hóa, họ càng ngày càng nhận thức được rằng một khái niệm toán học có quyền tồn tại một khi được định nghĩa một cách nhất trí về mặt logic, chẳng cần có một kết nối với thế giới vật lý, và họ có quyền nghiêng cứu nó ngay cả khi tưởng như chẳng có ứng dụng thực tiễn nào trong tầm tay. Nói vắn tắt, điều đó dẫn đến “Toán học thuần túy” (Pure Mathematics) hay “Toán học vì lợi ích riêng của nó” (Mathematics for Its Own Sake).

Nhưng nếu bỏ qua chức năng kiểm soát của tính thích ứng, tính thích dụng thực tiễn, thời làm thế nào để phán đoán giá trị? Có chăng những tiêu chuẩn nội bộ có thể dẫn đến một hệ thống phân cấp khách quan hoặc nhiều hoặc ít? Hãy lưu ý cùng một câu hỏi cơ bản như vậy được đặt ra cho hội họa, âm nhạc, hay nghệ thuật nói chung: nó trở thành một câu hỏi mỹ học. Quả vậy, một câu trả lời thông thường là toán học trong một phạm vi rộng lớn là một nghệ thuật, một nghệ thuật mà sự phát triển được phái sinh từ, được chi dẫn bởi, và được phán đoán căn cứ trên những tiêu chuẩn mỹ học. Đối với người thường, họ ngạc nhiên có thể nói đến những tiêu chuẩn mỹ học trong một môn học hung tợn như toán học. Nhưng đối với các nhà toán học, cảm giác này rất mạnh mặc dầu rất khó giải thích: những gì là quy tắc của mỹ học này? Có thật trong đó hàm trữ cái vẻ đẹp của một định lý, của một học thuyết? Chăng có một câu trả lời nào thỏa mãn tất cả các nhà toán học.

Chủ trương toán học tương đồng với nghệ thuật được rất nhiều nhà toán học đồng ý. Chẳng hạn, G. H. Hardy đã có ý kiến rằng, nếu toán học có bất kỳ quyền tồn tại nào, thời nó chỉ tồn tại như một nghệ thuật.⁸ Hoạt động của nhà toán học có nhiều điểm chung với hoạt động của một nghệ sĩ. Một họa sĩ kết hợp màu sắc và hình thức, một nhạc sĩ kết hợp các âm điệu, một thi sĩ các ngôn từ, và nhà toán học các ý niệm của một loại nào đó.

Cảm giác nghệ thuật nói trên trở nên mãnh liệt hơn khi nghĩ đến một nhà nghiên cứu làm việc và tiến triển như thế nào. Chớ có nghĩ rằng nhà toán học hoạt động hoàn toàn theo phương thức lôgic và hệ thống. Toán gia thường mò mẫm trong bóng tối, không biết có nên nỗ lực chứng minh hoặc bác bỏ một mệnh đề nào đó, và những ý niệm thiết yếu thường xảy ra với chính mình một cách hết sức bất ngờ, có thể nói đó là một cảm hứng, như với các nhà soạn nhạc và các nghệ sĩ.

Tuy nhiên, các nhà toán học khác phản bác quan điểm nói trên và chủ trương một sự liên quan với toán học mà chẳng được hướng dẫn bởi các nhu cầu của các khoa học tự nhiên là nguy hiểm. Và gần như chắc chắn dẫn đến các học thuyết có thể khá tinh tế và có thể cung cấp cho tâm một niềm vui đặc biệt. Nhưng nó biểu tượng một loại gương trí tuệ hoàn toàn không có giá trị từ quan điểm khoa học hoặc tri thức.

Hiện có một khái niệm toán học có thể tóm tắt như sau. Một mặt, nó là một khoa học tại vì mục tiêu chính của nó là phục vụ các khoa học tự nhiên và kỹ thuật. Mục tiêu ấy thực sự là nguồn gốc của toán học và liên tục là một nguồn suối của các vấn đề. Mặt khác, nó là một nghệ thuật tại vì nó chủ yếu là một sáng tạo của tâm và tiến bộ đạt được là bằng các phương tiện trí tuệ. Nhiều phương tiện ấy xuất phát từ chiều sâu của tâm, với các tiêu chuẩn mỹ học là những trọng tài cuối cùng. Nhưng tự do trí tuệ ấy phải được chi phối bởi khả thể của các ứng dụng trong các khoa học tự nhiên để vận hành trong một thế giới của tư tưởng thuần túy.

Tuy nhiên, lối nhìn như thế thực quá hẹp hòi, nhất là điều khoản cuối cùng quá hạn chế. Nhiều nhà toán học tuyên bố dứt khoát muốn hoàn toàn tự do hành động, không quan tâm đến những hành vi kẻ khác. Lại có những lãnh vực toán học thuần túy có rất ít hay chẳng có ứng dụng bên ngoài toán học, nhưng không thể không xem như những thành tựu vĩ đại. Chẳng hạn, thuyết các số đại số, thuyết trường các lớp, hàm tự đẳng cấu, số siêu hạn, V..V...

Toán học trình bày có mạch lạc và nhất quán hơn trong nghệ thuật. Bằng chứng là cùng một định lý, thường được chứng minh bởi nhiều nhà toán học độc lập với nhau, sống trong những vùng cách xa nhau nhiều dặm, hay một số lượng lớn các tiểu luận có hai tác giả, hay đôi lúc nhiều hơn. Cũng có thể xảy ra trường hợp các bộ phận của toán học được khai triển hoàn toàn độc lập với nhau bỗng nhiên diễn thị những liên hệ trong tầng sâu do ảnh hưởng bởi những kiến giải mới. Toán học, phần lớn, là một cam kết tập thể. Đơn giản hóa và thống nhất hóa duy trì sự cân bằng với sự phát triển và mở rộng không ngừng nghỉ. Chúng hiển thị bất đoạn một sự thống nhất phi thường mặc dầu toán học quá rộng để bị một cá nhân khống chế.

Thật khó giải thích đầy đủ tất cả những điều nêu trên với chỉ những tiêu chuẩn như ưu nhã và đẹp trí tuệ, và đồng thời xét kỹ các nhu yếu của các khoa học tự nhiên và kỹ thuật. Tất nhiên phải tìm những tiêu chuẩn hay phương châm khác. Để dọn đường đến đó, hãy đặt những câu hỏi như toán học có một sự tồn tại riêng cho tự thân hay không? Chúng ta sáng tạo toán học hay khám phá lần hồi những học thuyết tồn tại đâu đó độc lập với chúng ta? Nếu quả như vậy thời thực tế toán học ở đâu?

Những câu hỏi như vậy tất nhiên không thực sự hoàn toàn rõ ràng có ý nghĩa. Nhưng cái cảm giác toán học, bằng cách nào đó, ở đâu đó, tồn tại sẵn trước, phổ biến rộng rãi. Chẳng hạn, nó được G. H. Hardy biểu hiện sắc

bén: “Tôi tin rằng thực tế toán học nằm bên ngoài chúng ta, rằng công năng của chúng ta là phát hiện hay quan sát nó, và rằng những định lý chúng ta chứng minh và huênh hoang mô tả như những “sáng tạo” của chúng ta, đơn giản là bút ký ghi lại những quan sát của chúng ta. Quan điểm này, dưới hình thức này hay hình thức khác, là quan điểm của nhiều triết gia nổi danh, từ Plato trở đi”⁹

Đối với một tín đồ như Hermite, thực tế toán học tồn tại sẵn trong Thượng Đế. Nhưng một dẫn chiếu đến nguồn gốc thần linh khó mãi ý một phi tín đồ. Tuy nhiên, nhiều người có một cảm giác mơ hồ toán học tồn tại một nơi nào đó, mặc dầu mỗi lúc nghĩ đến toán học, họ không thể tránh khỏi kết luận toán học chỉ là một sáng tạo của con người.

Chúng ta có thể đáp ứng ngắn gọn và đơn giản khốn cảnh hai chọn lựa với thuyết cho rằng chúng ta có khuynh hướng thiết định sự tồn tại trên tất cả những sự vật thuộc một văn minh hay văn hóa trong đó chúng ta chia sẻ chúng với những người khác hay có thể trao đổi ý kiến về chúng. Cái gì đó trở thành khách quan (objective; trái ngược với chủ quan = subjective) ngay khi chúng ta tin chắc nó tồn tại trong tâm trí của người khác trong cùng một hình thức như trong chúng ta và chúng ta có thể suy nghĩ về nó và thảo luận với nhau về nó. Bởi vì ngôn ngữ toán học rất chính xác cho nên nó rất thích hợp sự việc định nghĩa các khái niệm được sự đồng thuận như vậy. Điều đó cũng đủ để gây nơi chúng ta một *cảm giác* về một tồn tại khách quan, về một thực tế toán học. Khái niệm của chúng ta về thực tế vật lý cũng có những tư tưởng giống vậy.

Các nhà toán học chia sẻ với nhau một thực tế trí tuệ, một số không lồ các ý niệm, những đối tượng mà thuộc tính được biết rõ một phần và một phần không rõ, các học thuyết, định lý, các vấn đề được giải quyết và chưa được giải quyết, tất cả được khảo cứu bằng những công cụ của tâm. Các vấn đề và ý niệm đó phần nào do thể giới vật lý đề xuất. Tuy nhiên, nguồn gốc phát sinh chúng là do các suy cứu toán học thuần túy, như nhóm hay quaternions. Toàn thể này, tuy bắt nguồn từ tâm trí con người, hiển hiện như một khoa học tự nhiên theo nghĩa thông thường, như vật lý học hay sinh học, và cũng cụ thể như những môn học đó. Toán học không chỉ có diện lý thuyết, mà còn có diện thực nghiệm nữa.

Diện thứ nhất quá rõ ràng. Chúng ta hết sức thực hiện những định lý, nguyên tắc, chứng minh và phương pháp. Đó là diện lý thuyết. Nhưng lúc khởi đầu, chúng ta thường chẳng có ý niệm kỳ vọng những gì, và làm thế nào để tiếp tục, và chúng ta đạt được tri thức và trực quan thông qua thực nghiệm, nghĩa là, thông qua sự nghiên cứu các trường hợp đặc thù. Đầu tiên, chúng ta hy vọng bằng cách ấy dẫn đến một suy đoán hợp lý, và thứ đến, có lẽ phát hiện một ý niệm đưa tới một chứng minh nhất ban. Đương nhiên cũng có thể xảy ra ngay chính bản thân của một số trường hợp đặc thù gây nhiều hứng thú. Đó là diện thực nghiệm. Sự thật chúng ta thao tác với những đối tượng trí tuệ nhiều hơn với những đối tượng thực và thiết bị phòng thí nghiệm thực sự không quan trọng.

Theo truyền thống, các thí nghiệm đó được thực hiện trong não hay với giấy bút, vì thế mới nói đến công cụ của tâm. Chúng ta cũng phải nói đến máy vì tính đóng một vai trò ngày càng gia tăng trong việc mang tới cho diện thực nghiệm của toán học một chiều kích mới. Hiện giờ, chúng ta đã thấy những tương tác hấp dẫn giữa khoa học máy tính và toán học thuần túy.

Từ “khoa học” bây giờ bao gồm không chỉ các khoa học tự nhiên mà cả khái niệm bản thân tự nhiên của toán học xem như một khoa học thực nghiệm và lý thuyết. Nghĩa là, như một khoa học của trí tuệ, với đối tượng và phương thức sưu tác, tất cả đều là sáng tạo của tâm.

Nói đến động cơ và mỹ học, nếu không sử dụng các ứng dụng của khoa học tự nhiên làm thước đo, chúng ta không quay lại với ưu nhĩa của trí lực. Còn có những tiêu chuẩn thiết thực khác: đó là tính thích ứng, thích dụng (applicability) trong tự thân toán học. Sự xét đến thực tế toán học ấy, đến các vấn đề khai phóng, cấu trúc, đến các nhu cầu và kết nối giữa các lãnh vực khác nhau, đã cho thấy các hướng tiến hành khả dĩ có hiệu quả, có giá trị và cho phép nhà toán học tự định hướng và đan kết các giá trị tương đối với các vấn đề cũng như với các lý thuyết. Nhiều ví dụ cho thấy các nhà toán học thường có khả năng biết trước một số lãnh vực toán học sẽ phát triển như thế nào, những vấn đề nào cần được giải quyết và có thể được giải quyết nhanh chóng. Những phát biểu về tương lai của toán học đã được chứng minh là đúng. Những dự đoán như vậy không hoàn hảo, nhưng chúng đã thành công chỉ ra sự khác biệt với nghệ thuật.

Giáo sư Armand Borel, giáo sư thường trực ở Institute for Advanced Study tại Princeton, đã đưa ra ý kiến khái niệm toán học nên được xem như một khoa học tự nhiên về trí tuệ, như *một trong ba thành phần* của toán học (hai thành phần kia là diện lý thuyết và diện thực nghiệm), chẳng phải như toàn bộ. Các khoa học tự nhiên và kỹ thuật có vô số ứng dụng, phần lớn ảnh hưởng rất nhiều đến cuộc sống hằng ngày, do đó, thì thiết quyền tồn tại xã hội cho toán học. Nhưng với nhà toán học thuần túy, điều quan trọng là phê phán bản thân tự nhiên của toán học (an assessment of mathematics in itself). Sự đóng góp của các nhà toán học khác nhau dung hợp thành một kết cấu tri thức khổng lồ biểu tượng một chứng từ gây ấn tượng sâu sắc về quyền năng của tư lượng con người. Toán gia Jacobi có lần đã viết: “mục tiêu duy nhất của khoa học là tôn vinh tâm trí con người”¹⁰. Quả vậy, sự sáng tạo nói trên của các nhà toán học đã làm tư tưởng con người vinh hạnh phi thường.

2.2.3 Một chuyện tình toán học.

Với những ai học toán đến trình độ cao, kết nối toán học với đẹp là chuyện thông thường, vẻ đẹp toán học phát sinh từ sự kết hợp của sự kỳ lạ và sự không thể tránh khỏi. Những trừu tượng được định nghĩa một cách đơn giản tiết lộ những quái phích (quirks) và những phức tạp tính (complexities). Những cấu trúc dường như không liên quan nhau biến thành những tương ứng huyền bí. Các mẫu hình kỳ quái xuất hiện, và vẫn giữ tính cách kỳ quái mặc dầu được bao dung bởi tính chính xác của lôgic.

Những ấn tượng mỹ học ấy đầy năng lực phi thường khiến nhà toán học vĩ đại G. H. Hardy tuyên bố về đẹp, chứ chẳng phải hữu dụng, là lý do chân chính của toán học. Với Hardy, toán học, đầu tiên và tối trọng yếu, là một nghệ thuật sáng tạo. Các mẫu hình của toán gia, giống như của họa sĩ, hay của thi sĩ, phải đẹp. “Về đẹp là khảo nghiệm đầu tiên: không có vị trí vĩnh cửu trong thế giới cho toán học xấu xí.”¹¹

Và những gì là phản ứng thích hợp khi đối diện với vẻ đẹp toán học? Khoái lạc, chắc chắn; kính úy, có lẽ. Thomas Jefferson viết vào năm 76 tuổi rằng lặng ngắm những tính chân của toán học đã giúp ông lừa dối sự mệt mỏi của cuộc sống đang suy giảm. Bertrand Russell cho rằng vẻ đẹp của toán học “lạnh và khắc khổ, giống như vẻ đẹp của điêu khắc ...thuần khiết trác tuyệt. Đối với nhiều kẻ khác, vẻ đẹp toán học có thể gợi lên cảm giác ảm áp rõ rệt. Những người này có thể bắt chước làm theo những gì nói đến trong đối thoại *Symposium* của Plato. Trong đối thoại đó, Socrates nói với các khách mời tụ tập tại bữa tiệc, một nữ tu, tên Diotima, dẫn ông đi vào những bí ẩn của Eros, tên gọi Hy Lạp sự ham muốn trong tất cả các hình thức của nó.

Một hình thức của Eros là sự ham muốn tình dục nảy sinh bởi vẻ đẹp thể chất của một người yêu thích đặc biệt. Theo Diotima, đó là hình thức thấp nhất. Với tinh chỉnh triết học, tuy nhiên, Eros có thể nâng lên tới các đối tượng cao cả. Áp chót của những điều này -ngoại trừ ý niệm Plato về vẻ đẹp tự thân - là vẻ đẹp hoàn hảo và vượt thời gian được phát hiện bởi các khoa học toán học. vẻ đẹp như vậy gợi lên trong những người có thể nắm bắt nó một ham muốn tái sản xuất, chẳng phải về mặt sinh học, nhưng trí tuệ, bằng cách tạo ra những ý niệm và lý thuyết đẹp để rục rờ. Với Diotima, và có lẽ với cả Plato, đáp ứng phù hợp với vẻ đẹp toán học là hình thức của Eros chúng ta gọi tên là tình yêu (love).

Edward Frenkel, một thần đồng toán học người Nga, trở thành giáo sư tại Harvard năm 21 tuổi, hiện nay dạy tại Berkeley và theo chủ nghĩa Plato. Eros tràn khắp cuốn hồi ký mới rất hấp dẫn của ông, *Tình Yêu và Toán học* (Love & Math). Lúc còn nhỏ, ông mê vẻ đẹp của toán học như một coup de foudre. Ở tuổi thiếu niên, khi thực hiện một khám phá toán học mới, thời giống như nụ hôn đầu. Ngay cả khi những hi vọng của ông về nghề nghiệp bị chính sách Xô viết chống Do Thái làm khô héo, ông được sự nâng đỡ của niềm đam mê và niềm vui làm toán học. Và ông muốn mọi người cùng chia sẻ với ông niềm đam mê và niềm vui đó.

Trong câu chuyện này, có một thách thức. Toán học là trừu tượng và khó khăn, vẻ đẹp của nó dường như không thể tiếp cận được với hầu hết chúng ta. Thi hào người Đức H. M. Enzensberger nhận xét toán học là một điểm mù trong văn hóa của chúng ta - lãnh thổ ngoại quốc, chỉ có giới tinh anh, một số ít trí thức toán học tự nhốt mình trong đó. Những người thông hiểu những môn học khác tự hào thú nhận tính dung tục của mình khi nói đến toán học. Theo Frenkel, những kiệt tác toán học chưa bao giờ được giới thiệu với những người này. Toán học dạy ở Trung học, và ngay cả ở Đại học là hàng trăm hay hàng ngàn năm xưa. Phần lớn là giải quyết các bài toán thường quy bằng tính toán tẻ nhạt.

Khoảng giữa thế kỷ 19 một cuộc cách mạng đã xảy ra trong toán học: Trọng điểm chuyển từ tính toán giới hạn trong khoa học tới sự tự do sáng tạo các cấu trúc mới, ngôn ngữ mới. Các chứng minh toán học, với tất cả lôgic

nghiêm cần của chúng, coi giống như những tự sự, tình tiết và tiểu tình tiết, khúc chiết và quyết nghị. Đó là thứ toán học phần đông chưa bao giờ thấy.

Đề cập cho người đọc một cái nhìn thoáng qua về đẹp của toán học cao hơn, Frenkel đi thẳng vào công trình phát triển toán học đầy hứng khởi trong nửa thế kỷ sau: Chương trình Langlands (Langlands Program). Chương trình này được Robert Langlands, một toán gia người Canada, ở Institute for Advanced Study tại Princeton (kề thừa Văn phòng cũ của Einstein), thiết lập vào những năm 1960 nhằm trở thành một học thuyết thống nhất rộng lớn của toán học. Hầu hết các nhà toán học chuyên nghiệp không hề hay biết về Chương trình Langlands cho đến những năm 1990, khi chương trình này hiện ra trong tiêu đề giải quyết Định lý Cuối cùng của Fermat (Fermat's Last Theorem).

Kể từ đó, phạm vi của Chương trình đã mở rộng ra ngoài toán học thuần túy tới biên giới của vật lý học lý thuyết. Frenkel có lẽ là người đầu tiên cố gắng giải thích Chương trình Langlands - theo ông, “mã nguồn của tất cả các môn toán” - cho những độc giả không có cơ sở toán học. Vì thế, sách của ông là ba sự thật: một lá thư tình theo khuôn Plato gửi cho toán học; một nỗ lực giải thích cho ngoại hành một số ý niệm về một vở kịch-đang-tiến hành tối rộng lớn; và một giải thích tự truyện, khi thời cổ vũ khi thời khôi hài, ngay chính ông đã làm thế nào để trở thành một diễn viên lãnh đạo trong vở kịch đó.

Frenkel lớn lên thời Brezhnev tại Kolomna, một thị trấn công nghiệp, cách Moscow độ bảy mươi dặm. Ông kể rằng: “Tôi ghét toán học khi ở Trung học. Điều thực sự làm tôi hứng thú là vật lý học - đặc biệt là vật lý học lượng tử (quantum physics).” Ở tuổi thiếu niên, ông ham muốn đọc những cuốn sách vật lý học bình dân bao hàm những chủ dẫn kích thích thú vị về những hạt ở bên trong nguyên tử như “hadrons” và “quarks”. Ông ngạc nhiên tại sao các hạt cơ bản của tự nhiên xuất hiện trong những phẩm chủng mê hoặc, tại sao chúng rơi vào các gia đình có kích thước nhất định. Frenkel được soi sáng chỉ khi hai thân của ông, cả hai kỹ sư công nghiệp, sắp xếp cho ông gặp một người bạn cũ, toán gia Evgeny Evgenievich Petrov. Nhà toán học này giải thích cho ông những gì đem lại trật tự và logic cho những khối xây dựng của vật chất là cái gì đó, được gọi là một “nhóm đối xứng” (symmetry group) - một con thú toán học Frenkel chưa bao giờ gặp ở Trung học. Ngay khi ấy, ông có một tâm nhìn mới về một thế giới hoàn toàn khác. Ông kể lại chuyện sắp xếp ấy và hậu quả của cuộc gặp mặt như sau.

Mẹ ông thường thích nói về ông bất cứ gặp ai quen biết. Một ngày kia, mẹ ông gặp nhà toán học ấy ngoài đường sau một thời gian dài và ông là đề tài câu chuyện. Nghe nói ông ham thích khoa học, Evgeny Evgenievich bảo ngay: “Tôi phải gặp anh ta và cố gắng chuyển hoá anh ta qua toán học.” Mẹ tôi liền nói “Ồ, không được đâu. Nó không thích toán. Nó cho toán là nhảm chán. Nó muốn làm vật lý học lượng tử.” Evgeny Evgenievich đáp lại: “Đừng lo. Tôi nghĩ rằng tôi có cách cải biến chủ ý của anh ta.” Một cuộc gặp được sắp xếp. Lúc ấy, ông sắp lên 15 tuổi và vừa học xong lớp Chín, năm áp chót ở Trung học. Ông một năm trẻ hơn bạn cùng lớp vì học nhảy qua lớp Sáu.

Evgeny Evgenievich quả có một kế hoạch thông minh làm thế nào để chuyển hoá ông qua toán học. Ngay khi ông đến văn phòng, Evgeny Evgenievich hỏi ông: “Tôi nghe nói anh thích vật lý học lượng tử. Anh có nghe nói đến phương thức tám mặt của Gell-Mann và mô hình quark hay chưa?” “Vâng, tôi có đọc điều ấy trong nhiều sách bình dân.” “Nhưng anh có biết những gì là cơ sở của mô hình ấy hay không? Làm thế nào Gell-Mann đưa ra những ý niệm như vậy?” Trong khi ông chẳng biết trả lời ra sao, nhà toán học hỏi thêm: “Anh có nghe nói đến nhóm SU(3) hay không?” “SU gì?” “Làm thế nào anh có thể hiểu biết mô hình quark nếu anh không hiểu SU(3) là cái gì?”

Từ tủ sách, Evgeny Evgenievich với tay lấy ra một vài cuốn, giở ra, chỉ cho ông các trang đầy công thức toán học. Mặc dầu ông chẳng biết làm gì với những công thức ấy, nhưng ông có cảm giác tinh khôn hiểu ngay chúng bao hàm các giải đáp ông tìm kiếm bấy lâu. Đúng là thứ cảm giác của một tín đồ Kitô giáo vào lễ hội nhớ ngày biểu hiện Jesus Christ như Con của Thượng Đế (Epiphany). Ông bị mê hoặc bởi những gì ông đang nhìn và nghe. Ông xúc động bởi cái gì đó ông chưa bao giờ kinh nghiệm trước đây, cái gì đó bất khả ngôn thuyết, nhưng ông có cảm giác là nó đầy năng lực, nó gây sự hứng thú giống như khi nghe một bản nhạc hoặc nhìn một bức tranh tạo ấn tượng khó quên. Tất cả những gì ông có thể nghĩ là ô lên “Wow!”

“Có lẽ anh tưởng toán học là những gì họ dạy anh ở Trung học”, Evgeny Evgenievich nói, rồi lắc đầu “Không, đây này” và chỉ tay vào các công thức trong sách, “đây mới là toán học. Nếu anh muốn hiểu thực sự vật lý học

lượng tử, thời đây là chỗ anh cần phải bắt đầu. Gell-Mann tiên đoán quarks theo phương thức một thuyết toán học đẹp. Trong thực tế, đó là một khám phá toán học.” Nó trông có vẻ đáng sợ. Ông lo lắng hỏi: “Nhưng bắt đầu như thế nào để hiểu biết những thứ này?”

“Đừng lo. Điều đầu tiên anh phải học là khái niệm về một nhóm đối xứng. Đó là yếu chỉ (the main point). Một phần lớn toán học cũng như của vật lý học lý thuyết đặt cơ sở trên đó. Đây là vài cuốn sách tôi muốn anh đọc. Hãy bắt đầu đọc ngay và đánh dấu các câu anh không hiểu. Chúng ta sẽ gặp nhau tại đây mỗi tuần và bàn đến chuyện này.”

Evgeny Evgenievich đưa cho ông một cuốn về các nhóm đối xứng và một vài cuốn khác về những chủ đề khác nhau: về các số p-adic (một hệ thống số hoàn toàn khác với các số quen thuộc) và về tôpô (topology; môn khảo cứu những thuộc tính cơ bản nhất của các hình dạng hình học). Evgeny Evgenievich quả có một vị đạo (taste) không chê được, là tìm ra cách phối hợp hoàn hảo các chủ đề khá dĩ giúp ông thấy được con thú Toán học. Các sách ông cần phải đọc theo lời dặn của Evgeny Evgenievich bao hàm những cái nhìn thoáng qua một thế giới hoàn toàn khác biệt, một thế giới mà ngay sự tồn tại ông chẳng có thể tưởng tượng. Ông lập tức bị chuyển hoá.

Các nhóm là những phương thức đo lường tính đối xứng của một đối tượng: một bàn tròn, với nhóm đối xứng vô hạn của nó, là đối xứng nhiều hơn một bàn vuông, có nhóm đối xứng chỉ chứa bốn hành động. Nhưng (may thay) nhóm có nhiều tính năng ý vị hơn các điểm đo. Chúng có thể nắm bắt các đối xứng vượt ra khỏi hình học đơn thuần - các đối xứng ẩn trong một phương trình, hay trong một gia đình các hạt bên trong nguyên tử. Quyền năng thực của thuyết nhóm được chứng minh lần đầu tiên bởi Évariste Galois năm 1832. Điều Galois thấy là một phương thức thực sự đẹp mở rộng khái niệm đối xứng trong lãnh vực số. Thuyết các nhóm của Galois đã giúp ông giải được một bài toán cổ điển trong đại số đã làm các nhà toán học nhức đầu trong nhiều thế kỷ. Nói theo ngôn từ của Frenkel: “Galois không giải bài toán. Ông ấy *bừa* bài toán ra (He *hacked* the problem).” Tầm quan trọng của sự khám phá của Galois vượt quá bài toán đã truyền cảm hứng phát hiện nó. Hiện nay, các “nhóm Galois” phổ cập trong văn chương, và ý niệm về nhóm đã chứng tỏ là thông dụng nhất trong tất cả toán học, làm rõ nhiều huyền bí sâu xa. Nhà toán học lớn André Weil khuyên nhủ: “Khi có nghi vấn, hãy tìm đến nhóm!” Nghĩa là, hãy *tìm đến phu nhân* của toán học (the *cherchez la femme* of mathematics).

Frenkel tuổi trẻ say mê toán học, nỗ lực học tận mức toán học mà khả năng hiểu biết của ông cho phép. “Đó là những gì xảy ra khi người ta yêu.” Năm ông lên 16 tuổi là lúc ông phải nộp đơn vào Đại học. Sự lựa chọn lý tưởng cổ nhiên là Moscow State University, viết tắt theo tiếng Nga là MGU, *Moskouskiy Gosudarstvennyy Universitet*, phân khoa cơ học và toán học, có biệt danh *Mekh-Mat*, là một trong những trung tâm lớn của thế giới về toán học thuần túy. Nhưng vào năm 1984, một năm trước khi Gorbachev nắm chính quyền, sinh viên Do Thái không được nhận vào các lãnh vực học thuật liên quan tới vật lý học, viện cớ họ sẽ thu nhận kỹ thuật hạch nhân và sau đó di cư về Israel. Ông nhớ rõ trong buổi phỏng vấn để xét xem có thể nhận ông vào Đại học hay không, ngay sau khi ông khai với một bà nhân viên Đại học ông và mẹ ông có quốc tịch Nga, và cha ông là Do Thái, bà ấy liền bảo ngay: “Ông có biết dân Do Thái không được nhận vào Đại học Moscow?”

