TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2018 Số 491

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

The School of Athens

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

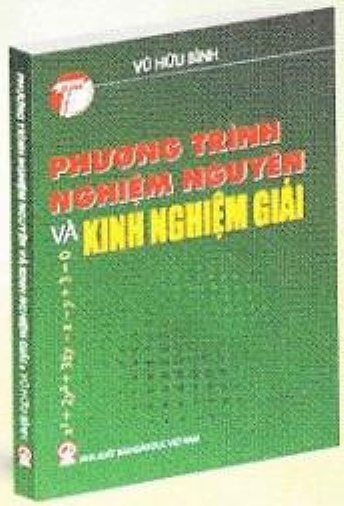
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell, Pythagore, Fermat, Diophante, ...*

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

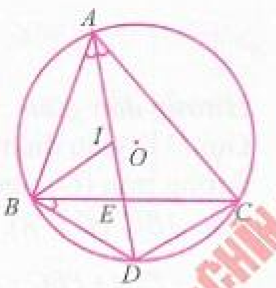
DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

ĐIỀU THÚ VỊ TỪ "GIAO ĐIỂM BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC" ÁP DỤNG TRONG MỘT SỐ BÀI TẬP VỀ ĐƯỜNG TRÒN

NGÔ VĂN ĐIỀM
(GV THCS Lê Ninh, Kinh Môn, Hải Dương)

Trong chương trình môn Toán lớp 9, kiến thức về đường tròn được nhắc đến nhiều trong các đề thi. Bài viết này, xin chia sẻ cùng bạn đọc *Điều thú vị từ giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn.* Ta xét bài toán gốc: *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O); tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại E, cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq A$), điểm I trên đoạn AE. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi $DB = DC = DI$.*

Hướng dẫn giải



Ta có AD là tia phân giác của góc $\widehat{BAC} \Leftrightarrow DB = DC$

$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DC}$);

$$\widehat{BID} = \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{ABI}$$

(góc ngoài của ΔABI);

$$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \widehat{IBC} + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

$DB = DI \Leftrightarrow \Delta DBI$ cân tại $D \Leftrightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \frac{\widehat{A}}{2}$

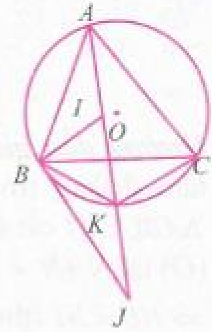
$\Leftrightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC} \Leftrightarrow BI$ là phân giác của $\widehat{ABC} \Leftrightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Nhận xét. Điều thú vị từ tính chất trên là *"I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi $DB = DC = DI$"* được vận dụng trong một số bài tập về đường tròn, nếu không để ý đến sẽ khó khăn cho việc phân tích, tìm tòi lời giải của bài toán. Sau đây, ta sẽ vận dụng tính chất này để giải một số bài tập sau:

Bài tập 1. *Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Tia AI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$), gọi J là điểm đối xứng của I qua K. Chứng minh rằng: tam giác IJB vuông tại B.*

(Trích câu 4-Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên KHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh năm học 2004-2005).

Hướng dẫn giải



Vì I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow KB = KI = KC$ (theo bài toán gốc).

Xét ΔIBJ có

$$KB = KI = KJ = \frac{1}{2} IJ,$$

suy ra ΔIBJ vuông tại B.

Nhận xét. *Trong lời giải trên ta đã nhờ vào tính chất " Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC suy ra $KB = KC = KI$ "* (theo bài toán gốc).

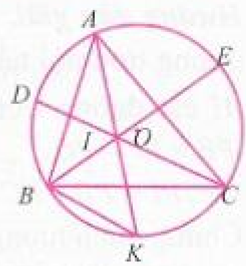
Tiếp tục ta vận dụng tính chất trên để giải bài toán "hay" và khó hơn sau:

Bài tập 2. *Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R) (BC không đi qua tâm O), A là điểm chuyển động trên cung lớn BC; D, E lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BA, CA; I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng:*

a) I nằm trên một đường tròn cố định.

b) Xác định vị trí của A để AI có độ dài lớn nhất.

Hướng dẫn giải. a) Ta có



$\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau), $\Rightarrow BE$ là tia phân giác $\widehat{ABC}$.

Tương tự CD là tia phân giác $\widehat{ACB}$. Gọi giao điểm của AI với đường tròn (O) là K ($K \neq A$), vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC suy ra AK là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ suy ra K cố định.

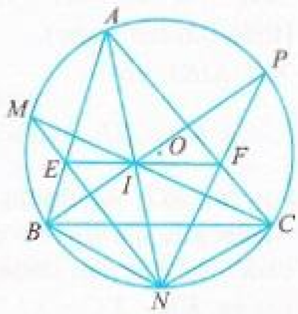
Mặt khác $KB = KI = KC$ (theo bài toán gốc) mà K cố định, B cố định nên độ dài đoạn KB không đổi. Vậy I chuyển động trên đường tròn $(K; KB)$ cố định.

b) Ta có $AI = AK - KI = AK - KB$ mà KB không đổi nên để AI max $\Leftrightarrow AK$ max $\Leftrightarrow AK$ là đường kính $\Leftrightarrow A$ là điểm đối xứng với K qua O.

Nhận xét. Đến đây bước đầu ta đã thấy được "*điều* *thú vị*" từ tính chất của giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn. Sau đây, chúng ta sẽ tìm hiểu sự thú vị của tính chất trên ở một số bài tập ở mức độ khó hơn:

Bài tập 3. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$; E là giao điểm của MN với AB, F là giao điểm của NP với AC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh ba điểm E, I, F thẳng hàng.*

Hướng dẫn giải. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, AI cắt đường tròn (O) tại N $(N \neq A)$



$\Rightarrow NB = NI$ (theo bài toán gốc).

Chứng minh tương tự:

$$MB = MI$$

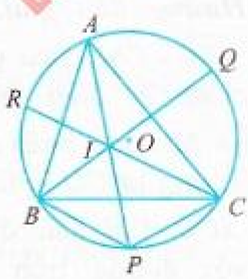
Suy ra MN là đường trung trực của $BI \Rightarrow EB = EI$

$\Rightarrow \widehat{EIB} = \widehat{ABP} = \widehat{CBP} \Rightarrow IE \parallel BC$. Chứng minh tương tự có $IF \parallel BC$. Suy ra ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Bài tập 4. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), gọi P, Q, R lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ BC, CA, AB. I là giao điểm của BQ và CR. Chứng minh rằng:*

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$

Hướng dẫn giải. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tia AI cắt đường tròn tại P nên $PB = PI = PC$



$\Rightarrow 2PI = PB + PC > BC.$

Chứng minh tương tự:

$$2QI = QA + QC > AC$$

$$2RI = RA + RB > AB$$

$$\Rightarrow PI + QI + RI > \frac{BC + AC + AB}{2}.$$

Ta có:

$$AP + BQ + CR = AI + IP + BI + IQ + CI + IR$$

$$= (PI + QI + RI) + \frac{AI + IC}{2} + \frac{AI + IB}{2} + \frac{IB + IC}{2}$$

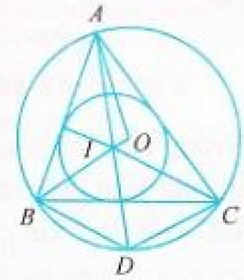
$$> \frac{BC + AC + AB}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2}.$$

Vậy $AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$ (đpcm)

Bài tập 5. *Gọi I và O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC không đều. Chứng minh rằng: $\widehat{AIO} \le 90^0 \Leftrightarrow 2BC \le AB + CA$.*

Hướng dẫn giải.

Kéo dài AI cắt đường tròn (O) tại D. Ta chứng minh được: $DB = DI = DC$ (theo bài toán gốc).



Áp dụng Định lý Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ nội tiếp ta được:

$$AB.DC + AC.BD = AD.BC$$

$$\Rightarrow DI(AB + AC) = AD.BC$$

Ta có $\widehat{AIO} \le 90^0 \Leftrightarrow AI \ge ID \Leftrightarrow (AD - ID) \ge ID$

$$\Leftrightarrow 2 \le \frac{AD}{DI} = \frac{AB + AC}{BC} \Leftrightarrow 2BC \le AB + AC. \text{(đpcm)}$$

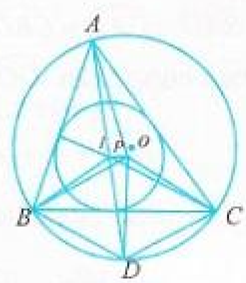
Bài tập 5. (*IMO 2006*). *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I; Gọi P là một điểm trong tam giác nhọn ABC thỏa mãn:*

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}\ (*).$$

Chứng minh rằng: $AP \ge AI$, đẳng thức xảy ra khi nào?

Hướng dẫn giải

Gọi D là giao điểm của AI với đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC $(D \neq A)$. Ta có:



$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \hat{B} + \hat{C},$$

hay $2(\widehat{PBC} + \widehat{PCB}) = \hat{B} + \hat{C}.$

Ta có

$$\widehat{BPC} = 180^0 - (\widehat{PBC} + \widehat{PCB})$$

$$= 180^0 - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Mặt khác $\widehat{BIC} = 90^0 + \dfrac{\hat{A}}{2}$ nên $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$, suy ra

B, P, I, C cùng nằm trên một đường tròn. (1)

Mà I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tia AI cắt đường tròn (O) tại $D \Rightarrow DB = DC = DI$. (2)

(theo bài toán gốc).

Từ (1) và (2) suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BIPC \Rightarrow DI = DP$. Ta có:

$$AP + PD \ge AD = AI + ID$$

$\Rightarrow AP \ge AI$, đẳng thức xảy ra khi $P \equiv I$.

Mời các bạn tiếp tục khai thác "*Điều thú vị từ giao điểm ba đường phân giác của tam giác, áp dụng trong một số bài tập về đường tròn*" để thấy được cái hay, cái đẹp trong toán học.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BÌNH LONG, BÌNH PHƯỚC NĂM HỌC 2017-2018

VÒNG 1

Câu 1. 1. $A=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1.$

$$B=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4.$$

2. a) $$V=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}-2}.$$

b) $V=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{x}-2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=64$ (thỏa mãn).

Câu 2. 1. a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y=2x^2$	8	2	0	2	8

x	0	-1
$y=x+1$	1	0

b) Vì $d_1 \parallel d$ nên phương trình đường thẳng d_1 có dạng: $y=x+b$ $(b\neq 1)$. Mà d_1 đi qua $A(-1;2)$ nên ta có $-1+b=2\Rightarrow b=3\Rightarrow d_1: y=x+3.$

2. $$\begin{cases}3x-2y=5\\2x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5\\4x+2y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=21\\2x+y=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\2x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là (3; 2).

Câu 3. 1. a) Với $m=2$, ta có $2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1.$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 khi và chỉ khi $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2.$ Theo Viet, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m & (1)\\x_1.x_2=\dfrac{m^2-2}{2} & (2)\end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $A=|2x_1x_2-x_1-x_2-4|$

$$=|m^2-2-m-4|=|(m-3)(m+2)|.$$

Do $-2\leq m\leq 2$ nên $m+2\geq 0,\ m-3\leq 0.$ Suy ra

$$A=(m+2)(-m+3)=-m^2+m+6$$

$$=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\leq\frac{25}{4}.$$

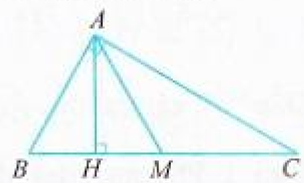
Vậy Max $A=\frac{25}{4}$ khi $m=\frac{1}{2}.$

2. Gọi x (m) là chiều rộng của vườn hoa, $x>0$. Chiều dài của vườn hoa là $x+6$ (m). Theo đề bài ta có: $x(x+6)=91\Leftrightarrow x^2+6x-91=0$

$$\Leftrightarrow(x-7)(x+13)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=7 & \text{(nhận)}\\x=-13 & \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Vậy chu vi vườn hoa hình chữ nhật là 40m.

Câu 4. a) Xét ΔABC có:



$\widehat{A}=90^0$, $AH\perp BC$

$\Rightarrow AH=\sqrt{BH.CH}$

$=\sqrt{4.9}=6$ cm.

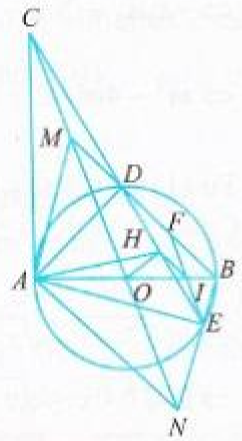
ΔABH : $\widehat{H}=90^0\Rightarrow\tan B=\frac{AH}{BH}=\frac{6}{4}\Rightarrow\widehat{B}\approx 56,3^0.$

b) Xét ΔABC có:

$\widehat{A}=90^0, MB=MC\Rightarrow AM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\cdot 13=6,5$ cm.

Vậy $S_{\Delta AHM}=\frac{1}{2}MH.AH=\frac{1}{2}.2,5.6=7,5\ \text{cm}^2.$

Câu 5. a) Ta có: $\widehat{CAB}=90^0$,



$\widehat{OHC}=90^0\Rightarrow\widehat{CAB}+\widehat{OHC}=180^0.$

Vậy tứ giác $AOHC$ nội tiếp.

b) $\widehat{CAD}=\widehat{AEC}$ và $\widehat{ACE}$ chung

$\Rightarrow\Delta ACD\backsim\Delta ECA$ (g.g)

$\Rightarrow\frac{CA}{CE}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow AC.AE=AD.CE.$

c) Từ E vẽ đường thẳng song song với MN cắt cạnh AB tại I và cắt cạnh BD tại $F\Rightarrow\widehat{HEI}=\widehat{HCO}.$

Vì tứ giác $AOHC$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{HAO}=\widehat{HCO}=\widehat{HEI}\Rightarrow$ tứ giác $AHIE$ nội tiếp

$\Rightarrow\widehat{IHE}=\widehat{IAE}=\widehat{BDE}\Rightarrow HI\parallel BD.$

Mà H là trung điểm của DE suy ra I là trung điểm của EF. Lại có $EF\parallel MN$ và $IE=IF$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của đoạn thẳng MN. Từ đó tứ giác $AMBN$ là hình bình hành. Vậy $AM \parallel BN$.

VÒNG 2

Câu 1. a) Ta có:

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-x+x\sqrt{x}+6-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{-x+x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{(\sqrt{x}-1)(x-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\sqrt{x}-2.$$

b) Với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne 4$, ta có

$$Q=\frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}=\frac{x+27}{\sqrt{x}+3}=\frac{x-9+36}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\sqrt{x}-3+\frac{36}{\sqrt{x}+3}$$

$$=-6+(\sqrt{x}+3)+\frac{36}{\sqrt{x}+3}\ge -6+12=6.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}+3=\dfrac{36}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow x=9.$

Câu 2. Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow -2m+4\ge 0\Leftrightarrow m\le 2.$ (1)

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\ x_1.x_2=m^2-3\end{cases}$

Mà $x_1^2+4x_1+2x_2-2mx_1=1$

$\Leftrightarrow x_1(x_1-2m+2)+2(x_1+x_2)=1$

$\Leftrightarrow -x_1.x_2+2(x_1+x_2)=1\Leftrightarrow -m^2+3+4(m-1)=1$

$\Leftrightarrow m^2-4m+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2+\sqrt{2}\\ m=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m=2-\sqrt{2}$.

Câu 3. a) ĐK: $1\le x\le 7$. Ta có

$$x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1})+(x-1)-\sqrt{(x-1)(7-x)}=0$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1})+\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{7-x}-\sqrt{x-1})(2-\sqrt{x-1})=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=2\\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=4\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=4; x=5$.

b) ĐK: $\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-xy^2+1\ge 0\end{cases}$, kết hợp với PT (1), ta có $y>0$. Từ (1), ta có $4\sqrt{x+1}-xy\sqrt{y^2+4}=0$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}=xy\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow 16(x+1)=x^2y^2(y^2+4)$

$\Leftrightarrow (y^4+4y^2)x^2-16x-16=0.$

Giải phương trình theo ẩn x ta được

$$x=\frac{4}{y^2}\text{ hoặc } x=\frac{-4}{y^2+4}<0\text{ (loại).}$$

Với $x=\dfrac{4}{y^2}\Leftrightarrow xy^2=4$ thế vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{x^2-3}+3\sqrt{x-1}=4.$ (*)

Giải (*) với ĐK: $x\ge\sqrt{3}$, ta có:

$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3}-1)+3(\sqrt{x-1}-1)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}=0$

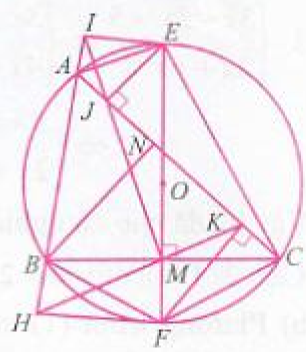
$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ vì $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+1}>0$

$\Leftrightarrow x=2.$

Với $x=2\Rightarrow\begin{cases}y^2=2\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow y=\sqrt{2}$. Kết hợp với điều kiện trên, hệ phương trình có nghiệm $(2;\sqrt{2})$.

Câu 4. a) Ta có:



$\widehat{AIE}=\widehat{AJE}=90^0\Rightarrow AIEJ$ là tứ giác nội tiếp.

$\widehat{EMC}=\widehat{EJC}=90^0\Rightarrow CMJE$ là tứ giác nội tiếp.

Xét ΔAEC, và ΔIEM có:

• $\widehat{ACE}=\widehat{EMI}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{JE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CMJE$).

• $\widehat{EAC}=\widehat{EIM}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{JE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AIEJ$). Do đó:

$$\Delta AEC\backsim\Delta IEM\Rightarrow\frac{AE}{EI}=\frac{EC}{EM}\Rightarrow EA.EM=EC.EI.$$

b) Ta có $\widehat{IEM}=\widehat{AEC}\Rightarrow\widehat{AEI}=\widehat{CEM}$. Mặt khác $\widehat{AEI}=\widehat{AJI}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AI}$), $\widehat{CEM}=\widehat{CJM}$

(Xem tiếp trang 6)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM HỌC 2017 – 2018

VÒNG 1

(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (*2 điểm*). Cho

$$A=\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}\right)\left[\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}}-1\right] \text{ với } x>0; x\neq 0.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Đặt $B=(x-\sqrt{x}+1)A$. Chứng minh $B>1$ với $x>0$, $x\neq 1$.

Câu 2 (*2 điểm*).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=2mx+2m+8$ (với m là tham số)

a) Khi $m=-4$, tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) và parabol (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Tìm m để $x_1+2x_2=2$.

Câu 3 (*1 điểm*). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy^2+y^2-2=x^2+3x \\ x+y-4\sqrt{y-1}=0 \end{cases}.$$

Câu 4 (*1 điểm*). Cho quãng đường AB dài 300km. Cùng một lúc xe ô tô thứ nhất xuất phát từ A đến B, xe ô tô thứ hai đi từ B về A. Sau khi xuất phát được 3 giờ hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết thời gian đi cả quãng đường AB của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút.

Câu 5 (*3.5 điểm*). Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O) (C không trùng với A, B). Tiếp tuyến tại C của (O; R) cắt tiếp tuyến tại A, B của (O; R) lần lượt tại P, Q. Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác $CMON$ là hình chữ nhật và $AP.BQ=MN^2$.

b) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ.

c) Chứng minh $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$ có bán kính nhỏ nhất.

Câu 6 (*0.5 điểm*). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)}+\frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)}+\frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (*2 điểm*).

1) Cho a, b là hai số thực bất kỳ, chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình ẩn x sau vô nghiệm:

$$x^2+2ax+2a^2-b^2+1=0 \quad (1)$$

$$x^2+2bx+3a^2-ab=0 \quad (2)$$

2) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=0$ và $xyz\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$.

Câu 2 (*2.5 điểm*).

1) Giải phương trình: $\sqrt{x^2+4x+12}=2x-4+\sqrt{x+1}$.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2-4xy\left(\frac{2}{x-y}-1\right)=4(4+xy) \\ \sqrt{x-y}+3\sqrt{2y^2-y+1}=2y^2-x+3 \end{cases}$$

Câu 3 (*1 điểm*). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương trình: $x^3-y^3=6xy+3$.

Câu 4 (*3 điểm*). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có hai tia BA và CD cắt nhau tại E, hai tia AD và BC cắt nhau tại F. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BEC}$ và $\widehat{BFA}$ cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

1) $\widehat{DEF}+\widehat{DFE}=\widehat{ABC}$ và ΔEKF là tam giác vuông.

2) $EM.BD=EN.AC$.

3) Ba điểm K, M, N thẳng hàng.

Câu 5 (*1.5 điểm*). 1) Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}}+\frac{1}{b\sqrt{3b+2c}}+\frac{1}{c\sqrt{3c+2a}}\geq\frac{3}{\sqrt{5abc}}.$$

2) Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kì trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại. Chứng minh rằng tất cả 5 số đó đều không nhỏ hơn 5.

TRẦN NGỌC ĐẠI

(*GV THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, Thái Bình*) **giới thiệu**

***

HƯỚNG DẪN GIẢI ...

(*Tiếp theo trang 4*)

(cùng chắn cung $\overset{\frown}{CM}$). Suy ra $\widehat{CJM}=\widehat{AJI}$. Mà I, M nằm hai phía của đường thẳng AC nên $\widehat{CJM}=\widehat{AJI}$ đối đỉnh suy ra I, J, M thẳng hàng.

Tương tự, ta chứng minh được H, M, K thẳng hàng.

Do tứ giác $CFMK$ nội tiếp nên $\widehat{CFK}=\widehat{CMK}$.

Do tứ giác $CMJE$ nội tiếp nên $\widehat{JME}=\widehat{JCE}$.

Mặt khác $\widehat{ECF}=90^0\Rightarrow\widehat{CFK}=\widehat{JCE}$ (vì cùng phụ với $\widehat{ACF}$). Do đó:

$\widehat{CMK}=\widehat{JME}\Rightarrow\widehat{JMK}=\widehat{EMC}=90^0$ hay $IJ\perp HK$.

c) Kẻ $BN\perp AC$ $(N\in AC)$. Vì $\widehat{BAC}=60^0\Rightarrow\widehat{ABN}=30^0$.

$$\Rightarrow AN=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2}\Rightarrow BN^2=AB^2-AN^2=\frac{3c^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2=BN^2+CN^2=\frac{3c^2}{4}+\left(b-\frac{c}{2}\right)^2$$

$$=b^2+c^2-bc\Rightarrow BC=\sqrt{b^2+c^2-bc}.$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Xét ΔBCE đều ta có:

$$R=OE=\frac{2}{3}EM=\frac{2BC\sqrt{3}}{3.2}=\frac{1}{3}.\sqrt{3(b^2+c^2-bc)}.$$

Câu 5. Ta có:

$$S=n(n^4+5n^3+5n^2-5n-6)$$
$$=n\left[(n^2-1)(n^2+6)+5n(n^2-1)\right]$$
$$=n(n^2-1)(n^2+5n+6)=n(n-1)(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Ta có S là tích của 5 số nguyên tự nhiên liên tiếp chia hết cho $5!$ nên chia hết cho 120.