Tuy nhiên, hầu giữ bề ngoài có vẻ công bằng, Đại học vẫn cho phép ông tham gia khảo thí nhập học. Giải khuyến khích của Frenkel là được nhận vào Moscow Institute of Oil and Gas (biệt danh thiếu kính trọng *Kerosinka*), nơi có một chương trình toán học ứng dụng chuẩn bị nhân viên kỹ thuật cho các ngành công nghệ khác nhau. Nhưng với chứng say mê toán học thuần túy, ông không ngần ngại leo qua một hàng rào cao 20 feet của Mekh-Mat được canh phòng cẩn mật để nhảy vào các cuộc hội thảo. Không lâu, khả năng phi thường của ông được Fuchs, một nhà toán học nổi tiếng ở Moscow, nhận biết, ông được giao phó tìm lời giải cho một bài toán chưa được giải. Bài toán chiếm tất cả thời giờ tìm lời giải của ông, kéo dài nhiều tuần lễ, khiến ông mất ngủ. Và sau đó, đột nhiên, ông có nó. Ông nhớ lại:¹² “Đây là lần đầu tiên trong đời tôi, tôi sở hữu cái gì đó *không ai khác trên thế giới* sở hữu.”

Mặc dầu thành công phát hiện lời giải trên và nhiều lời giải các bài toán khó khác, Frenkel ở tuổi trưởng thành, phần nào có máu Do Thái, nhận thấy những triển vọng thành giáo sư Toán học Đại học quá ảm đạm. Nhưng tài năng của ông đã gây sự chú ý của các nhà toán học ở nước ngoài. Năm 1989, ông bất ngờ nhận được một lá thư của Derek Bok, Viện trưởng Đại học Harvard, gọi ông với chức danh “Doctor” mặc dầu ngay cả học vị cử nhân ông cũng không có, mời ông làm giáo sư thỉnh giảng. Ở tuổi 21, ông sẽ là giáo sư thỉnh giảng toán học tại Harvard, không có nghĩa vụ chính thức ngoại trừ trình bày công trình khảo cứu của ông trong những giảng khóa

không định trước. Thêm nữa, ông cũng kinh ngạc nhận được visa xuất cảnh của Liên Xô chỉ trong vòng một tháng, trở thành nhà toán học đầu tiên mở màn cho một cuộc di tản của các toán gia người Do Thái trong thời kỳ *perestroika*.

Cuộc điều chỉnh của Frenkel nhập vào cuộc sống của người Mỹ không gặp khó khăn. Quan trọng nhất là ông gặp Vladimir Drinfeld, một di dân Nga Do Thái tại Harvard, giới thiệu ông với Chương trình Langlands.

Giống như với thuyết Galois, Chương trình Langlands bắt nguồn từ trong một lá thư. Lá thư ấy là do Robert Langlands viết vào năm 1967, khi ấy tuổi ông độ ba mươi, gửi cho một đồng nghiệp tại Institute for Advanced Study, André Weil. Trong thư đó, Langlands đề xuất khả thể của một sự tương đồng sâu sắc giữa hai thuyết có vẻ như ở hai đầu đối diện của vũ trụ toán học: thuyết các nhóm Galois liên quan tới các đối xứng trong cảnh giới các số, và “giải tích hòa âm” (harmonic analysis) liên quan tới cách làm thế nào các sóng phức tạp (ví dụ: âm thanh của một bản giao hưởng) được dựng lập trên các sóng đơn giản (ví dụ: các công cụ cá biệt). Một số cấu trúc trong thế giới hòa âm, gọi là dạng tự đẳng cấu (automorphic forms), bằng cách nào đó, “biết” đến những mẫu hình huyền bí trong thế giới các số. Do đó, Langlands suy đoán có thể sử dụng những phương pháp của một thế giới để phát giác các hòa âm ẩn trong thế giới khác. Nếu Weil không thấy các trực quan trong lá thư đáng tin, Langlands nói thêm, “Tôi chắc ông có một giấc rác ngay tầm tay.”

Nhưng Weil, một nhân vật uy quyền trong toán học thế kỷ 20 (mất năm 1998 thọ 92 tuổi), là một khán giả tiếp thu (receptive audience). Trong một lá thư năm 1940 gửi cho cô em Simone Weil (1909 - 1943), một nhà triết học và huyền bí tôn giáo người Pháp, Weil mô tả một cách sống động tầm quan trọng của sự tương tự (analogy; loại suy) trong toán học. Âm chỉ đến *Bhavad-gita* (ông cũng là một học giả tiếng Phạn), André giải thích cho Simone hay rằng, đúng như thần Ấn độ giáo Vishnu có mười hiện thân hay hóa thân (avatars) khác nhau, một phương trình toán học dường như đơn giản có thể tự biểu hiện trong các cấu trúc trừu tượng rành rành khác nhau.

Chương trình Langlands là một phương án các suy đoán (a scheme of conjectures) sẽ biến những loại suy giả thiết như vậy thành những chiếc cầu logic kiên cố, kết nối những hòn đảo toán học khác nhau qua biển khơi của sự thiếu hiểu biết. Hay là, được xem như mẫu đá Rosetta¹³ cho phép các bộ lạc toán học trên các hòn đảo khác nhau - số lý thuyết gia, tô pô học gia, hình học đại số gia - nói chuyện với nhau và tụ tập các tài nguyên khái niệm. Cho đến nay, hầu như phần lớn các suy đoán Langlands không được chứng thật. Thậm chí có thật chúng đúng? số đông toán gia quả quyết chúng đúng. Như Ian Stewart nhận xét, Chương trình Langlands là “thứ toán học phải đúng tại vì nó thật là đẹp.” Sự thống nhất nó mang lại cho toán học cấp cao có thể mở ra một thời đại hoàng kim, trong đó chúng ta có thể cuối cùng phát hiện, theo lời của Frenkel, “những gì toán học thực sự là.”

Bởi vì không có bằng cấp Ph. D. (Doctor of Philosophy), Frenkel phải ném mũ “hạ bệ” từ giáo sư Harvard xuống sinh viên đang soạn luận văn tiến sĩ. Luận văn của ông, hoàn tất chỉ trong một năm, chứng minh một định lý giúp mở một chương mới trong Chương trình Langlands, mở rộng từ cảnh giới các số đến cảnh giới hình học các mặt cong, chẳng hạn, mặt của một quả bóng hay của một donut. Như thế có nghĩa là, xoắn (twisting), thậm chí phá vỡ (shattering), nhiều ý niệm toán học quen thuộc, như ý niệm cơ bản về các số đếm (counting numbers).

Hãy xét xem số 3. Nó không có cấu trúc nội bộ. Quả thật nhàm chán. Nhưng giả sử bây giờ thay thế số 3 bằng một “không gian vector” có 3 thứ nguyên, nghĩa là, một không gian mỗi điểm trong đó biểu tượng một bộ ba số với những quy tắc riêng về cộng và nhân. Như thế, chúng ta có cái gì đó đáng chú ý: một cấu trúc với nhiều đối xứng hơn một ngôi đền Hy Lạp. Frenkel viết: “Trong toán học hiện đại, chúng ta sáng tạo một thế giới mới trong đó các số trở nên sống động như những không gian vector.” Và các khái niệm cơ bản khác cũng trở nên phong phú hơn. Những “hàm số” mà chúng ta học ở Trung học, như trong $y = f(x)$, đều chuyển biến thành những sinh vật kỳ lạ gọi là những “bó” (sheaves).

Động thái tiếp theo là mở rộng Chương trình Langlands vượt quá biên giới của bản thân toán học. Vào những năm 1970, có sự nhận thấy rằng một trong các thành phần chính của Chương trình, “nhóm đối ngẫu Langlands” (Langlands dual group), xuất hiện trong vật lý học lượng tử. Điều này xảy đến một cách bất ngờ. Có lẽ nào cùng một mẫu hình chỉ có thể thấy thoáng qua lơ lửng trong thế giới của số và của hình học cũng có đối tác trong thuyết mô tả những lực cơ bản của tự nhiên? Frenkel nghĩ rằng có thể có một liên hệ giữa vật lý học lượng tử và Chương trình Langlands. Ông và một số đồng nghiệp bắt tay ngay vào việc nghiên cứu nó với sự yểm trợ chưa từng thấy của Bộ Quốc Phòng trợ cấp hàng triệu đô la vào năm 2004.

Trong dịp này, Frenkel có cơ hội hợp tác với Edward Witten, được nhiều người coi như là nhà vật lý toán học tối vĩ đại còn sống (và như Langlands, một thành viên của The Institute for Advanced Study tại Princeton). Witten là một người rành huyền thuyết (string theory), một nỗ lực của các nhà vật lý học thống nhất tất cả lực của tự nhiên, bao gồm cả trọng lực (gravity), vào gọn trong một bao toán học. Chính Witten nhận thấy một sự tương tự giữa các “branes” (viết tắt chữ “membranes”) được các nhà huyền học giả định trong huyền thuyết và các “bó” (“sheaves”) do các nhà toán học phát minh. Nhận xét này mở ra một cuộc đối thoại phong phú giữa Chương trình Langlands với mục tiêu thống nhất toán học, và huyền thuyết với mục tiêu thống nhất vật lý học. Mặc dầu huyền thuyết thiếu khả năng mô tả vũ trụ của chúng ta một cách hữu hiệu, sự kết nối với Chương trình Langlands đã mang lại những hiểu biết sâu sắc về hoạt động của vật lý học các hạt.

Đây chẳng phải là lần đầu tiên các khái niệm toán học được nghiên cứu vì vẻ đẹp thuần túy của chúng sau này chuyển sang soi sáng thế giới vật lý. Einstein kinh ngạc hỏi, “toán học chung quy là một sản phẩm của tư tưởng con người độc lập với kinh nghiệm, sao lại thích hợp phi thường với các đối tượng của thực tế?” Frenkel không thắc mắc giống như Einstein. Theo Frenkel, các cấu trúc toán học *là* trong số các “đối tượng của thực tế”. Chúng cũng thực tồn như bất cứ thứ gì trong thế giới vật lý hay thế giới tâm thức. Hơn nữa, chúng chẳng phải là sản phẩm của tư tưởng con người; đúng hơn, chúng tồn tại mãi mãi trong một cảnh giới của riêng chúng theo khuôn Plato, chờ được khám phá bởi các nhà toán học. Hầu hết các nhà toán học tin rằng toán học có một thực tế vượt quá tâm trí con người, đặc biệt là các nhà toán học lớn như Frenkel và Langlands, Roger Penrose và Kurt Gödel. Niềm tin ấy phát sinh từ những mẫu hình và đối ứng kỳ lạ bất ngờ xuất hiện, gợi ý về cái gì đó tiềm ẩn và huyền bí. Ai đặt những mẫu hình ấy ở đó? Chắc chắn chẳng phải là chúng ta.

Các nhà triết học không ngừng tranh luận về bản thể học của toán học trong nhiều thế kỷ. Chủ trương của Frenkel trong *Tình yêu và Toán học* thường được gọi là chủ nghĩa Plato toán học (Mathematical Platonism). Nên biết có nhiều loại Platonism, và cũng có nhiều cách thông diễn toán học. Theo Frenkel, cái thế giới thường được gọi thế giới Plato toán học là nơi cư trú các khái niệm và ý niệm toán học. Plato là triết gia Hy Lạp đầu tiên tranh luận rằng các thực thể toán học đều độc lập với những hoạt động lý tính của chúng ta. Nhà vật lý toán học rất được hoan nghênh, Roger Penrose, viết trong tập sách *The Road to Reality* (Con Đường đến Thực tế) của ông, những tuyên bố toán học thuộc về thế giới Plato toán học chính là những khẳng định đúng một cách khách quan. Bảo rằng một tuyên bố toán học nào đó có một tồn tại theo khuôn Plato, tức nó đúng theo một nghĩa khách quan. Giống vậy, các ý tưởng toán học có một tồn tại theo khuôn Plato tại vì chúng là những ý tưởng khách quan.

Frenkel, giống Penrose, tin rằng thế giới Plato toán học tách rời khỏi cả hai thế giới, vật lý và tâm thức. Penrose chỉ cho thấy chủ trương thông diễn một cách chủ quan tất nhanh chóng dẫn chúng ta tới những khẳng định hiển nhiên vô nghĩa, nhấn mạnh tính năng độc lập của tri thức toán học với bất kỳ hoạt động nào của con người.

Thế giới Plato toán học cũng tồn tại độc lập với thực tế vật lý. Ví dụ: Thiết bị của thuyết trường quy phạm (gauge theory) ban đầu được các nhà toán học phát triển chẳng cần quy chiếu vật lý học. Trong thực tế, chỉ có ba trong số các mô hình mô tả các lực đã biết của tự nhiên (lực điện từ, yếu, và mạnh). Chúng tương ứng với ba nhóm Lie cụ thể (nhóm vòng tròn, SU(2), và SU(3), theo thứ tự), mặc dầu có một thuyết trường quy phạm cho bất kỳ nhóm Lie nào. Có rất nhiều ví dụ khác về những lý thuyết toán học phong phú không trực tiếp liên quan đến bất kỳ loại thực thể vật lý nào.

Nguồn gốc của những khả năng vô hạn của tri thức toán học chính là *tính khách quan* của nó. Tính này phân biệt toán học với bất kỳ loại nỗ lực nào khác của con người. Sự hiểu biết những gì ở đằng sau tính khách quan ấy sẽ soi sáng những bí ẩn sâu sắc nhất của thực tế vật lý, ý thức, và những tương hỗ quan hệ giữa chúng. Nói cách khác, càng gần thế giới Plato toán học, chúng ta càng có nhiều năng lực hiểu biết thế giới quanh ta và vị trí của chúng ta trong đó.

Chẳng có gì ngăn cản chúng ta thâm nhập cái thực thể Plato ấy và kết hợp nó với cuộc sống của chúng ta. Điều thực sự đáng chú ý là tính cách dân chủ vốn có của toán học: trong khi một số bộ phận của hai thế giới vật lý và tâm thức có thể được nhận thức hay thông diễn khác nhau bởi các người khác nhau, hay thậm chí chẳng có thể tiếp cận bởi một số người trong chúng ta, khái niệm và phương trình toán học đều được nhận thức theo cùng một phương thức và thuộc về tất cả chúng ta một cách bằng nhau. Không ai có thể có độc quyền về tri thức toán học; không ai có thể đòi một công thức hay ý niệm toán học như là một phát minh của họ; không ai có thể được cấp bằng sáng chế một công thức! Chẳng hạn, Einstein không thể xin cấp một bằng sáng tạo công thức $E = mc^2$ của

ông. Lý do: Nếu chính xác, một công thức toán học biểu hiện một tính chân vĩnh hằng về vũ trụ. Do đó, chẳng có ai có thể tự nhận có quyền sở hữu điều đó; nó là của chúng ta để chia sẻ. Giàu hay nghèo, đen hay trắng, trẻ hay già, không một ai có thể chiếm lấy các công thức đó của chúng ta. Trong thế giới này, không có gì sâu sắc và thanh lịch bằng chúng, tuy vậy, chúng vẫn có sẵn cho tất cả.

Quan điểm toán học theo Plato có vấn đề mà Frenkel chẳng bao giờ muốn nhận ra như vậy; đó là nó muốn làm tri thức toán học trở thành một phép lạ. Nếu các đối tượng toán học tồn tại ngoài chúng ta, trụ trong một thiên đường khuôn Plato vượt quá thể giới vật lý của không gian và thời gian, thời làm thế nào tâm trí con người liên lạc với các đối tượng ấy và tìm hiểu các thuộc tính và quan hệ của chúng? Các nhà toán học có ESP¹⁴ (nhận thức ngoại cảm) hay không? Chủ nghĩa Plato, như triết gia Hilary Putnam nhận xét, tưởng như không phù hợp với sự thật đơn giản là chúng ta suy tư với những não của chúng ta, chứ chẳng phải với những linh hồn phi vật chất.

Có lẽ Frenkel phải được phép vui thích các không tưởng của mình. Chung cuộc, mỗi người yêu đều có những ảo tưởng lãng mạn về người mình yêu. Năm 2009, trong lúc Frenkel ở Paris trong tư cách *Chaired' Excellence* của Fondation Sciences Mathématiques, ông quyết định làm một bộ phim ngắn biểu hiện niềm đam mê toán học của ông. Lấy cảm hứng từ bộ phim *Rites of Love and Death* của Yukio Mishima, ông chọn tiêu đề cho bộ phim của ông là *Rites of Love and Math* (tạm dịch Nghi thức Tình yêu và Toán học). Trong bộ phim câm ngụ ngôn theo kiểu Noh Nhật Bản này, Frenkel đóng vai trò một nhà toán học sáng tạo một công thức của Tình yêu. Để giữ công thức khỏi rơi vào tay tà ác, ông giấu nó khỏi thế giới bằng cách dùng một que tre sẫm nó vào thân của người ông yêu, và sau đó chuẩn bị hy sinh bản thân để bảo vệ nó.

Khi bộ phim ra mắt ở Paris năm 2010, báo Le Monde gọi nó “một bộ phim ngắn tuyệt vời cung cấp một tầm nhìn lãng mạn bất thường của các nhà toán học.” “Công thức của Tình yêu” (the ‘Formula of love’) được sử dụng trong phim là một công thức chính Frenkel đã phát hiện trong quá trình khảo cứu cơ sở của thuyết trường lượng tử (quantum field theory). Nó đẹp, nhưng dễ sợ. Các số duy nhất trong đó là zero, một, và vô hạn. Tình yêu đâu phải như thế? Đây là công thức (5.7) trong tiểu luận *Instantons Beyond Topological Theory I* ông viết chung với hai người bạn, Andrey Losev và Nikita Nekrasov năm 2006.

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega F(qz, \bar{q}\bar{z}) = \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \int_{|z| < \epsilon^{-1}} \omega_{z\bar{z}} z^m \bar{z}^{\bar{m}} dz d\bar{z} \cdot \frac{q^m \bar{q}^{\bar{m}}}{m! \bar{m}!} \partial_z^m \partial_{\bar{z}}^{\bar{m}} F \Big|_{z=0} \\ + q\bar{q} \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \frac{q^m \bar{q}^{\bar{m}}}{m! \bar{m}!} \partial_w^m \partial_{\bar{w}}^{\bar{m}} \omega_{w\bar{w}} \Big|_{w=0} \cdot \int_{|w| < q^{-1}\epsilon^{-1}} F w^m \bar{w}^{\bar{m}} dw d\bar{w}.$$

Công thức của Tình yêu

2.2.4 Toán học được phát minh hay phát hiện?

Phần đông chúng ta nghĩ rằng toán học thao tác đặc biệt thích đáng và hữu hiệu - các nhà khoa học có thể thiết kế các công thức để mô tả các biến cố bên trong nguyên tử hay các kỹ sư có thể tính toán đường bay cho phi thuyền. Chúng ta thừa nhận quan điểm, nguyên được Galileo chủ trương, toán học là ngôn ngữ của khoa học và kỳ vọng ngữ pháp của nó giải thích những kết quả thực nghiệm và thậm chí tiên đoán những hiện tượng mới. Tuy vậy, năng lực của toán học luôn luôn gây kinh ngạc. Chẳng hạn, hãy xét xem các phương trình nổi tiếng của nhà vật lý học người xứ Scotland James Clerk Maxwell: bốn biểu thức ấy chẳng những tóm tắt tất cả những gì biết được về điện từ trong những năm 1860, chúng còn đoán trước sự tồn tại của các sóng vô tuyến điện (radio waves) hai thập niên trước khi nhà vật lý học Đức quốc Heinrich Hertz phát hiện chúng. Rất ít ngôn ngữ có hiệu lực, có khả năng diễn đạt giá trị của vật chất một cách ngắn gọn và với độ chính xác như vậy.

Mario Livio, một nhà thiên thể vật lý học lý thuyết tại The Space Telescope Science Institute ở Baltimore cho biết những khi ông nỗ lực tìm hiểu những hệ thống tiền thân nào sản sinh sự bùng nổ của các hăng tinh loại Ia hay tính toán số phận của trái đất khi mặt trời của chúng ta trở thành một Hồng cự tinh [Red giant; hăng tinh không còn hitrô trong hạch tâm để cung cấp nhiên liệu cho hạch tụ biến (nuclear fusion)], công cụ ông sử dụng và những

mô hình ông khai triển đều là toán học. Phương thức huyền bí toán học nắm bắt thế giới tự nhiên đã thu hút sự chú ý đặc biệt của các nhà khoa học.

Ở cốt lõi của huyền bí này là một luận điểm mà các nhà toán học, vật lý học, triết học và khoa học nhận thức đã có trong nhiều thế kỷ: toán học là một tập hợp công cụ được sáng tác, như Einstein tin tưởng? Hay toán học hiện tồn tại trong một cảnh giới trừu tượng nào đó và con người chỉ khám phá những tính chân của nó? Nhiều nhà toán học nổi tiếng - bao gồm David Hilbert, Georg Cantor và nhóm Nicolas Bourbaki - chia sẻ quan điểm của Einstein, liên kết với một trường phái tư tưởng gọi là Hình thức chủ nghĩa (Formalism). Nhưng những tư tưởng gia xuất chúng khác - trong số đó có Godfrey Harold Hardy, Roger Penrose và Kurt Gödel - chủ trương quan điểm trái ngược, Plato chủ nghĩa (Platonism).

Theo Mario Livio, nếu chỉ đơn giản hỏi toán học là được phát minh hay phát hiện, chúng ta bỏ quên khả năng của một câu trả lời phức tạp: cả sáng tác và khám phá đóng một vai trò quan trọng. Cả hai giải thích tại sao toán học thao tác quá tốt đẹp. Tuy nhiên, loại bỏ phép nhị phân giữa sáng tác và khám phá cũng chưa hoàn toàn giải thích tính hữu hiệu bất hợp lý của toán học.

2.2.4a Sáng tạo và Khám phá.

Toán học theo hai phương thức hữu hiệu bất hợp lý, một là tích cực, hai là tiêu cực. Đôi khi các nhà khoa học sáng tạo những phương pháp chỉ nhằm để định lượng các hiện tượng trong thực thể giới. Chẳng hạn, Isaac Newton thiết chế toán vi tích phân (calculus) với mục tiêu nắm bắt chuyển động và biến chuyển, phân chúng thành những chuỗi từng khung một vô cùng bé. Lẽ cố nhiên, các thiết chế tích cực như vậy đều hữu hiệu; chung cùng, các công cụ đều thiết chế theo lệnh. Tuy vậy, đáng ngạc nhiên là trong một số trường hợp, tính chính xác của chúng thật phi thường. Ví dụ: điện động lực học lượng tử (quantum electrodynamics) là thuyết toán học được khai triển để mô tả ánh sáng và vật chất tương tác như thế nào. Khi các nhà khoa học dùng nó để tính mômen từ của electron, trị lý thuyết phù hợp với trị thực nghiệm mới nhất trong vòng một vài phần nghìn tỷ!

Đáng kinh ngạc hơn, có lẽ, đôi khi các nhà toán học khai triển toàn thể lãnh vực nghiên cứu chẳng có ý niệm ứng dụng, nhưng sau đó hàng chục năm, thậm chí nhiều thế kỷ, các nhà vật lý học đương thời khám phá những ngành toán đó giải thích các quan sát của họ. Có rất nhiều ví dụ về phương thức hữu hiệu tiêu cực như thế. Évariste Galois, chẳng hạn, khai triển thuyết nhóm đầu những năm 1800 chỉ với mục đích duy nhất để xác định khả năng giải quyết các phương trình đa thức. Nói rộng ra, nhóm là những cấu trúc đại số cấu thành bởi những tập hợp đối tượng (chẳng hạn, các số nguyên) thống nhất dưới một số thao tác (ví dụ: phép cộng) tuân theo các quy tắc cụ thể [trong số đó, sự tồn tại của một phần tử đơn vị (identity element) như 0 (zero), khi cộng với bất kỳ số nguyên nào kết quả là số nguyên đó]. Trong vật lý học thế kỷ 20, lãnh vực trừu tượng đó biến thành phương thức hiệu quả nhất để phân loại các hạt cơ bản - những khối xây dựng của vật chất. Vào những năm 1960, hai nhà vật lý học, Murray Gell-Mann và Yuval Ne'eman, độc lập với nhau, chứng minh một nhóm cụ thể, gọi là SU(3), phản ánh cách vận hành của các hạt bên trong nguyên tử gọi là hadrons - một kết nối cuối cùng đặt cơ sở cho thuyết hiện đại về sự kết hợp các hạt nhân nguyên tử.

Sự nghiên cứu các nút (knots) là một ví dụ hay khác của tính hữu hiệu tiêu cực. Nút toán học chỉ khác nút thường ngày ở chỗ chúng không có đầu lỏng lẻo. Trong nhiều thập niên các nhà toán học không ngừng nghiên cứu các nút như một ngành toán học nghĩa lý súc tích sâu xa. Đáng ngạc nhiên, hiện giờ thuyết các nút cung cấp các kiến giải quan trọng về huyền thuyết (string theory) và trọng lực lượng tử tuần hoàn (loop quantum gravity) - những nỗ lực đương tiền tối hảo để diễn đạt một thuyết không-thời gian hòa hợp cơ học lượng tử và thuyết tương đối rộng. Cũng giống vậy, những khám phá của nhà toán học Hardy trong thuyết các số đến trước lãnh vực mật mã học (cryptography) của quân đội, mặc dầu Hardy tuyên bố trước đó “chưa ai khám phá được bất cứ mục đích chiến tranh nào nhằm sử dụng thuyết các số.” Và năm 1854, Bernhard Riemann mô tả các hình học phi-Euclid - các không gian lạ kỳ trong đó các đường song song hội tụ hay phân kỳ. Hơn nửa thế kỷ sau, Einstein viện dẫn những hình học đó để thiết lập thuyết tương đối rộng của ông.

Một mẫu hình xuất hiện: con người phát minh những khái niệm bằng cách trừu tượng các yếu tố từ thế giới chung quanh - các hình dạng, tuyến, tập hợp, nhóm, và V.V... - hoặc cho một mục đích riêng nào đó hay đơn giản, cho vui. Sau đó, tiếp tục khám phá những kết nối trong số các khái niệm đó. Tại vì những phát minh và phát hiện là do người thực hiện - không giống loại phát minh chủ trương bởi phái Plato - toán học của chúng ta cuối cùng đặt cơ sở trên những nhận thức của chúng ta và trên những hình ảnh tâm thức chúng ta có thể gọi lên. Chẳng

hạn, chúng ta có tài năng bẩm sinh gọi là “subitizing”, nhận ra số lượng (một nhóm các mục) trong nháy mắt và không đếm. Số lượng tối đa của các mục được nhận ra tức thời là vào khoảng năm. Chúng ta rất giỏi cảm tri biên duyên của các đối tượng riêng lẻ và phân biệt giữa đường thẳng và cong và giữa các hình dạng khác nhau như vòng tròn và elip - những khả năng khả dĩ dẫn đến sự khai triển số học và hình học. Cũng như thế, kinh nghiệm lặp lại về nhân và quả ít nhất phần nào đóng góp vào việc sáng tạo lôgic cùng với ý tưởng một số phát biểu bao hàm tính hợp lý (validity) của những phát biểu khác.

2.2.4b Chọn lựa và Tiến hóa.

Michael Atiyah, một trong các nhà toán học lớn nhất của thế kỷ 20, trình bày một thực nghiệm tư tưởng (thought experiment) ưu nhĩa cho thấy cảm tri tô màu như thế nào những khái niệm toán học chúng ta ôm ấp - ngay cả những khái niệm tưởng như cơ bản như các số. Nhà toán học Đức Leopold Kronecker tuyên bố nổi tiếng, “Thượng Đế sáng tạo các số nguyên tự nhiên, tất cả những gì khác là công tác của con người.” Nhưng trong một môi trường không có gì để đếm, thử hỏi khái niệm các số có sinh khởi hay không?

Chúng ta chọn những công cụ toán học áp dụng cho thế giới của chúng ta - một sự thật chắc chắn có góp phần vào tính hữu hiệu của toán học. Các nhà khoa học không chọn các phương pháp phân tích một cách tùy tiện, nói cho đúng là căn cứ trên sự chúng dự đoán các kết quả thực nghiệm tốt như thế nào. Khi một cái máy bóng quần vợt (tennis ball machine) bắn ra những quả bóng, chúng ta có thể dùng các số tự nhiên để mô tả lưu động của các bóng. Nhưng khi các lính cứu hỏa sử dụng một ống dẫn nước, họ phải dùng những khái niệm khác, như thể tích hoặc trọng lượng, để sự mô tả dòng nước có ý nghĩa. Cũng vậy, khi các hạt khác nhau ở bên trong nguyên tử va chạm trong một máy gia tốc hạt (particle accelerator), các nhà vật lý học sử dụng những phương thức đo lường như năng lượng (energy) và động lượng (momentum).