Câu 6. a) Từ giả thiết $|a|\leq 1, |b|\leq 1, |c|\leq 1$, ta có

$$a^4\leq a^2, b^6\leq b^2, c^8\leq c^2.$$

Từ đó $a^4+b^6+c^8\leq a^2+b^2+c^2$. Lại có

$(a-1)(b-1)(c-1)\leq 0$ và $(a+1)(b+1)(c+1)\geq 0$.

nên $(a+1)(b+1)(c+1)-(a-1)(b-1)(c-1)\geq 0$

$$\Leftrightarrow 2ab+2bc+2ca+2\geq 0\Leftrightarrow -2(ab+bc+ca)\leq 2.$$

Hơn nữa

$$a+b+c=0\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2\left(ab+bc+ca\right)\leq 2.$$

Vậy $a^4+b^6+c^8\leq 2$.

b) Ta có: $T=\dfrac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$

$$=\frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)}=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}.$$

Do $x>1, y>1$ nên $x-1>0, y-1>0$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương $\dfrac{x^2}{y-1},\dfrac{y^2}{x-1}$, ta có:

$$(x-1)+1\geq 2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow(\sqrt{x-1}-1)^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x-1}}\geq 2$$
$$(y-1)+1\geq 2\sqrt{y-1}\Leftrightarrow(\sqrt{y-1}-1)^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow y-2\sqrt{y-1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{y}{\sqrt{y-1}}\geq 2$$

Do đó $T=\dfrac{x^2}{y-1}+\dfrac{y^2}{x-1}\geq\dfrac{2xy}{\sqrt{x-1}.\sqrt{y-1}}\geq 8.$

Dấu "=" xảy $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{y-1}=\dfrac{y^2}{x-1}\\ x-1=1\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=8$ khi $x=y=2$.

MAI VĨNH PHÚ

(*GV THCS-THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước*) **giới thiệu**

15^{th} HANOI OPEN MATHEMATICS COMPETITION, VIETNAM 2018

INDIVIDUAL CONTEST - JUNIOR SECTION

NGUYỄN MINH TUẤN
NGUYỄN HỮU ĐIỀN
(*Hội Toán học Hà Nội*) ***giới thiệu***

ANSWER KEY

(*Time limit*: 120 *minutes*)

JUNIOR SECTION

1. QUESTION

Instructions:

• Write down your name, your contestant number and your team's name on the first page.

• Answer all 15 questions. In Section A, each question is worth 5 points. In Section B, each question is worth 10 points. In Section C, each question is worth 15 points. The total is 150 points. There is no penalty for a wrong answer.

• For questions 1-5, circle the correct answer A, B, C, D or E. For questions 6-10, fill your answer in the space provided at the end of each question. For questions 11-15, write your detailed solution in the space provided at the end of each question.

• Diagrams shown may not be drawn to scale.

• No calculators, protractors or electronic devices are allowed to use.

• Answers must be in pencil, blue or black ball-point pen.

• All papers shall be collected at the end of the test.

JUNIOR SECTION

1. QUESTION

Section A. There are 5 questions. Select and circle the right solution.

Q1. Let x and y be real numbers satisfying the conditions $x+y=4$ and $xy=3$. Compute the value of $(x-y)^2$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 9. **E.** None of above.

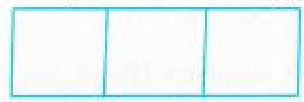
Q2. Let $f(x)$ be a polynomial such that

$$2f(x)+f(2-x)=5+x$$

for any real number x. Find the value of $f(0)+f(2)$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3. **E.** 1.

Q3. There are 3 unit squares in a row as shown in the figure below. Each side of this figure is painted by one of three colors: Blue, Green or Red. It is known that for any square, all the three colors are used and no two adjacent sides have the same color. Find the number of possible colorings.

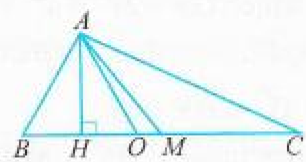


A. 48. **B.** 96. **C.** 108. **D.** 192. **E.** 216.

Q4. Find the number of distinct real roots of the following equation $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}=40$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3. **E.** 4.

Q5. Let ABC be an acute triangle: $AB=3$ and $AC=4$. Suppose that AH, AO and AM are the altitude, the bisector and the median derived from A, respectively. If $HO=3\times OM$, then the length of BC is



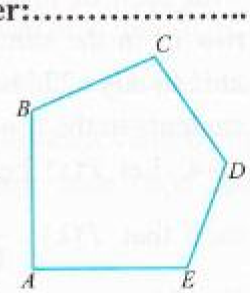
A. 3. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{9}{2}$. **E.** 5.

Section B. There are 5 questions. Find in your answer in the space provided at the end of each question.

Q6. *Nam* spent 20 dollars for 20 stationery items consisting of books, pens and pencils. Each book, pen, and pencil costs 3 dollars, 1.5 dollars and 0.5 dollar, respectively. How many dollars did *Nam* spend for books?

Answer:.................

Q7. Suppose that $ABCDE$ is a convex pentagon with $\widehat{A}=90^0, \widehat{B}=105^0, \widehat{C}=90^0$, and $AB=2, BC=CD=DE=\sqrt{2}$. If the length of AE is $\sqrt{a}-b$ where a, b are integers, what is the



value of $a+b$?

Answer:………………..

Q8. Let m be a positive integer such that

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{13}=\frac{m}{13!}.$$

Find the remainder when m is divided by 7.

Answer:………………..

Q9. There are three polygons and the area of each one is 3. They are drawn inside a square of area 6. Find the greatest value of a such that among those three polygons, we can always find two polygons so that the area of their overlap is not less than a.

Answer:………………..

Q10. Let $T=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{5}y^2+\frac{1}{6}z^2$, where x, y, z are real numbers such that $1\le x,y,z\le 4$ and $x-y+z=4$.

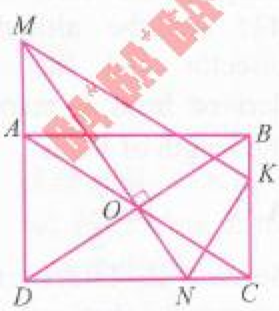
Find the smallest value of $10\times T$.

Answer:………………..

Section C. Answer the following 5 questions. Present your detailed solution in the space provided.

Q11. Find all pairs of nonnegative integers $(x; y)$ for which $(xy+2)^2=x^2+y^2$.

Q12. Let $ABCD$ be a rectangle with $45^0<\widehat{ADB}<60^0$. The diagonals AC and BD intersect at O. A line passing through O and perpendicular to BD meets AD and CD at M, N respectively. Let K be a point on side BC such that $MN \parallel AC$. Show that $\widehat{MKN}=90^0$.



Q13. A competition room of HOMC has $m\times n$ students where m, n are integers larger than 2. Their seats are arranged in m rows and n columns. Before starting the test, every students take a handshake with each of his/her adjacent students (in the same row or in the same column). It is known that, there are totally 27 handshakes. Find the number of students in the room.

Q14. Let $P(x)$ be a polynomial with degree 2017 such that $P(k)=\frac{k}{k+1}, \forall k=0,1,2,...,2017$. Calculate $P(2018)$.

Q15. Find all pairs of prime numbers $(p; q)$ there is a positive integer m satisfying $\frac{pq}{p+q}=\frac{m^2+6}{m+1}$.

2. JUNIOR SECTION'S ANSWERS AND SOLUTION

Q1. We have $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=16-12=4$. The answer is C.

Q2. We have
• $x=0\Rightarrow 2f(0)+f(2)=5$ (1)
• $x=2\Rightarrow 2f(2)+f(0)=7$ (2)

Then (1) + (2) gives: $f(0)+f(2)=\frac{5+7}{3}=4$.

The answer is A.

Q3. There are 2 ways to choose the 2 sides which have the same color in the first square. So the first square has $2.3!=12$ colorings. For the second square: the color of the left side is fixed, if the left side and the right side have the same color then there are $2!=2$ colorings for the remaining sides; if the upper side and the lower side have the same color, one also has $2!=2$ colorings for the remaining sides. So the second square has 4 colorings. The argument is similar for the next square. Answer: $12\times 4\times 4=192$. The answer is D.

Q4. $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=40 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}=40$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\frac{x^2}{x+3}-40=0$$

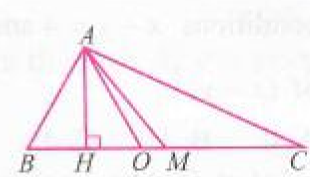
$$\Rightarrow t^2+6t-40=0 \ \left(t=\frac{x^2}{x+3}\right) \Rightarrow (t-4)(t+10)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ t=-10 \Rightarrow \text{no real root} \end{array}\right.$$

So, the equation has 2 real root. The answer is C.

Q5. Let $CH=x$, $BC=a$.

By Pythagoras'theorem,



$$\begin{cases} x^2+AH^2=16 \\ (a-x)^2+AH^2=9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2ax-a^2=7 \Rightarrow x=\frac{a^2+7}{2a}.$$

So $HM = CH - CM = \dfrac{a^2+7}{2a} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{7}{2a}\cdot$

By a property of the bisector AO, one has $\dfrac{CO}{BO} = \dfrac{4}{3}$, then $CO = \dfrac{4a}{7}$, hence

$$OM = CO - CM = \frac{4a}{7} - \frac{a}{2} = \frac{a}{14}\cdot$$

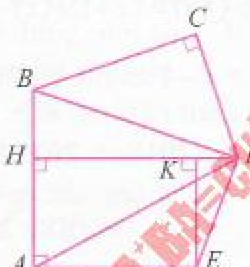
Since $HM = 4\times OM$, one has $\dfrac{7}{2a} = \dfrac{4a}{14} = \dfrac{2a}{7}$, hence $a = \dfrac{7}{2}\cdot$ The answer is B.

Q6. Let a, b, c the number of books, pens and pencils respectively. Then $a+b+c=20$ and $3a+1.5b+0.5c=20$.

$\Rightarrow 5a+2b=20 \Rightarrow b \vdots 5,\ 0<b<10 \Rightarrow a=2; b=5; c=13.$

The answer is $2\times 3 = 6$.

Q7. Draw $DH \perp AB, EK \perp DH\ (H \in AB,\ K \in DH)$. Since BCD is a right-angled isosceles triangle, one has $BD = 2$. Also $\widehat{ABD} = 105^0 - 45^0 = 60^0$, so ABD is equilateral triangle with the side length is 2, hence $DH = \sqrt{3}$. Now $AHKE$ is a rectangle, then $EK = HA = 1$.



In triangle DKE, $\widehat{DKE} = 90^0$, $DE = \sqrt{2}, EK = 1$, these implies that $KD = 1$. So

$$AE = HD - KD = \sqrt{3} - 1.$$

The answer is $3 + 1 = 4$.

Q8. We have $m = 13! + \dfrac{13!}{2} + ... + \dfrac{13!}{12} + \dfrac{13!}{13}$

$$\Rightarrow m \equiv \frac{13!}{7} \equiv 1.2.3...6.8...13 \equiv (1.2.3...6)^2 \pmod 7$$

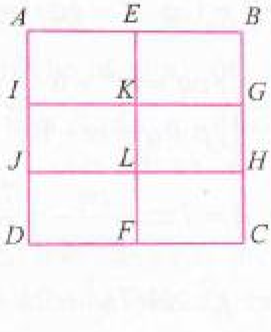
$$\equiv 720^2 \pmod 7$$

$$\equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 7$$

The answer is 1.

Q9. Denote by S_i the area of the polygon i with $i = \overline{1,3}$;

S_{ij} the area of the overlap of polygons i and j with $1 \le i < j \le 3$;



S_{123} the area of the overlap of these 3 polygons; S the covering area of these 3 polygons. Then

$$\begin{aligned} 6 \ge S &= S_1 + S_2 + S_3 - S_{12} - S_{13} - S_{23} + S_{123} \\ &= 9 + S_{123} - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) \\ &\ge 9 - (S_{12} + S_{13} + S_{23}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{12} + S_{23} + S_{13} \ge 3.$$

There exists $S_{ij} \ge 1$. Otherwise, we have the following example, where

$S_{ABGKLJ} = S_{IKLHCD} = S_{EBCF} = 3$ and $S_{12} = S_{13} = S_{23} = 1$.

The greatest value of a is 1.

Q10. We have $(x-2)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \ge 4x - 4$

$$(y-1)(4-y) \ge 0 \Rightarrow -y^2 \ge -5y + 4$$

$$(z-3)^2 \ge 0 \Rightarrow z^2 \ge 6z - 9$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y^2 + \frac{1}{6}z^2 \ge \frac{1}{4}(4x-4) + \frac{1}{5}(-5y+4)$$

$$+\frac{1}{6}(6z-9) = x - y + z - \frac{17}{10} = \frac{23}{10}$$

$\Rightarrow 10\times T \ge 23 \Rightarrow \min(10\times T) = 23$, when $x=2, y=1, z=3$.

Q11. $(xy+2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (xy+3)^2 - 5 = (x+y)^2$

$$\Leftrightarrow (xy+3)^2 - (x+y)^2 = 5$$

$\Leftrightarrow (xy + x + y + 3)(xy - x - y + 3) = 5.$

Since x and y are nonnegative integers then

$$xy + x + y + 3 \ge 3 \Rightarrow \begin{cases} xy + x + y + 3 = 5 \\ xy - x - y + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

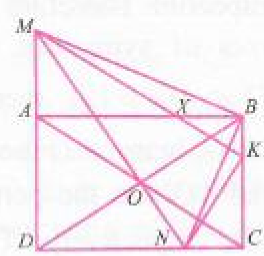
$\Rightarrow (x, y) \in \{(0,2); (2,0)\}.$

Q12. ***Solution 1***

Let $AB \cap MK = \{X\}$. By symmetry, $\widehat{MBN} = \widehat{MDN} = 90^0$.

So $\widehat{MBA} = \widehat{NBC}$ then

$$\Delta BAM \backsim \Delta BCN.$$



Therefore

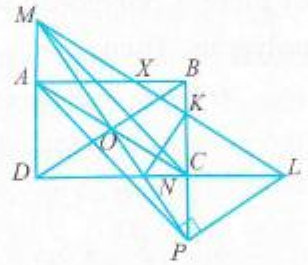
$$\frac{CN}{AM} = \frac{BC}{BA} = \frac{KC}{XA}$$

(since $XK\ //\ AC$). Hence

$\Delta KCN \backsim \Delta XAM \backsim \Delta XBK$. This implies that $\widehat{XKB} = \widehat{KNC}$. But $\widehat{KNC} + \widehat{CKN} = 90^0$ then

$$\widehat{XKB} + \widehat{CKN} = 90^0 \text{ thus } \widehat{XKN} = 90^0.$$

***Solution* 2**



Let $MK \cap CD = \{L\}$,

$MK \cap AB = \{X\}$,

$MN \cap BC = \{P\}$. One has $AMKC$, $AMCP$, $AXLC$ are parallelograms, hence

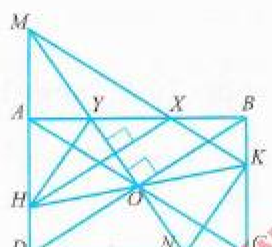
$$CK = AM = CP, AX = CL.$$

By Thales'theorem,

$$\frac{CL}{CP} = \frac{AX}{CK} = \frac{AB}{BC} = \frac{CD}{BC}.$$

Therefore $LP \parallel BD$, but $MN \perp BD$ then $\widehat{NPL} = 90^0$. Since $CK = CP$, the points K and P are symmetric about NL. This imples that $\widehat{NKL} = \widehat{NPL} = 90^0$ or $\widehat{MKN} = 90^0$.

***Solution* 3.** Let $MK \cap AB = \{X\}, OK \cap AD = \{H\}$, $MO \cap AB = \{Y\}$. One has $HYKN$, $DHBK$ are parallelograms, hence



$HY \parallel NK$, $BK = DH$.

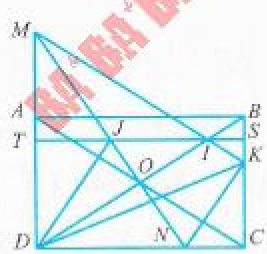
Since $MK \parallel AC$ and

$$\frac{XB}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{DH}{AD}.$$

Then $HX \parallel BD$, but $MN \perp BD$ then $MN \perp HX$.

In triangle MHX, $XA \perp HM$, $MO \perp HX$, so Y is the orthocenter. This implies that $HY \perp MX, NK \perp MK$.

***Solution* 4.** Let $DB \cap MK = \{I\}$.

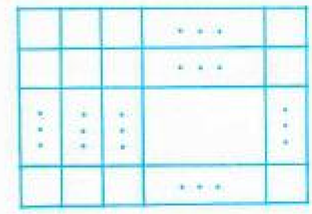


Let T, S be the midpoint of MD, BK, respectively. Since $MK \parallel AC$, one has $\widehat{IKB} = \widehat{OCB}$ $= \widehat{IBK} = \widehat{IDM} = \widehat{IMD}$.

So $MBKD$ is an isosceles trapezoid. Therefore S, I, T are collinear, ST is the axes of symmetry of $MBKD$ and $TS \parallel CD$. Let $TS \cap MN = \{J\}$ then IJ is the mid-line of triangle MDN, hence J is the midpoint of MN. Note that TS and MN are the perpendicular bisectors of BK and BD, respectively. Therefore $JK = JB = JD$. Since $\widehat{MDN} = 90^0$, one has $JD = \dfrac{MN}{2}$, then $KJ = \dfrac{MN}{2}$ and it follows that $\widehat{MKN} = 90^0$.

***Solution* 5.** (*Use inscribed quadrilateral*) It is similar to solution 1, one has $\widehat{MBN} = \widehat{MDN} = 90^0$. Hence the quadrilateral $MBND$ is cyclic. It similar to solution 4, $MBKD$ is an isosceles trapezoid, so the quadrilateral $MBKD$ is cyclic. Therefore M, B, K, N, D are concyclic. Then $\widehat{MKN} = \widehat{MBN} = 90^0$.

Q13.



Consider a $m \times n$ grid of mn points, each point is a student. Each handshake of two students can be treated as a segment joining two corresponding points. Hence the number of segments is

$$27 = (m-1) \times n + (n-1) \times m \text{ or } 2mn - m - n = 27.$$

Therefore $4mn - 2m - 2n + 1 = 55$ then

$$(2m-1)(2n-1) = 55 = 5 \times 11.$$

This implies that (m, n) is a permutation of $(3,6)$. So the number of student is $3 \times 6 = 18$.

Q14. Let $Q(x) = (x+1)P(x) - x \Rightarrow \deg Q = 2018$ and

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = ... = Q(2017) = 0.$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x+1)P(x) - x = kx(x-1)(x-2) \times ... \times (x-2017).$$

- $x = -1 \Rightarrow 1 = k \times 2018! \Rightarrow k = \dfrac{1}{2018!}$.
- $x = 2018 \Rightarrow 2019P(2018) - 2018$

$$= \frac{1}{2018!} \times 2018 \times 2017 \times ... \times 1 = 1 \Rightarrow P(2018) = 1.$$

Q15. $\dfrac{pq}{p+q} = \dfrac{(m+1)(m-1)+7}{m+1} = m - 1 + \dfrac{7}{m+1}$.

Case 1. If $p = q$, we have $p = 2(m-1) + \dfrac{14}{m+1}$.

So, we find a positive integer m such that p is an integer and from that to obtain p as prime number $\Rightarrow m = 1$ and $p = q = 7$.

Case 2. If $p \neq q \Rightarrow \gcd(pq; p+q) = 1$. Let

$$d = \text{gdc}(m^2 + 6; m+1) \Rightarrow d \in \{1; 7\}$$

- $d = 1 \Rightarrow d = \text{gdc}(m^2 + 6; m+1) = \text{gdc}(pq; p+q) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} pq = m^2 + 6 \\ p + q = m + 1 \end{cases} \Rightarrow (m+1)^2 \geq 4(m^2 + 6) \Rightarrow m \in \varnothing.$$

- $d = 7 \Rightarrow \dfrac{pq}{p+q} = \dfrac{7k^2 - 2k + 1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow k^2 \geq 4(7k^2 - 2k + 1) \Rightarrow k \in \varnothing.$$

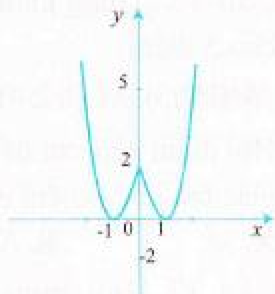
The answer is $(p; q) = (7;7)$.

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Đồ thị bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

B. $y = 2(x^2 - 1)^2$.

C. $y = \left|x^3\right| - 3|x| + 2$.

D. $y = x^2 - 2|x|^2 + 2$.

Câu 2. Cho 2 mặt phẳng phân biệt α và β và đường thẳng a. Xét các mệnh đề sau đây:

I) $\begin{cases} \alpha \perp a \\ \beta \perp a \end{cases} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$; II) $\begin{cases} \alpha \,//\, a \\ \beta \,//\, a \end{cases} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$;

III) $\begin{cases} a \perp \beta \\ \alpha \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \,//\, \alpha$; IV) $\begin{cases} \alpha \,//\, \beta \\ \alpha \perp a \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta$.

Hỏi trong 4 mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 3. Cho hai số thực a, b khác 0 và hàm số $y = \ln(2018 + ax) + \ln(2018 + bx)$. Tính $p = ab$, biết $y'(1) = 1$.

A. $p = 1$. **B.** $p = 2018$.

C. $p = \dfrac{1}{2018}$. **D.** $p = 2018^2$.

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng (xOy) cắt mặt cầu (S) một thiết diện là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$. **B.** $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11 \\ z = 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 16 \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 5. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$. $F(x)$ là hàm số nào dưới đây?

A. $F(x) = \dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

B. $F(x) = \sin^3 x \cos x + C$.

C. $F(x) = -\sin x \cos^3 x + C$.

D. $F(x) = \dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Câu 6. Tính số phức $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2018} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2018}$ có kết quả là:

A. $z = 2$. **B.** $z = -2$. **C.** $z = 2i$. **D.** $z = 1 + i$.

Câu 7. Cho ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì ba giao tuyến của chúng sẽ có mấy vị trí tương đối xảy ra?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8. Cho $S_1 = (2 + \sqrt{3})^{2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 2018^2}$;

$S_2 = (2 - \sqrt{3})^{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 2017^2}$.

Kết quả $\log_{(26 + 15\sqrt{3})}(S_1.S_2)$ bằng:

A. 679057. **B.** 579067. **C.** 679047 **D.** 470071.

Câu 9. Cho hình nón có đường sinh gấp 3 lần bán kính đường tròn đáy thì tỷ số k giữa đường cao và đường sinh của nó là:

A. $k = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $k = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $k = \dfrac{1}{3}$. **D.** $k = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Xét các kết quả giới hạn sau:

I. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = 1$; II. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = -1$;

III. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\left|x^2 - 3x + 2\right|}{x - 1} = -1$; IV. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\left|x^2 - 3x + 2\right|}{x - 1} = 1$.