Theo thời gian chỉ có các mô hình tối hảo tồn tại. Chẳng hạn, những đo lường tối chính xác mới nhất về tuế sai (precession; tiến động) của hành tinh Mercury đã đòi hỏi phải cải biến thuyết trọng lực của Newton theo hình thức của thuyết tương đối rộng của Einstein. Hết thảy các khái niệm toán học thành công đều có một tuổi thọ dài: công thức diện tích của một hình cầu hôm nay vẫn đúng như khi Archimedes chứng minh nó vào khoảng năm 250 B.C. Kết quả là các nhà khoa học thuộc bất kỳ thời đại nào có thể tìm kiếm thông qua một kho chứa rộng lớn các hình thức luận (formalisms) những phương pháp thích hợp nhất.

Các nhà khoa học chẳng những chọn lựa các hạng mục có lợi nhất từ những gì có sẵn, họ còn có khuynh hướng chọn lựa những vấn đề có thể giải quyết theo phương thức toán học. Tuy nhiên, có một loạt các hiện tượng chẳng có thể dự đoán theo phương thức toán học, đôi khi ngay cả trên nguyên tắc. Trong kinh tế học, nhiều biến lượng không liên quan đến sự phân tích định lượng, chẳng hạn như tâm lý trường tế của quần chúng. Giá trị dự đoán của bất kỳ học thuyết nào tùy thuộc tính bất biến (constancy) của các quan hệ cơ bản giữa các biến lượng. Những phân tích của chúng ta không nắm bắt hoàn toàn các hệ thống phát triển sự hỗn loạn, trong đó những biến đổi nhỏ nhất trong điều kiện ban đầu có thể sản sinh các kết quả cuối cùng hoàn toàn khác biệt, cảm cần bất kỳ dự đoán dài hạn nào. Các nhà toán học thiết chế các môn thống kê và xác suất để đối phó với những thiếu sót như vậy, nhưng bản thân toán học là hữu hạn, như Gödel đã chứng minh.

2.2.4c Tính đối xứng của Tự nhiên.

Sự chọn lựa cẩn thận các vấn đề và giải pháp chỉ phần nào giải thích sự thành công của toán học trong sự mô tả các luật của tự nhiên. Những luật như vậy trước hết phải tồn tại! Với các nhà toán học cũng như vật lý học, những luật phổ biến tưởng như chi phối vũ trụ của chúng ta: một nguyên tử cách xa 12 tỷ quang niên vận hành giống như một nguyên tử trên trái đất; ánh sáng trong quá khứ xa xôi và ánh sáng ngày nay chia sẻ những đặc điểm giống nhau; và các lực hấp dẫn hình thành những cấu trúc ban đầu của vũ trụ vẫn ngự trị trên các thiên hà ngày nay. Các nhà toán học và vật lý học phát minh khái niệm đối xứng để mô tả loại miễn biến đổi đó.

Các luật vật lý học tưởng như hiển thị tính đối xứng đối với không gian và thời gian: chúng không tùy thuộc nơi chốn, góc độ, hay lúc nào chúng ta xét xem chúng. Chúng bình đẳng, bất nhị đối với tất cả các quan sát viên, không phân biệt các quan sát viên ấy đứng yên, chuyển động với tốc độ không đổi hay tăng tốc. Do đó, các kết quả của chúng ta được giải thích bởi cùng luật dẫn các thí nghiệm xảy ra ở Trung Quốc, Việt Nam hay ở thiên hà Andromeda, và dẫn chúng ta tiến hành thí nghiệm ngày hôm nay hay có ai đó thực hành thí nghiệm một tỷ năm sau. Nếu vũ trụ không sở hữu những đối xứng đó, mọi mô hình toán học thiết lập căn cứ trên những quan sát của

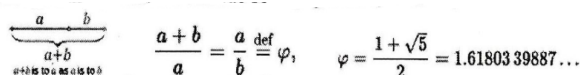
chúng ta sẽ xem như không có, tại vì chúng ta sẽ không ngừng lặp lại những thí nghiệm tại mọi điểm trong không gian và thời gian.

Chúng ta khởi đầu với hai câu hỏi cơ bản, hỗ tương quan hệ: toán học được phát minh hay phát hiện? Và những gì đã cấp cho toán học những quyền năng giải thích và dự đoán? Giải đáp câu hỏi đầu, toán học thực sự là một kết hợp phức tạp các phát minh và phát hiện. Các khái niệm, nói chung, đều được sáng tạo, và mặc dầu tất cả các quan hệ đúng giữa chúng tồn tại trước khi được khám phá, con người vẫn chọn lựa những khái niệm nào để nghiên cứu. Câu hỏi thứ hai trở nên phức tạp hơn. Chắc chắn sự chọn lựa các chủ đề chúng ta giải quyết theo phương thức toán học đóng một vai trò quan trọng trong tính hữu hiệu được biết của toán học. Nhưng chung cuộc toán học không thao tác nếu không có những tính năng phổ biến cần phải khám phá. Chúng ta có thể hỏi: Tại sao chung cuộc có những luật phổ biến của tự nhiên? Hay hỏi tương đương, tại sao vũ trụ của chúng ta bị chi phối bởi một số đối xứng? Chưa ai tìm ra được lời giải đáp các câu hỏi ấy, tuy nhiên, có lẽ cần ghi nhận rằng trong một vũ trụ chẳng có những thuộc tính nói trên, tính phức tạp và cuộc sống sẽ chẳng bao giờ xuất hiện, và chúng ta sẽ không có mặt ở đây để đặt câu hỏi.

Chú thích

1. Phòng theo bài viết Cognitive Science and the Connection between Physics and Mathematics của Anshu Gupta Miýumdar và Tejinder Singh. Quan điểm của hai vị này là toán học xuất phát từ não con người chứ không phải có sẵn “ở ngoài kia”.

2. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Platonism in the Philosophy of Mathematics. Trong triết học Toán học, có một ý tưởng gọi là Mathematical Platonism, danh từ Platonism - tạm dịch là thuyết Plato - bắt nguồn từ thuyết nổi tiếng về ý niệm của Plato: Thuyết Plato về toán học (*mathematical platonism*) là quan điểm siêu hình thừa nhận có những đối tượng toán học trừu tượng mà sự tồn tại độc lập với chúng ta, với ngôn ngữ, tư tưởng và thực hành của chúng ta. Giống như electrons và các hành tinh tồn tại độc lập với chúng ta, các số và tập hợp cũng như vậy. Ý niệm đó biện minh toán học là một thực thể độc lập với con người. Do đó, con người không phát minh toán học. Con người nhận ra và học tập toán học. Có 3 điều kiện phải thỏa mãn hầu định nghĩa thuyết Plato về toán học: *Tồn tại* (Có những đối tượng toán học), *Trừu tượng* (Các đối tượng toán học đều trừu tượng) và *Độc lập*. Các đối tượng toán học đều độc lập với các tác viên có trí tuệ, với ngôn ngữ, tư tưởng, và thực hành của các tác viên đó). Nhằm chứng minh điều kiện Tồn tại, chúng ta có thể tham khảo khái niệm toán học, như số, phương trình, V.V... Nhằm chứng minh điều kiện Trừu tượng, nên biết toán học chỉ là khái niệm. Vì vậy, nó không có hình thức vật lý. Nó chỉ tồn tại dưới hình thức một khái niệm. Do đó, nó là trừu tượng. Nhằm chứng minh điều kiện Độc lập, chúng ta chưa biết như thế nào để chứng minh điều ấy (hay sẽ chẳng bao giờ). Các đối tượng toán học đều độc lập với ngôn ngữ, tư tưởng, và thực hành của các tác viên có trí tuệ. Căn cứ trên định nghĩa, nhằm chứng minh điều kiện ấy, chúng ta phải, bằng cách nào đó, chứng minh toán học trình hiện bất kể sự tồn tại của người, thú vật, hay bất kỳ dạng sống nào khác có trí tuệ. Đến nay, chưa thấy một chứng minh nào vững chắc. Tuy nhiên, một khái niệm tín phục (convincing concept) khiến chúng ta tin thuyết Plato về toán học. Đó là tỉ lệ hoàng kim (ϕ (the golden ratio) được biểu hiện trong toán học như là: Với các số lượng a và b , $a > b > 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \stackrel{\text{def}}{=} \phi, \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$$

Quan sát sự xuất hiện của số (ϕ) ấy trong tự nhiên, chúng ta không ngăn được niềm tin toán học là được phát hiện (discovered), chẳng phải là được phát minh (invented).

3. Một ẩn dụ khái niệm là sự hiểu biết một ý niệm (idea), hay lĩnh vực khái niệm (conceptual domain), theo quan điểm của một ý niệm khác. Ví dụ: hiểu biết một số lượng (quantity) theo quan điểm của phương hướng tính (directionality), chẳng hạn, giá phải trả cho hòa bình đang gia tăng.

4. $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \implies c = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}.$

5. Câu nói phỏng theo nhan đề “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences” của một bài viết năm 1960 của nhà vật lý học Eugene Wigner, giải Nobel vật lý học 1963. Trong bài viết đó, Wigner nhận xét cấu trúc toán học của một học thuyết vật lý thường chỉ cho biết phương thức phát triển những tiến bộ trong học thuyết đó và ngay cả những dự đoán kinh nghiệm.

6. Eugene Wigner. "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences," in Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc. “The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.”

7. "No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world."
 8. G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge university Press, 1940; new printing with a foreword by c. p. Snow. "If mathematics has any right to exist at all, then it is only as art." pp. 139- 140.
 9. Như trên. "I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our "creations", are simply our notes of our observations. This view has been held, in one form or another by many philosophers of high reputation, from Plato onwards " pp. 123-124.
 10. In a letter of 2 July 1830, to A. M. Legendre, cf. c. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, G. Riemeier, Berlin, 1881-1891, Vol. 1, pp. 453- 455.
 11. Như chú thích #20. "Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics." P85.
 12. Edward Frenkel. *Love & Math*. Basic Books. New York. 2013. "For the first time in my life, I had in my possession something that *no one else in the world* had." P59.
 13. Mảnh đá Rosetta là mảnh đá phát hiện năm 1798 tại Rosetta, Ai Cập, hiện giờ nằm trong British Museum, có niên đại 196 bc. Bản ghi song song ba thứ tiếng của nó — chữ tượng hình Ai Cập (Egyptian hieroglyphics), một hình thức giản hóa của chữ viết cổ điển Ai Cập (Egyptian demotic characters), và tiếng Hy Lạp (Greek) - giúp giải mã chữ tượng hình Ai Cập.
- ⁱ¹⁴. ESP là viết tắt extrasensory perception, tạm dịch nhận thức ngoại cảm (như trong thần giao cách cảm - telepathy; thiên lý nhãn - clairvoyance; và dự tri - precognition), tức là nhận thức thông tin về các biến cố bên ngoài bản thân chẳng thông qua các giác quan và không thể suy diễn từ những kinh nghiệm trước đó.

Chương III: Vũ trụ Toán học Tegmark

- 3.1 Một buổi nói chuyện về vũ trụ, một cấu trúc toán học.
 - 3.1.1 Những gì cấu thành vũ trụ?
 - 3.1.2 Toán học về ý thức
- 3.2 Câm lại và tính toán đi!
- 3.3 Ý thức là một trạng thái vật chất
- 3.4 Tư tưởng và Công trình của Tegmark
- 3.5 Tập sách ‘Our Mathematical Universe’ của Tegmark
- 3.6 Bình luận về ‘Our Mathematical Universe’
- 3.7 Được làm bằng toán học?
 - 3.7.1 Toán học ứng dụng
 - 3.7.2 ... so với toán học thuần túy
 - 3.7.3 Hai nghĩa của “là” (“is”)
- 3.8 Có chăng những vũ trụ song song?
 - 3.8.1 Hiểu toán học theo nghĩa đen
 - 3.8.2 Vũ trụ phân nhánh
 - 3.8.3 Rất vui được gặp tôi?
 - 3.8.4 Cái tôi nào thực tồn?
- 3.9 Jeremy Butterfield bình luận ‘Our Mathematical Universe’
 - 3.9.1 Vũ trụ đa trọng tầng I
 - 3.9.2 Vũ trụ đa trọng tầng II
 - 3.9.3 Vũ trụ đa trọng tầng III
 - 3.9.4 Vũ trụ đa trọng tầng IV
- 3.10 Giải đáp một số thắc mắc
- Chú thích

3.1 Một buổi nói chuyện về vũ trụ, một cấu trúc toán học.

3.1.1 Những gì cấu thành vũ trụ?

Từ lâu các nhà khoa học thường dùng toán học để mô tả những thuộc tính vật lý của vũ trụ. Hiện nay nhà vũ trụ học Max Tegmark, giáo sư tại Massachusetts Institute of Technology (MIT), đề xướng một giải pháp “khiêu khích” cho một trong những vấn đề trung tâm đối diện vật lý học: vũ trụ là một cấu trúc toán học.

Theo quan điểm của Tegmark, mọi sự vật trong vũ trụ, kể cả con người, là bộ phận của một cấu trúc toán học. Tất cả vật chất là do các hạt cấu thành; hạt có những thuộc tính, như điện tích (charge) và spin, đều là thuộc tính thuần túy toán học. Và bản thân không gian có những thuộc tính, như thứ nguyên (dimensions), cuối cùng, vẫn là một cấu trúc toán học.

Trong một cuộc nói chuyện tại The Bell House, ngày 15 tháng Giêng 2014, Tegmark tuyên bố, “Nếu các ngài thừa nhận ý niệm cả bản thân không gian và những gì trong đó không có thuộc tính nào ngoại trừ những thuộc tính toán học,” thời ý niệm mọi sự vật là toán học “bắt đầu nghe ít điên một chút.” Câu chuyện trình bày hôm ấy căn cứ trên tập sách “Our Mathematical Universe: My Quest for the Ultimate Nature of Reality” (Knopf, 2014).

Ông nói, “Nếu ý niệm của tôi sai lầm thời vật lý học chịu số phận chết.” Nhưng nếu vũ trụ thực sự là toán học, ông nói thêm, “Trên nguyên tắc, chẳng có gì chúng ta không thể hiểu biết.” Ý niệm tự nhiên tràn đầy toán học là do quan sát thấy tự nhiên tràn đầy các mẫu hình, chẳng hạn như chuỗi Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, V.V..., mỗi số là tổng của hai số đứng trước. Các số ấy rất quan trọng trong tự nhiên, tại vì liên quan tới vấn đề hiệu suất trong quá trình tăng trưởng của cây. số cánh hoa (petals) trong một đóa hoa thường là một trong các số của chuỗi Fibonacci. Ví dụ: hoa lily (loa kèn) có 3 cánh hoa, hoa buttercup (mao lương) có 5, hoa chicory (rau diếp xoắn) có 21, hoa daisy (cúc duyên minh) có 34 hay 55, V.V...

Thế giới phi sinh mệnh cũng vận hành theo phương thức toán học. Nếu chúng ta tung một quả cầu lên trời, nó sẽ chuyển động theo một quỹ đạo hình gần giống như một parabol. Các hành tinh và thiên thể vật lý khác chuyển động theo quỹ đạo hình elip.

Tegmark nhận xét, “Trong tự nhiên có một đơn giản và vẻ đẹp ưu nhã được thấu lộ bởi các mẫu hình và hình dạng toán học mà tâm trí của chúng ta có thể tìm thấy.” Ông say mê toán học đến độ đóng khung hình ảnh các phương trình nổi tiếng trong phòng khách của ông.

Một hậu quả của bản thân tự nhiên toán học của vũ trụ là các nhà khoa học có thể về mặt lý thuyết tiên đoán mọi quan sát hay đo lường trong vật lý học. Tegmark chỉ cho thấy toán học tiên đoán sự tồn tại của hành tinh Neptune, các sóng radio, và hạt boson Higgs với tính năng giải thích làm thế nào các hạt khác có được khối lượng của chúng. Một số người tranh luận cho rằng toán học chỉ là một công cụ được phát minh để giải thích thế giới tự nhiên. Nhưng Tegmark quả quyết cấu trúc toán học tìm thấy trong thế giới tự nhiên cho thấy toán học tồn tại trong thực tế, chứ không chỉ trong tâm trí con người. Và nói đến tâm trí con người, thử hỏi chúng ta có thể sử dụng toán học để giải thích bộ não hay không?

3.1.2 Toán học về ý thức

Một số khoa học gia mô tả tâm trí con người như cấu trúc phức tạp nhất trong vũ trụ. Quả vậy, tâm trí con người đã tác thành khả thể của tất cả những bước nhảy vọt trong việc hiểu biết thế giới của chúng ta. Tegmark tin rằng ngay cả ý thức cũng có thể được mô tả theo phương thức toán học. Ông nói, “Ý thức có lẽ là cách thông tin (information) cảm thấy khi nó đang được xử lý theo một số phương thức rất phức tạp.” Ông chỉ cho thấy một số lớn tiến bộ trong vật lý học liên quan tới thống nhất hai sự vật bấy lâu tưởng là rời nhau: năng lượng và vật chất, không gian và thời gian, điện và từ. Ông nghĩ rằng tâm tức cảm giác về một tự ngã có ý thức cuối cùng sẽ thống nhất với thân tức một tập hợp các hạt di động.

Tegmark kết luận buổi nói chuyện của ông với một lời kêu gọi hành động: “Con người có quyền năng chẳng những hiểu biết thế giới của chúng ta, mà còn hình thành và cải thiện thế giới ấy.”

3.2 Cầm lại và tính toán đi!

Tiêu đề của một bài viết của Tegmark là ‘Cầm lại và tính toán đi’ là nhằm mô tả một phương thức tiếp cận cực đoan vật lý học, trong đó thực tế vật lý ngoại bộ của chúng ta được giả định là toán học thuần túy. Bài viết đề xuất giả thiết động cơ “tất cả chỉ là phương trình” và thảo luận về những gì được ám chỉ trong đó.

Ý niệm về vũ trụ của chúng ta theo một nghĩa nào đó là toán học có thể ít nhất xem như xuất hiện từ thời Pythagoras thuộc cổ Hy Lạp, và dẫn phát nhiều thế kỷ thảo luận giữa các nhà vật lý học và triết học. Vào thế kỷ 17, Galileo nổi tiếng phát biểu vũ trụ là một “cuốn sách lớn” được viết bằng ngôn ngữ toán học. Gần đây, Eugene Wigner, giải Nobel vật lý học 1963, tranh biện vào những năm 1960 về “hiệu lực bất hợp lý của toán học trong các khoa học tự nhiên” cần phải được giải thích.

Trong bài này, Tegmark đẩy ý niệm đó đến mức cực đoan và biện minh cho thấy vũ trụ của chúng ta không chỉ là được mô tả bằng toán học, mà nói cho đúng, là toán học. Mặc dầu giả thuyết đó xem ra trừu tượng và rất khó tin, nó đã dẫn đến những dự đoán bất ngờ về cấu trúc của vũ trụ khả dĩ kiểm chứng bằng các quan sát. Giả thuyết đó có thể xem như một rút gọn những gì xem giống như một thuyết tối chung về Nhất thiết (an ultimate theory of everything).

Lập luận của Tegmark căn cứ trên giả thiết có một thực tế vật lý ngoại bộ tồn tại độc lập với những con người như chúng ta. Ông tin rằng đa số các nhà vật lý học tán thành ý niệm lâu năm này mặc dầu vẫn đang tranh luận. Các nhà duy ngã luận siêu hình học (metaphysical solipsists) nhất định từ khước nó, và các nhà tán trợ cái gọi là thông diễn cơ học lượng tử theo trường phái Copenhagen có thể không tiếp nhận nó vin có chẳng có thực tế mà không quan sát (reality without observation). Giả thiết tồn tại một thực tế ngoại bộ, các thuyết vật lý học nhằm mục đích mô tả nó vận hành như thế nào. Các thuyết thành công nhất của chúng ta, như thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử, mô tả chỉ phần nào thực tế ấy: trọng lực (gravity), chẳng hạn, hay vận hành của các hạt bên trong nguyên tử. Ngược lại, những gì vật lý học lý thuyết đang truy cầu hoặc tầm cầu là một học thuyết về Nhất thiết, một mô tả đầy đủ về thực tế.

Tegmark cho biết sự truy cầu học thuyết về Nhất thiết của ông khởi đầu với một luận cứ cực đoan về những gì nó được phép trông giống như. Nếu chúng ta giả thiết thực tế tồn tại độc lập với con người, thời muốn cho sự mô tả được đầy đủ, nó cũng phải được xác định rõ căn cứ trên các thực thể không phải con người - người ngoài hành tinh hoặc siêu máy tính, chẳng hạn - chẳng hiểu biết gì về những khái niệm của con người. Nói khác, một mô tả như vậy phải có thể được biểu hiện dưới một hình thức chẳng có bất kỳ hành lý nào của con người như “hạt”, “quan sát” hay các từ khác.

Ngược lại, tất cả những học thuyết vật lý học giảng dạy ở trường đều có hai thành phần: những phương trình toán học và những từ giải thích làm thế nào các phương trình được kết nối với những gì chúng ta quan sát và trực quan hiểu biết. Mỗi lần phải sinh những hậu quả của một lý thuyết, chúng ta thêm vào những khái niệm mới - protons, molecules, stars - tại vì chúng tiện lợi. Tuy nhiên, cần phải nhớ chính những con người như chúng ta sáng tạo những khái niệm như vậy; trên nguyên tắc, mọi sự vật có thể được tính chẳng cần hành lý ấy. Ví dụ: một siêu máy tính đủ năng lực cần thiết có thể tính làm thế nào trạng thái của vũ trụ phát triển theo thời gian mà chẳng cần thông diễn những gì xảy ra theo phương thức con người tư lượng.

Tất cả những điều nói trên đặt ra câu hỏi: có thể nào tìm được một sự mô tả thực tế ngoại tại chẳng liên quan tới hành lý? Nếu có thể, một mô tả như vậy các đối tượng trong thực tế ngoại tại ấy và những quan hệ giữa chúng sẽ phải hoàn toàn trừu tượng, buộc mọi từ hay ký hiệu phải chỉ là những nhãn hiệu chẳng mang ý nghĩa tiên đoán nào. Nói cho đúng, các thuộc tính duy nhất của các thực thể ấy sẽ là những gì được thể hiện bởi các quan hệ giữa chúng.

Đúng là nơi toán học tiến nhập. Với một nhà logic học hiện đại, một cấu trúc toán học là một tập hợp các thực thể trừu tượng với những quan hệ giữa chúng. Ví dụ: các số nguyên, hay các đối tượng hình học như khối mười hai mặt (dodecahedron), một yêu thích của những người thuộc phái Pythagoras. Thật hoàn toàn trái ngược với thứ toán học ở Trung học mà chúng ta từng kinh nghiệm như một hình thức trừng phạt ngược đãi, hay như một túi thủ thuật để thao tác số. Giống như vật lý học, toán học phát triển để đặt những câu hỏi rộng hơn.

Toán học hiện đại là sự nghiên cứu chính thức các cấu trúc khả dĩ được định nghĩa theo một phương thức thuần túy trừu tượng. Tư lượng về các ký hiệu toán học như những nhãn hiệu đơn thuần chẳng có ý nghĩa cố hữu. Bất luận bạn viết “hai cộng hai bằng bốn”, “ $2 + 2 = 4$ ”, hay “two plus two equals four”, điều đó không quan trọng. Phép biểu thị dùng để chỉ các thực thể và các quan hệ là không thích đáng; các thuộc tính duy nhất của số nguyên là những gì thể hiện bởi các quan hệ giữa chúng. Nghĩa là, chúng ta không phát minh các cấu trúc toán học, chúng ta khám phá chúng, và chỉ phát minh phép biểu thị để mô tả chúng.

Như vậy, đây là mấu chốt của lập luận của Tegmark. Nếu bạn tin vào một thực tế ngoại tại độc lập với con người, thời bạn cũng phải tin vào cái mà Tegmark gọi là giả thuyết về vũ trụ toán học: thực tế vật lý của chúng ta là một cấu trúc toán học. Nói khác, tất cả chúng ta đều sống trong một đối tượng toán học khổng lồ, một đối tượng phức tạp hơn một khối mười hai mặt, và có lẽ cũng phức tạp hơn những đối tượng có tên gọi gây kinh sợ như Calabi-Yau manifolds, tensor bundles và Hilbert spaces, thường hiện ra trong các lý thuyết tiên tiến nhất hiện nay. Mọi sự vật trong thế giới của chúng ta, kể cả bạn, là toán học thuần túy.

Nếu đúng như vậy, thời thuyết về Nhất thiết phải thuần túy trừu tượng và toán học. Mặc dầu chưa biết thuyết đó có hình dạng như thế nào, vật lý học hạt và vũ trụ học đạt đến một điểm tất cả những đo lường từ trước đến nay có thể được giải thích, ít nhất trên nguyên tắc, với những phương trình sắp xếp vừa vặn trên một vài trang giấy và liên hệ tới chỉ 32 hằng số không giải thích được. Như thế, tưởng như có khả năng, thuyết về Nhất thiết chính xác thậm chí có thể trở nên đơn giản, đủ để mô tả bằng một số phương trình sắp xếp vừa vặn trên một áo thun.

Trước khi bàn về vấn đề liệu giả thuyết vũ trụ toán học đúng hay không, tưởng nên hiểu vấn đề ấy có nghĩa là gì. Muốn hiểu điều đó, cần phân biệt giữa hai phương thức quan sát thực tế vật lý ngoại tại. Một là tổng quan ngoại bộ của một nhà vật lý học nghiên cứu cấu trúc toán học của nó, giống như một con chim đang quan sát phong cảnh từ trên cao nhìn xuống. Hai là lối nhìn nội bộ của một quan sát viên sống trong thế giới cấu trúc mô tả, giống như một con ếch sống trong phong cảnh con chim quan sát.

Kết nối hai quan điểm trên là một vấn đề liên quan tới thời gian. Một cấu trúc toán học, theo định nghĩa, là một thực thể trừu tượng bất biến tồn tại bên ngoài không gian và thời gian. Nếu lịch sử vũ trụ của chúng ta là một bộ

phim, cấu trúc sẽ tương ứng chẳng phải với một khung đơn nhất mà với toàn bộ DVD. Như thế, từ quan điểm con chim, các quỹ đạo của các đối tượng chuyển động trong không-thời gian bốn thứ nguyên giống như một mớ spaghetti rối beng. Nơi con ếch thấy cái gì đó chuyển động với vận tốc không đổi, con chim thấy một tao spaghetti chưa nấu. Nơi con ếch thấy mặt trăng quay quanh trái đất, con chim thấy hai tao spaghetti kết hợp với nhau. Với con ếch, thế giới được mô tả bởi các định luật chuyển động và lực hấp dẫn của Newton. Với con chim, thế giới là hình học của mi ống.

Một cách tinh tế hơn về sự kết nối hai quan điểm trên liên quan tới sự giải thích làm thế nào một quan sát viên có thể là thuần túy toán học. Trong ví dụ này, bản thân con ếch phải bao gồm một gói mi ống dày khít rịt, có một cấu trúc rất phức tạp tương ứng với những hạt lưu trữ và xử lý thông tin theo một phương thức phát sinh cảm giác quen thuộc về tính tự ý thức (= ý thức).

Bây giờ hãy hỏi làm thế nào để thử nghiệm giả thuyết vũ trụ toán học? Khởi đầu, giả thuyết ấy tiên đoán còn nhiều quy luật toán học phải được phát hiện trong tự nhiên. Kể từ khi Galileo công bố ý niệm về một vũ trụ toán học, đã có những tiến bộ vững chắc của các khám phá tùy thuộc ý niệm ấy, bao gồm mô hình chuẩn của vật lý học hạt, nắm bắt được trật tự toán học trong thế giới vi mô các hạt cơ bản và thế giới vĩ mô của vũ trụ sơ khai.

Tuy nhiên, đó chưa phải là tất cả. Giả thuyết còn tiên đoán một sự thật thực thú vị: sự tồn tại các vũ trụ song song (parallel universes). Qua nhiều năm, nhiều loại ‘vũ trụ đa trọng’ (multiverse) được đề xuất, và vì lợi ích tưởng nên phân hạng chúng thành một hệ thống bốn tầng. Ba tầng đầu tương ứng với những thế giới song song phi giao lưu trong cùng một cấu trúc toán học. Tầng I đơn giản có nghĩa là những vùng xa xôi từ đó ánh sáng chưa có thời gian đến tới chúng ta. Tầng II bao gồm các khu vực chẳng bao giờ có thể đạt được. Tầng III, thường được gọi là đa thế giới (nhiều thế giới = many worlds), liên quan tới những bộ phận phi giao lưu của không gian Hilbert của cơ học lượng tử trong đó vũ trụ có thể chia cắt trong khoảng một số biến cổ lượng tử. Tầng IV chỉ các thế giới song song trong các cấu trúc toán học khác nhau, khả dĩ có những quy luật vật lý học bất đồng trong cơ bản.

Hiện nay những ước tính tốt nhất cho thấy rằng chúng ta cần một lượng thông tin khổng lồ, có lẽ một Googol (10^{100}) bit, để mô tả đầy đủ quan điểm của con ếch về vũ trụ có thể quan sát, xuống tận vị trí của mọi ngôi sao và hạt cát. Phần đông các nhà vật lý học hy vọng có một thuyết về Nhất thiết đơn giản hơn nhiều so với những điều nói trên và có thể được định rõ với một số bit sắp xếp vừa vặn trong một cuốn sách, nếu không trên một áo thun. Giả thuyết vũ trụ toán học hàm ý một thuyết đơn giản như vậy phải tiên đoán một vũ trụ đa trọng. Tại sao? Tại vì theo định nghĩa, thuyết ấy là một sự mô tả đầy đủ thực tế: nếu nó thiêu một số bit cần thiết để định rõ đầy đủ vũ trụ của chúng ta thời thay thế vào đó, nó phải mô tả tất cả tổ hợp khả hữu các sao, các hạt cát, V.V... thế nào để cho các bit bổ sung mô tả vũ trụ của chúng ta lập mã vũ trụ nào mà chúng ta ở trong đó. Theo phương thức ấy, mô tả một vũ trụ đa trọng có thể đơn giản hơn mô tả một vũ trụ đơn lẻ.

Đẩy đến cực điểm của nó, giả thuyết vũ trụ toán học hàm ý vũ trụ đa trọng tầng IV, bao gồm trong nó tất cả các tầng kia. Nếu có một cấu trúc toán học đặc thù đúng là vũ trụ của chúng ta, và những thuộc tính của nó tương ứng với những định luật vật lý của chúng ta, thời mỗi cấu trúc toán học với những thuộc tính khác nhau là vũ trụ riêng của nó với những định luật khác nhau. Quả vậy, vũ trụ đa trọng tầng IV là cần thiết, không thể thiếu, bởi vì các cấu trúc toán học không được ‘tạo’ ra và không tồn tại ‘nơi nào đó’, chúng chỉ tồn tại. Stephen Hawking có lần tự hỏi: “Cái gì vậy đã thổi lửa vào các phương trình và làm ra một vũ trụ để chúng mô tả?” Trong trường hợp vũ trụ toán học, không có sự đòi hỏi thổi lửa, bởi vì vấn đề chẳng phải một cấu trúc toán học mô tả một vũ trụ, mà là một vũ trụ.

Sự tồn tại của vũ trụ đa trọng tầng IV cũng giải đáp một câu hỏi nan giải được nhà vật lý học John Wheeler cường điệu: ngay cả khi chúng ta tìm ra được phương trình mô tả vũ trụ của chúng ta một cách hoàn hảo, nhưng tại sao các phương trình đặc thù đó, mà chẳng phải các phương trình khác? Câu trả lời là các phương trình khác chỉ phối những vũ trụ song song, và vũ trụ của chúng ta có những phương trình đặc thù ấy bởi vì mang lại sự phân bố các cấu trúc toán học khả dĩ hỗ trợ những quan sát viên như chúng ta, sự tồn tại của chúng là căn cứ vào thống kê.

Câu hỏi chủ yếu là liệu các vũ trụ song song thuộc phạm vi của khoa học hay chúng chỉ là tư biện đơn thuần? Trong tự thân, các vũ trụ song song chẳng phải là một học thuyết, đúng hơn là một dự đoán của một số học

thuyết. Để cho một học thuyết khả dĩ chứng nguy (falsifiable) chúng ta không cần có khả năng quan sát và thực nghiệm tất cả những dự đoán, mà chỉ một trong chúng là đủ. Chẳng hạn, vì thuyết tương đối rộng thành công dự đoán sự vật chúng ta có thể quan sát, như một phân bố vật chất trong vũ trụ có khả năng uốn cong ánh sáng (gravitational lensing), do đó, chúng ta vẫn tiếp tục tin các dự đoán sự vật chúng ta không thể quan sát, như cấu trúc bên trong các lỗ đen (black holes).

Cuối cùng, tại sao chúng ta phải tin tưởng giả thuyết vũ trụ toán học? Sự phản bác có sức thuyết phục nhiều nhất có lẽ là do cảm thấy phản trực giác và bất an. Tegmark cho biết ông phủ nhận lý do ấy, cho rằng nguyên cơ là thiếu khả năng hiểu biết và phán đoán giá trị của tiến hóa luận Darwin. Tiến hóa phù cho chúng ta trực giác chỉ dành cho những khía cạnh nào của vật lý học có giá trị sống còn đối với tổ tiên chúng ta, như quỹ đạo hình parabol của các đá bay. Do đó, tiến hóa luận Darwin đưa ra dự đoán khả kiểm chứng: bất cứ khi nào chúng ta vượt quá tầm cỡ của con người, trực giác tiến hóa của chúng ta sẽ tan vỡ.

Nếu giả thuyết vũ trụ toán học đúng thời đó là tin mừng cho khoa học. Vũ trụ toán học chấp thuận một sự thống nhất tốt đẹp vật lý học và toán học, một ngày nào đó cho phép chúng ta hiểu biết thực tế sâu sắc hơn bao giờ hết.

Quả vậy, theo Tegmark, vũ trụ toán học với vũ trụ đa trọng của nó là học thuyết tốt nhất về Nhất thiết, bởi vì chẳng có diện nào của thực tế nằm ngoài sự truy xét khoa học của chúng ta nhằm phát hiện các quy luật và dự trắc định lượng.

Tuy nhiên, một lần nữa, thuyết vũ trụ toán học di chuyển câu hỏi về vũ trụ. Chúng ta không còn sai lạc đặt câu hỏi những phương trình đặc thù nào mô tả tất cả của thực tế. Lần này câu hỏi coi là đúng sẽ là làm thế nào để tính toán (bằng con số) quan điểm của con ếch về vũ trụ - những quan sát của chúng ta - từ quan điểm của con chim. Tính toán như thế sẽ cho thấy liệu chúng ta đã vạch rõ cấu trúc thực sự của vũ trụ của chúng ta, và giúp chúng ta tìm ra góc nào trong vũ trụ toán học là nhà của chúng ta.

3.3 Ý thức là một trạng thái vật chất

Các nhà khoa học thực sự không nói nhiều về ý thức. Chúng ta không thể nhìn thấy nó hoặc chạm vào nó. Mặc dầu một số nhà nghiên cứu đã thử nó, chúng ta không thể định lượng nó. Và nếu chúng ta không thể đo lường được, nó đơn giản có nghĩa là chúng ta sẽ có một thời gian khó khăn giải thích nó. Nhưng tất cả những gì chúng ta biết là nó tồn tại. Và không chỉ tồn tại mà còn là những phương diện cơ bản nhất của những gì thực sự làm chúng ta là con người. Để lấp đầy một số lỗ hổng trong sự hiểu biết của chúng ta về vũ trụ và tự thân vật chất, các nhà nghiên cứu đã đề xướng vật chất tối (dark matter) và năng lượng (energy) và bây giờ khả dĩ tư lượng ý thức như một trạng thái vật chất mới.

Học thuyết đặc biệt này nguyên lai được đề xuất vào năm 2004 bởi nhà vũ trụ học và vật lý học lý thuyết Max Tegmark tại M.I.T.. ông đề nghị rằng có một trạng thái vật chất duy nhất trong đó các nguyên tử được tổ chức để xử lý thông tin và gây sự gia tăng tính chủ quan, và cuối cùng, ý thức. Trạng thái vật chất được đề nghị đó có danh hiệu là Perceptronium.

Như Tegmark giải thích trong bài báo trước khi đem in của ông: “Nhiều thể hệ vật lý học gia và hóa học gia đã nghiên cứu những gì xảy ra khi chúng ta gộp một số lượng lớn các nguyên tử thành nhóm. Chúng ta phát hiện ra rằng hành vi tập thể của chúng tùy thuộc mẫu hình trong đó chúng được sắp xếp: sự khác biệt then chốt giữa chất rắn, chất lỏng và chất khí không nằm trong các loại nguyên tử, nhưng trong sự sắp xếp chúng. Trong bài báo này, tôi suy đoán rằng ý thức có thể hiểu như là một trạng thái vật chất khác. Cũng giống như có nhiều loại chất lỏng, có rất nhiều loại ý thức. Tuy nhiên, điều này không ngăn cản chúng ta xác định (identifying), định lượng (quantifying), mô hình hóa (modelling), và cuối cùng hiểu được những thuộc tính đặc trưng mà tất cả các dạng lỏng của vật chất (hoặc tất cả các dạng ý thức của vật chất) cùng chia sẻ.

Ở đây, Tegmark không nói rằng có những khối vật lý của perceptronium trụ nơi nào đó trong não và lưu chuyển thông qua các tinh mạch của chúng ta để thông tin một cảm giác tự ý thức. Ông muốn nói rằng ý thức có thể được hiểu như là một sự sắp xếp toán học - kết quả của một tập hợp cụ thể các điều kiện toán học.

Ông lập luận rằng, cũng như có một số điều kiện do đó các trạng thái vật chất khác nhau - như hơi nước, nước, và nước đá - có thể sinh khởi, cũng có thể có các dạng thức khác nhau của ý thức khả dĩ sinh khởi.

Tìm được những gì cần thiết để tạo ra những trạng thái ý thức khác nhau theo các điều kiện có thể quan sát và đo lường được có thể giúp chúng ta nắm bắt được những gì thực sự đang là, và điều đó có ý nghĩa gì đối với một con người, con khỉ, bọ chét, hay siêu máy tính.

Ý niệm này lấy cảm hứng từ công trình của nhà thần kinh học Giulio Tononi, University of Wisconsin in Madison, người đã đề xuất trong năm 2008 rằng, muốn chứng minh cái gì đó có ý thức thời phải chứng minh hai đặc điểm sau đây.

Theo thuyết thông tin tích hợp (integrated information theory = IIT), đặc điểm thứ nhất là một tồn thể có ý thức phải có khả năng lưu trữ (storing), xử lý (Processing) và thu hồi một lượng lớn thông tin (recalling large amounts of information). Đặc điểm thứ hai là thông tin này phải được tích hợp trong một toàn thể thống nhất, do đó không thể chia thành các phần độc lập.

Điều này có nghĩa là ý thức phải được nắm bắt như một tổng thể, và không thể chia thành các phần độc lập. Tononi lập luận rằng, một tồn thể hay hệ thống có ý thức không chỉ có khả năng lưu trữ và xử lý thông tin, mà còn phải làm như vậy theo phương thức tạo nên một toàn bộ hoàn chỉnh không thể phân chia.

Như George Johnson viết trong The New York Times, giả thuyết của Tononi dự đoán - với rất nhiều toán học - “các thiết bị đơn giản như một bộ điều chỉnh nhiệt (thermostat) hoặc một diode quang điện (photoelectric diode) có thể có những loé sáng của ý thức - một tự ngã chủ quan.

Trong tính toán của Tononi, những loé sáng của ý thức không nhất thiết phải bằng một hệ thống có ý thức, và thậm chí ông còn đề ra một đơn vị gọi là phi hay ϕ , mà theo ông, có thể được sử dụng để đo lường ý thức như thể nào của một thực thể đặc thù.

Sáu năm sau, Tegmark đề xuất hai loại vật chất có thể được xét xem căn cứ trên thuyết thông tin tích hợp. Một là ‘computronium’, đáp ứng các yêu cầu của đặc điểm thứ nhất để có thể lưu trữ, xử lý và thu hồi một lượng lớn thông tin. Hai là ‘perceptronium’, làm tất cả các điều trên, nhưng theo phương thức tạo nên toàn bộ không thể phân chia mà Tononi mô tả.

Trong bài báo năm 2014 của Tegmark, ông khám phá ra những gì ông xác định như năm nguyên tắc cơ bản khả dĩ được dùng để phân biệt các vấn đề ý thức với các hệ thống vật lý khác như chất rắn, chất lỏng và chất khí - “thông tin (information), tích hợp (integration), độc lập (independence), động lực (dynamics), và các nguyên tắc tiện ích (utility principles)”.

Sau đó ông dành 30 trang để giải thích phương thức tư lượng mới của ông về ý thức có thể cắt nghĩa quan điểm độc đáo của con người trên Vũ trụ.

Như blog của arXiv.org (e-Print archive) giải thích, “Khi chúng ta nhìn vào một ly nước đá, chúng ta nhận thấy nước lỏng và những khối nước đá rắn chắc như những sự vật độc lập mặc dầu chúng liên kết chặt chẽ như một phần của cùng một hệ thống. Sự việc này xảy ra như thế nào? Từ tất cả các kết quả khả hữu, tại sao chúng ta nhận thức giải pháp này?”

Đó là một tư tưởng khiêm khuyết, bởi vì Tegmark không có một giải pháp. Hãy đọc bài viết của ông xuất bản trên tạp chí Chaos, Solitons & Fractals để nhận biết lập trường của ông. Đó là vấn đề với cái gì đó giống như ý thức - nếu chúng ta không thể đo lường được nỗ lực của chúng ta để đo lường nó, làm thế nào chúng ta có thể chắc chắn đã đo lường nó?

Theo Matthew Davidson, nhà nghiên cứu thần kinh học của ý thức tại Monash University, Úc châu, hiện nay, chúng ta tuy không biết gì nhiều về ý thức nhưng có khuynh hướng càng ngày càng rõ rệt rằng ý thức là cái gì đó cần phải xem như ở bên ngoài cánh giới nhân loại. Ông nói: “Nếu ý thức thực sự là một tính năng nổi bật của một mạng lưới tích hợp cao, như IIT gợi ý, thời có lẽ tất cả các hệ thống phức tạp - chắc chắn là tất cả các sinh vật có bộ não - đều có một dạng ý thức tối thiểu.”¹

“Bằng cách mở rộng, nếu ý thức được xác định bởi số lượng thông tin tích hợp trong một hệ thống, thời chúng ta cũng có thể cần phải di chuyển ra khỏi bất kỳ hình thức nào của chủ nghĩa nhân lệ ngoại (human

exceptionalism) bảo rằng ý thức là độc quyền cho chúng ta.”²

3.4 Tư tưởng và Công trình của Tegmark

Trong bài tường thuật cuộc phỏng vấn Tegmark suốt ba tiếng đồng hồ qua điện thoại di động, trong khi ông này trên đường về nhà ở Winchester, Massachusetts, sau một hội nghị tại Stanford University, giáo sư Adam Frank, một nhà vật lý học thiên văn lý thuyết, tại University of Rochester, New York, cho biết Tegmark đóng góp rất nhiều trong những vấn đề như đo lường chất tối (dark matter) trong vũ trụ và hiểu biết ánh sáng từ vũ trụ sơ khai thông tri các mô hình của Big Bang như thế nào. Nhưng khác với đa số các nhà vật lý học, Tegmark tra cứu chẳng phải những gì các luật của tự nhiên phát biểu, mà tại sao có những quy luật như vậy.

Theo Tegmark, “chỉ có toán học; đó là tất cả những gì tồn tại.” Trong học thuyết của ông - giả thuyết vũ trụ toán học - ông cập nhật vật lý học lượng tử và vũ trụ học với khái niệm về nhiều vũ trụ song song (many parallel universes) cư trú tại nhiều tầng thứ của không gian và thời gian. Đưa ra giả thuyết của ông tại ngã tư của triết học và vật lý học, Tegmark đã quay trở lại với câu hỏi lâu đời nhất trong số các câu hỏi lâu đời của cổ Hy Lạp: Những gì là chân thực?

Tegmark đeo đuổi công trình này mặc dầu có nhiều rủi ro cho sự nghiệp của ông. Ông thử đến bốn lần trước khi một bản đầu tiên của giả thuyết vũ trụ toán học được phép xuất bản, và khi cuối cùng bài viết xuất hiện, một đồng nghiệp lớn tuổi cảnh cáo rằng “những ý niệm điên cuồng” (crackpot ideas) của ông có thể làm tổn hại danh tiếng của ông. Nhưng thúc đẩy bởi tính lạc quan và niềm đam mê, ông không ngừng tiến tới.

Tegmark giải thích: “Tôi biết rất sớm nếu tôi chuyên chú duy nhất vào những đại vấn đề này cuối cùng tôi sẽ đi làm việc cho McDonald. Vì thế tôi lập ra sách lược Dr. Jekyll/Mr. Hyde, theo phương thức chính thức và công khai, bất cứ khi nào tôi đi xin việc, tôi xuất trình công việc chính của tôi. Và mặt kia, tôi im lặng đeo đuổi những hứng thú triết học hơn.” Sách lược ấy thành công tốt đẹp. Hiện nay, là một giáo sư tại Massachusetts Institute of Technology, Tegmark đi giữa các nhà vật lý học hàng đầu thế giới. Sự tín nhiệm hoạch đắc làm hậu thuẫn, những ý niệm táo bạo của ông bay bổng, và rất cuốn hút.

Có phải lên Đại học rồi ông mới bắt đầu nghĩ đến những vấn đề rộng lớn?

Trường có một và chỉ một khóa học vật lý học lượng tử, tôi chọn lấy môn đó, và khi đến chương về đo lường tôi cảm thấy thiếu cái gì đó.

Ông đang nói đến phương thức quan sát viên dường như kích động sự đo lường những gì đang được quan sát.

Đúng. Trong thuyết lượng tử có một phương trình xinh đẹp gọi là phương trình Schrödinger. Nó dùng cái gì đó gọi là hàm số sóng (wave function) để mô tả hệ thống chúng ta đang nghiên cứu - một nguyên tử, một electron, bất cứ gì - và tất cả những phương thức khả hữu mà hệ thống khả dĩ diễn biến. Quan điểm thông thường của cơ học lượng tử là ngay khi chúng ta đo lường cái gì đó, hàm số sóng thực sự sụp đổ, đi từ một trạng thái phản ánh tất cả các kết quả tiềm tại đến một trạng thái phản ánh chỉ một kết quả: kết quả mà chúng ta thấy ngay khi hoàn thành đo lường. Sự việc như vậy có vẻ điên cuồng đối với tôi. Tôi chẳng hiểu tại sao phải sử dụng phương trình Schrödinger trước khi đo lường nguyên tử, nhưng sau đó, trong lúc chúng ta đo nó, phương trình lại không áp dụng. Vì thế tôi lấy hết can đảm đến gõ cửa xin gặp nhà vật lý học nổi tiếng nhất ở Thụy Điển (Sweden), một ủy viên trong ủy ban Nobel, nhưng bị xua đuổi. Chỉ vài năm sau đó tôi mới phát giác chẳng phải tôi mà là ông ấy không thấu hiểu vấn đề trên.

Thật là một khoảnh khắc tuyệt vời trong sự giáo dục của một nhà khoa học khi ông nhận ra rằng những kẻ ấy ở vị trí cao của quyền lực vẫn không có tất cả các câu trả lời. Vì thế ông mang theo các câu hỏi về phương trình Schrodinger và hiệu quả đo lường khi ông rời Thụy Điển để đến Hoa kỳ và để lấy bằng Ph.D. tại Berkeley?

Đó là nơi tất cả mọi sự khởi đầu đối với tôi. Tôi có người bạn, Bill Poirier, và chúng tôi dành nhiều thời gian bàn về những ý niệm điên cuồng trong vật lý học. Bill cười nhạo tôi vì tôi lý luận bất cứ mô tả cơ bản nào mô tả vũ trụ thời phải đơn giản. Để làm anh ấy bực mình, tôi nói có thể có một toàn thể vũ trụ không có gì ngoài ra một khối mười hai mặt mà người Hy Lạp mô tả 2,500 năm về trước. Lẽ tất nhiên, tôi chỉ phỉnh chọc thôi, nhưng sau

đó, càng suy nghĩ về chuyện này, tôi rất phấn khích về ý niệm vũ trụ thực sự không gì khác hơn là một đối tượng toán học. Từ đó, tôi nghĩ rằng mọi đối tượng toán học, theo một nghĩa nào đó, là một tự kỷ vũ trụ.

Ngay từ đầu, ông đã thử tìm cách xuất bản ý tưởng cấp tiến ấy. Ông có ngại liệu nó sẽ ảnh hưởng đến sự nghiệp của ông?

Tôi đã đoán trước chuyện ấy và chỉ đệ trình sau khi được bổ nhiệm làm thực tập sinh hậu tiến sĩ tại Princeton University. Bài viết đầu tiên của tôi bị ba tạp chí từ chối. Cuối cùng tôi có được một báo cáo phán đoán tốt từ *Annals of Physics*, nhưng chủ biên ở đó từ chối bài viết cho rằng quá tư biện.

Chờ đó — điều ấy không tất nhiên xảy ra. Nếu phán đoán viên thích một bài viết, thói thông thường bài ấy được thu nhận.

Tôi cũng nghĩ như vậy. Tôi rất may là bạn với John Wheeler, một nhà vật lý học lý thuyết tại Princeton và một trong những anh hùng vật lý học vĩ đại nhất của tôi, gần đây đã qua đời. Khi tôi đưa ông ấy xem lá thư từ chối, ông bảo: “Quá tư biện”? Bah!” Sau đó ông nhắc nhở tôi một số nguyên văn bài viết về cơ học lượng tử cũng bị xem như vô cùng tư biện. Vì thế tôi viết thư kêu gọi *Annals of Physics* xin xét lại sự từ chối, kèm theo những phê phán của Wheeler. Cuối cùng chủ biên ở đó chấp nhận xuất bản.

Nhưng mà, đó chẳng phải là bánh mì và bơ của ông. Ông đã làm luận án tiến sĩ và thực tập sinh hậu tiến sĩ về vũ trụ học, một chủ đề hoàn toàn khác.

Thật mỉa mai khi tôi đề cập những quan tâm triết học ấy là vũ trụ học, một lãnh vực có tiếng là dễ tan thành mảnh (ilaky). Nhưng vũ trụ học dần dần trở thành khả kính hơn, bởi vì kỹ thuật máy tính, kỹ thuật không gian, và kỹ thuật tham trắc được tổ hợp để cung cấp cho chúng ta một thác lớn thông tin về vũ trụ.

Hãy nói đến nỗ lực của ông tìm hiểu vấn đề đo lường bằng cách thiết lập những vũ trụ song song - hay, như ông gọi, vũ trụ đa trọng (multiverse). Xin ông giải thích vũ trụ song song.

Thế giới đa trọng có bốn tầng. Ba trong đó là do kẻ khác đề xuất và tôi thêm một tầng, tầng thứ tư: vũ trụ toán học.

Những gì là tầng thứ nhất của vũ trụ đa trọng?

Vũ trụ đa trọng tầng 1 đơn giản là một không gian vô hạn. Không gian là vô hạn, nhưng không gian vô hạn - tuổi chỉ 14 tỷ năm kể từ Big Bang của chúng ta. Vì thế chúng ta không thể thấy toàn thể mà chỉ một phần của không gian - phần từ đó ánh sáng có thời gian để đến nơi đây cho đến nay. Ánh sáng không có thời gian để đến đây từ mọi nơi. Nhưng nếu không gian vĩnh viễn tri túc, tất có những vùng khác giống vùng của chúng ta - trong thực tế, có một số vô hạn vùng như vậy. Dầu dường như không có một hành tinh nào giống Trái Đất, chúng ta biết trong một vũ trụ vô hạn, điều đó chắc chắn sẽ xảy ra một lần nữa.

Ông bảo rằng tất cả chúng ta phải có doppelgängers³ đâu đó ngoài kia do toán học của vô hạn.

Như thế là khá điên, phải không? Nhưng tôi thậm chí chưa yêu cầu ông phải tin vào bất cứ gì kỳ quái. Tôi thậm chí không yêu cầu ông tin vào bất kỳ loại vật lý học mới điên cuồng nào. Tất cả những gì ông cần cho một vũ trụ đa trọng tầng I là một vũ trụ vô hạn - đi đủ xa ngoài kia ông sẽ tìm thấy một Trái Đất khác với một phiên bản của chính ông.

Vì vậy chúng ta chỉ ở tầng I. Những gì là tầng tiếp theo của vũ trụ đa trọng?

Tầng II xuất hiện nếu những phương trình cơ bản của vật lý học, những phương trình chi phối hành vi của vũ trụ sau Big Bang, có nhiều hơn một giải pháp. Nó giống như nước, có thể là một chất rắn, một chất lỏng, hay một chất khí. Trong huyền thuyết, có thể có 10^{500} loại hay thậm chí vô số các loại vũ trụ khả hữu. Lẽ tất nhiên, huyền thuyết có thể sai, nhưng hoàn toàn hợp lý hay có lẽ rằng thay thế nó với bất cứ gì thời cũng vẫn có nhiều giải pháp,

Tại sao phải có nhiều hơn một loại vũ trụ xuất lai từ Big Bang?

Theo vũ trụ học thông trưởng (inflationary cosmology), thuyết tốt nhất về những gì xảy ra ngay sau Big Bang, một tiểu khối không gian trong vũ trụ ban đầu giãn nở với tốc độ nhanh hơn ánh sáng để trở thành vũ trụ của

chúng ta. Nó trở thành vũ trụ đa trọng tầng I. Những khối khác cũng có thể thông trưởng, từ những Big Bang khác. Đây là những vũ trụ song song với những quy luật vật lý khác biệt, những giải pháp khác biệt của những phương trình nói trên. Loại vũ trụ song song này rất khác đối với những gì xảy ra ở tầng I.

Tại sao?

Trong tầng I, sinh viên trong các vũ trụ song song khác nhau có thể học hỏi một lịch sử khác biệt của riêng chúng, nhưng vật lý học của chúng vẫn sẽ là như nhau. Sinh viên trong các vũ trụ song song tầng II học hỏi lịch sử khác biệt và vật lý học khác biệt. Chúng có thể học biết có 67 nguyên tố ổn định trong bảng tuần hoàn, chẳng phải 80 như trong bảng chúng ta có. Hay chúng có thể học biết có 4 loại quarks thay vì 6 như chúng ta có trong thế giới của chúng ta.

Liệu các vũ trụ tầng II ở trong các thứ nguyên khác nhau?

Không, chúng chia sẻ cùng không gian, nhưng chúng ta chẳng bao giờ có thể giao tiếp với chúng vì tất cả chúng ta đang bị cuốn trôi khỏi nhau khi không gian giãn nở nhanh hơn tốc độ ánh sáng.

OK, hãy tiếp tục lên tầng III.

Tầng III xuất phát từ một lời giải cấp tiến cho bài toán đo lường đề xuất bởi nhà vật lý học Hugh Everett vào những năm 1950. [Everett đã rời ngành vật lý học sau khi hoàn thành bằng Tiến sĩ tại Princeton bởi tại một hội ứng bình thường đối với các học thuyết của ông.] Everett nói rằng mỗi khi một phép đo lường được thực hiện, vũ trụ chia thành các phiên bản song song của tự thân. Trong một vũ trụ, chúng ta thấy kết quả A trên thiết bị đo lường, nhưng trong một vũ trụ khác, một phiên bản song song của chúng ta sẽ đọc kết quả B. Sau khi đo lường, sẽ có hai chúng ta.

Vì thế cũng có những phiên bản song song của tôi ở tầng III.

Chắc chắn rồi. Ông được tạo thành từ các hạt lượng tử, vì vậy nếu các hạt đó ở hai vị trí cùng một lúc, thời ông cũng vậy. Dĩ nhiên, đó là một ý niệm gây tranh biện nghị luận, và mọi người thích tranh luận về điểm ấy, nhưng thông điệp như vậy cái được gọi là “nhiều thế giới” (“many worlds”) bảo trì tính toàn vẹn của toán học. Theo quan điểm của Everett, hàm số sóng không sụp đổ, và phương trình Schrödinger luôn luôn trì hữu.

Các vũ trụ đa trọng tầng I và tầng II đều tồn tại trong cùng những thứ nguyên không gian như của chúng ta. Liệu điều đó đúng với tầng III?

Không. Các vũ trụ song song ở tầng III tồn tại trong một cấu trúc toán học trừu tượng gọi là không gian Hilbert, khả dĩ có những thứ nguyên không gian vô hạn. Mỗi vũ trụ là thực tồn, nhưng mỗi một trong chúng tồn tại trong những thứ nguyên khác biệt của không gian Hilbert đó. Các vũ trụ song song giống như những trang giấy khác nhau trong một cuốn sách, tồn tại độc lập, đồng thời, và ngay bên cạnh nhau. Theo một quan điểm, tất cả các vũ trụ vô hạn tầng III tồn tại ngay tại đây, ngay lúc này.

Điều đó đưa chúng ta đến tầng cuối cùng: vũ trụ đa trọng tầng IV liên kết chặt chẽ với vũ trụ toán học của chúng ta, cái “ý niệm điên cuồng” mà có lần ông bị cảnh cáo chống lại. Có lẽ chúng ta nên bắt đầu ở đó.

Tôi bắt đầu với cái gì đó cơ bản hơn. Ông có thể gọi nó là giả thuyết thực tế ngoại tại (the external reality hypothesis), tức là, giả thiết có một thực tế ở ngoài đó, độc lập với chúng ta. Tôi nghĩ rằng hầu hết các nhà vật lý học sẽ đồng ý với ý niệm này.

Câu hỏi sau đó sẽ trở thành, những gì là bản thân tự nhiên của thực tế ngoại tại ấy?