Kết quả nào sau đây đúng?

A. I và III. **B.** II và III.

C. II và IV. **D.** I và IV.

Câu 11. Cho $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$. Khẳng định đúng là:

A. $I \in (-1; 3)$. **B.** $I \in (-2; 0)$.

C. $I \in (-7; -5)$. **D.** $I \in [3; 8]$.

Câu 12. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1, z_2 \neq 0$ và $z_2^2 - 2z_1z_2 + 2z_1^2 = 0$.

Tính $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$.

A. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{3}$. B. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 2\sqrt{2}$.

C. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. D. $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}$.

Câu 13. Để giải phương trình: $2^x(3x^2-2) = 2x$ bạn *Việt* tiến hành giải 4 bước sau:

Bước 1. Ta nhận thấy phương trình không có nghiệm $x=0$ nên phương trình tương đương $\dfrac{3x^2-2}{2x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Bước 2. Ta nhận thấy phương trình có nghiệm $x=1$, vì thế $x = 1$ vào phương trình ta có $\dfrac{3.1^2-2}{2.1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1$ đúng.

Bước 3. Ta có vế phải $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (vì cơ số $\dfrac{1}{2} < 1$); vế trái $y = \dfrac{3x^2-2}{2x}$ có $y' = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \neq 0,$ nên vế trái là hàm số đồng biến trên $(-\infty;0) \vee (0;+\infty)$.

Bước 4. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Bạn *Việt* giải hoàn toàn đúng.

B. Bạn *Việt* giải sai từ bước 2.

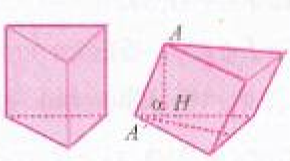
C. Bạn *Việt* giải sai từ bước 3.

D. Bạn *Việt* giải sai từ bước 4.

Câu 14. Có bao nhiêu số thực a để $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx = 1$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15. Cho một lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Người ta ấn (đẩy) lăng trụ đó trở thành một lăng trụ xiên (*vẫn giữ nguyên đáy như hình vẽ*) để thể tích của nó giảm đi một nửa lúc ban đầu. Hỏi cạnh bên của lăng trụ xiên lúc này tạo với đáy một góc α bằng bao nhiêu?



A. $\alpha = 60^0$. B. $\alpha = 30^0$.

C. $\alpha = 45^0$. D. $\alpha = 40^0$.

Câu 16. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm

$M(1;2;3), N(-1;2;0), P(-1;4;3), Q(0;0;6), R(0;2;4)$.

Hỏi điểm nào sau đây không thuộc mặt phẳng của tứ giác tạo bởi 4 điểm còn lại?

A. M. B. N. C. P. D. R.

Câu 17. Hỏi trong khoảng $(0;3\pi)$ có bao nhiêu điểm để hàm số $y = \cos x + \sin x$ đạt cực đại?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $\log_{2018}|x| + x^2 = 2017$ là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19. Cho số thực a và hàm số

$y = \sqrt{ax^2+2018x+2019} - \sqrt{ax^2+2017x+2018}$.

Số tiệm cận nhiều nhất (nếu có) của đồ thị hàm số trên là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 20. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(3;4;1)$, $B(-3;-2;-2)$. Đường thẳng qua A và B cắt mặt phẳng (xOy) tại M. Điểm M chia đoạn AB theo tỷ số k bằng:

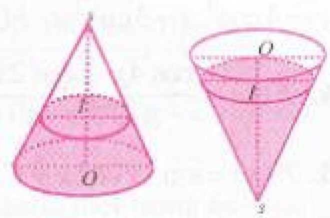
A. $k = -\dfrac{1}{2}$. B. $k = 2$. C. $k = -2$. D. $k = \dfrac{1}{2}$.

Câu 21. Cho góc tù x thỏa mãn: $14\cos^2 x + \sin 2x = 2$. Khi đó $\cos x$ bằng:

A. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 22. Cho cái phễu đựng nước hình nón có trục SO như hình vẽ. Cho trục SO thẳng đứng, từ nắp đỉnh S ta đổ một lượng nước vào phễu để nước dâng lên vị trí I thuộc trục SO và giả sử rằng khi ta lật ngược phễu lại nhưng luôn vẫn giữ nguyên trục SO thẳng đứng thì mực nước vẫn ở vị trí ban đầu



I của nó. Tính tỉ số $k = \dfrac{SI}{SO}$.

A. $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $k = \dfrac{1}{2}$.

Câu 23. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 2018$, $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2017$. Giá trị của $I = \int_{-1}^{0} f(x)dx$ bằng:

A. $I = 2$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -1$.

Câu 24. Cho 3 số thực a, b, c đều lớn hơn 1 thỏa mãn: $\log_a b.\log_a c < \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$. Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_a x + \log_b x > \log_c x$ là:

A. $x < 1$. **B.** $x > 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$. **D.** $0 < x < 1$.

Câu 25. Tập hợp nào dưới đây chứa số thực a để

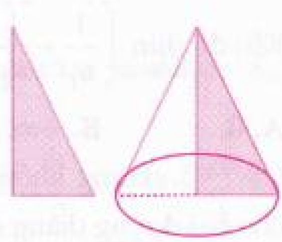
$$I = \int_0^1 \frac{x}{\cos^2(ax)}dx = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\ln 2 \ ?$$

A. $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 26. Lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số đôi một phân biệt. Tính xác suất p để số được lấy không lớn hơn 2018.

A. $p = \dfrac{85}{756}$. **B.** $p = \dfrac{510}{1134}$. **C.** $p = \dfrac{509}{4536}$. **D.** $p = \dfrac{84}{756}$.

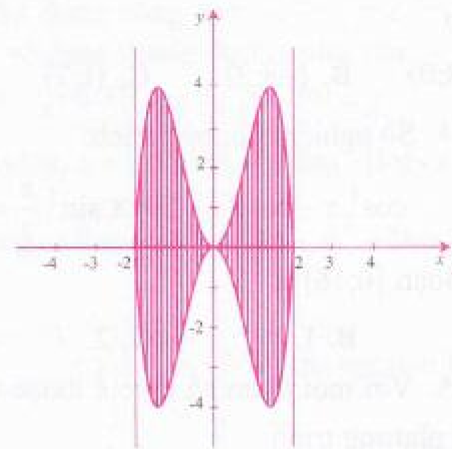
Câu 27. Gọi T là tập hợp các tấm bìa có hình dạng tam giác vuông có cạnh huyền không đổi bằng a. Lấy một tấm bìa tùy ý trong T chọn một cạnh bên làm trục rồi quay chung quanh tấm bìa đó với trục đã chọn tạo thành một hình nón (như hình vẽ bên). Thể tích lớn nhất $V_{\max}$ theo a của hình nón tạo thành bằng:



A. $V_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{27}a^3$. **B.** $V_{\max} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}a^3$.

C. $V_{\max} = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{27}a^3$. **D.** $V_{\max} = \dfrac{2\pi}{9}a^3$.

Câu 28. Ông *Rich* muốn gắn những viên kim cương nhỏ vào một mô hình như cánh bướm theo hình vẽ bên dưới. Để tính diện tích mô hình đó ông áp nó vào một hệ trục tọa độ như hình vẽ thì nhận thấy rằng diện tích mô hình đó là phần giao (tô bóng) giữa hai hàm số trùng phương $y = f(x)$, $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục Ox. Hỏi ông *Rich* đã gắn bao nhiêu viên kim cương trên mô hình đó biết rằng mỗi đơn vị vuông trên mô hình đó mất 15 viên kim cương ?



A. 256. **B.** 128. **C.** 64. **D.** 265.

Câu 29. Cho a, b là các số thực thỏa mãn

$$\int_0^1 \left(\frac{2abx + a + b}{(1+ax)(1+bx)}\right)dx = 0.$$

Giá trị của $S = ab + a + b$ bằng:

A. $S = 0, S = 1$. **B.** $S = -2, S = 0$.

C. $S = 1, S = -2$. **D.** $S = -2, S = 1$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \log_{2017}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$. Tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + \cdots + f\left(\frac{2018}{2019}\right) \text{ bằng:}$$

A. $S = 1008$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 1009$.

Câu 31. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n(n+1)},\ n = 1, 2, 3, ...$$

Số hạng x_{2018} bằng:

A. $x_{2018} = \dfrac{4036}{2018}$. **B.** $x_{2018} = \dfrac{4035}{2018}$.

C. $x_{2018} = \dfrac{4037}{2018}$. **D.** $x_{2018} = \dfrac{4034}{2018}$.

Câu 32. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;-2)$. Tìm trên mặt phẳng (P): $x + y + z + 2 = 0$ điểm M sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ có giá trị nhỏ nhất?

A. $M\left(-\frac{5}{18};-\frac{13}{9};-\frac{5}{18}\right)$. **B.** $M\left(-\frac{5}{18};-\frac{5}{18};-\frac{13}{9}\right)$.

C. $M\left(-\frac{13}{9};-\frac{5}{18};-\frac{5}{18}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{1}{9};-\frac{1}{9};-\frac{16}{9}\right)$.

Câu 33. Tập nào dưới đây có chứa số thực m để diện tích giới hạn bởi đường cong $(C): y = x^3 - 3x$ và đường thẳng $(d): y = mx$ có diện tích bằng 8 (đvdt)?

A. $(-8;0)$. **B.** $(-8;3)$. **C.** $(1;7)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 34. Số nghiệm phương trình:

$$\cos^4 x - \cos 2x + 2018.\sin^2\frac{x}{3} = 0$$

trong đoạn $[0;16]$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 35. Với mọi tham số thực k thuộc tập nào dưới đây để phương trình

$$\log_2^2\left(\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right) - 4\log_2(\cos x + \sin x) - 2 - 4k = 0$$

có nghiệm ?

A. $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right)$. **B.** $(-\infty;-1]$.

C. $(-2;0)$. **D.** $(0;2018)$.

Câu 36. Cho các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-1+2i| = \sqrt{5}$. Khi đó số phức $w = z+1+i$ có môđun lớn nhất $|w|_{Max}$ bằng:

A. $|w|_{Max} = 20$. **B.** $|w|_{Max} = 2\sqrt{5}$.

C. $|w|_{Max} = \sqrt{5}$. **D.** $|w|_{Max} = 5\sqrt{2}$.

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAB* là tam giác đều và vuông góc với đáy *ABCD*. Tính thể tích khối nón có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác *SAB* và đỉnh của khối nón nằm trên mặt phẳng (*SDC*).

A. $V = \frac{2a^3}{21}$. **B.** $V = \frac{2\pi a^3}{27}$.

C. $V = \frac{\pi a^3}{21}$. **D.** $V = \frac{2\pi a^3}{9}$.

Câu 38. Hỏi trong khoảng $(0;\ 2018)$ phương trình: $\tan x = 2018^{\cos 2x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 322. **B.** 642. **C.** 323. **D.** 643.

Câu 39. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ có đồ thị (*C*). Hỏi trên đường thẳng $x = 1$ tồn tại mấy điểm để tại đó kẻ đến (*C*) có đúng hai tiếp tuyến phân biệt?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 40. Một đề thi trắc nghiệm môn toán có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án chọn, trong đó có 1 phương án đúng, chọn phương án đúng thì câu đó được 0,2 điểm. Trong thời gian cho phép 90 phút bạn *Lân* đã làm bài chắc chắn đúng 40 câu, 10 câu còn lại bạn *Lân* chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất *p* để bạn *Lân* có đúng 9 điểm.

A. $p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 . \left(\frac{3}{4}\right)^5 .C_{10}^5$. **B.** $p = \left(\frac{1}{4}\right)^5 . \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

C. $p = \frac{1}{4}.\frac{3}{4}C_{10}^5$. **D.** $p = \frac{1}{4}.C_{10}^5$.

Câu 41. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, lập phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm $M(1;-1;1)$, $N(0;-1;0)$ và cắt hình cầu

$$(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

theo thiết diện là một hình tròn có diện tích $S = \pi$.

A. $2x + y - 2z + 1 = 0$, $3x + y - 3z + 1 = 0$.

B. $3x - y - 3z - 1 = 0$, $2x - y - 2z - 1 = 0$.

C. $2x + y - 2z + 1 = 0$, $2x - y - 2z - 1 = 0$.

D. $3x + y - 3z + 1 = 0$, $3x - y - 3z - 1 = 0$.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \quad \text{với } n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng chéo nhau

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \text{ và } (d_2): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

Lập phương trình mặt phẳng (*P*) sao cho khoảng cách từ (d_1) đến (*P*) gấp hai lần khoảng cách từ (d_2) đến (*P*).

A. $x - 2y + z + 4 = 0$, $x + 2y + z + \frac{4}{3} = 0$.

B. $x+2y+z+4=0,\ x+2y+z+\frac{4}{3}=0.$

C. $x-2y+z+4=0,\ x-2y+z+\frac{4}{3}=0.$

D. $x+2y+z+4=0,\ x-2y+z+\frac{4}{3}=0.$

Câu 44. Cho hàm số $y=x^3-2x^2-(m-1)x+m.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số và hai trục Ox, Oy có diện tích không lớn hơn 1 (đvdt).

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 45. Cho hai số phức z_1, z_2 đồng thời thỏa mãn hai điều kiện

$$|z-1|=\sqrt{34},\quad |z+1+mi|=|z+m+2i|$$

(trong đó $m\in\mathbb{R}$) và sao cho $|z_1-z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{130}$. **C.** 2. **D.** 10.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)$ có đồ thị như vẽ. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình

$$f(x^2)=m$$

(với m là số thực) là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 47. Cho số thực $x>0$. Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của biểu thức $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ biết rằng

$$C_n^{k-2}+2C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{2018C_{n+1}^{k-1}}{k}$$

với k, n là các số nguyên dương thỏa mãn $2\le k\le n$.

A. C_{2016}^{1008}. **B.** $C_{2018}^{1009}.2^{1009}$.

C. $C_{2016}^{1008}.2^{1008}$. **D.** $C_{2014}^{1007}.2^{1007}$.

Câu 48. Mồng 3 tết Mậu Tuất vừa rồi ông *Đại Gia* đến chúc tết và lì xì cho 3 anh em *Tôi*. Trong ví của ông *Đại Gia* chỉ còn có 4 tờ mệnh giá 200000 đồng và 5 tờ mệnh giá 100000 đồng được sắp xếp một cách lộn xộn trong ví. Ông gọi ba anh em tôi đứng xếp hàng có thứ tự, anh *Cả* đứng trước lì xì trước, anh *Hai* đứng sau lì xì sau và *Tôi* là thằng *Út* đứng sau cùng nên lì xì sau cùng. Hỏi xác suất p bằng bao nhiêu để Tôi nhận tiền lì xì có mệnh giá lớn nhất, biết rằng ông *Đại Gia* lì xì bằng cách rút ngẫu nhiên cho anh em *Tôi* mỗi người *chỉ một tờ giấy tiền* trong túi của ông?

A. $p=\frac{4}{9}$. **B.** $p=\frac{25}{63}$. **C.** $p=\frac{1}{9}$. **D.** $p=\frac{1}{21}$.

Câu 49. Cho hai số thực dương a,b thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $\ln a.(1-\ln b)=\ln b.\sqrt{4-\ln^2 a}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\log_b a$. Giá trị của $M+m$ bằng:

A. $2(\sqrt{2}-1)$. **B.** $2(\sqrt{2}+1)$.

C. $2(1-\sqrt{2})$. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 50. Cho họ đường cong

$$(C_m): y=(m+1)x^3-(3m-1)x^2-x+3m,$$

với mọi tham số thực m tùy ý, xét các khẳng định sau đây:

I. (C_m) luôn không đi qua điểm cố định nào.

II. (C_m) luôn đi qua 1 điểm cố định nằm trên parabol: $y=4x^2-x-3$.

III. (C_m) luôn đi qua 2 điểm cố định nằm trên đường cong: $y=2x^3-2x^2-x-3$.

IV. (C_m) luôn đi qua 3 điểm cố định là ba đỉnh của tam giác nhận $G(1;8)$ làm trọng tâm.

Hỏi trong bốn khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

1C	2D	3B	4A	5A	6C	7A	8D	9B	10D
11B	12A	13B	14A	15C	16C	17C	18C	19A	20C
21D	22A	23A	24D	25A	26B	27C	28A	29A	30D
31D	32C	33C	34D	35C	36C	37A	38D	39B	40B
41B	42C	43B	44B	45D	46D	47D	48D	49B	50C

Câu 1. Ký hiệu S là tổng đã cho, thế thì

$$S=\sum_{i=0}^{10}\frac{x^{10-i}}{(10-i)!}\cdot\frac{(1-x)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{10}\frac{1}{10!}C_{10}^{i}x^{10-i}(1-x)^i$$
$$=\frac{1}{10!}[x+(1-x)]^{10}=\frac{1}{10!}.$$

Câu 2. Ta có $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}$.
Xét dấu y', suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 3. Từ PT đã cho suy ra $m\ge 0$, bình phương hai vế ta được

$$2+\sin x+\cos x+2\sqrt{1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x}=m^2.$$

Đặt $\sin x+\cos x=t$ $(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$ thì $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

PT đã cho trở thành $2+t+\sqrt{2t^2+4t+2}=m^2$.
Xét hàm

$$f(t)=2+t+\sqrt{2t^2+4t+2}=2+t+\sqrt{2}\,|t+1|$$
$$=\begin{cases}(1-\sqrt{2})t+(2-\sqrt{2}) & \text{nếu } -\sqrt{2}\le t\le -1,\\ (1+\sqrt{2})t+(2+\sqrt{2}) & \text{nếu } -1\le t\le\sqrt{2}.\end{cases}$$

Do các nhánh của hàm $f(t)$ chỉ là những hàm tuyến tính bậc nhất nên

• Với $-\sqrt{2}\le t\le -1$ thì $f(-1)\le f(t)\le f(-\sqrt{2})$ hay
$$1\le f(t)\le 4-2\sqrt{2}.$$

• Với $-1\le t\le\sqrt{2}$ thì $f(-1)\le f(t)\le f(\sqrt{2})$ hay
$$1\le f(t)\le 4+2\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra $1\le f(t)\le 4+2\sqrt{2},\ \forall t\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

Vậy PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le m\le\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Câu 4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Mặt phẳng (α) thỏa mãn yêu cầu đề bài sẽ nhận $\overrightarrow{AH}$ làm vectơ pháp tuyến.

$H\in d\Rightarrow H(2-t,-1+t,1+t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(-1-t,\,2t,1+t)$

d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;2;1)$. Do

$AH\perp d$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}\cdot$ Khi đó

$$\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}(1;1;-1)$$

Vậy $(\alpha): x+y-z=0$.

Câu 5. Điều kiện cần để có $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là x^2+ax+b chia hết cho $x-3$, hay $x=3$ là một nghiệm của $f(x)=x^2+ax+b$. Từ đó $9+3a+b=0$
$\Rightarrow f(x)=x^2+ax-3a-9=(x-3)(x+a+3)$.
Khi đó ta có

$$3=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+a+3)=a+6\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=0\end{cases}.$$

Câu 6. Từ giả thiết bài toán ta có:

$$x_n=(x_1+x_2+...+x_n)-(x_1+x_2+...+x_{n-1})$$
$$=\frac{3n(n+3)}{2}-\frac{3(n-1)(n+2)}{2}=3(n+1).$$

Từ đó suy ra $x_{n-1}=3n$ và $x_n-x_{n-1}=3$. Điều này chứng tỏ (x_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 3.

Câu 7. Từ giả thiết ta có:

$$\bar{z}=\frac{\omega-2i}{1-i}\Rightarrow|\bar{z}|=\frac{|\omega-2i|}{|1-i|}=\frac{|\omega-2i|}{\sqrt{2}}\Rightarrow|\omega-2i|=2\sqrt{2}.$$

Điều này chứng tỏ tập hợp điểm biểu diễn số phức ω là tâm đường tròn tâm $2i$ bán kính $2\sqrt{2}$.

Câu 8. Thể tích khối tứ diện có đáy là ΔMNP và đỉnh là một điểm bất kì thuộc mp(ABC) bằng V_{SMNP}. Mà $\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{SMNP}=\frac{V}{8}\cdot$

Câu 9. Ta có $f'(x)=mx^2-2(m-2)x+1$. Điều kiện cần và đủ để $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất là

$$\begin{cases}m\ne 0\\ \Delta'=(m-2)^2-m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ m^2-5m+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=4\end{array}\right..$$

Câu 10. Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $G(1;3;-1)$.
Khi đó $MA^2+MB^2+MC^2$

$$=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$$
$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

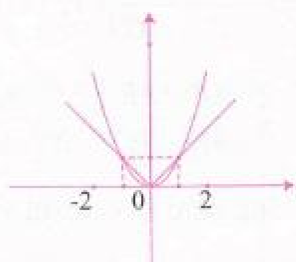
Từ đây suy ra $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Mà M thuộc mp(Oxy) nên M

chính là hình chiếu vuông góc của G trên (Oxy). Vậy $M(1;3;0)$.

Câu 11. Kí hiệu các lá thư a, b, c tương ứng với các phong bì A, B, C. Số cách bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì là $3! = 6$. Để xảy ra tình huống không có lá thư nào được bỏ đúng phong bì thì a có hai lựa chọn (vào B hoặc C) và hai lá thư còn lại chỉ có một cách bố trí. Do vậy xác suất để không có lá thư nào được bỏ đúng phong bì là $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Từ đó suy ra xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 12. Gọi V là thể tích vật thể cần tính. Từ hình vẽ ta có:

$$V = \pi \int_0^1 (y - y^2)dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$



Câu 13. Trước hết ta có nhận xét như sau: ba số nguyên có tổng chia hết cho 3 khi và chỉ khi ba số đó có cùng số dư hoặc có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 3. Ta chia tập $\{1, 2, \ldots, 10\}$ thành 3 tập con rời nhau $A_0 = \{3,6,9\}, A_1 = \{1,4,7,10\}, A_2 = \{2,5,8\}$. Số cách chọn ba số thuộc cùng một tập $A_i (i = 0,1,2)$ là $C_3^3 + C_4^3 + C_3^3$. Số cách chọn ba số mà mỗi số ở mỗi tập khác nhau là $C_3^1 C_3^1 C_4^1$. Do đó xác suất để rút được ba thẻ có tổng số chia hết cho 3 bằng $\frac{2C_3^3 + C_4^3 + C_3^1 C_3^1 C_4^1}{C_{10}^3}$.

Câu 14. Áp dụng công thức Leibniz: nếu $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ thì $g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$ ta được $g'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

Câu 15. Chú ý là hai nhánh của đồ thị hàm số đã cho nằm ở bên trái và bên phải đường tiệm cận đứng $x = 2$ nên ta có thể giả sử

$A\left(2 - a, 1 - \frac{2}{a}\right), B\left(2 + b, 1 + \frac{2}{b}\right)$ với $a > 0$ và $b > 0$.

Khi đó

$$AB = \sqrt{(a+b)^2 + 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} \ge \sqrt{(a+b)^2 + 4\left(\frac{4}{a+b}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b)^2 + \frac{64}{(a+b)^2}} \ge \sqrt{2\sqrt{64}} = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{2}$.