Nếu một thực tế tồn tại độc lập với chúng ta, nó phải giải thoát khỏi thứ ngôn ngữ chúng ta sử dụng để mô tả nó. cần phải không có hành lý của con người.

Tôi thấy nơi mà ông đang hướng đến. Không có những từ hay biểu thức để mô tả hay nhận rõ thời chỉ toán học là còn lại với chúng ta.

Nhà vật lý học Eugene Wigner viết một luận văn nổi tiếng vào những năm 1960 đầu đề là “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences” (tạm dịch: Tính hữu hiệu bất hợp lý của Toán học trong các Khoa học Tự nhiên). Trong luận văn đó ông hỏi tại sao tự nhiên được mô tả bởi toán học chính xác đến mức độ như vậy. Câu hỏi đó không bắt đầu với Wigner. Xa xưa như Pythagoras trong thời đại cổ Hy Lạp đã có ý niệm

về một vũ trụ dựng trên cơ sở toán học. Vào thế kỷ 17 Galileo đã viết một cách hùng hồn tự nhiên là một “*cuốn sách vĩ đại*” (“a grand book”) được “viết bằng ngôn ngữ toán học.” Tất nhiên phải nhắc lại lời nói của Plato, nhà triết học vĩ đại người Hy Lạp, bảo rằng các đối tượng của toán học thực sự tồn tại.

Giả thuyết vũ trụ toán học của ông thích ứng như thế nào?

Vâng, Galileo và Wigner và rất nhiều nhà khoa học khác sẽ cho rằng toán học trừu tượng “mô tả” thực tế. Plato có thể nói rằng toán học tồn tại ở đâu đó ngoài kia như là một thực thể lý tưởng. Tôi đang làm việc ở giữa. Tôi có một ý niệm điên cuồng rằng lý do tại sao toán học mô tả thực tế hữu hiệu đến mức độ chính xác như vậy là vì toán học là thực tế. Đó là giả thuyết vũ trụ toán học. Các đối tượng toán học thực sự tồn tại và chúng thực sự là thực thể vật lý.

OK, nhưng ông có ý gì khi nói vũ trụ là toán học? Tôi không cảm thấy như một bó phương trình. Bữa ăn sáng của tôi dường như khá rắn. Đa số khó lòng chấp nhận sự tồn tại cơ bản của họ biến thành chủ đề mà họ ghét ở trường Trung học.

Đối với hầu hết mọi người, toán học có vẻ như là một hình thức trừng phạt tàn bạo hoặc một thủ thuật để điều khiển số. Nhưng như vật lý học, toán học đã phát triển để đặt những câu hỏi rộng hơn. Hiện nay các nhà toán học nghĩ rằng lãnh vực của họ như là nghiên cứu “cấu trúc toán học” (“mathematical structure”), những tập hợp các thực thể trừu tượng và những quan hệ giữa chúng. Những gì xảy ra trong vật lý học là qua nhiều năm các cấu trúc toán học phức tạp và tinh vi hơn đã chứng tỏ là vô giá.

Xin ông đưa ra một ví dụ đơn giản về cấu trúc toán học.

Các số nguyên 1, 2, 3 là một cấu trúc toán học nếu ông bao gồm các phép tính như phép cộng, trừ, và các phép tương tự. Tất nhiên các số nguyên là khá đơn giản, cấu trúc toán học xem như vũ trụ của chúng ta sẽ phức tạp đủ để cho các sinh vật như chúng ta tồn tại. Một số người nghĩ rằng huyền thuyết là học thuyết tối chung về vũ trụ có tên gọi là thuyết về Nhất thiết (theory of everything). Nếu điều đó trở thành sự thật, thời huyền thuyết sẽ là một cấu trúc toán học phức tạp đủ để tự ý thức (self-awareness) có thể tồn tại bên trong nó.

Nhưng sự tự ý thức bao gồm cảm giác sống động. Điều đó dường như khá khó để nắm bắt trong toán học.

Để hiểu khái niệm này, ông phải phân biệt hai phương thức nhìn thực tế. Phương thức đầu là từ bên ngoài, giống như tổng quan của một nhà vật lý học nghiên cứu cấu trúc toán học của nó. Phương thức thứ hai là quan sát bên trong của một quan sát viên sống trong cấu trúc. Ông có thể nghĩ về một con ếch sống trong cảnh quan (landscape) như là cái nhìn từ bên trong và về một con chim bay trên cao đang khảo sát cảnh quan như là cái nhìn từ bên ngoài. Hai quan điểm này được kết nối với nhau thông qua thời gian.

Theo phương thức nào thời gian cung cấp một cầu nối giữa hai quan điểm?

Vâng, tất cả các cấu trúc toán học đều là những thực thể trừu tượng, bất biến. Các số nguyên và những quan hệ giữa chúng với nhau, tất cả những sự vật này tồn tại bên ngoài thời gian.

Ông muốn nói rằng đối với những cấu trúc ấy không có những sự vật như thời gian?

Vâng, từ bên ngoài. Nhưng có thể có thời gian bên trong một số cấu trúc, số nguyên chẳng phải là một cấu trúc toán học bao gồm thời gian, nhưng thuyết tương đối của Einstein chắc chắn có những phản tương ứng với thời gian. Thuyết của Einstein có một cấu trúc toán học bốn chiều được gọi là không-thời gian (space-time) trong đó có ba chiều không gian và một chiều thời gian.

Vì vậy, cấu trúc toán học xem như thuyết tương đối có một phần mô tả rõ ràng thời gian, hoặc, tốt hơn, là thời gian. Nhưng các số nguyên không có bất cứ sự vật nào tương tự.

Vâng, điều quan trọng cần ghi nhớ là thuyết của Einstein, xét toàn bộ, biểu tượng quan điểm của con chim. Trong thuyết tương đối, tất cả thời gian đã tồn tại rồi. Tất cả các biến cố, bao gồm toàn bộ cuộc sống của ông, đã tồn tại rồi như là cấu trúc toán học được gọi là không-thời gian. Trong không-thời gian, chẳng có gì xảy ra hay biến chuyển tại vì nó chứa tất cả thời gian cùng một lúc. Từ quan điểm của ếch thời gian dường như đang trôi, nhưng đó chỉ là một ảo ảnh. Ếch nhìn ra và thấy mặt trăng trong không gian, quay quanh Trái Đất. Nhưng từ quan điểm của con chim, quỹ đạo của mặt trăng là một xoắn ốc tĩnh trong không-thời gian.

Con ếch cảm thấy thời gian trôi qua, nhưng từ quan điểm của chim, nó chỉ là một cấu trúc toán học vĩnh hằng, không thể thay đổi.

Sự thật là như vậy. Nếu lịch sử vũ trụ của chúng ta là một bộ phim, cấu trúc toán học sẽ không tương ứng với một khung đơn nhất, mà với toàn bộ đĩa DVD. Điều đó giải thích sự biến chuyển có thể là một ảo ảnh.

Tất nhiên, cơ học lượng tử với nguyên tắc bất xác định tính (uncertainty principle) trứ danh và phương trình Schrödinger của nó sẽ phải là một phần của thuyết về Nhất thiết.

Đúng. Sự vật phức tạp hơn chỉ là tương đối. Nếu thuyết của Einstein mô tả tất cả của Vật lý học, thời tất cả các biến cố sẽ được xác định trước. Nhưng nhờ cơ học lượng tử, thú vị hơn nhiều.

Nhưng tại sao một số phương trình mô tả vũ trụ của chúng ta thật hoàn hảo và số khác thì không như thế?

Stephen Hawking đã từng hỏi điều đó theo cách này: “Cái gì vậy đã thổi lửa vào các phương trình và làm ra một vũ trụ để chúng mô tả?” Nếu tôi đúng và vũ trụ chỉ là toán học, thời không cần phải thổi lửa. Một cấu trúc toán học chẳng mô tả vũ trụ, nó là một vũ trụ. Sự tồn tại của vũ trụ đa trọng tầng IV cũng trả lời một câu hỏi làm nhức đầu thiên hạ trong một thời gian dài. John Wheeler phát biểu theo cách này: Ngay cả khi chúng ta tìm ra các phương trình mô tả vũ trụ một cách hoàn hảo, thời tại sao các phương trình đặc thù này chứ không phải các phương trình khác? Câu trả lời là các phương trình khác chỉ phối các vũ trụ song song khác, và vũ trụ của chúng ta có các phương trình đặc thù này tại vì chúng chỉ có tính thống kê, cho phép phân bố các cấu trúc toán học khả dĩ hỗ trợ các quan sát viên như chúng ta.

Đây là những ý niệm khá rộng và lôi cuốn. Phải chăng đó là trầm tư triết học, hay là có cái gì đó thực sự có thể thử nghiệm?

Vâng, giả thuyết này tiên đoán nhiều hơn thực tế hơn chúng ta tưởng, vì mỗi cấu trúc toán học là một vũ trụ khác. Giống như mặt trời của chúng ta chẳng phải là trung tâm của thiên hà, mà chỉ là một ngôi sao khác, thời vũ trụ của chúng ta cũng chỉ là một cấu trúc toán học trong một vũ trụ đầy cấu trúc toán học. Từ đó chúng ta có thể làm tất cả mọi loại dự đoán.

Vì vậy thay vì khám phá chỉ vũ trụ của chúng ta, chúng ta nhìn vào tất cả các cấu trúc toán học khả hữu trong vũ trụ lớn hơn này.

Nếu giả thuyết vũ trụ toán học là đúng thời chúng ta không còn hỏi những phương trình toán học đặc thù nào mô tả tất cả của thực tế nữa. Thay vào đó, chúng ta phải tìm ra cách phân biệt quan điểm của con ếch về vũ trụ - những quan sát của chúng ta - từ quan điểm của con chim. Một khi chúng ta phân biệt chúng được, chúng ta có thể xác định liệu chúng ta đã vạch rõ cấu trúc thực sự của vũ trụ của chúng ta, và giúp chúng ta tìm ra góc nào trong vũ trụ toán học là nhà của chúng ta.

Max, đây là lãnh thổ xa lạ đối với người dân bình thường. Trên bình diện cá nhân, làm thế nào để ông hòa giải việc theo đuổi tính chân tối chung với cuộc sống hằng ngày của ông?

Đôi khi nó khá hài hước. Tôi sẽ tự lượng về bản thân tối chung của thực tế và sau đó vợ tôi nói, “Này, anh quên mang thùng rác ra ngoài.” Hình ảnh lớn và hình ảnh nhỏ vừa mới chạm nhau.

Vợ của ông là một nhà thiên văn học được kính trọng. Có bao giờ ông nói về chuyện của ông với hai em bé con của ông trong buổi ăn sáng?

Bà ấy cười nhạo tôi vì “bananas stuff” triết học của tôi. Nhưng chúng tôi cố gắng không nói về nó quá nhiều. Chúng tôi có con phải nuôi.

Liệu các học thuyết của ông có giúp nuôi dạy con cái hay không, hay cũng tuồng như hai thế giới khác nhau?

Sự giằng lên nhau với các đứa bé thật là tuyệt vời bởi vì chúng cũng đặt những câu hỏi giống như tôi. Tôi đã làm một bài thuyết trình về không gian cho trường mẫu giáo của con trai tôi, Alexander, khi nó lên bốn. Tôi cho xem các đoạn băng hạ cánh trên mặt trăng và mang đến một tên lửa. Rồi một đứa bé giơ tay lên và nói: “Tôi có một câu hỏi. Liệu không gian kết thúc hay đi mãi mãi?” “Yeah, đó chính là điều hiện giờ tôi đang suy xét.”

3.5 Tập sách “Our Mathematical Universe” của Tegmark

Tegmark nói rõ thêm: Đây là tầm cầu của ông về Bản thân tự nhiên chung cực của Thực tế (My Quest for the Ultimate Nature of Reality). Sách gồm tất cả là 13 Chương. Chương 1, Lời Giới thiệu, khởi đầu với câu chuyện

vào năm 18 tuổi Max Tegmark ngồi trên chiếc xe đạp chẳng bao giờ thấy chiếc xe tải cán ông ngay tại một ngã tư ở Stockholm. Tiếng nổ của một cái còi, tiếng thét của lớp xe và tiếng bịch đáng sợ kế tiếp theo nhau rất nhanh, dập tắt một cuộc đời trẻ đầy hứa hẹn.

Lẽ tất nhiên chuyện ấy không bao giờ xảy ra. Tiến sĩ Tegmark, nay 46 tuổi, kể lại chuyện ấy trong những trang mở đầu tập sách “khiêu khích” này, ngoặt ngay vào khoảnh khắc cuối cùng và tiếp tục đến trường - và một sự nghiệp học thuật đưa ông trở thành giáo sư tại M.I.T. và xếp ông vào hạng đầu của các nhà vũ trụ học.

Nhưng theo Tegmark, tai nạn chết người ấy đã xảy ra. Ông viết, Đúng thế. Ngày ấy ông không bị thương và ông cũng bị cán chết, ông bị thương nặng, và bị thương nhẹ. Ông chịu đựng mọi kết quả khả hữu, sung sướng và không sung sướng, khả dĩ xảy ra với một người đi xe đạp gặp phải một chiếc xe tải đang chạy nhanh.

Ông lập luận, tất cả những sự việc như vậy đã xảy ra, bởi vì mọi sự vật khả dĩ xảy ra đều xảy ra - trong ít nhất một trong số vô hạn các vũ trụ. *If It's Possible, It Happened*. Đây quả là một điều xa vời thực tế theo quan điểm của hầu hết mọi người. Ý niệm về các vũ trụ song song, trong đó các biến cố sai khác với những gì trong thực tế của chúng ta, thường là lãnh vực của tiểu thuyết huyền (Science fiction). Nhưng Tegmark là một nhà khoa học, chẳng phải là một tiểu thuyết gia, và ông đã tạo ra một trường hợp đầy quyền lực, dẫn chúng ta bước theo từng bước logic từ khoa học chính thống tiến vào một lãnh thổ xa lạ vô cùng.

Chúng ta bắt đầu cuộc hành trình bằng cách khảo sát toàn bộ bối cảnh của câu hỏi “Thực tế là gì? (What is Reality?) đã được biến chuyển bởi các đột phá khoa học gần đây, với vật lý học làm sáng tỏ thực tế ngoại tại của chúng ta từ quy mô lớn nhất (Ch. 2-6) đến quy mô bé nhất (Ch. 7-8). Trong Phần I của sách, chúng ta sẽ theo đuổi câu hỏi “Vũ trụ của chúng ta to lớn cỡ nào?” và tìm kiếm kết luận cuối cùng của nó bằng cách đi đến quy mô vũ trụ bao la horn, khám phá cả nguồn gốc vũ trụ và hai loại vũ trụ song song, tìm ra dấu hiệu rằng không gian, theo một ý nghĩa nào đó, là toán học. Trong Phần II của sách, chúng ta không ngừng theo đuổi câu hỏi “Những gì cấu thành mọi sự vật?” bằng cách đi vào mô hình thu nhỏ của vũ trụ vi mô bên trong nguyên tử, xét xem một loại vũ trụ song song thứ ba và tìm ra dấu hiệu rằng các khối xây dựng cuối cùng của vật chất cũng, theo một ý nghĩa nào đó, là toán học. Trong Phần III của sách, chúng ta lùi bước, xét xem tất cả sự việc nói trên có ý nghĩa gì cho bản thân tự nhiên chung cực của thực tế. Phần Ba này cấu kết một quan điểm khoa học với những ý niệm tư biện của Tegmark về bản thân tự nhiên toán học của thực tế. Chúng ta sẽ tham cứu sâu xa cái ý niệm cực đoan và gây tranh biện nghị luận nhất của ông cho rằng thực tế chung cực là thuần túy toán học, phá vỡ các ý tưởng quen thuộc như tính ngẫu nhiên, tính phức tạp, và thậm chí biến chuyển thành trạng thái ảo tưởng, và ngụ ý cho rằng có một tầng thứ tư và chung cực các vũ trụ song song. Bằng cách trở về nhà, chúng ta chấm dứt cuộc hành trình trong Chương 13. Chúng ta sẽ tìm hiểu những điều bàn luận trên có ý nghĩa gì đối với triển vọng trong tương lai của cuộc sống trong Vũ trụ của chúng ta, cho con người chúng tôi, và cho cá nhân bạn.

Chi tiết các Chương trong Ba Phần của sách:

Phần I

Chương 2. Vị trí của chúng ta trong Không gian. Các vấn đề vũ trụ. Không gian lớn cỡ nào? Kích thước của Trái Đất. Khoảng cách tới Mặt Trăng. Khoảng cách tới Mặt Trời và các hành tinh. Khoảng cách tới các ngôi Sao. Khoảng cách tới các Thiên Hà. Không gian là gì?

Chương 3. Vị trí của chúng ta trong Thời gian. Hệ Mặt Trời của chúng ta đến từ đâu? Các Thiên Hà đến từ đâu? Các Vi ba bí ẩn đến từ đâu? Các Nguyên tử đến từ đâu?

Chương 4. Vũ trụ của chúng ta bằng số. Cần đến: Vũ trụ học tinh xác. Bối cảnh-vi ba dao động tinh xác. Tập quần Thiên Hà tinh xác. Bản đồ chung cực của Vũ trụ của chúng ta. Big Bang của chúng ta đến từ đâu?

Chương 5: Những nguồn gốc vũ trụ của chúng ta. Big Bang của chúng ta có những vấn đề gì? Thông trưởng thao tác như thế nào? Lễ vật cấp lễ vật một lần nữa. Thông trưởng vĩnh hằng.

Chương 6. Hoan nghênh sự đến của vũ trụ đa trọng. Vũ trụ đa trọng tầng I. Vũ trụ đa trọng tầng II. Nghi ngờ chừng đề ôn lại vũ trụ đa trọng.

Phần II

Chương 7. Legos vũ trụ (lego = trò chơi lắp ráp). Chế tạo sóng. Sự kỳ dị không thể bị hạn chế. Sự thiếu hiểu biết lượng tử.

Chương 8. Vũ trụ đa trọng tầng III. Ảo tưởng về tính ngẫu nhiên. Kiểm duyệt lượng tử. Niềm vui được thấy những người khác xuất bản những phát minh của mình trước khi mình công bố. Tại sao bộ não của bạn chẳng

phải là một máy tính lượng tử? Chủ thể, Đối tượng và Môi trường. Tự sát lượng tử. Bất hủ lượng tử. Vũ trụ đa trọng được thống nhất. Chuyển quan điểm: nhiều thế giới hay nhiều từ ngữ?

Phần III

Chương 9. Thực tế nội tại, thực tế ngoại tại và thực tế cộng thức. Chân tính, toàn bộ chân tính và chẳng có gì ngoài chân tính. Thực tế cộng thức. Vật lý học: liên kết thực tế ngoại tại với thực tế cộng thức.

Chương 10. Thực tế vật lý và Thực tế toán học. Toán học, toán học khắp nơi! Giả thuyết vũ trụ toán học. cấu trúc toán học là gì?

Chương 11. Thời gian là một ảo tưởng? Làm thế nào thực tế vật lý có thể là toán học? Bạn là gì? Bạn ở đâu? (và bạn cảm nghĩ gì?). Bạn ở thời điểm nào?

Chương 12. Vũ trụ đa trọng tầng IV. Tại sao tôi tin vào vũ trụ đa trọng tầng IV? Bằng cách nào giả thuyết vũ trụ toán học ám thị vũ trụ đa trọng tầng IV? Thăm hiểm vũ trụ đa trọng tầng IV: cái gì ở ngoài đó? Hàm nghĩa của vũ trụ đa trọng tầng IV. Chúng ta đang sống trong một sự mô hình hóa (simulation)? Quan hệ giữa MUH (Giả thuyết Vũ trụ Toán học; The Mathematical Universe Hypothesis). Kiểm nghiệm vũ trụ đa trọng tầng IV.

Chương 13. Cuộc sống, Vũ trụ của chúng ta và Nhất thiết. Thực tế vật lý của chúng ta lớn cỡ nào? Tương lai của Vật lý học. Tương lai của vũ trụ của chúng ta. Tương lai của cuộc sống. Tương lai của bạn.

3.6 Bình luận về “Our Mathematical Universe”

Our Mathematical Universe là một cuốn sách phi hư cấu, xuất bản vào năm 2004, của nhà vũ trụ học người Thụy Điển, Max Tegmark. Được viết dưới hình thức khoa học phổ thông, theo Edward Frenkel, một bình luận gia của báo The New York Times, sách có thể chia làm hai phần, khác nhau như ngày và đêm. Một phần, do *Dr. Tegmark*, gọi là “một sự quan sát cung cấp tri thức hay ý niệm hữu ích về những phát triển đầy khích động mới đây trong vật lý học thiên văn và thuyết lượng tử”. Phần kia, do *Mr. Tegmark*, là một cuộc thảo luận về ý niệm gây tranh biện nghị luận của ông cho rằng bản thân thực tế là một cấu trúc toán học.

Theo Andrew Liddle, bình luận tác phẩm ‘Our Math Universe’ cho báo Nature, “cực điểm mà Tegmark tìm cách dẫn chúng ta đến là ‘vũ trụ đa trọng tầng IV’. Tầng này khẳng định vũ trụ không chỉ được mô tả bởi toán học, nhưng trên thực tế, là toán học. Tất cả các cấu trúc toán học khả hữu có một sự tồn tại vật lý, và gọi chung, tạo thành một vũ trụ đa trọng quy nạp hết thảy mọi cấu trúc toán học khác. Ở đây, Tegmark đang đưa chúng ta vượt xa các quan điểm được chấp nhận, biện hộ cho quan điểm cá nhân của ông về việc giải thích Vũ trụ.”

Nói chung, những nhận xét về cuốn sách đầy nhiệt tình đối với khả năng của Tegmark đã làm cho các chủ đề khoa học trở nên thú vị và dễ hiểu. Chẳng hạn, Brian Rotman, bình luận gia của báo The Guardian, viết: “Tegmark, một giáo sư vật lý học tại M.I.T., đã viết về sự tiên tiến của vũ trụ học và thuyết lượng tử theo thể văn xuôi thân thiện và thoải mái, đầy những giai thoại thú vị và những loại suy thực tiễn.”

Phê bình về cuốn sách dường như phản ánh hai phê bình nổi bật về giả thuyết vũ trụ toán học của Tegmark: phản bác việc thông diễn cơ học lượng tử như nhiều thế giới và phản bác chủ nghĩa duy tâm tính Plato (Platonic idealism) của Tegmark. Chẳng hạn, trong một bài phê bình cuốn sách, có tính cách tích cực, nói chung, viết cho tờ The Wall Street Journal, Peter Woit bảo rằng: “Nhưng quyền năng vĩ đại của thế giới quan khoa học luôn luôn xuất phát từ sự khẳng khẳng cho rằng chúng ta nên chấp nhận những ý niệm căn cứ trên các bằng chứng thực nghiệm chứ chẳng phải trên lý luận siêu hình hay trên tuyên bố chân tính của các nhân vật quyền uy.”

Cố gắng cân bằng cả quan điểm tích cực và tiêu cực của tác phẩm, Amir Alexander viết cho tờ The New York Times: “Thật khó để nói được liệu vũ trụ toán học của Tegmark cuối cùng sẽ được coi là một thắng lợi tính Einstein hoặc một ngõ cụt tính Descartes. Những kết luận của ông thật quá xa khỏi biên giới của khoa học chính thống ngày nay, và không có hy vọng các bằng chứng kết luận sẽ sớm xuất hiện. Tuy nhiên, Our Math Universe là không gì cả nếu không gây cảm kích. Lập luận cao minh và lời tả hoa mỹ, nó chẳng bao giờ ít hơn kích thích tư duy về những bí ẩn lớn nhất của sự tồn tại của chúng ta.

Jeremy Butterfield, một triết gia về vật lý học tại University of Cambridge, viết một loạt bài bình luận tác phẩm Our Mathematical Universe rất đầy đủ và sâu rộng. Ông viết cho Plus Magazine, một tạp chí tại tuyến (online magazine) của ‘the UK’s Mathematics Millennium Project’. Ông phối hợp ba bài báo tại tuyến, bài thứ nhất thảo luận vấn đề ‘Phương trình Schrödinger — cái gì thế?’ (Schrödinger’s equation — what is it?) do Marianne Freiberger, chủ biên của Plus, viết với sự giúp đỡ của Butterfield. Bài thứ hai ‘Được làm bằng toán học?’ (Made of maths?) do chính Butterfield viết. Và bài thứ ba, ‘Có chẳng những vũ trụ song song?’ (Are there parallel

universes?), do Marianne Freiberger viết sau khi phỏng vấn nhà vật lý học Adrian Kent và triết gia vật lý học David Wallace. Với những sự thật do sự phối hợp mang lái và sự hiểu biết cá nhân, Butterfield có một số nhận xét như sau về tác giả Tegmark và tác phẩm Our Mathematical Universe.

Max Tegmark không chỉ là một nhà vũ trụ học tài năng và nổi tiếng. Ông viết một cách rõ ràng và dí dỏm về những ý niệm chuyển hóa trí tuệ mà cuốn sách của ông giải thích: không chỉ vật lý học của thuyết tương đối, vũ trụ học và vật lý học lượng tử mà còn cả các khả năng gây tranh biện nghị luận - bốn phương thức chính theo đó vũ trụ lớn hơn và xa lạ hơn chúng ta tưởng tượng - mà ông ấy muốn thuyết phục chúng ta chấp nhận. Bên cạnh đó, ông kết hợp khoa học với những giai thoại cá nhân về đời sống và thời đại của ông: từ khi lớn lên ở Sweden (Thụy Điển), tới sự nghiệp sau này của ông ở Mỹ. Vì vậy, cuốn sách bắt đầu với một tai nạn xe đạp gần như chết người đã xảy ra khi ông còn là một thiếu niên (và các phương thức cơ học lượng tử khác nhau có thể đã gây tử vong!); và trong suốt cuốn sách, có những giai thoại khác nhau, chẳng hạn, về việc gặp gỡ nhà vật lý học rất hấp dẫn tại Princeton, John Wheeler. Tóm lại, thật quá lý tưởng cho những ai thích tự truyện ly kỳ, pha giấm nhiều giai thoại rất lôi cuốn.

3.7 Được làm bằng toán học?

Tegmark chủ trương tự thân Vũ trụ là một cấu trúc toán học. Trong Our Mathematical Universe, lập luận của ông bắt đầu với tiền đề rằng thực tế ngoại tại hoàn toàn độc lập với con người, với chúng ta. Nếu điều ấy đúng, thời thực tế ngoại tại phải có một mô tả hoàn toàn không có các thành phần chủ quan: nghĩa là hoàn toàn không có các yếu tố phát sinh từ các sự thật sinh học về nhận thức của con người, hoặc các sự thật văn hoá, hoặc các sự thật về tâm lý học của một cá nhân.

Tegmark có một cái tên ẩn dụ sống động cho những thành phần chủ quan này. Ông gọi chúng là "hành lý": từ có ý nghĩa gánh nặng hoặc lỗi lầm trong mô tả thiên nhiên của chúng ta do những thành kiến từ lịch sử sinh học, văn hoá hoặc cá nhân của chúng ta. Ông có một phép ẩn dụ sống động hơn cho nỗ lực loại bỏ các thành phần chủ quan như vậy từ mô tả của chúng ta về tự nhiên: nỗ lực mà khoa học, đặc biệt là vật lý học, đã từng tạo ra và nên tiếp tục thực hiện, để vượt qua các thành kiến. Vì vậy, ông kêu gọi loại bỏ các thành phần chủ quan "giảm phụ giúp hành lý"

. Một mô tả thế giới mà không có hành lý, theo luận cứ của ông, là thuần túy toán học. Nó bao gồm các thực thể trừu tượng và các mối quan hệ giữa chúng. Một khi hành lý bị tước đi, chúng ta sẽ không còn gì ngoài toán học. Vì vậy, Tegmark cho thấy chúng ta nên kết luận rằng thế giới là một cấu trúc toán học.

Butterfield trả lời lập luận trên như sau. Tôi đồng ý rằng khoa học, đặc biệt là vật lý học, đã từng có những nỗ lực liên tục để vượt qua những sai lệch nhận thức khác nhau do kết cấu chủ quan (sinh học, văn hoá hoặc cá nhân). Tôi cũng đồng ý rằng để đạt được tiến bộ trong tương lai, chúng ta phải kỳ vọng vật lý học tiếp tục những nỗ lực như vậy. Nhiều nhà khoa học khác, đặc biệt là các nhà vật lý học, và triết học, sẽ đồng ý với điều này. Tôi cũng tin rằng thực tế ngoại tại là độc lập với con người chúng ta - trong triết học, ý niệm này thường được gọi là *chủ nghĩa hiện thực* (realism) - và giả thuyết thực tế ngoại tại hàm ý rằng thực tế phải có một mô tả hoàn toàn không có các thành phần chủ quan, từ đó dẫn đến kết luận: 'Vũ trụ là một cấu trúc toán học'. Đó là điều tôi không đồng ý. Một mô tả hoàn toàn không có các thành phần chủ quan *chẳng hàm ý rằng* 'Vũ trụ là một cấu trúc toán học'

Nói cách khác, thông điệp của Butterfield là: phân biệt! Chúng ta phải phân biệt giữa toán học ứng dụng (còn gọi là vật lý học lý thuyết) và toán học thuần túy.

3.7.1 Toán học ứng dụng

Toán học ứng dụng cung cấp - hoặc ít nhất là nhằm mục đích cung cấp - những mô tả đúng của những hiện tượng thực nghiệm, đặc biệt là hiện tượng vật lý, được đặt trong không gian và thời gian. Nhưng "đúng" không có nghĩa là "hoàn chỉnh". Ví dụ, tôi đổ tràn ly sữa của tôi và sữa lan trên bàn. Toán học ứng dụng thành công mô tả nó chảy như thế nào theo phương thức số lượng vật lý liên quan, chẳng hạn như vị trí, vận tốc và mật độ của các khối lượng nhỏ của sữa. Nhưng chúng ta bỏ qua vô số chi tiết, chẳng hạn kết cấu nguyên tử của sữa. Tất nhiên, điều này được thực hiện bằng cách tạo mẫu (modelling) sữa bao gồm các khối lượng đủ lớn để chứa nhiều nguyên tử (và do đó, hy vọng không bị ảnh hưởng bởi hiện tượng nguyên tử); nhưng cũng nhỏ theo những tiêu chuẩn của con người, của chúng ta, vì vậy sữa dường như liên tục trong cấu trúc của nó

Tính năng quan trọng của ví dụ này là đề cập đến "số lượng vật lý liên quan": vị trí, vận tốc và mật độ. Tất nhiên, đó là một trong những vinh quang lớn của vật lý học kể từ ngày Galileo đã giới thiệu các số lượng mới và tinh chế các số lượng cũ - đôi khi theo những cách rất tinh tế. Nó đã kết hợp mới và cũ vào một tập hợp các luật và các phương pháp mà mặc dầu có thể sai lầm, và thực sự thay đổi suốt những thập kỷ qua - đã đi từ thành công này sang thành công khác, cả về sự hiểu biết lý thuyết và sự dự đoán định lượng thực nghiệm.

Chúng ta đã đi một quãng đường dài từ "các tam giác, vòng tròn, và đồ hình hình học khác" của Galileo. Trong thời của ông, thật là hợp lý khi kỳ vọng rằng vật lý học có thể điều hành chỉ với khái niệm hình học (như được thừa hưởng từ người Hy Lạp) và có thể thêm một chút nữa - chẳng hạn như các ý tưởng về tiếp xúc hoặc va chạm, và khối lượng và/hay mật độ. Nhưng điều đó đã không xảy ra. Trí tưởng tượng của thiên nhiên vượt xa trí tưởng tượng chúng ta! Vì vật lý học tiếp tục nghiên cứu các lĩnh vực mới kế tiếp của hiện tượng, nên nó phải đưa ra một trình tự các số lượng mới (và cũng phải tinh chỉnh các số lượng cũ).

Đó là những số lượng vật lý đặc thù (và tất nhiên, các trị của chúng đối với hệ thống được mô tả) được đề cập đến bởi các ký hiệu trong các phương trình vật lý học.

Vì vậy để tổng hợp: ngày nay, chúng ta nên sửa lại câu nói của Galileo. Thay vì "Tự nhiên là một cuốn sách viết bằng ngôn ngữ toán học", chúng ta nên nói: "Tự nhiên là một cuốn sách được viết bằng cú pháp của toán học, nhưng với ngữ nghĩa của vật lý".

3.7.2 ... so với toán học thuần túy

Toán học thuần túy là gì? Butterfield có ý gì khi trong đoạn trên thốt lên: "phân biệt!"?

Vào giữa thế kỷ XIX, có nhiều lý do để xuất hiện ý niệm cho rằng toán học là nghiên cứu các cấu trúc tùy ý. Nói cách khác: mọi người bắt đầu suy nghĩ về toán học như là nghiên cứu hậu quả của các quy tắc tùy ý mà một nhà toán học giả định là chi phối một lãnh vực các yếu tố nào đó. Những quy tắc này là trừu tượng theo nghĩa chỉ có hành vi về mặt cấu trúc là đáng kể; và các yếu tố là trừu tượng theo nghĩa không có gì được giả định về bản thân, hoặc về những tương hỗ quan hệ, ngoại trừ việc chúng tuân thủ các quy tắc đã công bố.

Hình học cung cấp một ví dụ. Một hình học bao gồm một tập hợp các đối tượng (điểm, đường và mặt phẳng, V.V...) và một số sự thật cơ bản về các đối tượng này (chẳng hạn, thông qua bất kỳ hai điểm nào ta có thể vẽ một đường). Nhưng có nhiều cấu trúc khác nhau đáp ứng cùng sự mô tả đó. Mặt phẳng hai thứ nguyên quen thuộc phát sinh một hình học hoàn hảo giống như bề mặt của quả cầu cũng thế, với các vòng tròn lớn đóng vai trò của các đường thẳng. Cả hai cấu trúc về cơ bản khác nhau, ít nhất là bởi vì các tam giác có hành vi khác nhau: trên mặt phẳng, các góc của chúng cộng lại luôn luôn là 180 độ, trong khi trên mặt cầu tổng cộng ba góc lên hơn 180 độ vì tam giác phình ra phía ngoài.

Vào thế kỷ XIX, các nhà toán học cũng phát hiện ra một loại hình học thứ ba, được gọi là *hyperbolic*, trong đó tổng cộng các góc tam giác là dưới 180 độ. Nó mô tả một không gian chúng ta không gặp trong cuộc sống hàng ngày. Phát hiện này buộc các nhà toán học phải phân biệt giữa hình học thực tế của không gian vật lý - một vấn đề thực nghiệm được tiết lộ bởi hành vi của các thước và thước đo góc - và ý niệm về một hệ thống hình học thuần túy - có thể nhất trí, và đáng nghiên cứu, mặc dầu nó không mô tả không gian vật lý.

3.7.3 Hai nghĩa của "là" ("is")

Do đó, chúng ta đi đến ý niệm hiện đại về cấu trúc toán học thuần túy: nó bao gồm một tập hợp các đối tượng, được trang bị một số thuộc tính và quan hệ giả định, chẳng hạn, một phép nhân tùy thuộc vào một số quy tắc. Các đối tượng, thuộc tính và quan hệ tất cả đều trừu tượng theo nghĩa là không có gì được giả định về bản thân của chúng, ngoại trừ hành vi được giả định bởi các quy tắc. Điều quan trọng đối với chúng ta là sự tương phản chủ yếu đối với toán học ứng dụng và các cấu trúc của nó: trong toán học thuần túy các số lượng vật lý không được đề cập.

Sự khiếm khuyết nội dung⁴ của một cấu trúc toán học thuần túy hoàn toàn tương thích với ý niệm rằng cái gì đó có nội dung, chẳng hạn, cái gì đó đề cập các số lượng vật lý, là một *sự lệ* (instance) của một cấu trúc toán học thuần túy. Ví dụ, ở đây tôi đang tồn tại với vô số thuộc tính của tôi, về kích thước, hình dạng, khối lượng, nhiệt

độ, V.V... Đây là gia đình tôi với vô số thuộc tính và quan hệ - tổng khối lượng của chúng tôi, người này mập hơn người kia,

người kia đang ở giữa hai người khác, V.V.... Tất cả những điều ấy đều có nội dung. Nhưng tôi cũng là một sự lệ của nhiều thuộc tính trừu tượng không có nội dung: về số, nhỏ thua hai, chẳng phải là một phương trình, V.V.... Và tương tự như vậy, gia đình tôi như một tập hợp các đối tượng là một sự lệ của nhiều thuộc tính và quan hệ trừu tượng không có nội dung: về số, lớn hơn hai, hình thành các nút trong một cây gia đình, V.V....

Nhưng trong khi cái gì đó có nội dung có thể là một *sự lệ* của một cấu trúc không có nội dung, nó không thể được coi là *ngang bằng* với cấu trúc đó. "Là" của sự đồng nhất (identity), như trong $a = b$, không phải là "là" của phép thật lệ (instantiation), như trong "Max là cao lớn". Nếu thực sự $a = b$, thì a và b có nội dung như nhau, nếu có (theo bất kỳ nghĩa nào của "nội dung" tùy thích). Vì chỉ có một thực thể a , cũng được gọi là b . Nhưng trong trường hợp của "Max là cao lớn", Max có thể có vô số thuộc tính, có nội dung như sở nguyện (theo bất kỳ nghĩa nào), không được chọn trên, hoặc chẳng được mã hoá bởi, hay không phải một phần ý nghĩa của, vị từ "là cao lớn".

Với những thảo luận trên, phê bình của Butterfield về tuyên bố "tự nhiên là toán học" tựu trung rất đơn giản nhưng rất quan trọng chỉ có một vấn đề: phân biệt giữa "là" của sự đồng nhất (identity) và "là" của phép thật lệ (instantiation). Butterfield cho biết ông rất vui khi thừa nhận thể giới chúng ta đang sống trong đó *thật lệ* (instantiate) một cấu trúc toán học, nhưng ông phủ nhận nó *là* một cấu trúc toán học.

3.8 Có chẳng những vũ trụ song song?

Có vũ trụ song song không? Các vũ trụ trong đó, thay vì đọc bài báo này, bạn đang ngủ say, trong đó bạn đang hạnh phúc, bất hạnh phúc, giàu hơn, nghèo hơn, hoặc thậm chí chết? Câu trả lời là "có thể". Đó là một chủ trương gây tranh biện nghị luận nhưng một chủ trương đã giành được ngày càng nhiều người ủng hộ trong vài thập kỷ qua.

Nguồn gốc của sự song song này nằm trong vật lý học của lượng rất nhỏ. Vào đầu thế kỷ XX, các nhà vật lý học đã phát triển cơ học lượng tử để tìm hiểu thế giới ở những quy mô nhỏ nhất. Lý thuyết cho thấy trong thế giới nhỏ bé này thực tế là mờ mờ. Các hạt nhỏ, chẳng hạn, như các electrons, không cần phải ở đây hay ở đó, chúng có thể ở nhiều nơi cùng một lúc. Và chúng cũng có thể đồng thời sở hữu những thuộc tính khác mà chúng ta thường xem như hỗ tương loại trừ (mutually exclusive). Khi điều này xảy ra, các nhà vật lý học nói rằng các hạt nằm trong một sự *chồng chập* của một số trạng thái khác nhau. Các thí nghiệm đã xác nhận rằng sự chồng chập là có thật. Ngay cả các phân tử lớn như quả buckyball, gồm 60 nguyên tử cacbon, thực sự có thể ở nhiều nơi cùng một lúc.

Một câu hỏi hiển nhiên xuất hiện: Tại sao, khi tôi tìm kiếm một hạt, tôi luôn luôn chỉ thấy nó ở một nơi? Đây là bài toán đo lường nổi tiếng của cơ học lượng tử. Sáng rõ hơn, vì tất cả chúng ta đều làm bằng hạt, tại sao tự thân chúng ta luôn luôn chỉ ở trong một chỗ?

Cơ học lượng tử không đưa ra một câu trả lời cho câu hỏi ấy. Một khả thể là vì học thuyết không cho chúng ta hình ảnh đầy đủ. Có lẽ có một cơ chế khác trong tự nhiên, mà chúng ta chưa được biết, buộc thực tế phải nắm bắt chính xác một trong số tất cả các trạng thái chồng chập khi chúng ta thực hiện phép đo. Thực tế có thể mờ mờ ở những quy mô nhỏ nhất, nhưng ngay khi có cái gì đó lớn hơn can dự vào, - một thực nghiệm gia hoặc một thiết bị đo lường - thì nó bị ép theo chỉ một con đường. Adrian Kent, nhà vật lý học lượng tử của University of Cambridge, nói: "Nếu bạn nghĩ có cái gì đó phụ gia (extra), thì bạn có vấn đề mô tả những gì là vật phụ gia đó." "Làm thế nào mô tả nó theo phương thức toán học, làm thế nào có thể trải nghiệm nó theo phương pháp thực nghiệm? Đó là một chương trình nghiên cứu rộng lớn đang diễn ra."

3.8.1 Hiểu toán học theo nghĩa đen

Một khả thể khác là có lẽ tất cả các kết quả khả hữu của một phép đo lường đều thực tồn như nhau (equally real): khi chúng ta thực hiện phép đo lường, chẳng hạn để xem một hạt ở đâu, thế giới chia thành các nhánh khác nhau. Trong mỗi chi nhánh một bản sao của bạn sẽ thấy hạt ở tại một trong số những vị trí khả hữu.

Ý niệm *hiệu-thế giới* (many-worlds) này được đề xuất đầu tiên bởi nhà vật lý học Hugh Everett trong luận án tiến sĩ của ông xuất bản năm 1957. Nó có vẻ điên rồ, nhưng nó bắt nguồn từ các phép toán căn nguyên của cơ học lượng tử. Các phương trình của cơ học lượng tử không chỉ ra rằng cái gì đó đặc biệt phải xảy ra tại điểm đo lường, vậy tại sao không để chúng thao tác suôn sẻ theo cách của chúng và xem những gì xảy ra? David Wallace, một triết gia vật lý học tại University of Oxford, giải thích: "Toán học sau đó nói với chúng ta rằng nếu một hạt là [trong sự chồng chập của hai trạng thái A và B], người thực hiện phép đo sẽ đi vào một sự chồng chập của sự thấy hạt trong [trạng thái A] và sự thấy hạt trong [trạng thái B]" Vì vậy, sự chồng chập vĩ mô biến thành sự chồng chập vĩ mô.

Nhưng trong khi không quyết định giữa A và B, toán học cũng không pha trộn chúng vượt quá sự nhận thức. Biểu thức toán học mô tả tình huống có thể chia thành hai phần, mỗi phần mô tả một thế giới trong đó người thí nghiệm nhìn thấy chính xác một trong hai khả năng. Nếu hiểu biết theo nghĩa đen, thời phải thừa nhận rằng thực tế đã chia rẽ.

3.8.2 Vũ trụ phân nhánh

Nhưng liệu một nhà vật lý học thực hiện một phép đo lường là sự vật duy nhất khả dĩ làm cho thực tế phân chia? Câu trả lời là không. Đo lường một hệ thống chồng chập là một tương tác với hệ thống đó và có những quá trình vật lý học khác khả dĩ tương tác với nó nữa. Chẳng hạn, các tia vũ trụ có thể dòn vào trong một sự chồng chập đi theo nhiều hướng khác nhau cùng một lúc. Nếu một trong những hướng này xuyên qua một thủy tinh trên trái đất, thì tác động của tia sẽ để lại một vết quỹ đạo trên thủy tinh. Như vậy, thủy tinh đo lường có hiệu quả vị trí của tia vũ trụ. Và bởi vì tia ở trong sự chồng chập của sự xuyên qua và sự không xuyên qua thủy tinh, cho nên thủy tinh ở trong sự chồng chập của sự có một vết quỹ đạo và sự không có một vết quỹ đạo. Và do đó, theo cách giải thích của Everett, thực tế phân chia.

Nhà vật lý học Erwin Schrödinger đã nghĩ ra một thực nghiệm tư tưởng (thought experiment) nổi tiếng trong đó một con mèo trong một hộp nằm trong sự chồng chập của hai trạng thái: chết và còn sống. Theo cách giải thích của Everett, khi bạn mở hộp và quan sát con mèo thế giới chia thành hai nhánh: trong một nhánh, con mèo chết và trong nhánh kia, còn sống.

Với sự cần thiết để một quan sát viên bị loại, chúng ta có thể tưởng tượng trò chơi phân nhánh như đã tiếp tục từ đầu của thời gian. "[Theo quan điểm của hiệu-thế giới] sự thật này đã xảy ra ngay từ Big Bang", nhà vật lý học Adrian Kent nói. "Vũ trụ khởi đầu có lẽ trong một trạng thái lượng tử đơn giản, nhưng nó nhanh chóng trở thành sự chồng chập của rất nhiều mô tả khác nhau của Vũ trụ, của rất nhiều cấu hình của các thiên hà. Trong một số những nhánh này trái Đất có khả năng hình thành và trong một số nhánh khác, không có khả năng hình thành. Và trong một số nơi trái Đất được hình thành, chúng ta có khả năng tiến hóa và trong một số nơi trái Đất được hình thành, chúng ta không có khả năng tiến hóa.

3.8.3 Rất vui được gặp tôi?

Nhưng tại sao chúng ta chẳng bao giờ nhận thức được những bản sao khác của chính chúng ta? Tại sao chúng ta không bao giờ thấy các vật lớn như tủ lạnh hoặc dân chúng ở nhiều nơi cùng một lúc? Có thể nói, đề thuyết nguyên thủy của Everett không thể gạt bỏ những thắc mắc như vậy. Về nguyên tắc, thực tế có thể phân chia một cách sai lầm để người thử nghiệm có thể nhìn thấy một electron ở vào một vị trí kỳ quái không xác định. Nhưng Everett đã không tính đến thế giới bên ngoài. Ngay khi electron tương tác với thế giới bên ngoài, với các photon hoặc tia vũ trụ đang vụt qua, bất kỳ sự giao thoa nào nhận thấy được giữa các trạng thái "điện tử ở vị trí A" và "điện tử ở vị trí B" sẽ dần dần tràn vào thế giới rộng hơn và tan rã. Giống như những gợn sóng gây ra bởi một hòn đá ném xuống hồ biến mất dần khi chúng lan ra, do đó sự giao thoa trở nên quá nhỏ và không thể nhận thấy được - và người quan sát chỉ thấy một kết quả xác định khi nhìn vào electron. Quá trình này, được gọi là sự *tiêu tương giao* (decoherence), xảy ra cực kỳ nhanh, trong vòng một phần của giây, vì vậy chúng ta chẳng bao giờ biết đến nó.

Vì mọi người và tủ lạnh tương tác với vô số các hạt mỗi thời mỗi khắc, sự tiêu tương giao đặt cơ sở vững chắc cho chúng trong một thế giới chỉ có đơn nhất một vết quỹ đạo: chúng ở đây hoặc ở đó. Nếu chúng ta đang đối phó với cái gì đó cực nhỏ, như một điện tử, thời chúng ta có thể cô lập nó từ thế giới bên ngoài đủ để quan sát sự chồng chập. Chẳng phải nhìn nó một cách trực tiếp, nhưng để nó một mình và sau đó tìm kiếm những dấu hiệu báo cho biết sự chồng chập đã phải xảy ra - đó chính là phương thức các nhà khoa học làm thế nào để có khả

năng xác nhận rằng nó tồn tại. Triết gia vật lý học David Wallace giải thích: “Nhưng hệ thống càng lớn thời càng khó cô lập nó với môi trường bên ngoài. Vì vậy, càng lúc càng khó phát hiện ra rằng những gì chúng ta có là hai sự tình tương tác thay vì chỉ có một sự tình.”

3.8.4 Cái tôi nào thực tồn?

Tất cả các điều trình bày trên có ý nghĩa gì đối với chúng ta? Kent nói, “Theo quan điểm của Everett [tất cả các chi nhánh khác nhau] đều đang ở đó trên thực tế. Có rất nhiều bản sao của chúng ta và chẳng có nghĩa gì để hỏi những bản sao nào thực tồn. Có một bản sắc dân chủ trong số những bản sao đó, tất cả chúng đều có giá trị như nhau. Chúng ta có cùng những ký ức [như tất cả các bản sao khác của chúng ta] cho đến điểm mà chúng ta phân chia. Sau đó có thể có những khác biệt rất nhỏ giữa các bản sao của chúng ta, hoặc [sau một thời gian] có thể có những khác biệt rất lớn.”

Kent, chẳng phải là người đề xướng quan điểm nhiều-thế giới, cũng chỉ ra rằng quan điểm đó phải có những hệ quả sâu sắc đối với thái độ sinh hoạt của chúng ta. Quan điểm nhiều-thế giới có thể không hấp dẫn với lẽ thông thường nhưng những người đề xướng nó ca ngợi tính ưu nhĩ khoa học của nó: nó y cứ vào các toán học hiện hữu của cơ học lượng tử. Chúng ta không cần phát động “cái gì đó phụ gia” bí ẩn hình thành thực tế từ một trạng thái chồng chập sụp đổ biến thành một trạng thái xác định đơn nhất. Wallace nói, “Chẳng có một định đề mới hay một nguyên tắc vật lý học mới. Đó là những gì xuất hiện từ việc áp dụng học thuyết chúng ta có và xét xem nó một cách nghiêm túc.”

3.9 Jeremy Butterfield bình luận “Our Mathematical Universe”

Thông điệp của cuốn sách này là vũ trụ lớn hơn và xa lạ hơn chúng ta có thể tưởng tượng. Thật vậy, nó lớn hơn và xa lạ hơn theo những phương thức chúng ta có thể chẳng hề nghĩ đến. Tegmark lập luận rằng nó lớn hơn và xa lạ hơn trong bốn phương thức chính, mỗi phương thức được xây dựng trên phương thức ngay trước đó. Mỗi phương thức biểu tượng cho một mở rộng rộng lớn của cái mà chúng ta thường gọi là vũ trụ, nhưng ông đề nghị nên sử dụng từ *vũ trụ đa trọng* (multiverse) để gọi các mở rộng này. Do đó, ông gọi phương thức chính đầu tiên là vũ trụ đa trọng tầng I, phương thức chính thứ hai là vũ trụ đa trọng tầng II; và cứ như thế cho đến khi chúng ta tới tầng IV.

3.9.1 Vũ trụ đa trọng tầng I

Tầng I khá giống với ý niệm rằng có thể, khi bạn sinh ra, bạn là một trong cặp song sinh - nhưng người anh em sinh đôi kia đã tách ra khỏi bạn khi sinh ra, được đưa đi rất xa, để bạn chẳng bao giờ có cơ hội anh em gặp nhau. Ngoại trừ với trường hợp Tầng I của Tegmark, việc sinh ra nói ở đây không phải của bạn, mà là của vũ trụ!

Nói như trên tức là đưa ra ý kiến: ngay lúc Big Bang, có thể có những mảnh vật chất đi theo hướng khác đối với tất cả vật chất kế tục hình thành thiên hà của chúng ta - và hơn thế nữa, theo một hướng khác đối với tất cả vật chất tạo ra vũ trụ hiện giờ chúng ta có thể quan sát - hoặc thậm chí, sẽ quan sát mãi mãi. *Có thể thế được không?*

Vâng, Big Bang là một chủ đề khó để tìm hiểu chi tiết! Những cái khung để hiểu biết nó, được gọi là vũ trụ học thông trưởng, trả lời: “Vâng, nó là như vậy - và không chỉ có một vài ‘cặp sinh đôi bị mất’ của những bit vật chất ban sơ, mà thực ra có nhiều vô số: mỗi cặp phóng to chẳng bao giờ được nhìn thấy bởi chúng ta, và cũng chẳng bao giờ được nhìn thấy bởi hầu như tất cả các bit khác như vậy của vật chất - hay đúng hơn, bởi bất kỳ quan sát viên nào những bit của vật chất cuối cùng có thể tụ hợp thành.” Vậy vũ trụ học thông trưởng đề nghị ‘phân tán các bé sơ sinh ra khỏi nhau’ trên một quy mô vũ trụ thực sự!

Nhưng chúng ta nên tin tưởng vào vũ trụ học thông trưởng đến mức nào? Có tin tốt và tin xấu. Tin tốt là trong ba mươi năm kể từ khi ý niệm thông trưởng lần đầu tiên được phát minh (khoảng năm 1980), nó đã có nhiều thành công lý thuyết và thậm chí nhiều thành công quan sát. Rất nhiều thành công, bây giờ nó là quan điểm chính thống của các nhà vật lý học về vũ trụ sơ khai. Tin xấu là, cũng như mọi khi, chúng ta cũng nên lắng nghe những lời khuyên thận trọng, tiếng nói của chủ nghĩa hoài nghi. Nó nói: chúng ta phải phân biệt giữa các sự thật đã được thiết lập và các tư biện.

Butterfield xem đây là lời cảnh báo đầu tiên của một số lời khuyên thận trọng khi ông tiến hành thông qua các tầng của Max. Tất nhiên Tegmark viết với một phong phương thức biện hộ nhiệt tình. Nhưng với vốn liếng là người được tín nhiệm, Tegmark nhiều lúc cũng ngừng nghỉ để nhấn mạnh rằng các lập trường của ông đang gây

tranh biện nghị luận và cũng để giải đáp chi tiết những phản bác khả hữu, hoặc những bình luận thực tế. Ví dụ, ông trả lời George Ellis trong các trang 360-336.

Cũng nên lưu ý rằng các tranh biện nghị luận phổ biến rộng rãi trong số các nhà vũ trụ học nổi tiếng. Ví dụ, một bình luận mới đây về thông trưởng (và cụ thể của thí nghiệm BICEP2 gần đây) của Paul Steinhardt kết luận rằng “mô hình thông trưởng về cơ bản là không thể kiểm chứng được, và do đó không có ý nghĩa khoa học” (Nature, vol 510, 5 June 2014, trang 9).

Đồng ý: vũ trụ học hiện đại đã xác lập rằng tất cả vật chất trong vũ trụ mà hiện giờ chúng ta có thể quan sát đã một lần ở trong một quả cầu lửa nóng, dày đặc, có kích cỡ của hệ mặt trời. Sự xác lập này là kết quả của sự kết hợp các quan sát vũ trụ chính xác, với các lý thuyết vật lý học được thiết lập, đặc biệt là thuyết tương đối rộng, và mô hình chuẩn vật lý học các hạt từ 40 năm nay đứng vững qua vô số trắc thí, chẳng hạn, tại LHC tại CER.N, Geneva. Vì vậy, ‘mô hình chuẩn’ có nghĩa là trường lượng tử của chúng ta thuyết minh về mặt lý thuyết các hạt như electron và quark vận hành như thế nào ở các năng lượng chúng ta có thể tiếp cận. Những năng lượng này đã đạt được trong vũ trụ sơ khai có kích cỡ của hệ mặt trời, khoảng 10^9 giây sau Big Bang. Vì vậy, sự khế hợp giữa vũ trụ học và thuyết trường lượng tử ở năng lượng cao chắc chắn là một thành tựu khoa học kỳ diệu.

Bên cạnh đó, các thuyết của chúng ta mô tả quả cầu lửa nóng, dày đặc có thể được ngoại suy lùi xa hơn nữa. Nhưng khi bán kính trở nên nhỏ hơn, nhiệt độ, mật độ và năng lượng trở nên cao hơn, chúng ta rời bỏ những sự thật đã được thiết lập và bước vào các lĩnh vực tư biện. Và trong thời kỳ mà thông trưởng được cho là đã xảy ra, chúng ta chắc chắn đã vượt xa lãnh vực của vật lý học đã được thiết lập. Nghĩa là, nói cho đúng, chúng ta đã vượt xa những năng lượng ở đó chúng ta biết cả thuyết tương đối tổng quát, và mô hình chuẩn vật lý học các hạt. Thật vậy, vào cuối thời kỳ thông trưởng (nếu có một!), bán kính của toàn thể vũ trụ hiện hữu có thể quan sát chỉ vào khoảng 1 mét - wow!

Nhưng Max có một đề nghị khác khá dĩ chuyển hóa tâm trí con người. Một số mô hình thông trưởng đề nghị có vô số các vũ trụ như vậy, nhưng bây giờ chúng bắt khả tương hỗ phát hiện (mutually undetectable). Nếu quả thật như thế, thời tuồng như không có gì để ngăn chặn bất kỳ tình huống cụ thể nào mà chúng ta tin rằng đã xảy ra, đang diễn tiến dưới hình thức một bản sao trong một thể giới khác của vũ trụ đa trọng. Quả vậy, dường như không có gì để ngăn chặn tình huống đang diễn tiến dưới hình thức một bản sao, xuyên qua bất kỳ bao nhiêu lần toàn bộ các vũ trụ. Quả vậy: thậm chí vô hạn nhiều lần.

Hãy lấy cuộc chiến Waterloo (15 tháng Sáu - 8 tháng Bảy 1815) làm ví dụ. Ban đầu, Napoleon Bonaparte chỉ huy quân đội Pháp, nhưng ông rời Paris sau khi ông thua trận tại Waterloo. Theo trên, không có gì để ngăn chặn bất kỳ tình huống cụ thể nào, như Napoleon chiến thắng tại Waterloo, xuất hiện vô số lần trên vũ trụ đa trọng. Và những gì sinh khởi trong một tình huống mà ta cho rằng đã xảy ra, cũng sinh khởi trong các tình huống mà ta cho rằng không xảy ra. Có nhiều phương thức khả hữu theo đó Napoleon có thể giành được chiến thắng tại Waterloo cũng sẽ xuất hiện ở một nơi nào đó trong vũ trụ đa trọng rộng lớn này.

3.9.2 Vũ trụ đa trọng tầng II

Nhiều mô hình thông trưởng của vũ trụ học đề nghị không chỉ có những vũ trụ tách biệt mà còn có các định luật vật lý học có thể khác nhau trong những vũ trụ khác nhau. Trong toàn bộ các vũ trụ đó, các vũ trụ khác nhau có những định luật cũng như những vấn đề sự thật (matters of fact) đặc thù của chúng khác nhau. Tegmark gọi đó là vũ trụ đa trọng tầng II.