Câu 16. Theo một kết quả cơ bản của cực trị hàm phân thức, chúng ta đã biết rằng đường thẳng nối hai điểm cực trị (nếu có) của hàm số $y = \frac{-x^2 + mx + 1}{x - 1}$ là

$$y = \frac{(-x^2 + mx + 1)'}{(x-1)'} = -2x + m.$$

Đường thẳng này đi qua hai điểm $A(-1,1)$ khi và chỉ khi $2 + m = 1 \Leftrightarrow m = -1$. Thử lại với giá trị $m = -1$ thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 17. Lấy điểm $A(1+a, -2-a, 3+2a) \in d_1$ và điểm $B(-1+2b, 4-b, -2+2b) \in d_2$. Khi đó

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - a + 2b, 6 + a - b, -5 - 2a + 3b),$$
$$\overrightarrow{AM} = (-1 - a, 1 + a, -1 - 2a).$$

Ba điểm A, M, B thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} -2 - a + 2b = k(-1-a) \\ 6 + a - b = k(1+a) \\ -5 - 2a + 3b = k(-1-2a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ a = \frac{7}{2} \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{27}{2}, \frac{27}{2}, -24\right) = -\frac{3}{2}(9, -9, 16)$ và PT đường thẳng AB là $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + 1}{2x + 1}$ có tiệm cận đứng và xiên (hoặc ngang) khi và chỉ khi $mx^2 - 2x + 1$ không chia hết cho $2x + 1$. Nói cách khác $f(x) = mx^2 - 2x + 1$ không có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$, tức là $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{4} + 2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -8$.

Câu 19. Xếp hai học sinh A và B vào hai vị trí liên tiếp trong 10 vị trí thì có $9 \times 2 = 18$ cách. 8 bạn còn lại thì có $8!$ cách xếp. Vậy xác suất để hai bạn A và B đứng cạnh nhau là $\frac{18.8!}{10!} = \frac{1}{5}$.

Nhận xét. Có thể làm theo cách khác như sau: Trước tiên ta xếp vị trí cho 8 học sinh kia (không gồm A, B) thì có $8!$ cách. Giữa họ có 7 vị trí xen kẽ và 2 vị trí đầu cuối. Tiếp theo xếp A, B vào 2 trong 9 vị trí đó thì có A_9^2 cách. Vậy xác suất để A và B không đứng cạnh nhau là $\dfrac{8!\,A_9^2}{10!} = \dfrac{4}{5}\cdot$ Từ đó suy ra xác suất để A và B đứng cạnh nhau là $1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}\cdot$

Câu 20. Bất PT đã cho tương đương với

$$x < \left(\sqrt{x-1} + \frac{1}{100}\right)^2 = x + \frac{\sqrt{x-1}}{50} - \frac{9999}{10000}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9999}{10000} < \frac{\sqrt{x-1}}{50} \Leftrightarrow x > 1 + \left(5.\frac{9999}{10000}\right)^2 \approx 2500,5.$$

Câu 21. Hàm số đã cho có tập xác định là $[-2,2]$.

Ta có $y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\cdot$

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 4 - x^2 = (-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}.$

$$f(-2) = -2,\ f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2},\ f(2) = 2.$$

Vậy $\min\limits_{[-2,2]} f(x) = -2\sqrt{2},\ \max\limits_{[-2,2]} f(x) = 2.$

Do đó $M - m = 2(\sqrt{2}+1).$

Câu 22. Kí hiệu I là tích phân cần tính. Ta thực hiện phép đổi biến $x = 100 - u$ thì $dx = -du$ và khi $x = 0$ thì $u = 100$, khi $x = 100$ thì $u = 0$. Do đó

$$I = -\int_{100}^{0}(100-u)(99-u)...(-u)du$$

$$= -\int_{0}^{100}(u-100)(u-99)...udu = -I \Rightarrow I = 0.$$

Câu 24. Chú ý rằng hàm số đa thức bậc ba có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu khi đồ thị của nó cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. Điều này tương đương với đồ thị $y = f(x) = x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 2x + 1$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2).$$

Từ bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ ta suy ra

$$f(2) < m < f\left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -5 < m < \frac{73}{54}$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m $(m \in \{-4,-3,-2,-1,0,1\})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

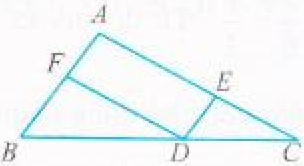
Câu 25. $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \lim\limits_{x\to-\infty} y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang. $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Câu 26. Theo định lí khai triển nhị thức Newton, ta có $(2x+1)^6\left(x^2 + x + \dfrac{1}{4}\right)^4 = (2x+1)^6\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^8$

$$= 2^6\left(x + \frac{1}{2}\right)^{14} = 2^6 \sum_{i=0}^{14} C_{14}^i \left(\frac{1}{2}\right)^{14-i} x^i.$$

Vậy hệ số của x^6 (ứng với $i = 6$) là $\dfrac{1}{4}C_{14}^6.$

Câu 27. Theo tính chất của các đường thẳng song song ta có



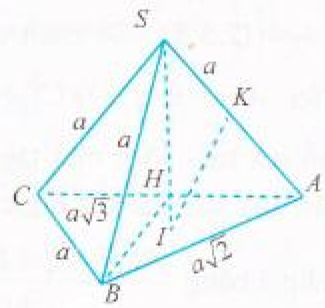
$$\frac{ED}{AB} = \frac{CD}{CB},\ \frac{FD}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC} = 1.\ \text{Do đó } \frac{S_{AEDF}}{S_{ABC}} = \frac{2S_{AEF}}{S_{ABC}}$$

$$= 2\cdot\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AE}{AC} \le \frac{1}{2}\left(\frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2}$, tức D là trung điểm của BC. Vậy diện tích hình bình hành lớn nhất bằng một nửa diện tích tam giác ABC.

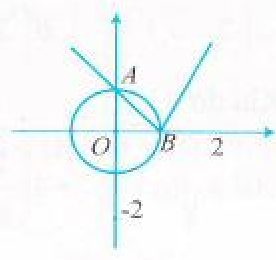
Câu 28. Từ giả thiết ta tính được $BC = a, CA = a\sqrt{3}$, $AB = a\sqrt{2}$. Nhận thấy $AB^2 + BC^2 = CA^2$ nên ΔABC vuông tại B. Gọi H là trung điểm của AC thế thì $HA = HB = HC$. Theo giả thiết lại có $SA = SB = SC$, suy ra SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Dựng trung trực của SA cắt SH tại I thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $SABC$, mặt cầu này có bán kính bằng IS. Ta có $\Delta SIK \backsim \Delta SAH$ (K là trung điểm của SA). Do đó:



$$\frac{SI}{SA} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA.SK}{SH} = a.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ bằng $4\pi a^2$.

Câu 29. Kí hiệu (C) là hình tròn tâm O bán kính 1 và S là diện tích cần tính. Thế thì



$$S = \frac{1}{4}S_{(C)} - S_{\Delta AOB}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot$$

Câu 30. Kí hiệu a_n và b_n lần lượt là giá tiền mét khoan thứ n của cơ sở A và B. Theo đề bài ta có:

$$a_1 = 8000, a_{n+1} = a_n + 500;$$

$$b_1 = 6000,\ b_{n+1} = b_n + 0{,}07b_n = 1{,}07b_n.$$

Điều này cho thấy (a_n) là cấp số cộng với công sai bằng 500 còn (b_n) là cấp số nhân với công bội bằng 1,07. Do đó

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n[2a_1 + 500(n-1)]}{2} = (250n + 7750)n,$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = \frac{b_1(1{,}07^n - 1)]}{0{,}07} = \frac{600000}{7}(1{,}07^n - 1).$$

Từ đó

$a_1 + a_2 + ... + a_{20} = 255000;\ a_1 + a_2 + ... + a_{25} = 350000,$

$b_1 + b_2 + ... + b_{20} \approx 245972{,}95;\ b_1 + b_2 + ... + b_{25} \approx 379494{,}23.$

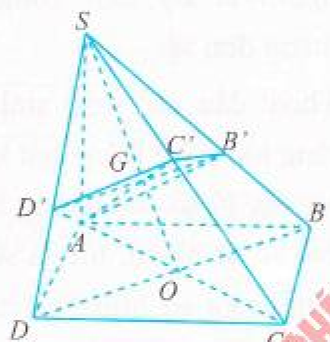
Vậy giếng 20 mét thì nên chọn cơ sở B còn giếng 25 mét thì nên chọn cơ sở A.

Câu 31. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $AC' \perp SC$, AC' cắt SO tại G. Qua G kẻ một đường thẳng song song với BD cắt SB, SD tương ứng tại B', D'. Do $BD \perp (SAC)$ nên

$B'D' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp SC.$

Như vậy

$$SC \perp (AB'C'D').$$



Chú ý rằng ΔSAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC và G chính là trọng tâm. Ta có

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}\frac{SG}{SO} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra

$$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}.$$

Tương tự $V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ADC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}.$

Từ đó

$$V_{S.AB'D'C'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}.$$

Câu 32. Ta có

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1+\frac{x}{2}}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} + ... + \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right].$$

Từ đó $f'(0) = f(0)\left(\underbrace{1+1+...+1}_{n}\right) = n.$

Câu 33. Phương trình $\log_3 x(x+2) = 1$ tương đương với $x(x+2) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình này là $A = \{-3, 1\}$. Phương trình $\log_3 x + \log_x(x+2) = 1$ có ĐKXĐ là $x > 0$, do đó tập nghiệm là $B = \{1\}$. Vậy $B \subset A$.

Câu 34. BPT đã cho tương đương với

$$\log_2 \frac{3x-1}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x \geq 3 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của BPT là $(-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$.

Câu 35. Bốn bạn thuộc cả ba lớp trong các trường hợp sau

• hai bạn lớp A, một bạn lớp B, một bạn lớp C;
• hai bạn lớp B, một bạn lớp C, một bạn lớp A;
• hai bạn lớp C, một bạn lớp A, một bạn lớp B;

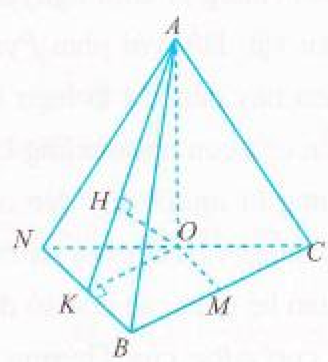
Do đó xác suất để chọn được 4 bạn thuộc cả ba lớp là $\dfrac{C_a^2C_b^1C_c^1 + C_b^2C_c^1C_a^1 + C_c^2C_a^1C_b^1}{C_{a+b+c}^4}$.

Câu 36. Gọi N là điểm đối xứng với C qua O. Khi đó $BN \parallel OM \Rightarrow OM \parallel (ABN)$. Do đó

$$d(OM, AB) = d(O, (ABN)).$$

Kẻ $OK \perp BN$ và $OH \perp AK$. Dễ dàng chứng minh được $OH \perp (ABN)$. Vì vậy $d(O, (ABN)) = OH$. Dễ thấy tứ giác $OMBK$ là hình chữ nhật nên $OK = BM = \frac{BC}{2}$. Áp dụng hệ thức lượng trong ΔAOK vuông tại O ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}$$
$$= \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2}$$
$$= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{2a^2} = \frac{3}{a^2}.$$



Suy ra $OH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 38. Đồ thị hàm số $y = 2x + m - \frac{1}{2x+1}$ có tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$ và tiệm cận xiên là $y = 2x + m$. Giao của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên là điểm $\left(-\frac{1}{2}, m-1\right)$ và điểm này chính là tâm đối xứng của đồ thị.

Câu 39. Chú ý rằng với mọi số phức z_1, z_2 chúng ta có đồng nhất thức

(Xem tiếp trang 35)

CUỘC KHỦNG HOẢNG CƠ SỞ TOÁN HỌC CỔ HY LẠP

NGUYỄN THỦY THANH
(*Trường Đại học KHTN, ĐHGQ Hà Nội*)

Những tư liệu ít ỏi về cuộc đời và học thuyết của *Pythagoras* (nửa cuối thế kỷ VI tr.CN) khó mà tách khỏi các huyền thoại về Ông – một nhà toán học và nhà triết học của Hy Lạp cổ đại. Sử gia Hy Lạp *Herodotus* (485 – 425 tr. CN) đánh giá ông như một triết gia giỏi nhất của người Hy Lạp. Trong toán học người ta cho rằng *Pythagoras* là người đầu tiên đưa phương pháp luận *giải bằng chứng minh* vào toán học và do đó Toán học (đặc biệt là hình học) đã trở thành khoa học suy diễn.

Là một nhà triết gia, Ông đặc biệt quan tâm đến *bản chất* và *khởi nguyên* của thế giới. Là một nhà toán học, *Pythagoras* đi tìm *bản chất* và *khởi nguyên* đó ở các con số – *số tự nhiên* và *số hữu tỷ*, xem chúng là khởi nguyên và bản chất chủ yếu của mọi vật. Đối với phái *Pythagoras* mọi thứ trên thế gian này đều chỉ là hiện thân của các con số. Linh hồn của con người cũng là con số, nó bất tử và lang thang từ người này đến người khác. Vũ trụ là một hệ thống cân đối của những con số cùng những mối quan hệ giữa các con số đó, và họ coi những con số là con cưng của Thượng đế. Điều đó đã thấm sâu vào lời cầu nguyện của các học trò của *Pythagoras* trước lúc nghe giảng: "*Hãy ban ơn cho chúng con những con số thần linh đã sáng tạo ra loài người*"

Trường phái *Pythagoras* đã tồn tại suốt hơn hai thế kỷ với đông đảo các môn sinh. Bình luận gia *Proclus* (410-485) của Hy Lạp viết rằng: "*Pythagoras đã cải tạo nền toán học sau khi mang lại cho nó dáng vẻ một nền học vấn phóng khoáng. Ông nghiên cứu khoa học này xuất phát từ những cơ sở đầu tiên của nó và nỗ lực thu được những định lý bằng tư duy lôgic thuần túy* …"

Trong hình học, hai đoạn thẳng là thông ước hoặc vô ước với nhau tùy thuộc ở chỗ chúng có hay không có *phần ước chung* được chứa trong mỗi đoạn thẳng đó đúng số nguyên lần. Thông thường người ta lấy một trong hai đoạn thẳng là đoạn thẳng đơn vị.

Thoạt đầu các môn sinh của *Pythagoras* đều cho rằng hai đoạn thẳng bất kỳ đều thông ước với nhau. Vì vậy tỷ số của chúng biểu thị được bởi tỷ số của các số tự nhiên, tức là số hữu tỷ. Bằng phép dựng hình, mỗi số hữu tỷ đều tương ứng với một điều kiện xác định gọi là *điểm hữu tỷ* và các điểm hữu tỷ trù mật khắp nơi trên đường thẳng số, nghĩa là trong bất cứ khoảng (a, b) nào dù bé bao nhiêu đi nữa cũng có vô số điểm hữu tỷ.

Từ cái "*vô số*" và "*tính trù mật khắp nơi*" phái *Pythagoras* cứ ngỡ rằng tập hợp các điểm hữu tỷ là choán hết toàn bộ đường thẳng số và do vậy mọi đoạn thẳng đều thông ước với đoạn thẳng đơn vị. Nhưng cũng có môn sinh *Pythagoras* lại cho rằng không phải mọi điểm của đường thẳng số đều tương ứng với một số hữu tỷ. Điều đó cũng có nghĩa là tồn tại đoạn thẳng vô ước với đoạn thẳng đơn vị và từ đó trên đường thẳng số còn có những điểm không hữu tỷ (gọi là *điểm vô tỷ*). Chẳng hạn, một điểm cách gốc tọa độ một đoạn bằng đường chéo một hình vuông với cạnh bằng độ dài đoạn tỷ xích (tức là đoạn thẳng đơn vị) là điểm như vậy. Độ dài đoạn thẳng này không biểu thị được bằng bất cứ số hữu tỷ nào vì nó không thông ước với đoạn thẳng đơn vị. Về sau người ta xem nó được biểu thị bởi một số mới gọi là *số vô tỷ*.

Trong lịch sử văn minh của nhân loại, sự phát hiện ra tình huống *tồn tại đoạn thẳng vô ước với đoạn thẳng đơn vị có độ dài biểu thị bởi số vô tỷ là một trong những phát minh tinh vi nhất, chói lọi nhất* của trường phái *Pythagoras* trong nền toán học Hy Lạp ngay từ thời Cổ đại. Nói phát minh đó là tinh vi nhất và chói lọi nhất vì mãi đến cuối thế kỷ XIX người ta mới khám phá được rằng tập hợp các số hữu tỷ không có tính chất liên tục!

Lịch sử toán học không để lại tư liệu chính xác là *khi nào* và *ai* đã chứng minh Định lý về tính vô ước của đường chéo hình vuông với cạnh của nó. Nhưng, dựa vào các tác phẩm của triết gia Hy Lạp *Aristoteles* (384-322 tr.CN) có thể nói một cách khá chắc chắn là điều đó xảy ra vào hai thập kỷ cuối thế kỷ V tr.CN.

Về ý nghĩa của phát minh này, các nhà nghiên cứu lịch sử khoa học cho rằng chỉ có phát minh ra *Hình học phi Euclide* ở thế kỷ XIX hay *Lý thuyết tương đối* đầu thế kỷ XX mới có thể so sánh được với phát minh sáng chói này.

Theo triết gia *Aristoteles*, sau phát minh ra tính vô tỷ các nhà toán học *Pythagoras* đã từ trạng thái ngỡ ngàng, bối rối rồi rơi vào tình trạng kinh hoàng: *tồn tại những con số không thể nào đưa về số nguyên hoặc phân số được*. Người Hy Lạp đã xem những con số này là *phi lý* vì họ không thể tưởng tượng được lại có những con số chẳng phải số nguyên và cũng chẳng hữu tỷ. Ngay *M. Stifel* (1487-1567), người đã đặt tên cho các số này là *số vô tỷ* (1544) cũng đã khuyên độc giả của "*Số học đầy đủ*" (1544) của ông là "*đừng nên xem đó là những số chân chính*"(!)

Aristoteles cũng viết rằng "*nếu đường chéo và cạnh của hình vuông là thông ước với nhau thì số lẻ sẽ bằng số chẵn*". Suy từ câu nói này, người ta cho rằng các môn đệ của phái *Pythagoras* đã chứng minh tính vô ước bằng phương pháp phản chứng: phép chứng minh này chỉ dựa vào tính chẵn lẻ của các số. Có đầy đủ cơ sở để phỏng đoán rằng đó là chứng minh cổ xưa của *Pythagoras*. Sau đây là chứng minh đó:

Giả sử đường chéo AC của hình vuông $ABCD$ là thông ước với cạnh AB của nó, tức là tỷ số của chúng bằng tỷ số hai số nguyên $AC : AB = m : n$. Giả sử các số m và n không đồng thời chẵn vì nếu không thế thì phân số có thể giản ước cho 2. Từ hệ thức trên suy rằng $AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2$. Theo định lý *Pythagoras* $AC^2 = 2AB^2$ nên $m^2 = 2n^2$ và m^2 là số chẵn. Từ đó m là số chẵn (vì bình phương của số lẻ bất kỳ là số lẻ: $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ là số lẻ). Nhưng khi đó n là số lẻ. Vì m là số chẵn nên $m = 2l$ và khi đó $4l^2 = 2n^2$ hay $n^2 = 2l^2$, tức là n^2 là số chẵn và n cũng là số chẵn. Như vậy n vừa chẵn vừa lẻ. Mâu thuẫn.

Khi các nhà toán học phái *Pythagoras* đã tin chắc rằng phép chứng minh sự tồn tại các đoạn thẳng vô ước chính xác và hoàn hảo thì họ mới vỡ lẽ rằng giáo điều mà họ tôn thờ một cách thiêng liêng "*con số tạo nên cả vũ trụ*" đã hoàn toàn tiêu tan sụp đổ. Bên cạnh cái vô số các số hữu tỷ mà họ tôn thờ còn có cái vô số khác nhiều hơn gồm các số vô tỷ tồn tại một cách khách quan không thể tránh khỏi phải đưa vào. Và, tất cả hai cái vô số này hợp lại thành đường thẳng số.

Truyền thuyết kể rằng việc khám phá ra tính vô ước là thuộc về môn sinh *Hippasus* của phái *Pythagoras* (thế kỷ V tr.CN). Vào thời điểm khi phát hiện ra *Hippasus* đã đến với khám phá này, các nhà toán học phái *Pythagoras* đang lênh đênh ở ngoài biển khơi. Họ đã ném *Hippasus* xuống biển bởi họ cho nhà toán học này là phản đồ, đã gieo vào vũ trụ phần tử đối nghịch với giáo điều của họ.

Đồng thời với sự khám phá ra các đại lượng vô ước trong nền toán học Hy Lạp, một khái niệm khác là *khái niệm vô hạn* cũng thâm nhập vào. Trong các tìm tòi *phân ước chung* đối với mỗi đại lượng, các nhà hình học Hy Lạp đã có thể xét các đại lượng chia được vô hạn định nhưng ý niệm vô hạn cũng đã đưa họ chìm sâu vào lúng túng. Việc phát hiện ra những khó khăn thực sự trong các khái niệm liên tục và vô hạn được đời sau cho là thuộc về nhà triết học *Zenon* (490-430 tr.CN) của Hy Lạp cổ đại. *Zenon* đã mang lại cho các lập luận của mình thêm phần khéo léo và sắc sảo bởi các *aporia* (tiếng Hy Lạp có nghĩa là nghịch lý, khó lý giải, không có lối thoát) mà đã hơn 25 thế kỷ rồi, chúng vẫn không ngừng lôi cuốn các nhà toán học và triết học. Các *aporia* này đến được với chúng ta là nhờ triết gia *Aristoteles*. Nổi tiếng hơn cả là các *aporia*: *phép lưỡng phân* (chia đôi đoạn thẳng), *Asin và Rùa*, *Mũi tên bay*. Người ta cho rằng các *aporia* của *Zenon* có hàm chứa khuynh hướng chống lại học thuyết *Pythagoras*.

Bằng các nghịch lý, *Zenon* và các nhà triết học khác cố chứng minh rằng các đại lượng hữu hạn không cấu thành được từ các phân tử vô cùng bé. Và, như *Nicolas Bourbaki* nhận xét: "*Các nhà toán học và triết học không đủ sức giải quyết được nghịch lý là làm thế nào mà một đại lượng hữu hạn có thể được tạo nên từ một số vô hạn điểm không có kích thước*".

Chẳng hạn, cần lý giải thế nào về tuyên bố của phái *Pythagoras* rằng đường thẳng được "*cấu thành*" từ các điểm ? hay không gian là tổng các điểm "*điểm là đơn vị của vị trí*"?

Cho đến tận ngày nay các nhà toán học và triết học vẫn còn bình luận nhiều về các *aporia* của *Zenon* và có người cho rằng đó "*vẫn là một đề tài bỏ ngỏ đầy cuốn hút*" mà mỗi thời đại đều có cách lý giải của mình đối với cái nghịch lý đó.