Các nhà vật lý học biết một cơ chế có khả năng dẫn đến các định luật vật lý học khác nhau trong các bộ phận khác nhau của vũ trụ đa trọng, gọi là “*sự phá vỡ đối xứng*” (symmetry breaking). Ý niệm là một luật, hoặc tập hợp các luật, vật lý học có thể có một đối xứng, trong khi một giải pháp cho những luật đó thiếu nó. Chỉ cần nói đến một hậu quả của sự phá vỡ đối xứng là các hằng số của tự nhiên, tốc độ ánh sáng, hằng số hấp dẫn, hoặc tỷ lệ cường độ lực hấp dẫn/lực điện từ, có thể có các giá trị khác nhau trong các vũ trụ khác nhau.

3.9.3 Vũ trụ đa trọng tầng III

Tầng III liên quan đến lối thông diễn nhiều-thế giới (many-world interpretation) của cơ học lượng tử. Cơ học lượng tử đề xướng một hạt nhỏ, như một electron chẳng hạn, có thể ở nhiều trạng thái cùng một lúc. Ví dụ, nó có thể có vị trí tại nhiều nơi khác nhau cùng một lúc, hoặc động lượng của nó có thể có nhiều trị khác nhau. Tuy

nhiên, khi chúng ta nhìn vào thế giới ở quy mô rộng lớn, chúng ta không thấy sự chồng chập này. Trong chín mươi năm kể từ khi cơ học lượng tử được thiết lập, sự không phù hợp giữa vật lý học lượng tử và kinh nghiệm của chúng ta không được giải thích.

Vì vậy, chúng ta cần một cảnh báo ở đây: chúng ta lại đang bước vào lãnh thổ của tư biện. Nhưng một trong những giải pháp được đề xuất sẽ sản sinh vũ trụ đa trọng tầng III. Đó là đề xuất của Everett (năm 1957, tức hơn 60 năm về trước), nói ngắn gọn, một chồng chập lượng tử biểu tượng chẳng phải là một tập hợp các khả năng sẵn có, mà là một đa cá thực tế. Do đó, vũ trụ chứa đựng rất nhiều "thế giới" (còn gọi là "chi nhánh") dạng Everett, trong đó mỗi "thế giới" là cái gì đó giống cảnh giới vĩ mô quen thuộc, với tất cả các bàn, ghế, V.V... Ở các vị trí xác định, với các động lượng xác định. Nhưng các thế giới dị biệt giữa chúng với nhau trên phương diện vị trí và động lượng của chúng. Lẽ dĩ nhiên, chúng ta chỉ trải nghiệm một cảnh giới vĩ mô xác định đơn nhất. Nghĩa là, chúng ta vừa tốt trong một thế giới thay vì một thế giới khác.

3.9.4 Vũ trụ đa trọng tầng IV

Không giống như ba tầng đầu, đề xuất lần này độc lập với các chi tiết của vật lý học. Nó mang tính triết học riêng biệt: nó là một tuyên bố về phương thức toán học mô tả thực tế vật lý. Nó cũng là một tuyên bố cấp tiến: thực tế vật lý không chỉ được mô tả bởi toán học mà đúng ra là toán học.

Không có nghi ngờ gì về lịch sử khoa học, và đặc biệt là vật lý học, cung cấp vô số lệ chứng về quyền năng của ngôn ngữ toán học trong việc mô tả các hiện tượng tự nhiên. Nổi tiếng, chính Galileo - cha đẻ của mô tả toán học của chuyển động - đã viết trong *The Assayer* (1623) rằng Vũ trụ được viết bằng ngôn ngữ toán học.

Lẽ tất nhiên, kể từ thời Galileo, ngôn ngữ toán học đã phát triển một cách phi thường. Nếu toán học cho chúng ta một ngôn ngữ đầy quyền năng để mô tả tự nhiên, tại sao không kết luận rằng tự nhiên là toán học? Tegmark tán đồng tuyên bố này. Nhưng ông cũng kết nối nó với chủ đề tổng hợp của ông về một vũ trụ đa trọng. Nghĩa là, chúng ta nên tin vào thực tế bình đẳng của tất cả các cấu trúc toán học khả hữu.

Tuyên bố của Tegmark sẽ cảm dỗ bất cứ ai yêu thích toán học, nhưng than ôi, Butterfield không chấp nhận nó đúng nếu xét xem nó kỳ hơn: giống như có một sự phân biệt giữa khái niệm về một phương trình bậc hai và một ví dụ cụ thể của một phương trình bậc hai, chúng ta cần phải phân biệt giữa một cấu trúc toán học và một đối tượng thể hiện cấu trúc này. Nhưng chúng ta có hay không đồng ý với vũ trụ đa trọng nhiều tầng của Tegmark, một điều chắc chắn là cuốn sách của ông là một cuốn sách rất hấp dẫn.

3.10 Giải đáp một số thắc mắc

Mặc dầu tôi cảm thấy rất biết ơn những phản hồi tích cực mà tôi nhận được từ các đồng nghiệp, các nhà phê bình và những người khác trên web, cuốn sách của tôi cũng đã nhận được một số phê phán kịch liệt, tập trung vào các câu hỏi sau:

Hỏi: Liệu các vũ trụ song song là khoa học hay chỉ là tư biện?

Đáp: Trước hết, xin lưu ý cuốn sách của tôi *không* tuyên bố rằng các vũ trụ song song tồn tại. Thay vào đó, tất cả các lập luận của tôi liên quan đến những gì gọi là "modus ponens": rằng nếu X hàm ý Y và X là đúng, thì Y cũng phải đúng. Đặc biệt, tôi cho rằng nếu một lý thuyết khoa học X có đủ hỗ trợ thực nghiệm để chúng ta thực hiện nó một cách nghiêm túc, thì chúng ta cũng phải nghiêm túc xem xét tất cả các dự đoán của nó Y, ngay cả khi những dự đoán này là không thể kiểm tra được (ví dụ như các vũ trụ song song). Nói cách khác, tôi cho rằng vũ trụ song song không phải là một lý thuyết khoa học, mà là tiên đoán của một số lý thuyết khoa học. Cụ thể, tôi cho rằng có bốn hàm nghĩa:

1. Thông trưởng vũ trụ nói chung hàm ý vũ trụ đa trọng tầng I
2. Thông trưởng + huyền cảnh quan (string landscape), nói chung, hàm ý vũ trụ đa trọng tầng II
3. Cơ học lượng tử thống nhất hàm ý vũ trụ đa trọng tầng III
4. Giả thuyết Vũ trụ Toán học hàm ý vũ trụ đa trọng tầng IV

Nói cách khác, điểm chính mà nhiều nhà bình luận bỏ lỡ là các vũ trụ song song không phải là những lý thuyết khoa học, mà là những dự đoán về một số lý thuyết, như thông trưởng vũ trụ học, có tính khoa học bởi vì chúng đề ra những dự đoán khả dĩ trải nghiệm về những sự vật chúng ta quan sát được, như các đo lường nền vi sóng

vũ trụ bằng cách sử dụng vệ tinh Planck. Con người chúng ta không ngừng đánh giá thấp kích thước vũ trụ của chúng ta bằng cách giả định rằng mọi thứ đương thời khả dĩ quan sát là tất cả những tồn tại sở hữu. Dầu chúng ta có cảm giác thoải mái trong một thực tế nhỏ bé như thế nào, chúng ta không thể tự chọn không tham gia dự đoán khoa học chỉ vì chúng ta không thích chúng: công việc của chúng ta là các nhà khoa học không phải là để nói với vũ trụ của chúng ta phải tồn tại như thế nào, mà là theo lối đi của chúng cứ thực nghiệm bất cứ nơi nào nó dẫn chúng ta.

Hỏi: Có phải toán học chỉ là một ngôn ngữ chúng ta phát minh chứ không phát hiện?

Đáp: Đây là một cuộc tranh cãi nổi tiếng giữa các nhà toán học và triết học. Theo cách tôi nhìn, con người chúng ta sáng tạo ngôn ngữ toán học (các ký hiệu, tên con người của chúng ta để biểu tượng, vân vân), nhưng điều quan trọng là không nhầm lẫn ngôn ngữ này với cấu trúc toán học mà tôi tập trung vào trong cuốn sách của tôi. Ví dụ, bất kỳ nền văn minh nào quan tâm đến các cổ thể tính Plato sẽ khám phá ra rằng chính xác chúng có tất cả 5 (thể bốn mặt, khối lập phương, thể tám mặt, thể mười hai mặt và thể hai mươi mặt). Trong khi được tự do sáng tạo bất cứ tên nào họ muốn cho chúng, họ không thể tạo ra một tên thứ 6 - đơn giản là vì cổ thể thứ 6 không tồn tại. Theo cùng một ý nghĩa, các cấu trúc toán học phổ biến trong vật lý học hiện đại được phát hiện chứ không phát minh, từ các đa tạp giả - Riemann $3+1$ - thứ nguyên cho đến các không gian Hilbert.

Hỏi: Phải chăng ông đã học làm một sự mô tả và cái được mô tả khi bảo rằng thực tế vật lý “là” toán học thay vì chỉ “được mô tả” bằng toán học?

Đáp: Sự phân biệt này (tôi tìm xét chi tiết trong các chương 11 và 12) rất quan trọng trong cả vật lý học lẫn toán học. Ngôn ngữ của chúng tôi để mô tả hành tinh Neptune (rõ ràng là do chúng tôi phát minh - chúng tôi phát minh một từ khác cho nó ở Thụy Điển) tất nhiên khác biệt với chính bản thân hành tinh. Tương tự như vậy, con người chúng ta đã phát minh ra ngôn ngữ toán học (các ký hiệu, tên con người của chúng ta cho các ký hiệu, vân vân), nhưng điều quan trọng là không nhầm lẫn giữa ngôn ngữ này với cấu trúc toán học. Ví dụ, như đã đề cập ở trên, bất kỳ nền văn minh nào quan tâm đến những cổ thể tính Plato đều có thể phát hiện ra chỉ có 5 cổ thể như vậy (thể bốn mặt, khối lập phương, thể tám mặt, thể mười hai mặt và thể hai mươi mặt). Trong khi được tự do sáng tạo bất cứ tên nào họ muốn cho chúng, họ không thể tạo ra một tên thứ 6 - đơn giản là vì cổ thể thứ 6 không tồn tại. Theo cùng một ý nghĩa, các cấu trúc toán học phổ biến trong vật lý học hiện đại được phát hiện chứ không phát minh, từ các đa tạp giả- Riemann $3+1$ - thứ nguyên cho đến các không gian Hilbert. Khả năng mà tôi tìm xét trong cuốn sách là một trong những *cấu trúc* của toán học (mà chúng ta có thể phát hiện chứ không phát minh) tương ứng với thế giới vật lý (mà chúng ta cũng phát hiện chứ không phát minh).

Hỏi: Phải chăng ý niệm về vũ trụ toán học là chiếc mũ cũ từ thời Pythagoras?

Đáp: Nguồn gốc của ý niệm này thực sự là rất cũ, và cuốn sách của tôi đã lớn tiếng ca tụng Pythagoras và Galileo đã có ý niệm này! Nhưng họ không có phúc lợi hiểu biết tất cả những manh mối toán học kỳ diệu mà tự nhiên sau này đã tỏ lộ, từ thuyết tương đối rộng đến cơ học lượng tử và toán học đằng sau Higgs boson, đó là lý do tại sao bây giờ chúng ta có thể tìm xét ý niệm và những hàm ý của nó một cách chi tiết hơn.

Hỏi: Chắc chắn "các thứ" ("stuff") không thể là toán học?

Đáp: Là một thực nghiệm tư tưởng, hãy tưởng tượng một ngày nào đó chúng ta phát triển các máy tính siêu tiên tiến và bạn là một nhân vật trong một trò chơi máy tính tương lai phức tạp và thực tế đến độ bạn có ý thức và nghĩ lầm rằng bạn tồn tại trong một thế giới vật lý thực làm bằng "các thứ". Bây giờ bạn bắt đầu nghiên cứu thế giới ảo của mình giống như một nhà vật lý học và dần dần khám phá ra rằng các thực thể trong thế giới của bạn dường như trong cơ bản không có các thuộc tính ngoại trừ các thuộc tính toán học (bởi vì đó là phương thức theo đó thế giới của bạn được lập trình) giống như chúng ta đã khám phá ở đây trong thế giới của chúng ta. Nếu bạn có thể cảm nhận được thế giới ảo của mình làm bằng các thứ thậm chí còn nghĩ rằng đó là toán học thuần túy, thời chúng ta cần phải chấp nhận khả năng cùng một thứ có thể xảy ra ở đây trong vũ trụ của chúng ta. Chắc chắn, bản thân của máy tính trong ví dụ này làm bằng các thứ, nhưng cảm giác các đối tượng trong trò chơi đều làm bằng các thứ là hoàn toàn huyền ảo và độc lập với nền tảng trên đó máy tính được xây dựng.

Hỏi: Liệu giả thuyết vũ trụ toán học bất khả hoán cải và do đó bất khoa học?

Đáp: Không, nó làm dự đoán có thể kiểm chứng rằng vũ trụ của chúng ta không có các thuộc tính phi toán học, vì vậy nếu bạn có thể chứng minh một khía cạnh nào đó của vũ trụ của chúng ta không thể mô tả bằng toán học, thì bạn đã soán cải giả thuyết (falsify the hypothesis).

Hỏi: Chắc chắn, không thể mô tả ý thức bằng toán học?

Đáp: Hiện nay ý thức không được hiểu qua toán học - cũng như bất kỳ cách tiếp cận khoa học nào khác, cho vấn đề đó. Liệu mãi mãi sẽ như vậy là một câu hỏi rất đáng quan tâm. Tôi đã tổ chức một cuộc hội thảo về Vật lý học Thông tin gần đây, trong đó khi chúng tôi mời các nhà thần kinh học ⁿ Giulio Tononi, Christoph Koch và Larissa Albantakis thuyết trình, điều hấp dẫn là nghe họ bảo họ thực sự nghĩ rằng cảm giác chủ quan về màu đỏ, cảm giác về yêu thương, V.V... có thể được hiểu như là những hình dạng toán học phức tạp liên quan đến xử lý thông tin trong não. Tôi khám phá điều này trong chương 11 của cuốn sách của tôi. Rõ ràng là chúng ta chưa biết liệu những ý niệm của họ cuối cùng có thể chứng minh là đúng hay không nhưng sự thật nghiêm cứu của họ được cộng đồng khoa học thần kinh công nhận là thực hiện nghiêm túc có nghĩa là chúng ta không thể chắc chắn 100% rằng ý thức chung cục không thể hiểu được theo toán học.

Hỏi: Có phải giả thuyết vũ trụ toán học bị loại trừ bởi định lý bất hoàn bị của Gödel?

Đáp: Không, không xa như chúng ta biết. Với bất kỳ hệ thống hình thức đủ quyền năng nào, Gödel cho biết chúng ta không thể sử dụng nó để chứng minh tính nhất trí của chính nó, nhưng không có nghĩa là nó không nhất trí hoặc chúng ta có một vấn đề. Thật vậy, vũ trụ của chúng ta không cho thấy bất kỳ dấu hiệu nào là không nhất trí hoặc không minh xác, mặc dầu có dấu hiệu ám chỉ nó có thể là một cấu trúc toán học. Hơn nữa, chúng ta hy vọng điều gì? Nếu một hệ thống toán học có thể được sử dụng để chứng minh tính nhất trí của chính nó, chúng ta vẫn không tin nó thực sự là nhất trí, vì một hệ thống không nhất trí có thể chứng minh bất cứ điều gì. Chúng ta chỉ bị thuyết phục nếu một hệ thống đơn giản hơn mà chúng ta có lý do để tin tưởng vào tính nhất trí của nó có thể chứng minh tính nhất trí của một hệ thống mạnh mẽ hơn - nhưng đó là điều không thể được, như Gödel cũng đã chứng minh. Trong số nhiều nhà toán học mà tôi là bạn, tôi chưa bao giờ nghe thấy ai đề nghị rằng các cấu trúc toán học chi phối vật lý học hiện đại (các đa tạp giả-Riemann, các đa tạp Calabi-Yau, các không gian Hilbert, V.V...) thực sự không nhất trí hoặc không minh xác.

Hỏi: Max Tegmark có phải là một crackpot (một tên điên khùng) không?

Đáp: Rõ ràng là không phải cho tôi để trả lời -

Chú thích

*. *"If consciousness is indeed an emergent feature of a highly integrated network, as IIT suggests, then probably all complex Systems - certainly all creatures with brains - have some minimal form of consciousness."*

"By extension, if consciousness is defined by the amount of integrated information in a System, then we may also need to move away from any form of human exceptionalism that says consciousness is exclusive to us."

Tiếng Đức *doppelgänger* có nghĩa là phân thân, gặp đôi, hai lần, hay trông giống nhau.

Thuật ngữ triết học "thật" có nghĩa là "nội dung", đối lại với "danh". Ví dụ: hữu danh vô thật = chỉ có hình thức bề ngoài nhưng nội dung trống rỗng. Vậy có thể hiểu những cụm từ "có nội dung", "không có nội dung" như là "có thật", "không có thật".

Chương IV: Tính tương đối của Tồn tại

- 4.1 Thông diễn sự tồn tại
 - 4.2 Luận cứ Logic
 - 4.2.1 Luận cứ Vị nhân Cuối cùng (The Final Anthropic Argument)
 - 4.2.3 Luận cứ Tiên đề hóa
 - 4.2.3a Thông diễn
 - 4.3 Bác bỏ các phản bác thông thường
 - 4.3.1 Không tương thích với các định lý của Gödel?
 - 4.3.2 Không tương thích với tính Ngẫu nhiên Lượng tử?
 - 4.3.2 Lập luận đáp ứng Hữu thần luận
 - 4.4 Kết luận
- Chú thích

Tính Tương đối của Tồn tại

4.1 Thông diễn sự tồn tại

Dầu vật lý học hiện đại thành công trong việc xây dựng các lý thuyết toán học có thể dự đoán kết quả các thí nghiệm quy mô lượng tử, sự thông diễn vật lý các lý thuyết này vẫn còn gây nhiều tranh biện nghị luận. Mặc dầu toán học vật lý lượng tử được hiểu biết rõ ràng, nhiều cách thông diễn vật lý liên hệ trực tiếp tới các câu hỏi cơ bản tại sao chúng ta tồn tại và tồn tại có nghĩa là gì, và đã chia rẽ cộng đồng khoa học thành nhiều phái triết học khác nhau: nào là thông diễn cổ điển Copenhagen chọn ngẫu nhiên và quan sát viên làm trọng điểm, - nào là cơ học tính Bohm, tức quan điểm xác định và vô quan sát viên của Broglie và Bohm, - nào là lý thuyết ngẫu nhiên và vô quan sát viên của Ghirardi-Rimini-Weber, - nào là quan điểm 'it from bit' của Wheeler, - nào là các thông diễn khác nhau về Nhiều Thế giới như thuyết Ultimate Ensemble.

4.2 Luận cứ Logic

4.2.1 Luận cứ Vị nhân Cuối cùng (The Final Anthropic Argument)

Tính khả cư trụ (habitability) của một hành tinh tùy thuộc một sự tụ tập các nhân tố từ lớp phụ tinh (parent star class) và biến hóa hăng tinh (stellar variation) đến khối lượng hành tinh (planet mass), cách tổ thành (composition), khoảng cách quỹ đạo (orbit distance), tính ổn định (stability), điều kiện địa hóa (geochemistry conditions) ban đầu, và nhiều nhân tố khác.

Nếu tất cả những thuộc tính (properties) ấy được tùy cơ lựa chọn chẳng có bất kỳ ảnh hưởng hay mục đích nào hướng dẫn toàn thể, thời khả năng tính thống kê học (statistical likelihood) của điều kiện (achieving conditions) dẫn đến cuộc sống tất phải cực kỳ nhỏ. Hơn nữa, ngay cả trong một thế giới khả cư trụ trên lý thuyết, khi chúng ta xét xem khả năng tính của các tương tác hóa học ngẫu nhiên phát sinh sự tự tái bản (self-replication) và sự tiến hóa thực tế của cuộc sống, sự xét định của chúng ta về khả năng toàn thể của bất kỳ hành tinh ngẫu nhiên nào chứa đựng cuộc sống thậm chí còn nhỏ bé hơn nữa.

Chẳng biết được những chi tiết chính xác của tất cả các tương tác hóa học xuất hiện để phát sinh cuộc sống trên trái Đất, thời khó đưa ra những dự đoán chính xác khả năng tính trong thực tế nhỏ bé đến thế nào. Tuy nhiên, mặc dầu những quan sát mới đây các thái dương hệ ngoại hành tinh (exoplanets) tiềm tại khả cư trụ¹ và những mô hình ban sơ tốt hơn của sinh vật hóa học (biochemistry) cho thấy cuộc sống không thể hiếm như người ta tưởng², chỉ có cách duy nhất là phải tính đến hàng tỷ trên hàng tỷ lần quan sát các hệ thống sao khác, thời mới có thể giải thích sự hiện diện của cuộc sống như cái gì đó thực sự mong đợi.

Bằng cách, lý luận theo nguyên tắc vị nhân (the anthropic principle), “các điều kiện được quan sát thấy trong vũ trụ phải cho phép quan sát viên tồn tại” (conditions that are observed in the universe must allow the observer to exist)³, chỉ cần có ít nhất một trong số vô hạn các hành tinh trong vũ trụ chứa cuộc sống, hầu giải quyết bí ẩn lý do tại sao, khi chúng ta nhìn quanh, chúng ta thấy được một hành tinh với tất cả điều kiện thích hợp cuộc sống.⁴

Tuy nhiên, bí ẩn vẫn chưa được giải quyết hoàn toàn, bởi vì nó chỉ đơn thuần minh họa tính hoàn hảo vượt bậc của các luật cơ bản của vật lý học phát sinh một vũ trụ bao hàm năng lực sinh hoạt (capacity for life). Từ những thuộc tính phân tử của nước⁵ tới sự cân bằng chính xác của các lực như trọng lực (gravity) và điện từ lực (electromagnetic forces)⁶, tới số các thứ nguyên (number of dimensions) và các trị tinh xác của tất cả hằng số cơ bản (fundamental constants), tất cả những cái đó đều tồn tại trong một sự cân bằng hoàn hảo.

Như Paul Davies phát biểu, “Hiện giờ có một sự thỏa thuận rộng rãi giữa các nhà vật lý học và các nhà vũ trụ học, rằng vũ trụ trong một số khía cạnh được tinh chỉnh (tinh tế điều chỉnh; fine-tuned) cho cuộc sống.”⁷ Theo Stephen Hawking, “Các định luật của khoa học, như chúng ta hiểu biết chúng hiện nay, bao hàm nhiều số cơ bản, như độ lớn của điện tích (electric charge) của electron và tỷ lệ các khối lượng của proton và electron ... và sự thật đáng chú ý là trị các số ấy được tinh chỉnh để có thể phát triển cuộc sống.”⁸

Ví dụ: Nếu sức mạnh của lực hạt nhân mạnh (strong nuclear force) biến chuyển chừng 2%, thời vật lý học các sao cải biến mạnh mẽ đến nỗi tất cả hydro của vũ trụ sẽ bị tiêu hao trong vài phút đầu tiên sau Big Bang⁹.

Nếu có một số vô hạn (hay gần như vô hạn) các vũ trụ khác nhau với những trị khác nhau của các hằng số vật lý, lý luận theo nguyên tắc vị nhân cũng có thể được sử dụng để giải thích tại sao chúng ta quan sát thấy các hằng số vật lý thích hợp cuộc sống, ứng dụng thứ hai này được biết như là nguyên tắc vị nhân “mạnh” (the “strong” anthropic principle (SAP))¹⁰. Tuy nhiên, một ứng dụng lần thứ hai đòi hỏi bằng chứng biểu minh một số lượng rất lớn, có lẽ vô hạn, các vũ trụ khác nhau có những định luật vật lý học khác nhau.

Có một số tin rằng sự hiện thân hóa hiện đại (modern incarnation) của thuyết siêu huyền (superstring theory), được biết như M-thuyết (M-theory)¹¹, đáp ứng điều kiện này. Theo M-thuyết, có 11 thứ nguyên không-thời gian, 7 trong số đó uốn xoắn lên tạo thành một đa tạp Calabi-Yau¹² và các hằng số cơ bản có thể được phái sinh từ phương thức theo đó các thứ nguyên uốn xoắn lên¹³.

Bởi vì có ít nhất 10^{500} phương thức thứ nguyên uốn xoắn lên¹⁴ và học thuyết không bảo rõ phương thức nào là chính xác, cho nên tin rằng tất cả phương thức đều hữu hiệu như nhau và năng lực chọn lựa của SAP giải thích tại sao chúng ta tồn tại trong một vũ trụ có những hằng số cơ bản thích nghi với cuộc sống. Các cấu hình (configurations) khác nhau đều được thông diễn hoặc như các vũ trụ song song (parallel universes) trong vũ trụ đa trọng (multiverse)¹⁵, hoặc như các lịch sử song song của cùng một vũ trụ.¹⁶

Vấn đề với những giải thích như trên căn cứ trên M-thuyết là chúng chỉ giải đáp phần nào vấn đề tinh chỉnh. Dầu tất cả cấu hình M-thuyết chấp nhận được biểu hiện, điều đó chẳng giải thích tại sao toán học cơ bản của M-thuyết là đúng. Chúng ta cũng có thể dễ dàng hỏi tại sao các tiên đề của M-thuyết đã được lựa chọn một cách kỳ diệu để phát sinh một vũ trụ đa trọng có khả năng hỗ trợ cuộc sống.

Chỉ một học thuyết thừa nhận tất cả hệ tiên đề khả hữu mới có thể giải quyết một cách toàn vẹn vấn đề tinh chỉnh, bởi vì chỉ khi nào chúng ta ngưng sùng bái các tiên đề của vũ trụ của chúng ta xem như đặc biệt khách quan (objectively special) thời chúng ta mới ngưng hỏi tại sao chúng là đặc biệt. Đó là những gì tính tương đối của tồn tại đề xướng: Nó nói với chúng ta không có gì đặc biệt về vũ trụ của chúng ta, bởi vì bất kỳ hệ tiên đề nào khả dĩ phái sinh tính tự ý thức sẽ thực tồn (real) theo quan điểm của tính tự ý thức đó.

Nếu vũ trụ không tồn tại theo nghĩa khách quan thời loại tính chân duy nhất còn lại với chúng ta là tính chân theo nghĩa kiến lập (dựng lên), và loại tồn tại duy nhất sẽ là tồn tại toán học.¹⁷ Nghĩa là, sự tồn tại của các sự vật trong vũ trụ chỉ là tồn tại toán học tương quan với hệ thống hình thức nào đó định nghĩa thực tế.

Nếu đây là trường hợp, thời sự thật là chúng ta tự ý thức sẽ chứng minh rằng sự tự ý thức có thể không những được phái sinh theo phương thức tiên đề, mà rằng sự tồn tại toán học đơn thuần của một cấu trúc tự ý thức là một

điều kiện đủ cho cấu trúc tự ý thức đó nhận thức hệ thống của nó như là một thực thể chẳng cần phải có sự biểu hiện khách quan của hệ thống đó.

Do đó, sẽ không có sự phân biệt khách quan giữa các hệ tiên đề ‘thực’ với các hệ tiên đề ‘phi thực’ (mặc dầu ở mức độ ngữ nghĩa chúng ta có thể dành thuật ngữ ‘thực’ để quy chiếu hệ tiên đề riêng của một người nào đó, hoặc có lẽ bất kỳ hệ tiên đề nào có chứa một quan sát viên tự ý thức). Tuy nhiên, tất cả các hệ tiên đề sẽ được thiết lập trên cơ sở bình đẳng, và vì thế lý luận vị nhân có thể được trao quyền để giải thích *tất cả* các luật vật lý học bằng cách chọn từ tập hợp tất cả các hệ tiên đề khả hữu. Như thế cuối cùng sẽ giải quyết vấn đề tinh chỉnh tổng quát và trả lời câu hỏi của Leibniz. Bởi vậy, mới gọi đây là “nguyên tắc vị nhân cuối cùng” (FAP).

4.2.2 Nguyên tắc ưa sống tối đa (Maximally Biophilic Principle)

Được biết rằng nguyên tắc vị nhân (The Anthropic Principle) “không phân biệt giữa các vũ trụ ưa sống tối thiểu (minimally biophilic universes), trong đó cuộc sống được cho phép nhưng chỉ có khả năng một cách tối thiểu, và các vũ trụ ưa sống tối giai (optimally biophilic universes), trong đó cuộc sống thịnh vượng bởi vì sự phát sinh sinh vật (biogenesis; sự hình thành các sinh vật sống từ tổ tiên của chúng và các cơ quan từ từ các tiền thể của chúng) xuất hiện thường xuyên”. Mặc dầu nguyên tắc vị nhân tự nó không phân biệt giữa các vũ trụ ưa sống tối thiểu và tối giai, logic đằng sau nguyên tắc vị nhân có thể được tổng quát hóa thành một nguyên tắc nhiều năng lực hơn khả dĩ phân biệt giữa hai vũ trụ ưa sống tối thiểu và tối giai. s. B. Heinrich đã chứng minh sự thật ấy trong bài ‘Physical Relativism as an Interpretation of Existence’ ông viết và trình bày ngày 26 tháng Sáu, 2013, có thể hạ tải từ Internet.

Nói cách khác, ý tưởng tương đối vật lý (Physical Relativism) của Heinrich cho chúng ta biết rằng bất kỳ quan sát viên nào cũng nên kỳ vọng, chỉ căn cứ trên logic thôi, rằng vũ trụ của mình là một vũ trụ ưa sống đa giai. Và nếu quan sát viên này phải đoán xem vũ trụ đa giai đó thuộc hệ thống nào, thời sự đoán tốt nhất sẽ là hệ thống định nghĩa hầu hết các quan sát viên. Hệ thống ấy được gọi là nguyên tắc ưa sống tối đa (MBP=Maximally Biophilic Principle).

4.2.3 Luận cứ Tiên đề hóa

Một hệ thống nhất trí không thể phân biệt giữa tính chân và tính giả vì bất kỳ phát biểu nào cũng có thể được chứng minh là đúng. Do đó, khả năng phân biệt giữa tính chân và tính giả trong thực tế của chúng ta hàm ý rằng thực tế của chúng ta phải nhất trí [ngay cả khi chúng ta không thể chứng minh được bất kỳ hệ thống hình thức¹⁸ (formal System) cụ thể nào dự định mô tả thực tế là nhất trí].

Các lý thuyết hiện đại về vũ trụ học thông thường đòi hỏi vũ trụ phải có năng lượng tích cực và tiêu cực hữu hạn. Hơn nữa, giới hạn Bekenstein tức giới hạn thông tin (information limit), phát sinh từ tính nhất trí giữa nhiệt động lực học và thuyết tương đối rộng, hàm ý rằng bất kỳ vùng hữu hạn nào của không gian phải chứa năng lượng hữu hạn. Do đó, chúng ta giả thiết vũ trụ có nội dung thông tin hữu hạn.

Bất kỳ hệ thống nhất trí nào với nội dung thông tin hữu hạn có thể được hình thức hóa thành một hệ tiên đề, chẳng hạn, bằng cách sử dụng một tiên đề để khẳng định tính chân của mỗi mẫu thông tin độc lập. Do đó, chúng ta giả thiết có một hệ tiên đề đẳng cấu (isomorphic) với thực tế của chúng ta, trong đó mọi phát biểu đúng về thực tế có thể được chứng minh như một định lý từ các tiên đề của hệ thống đó, và ngược lại bất kỳ định lý nào của hệ thống đó tương ứng với một phát biểu đúng về thực tế.

Các dạng sống tự ý thức (self-aware life forms), như con người, tồn tại trong thực tế của chúng ta. Bởi vì sự tự ý thức đó là một phần nhất trí của thực tế của chúng ta, và bởi vì thực tế của chúng ta được hoàn toàn mô tả bởi một hệ tiên đề, điều đó có nghĩa là, sự tự ý thức của chúng ta có thể được phái sinh trong hệ tiên đề đó. Vì vậy, tất nhiên có thể phái sinh sự tự ý thức như một định lý từ các tiên đề của thực tế của chúng ta. Hơn nữa, mặc dầu kiến thức hạn hẹp về vật lý học và sinh học của chúng ta vẫn chưa có thể giải thích được kinh nghiệm hay nhận thức về sự tự ý thức, nhưng kinh nghiệm này thế nào cũng có thể phái sinh từ cách nào đó.

Với bất kỳ định lý nào khả dĩ phái sinh từ một hệ tiên đề, tất cả các hệ tiên đề khác cũng có thể phái sinh định lý đó. Chẳng hạn, một hệ tiên đề mới có thể được thiết lập bằng cách đơn giản bao gồm thêm một tiên đề mới mà không mâu thuẫn với bất kỳ tiên đề nào hiện có. Quả vậy, tất thế nào cũng có một số vô hạn phương thức cải biến một hệ tiên đề trong khi vẫn giữ bất kỳ định lý đặc thù nào nguyên vẹn.

Nói cách khác, sự thật là sự tự ý thức có thể phái sinh từ các tiên đề trong thực tế của chúng ta có nghĩa là có một số vô hạn các hệ tiên đề khác nhau cũng phái sinh các quan sát viên tự ý thức đang đặt câu hỏi về sự tồn tại của chúng, mặc dầu không có một biểu hiện khách quan. Nếu kinh nghiệm tự ý thức *không* đòi hỏi sự biểu hiện khách quan, thời không còn bất cứ lý do gì để giả thiết vũ trụ của chúng ta có một sự biểu hiện khách quan.

Do sự tự ý thức, đối với một thực thể tự ý thức, các hạn chế xung quanh được nhận thức dường như một thực thể. Nói cách khác, từ quan điểm của một thực thể tự ý thức trong một hệ tiên đề khác, các định lý và tiên đề của hệ khác đó được nhận thức như những hạn chế vật lý thực tồn. Như vậy, sự khác biệt duy nhất giữa thực thể vật lý và tiềm năng trừu tượng là quan điểm tương đối của một quan sát viên tự ý thức. Như vậy, một hệ tiên đề khác khả dĩ phái sinh cuộc sống tự ý thức không gì khác hơn là một tiềm năng trừu tượng chẳng bao giờ được thực hiện. Từ quan điểm đó, thực thể của chúng ta không gì khác hơn là một tiềm năng chẳng bao giờ được thực hiện.

Hiểu biết như trên, giải đáp cuối cùng câu hỏi tại sao thực thể của chúng ta tồn tại trở nên không cần thiết: bởi vì sự tự ý thức *có thể* được biểu tượng theo phương thức tiên đề cho nên bất kỳ hệ tiên đề nào *có thể* phái sinh sự tự ý thức *sẽ* được nhận thức như thực tồn chẳng cần một biểu hiện khách quan. Như thế, chẳng có gì đặc thù về thực thể của chúng ta, và chẳng có lý do đặc biệt tại sao đối nghịch với một tập hợp tiên đề nào khác, những tiên đề của thực thể của chúng ta đều đúng, bởi vì tất cả các hệ tiên đề khả hữu đều đúng như nhau từ những quan điểm khác nhau.

4.2.3a Thông diễn

Theo ý tưởng tương đối vật lý (physical relativism), sự khác biệt giữa một vũ trụ thực và khái niệm trừu tượng của một vũ trụ chỉ là một quan điểm: thực thể là những gì khả dĩ phái sinh từ những tiên đề định nghĩa một quan sát viên tự ý thức, và mọi sự vật khác dường như chỉ là một tiềm lực trừu tượng, chưa được thực hiện. Sự tồn tại vật lý có thể được coi là tập hợp con của thực thể định nghĩa những cấu trúc trong không-thời gian.

John Wheeler tin rằng thế giới vật chất là một hư cấu của trí tưởng tượng, và sự tồn tại của mọi sự vật vật lý đều bắt nguồn từ những quan sát của các quan sát viên. Theo Wheeler, “mọi ‘it’ - mọi hạt, mọi lực trường, ngay cả tự thân của liên tục không-thời gian - phái sinh chức năng, ý nghĩa, sự tồn tại hoàn toàn của nó từ các câu trả lời những câu hỏi yes-or-no, những lựa chọn nhị phân, những bit.”

Theo một nghĩa nào đó, điều này phù hợp với ý tưởng tương đối vật lý, bởi vì chúng ta khẳng định rằng tất cả ‘nhận thức’, và do đó ‘ý nghĩa’ là hoàn toàn do các quan sát viên. Tuy nhiên, tương đối vật lý không chấp nhận vũ trụ tồn tại trong *trí tưởng tượng* của một quan sát viên, bởi vì những mộng tưởng và tưởng tượng của chúng ta không phải là các hệ thống hình thức. Nó cũng không chấp nhận các hệ thống hình thức cần phải được hình thức hóa, được viết ra, hoặc nói một cách khác, được cấu tưởng bởi một trí tuệ nào đó nhằm để chúng được tri nhận là có thật từ một quan điểm nội bộ.

Một câu hỏi triết học thông thường là liệu vũ trụ có tồn tại theo một nghĩa khách quan chẳng có sự hiện diện của các quan sát viên tự ý thức. Tuy nhiên, sự thật là những tư tưởng tự ý thức của chúng ta có khả năng kiểm soát các cơ thể vật chất của chúng ta là bằng chứng cho thấy những tư tưởng của chúng ta là một phần không thể tách rời của vật lý học định nghĩa vũ trụ của chúng ta.

Về Giả thuyết Vũ trụ Toán học của Tegmark (MUH), theo đó “tất cả các cấu trúc tồn tại về mặt toán học cũng tồn tại về mặt vật lý học”, sự hàm ý là từ một quan điểm khách quan, tồn tại toán học tương đương với tồn tại vật lý học, nghĩa là, các vũ trụ vật lý mâu thuẫn khác nhau có thể hiện hữu. Nói cách khác, MUH là tương đương một cách khách quan với tương đối vật lý, mặc dầu chúng ta ưa tư lượng khác đi: thay vì tư lượng về các vũ trụ toán học trừu tượng như tồn tại trong một loại vũ trụ đa trọng khách quan nào đó, chúng ta tư lượng các vũ trụ này như đơn giản là không tồn tại theo một nghĩa khách quan.

4.3 Bác bỏ các phản bác thông thường

Một số phản bác MUH đã được tóm lược và bác bỏ bởi Tegmark, và nhiều trong số những bác bỏ ấy cũng là bác bỏ bởi tương đối vật lý. Phần này sẽ tập trung vào việc bác bỏ các phản bác định lý của Gödel và bàn đến Lập luận đáp ứng Hữu thần luận.

4.3.1 Không tương thích với các định lý của Gödel?

về mặt hình thức, một hệ tiên đề được gọi là *nhất trí* (consistent) nếu nó không thể chứng minh bất kỳ phát biểu nào cùng với sự phủ nhận nó (một mâu thuẫn), và *hoàn bị* (complete) nếu mỗi câu khả dĩ biểu hiện bằng ngôn ngữ có thể được chứng minh hoặc bác bỏ. Định lý đầu của Gödel xác nhận trong bất kỳ hệ tiên đề nào chứa một lượng số học sẽ bất hoàn bị (incomplete); và định lý thứ hai của ông xác nhận bất kỳ hệ tiên đề nào chứa một lượng số học sẽ không thể chứng minh tính nhất trí của nó (giả thiết nó quá thật nhất trí). Hiện tại, tất cả các học thuyết vật lý học đều rất toán học, do đó, cả hai định lý đều áp dụng.

Sự nhầm lẫn căn bản về định lý về tính bất hoàn bị phát sinh từ giả thiết sai lầm rằng, với mỗi câu khả dĩ được chế định bằng ngôn ngữ của một hệ thống, phải có một quan sát nội bộ mà một quan sát viên được mô tả bởi hệ thống đó có thể thực hiện, kết quả của quan sát nội bộ ấy liên quan đến khả năng quyết định của câu. Trong thực tế, chúng ta có thể chứng minh giả thiết này là sai (Định lý 1).

Định lý 1. Nếu một hệ thống “bất hoàn bị” định nghĩa một quan sát viên tự ý thức và những quan sát của quan sát viên ấy, thì tất nhiên quan sát viên ấy không thể nào tạo dựng một thí nghiệm tùy thuộc vào tính khả quyết định (decidability) của bất kỳ phát biểu bất khả quyết định nào được biểu hiện bằng ngôn ngữ của hệ thống đó.

[Theorem 1. If an ‘incomplete’ System defines a self-aware observer and his observations, it must be impossible for the observer to construct an experiment that depends upon the decidability of any undecidable Statement expressible in the language of that System.]

Chứng minh. Giả thiết có một hệ tiên đề Θ phái sinh một quan sát viên tự ý thức và tất cả các quan sát của quan sát viên ấy, là người đã tạo dựng một thí nghiệm với một kết quả nhị nguyên duy nhất tùy thuộc vào tính khả quyết định của một phát biểu được viết bằng ngôn ngữ của hệ Θ .

Nếu kết quả quan sát được là tích cực hoặc tiêu cực, thì quan sát viên sẽ thấy mình không thể phái sinh kết quả này từ Θ , bởi vì theo định nghĩa thì nó bất khả quyết định. Vì vậy, mâu thuẫn đạt được bởi vì giả thiết rằng Θ phái sinh tất cả các quan sát của quan sát viên ấy là sai, và do đó Θ không thể là một mô tả chính xác về thực tế của quan sát viên.

Nếu kết quả quan sát được là một loại chông chênh kỳ lạ khác với kết quả nhị nguyên dự kiến, thì giả thiết nguyên sơ rằng ta có thể tạo dựng một thí nghiệm tuyến chọn nhị nguyên tùy thuộc vào tính khả quyết định của một phát biểu bất khả quyết định là sai. Dù bằng cách nào, giả thiết nguyên sơ là sai, nghĩa là, sự hiện diện của những phát biểu bất khả quyết định không ảnh hưởng đến những quan sát của một quan sát viên nội bộ.

Tegmark bày tỏ sự nghi ngờ đối với định lý thứ hai của Gödel, phản nản rằng, “Mô hình tiêu chuẩn vật lý học của chúng ta bao hàm những cấu trúc toán học hàng ngày như số nguyên (định nghĩa bởi các tiên đề Peano) và thực số. Nhưng định lý thứ hai của Gödel hàm ý chúng ta chẳng bao giờ có thể chắc chắn 100% toán học hàng ngày đó là nhất trí: Gödel vạch rõ khả thể của một chứng minh độ dài hữu hạn ngay bên trong lý thuyết số (number theory) biểu minh $0 = 1$. Sử dụng kết quả đó, mọi phát biểu minh xác khác trong hệ thống hình thức có thể được chứng minh là đúng và toán học như chúng ta biết sẽ sụp đổ như một ngôi nhà các con bài.”

[“Our Standard model of physics includes everyday mathematical structures such as the integers (defined by the Peano axioms) and real numbers. Yet Gödel’s second incompleteness theorem implies that we can never be 100% sure that this everyday mathematics is consistent: it leaves open the possibility that a finite length proof exists within number theory itself demonstrating that $0 = 1$. Using this result, every other well-defined statement in the formal System could in turn be proven to be true and mathematics as we know it would collapse like a house of cards”]

Nhằm tránh vấn đề trên, hầu thay thế Giả thuyết Vũ trụ
Toán học (Mathematical Universe Hypothesis = MUH),

Tegmark đã đề ra Giả thuyết Vũ trụ Khả kế toán (Computable Universe Hypothesis = CUH), chỉ bao gồm các hệ tiên đề đơn giản đủ để chứng minh tính nhất trí của chúng. Theo Heinrich, những lo ngại của Tegmark đối với định lý thứ hai là vô căn cứ.

Như được giải thích bởi Franzén¹⁹ “Định lý không hoàn bị thứ hai là định lý về khả năng biểu hiện cho trước, chỉ ra rằng ... một lý thuyết nhất quán T không thể đưa ra sự thống nhất của nó, mặc dù tính nhất quán của T có thể được đưa ra trong một lý thuyết nhất quán. ”

Nói cách khác, một quan sát viên nội bộ không thể chứng minh sự vững chắc của bất kỳ hệ tiên đề nào được giả thuyết để mô tả thực tế của ông ta. Tuy nhiên, thực tế là chúng ta không thể chứng minh lý thuyết của chúng ta là chính thức nhất quán, hoặc chứng minh rằng chúng mô tả đầy đủ các khía cạnh không quan sát được của thực tế, không bao hàm trước sự tồn tại của một hệ thống rìa mô tả đầy đủ và mô tả thực tế. Thật vậy, kết quả gần giống với cách mà vấn đề Halting [47, p. 173], cho thấy rằng chúng ta không thể viết một chứng minh chiều dài hữu hạn mà bất kỳ chương trình máy tính nào cũng sẽ dừng lại, không ngăn cản sự tồn tại của một khoảng thời gian tùy tiện chương trình máy tính mà không dừng lại.

4.3.2 Không tương thích với tính Ngẫu nhiên Lượng tử?

Tegmark than thở MUH của ông không tương thích với chân tính ngẫu nhiên lượng tử bởi vì không thể tạo ra một chuỗi các chân số ngẫu nhiên nếu chỉ sử dụng các quan hệ tiên đề ²⁰. Mặc dầu sự thật là ngẫu nhiên không thể được tạo ra theo thuật toán, điều này không ngăn cản sự tồn tại của một hệ tiên đề định nghĩa hành vi xuất hiện hoàn toàn ngẫu nhiên căn cứ trên các quan sát hạn chế của một quan sát viên nội bộ.

Như một ví dụ cụ thể về điều nêu trên, hãy xem xét tập tiên đề sau đây, mô tả vị trí của một hạt có tọa độ X được tham số hóa bởi thời gian có trị nguyên t :

$$\|X(t) - X(t+1)\| = 1$$

$$X(0) = 1$$

$$X(1) = 2$$

$$X(2) = 3$$

$$X(3) = 2 \dots$$

Giả sử hệ tiên đề này bằng cách nào đó định nghĩa một quan sát viên, vào thời điểm $t = 2$, cố gắng chế định một luật mô tả vị trí của hạt ấy như một hàm số của thời gian dựa trên các quan sát của ông vào lúc $t=2$. Rõ ràng, quan sát viên không thể tiên đoán một cách chắc chắn rằng $X(3) = 2$. Tuy nhiên, ông có thể lý thuyết rằng: “Nếu một hạt được quan sát tại $X(t)$, thì $X(t+1)$ sẽ được lựa chọn ngẫu nhiên đồng đều từ tập hợp $\{X(t-1); x(t+1)\}$ ”.

Trong trường hợp này, xác suất trong lý thuyết biểu tượng tính bất xác định cơ bản của quan sát viên trong khả năng dự đoán một số tiên đề của hệ thống ông chưa bao giờ nghĩ đến. Do đó, tính ngẫu nhiên quan sát được trong vật lý học lượng tử cũng tương thích với ý tưởng thực tế của chúng ta được mô tả bởi một hệ tiên đề.

4.3.2 Lập luận đáp ứng Hữu thần luận

Tương đối vật lý chắc chắn là phù hợp với ý tưởng về một thực thể vô thần, bởi vì nó chỉ cho chúng ta thấy rằng một thực thể có thể được nhận thức từ một hệ tiên đề nào đó mà không cần một Thượng Đế. Tuy nhiên, sự thừa nhận rằng sự tự ý thức *có thể* được tạo dựng theo phương thức tiên đề cũng là bằng chứng thuyết phục để tin rằng có một số thực thể có cái gì đó giống như một Thượng Đế. Bởi vì nếu sự tự ý thức có thể được phái sinh trong một hệ tiên đề thông qua các hiện tượng xuất hiện, thời cũng phải có một hệ tiên đề phái sinh sự tự ý thức một cách trực tiếp hơn mà không sử dụng hiện tượng xuất hiện.

Sự thật con người có thể có những tư tưởng được chuyển thành hành vi vật lý là bằng chứng cho thấy tư tưởng là một phần của hệ tiên đề định nghĩa thực tế. Theo những người thuộc phái thông diễn Copenhagen, vai trò của các quan sát viên là bằng chứng trực tiếp hơn về sự thật này. Vì vậy, không có lý do tại sao một hệ tiên đề không thể được định nghĩa tập trung về những tư tưởng của một thực thể tự ý thức đơn nhất, thế nào để cho những tư tưởng của thực thể đó có thể ảnh hưởng hoặc chi phối thực tế của hệ tiên đề đó đến bất kỳ mức độ tùy ý nào cần thiết hầu đạt được tất cả các tiêu chuẩn của chúng ta để trở thành một Thượng Đế.

4.4 Kết luận

Kết luận cơ bản của ý tưởng tương đối vật lý là các quan sát viên tự ý thức có thể tồn tại trong các hệ tiên đề chẳng có biểu hiện khách quan, và sự khác biệt giữa một vũ trụ thực và một vũ trụ trừu tượng được định nghĩa theo toán học chỉ là một lối nhìn.

Tương đối vật lý không phải là một lý thuyết về vật lý học bởi vì nó không đưa ra các phát biểu khả chứng nghiệm. Thay vào đó, nó là một cái khung để thông diễn ý nghĩa của sự tồn tại và vai trò của vật lý học. Mặc dầu

không đưa ra các dự đoán cụ thể, tương đối vật lý là một ý tưởng thích đáng bởi vì nó cung cấp các câu trả lời đơn giản cho một số câu hỏi triết học sâu sắc nhất về sự tồn tại mà các nhà vật lý học đã phải vật lộn với: nó chỉ cách tránh nghịch lý trong giải thích sự tồn tại của chúng ta. Nó chấp thuận một ứng dụng rộng lớn hơn phương cách lý luận vị nhân để mô tả các tiên đề cơ bản của vật lý học, nó cho phép chúng ta trả lời câu hỏi của Leibniz, và nó cho phép chúng ta mô tả những ý tưởng cốt lõi của vật lý học, như khái niệm không- thời gian. Hơn nữa, dựa trên duy chỉ đơn thuần logic của tính nhất trí, tương đối vật lý không đòi hỏi chứng minh bằng thực nghiệm.

Chú thích

- 1*. William J. Borucki, David G Koch, et al. Characteristics of planetary candidates observed by Kepler, ii: Analysis of the first four months of data. 2011.
2. Stuart Kauffman. *At Home in the universe*. Oxford University Press, New York, 1995. P47.
3. ‘anthropic principle’. Merriam-Webster Online Dictionary.
4. Roger Penrose. *The Emperor's New Mind*. Penguin, 1991.
5. Lavrence J. Henderson. The fitness of the environment, an inquiry into the biological significance of the properties of matter. *The American Naturalist*, 47(554): pp.105—115, 1913. URL <http://www.jstor.org/stable/2455869>.
6. R. H. Dicke. Dirac’s cosmology and Mach’s principle. *Nature*, 192(4801): 440-441, Nov 1961
7. Paul c. Davies. How bio-friendly is the universe? *International journal of astrobiology*, 2(2): 115-120, Apr 2003.
8. Stephen Hawking. *A Brief History of Time*. Bantam Books, 1988. P125.
9. Paul Davies. *The Accidental Universe*. Cambridge University Press, 1993
10. John D. Barrow and Frank J. Tipler. *The Anthropic Cosmological Principle*. Oxford University Press, Oxford, 1988.
11. M.J. Duff. M-theory (the theory formerly known as strings). *International Journal of Modern Physics A*, 11: 5623—5642, 1996.
12. Philip Candelas, Gary Horowitz, Andrew Strominger, and Edward Witten. Vacuum configurations for super-strings. *Nuclear Physics B*, 258:46-74, 1985.
13. Brian Greene. *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality*. Knopf, New York, 2004. P372.
14. Stephen Hawking and Leonard Mlodinow. *The Grand Design*. Bantam Books, 2012.
15. Michio Kaku. *Parallel Worlds*. Doubleday, New York, 2005. P93.
16. Stephen Hawking and Leonard Mlodinow. *The Grand Design*. Bantam Books, 2012. P136.
17. D. Hilbert and p. Bernays. *Grundlagen der Mathematik*. Springer, Berlin, 1934.
18. Một hệ thống hình thức (formal System) hay vi tích phân logic (logictal calculus) là bất kỳ hệ thống tư tưởng trừu tượng được minh xác nào đặt cơ sở trên mô hình toán học. Một hệ thống hình thức không cần phải toán học, nói chung. Chẳng hạn, tập *Ethics* của Spinoza mô phỏng theo dạng thức của bộ sách toán Elements của Euclid. Spinoza sử dụng những phân tử tính Euclide (Euclidean elements) như “axioms” (“tiên đề”), các quy tắc suy luận, V.V..., hầu có thể dựng lập một phép tính toán, như vi tích phân.
11. Torkel Franzén. Gödel’s Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005.
20. Max Tegmark. The mathematical universe. *Foundations of Physics*, 38 (2): 101-150, 2008.

Cụm từ “là toán học” có nghĩa “là một cấu trúc toán học”. Về mặt logic học Duyên khởi tức cái này có thì cái kia có, cái này thời không thì cái kia không, cái này sinh thời cái kia sinh, cái này diệt thời cái kia diệt, là một cấu trúc toán học, bao gồm những tồn thể trừu tượng cùng với những quan hệ giữa chúng. Nếu cường điệu tính cách cấu trúc toán học của Duyên khởi xét logic học thì ta có thể nói : “Duyên khởi là toán học”. Nhưng một mặt Phật là lý Duyên khởi, và mặt khác Phật pháp nhất như Đạo Phật và Phật là một. Vậy có thể xướng lên về mặt toán học, logic học “Đạo Phật là toán học”. Điều đó bao hàm luôn ý nghĩa “Vũ trụ là toán học”, bởi vì nhất thiết pháp là vũ trụ và Như Lai thuyết : “Nhất thiết pháp như thị Phật Pháp” (Kinh Kim Cang).

Tập sách này Đạo Phật là toán học gồm 4 chương. Chương I. Đạo Phật là Toán học là chính yếu, trình bày luận cứ logic nhằm hỗ trợ ý tưởng “Tương đối vật lý” của Stuart B Heinrich – một phương thức thông diễn lý Duyên khởi như một cấu trúc toán học, đặt cơ sở trên các hệ tiên đề. Ba chương còn lại gồm: Vũ trụ toán học, Vũ trụ toán học Tegmark, và tính tương đối của tồn tại. – Lặp lại luận cứ logic của Chương Một trên quan điểm theo thứ tự: - (1) kết nối tự nhiên giữa vật lý với toán học, và toán học là sự dung hợp phức tạp của các phát minh và các phát hiện; - (2) cả sáng tạo và khám phá đóng một vai trò quan trọng giải thích tại sao toán học thao tác rất hữu hiệu và thực tế chung cực là thuần túy toán học; vũ trụ của chúng ta là một vũ trụ đa trọng với bốn tầng, tầng IV là mặt tuyên bố cấp tiến, thực tế vật lý không chỉ được mô tả bởi toán học mà đúng ra là toán học. - (3) Tương đối vật lý của Heinrich.

Kết luận cơ bản của ý tưởng tương đối vật lý là các quan sát viên tự ý thức có thể tồn tại trong các hệ tiên đề chẳng có biểu hiện khách quan, và sự khác nhau giữa một vũ trụ thực và một vũ trụ trừu tượng được định nghĩa theo toán học chỉ là một lỗi nhìn. Tương đối vật lý chắc chắn là phù hợp với ý tưởng về một thực thể vô thần, bởi vì nó chỉ cho chúng ta thấy rằng một thực thể có thể được nhận thức từ một hệ tiên đề nào đó mà không cần một Thượng Đế. Dựa trên duy chỉ đơn thuần Logic học của tính nhất trí, tương đối vật lý không đòi hỏi chứng minh bằng thực nghiệm.

Tập sách Đạo Phật là toán học là tập sách cuối cùng của Hồng Dương Nguyễn Văn Hai, tác giả của 5 cuốn Phật học : Tìm hiểu Trung luận, nhận thức luận và Không Tánh (2001); Luận giải trung luận Tánh Khởi và Duyên Khởi (2003); Nhân Quả đồng thời (2008); Tư tưởng Phật giáo trong triết học Gilles Deleuze (2015); Nguyên tắc Lý Do Đủ - Lý Duyên Khởi (2017).

[Đạo Phật Siêu Khoa Học.pdf \(itst.gov.vn\)](http://itst.gov.vn)

HỘI LUẬT GIA VIỆT NAM
NHÀ XUẤT BẢN HỒNG ĐỨC
65 Tràng Thi - Quận Hoàn Kiếm - Hà Nội
Email: nhaxuatbanhongduc65@gmail.com
Điện thoại: 024.39260024 Fax: 024.39260031

ĐẠO PHẬT LÀ TOÁN HỌC
Trung tâm Văn hóa Phật Giáo Liễu Quán – Huế
Hồng Dương Nguyễn Văn Hai

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc BÙI VIỆT BẮC
Chịu trách nhiệm nội dung
Tổng biên tập LÝ BÁ TOÀN
Biên tập: Phan Thị Ngọc Minh
Sửa bản in: Thích Không Nhiên
Trình bày: Hồng Dương Nguyễn Văn Hai

ĐỐI TÁC LIÊN KẾT: Công ty CP Văn Hóa Thiện Tri Thức
245 Nguyễn Thị Minh Khai, Q 1, Tp. HCM

In 500 cuốn, khổ 14 cm X 20.5cm tại Xí nghiệp In Fahasa.

Số XNDKXB: 686 - 2018/CXBIPH/34 - 11/HĐ

Số QĐXB của NXB: 333/QĐ-NXBHĐ cấp ngày' 6/ 3/ 2018. in xong và nộp lưu chiểu năm 2018.

Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế (ISBN): 978-604-89-3007-3

Chú thích

[\[←1\]](#)