Chẳng hạn ta xét *aporia* "*lưỡng phân*". Qua *aporia* này *Zenon* muốn chứng tỏ rằng vật thể chuyển động không bao giờ cán đích vì đầu tiên nó phải đến trung điểm *M* của quãng đường, sau đó nó phải đến trung điểm phần đường còn lại …

Giả sử *AB* là đoạn thẳng có chiều dài 1 và điểm *M* chuyển động từ *A* đến *B*. Trước khi đến được điểm *B* nó phải "*đếm xong*" tập hợp "*các trung điểm*" $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ nghĩa là không bao giờ cán đích *B*.

Nói chung, *aporia* này không giải quyết được bởi lý lẽ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. *G. Weyl* (1885-1955) – nhà toán học Hoa Kỳ – đã chỉ rõ chỗ khó khăn khi lý giải *aporia* "*lưỡng phân*" bởi lý lẽ sau đây. Ta hãy tưởng tượng có một máy tính hoàn thành phép tính thứ nhất trong $\frac{1}{2}$ phút, phép tính thứ hai trong $\frac{1}{4}$ phút, thứ ba trong $\frac{1}{8}$, … Do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ nên đến cuối phút thứ nhất máy tính đó đã "*đếm hết*" dãy các số tự nhiên … Và, *G. Weyl* cho rằng việc sáng tạo nên cấu trúc của một máy như vậy là công việc vô vọng.

Những khó khăn tiềm ẩn trong các khái niệm vô hạn và liên tục đã đưa đến một cuộc khủng hoảng sâu sắc cơ sở toán học cổ đại – cơn bão tố nặng nề đầu tiên làm rung chuyển tòa lâu đài khoa học còn chưa được vững chắc. Tình cảnh đã từng hình thành vào thế kỷ V tr.CN ở Hy Lạp cũng giống như tình cảnh đã xảy ra trong toán học hiện đại cuối thế kỷ XIX đầu thế kỷ XX. Và, ở đây cũng như ở đấy cuộc khủng hoảng cơ sở đã được kích thích bởi vấn đề nan giải về *số thực* (đó là tên gọi mới của vấn đề vô ước khó khăn xưa kia) cũng như độ đo, và bởi việc vận dụng thiếu cân nhắc lý thuyết các tập hợp vô hạn. Tại Hy Lạp cổ đại cuộc khủng hoảng này đã nhanh chóng vượt ra khỏi giới hạn một nhóm nhỏ các nhà toán học. Bên cạnh các nhà toán học vĩ đại còn có những bộ óc tuyệt vời của các nhà triết học đủ mọi trường phái và xu hướng … của xứ sở thần thoại cùng tham gia tìm lối thoát.

Có lẽ, người đầu tiên lên tiếng sau cơn bão tố yên ắng là triết gia *Platon* (429-348 tr.CN) – thầy học của *Aristoteles*. Trong bộ "*Luật pháp*" của mình ông kêu gọi, trước hết cần có một sự nhận thức đối với đại lượng vô ước. Còn các nhà toán học *Pythagoras* thì sao? Họ đã hình dung ra một số khả khả năng thoát khỏi cuộc khủng hoảng. Đó là:

1) mở rộng khái niệm số bằng cách đưa vào những số mới;

2) xây dựng toán học không phải trên cơ sở số học mà là trên cơ sở hình học;

3) từ bỏ việc xây dựng lý thuyết lôgic chặt chẽ về các đại lượng vô ước.

Con đường thứ ba là không thể chấp nhận đối với người Hy Lạp vì nó chính là từ bỏ tư tưởng cơ bản về xây dựng toán học bằng phương pháp suy diễn. Khác với cư dân *Babylon* cổ đại biết sử dụng số vô tỷ dạng lục thập phân gần đúng, người Hy Lạp cổ đại đã hoàn toàn không hài lòng với những đại lượng gần đúng: đối với họ toán học là khoa học chính xác! Do đó khi việc mở rộng tập hợp số là mù mịt thì trên thực tế con đường thứ nhất xem như đã đóng cửa. Và, họ đã đi theo con đường thứ hai là xây dựng toán học trên cơ sở hình học. Các nhà toán học *Pythagoras* và tiếp sau họ là phần lớn các nhà toán học cổ Hy Lạp cho đến tận *Archimedes* (287-212 tr.CN) và *Apollonius* (260-170 tr.CN) đã xây dựng đại số trên cở sở hình học gọi là Đại số – Hình học.

Nền toán học cổ Hy Lạp thoát khỏi cuộc khủng hoảng cơ sở luận lý chủ yếu nhờ các thành tựu khoa học tuyệt vời của các nhà toán học lớn thời bấy giờ như *Architas* (428-365 tr.CN), *Theaetetus* (410?-369 tr.CN) và *Eudoxus* (408-355 tr.CN). Khác với trường phái *Pythagoras*, ba nhà toán học lớn này đã nhận thức đúng căn nguyên của vấn đề: *sự tồn tại các số vô tỷ là một khách quan*. Do đó *Architas* và *Theaetetes* đã có công trong lớn trong việc sáng tạo ra Lý thuyết vô tỷ và phân loại chúng. Tên tuổi của *Eudoxus* gắn liền với lý thuyết tổng quát về tỷ số do ông sáng tạo ra. Đó là lý thuyết mà toàn bộ chiều sâu của cách xây dựng nó chỉ có thể hiểu được sau gần 15 thế kỷ nhờ các công trình của *R. Dedekind* (1831-1916) nửa sau của thế kỷ XIX. Giữa lý thuyết của *Eudoxus* (thời cổ đại!) và lý thuyết số thực của *Dedekind* (cuối thế kỷ XIX) có một sự giống nhau đến mức mà trong một bức thư *R. Lipschitz* (1832-1903) đã từng hỏi *Dedekind* rằng: "*cái ông thu được có gì mới lạ so với kết quả thời cổ đại*". Nhờ sử dụng phương pháp toán học hiện đại *K. Weierstrass* (1815-1897), *R. Dedekind* và *G. Cantor* (1845- 1918) đã tiếp bước *Eudoxus* hoàn thiện lý thuyết vô tỷ. Chẳng hạn, nhờ các công trình của họ mà, cuối cùng, người ta đã chứng minh được rằng $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

Đồng thời với đó, *Eudoxus* còn phát minh ra "*phương pháp vét kiệt*" dựa trên cơ sở hình học cho phép tính chuẩn xác diện tích và thể tích, trong đó thuật ngữ "*phương pháp vét kiệt*" là do nhà toán học Bỉ *Gregorius* (1584-1667) đặt ra từ năm 1647.

Các thuyết mà ba nhà toán học Hy Lạp cổ đại xây dựng đã tạo nên bộ khung vững chắc cho tòa lâu đài toán học Hy Lạp cổ đại mà nền móng của nó là hình học. Như vậy những khó khăn do sự xuất hiện đại lượng vô ước đã được vượt qua.

Để khắc phục và thoát ra khỏi các khó khăn trong trong luận chứng cơ sở toán học liên quan đến các nghịch lý *Zenon*, phần lớn các nhà toán học cổ Hy Lạp đều cho rằng đơn giản hơn cả là phải từ bỏ việc sử dụng những khái niệm có bao hàm ý niệm về *vô hạn* và *chuyển động* trong toán học hoặc quy việc sử dụng đến mức tối thiểu. Họ đều cho rằng mức tối thiểu có thể chấp nhận là *tính chia được vô hạn định* các đại lượng hình học.

Khi nói về mục tiêu mà *Euclide* đặt ra khi viết "*Các nguyên lý*", nhà viết lịch sử khoa học Hà Lan *D. Struik* cho rằng: "*Ông (Euclide) viết bộ sách "Các nguyên lý" nhằm trình bày chung trong một tác phẩm ba khám phá vĩ đại của quá khứ chưa lâu: lý thuyết tỷ số của Eudoxus, lý thuyết vô tỷ của Theaetetus và lý thuyết năm cố thể đều chiếm vị trí đặc sắc trong vũ trụ học của Platon. Đó là ba thành tựu điển hình của Hy Lạp* ".

Trong tác phẩm tuyệt vời này *Euclide* đã tổng kết những thành tựu trước, trong và sau cuộc khủng hoảng cơ sở toán học ở Hy Lạp cổ đại.

Không dễ gì trả lời câu hỏi rằng cái gì đã đưa người Hy Lạp đến với những phát minh sáng chói của mình? Và, làm sao mà ngay từ thế kỷ VI –V tr.CN ở xứ Hy Lạp huyền thoại lại có thể diễn ra sự phát triển nhảy vọt về tư duy và trí tuệ của nhân loại đến vậy?

CÁC LỚP THCS

Bài T1/491 (Lớp 6). Cho x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $x^{2017} = y^{2018}$. Hãy tìm số tự nhiên x, biết y là số tự nhiên nhỏ nhất.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T2/491 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 108^0$, $BC = a$, $AC = b$. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD cân tại A có $\widehat{BAD} = 36^0$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/491. Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện với mọi số nguyên dương a là ước của n thì $a+2$ là ước của $n+2$.

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T4/491. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC. Vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại A và cắt đường thẳng BC tại K. Lấy điểm T trên cung nhỏ AB (T khác A và B). Đường thẳng KT cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P. Trên tiếp tuyến tại T của đường tròn (O) lấy hai điểm I, J sao cho KIA, KAJ là các tam giác cân tại K. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{TIP} = \widehat{TKJ}$.

b) Đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác KPJ tiếp xúc với nhau.

TRẦN ANH TUẤN
(GV THCS Nhân Hậu, Lý Nhân, Hà Nam)

Bài T5/491. Tìm các cặp nghiệm nguyên (x, y) thỏa mãn: $y^2 + 2y = 4x^2y + 8x + 7$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/491. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 3 \\ \sqrt{x^2+4} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+4} = \sqrt{2}(x+y+z) \end{cases}.$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/491. Chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} = 3.$$

TRẦN VĂN CƯƠNG
(SV K52 A1T, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/491. Cho m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến của một tam giác có chu vi bằng 2 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r. Chứng minh rằng: $\max\{1; 3\sqrt[3]{r}\} \le m_a + m_b + m_c < \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

Bài T9/491. Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/491. Cho dãy số (F_n) xác định bởi công thức: $F_n = 2^{2^n} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, gọi q là một ước nguyên tố của F_n, chứng minh rằng: $(q-1) \vdots 2^{n+1}$.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$, gọi q là một ước nguyên tố của F_n, chứng minh rằng: $(q-1) \vdots 2^{n+2}$.

HỒ SỸ HÙNG
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T11/491. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)f(y)+f(xy)+f(x)+f(y)=f(x+y)+2xy$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

TRẦN VĂN THƯƠNG

(GV THPT Phú Mỹ, Tân Thành, Bà Rịa - VũngTàu)

Bài T12/491. Cho lục giác lồi *ABCDEF* ngoại tiếp đường tròn (*O*). Biết rằng tâm *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác *ACE*. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác *OAD*, *OBE* và *OCF* còn có một điểm chung khác điểm *O*.

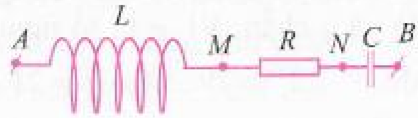
LÊ VIẾT ÂN

(Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)

Bài L1/491. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x=A\cos(5\pi t+\varphi)$. Tại thời điểm *t*, vật đang đi về phía vị trí cân bằng và tỉ số giữa thế năng và động năng của vật bằng 3 $\left(\dfrac{W_t}{W_đ}=3\right)$. Sau đó $\dfrac{1}{60}$ s thì tỉ số đó bằng bao nhiêu?

THANH LÂM (*Hà Nội*)

Bài L2/491. Đặt điện áp $u=U_0\cos 2\pi ft$ (U_0 không đổi, f thay đổi được) vào hai đầu đoạn mạch như hình vẽ. Khi $f=f_1$ và $f=f_2=2f_1$ thì công suất tiêu thụ là $\mathscr{P}$ và điện áp tức thời u_{AN} vuông pha với u_{MB}. Khi $f=f_3$ thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn cảm thuần đạt giá trị cực đại và công suất tiêu thụ của đoạn mạch là 140W. Giá trị công suất $\mathscr{P}$ là bao nhiêu?



VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/491 (For 6th grade). Consider all pairs of integers *x*, *y* which are greater than 1 and satisfy $x^{2017}=y^{2018}$. Find the pair with the smallest possible value for *y*.

Problem T2/491 (For 7th grade). Given an isosceles triangle *ABC* with the apex *A*. Suppose that $\hat{A}=108^0, BC=a, AC=b$. Outside *ABC*, construct the isosceles triangle *ABD* with the apex *A* and $\widehat{BAD}=36^0$. Find the perimeter of the triangle *ABD* in terms of *a* and *b*.

Problem T3/491. Find positive integers *n* such that if the positive integer *a* is a divisor of *n* then $a+2$ is also a divisor of $n+2$.

Problem T4/491. Given a triangle *ABC* inscribed the circle (*O*) with diameter *AC*. Draw a line which is perpendicular to *AC* at *A* and intersects *BC* at *K*. Choose a point *T* on the minor *AB* (*T* is different from *A* and *B*). The line *KT* intersects (*O*) at the second point *P*. On the tangent line to the circle (*O*) at the point *T* choose two points *I* and *J* such that *KIA* and *KAJ* are isosceles triangles with the apex *K*. Show that

a) $\widehat{TIP}=\widehat{TKJ}$.

b) The circle (*O*) and the circumcircle of the triangle *KPJ* are tangent to each other.

Problem T5/491. Find integral solutions of the equation $y^2+2y=4x^2y+8x+7$.

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/491. Sove the system of equations

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=3\\ \sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+4}=\sqrt{2}(x+y+z)\end{cases}.$$

Problem T7/491. Show that

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}=3.$$

Problem T8/491. Let m_a, m_b, m_c be the lengths of the medians of the triangle with the perimeter 2. Show that $\max\{1;\,3\sqrt[3]{r}\}\le m_a+m_b+m_c<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, where *r* is the inradius of the triangle.

(Xem tiếp trang 44)

Bài T1/487. *Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn phương trình: $p^q - q^p = 79$.*

Lời giải. Vì 79 là số lẻ nên trong hai số p, q có một số lẻ và một số chẵn. Xét hai trường hợp.

• TH1: p lẻ và q chẵn. Vì q là số nguyên tố nên $q = 2$, lúc đó $p^2 - 2^p = 79$. Đặt $p = 2k+1 \geq 3$ thì $p^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, còn 2^p chia hết cho 4, suy ra $p^2 - 2^p$ chia cho 4 dư 1, nhưng 79 chia cho 4 dư 3, do đó không tồn tại cặp số p, q thỏa mãn đề bài.

• TH2: q lẻ và p chẵn. Vì p là số nguyên tố nên $p = 2$, lúc đó $2^q - q^2 = 79$. Do $2^q > 79$ thì $q \geq 7$.

Với $q = 7$ thì $2^7 - 7^2 = 79$, thỏa mãn.

Với $q \geq 11$ đặt $q = 2n + 1 \geq 11$ thì $n \geq 5$. Xét

$$2^q - q^2 > 2^{q-1} - q^2 = 2^{2n} - q^2 = (2^n + q)(2^n - q)$$

$$> (2^n + q)(2^n - 2n - 2) = 2(2^n + q)(2^{n-1} - n - 1)$$

$$\geq 2(2^5 + 11)(2^{n-1} - n - 1) = 86(2^{n-1} - n - 1) \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $2^m > m + 2$ với số nguyên $m \geq 3$. Thực vậy, với $m = 3$ thì $2^3 = 8 > 3 + 2 = 5$, khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với số r ($r \geq 3$), tức là có $2^r > r + 2$, xét số $r + 1$ ta có

$$2^{r+1} = 2^r + 2^r > (r+2) + (r+2) = r + 4 + r > (r+1) + 2,$$

khẳng định đúng với $r + 1$. Vậy $2^m > m + 2$ với số nguyên $m \geq 3$ bất kì. Đặt $m = n - 1 \geq 3$ có $2^{n-1} > n + 2$ hay là $2^{n-1} - n - 1 > 1$. Lúc đó từ (*) có $2^q - q^2 > 86(2^{n-1} - n - 1) > 86 > 79$, nên không có số $q \geq 11$ thỏa mãn đề bài. Vậy chỉ có một cặp số nguyên tố $(p; q) = (2; 7)$ thỏa mãn phương trình $p^q - q^p = 79$. ❐

➢***Nhận xét.*** Trong TH1) có thể giải bằng cách xét phép chia cho 3. Bài này cũng có thể giải ngắn gọn bằng cách dùng định lí nhỏ Fermat. Các bạn sau có lời giải đúng, tuyên dương cả các bạn lớp 7 vì bài hơi khó. **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội**: *Lê Ngọc Tùng*, 6A2, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Nghệ An**: *Hoàng Bảo Nguyên*, 6C, *Trần Thiên Ngân*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Đình Thùy*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Gia Lai**: *Nguyễn Lê Việt Hưng*, 6/10, THCS Nguyễn Du, TP. Pleiku; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Hoàng Hưng*, 6A, *Đỗ Thị Như Nguyệt*, 7D, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; *Mai Thành Nguyên*, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/487. *Tìm các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn*

$$\sqrt[3]{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a + b + c} = d.$$

Lời giải. Ta có $a + b + c$, d là các số tự nhiên, $a^2 + b^2 + c^2 = d^3$, $a + b + c = d^2$. Từ

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Do đó $3d^3 \geq d^4 \Rightarrow d \leq 3 \Rightarrow d \in \{0; 1; 2; 3\}$.

• Xét $d = 0$ ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ (thỏa mãn).

• Xét $d = 1$ ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a + b + c = 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 0;\ b = 0;\ c = 1 & \text{(thỏa mãn)} \\ a = 0;\ b = 1;\ c = 0 & \text{(thỏa mãn)}\cdot \\ a = 1;\ b = 0;\ c = 0 & \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

• Xét $d = 2$ ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 8$, $a + b + c = 4$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a = 0;\ b = 2;\ c = 2 & \text{(thỏa mãn)} \\ a = 2;\ b = 0;\ c = 2 & \text{(thỏa mãn)}\cdot \\ a = 2;\ b = 2;\ c = 0 & \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

• Xét $d = 3$ ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 27$, $a + b + c = 9$. $\Rightarrow a = b = c = 3$ (thỏa mãn). Vậy các bộ số nguyên $(a; b; c; d)$ cần tìm là: (0;0;0;0), (0;0;1;1), (0;1;0;1), (1;0;0;1), (0;2;2;2), (2;0;2;2), (2;2;0;2), (3;3;3;3). ❐

➢***Nhận xét.*** Số bài giải gửi về Tòa Soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 7A, THCS Thái Thịnh, Đống Đa, *Lê Ngọc Tùng*, 6A2, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Vĩnh**

Phúc: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/487. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c =1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{21}{1+36abc}.$$

Lời giải. BĐT đã cho tương đương với

$$(1+36abc)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 21$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+36(ab+bc+ca)\geq 21$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+36(ab+bc+ca)\geq 21$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+36(ab+bc+ca)\geq 18$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}+36(ab+bc+ca)\geq 24.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+36ab\geq 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab}.36ab}=12(a+b)$$

$$\frac{(b+c)^2}{bc}+36bc\geq 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{bc}.36bc}=12(b+c)$$

$$\frac{(c+a)^2}{ca}+36ca\geq 2\sqrt{\frac{(c+a)^2}{ca}.36ca}=12(c+a).$$

Cộng các BĐT trên ta thu được:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}+36(ab+bc+ca)\geq 24(a+b+c)=24.$$

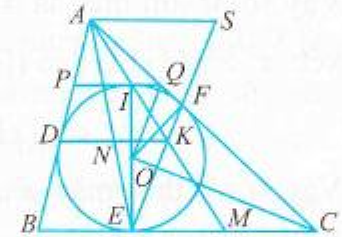
BĐT đã cho được chứng minh. ❐

➤***Nhận xét.*** Bài toán không khó nhưng không nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Quân, Nguyễn Hữu Quyền*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Anh, TP. Thanh Hóa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/487. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Các cạnh AB, BC, CA lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) tại D, E, F sao cho EC = 2EB. Kẻ đường kính EI của đường tròn (O). Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này cắt đoạn thẳng EF tại K. Chứng minh rằng A, I, K thẳng hàng.*

Lời giải. Qua I kẻ tiếp tuyến của đường tròn (O), cắt AB và AC thứ tự tại P và Q, dễ thấy $PQ \parallel BC$. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có



$$\widehat{QOC}=\widehat{QOF}+\widehat{FOC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{IOF}+\widehat{FOE}\right)=90°.$$

Suy ra $QI.CE = QF.CF = OF^2$.

Tương tự, $PI.BE = PD.DB = OD^2 = OF^2$.

Do đó $PI.BE = QI.CE$ (1)

Gọi M là trung điểm EC, từ giả thiết suy ra

$BM = CE$ và $BE = CM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{PI}{BM}=\frac{QI}{CM}$. Theo hệ quả của định lí Thales suy ra ba điểm A, I, M thẳng hàng. (3)

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng EF tại S. Gọi N là giao điểm của DK và AE.

Ta có $\widehat{ASF}=\widehat{FEC}=\widehat{EFC}=\widehat{AFS}$.

Suy ra ΔAFS cân tại A, nên $AS = AF = AD$. Áp dụng định lí Thales cho các tam giác AES và ABE ta có $\frac{NK}{AS}=\frac{NE}{AE}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{AB}=\frac{DN}{DA}$.

Suy ra $NK = ND$. Vậy $\frac{ND}{NK}=\frac{EB}{EM}$.

Theo hệ quả của định lí Thales suy ra A, K, M thẳng hàng. (4)

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm A, I, K thẳng hàng. ❐

➤***Nhận xét.*** Chỉ có ba bạn sau có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đăng Khoa*, 9A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/487. *Tìm số M lớn nhất sao cho ta có bất đẳng thức $x^2 \geq M.[x].\{x\}$ thỏa mãn với mọi số thực x (trong đó $[x]$, $\{x\}$ tương ứng ký hiệu phần nguyên và phần phân của x).*

Lời giải. Do BĐT đúng với mọi x nên ta xét $x = 1 + a$ $(0 < a < 1)$. Khi đó $[x]=1$, $\{x\}=a$.

Thay vào BĐT ta có:

$$(1+a)^2\geq M.1.a$$

$\Leftrightarrow a^2+(2-M)a+1\ge 0,\ \forall 0<a<1$

$\Leftrightarrow \Delta=(2-M)^2-4\le 0 \Leftrightarrow M^2-4M\le 0$

$\Leftrightarrow 0\le M\le 4.$

Vậy số M lớn nhất là 4. Ngược lại, khi $M = 4$ ta xét: $x^2\ge M.[x].\{x\}\Leftrightarrow ([x]+x\})^2\ge 4.[x].\{x\}$

$\Leftrightarrow ([x]-x\})^2\ge 0$: luôn đúng.

Vậy $M = 4$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán. ❒

➢*Nhận xét.* Có hai bạn giải đúng bài này là: **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh. **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

NHƯ HOÀNG

Bài T6/487. *Giải phương trình:*

$$x^3+x+6=2(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}. \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $3+2x-x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 3.$

Cách 1.

$(1)\Leftrightarrow (x^3-3x+2)+(4x+4)-2(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)+2(x+1)(2-\sqrt{3+2x-x^2})=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)+2(x+1).\dfrac{(x-1)^2}{2+\sqrt{3+2x-x^2}}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+2+\dfrac{2(x+1)}{2+\sqrt{3+2x-x^2}}\right)=0 \quad (2)$

Với $-1\le\ x\le 3$, ta có $x+2+\dfrac{2(x+1)}{2+\sqrt{3+2x-x^2}}>0,$

do đó $(2)\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐK). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$2\sqrt{3+2x-x^2}=2\sqrt{(x+1)(3-x)}\le x+1+3-x=4.$$

Kết hợp với (1) và $(x + 1)\ge 0$, suy ra

$$x^3+x+6\le 4(x+1). \qquad (3)$$

Mặt khác

$$x^3+x+6-4(x+1)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\ge 0$$

(do $x\ge -1$ nên $x + 2 > 0$; $(x-1)^2\ge 0$). Do đó

$$x^3+x+6\ge 4(x+1). \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $(x-1)^2(x+2)=0$, do $x + 2 > 0$ nên suy ra $(x - 1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$. (thỏa mãn ĐK) ❒

➢*Nhận xét.* Đây là bài toán giải phương trình có chứa căn thức, ta có thể biến đổi nhân biểu thức căn liên hợp để xuất hiện nhân tử chung rồi đưa về dạng phương trình tích (cách 1) hoặc vận dụng bất đẳng thức để đánh giá (cách 2). Ngoài cách 2, ta có thể biến đổi phương trình về dạng

$$(x+1-\sqrt{3+2x-x^2})^2+(x+2)(x-1)^2=0,$$

rồi đánh giá vế phải luôn không âm Rất nhiều bạn tham gia gửi bài và đều làm theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc**: *Bùi Anh Vũ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định**: *Phạm Ngọc Ánh*, 11A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên**: *Đoàn Phú Thành, Lương Thị Phương Hoa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa**: *Lê Thị Ngọc Ánh*,10A1, THPT Hoằng Hóa IV, *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống 1; **Quảng Bình**: *Hoàng Xuân Lộc*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Lào Cai**: *Bùi Phương Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Thừa Thiên Huế**:*Thái Đặng Trần Công*, 10 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng**: *Phạm Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Vĩnh Long**: *Trần Lĩnh*, 11T, *Châu Minh Khánh*, 12T1,THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Đồng Nai**: *Quách Minh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bến Tre**: *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Quảng Nam**: *Lê Đào Văn Trung, Nguyễn Lê Thanh Hằng*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng**: *Nguyễn Trọng Đức Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Lê Tuấn Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đăk Lăk**: *Lê Ngọc Đức*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Ma Thuột.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/487. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}=3\\ \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}=\sqrt[4]{\dfrac{x^4+y^4}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{y^4+z^4}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{z^4+x^4}{2}}\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x>0, y>0, z>0.$ Ta có:

$$\frac{x^2}{y}-2x+y=\frac{(x-y)^2}{y}\ge 0,$$

$$\frac{x^2}{y}-x+2y-2\sqrt{x^2-xy+y^2}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{y}+y-2\sqrt{x^2-xy+y^2}=\frac{(\sqrt{x^2-xy+y^2}-y)^2}{y}\geq 0$$

Suy ra $\frac{2x^2}{y}-3x+3y\geq 2\sqrt{x^2-xy+y^2}$.

Tương tự $\frac{2y^2}{z}-3y+3z\geq 2\sqrt{y^2-yz+z^2}$,

$$\frac{2z^2}{x}-3z+3x\geq 2\sqrt{z^2-zx+x^2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}. \quad (1)$$

Ta lại có $2(x^2-xy+y^2)^2-(x^4+y^4)$

$=2(x^4+x^2y^2+y^4-2x^3y-2xy^3+2x^2y^2)-(x^4+y^4)$

$=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4=(x-y)^4\geq 0.$

Suy ra $\sqrt{x^2-xy+y^2}\geq\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4}{2}}$. Tương tự

$$\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq\sqrt[4]{\frac{y^4+z^4}{2}},\quad \sqrt{z^2-zx+x^2}\geq\sqrt[4]{\frac{y^4+z^4}{2}}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4}{2}}+\sqrt[4]{\frac{y^4+z^4}{2}}+\sqrt[4]{\frac{z^4+x^4}{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Như vậy từ PT thứ hai thay vào PT thứ nhất ta có kết luận $x=y=z=1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. ❒

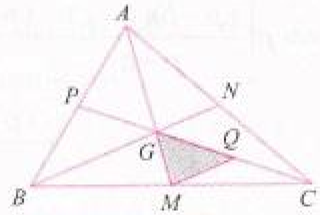
➢***Nhận xét.*** Hệ PT trên thuộc dạng cơ bản. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hưng Yên:** *Bùi Văn Quyến*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Đặng Minh Đức*, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Long:** *Lê Hoàng Huy*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phúc Tăng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/487. *Cho tam giác ABC có bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_a, r_b, r_c; độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và có diện tích là S. Chứng minh rằng:*

$$r_a{}^2+r_b{}^2+r_c{}^2\geq 3\sqrt{3}.S+(m_a-m_b)^2+(m_b-m_c)^2+(m_c-m_a)^2.$$

Lời giải. Đặt



$BC=a, AC=b, AB=c;$

$$p=\frac{a+b+c}{2};$$

$x=p-a, y=p-b, z=p-c.$

Bổ đề. *(Bất đẳng thức Finsler-Hadwiger) Cho tam giác ABC ($BC=a, AC=b, AB=c$) có diện tích là S thì ta có:*

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}.S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \quad (1)$$

Chứng minh. Ta có (1) tương đương với

$[a^2-(b-c)^2]+[b^2-(c-a)^2]+[c^2-(a-b)^2]\geq 4\sqrt{3}.S$

$\Leftrightarrow(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)\geq\sqrt{3}.S$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq\sqrt{3xyz(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(xy-xz)^2\geq 0$, bất đẳng thức này đúng, suy ra BĐT (1) đúng.

Trở lại bài toán, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB; còn G là trọng tâm ΔABC, Q là trung điểm của GC. Khi đó ΔGMQ có độ dài ba cạnh là $\frac{1}{3}m_a, \frac{1}{3}m_b, \frac{1}{3}m_c$ và

$$S_{GMQ}=\frac{1}{2}S_{GMC}=\frac{1}{4}S_{GBC}=\frac{1}{12}S.$$

Sử dụng bổ đề trên cho ΔGMQ ta có:

$$\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2+\left(\frac{1}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{1}{3}m_c\right)^2\geq 4\sqrt{3}.S_{GMQ}+\frac{1}{9}(m_a-m_b)^2+\frac{1}{9}(m_b-m_c)^2+\frac{1}{9}(m_c-m_a)^2$$

$$\Leftrightarrow m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2\geq 3\sqrt{3}.S+(m_a-m_b)^2+(m_b-m_c)^2+(m_c-m_a)^2.$$

BĐT ở đề bài được chứng minh nếu ta chứng minh được: $r_a{}^2+r_b{}^2+r_c{}^2\geq m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2$. (2)

Thật vậy, sử dụng các công thức:

$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c;$$

$$m_a{}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4};\qquad m_b{}^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4};$$

$$m_c^{\,2}=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$ ta thấy

$$(2)\Leftrightarrow\left(\frac{S}{p-a}\right)^2+\left(\frac{S}{p-b}\right)^2+\left(\frac{S}{p-c}\right)^2\geq\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right]\geq\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right)\geq\frac{3}{4}\Big[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\Big]\quad(3)$$

VT(3) bằng

$$x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y^2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+xy+yz+zx$$

$$\geq 2x^2+2y^2+2z^2+xy+yz+zx$$

$$\geq\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)=\frac{3}{4}\Big[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\Big]$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều. ❒

➤***Nhận xét.*** Số bài giải gửi về Tòa Soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 12 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thái, Mỏ Cày Nam.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/487. *Cho số nguyên dương n và các số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$. Tìm số thực λ sao cho:*

$$a_1^x+a_2^x+...+a_n^x\geq n+\lambda x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $e^x\geq x+1$ cho mọi số thực x và đẳng thức chỉ xảy ra khi $x=0$. Bạn nào chưa biết bất đẳng thức này thì chỉ cần khảo sát hàm số qua đạo hàm bậc nhất là thấy ngay hàm số $f(x)=e^x-x-1$ có cực tiểu bằng 0 tại $x=0$. Như vậy, ta có

$$a_1^x+\ldots+a_n^x=e^{\ln a_1^x}+\ldots+e^{\ln a_n^x}$$

$$\geq(1+\ln a_1^x)+\ldots+(1+\ln a_n^x)=n+x\ln(a_1.a_2\cdots a_n),\forall x\in\mathbb{R}$$

Như vậy giá trị $\lambda=\ln(a_1.a_2.\cdots a_n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có thể thấy giá trị $\lambda=\ln(a_1.a_2.\cdots a_n)$ là giá trị duy nhất làm bất đẳng thức của đầu bài thỏa mãn bằng cách xét giới hạn một phía khi $x\to+0$ và $x\to-0$ của hàm số

$$f(x)=\frac{a_1^x+\ldots+a_n^x-n}{x}.$$ ❒

➤***Nhận xét.*** Rất ít bạn giải bài toán này, có hai bạn quên không ghi tên và địa chỉ. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Cẩm Thanh Hà*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T10/487. a) *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì phương trình $2012^x(x^2-n^2)=1$ có một nghiệm duy nhất. Ký hiệu nghiệm đó là x_n.*

b) *Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$.*

Lời giải. (Theo ý tưởng của đa số các bạn).

a) Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$2012^x(x^2-n^2)=1\Leftrightarrow\frac{1}{2012^x}-x^2+n^2=0.\quad(1)$$

Xét hàm số $f_n(x)=\dfrac{1}{2012^x}-x^2+n^2$, ta thấy

$$f_n{}'(x)=-\frac{\ln 2012}{2012^x}-2x<0\ \text{ với }\ x\in(0,+\infty),$$

nên $f_n(x)$ là hàm nghịch biến trong $(0,+\infty)$. Mặt khác, $f_n(n)=\dfrac{1}{2012^n}>0$ và

$$f_n(n+1)=\frac{1}{2012^{n+1}}-2n-1<0$$

nên phương trình (1) có một nghiệm dương duy nhất $x_n\in(n,n+1)$.

b) Ứng với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$ ta thấy $x_n>n$ và $x_n^2-n^2=\dfrac{1}{2012^n}\cdot$ Suy ra

$$0<x_n-n=\frac{1}{(x_n+n)2012^n}<\frac{1}{2n.2012^n}\cdot$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n.2012^n}=0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n)=0$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}\{[(x_{n+1}-(n+1)]-(x_n-n)+1\}$$
$$=1.$$ ❒

➤***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam; **Đồng Nai:** *Quách Minh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Ngọc Duy*, *Vương Tùng Dương*, *Đỗ Minh Hiệp*, *Bùi Anh Vũ*, 11A1, *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/487. *Gọi T là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của* $n = 2004^{2010}$. *Giả sử S là một tập con khác rỗng bất kì của T thỏa mãn điều kiện: với mọi a, b thuộc S mà a > b thì a không chia hết cho b. Tìm số phần tử lớn nhất của tập S.*

Lời giải. (Dựa trên ý của bạn *Nguyễn Văn Cảnh*, Thành Thới A, Mỏ Cày Nam, **Bến Tre**).

Vì $2004 = 2^2.3.167$ nên tập hợp tất cả các ước số nguyên dương của $2004^{2010} = 2^{4020}.3^{2010}.167^{2010}$

$$T = \{2^a.3^b.167^c,\ 0 \le a \le 4020, 0 \le b, c \le 2010\}$$

Giả sử S là một tập con của T thỏa mãn điều kiện đề bài. Xét ánh xạ $f: S \to S$ như sau với mỗi $x = 2^a.3^b.167^c$ thì $f(x) = 2^{4020-b-c}.3^b.167^c$. Ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy giả sử tồn tại $x_1, x_2 \in S, x_1 \ne x_2$ mà $f(x_1) = f(x_2)$. Giả sử

$$x_1 = 2^{a_1}.3^{b_1}.167^{c_1} \text{ và } x_2 = 2^{a_2}.3^{b_2}.167^{c_2}$$

Vì $x_1 \ne x_2$ nên $(a_1, b_1, c_1) \ne (a_2, b_2, c_2)$. Do

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4020 - b_1 - c_1 = 4020 - b_2 - c_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases}$$

Suy ra hoặc $x_1 | x_2$ hoặc $x_2 | x_1$ (trái giả thiết). Vậy f là một đơn ánh từ S vào S_0, trong đó

$$S_0 = \{x : x = 2^{4020-b-c}.3^b.167^c,\ 0 \le b, c \le 2010\}$$

Thành thử $|S| \le |S_0| = 2011^2$. Vậy $\max|S| = 2011^2$ ❒

➤***Nhận xét.*** Bài này không có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Vương Tùng Dương*, 11A1, *Chu Thị Thanh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/487. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. H là hình chiếu của A trên BC. N là trung điểm của AH. Đường thẳng qua D, N cắt CA, AB lần lượt tại J, S; BJ cắt CS tại P. DA, DP lần lượt cắt (I) tại G, L. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, G, L cùng nằm trên một đường tròn.*

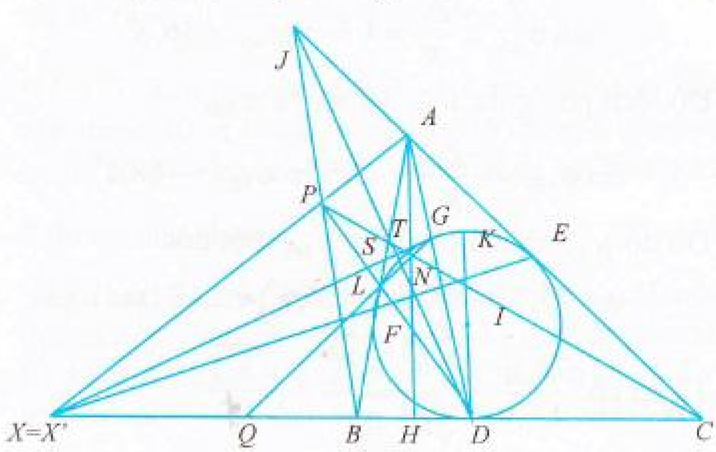
Lời giải. Trong lời giải này kí hiệu ZZ chỉ tiếp tuyến với (I) tại điểm Z thuộc (I). Gọi X, X', Q theo thứ tự là giao điểm của BC với EF, AP, GL và K, T theo thứ tự là giao điểm thứ hai của DI, DN và (I). Dễ thấy AD, BE, CF đồng quy nên $(BCDX) = -1$. Vì JD, BA, CP đồng quy (tại S) nên $(BCDX') = -1$. Vậy $(BCDX) = (BCDX')$. Điều đó có nghĩa là $X \equiv X'$. Vì DG, EE, FF đồng quy (tại A) nên tứ giác $DEGF$ điều hòa. Do đó EF, DD, GG đồng quy (tại X). Nói cách khác GX tiếp xúc với (I). (1)

Vì N là trung điểm của AH và $DK \parallel AH$ nên $D(GDTK) = D(AHNK) = -1$. Do đó $DTGK$ là tứ giác điều hòa. (2)

Từ (1) và (2) suy ra KT đi qua X. Dễ thấy

$$D(GLTD) = D(APJB) = A(DPJB) = A(DXCB) = (DXCB) = -1.$$

Do đó $DGTL$ là tứ giác điều hòa. Điều đó có nghĩa là TQ tiếp xúc với (I). Vậy $QD = QT$. Kết hợp với $\widehat{XTD} = 180° - \widehat{KTD} = 180° - 90° = 90°$, suy ra $QD = QX$. Từ đó, theo hệ thức Newton, suy ra $\overline{QB}.\overline{QC} = \overline{QD}^2 = \overline{QL}.\overline{QG}$. Tóm lại bốn điểm B, C, G, L cùng thuộc một đường tròn. ❒



➤***Nhận xét.*** 1) Bài toán này không khó nhưng chỉ số bạn tham gia giải không nhiều.

2) Lời giải trên tương tự lời giải của bạn *Võ Minh Quân*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**.

3) Xin nêu tên các bạn còn lại: **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, 10A1, *Vương Tùng Dương*, *Bùi Anh Vũ*, *Vũ Ngọc Duy*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP Vĩnh Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Vũ Duy*, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Võ Huy Hoàng*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/487. *Đoạn mạch điện AB mắc nối tiếp theo thứ tự lần lượt gồm cuộn dây thuần cảm, biến trở và tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi và tần số góc ω (với $5\omega^2LC = 3$). Khi $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt cực đại. Gọi M và N lần lượt là điểm nối giữa cuộn cảm thuần với biến trở và biến trở với tụ điện. Biết điện áp ở hai đầu MB có biểu thức là* $u_{MB} = 290\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ (V). *Viết biểu thức điện áp ở hai đầu đoạn mạch AN.*

Lời giải. Theo bài ra: $5\omega^2LC = 3$ suy ra

$$Z_L = \frac{3}{5}Z_C \qquad (1)$$

Khi công suất tiêu thụ trên đoạn mạch AB cực đại thì: $R = Z_C - Z_L$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $Z_C = 2,5R$ và $Z_L = 1,5R$ (3)

Độ lệch pha giữa u_{AN} và u_R là φ_{AN}:

$$\tan\varphi_{AN} = \frac{Z_L}{R} = 1,5 \Rightarrow \varphi_{AN} \approx 56,3^0$$

Độ lệch pha giữa u_{MB} và u_R là φ_{MB}:

$$\tan\varphi_{MB} = \frac{-Z_C}{R} = -2,5 \Rightarrow \varphi_{MB} \approx -68,2^0$$

Do đó u_{AN} nhanh pha hơn u_{MB} một góc

$$\varphi = 56,3^0 + 68,2^0 = 124,5^0 \approx 2,17 \text{ (rad)}.$$

Ta lại có: $\dfrac{U_{AN}}{U_{MB}} = \dfrac{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} = \dfrac{\sqrt{337}}{29}$

Suy ra: $U_{OAN} = U_{OMB}\dfrac{\sqrt{337}}{29} \approx 259,6$ (V). Do đó:

$$u_{AN} = 259,6\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + 2,17\right) = 259,6\cos(\omega t + 1,38)\text{ (V)}$$

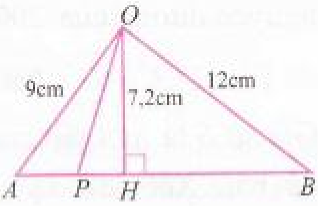
❐

➤***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài Vật lí này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/487. *Tại O trên mặt nước có một nguồn phát sóng với tần số f = 80 Hz, tốc độ truyền sóng là 1.6 m/s. Ba điểm A, B, O nằm trên mặt nước tạo thành tam giác vuông tại O. Biết OA = 9 cm; OB = 12 cm. Xác định số điểm dao động cùng pha với A trên đoạn BA.*

Lời giải. $\lambda = \dfrac{160}{80} = 2$ cm



Đường cao của tam giác hạ từ O: OH = 7,2 cm. Có OA = 9 cm = 4,5λ nên A dao động ngược pha với O. Gọi P là điểm thuộc AB thỏa mãn P dao động cùng pha với A thì P dao động ngược pha với $O \Rightarrow OP = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

Xét trên AH: $OH < OP < OA$

$$\Leftrightarrow 7,2 < \left(k + \frac{1}{2}\right)2 < 9,$$

$\Rightarrow$ không có giá trị nào của k thoả mãn.

Xét trên HB: $OH < OP \le OB$

$$\Leftrightarrow 7,2 < \left(k + \frac{1}{2}\right)2 \le 12$$

$$\Rightarrow 3,1 < k \le 5,5,$$

$\Rightarrow$ có 2 giá trị của k thoả mãn. ❐

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** *Cao Thị Linh*, 12 Toán 1, *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12 Toán 2, THPT Quốc học Huế; **Nam Định:** *Lê Phương Thanh*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

BẠN CÓ BIẾT?

TÍNH ĐỐI XỨNG TRONG CẤU TRÚC CỦA THƠ ĐƯỜNG LUẬT

VŨ HOÀNG LÂM (*Hải Phòng*)
Sưu tầm và biên soạn

Gần đây nhiều bạn muốn làm thơ theo thể thơ Đường Luật, và muốn tìm hiểu cấu trúc của thể thơ đó. Tôi xin tóm tắt cấu trúc đó như sau qua thể thơ *Thất ngôn tứ tuyệt*, từ đó ta sẽ chuyển sang các thể thơ Đường luật khác. Bài dẫn chứng:

NGUYÊN TIÊU

Kim dạ nguyên tiêu nguyệt chính viên
Xuân giang xuân thủy tiếp xuân thiên
Yên ba giang thượng đàm quân sự
Dạ bán qui lai nguyệt mãn thuyền.

HỒ CHÍ MINH

***Nguyên tắc* 1.** Nói về chữ thứ bảy trong câu, gọi là **Vần.** Chữ thứ bảy của các **câu 1, 2, 4** cùng một âm **vần (viên, thiên, thuyền)**. Các nguyên tắc sau chỉ nói về 6 chữ còn lại của từng câu.

***Nguyên tắc* 2.** Âm **bằng, trắc** ở 6 chữ còn lại gọi là **luật:** *Nhất tam ngũ bất luận, nhị tứ lục phân minh.* Nghĩa là:

- không xét đến chữ thứ nhất, thứ ba, thứ năm;
- các chữ **thứ hai, thứ tư, thứ sáu** phải đúng qui định (luật).

Nguyên tắc* 3. Nguyên tắc đối xứng** các chữ trong một câu: *Chữ thứ **hai** và chữ thứ **sáu** đối xứng qua chữ thứ* **tư.** Nếu chữ thứ tư là âm ***trắc thì chữ thứ hai và chữ thứ sáu thuộc âm **bằng** và ngược lại.

1	2	3	4	5	6	7
	B		**T**		**B**	

hoặc:

1	2	3	4	5	6	7
	T		**B**		**T**	

***Nguyên tắc* 4.** Nguyên tắc đối xứng giữa các câu trong một bài gọi là **niêm.** Hãy hình dung giữa câu 2 và câu 3 có một trục đối xứng thì

- Câu 1 và câu 4 đối xứng nhau qua trục đó;
- Câu 2 và câu 3 đối xứng nhau cũng qua trục đó.

	1	2	3	4	5	6	7
Câu 1	Kim	dạ	nguyên	tiêu	nguyệt	chính	viên
Câu 2							
Câu 3							
Câu 4	Dạ	bán	qui	lai	nguyệt	mãn	thuyền

	1	2	3	4	5	6	7
Câu 1							
Câu 2	Xuân	giang	xuân	thủy	tiếp	xuân	thiên
Câu 3	Yên	ba	giang	thượng	đàm	quân	sự
Câu 4							

Chúng ta thấy trong đời sống, nhân dân ta rất thích tính đối xứng, và tính đối xứng đó được bày tỏ trong niêm và luật của thể thơ đường luật.

• Đối với thể *Thất ngôn bát cú* (*tám câu bảy chữ*), ta hình dung có một trục đối xứng giữa câu thứ tư và thứ năm (câu 1 và câu 8 đối xứng qua trục cũng như cặp câu 2-3 đối xứng với cặp câu 7-6). Đối với thơ ngũ ngôn ta chỉ cần bỏ đi hai chữ đầu của câu thất ngôn hoặc từ bài thơ ngũ ngôn, ta thêm hai chữ vào mỗi câu theo đúng niêm và luật ta được bài thơ thất ngôn. Trong thể thơ Đường luật, ngoài Vần, Luật và Niêm còn qui định về ĐỐI ở câu 3 và 4, câu 5 và 6, và nội dung PHÁ THỪA THỰC LUẬN KẾT của toàn bài. Bài này chỉ xin nói về Vần, Luật và Niêm. Mời các bạn đọc Giai thoại "Thừa và Thiếu" minh họa cho ý 5.

Giai thoại THỪA VÀ THIẾU.

Ông Nghè đi giữa đường, chú mục đồng không biết ông là ai nên không tránh.

Ông Nghè: Sao thấy ta, nhà ngươi không tránh?
Mục đồng: Cháu chưa biết cụ là ai nên chưa tránh ạ.
Ông Nghè: Ta là ông Nghè.
Mục đồng: Thế Ông Nghè có biết làm thơ không ạ?
Ông Nghè: Thơ ta hàng bồ…
Mục đồng: Cụ cho cháu nghe một bài thơ đi.
Không do dự, **Ông Nghè** đọc:

Thanh minh thời tiết vũ phân phân.
Thượng lộ hành nhân dục đoạn hồn.
Tá vấn tửu gia hà xứ thị
Mục đồng dáo chỉ hạnh hoa thôn.

Đọc xong **ông Nghè** hỏi: Nhà ngươi thấy thế nào?
Mục đồng cười: Thưa cụ, mỗi câu đều thừa hai chữ ạ.
Câu thứ nhất: Trời mưa phùn nhẹ nhẹ, đó là thanh minh rồi.
Câu thứ hai cần gì hai chữ thượng lộ " người đi buồn đứt ruột."
Câu thứ ba " Quán rượu ở chốn nào?", cần gì tá vấn.
Còn câu thứ tư, ai trả lời chẳng được!
Thưa cụ, cháu nói thế có phải không ạ?
Ông Nghè tỏ vẻ khó chịu: Được ta đọc bài thứ hai cho nhà ngươi nghe.

Bạch nhật mạc nhàn quá
Thanh xuân bất tái lai
Song tiền cần khổ học
Mã thượng kỷ nhân hồi.

Mục đồng lại cười rũ rượi.
Ông Nghè: Sao nhà ngươi lại cười?
Mục đồng: Bài này thưa cụ mỗi câu lại thiếu hai chữ ạ .
Ông Nghè: Thiếu là thiếu như thế nào chứ?
Mục đồng: Thưa cụ, lời khuyên này, người nào nói và ai là người nghe đều không rõ. Cháu xin phép cụ thêm như thế này: *Khuyến quân bạch nhật mạc nhàn quá.*

Thương thiếp thanh xuân bất tái lai
Tự cổ song tiền cần khổ học
Cẩm bào mã thượng kỷ nhân hồi.

Thưa cụ đây là lời người vợ khuyên chồng: Khuyên chàng đừng để ngày xanh trôi nhạt nhẽo, hãy thương đến thiếp vì ngày xuân không trở lại. Từ xưa, bên song cửa cần khổ học (bởi) đã mấy ai có áo bào cưỡi ngựa trở về. **Mục đồng** nói tiếp: Cụ làm thơ như thế mà đỗ nghè, cháu mà đi thi, cháu đỗ vua.
Sử dụng từ thật quả là điều quá công phu!

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7...

(Tiếp theo trang 19)

$$\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_1\right|^2\right).$$

Từ đây và giả thiết ta tính được $\left|z_1-z_2\right|=1$.

Câu 40. Dễ thấy V là thể tích của khối nón có bán kính đáy là $AC=a$ và chiều cao là $AB=2a$. Do đó

$$V=\frac{1}{3}\pi a^2.2a=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

V' là thể tích của hình trụ có bán kính đáy là AK và chiều cao là AH nên $V'=\pi.AK^2.AH$. Ta có

$$\frac{BM}{BC}=\frac{BH}{BA}=\frac{HM}{AC}=t\ (0<t<1).$$

Từ đây suy ra $BH=2ta,\ HM=ta\Rightarrow AH=2(1-t)a$.

Do đó $V'=\pi(ta)^2.2(1-t)a=2\pi(1-t)t^2a^3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{V'}{V}=3(1-t)t^2=\frac{3}{2}(2-2t)tt\le\frac{3}{2}\left(\frac{2-2t+t+t}{3}\right)^3=\frac{4}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2-2t=t\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Câu 41. Lấy hai điểm thuộc d là $A(-3,1,-1)$ và $B(-1,2,-4)$. Hình chiếu vuông góc của A và B trên mặt phẳng (yOz) lần lượt là $A'(0,1,-1)$ và $B'(0,2,-4)$. Ta có $\overrightarrow{A'B'}=(0,1,-3)$.

Câu 42.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\max\{\sin x,\cos x\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$$

$$=(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Câu 43. Rõ ràng V_{SOAB} lớn nhất khi và chỉ khi S_{OAB} lớn nhất. Mà

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB}\le\frac{1}{2}OA.OB=\frac{a^2}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\sin\widehat{AOB}=1\Leftrightarrow\widehat{AOB}=90^0$.

Lúc này $\max V_{SOAB}=\frac{1}{3}SO.S_{OAB}=\frac{1}{6}SO.OA.OB=\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 44. Tam giác OAB vuông tại O nên tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm O, A, B là đường thẳng đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với mp(OAB). Đường thẳng này nhận $\vec{k}=(0,0,1)$ làm VTCP.

Câu 45. Gọi x là số câu trả lời đúng thì $10-x$ là số câu trả lời sai. Để số điểm không nhỏ hơn 7 thì

$$x-\frac{1}{2}(10-x)\ge 7\Leftrightarrow x\ge 8.$$

Nghĩa là thí sinh đó phải làm đúng không dưới 8 câu. Xác suất để điều này xảy ra là:

$$C_{10}^8\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2+C_{10}^9\left(\frac{1}{4}\right)^9\frac{3}{4}+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^9=\frac{109}{262144}.$$

Câu 46. Sử dụng công thức $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ ta đưa PT đã cho về dạng tương đương như sau

$$x^{\log_8(4x)}+x^{\log_8(4x)}=4\Leftrightarrow x^{\log_8(4x)}=2$$

$$\Leftrightarrow\log_8(4x).\log_2 x=1\Leftrightarrow\left(\log_8 4+\log_8 x\right)\log_2 x=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log_2 x\right)\log_2 x=1\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2+2\log_2 x-3=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-3\\ \log_2 x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{8}\\ x=2\end{array}\right.$$ Vậy tập nghiệm là $\left\{\frac{1}{8},2\right\}$.

Câu 47. Xét hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh đáy BC, CA, AB. Các trung điểm D', E', F' được xác định một cách tương tự. M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh bên AA', BB', CC'. Dễ thấy các mặt phẳng $(EE'F'F)$, $(FF'D'D)$, $(DD'E'E)$ và (MNP) cách đều tất cả các đỉnh của lăng trụ.

Câu 48. Ta có $f'(x)=e^xe^{e^x}$. Từ đó $f'(1)=ee^e=e^{e+1}$.

Câu 49. Đường thẳng $x+y=2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=-x^3+2x+4$ khi và chỉ khi hệ PT sau có nghiệm

$$\begin{cases}-x^3+2x+4=-x+2m\\ -3x^2+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^3+3x+4=2m\\ x^2=1\end{cases}.$$

Với $x=1$ thì $m=3$, với $x=-1$ thì $m=1$.

Câu 50. Nhận thấy điểm M nằm bên trong khối cầu (S) và tâm của (S) là gốc tọa độ O. Gọi (α) là một mặt phẳng đi qua M và H là hình chiếu vuông góc của O trên (α). Để (α) cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất thì OH phải lớn nhất. Mà $OH\le OM$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H trùng với M. Như vậy mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài đi qua M và nhận $\overrightarrow{OM}=(1,-1,2)$ làm VTPT, do đó có PT là

$$(x-1)-(y+1)+2(z-2)=0\Leftrightarrow x-y+2z-6=0.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQGHN)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

SỬ DỤNG MA TRẬN LIÊN KẾT TRONG GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

LÊ KIM CHUNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Tập hợp gồm $m.n$ số thực xếp thành m hàng và n cột được gọi là một ma trận cỡ $m\times n$. Phần tử của ma trận cỡ $m\times n$ nằm ở hàng i và cột j kí hiệu là a_{ij}. Khi đó ma trận được kí hiệu là $(a_{ij})_{m\times n}$. Ma trận cỡ $n\times n$ còn gọi là ma trận vuông cấp n. Giả sử có hai tập hợp $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ trong đó mỗi phần tử của X có quan hệ có thể lượng hóa được với các phần tử trong Y. Với mỗi i, j $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ ta kí hiệu a_{ij} là một số đặc trưng cho mối quan hệ giữa x_i và y_j. Khi đó ta được ma trận $A=(a_{ij})$ cỡ $m\times n$ gọi là ma trận liên kết trong mối quan hệ giữa các phần tử trong X và trong Y. Bằng cách xem xét mỗi liên hệ của các phần tử trong ma trận A ta có thể đi đến lời giải của bài toán tổ hợp.

I. Dựa vào mối quan hệ của các số hạng trong ma trận để giải toán

Bài toán 1 (*IMO* 2016). *Tìm các số tự nhiên n sao cho trong mỗi ô vuông của bảng $n\times n$ ô vuông có thể viết đúng một chữ cái trong số ba chữ cái I,M,O thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau.*

1) Trên mỗi hàng, mỗi cột có đúng $\frac{1}{3}$ ô viết chữ I, $\frac{1}{3}$ ô viết chữ M và $\frac{1}{3}$ ô viết chữ O.

2) Trên mỗi đường chéo mà có số ô chia hết cho 3 cũng có đúng $\frac{1}{3}$ ô viết chữ I, $\frac{1}{3}$ ô viết chữ M và $\frac{1}{3}$ ô viết chữ O.

Chú ý: Nếu kí hiệu $(i;j)$ là ô vuông của bảng nằm ở hàng i và cột j. Khi đó có $4n-2$ đường chéo chia thành hai loại: loại 1 gồm các ô $(i;j)$ có $i+j$ không đổi và loại hai gồm các ô $(i;j)$ có $j-i$ không đổi.

Lời giải. Từ giả thiết của bài toán ta suy ra được n chia hết cho 3. Ta sẽ chứng minh n chia hết cho 9.

• Nếu $n=9k$. Xếp k^2 bảng sau thành bảng $n\times n$ thỏa mãn điều kiện bài toán

$$\begin{array}{ccccccccc}
I & M & O & I & M & O & I & M & O\\
I & M & O & I & M & O & I & M & O\\
I & M & O & I & M & O & I & M & O\\
M & O & I & M & O & I & M & O & I\\
M & O & I & M & O & I & M & O & I\\
M & O & I & M & O & I & M & O & I\\
O & I & M & O & I & M & O & I & M\\
O & I & M & O & I & M & O & I & M\\
O & I & M & O & I & M & O & I & M
\end{array}$$

• Giả sử có một cách viết thỏa mãn điều kiện của bài toán. Với mỗi $1\le i,j\le n$, đặt $a_{ij}=1$ nếu ô $(i;j)$ viết chữ I, $a_{ij}=-1$ nếu ô $(i;j)$ viết chữ M và $a_{ij}=0$ nếu ô $(i;j)$ viết chữ O. Khi đó ta có ma trận cỡ $n\times n$ có tổng các phần tử trên mỗi hàng, mỗi cột đều bằng 0. Do $n=3m$ nên viết ma trận A dưới dạng

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$$

trong đó $A_{ij}, 1\le i,j\le 3$ là các ma trận vuông cấp m. Từ tính chất của ma trận A ta dễ dàng chứng minh được ma trận A_{22} có tổng các phần tử bằng 0, hay số chữ I và chữ M trong ma trận A_{22} bằng nhau. Lập luận tương tự (đặt $a_{ij}=1$ nếu ô $(i;j)$ viết chữ I, $a_{ij}=-1$ nếu ô $(i;j)$ viết chữ O và $a_{ij}=0$ nếu ô $(i;j)$ viết chữ M) ta chứng minh được số chữ I, M,

O trong bảng ứng với ma trận A_{22} bằng nhau. Điều đó chứng tỏ m chia hết cho 3. Vậy n chia hết cho 9.

Bài toán 2 (*Chọn đội tuyển PTNK - ĐHQG TP.HCM*). *Trong một hệ thống máy tính, mỗi máy được kết nối với ít nhất 30% số máy khác của hệ thống. Hệ thống này có một chương trình ngăn chặn và cảnh báo khá tốt, do đó khi một máy tính bị virus, nó chỉ đủ thời gian lây lan cho các máy tính khác có kết nối trực tiếp với máy tính đó. Chứng minh dù vậy, kẻ tấn công luôn có thể chọn ra hai máy tính trong hệ thống mà nếu thả virus vào hai máy tính đó thì có ít nhất 50% máy tính của hệ thống bị nhiễm virus.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử hệ thống có 100 máy tính. Với mỗi $1 \le i, j \le 100$, đặt $a_{ij} = 1$ nếu $i \ne j$ và máy tính i có kết nối trực tiếp với máy tính j, $a_{ij} = 0$ trong các trường hợp còn lại. Đặt $A = (a_{ij})$. Ta có A là ma trận vuông cấp 100 mà mỗi hàng, mỗi cột của nó ít nhất 30 số 1 và $a_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \le i, j \le 100$.

Gọi m là hàng nhiều số 1 nhất của A và số số 1 của hàng m là k.

• Nếu $k \ge 50$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.

• Nếu $30 \le k < 50$ thì bằng cách đánh số lại các máy tính ta có thể coi máy tính m là máy tính thứ $k+1$ và có kết nối với các máy tính từ 1 đến k. Khi đó ma trận A có dạng

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & \\ B & 1 & C \\ & \ldots & \\ & 1 & \\ 11\ldots1 & 0 & 00\ldots0 \\ & 0 & \\ E & \ldots & D \\ & 0 & \end{pmatrix}.$$

trong đó B, C, D, E là các ma trận có cỡ lần lượt là $k \times k$, $k \times (99-k)$, $(99-k) \times (99-k)$, $(99-k) \times k$.

– Nếu trong ma trận D có một cột j có không ít hơn $50-k$ số 1 thì thả virus vào các máy j và $k+1$.

– Nếu tất cả các cột trong D đều có số số 1 ít hơn $50-k$, khi đó số số 1 trong C lớn hơn $(99-k)(k-20)$ và như vậy phải có ít nhất một hàng i của C có số số 1 không ít hơn $\left[\frac{(99-k)(k-20)}{k}\right] + 1$. Dễ dàng chứng minh được $\frac{(99-k)(k-20)}{k} + 1 \ge 50 - k, \forall 30 \le k < 50$. Khi đó thả hai con virus vào máy $k+1$ và i ta sẽ được kết luận của bài toán.

Bài toán 3 (*chọn đội tuyển Bà Rịa-Vũng Tàu*). *Cho n là số nguyên dương. Tìm số các hoán vị f của tập hợp $\{1;2;3;....;n\}$ sao cho $T = \sum_{i=1}^{n} |f(i) - i|$ lớn nhất.*

Lời giải. Với mỗi $1 \le i, j \le n$, đặt $a_{ij} = |f(i) - i|$ với $f(i) = j$. Xét ma trận

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ldots & n-4 & n-3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \ldots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài toán trở thành: Tìm số cách chọn n phần tử của ma trận A sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số được chọn và tổng các số được chọn lớn nhất.

TH1: n là số chẵn. Đặt $n = 2m$. Viết ma trận A dưới dạng $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ trong đó

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m-1 \\ 1 & 0 & \ldots & m-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m-1 & m-2 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} m & m+1 & \ldots & n-1 \\ m-1 & m & \ldots & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} m & m-1 & \ldots & 1 \\ m+1 & m & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n-2 & \ldots & m \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m-1 \\ 1 & 0 & \ldots & m-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m-1 & m-2 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Chọn tùy ý m phần tử của C (hoặc D) sao cho trên mỗi hàng, mỗi cột của C (hoặc D) có đúng một phần tử thì tổng của các phần tử được chọn không đổi và bằng m^2. Trên các cột của A, chọn lần lượt các số $b_1; b_2; ...; b_n$ tùy ý sao cho trên mỗi hàng của A có đúng một phần tử. Ta chứng minh $\sum_{j=1}^{n} b_j$

lớn nhất khi $b_1;b_2;...;b_m$ được chọn trên D và $b_{m+1};b_{m+2};...;b_n$ được chọn trên C. Thật vậy, giả sử có $b_{j_1}=|j_1-i_1|, 0\le i_1, j_1<m$ được chọn trong B. Khi đó có một cột $j_2\ge m$ mà số được chọn trên đó nằm trong E hay $b_{j_2}=|j_2-i_2|, m\le i_2, j_2\le n$.

Khi đó tổng của các số được chọn là

$$T'=2m^2-(j_2-i_1)-(i_2-j_1)+|j_1-i_1|+|j_2-i_2|.$$

Dễ dàng kiểm tra được $T'<2m^2$. Vậy $\sum_{j=1}^{n} b_j$ lớn nhất khi $b_1;b_2;...;b_m$ được chọn trên D và $b_{m+1};b_{m+2};...;b_n$ được chọn trên C hay T lớn nhất khi và chỉ khi $f(1),f(2),....,f(m)$ là hoán vị của $\{m+1,m+2,...,n\}$ và $f(m+1),f(m+2),....,f(n)$ là hoán vị của $\{1,2,...,m\}$. Vậy có $\left(\frac{n}{2}!\right)^2$ hoán vị thỏa mãn bài toán

TH2: n lẻ. Đặt $n=2m+1$. Lập luận tương tự như trường hợp 1 ta có T lớn nhất khi và chỉ khi $f(1),f(2),....,f(m)$ là hoán vị của $\{m+2,m+3,...,n\}$ và $f(m+1),f(m+2),....,f(n)$ là hoán vị của $\{1,2,...,m+1\}$ hoặc $f(1),f(2),...,f(m+1)$ là hoán vị của $\{m+1,m+2,...,n\}$ và $f(m+2),f(m+3),...,f(n)$ là hoán vị của $\{1;2;...;m\}$. Số hoán vị thỏa mãn một trong hai điều kiện trên là $2(m+1)!m!$. Số hoán vị có $f(m)=m$ là $(m!)^2$. Vậy số hoán vị thỏa mãn bài toán là

$$2(m+1)!m!-(m!)^2=(m!)^2(2m+1)=n\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)^2.$$

Bài toán 4 (*IMO 2005*). *Trong một cuộc thi toán có n thí sinh $(n\in\mathbb{N}, n\ge 5)$ và 6 bài toán được đặt ra. Biết rằng, với mỗi hai bài toán thì có nhiều hơn $\frac{2}{5}$ tổng số thí sinh cùng giải được và không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh sao cho mỗi người giải được đúng 5 bài toán.*

Lời giải. Với mỗi $1\le i\le 6, 1\le j\le n$, đặt $a_{ij}=1$ nếu người j giải được bài i và $a_{ij}=0$ nếu người j không giải được bài i. Khi đó ta có ma trận $A=(a_{ij})$ cỡ $6\times n$ mà trên mỗi cột của nó có nhiều nhất 5 số 1, hai hàng bất kì có nhiều hơn $\frac{2}{5}n$ cột chung (cột chung là cột mà các phần tử của hai hàng trên mỗi cột đó đều là số 1). Ta chứng minh bài toán bằng phản chứng bằng cách đếm số cặp số 1 trên các cột của A. Gọi T là số cặp số 1 như vậy. Giả sử chỉ có nhiều nhất một thí sinh giải được 5 bài toán, còn lại giải được không quá 4 bài. Khi đó A có nhiều nhất 1 cột có năm số 1 và các cột còn lại có nhiều nhất bốn số 1. Vậy $T\le(n-1)C_4^2+C_5^2=6n+4$. (1)

Giả sử $n=5p+k, k=0,1,2,3,4$. Do mỗi hai hàng của A có nhiều hơn $\frac{2}{5}n$ cặp số 1 chung nên:

– Với $k=0$ thì với mỗi hai bài có không ít hơn $2p+1$ thí sinh cùng giải được hay $T\ge 15(2p+1)$. Điều này mâu thuẫn với (1).

– Bằng cách làm tương tự ta cũng có kết quả tương tự cho $k=1,3,4$. $k=1, 3, 4$

– Với $k=2$. Khi đó ta có $30p+15\le T\le 30p+16$.

Nếu $T<6n+4$ thì có ít nhất một cột của A có 3 số 1. Khi đó

$T\le(n-2)C_4^2+C_5^2+C_3^2=6n+1=30p+13<30p+15$.

Vô lí. Vậy $T=30p+16$. Khi đó có 2 bài có $2p+2$ thí sinh cùng giải được, còn với mỗi hai bài còn lại có $2p+1$ thí sinh cùng giải được. Như vậy, có đúng một người giải được 5 bài và $n-1$ người giải được đúng 4 bài. Không mất tính tổng quát ta coi hai bài có cùng $2p+2$ thí sinh giải được là bài 1 và 2 và thí sinh giải được 5 bài là thí sinh n. Gọi B là ma trận có được từ A khi bỏ đi cột n. Ta có mỗi cột của B có đúng 4 số 1. Ta sẽ tính số số 1 trên mỗi hàng của B.

TH1: Thí sinh n làm được cả hai bài 1 và 2. Giả sử thí sinh n không làm được bài 6. Số cặp số 1 chung của mỗi hai hàng (1;2),(1;6),(2;6), (3;6);(4;6);(5;6) là $2p+1$, số cặp số 1 chung của mỗi hai hàng còn lại bằng $2p$. Do mỗi số 1 của hàng 1 trong B thì có 3 cặp số 1 nằm ở 3 trong số 5 cặp hàng: (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6) nên số số 1 của hàng 1 bằng $\frac{10p+2}{3}$. Tương tự ta có số số 1 của các hàng 2, 3, 4, 5, 6 lần lượt là

$$\frac{10p+2}{3};\frac{10p+1}{3};\frac{10p+1}{3};\frac{10p+1}{3};\frac{10p+5}{3}$$

Từ kết quả trên suy ra các số $10p+1;10p+2;10p+5$ cùng chia hết cho 3. Vô lí.

TH2: Thí sinh n không làm được một trong hai bài 1 hoặc 2. Giả sử thí sinh n không làm được bài 1.

Tương tự trường hợp 1 ta tính được số số 1 trong mỗi hàng của ma trận B lần lượt là:

$\frac{10p+6}{3}; \frac{10p+2}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}; \frac{10p+1}{3}$

Suy ra các số $10p+1; 10p+2; 10p+6$ cùng chia hết cho 3. Vô lí.

II. Sử dụng ma trận để giải bài toán bằng quy nạp

Bài toán 5. (*Harvard-MIT Mathematics Tournament 2017*). *Trong một phòng có 2017 con ếch và 2017 con cóc. Mỗi con ếch là bạn của đúng hai con cóc. Gọi N là số cách ghép cặp mỗi con ếch với một con cóc là bạn của nó sao cho mỗi con cóc được ghép với không quá một con ếch. Gọi D là tập hợp các giá trị có thể của N. Tìm số phần tử của D và tổng tất cả các phần tử của D.*

Lời giải. Ta giải bài toán cho trường hợp tổng quát với n con ếch và n con cóc ($n > 1$). Với mỗi $1 \le i, j \le n$, đặt $a_{ij} = 1$ nếu con ếch i và con cóc j là bạn và $a_{ij} = 0$ trong trường hợp còn lại. Khi đó ta có ma trận $A = (a_{ij})$ vuông cấp n mà trên mỗi cột của nó có đúng hai số 1. Một cách ghép cặp thỏa mãn điều kiện bài toán là một cách chọn ra n số 1 trong A sao cho mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Như vậy nếu ma trận A có một hàng toàn số 0 thì $N = 0$. Tiếp theo ta chỉ xét trường hợp A là ma trận mà mỗi hàng của nó có ít nhất một số 1.

Với mỗi $n > 1$, đặt D_n là tập hợp các giá trị có thể của N. Ta sẽ chứng minh

$D_n = \left\{0;\ 2^k,\ 1 \le k \le \frac{n}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (1) bằng quy nạp.

Rõ ràng (1) đúng với $n = 2$

Giả sử (1) đúng với mọi $k < n$. Ta chứng minh (1) đúng với $k = n$.

Xét ma trận A vuông cấp n thỏa mãn điều kiện bài toán mà mỗi hàng của nó có ít nhất một số 1. Gọi S_n là số cách chọn ra n số 1 trong ma trận A sao cho mỗi hàng, mỗi cột của A có đúng một số 1. Không mất tính tổng quát ta coi hàng n của A có ít số 1 nhất, khi đó hàng n hoặc có một số 1 hoặc có 2 số 1.

TH1: Hàng n có một số 1 nằm ở cột j. Chọn số 1 ở hàng n là a_{nj} (có 1 cách chọn) rồi bỏ hàng n, cột j ra khỏi ma trận A ta sẽ được ma trận B cấp $n-1$ thỏa mãn điều kiện bài toán với $n-1$ con ếch và $n-1$ con cóc. Vì vậy $S_n = S_{n-1}$.

TH2: Hàng n có hai số 1. Khi đó mỗi hàng của A có đúng hai số 1. Giả sử hai số 1 ở hàng n là a_{nj_1} và a_{nj_2} và hai số 1 của cột j_1 nằm ở hàng i và n. Chọn số 1 ở hàng n có hai cách chọn. Mỗi cách chọn ở hàng n chẳng hạn đó là a_{nj_1}. Bằng cách bỏ đi hàng n và cột j_1 khỏi ma trận A ta được ma trận A_1 cấp $n-1$ có $2n-3$ số 1 mà mỗi cột của nó có đúng 2 số 1, hàng i có một số 1, các hàng còn lại có hai số 1. Lặp lại cách làm như ở trường hợp 1 ta được số cách chọn $n-1$ số 1 còn lại là S_{n-2}. Vậy $S_n = 2S_{n-2}$. Vậy (1) đúng với mọi $n > 1$. Với $n = 2017$ ta có $D = D_{2017} = \{0; 2; 4; ....; 2^{1008}\}$.

Bài toán 6 (*VMO 2015*). *Có m học sinh nữ và n học sinh nam $(m, n \ge 2)$ tham gia một liên hoan song ca. Tại liên hoan song ca, mỗi buổi diễn là một chương trình văn nghệ. Mỗi chương trình văn nghệ bao gồm một một số bài hát song ca nam - nữ mà trong đó mỗi đôi nam nữ chỉ hát với nhau không quá một bài và mỗi học sinh đều được hát ít nhất một bài. Hai chương trình được coi là khác nhau nếu có một cặp nam – nữ hát với nhau ở chương trình này nhưng không hát với nhau ở chương trình kia. Liên hoan song ca chỉ kết thúc khi tất cả các chương trình khác nhau có thể có đều được biểu diễn, mỗi chương trình được biểu diễn đúng một lần.*

a) Một chương trình được gọi là lệ thuộc vào học sinh X nếu như hủy tất cả các bài song ca mà X tham gia thì có ít nhất một học sinh khác không được hát bài nào trong chương trình đó. Chứng minh rằng trong tất cả các chương trình lệ thuộc vào X thì số chương trình có số lẻ bài hát bằng số chương trình có số chẵn bài hát.

b) Chứng minh rằng ban tổ chức liên hoan có thể sắp xếp các buổi biểu diễn sao cho số các bài hát tại hai buổi biểu diễn liên tiếp bất kỳ không cùng tính chẵn lẻ.

Lời giải. Với mỗi hai số nguyên i, j, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, đặt $a_{ij} = 1$ nếu bạn nữ i song ca với bạn nam j và $a_{ij} = 0$ trong trường hợp còn lại. Khi đó mỗi chương trình văn nghệ tương ứng với một ma trận cỡ $m \times n$ mà mỗi hàng và cột của nó đều có ít nhất một số 1. Hai chương trình khác nhau nếu hai ma trận khác nhau. Số tiết mục song ca của mỗi chương trình chính bằng số số 1 có trong ma trận tương ứng.

a) Gọi S là tập hợp các chương trình phụ thuộc vào người X. Không mất tính tổng quát ta coi người X là người nam 1. Gọi E là tập hợp các ma trận tương ứng với mỗi chương trình trong S và F là tập hợp các ma trận cỡ $m \times (n-1)$ có các phần tử bằng 0 hoặc 1 sao cho trên mỗi cột có ít nhất một số 1 và có ít nhất một hàng toàn số 0. Khi đó, nếu ta bỏ cột 1 của ma trận A trong E ta sẽ được một ma trận thuộc F và bằng cách thêm vào mỗi ma trận trong F một cột làm cột 1 sao cho mỗi hàng của ma trận mới có ít nhất một số 1 ta được một ma trận thuộc E. Lấy ma trận B trong F có k hàng toàn số 0. Hiển nhiên ta có $k < m$. Gọi a là số số 1 có trong B. Khi đó mỗi cách thêm vào B một cột làm cột 1 sao cho cột đó có ít nhất k số 1 và có đúng k số 1 ở k hàng toàn số 0 của B ta sẽ được một ma trận thuộc E. Bằng cách làm như vậy ta có thể tạo ra C_{m-k}^{0} ma trận có $a+k$ số 1, C_{m-k}^{1} ma trận có $a+k+1$ số 1, …, C_{m-k}^{m-k} ma trận có $a+m-k$ số 1. Do

$$C_{m-k}^{0}-C_{m-k}^{1}+C_{m-k}^{2}-....+(-1)^{m-k}C_{m-k}^{0}=0$$

nên trong số các ma trận tạo ra từ ma trận B như trên có số ma trận có chẵn số 1 bằng với số ma trận có lẻ số 1. Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

b) Ta chia tập hợp các chương trình thỏa mãn điều kiện bài toán thành hai loại là S_1 những chương trình phụ thuộc vào học sinh nam 1 và S_2 là những chương trình không phụ thuộc vào học sinh nam 1.

+ Theo a) ta có trong S_1 số chương trình có số tiết mục song ca chẵn bằng số chương trình có số tiết mục song ca lẻ.

+ Ta sẽ chứng minh số chương trình có số tiết mục song ca chẵn và số chương trình có tiết mục song ca lẻ trong S_2 hơn kém nhau 1, bằng quy nạp theo n.

Rõ ràng khẳng định đó đúng với $n=2$. Giả sử khẳng định đó đúng với $n-1$. Không mất tính tổng quát ta coi n là số chẵn. Gọi $D_{m\times n}$ là tập hợp tất cả các chương trình thỏa mãn bài toán với m nữ và n nam. $M_{m\times n}$ là tập hợp các ma trận tương ứng với mỗi chương trình trong $D_{m\times n}$.

Nhận xét: Nếu lấy B là ma trận trong $M_{m\times(n-1)}$ và thêm vào B một cột có ít nhất một số 1 và còn lại bằng 0 ta được ma trận thuộc $M_{m\times n}$ ứng với một chương trình trong S_2. Lấy một ma trận B tùy ý trong $M_{m\times(n-1)}$. Bằng cách làm tương tự như a) ta có:

- Nếu B có chẵn số 1, thì số chương trình có số tiết mục song ca chẵn nhiều hơn chương trình có số tiết mục song ca lẻ 1 chương trình.
- Nếu B có lẻ số 1 thì số chương trình có số tiết mục song ca lẻ nhiều hơn số chương trình có số tiết mục song ca chẵn 1 chương trình. Mặt khác trong $M_{m\times(n-1)}$ số ma trận có chẵn số 1 hơn kém số ma trận có lẻ số 1 đúng 1 ma trận. Vậy số chương trình có số tiết mục song ca chẵn và số chương trình có số tiết mục song ca lẻ trong S_2 hơn kém nhau 1.

Bài toán 7 (*VMO* 2018). *Với mỗi số nguyên dương n và d, gọi $S_n(d)$ là tập hợp tất cả các bộ số có thứ tự $(x_1, x_2, ..., x_d)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

i) $x_i \in \{1;2;...;n\}, \forall 1\le i\le d$.

ii) $x_{i+1}\ne x_i, \forall 1\le i\le d-1$.

iii) Không tồn tại các số $1\le i<j<k<l\le d$ sao cho $x_i=x_k$ và $x_j=x_l$.

a) Tìm số phần tử của $S_3(5)$.

b) Chứng minh $S_n(d)\ne\varnothing$ khi và chỉ khi $d\le 2n-1$.

Lời giải. Với mỗi $1\le i\le d, 1\le j\le n$ đặt $a_{ij}=1$ nếu $x_i=j$ và $a_{ij}=0$ trong những trường hợp còn lại. Khi đó mỗi phần tử của $S_n(d)$ là ma trận $A=(a_{ij})$ cỡ $d\times n$ thỏa mãn:

– Trên mỗi cột của A có không quá ba số 1 và không có hai số 1 nằm trên hai hàng cạnh nhau, mỗi hàng của A có đúng một số 1.

– Không tồn tại $1\le i<m<k<p\le d$ sao cho $a_{ij}=a_{ik}=1$ và $a_{ml}=a_{pl}=1, \forall 1\le j,l\le n$.

Ta đồng nhất mỗi phần tử của $S_n(d)$ với một phần tử của tập hợp $M_{d\times n}$ các ma trận A như trên. Lấy A tùy ý thuộc $M_{d\times n}$. Ta có

TH1: A có một cột gồm ba số 1. Bằng cách bỏ đi hai hàng có số 1 nằm trên cột có ba số 1 ta được một ma trận thuộc $M_{(d-2)\times n}$.

TH 2: A có một cột có hai số 1. Bằng cách bỏ đi cột đó và hai hàng có số 1 trên cột đó ta được một ma trận của $M_{(d-2)\times(n-1)}$.

a) Dễ đếm được $S_3(5)$ có 12 phần tử (là các hoán vị giữa các cột của hai ma trận

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}).$$

b) Dễ dàng kiểm tra được $S_n(d)\ne\varnothing, \forall d\le 2n-1$ và nếu $S_n(d)=\varnothing$ thì $S_n(k)=\varnothing, \forall k>d$. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $S_n(2n)=\varnothing$. (1)

Rõ ràng (1) đúng với $n=1$, $n=2$. Giả sử (1) đúng với $n>1$ ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n+1$. Giả sử $S_{n+1}(2n+2) \neq \varnothing$. Khi đó tồn tại ma trận $A \in M_{(2n+2)\times(n+1)}$.

– Nếu A có một cột có hai số 1thì bỏ cột và hai hàng có số 1 trên cột đó ta được ma trận thuộc $M_{2n\times n}$, suy ra $S_n(2n) \neq \varnothing$. Vô lí.

– Nếu A có một cột toàn số không thì bỏ đi cột toàn số 0 ta được một ma trận thuộc $M_{(2n+2)\times n}$, suy ra $S_n(2n+2) \neq \varnothing$. Vô lí.

– Nếu A không có cột nào có hai số 1 và không có cột nào toàn số 0, khi đó các cột của A hoặc có ba số 1 hoặc một số 1. Giả sử A có k cột có ba số 1. Bằng cách làm như trường hợp 1 ta chứng minh được: $n = 2k-1$. Mặt khác bằng quy nạp ta chứng minh được với k cột mà mỗi cột có ba số 1 thì phải có nhiều hơn k cột có một số 1. Như vậy $2k = n+1 \geq 2k+1$, vô lí. Vậy $S_n(2n) = \varnothing$ hay $S_n(d) = \varnothing, \forall d > 2n-1$.

BÀI TẬP

1. (*IMC* 2002) Trong một kì thi toán có 2000 thí sinh tham gia. Đề thi có 6 bài toán. Biết rằng mỗi bài toán được giải bởi ít nhất 120 thí sinh. Chứng minh, có ít nhất hai thí sinh sao cho mỗi bài toán được giải bởi ít nhất một trong hai thí sinh.

2. (*Olympic toàn Nga* 1996) Có 1600 ủy viên tham gia vào 16000 ủy ban. Biết rằng mỗi ủy ban có đúng 80 ủy viên. Chứng minh rằng tồn tại hai ủy ban mà số ủy viên chung của hai ủy ban đó không ít hơn 4.

3. Gọi $A_1; A_2; ...; A_7$ là các tập con của tập hợp $A = \{1;2;3;...;7\}$, thỏa mãn $|A_i| \geq 3,\ \forall i = 1,2,...,7$ và với mọi $m, n \in A$ thì có duy nhất i sao cho $m, n \in A_i$. Chứng minh rằng

$$|A_i \cap A_j| = 1, \forall i, j = 1,2,...,7 \text{ và } i \neq j.$$

4. (*Switzerland* 2010) Trong một ngôi làng có ít nhất một người và một số hiệp hội. Mỗi người trong làng là thành viên của ít nhất k hiệp hội và với hai hiệp hội bất kì thì có đúng một thành viên chung. Chứng minh rằng có ít nhất k hiệp hội có số thành viên như nhau.

5. (*Iran* 2011) Một trường học có n sinh viên và một số lớp học để sinh viên có thể tham gia. Mỗi sinh viên có thể tham gia một hoặc một số lớp học. Biết rằng, mỗi lớp học có ít nhất 2 sinh viên và nếu hai lớp học có ít nhất một sinh viên chung thì số sinh viên của mỗi lớp là khác nhau. Chứng minh rằng số lớp học không nhiều hơn $(n-1)^2$.

6. Gọi $A_1, A_2, ..., A_k$ là các tập con của $\{1;2;3;...;n\}$ sao cho A_i không là tập con của A_j với mọi $i \neq j$.

Chứng minh $k \leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

7. (*VMO* 2003) Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ gọi s_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của tập hợp $E_n = \{1, 2, ..., n\}$, mà mỗi hoán vị có tính chất $1 \leq |a_i - i| \leq 2$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng với $n > 6$ ta có $1,75 s_{n-1} < s_n < 2s_{n-1}$.

8. (*VMO* 2016) Người ta trồng hai loại cây trên một miếng đất hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (mỗi ô một cây). Một cách trồng được gọi là ấn tượng nếu như:

i) Số lượng cây được trồng của hai loại cây bằng nhau.

ii) Số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi hàng không nhỏ hơn một nửa số ô của hàng đó và số lượng chênh lệch của hai loại cây trên mỗi cột không nhỏ hơn một nửa số ô của cột đó.

a) Hãy chỉ ra một cách trồng cây ấn tượng khi $m = n = 2016$.

b) Chứng minh nếu có một cách trồng ấn tượng thì cả m và n đều là bội của 4.

9. (*Hà Tĩnh* 2017) Một lớp chuyên toán có 35 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm muốn tổ chức một cuộc trải nghiệm gồm 4 chuyến đi thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

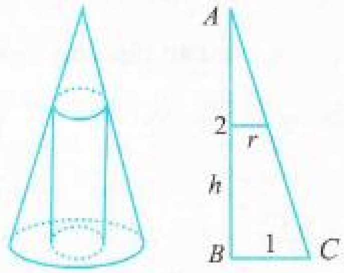
a) Mỗi người trong lớp tham gia ít nhất một chuyến đi.

b) Với mọi $k \in \{1;2;3\}$, chuyến đi thứ $k+1$ phải có ít nhất một học sinh tham chuyến đi thứ k cùng tham gia. Tìm số cách để thầy giáo thực hiện cuộc trải nghiệm đó.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 32

***Problem.** Given a right cone with the height 2 and the radius of the base 1. A right circular cylinder is inscribed in the cone. When does the cylinder have maximal volume?*



Solution. Let the height of the cylinder be h. Then the radius of the base of the cylinder will be $r = 1 - \frac{h}{2}$ (using Thales's theorem, see picture).

Hence the volume of the cylinder is

$$V(h) = h.S_{base} = h.\pi\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2.$$

Since $h + \left(1 - \frac{h}{2}\right) + \left(1 - \frac{h}{2}\right) = 2 = \text{const}$, we see that $V(h)$ obtains its maximal value when

$h = 1 - \frac{h}{2}$ or $h = \frac{2}{3}$ (using Cauchy's equality).

Remark. We can use derivative test to find the (local) maximal point of the funtion

$$V(h) = h.\pi\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2.$$

TỪ VỰNG

Right circular cone:	khối nón đứng, đáy là hình tròn
Right circular cylinder:	khối trụ đứng, đáy là hình tròn
Inscribe:	nội tiếp
Volume:	thể tích
Derivative:	đạo hàm
Local maximal point:	cực đại địa phương

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

***Bài toán.** Tìm biểu thức tọa độ của phép biến hình* $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$ *biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' với* $A(1;2)$, $B(2;2)$, $C(1;4)$, $A'(4;3)$, $B'(6;3)$, $C'(4;7)$.

Lời giải. Chúng ta nhận thấy rằng có thể sử dụng phép vị tự tâm M, tỷ số vị tự bằng 2, trong đó M là giao điểm của AA' và BB' biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Nhưng do M khác gốc tọa độ nên không dễ để tìm biểu thức tọa độ tương ứng. Để tìm được biểu thức tọa độ ở đề bài dễ dàng hơn, ta kết hợp phép vị tự với tâm tại gốc tọa độ và phép tịnh tiến như sau: Phép vị tự tâm tại gốc tọa độ, tỉ số vị tự bằng 2 biến ΔABC thành $\Delta A''B''C''$ với $A''(2;4), B''(4;4), C''(2;8)$. Biểu thức tọa độ của phép vị tự này là $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$. Sau đó chúng ta tịnh tiến $A''B''C''$ thành $A'B'C'$ với phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{B''B'} = (2;-1)$. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến này là $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$. Do đó biểu thức tọa độ của phép biến hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ là $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$. ❒

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Tăng Văn Minh Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 12. *Cho tam giác ABC có $BC < BA$, đường phân giác BE và đường trung tuyến BD (E, D thuộc AC). Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BE tại F, cắt BD tại G. Chứng minh rằng $GE \parallel BC$.*

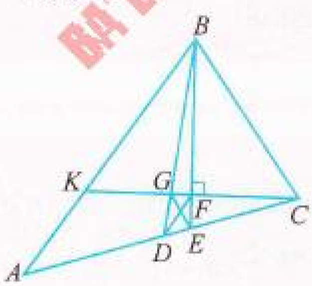
Phân tích. Một trong những phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song là sử dụng định lí Thales đảo.

Trong tam giác BCD:

$$GE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{CE}{ED}.$$

***Định hướng* 1.** *Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và hệ quả của định lí Thales để đánh giá các tỉ số* $\frac{BG}{GD}$ *và* $\frac{CE}{ED}$.

***Cách* 1.** Gọi K là giao điểm của CG và AB. Ta có ΔKBC có BF vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên ΔKBC cân tại B suy ra



$BK = BC$ và $FC = FK$.

Lại có D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của $\Delta AKC \Rightarrow DF = \frac{1}{2}AK$, $DF \parallel AK$. Ta có

$$\frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} \text{ (do } DF \parallel BK) \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} \quad (1)$$

Vì BE là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ nên ta có:

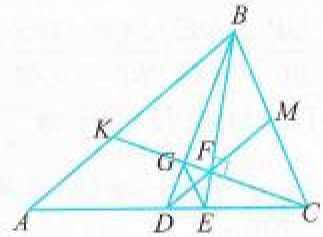
$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{CE}{AE - CE} = \frac{BC}{BA - BC}$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{2DE} = \frac{BC}{AK} = \frac{BK}{AK} \Rightarrow \frac{CE}{DE} = \frac{2BK}{AK} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow GE \parallel BC$ (theo định lý Thales đảo).

***Định hướng* 2.** *Sử dụng định lý Ceva.*

***Cách* 2.** Gọi K là giao điểm của CG và AB. Ta có ΔKBC có BF vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên BF cũng là trung tuyến suy ra $FC = FK$. Lại có D là trung điểm AC, nên DF là đường trung bình của $\Delta AKC \Rightarrow DF \parallel AK$. Gọi M là giao điểm của DF và BC. ΔABC có $DM \parallel AB$ (do $DF \parallel AK$) và $AD = DC \Rightarrow MB = MC$ (1)



ΔBCD có BE, CG, DM đồng quy tại F, theo định lý Ceva, ta có: $\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{EC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{BG}{GD} \cdot \frac{DE}{CE} = 1 \Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow GE \parallel BC$$

(theo định lý Thales đảo).

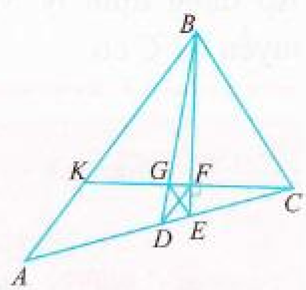
***Định hướng* 3.** *Sử dụng hệ quả của định lí Thales để đánh giá các tỉ số* $\frac{BG}{GD}$ *và* $\frac{CE}{ED}$.

***Cách* 3.** Ta có

$$AE = AD + DE$$
$$= CD + DE = CE + 2DE$$

hay $CE = AE - 2.DE$, suy ra

$$\frac{CE}{DE} = \frac{AE - 2DE}{DE} = \frac{AE}{DE} - 2.$$



Gọi K là giao điểm của CG và AB. Ta có ΔKBC có BF vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên BF cũng là trung tuyến suy ra $FC = FK$. Lại có D là trung điểm AC nên DF là đường trung bình của ΔAKC, nên

$$DF \parallel AK,\ AK = 2.DF$$

$$\Rightarrow \frac{BG}{GD} = \frac{BK}{DF} = \frac{2BK}{AK} = \frac{2.(AB - AK)}{AK}$$

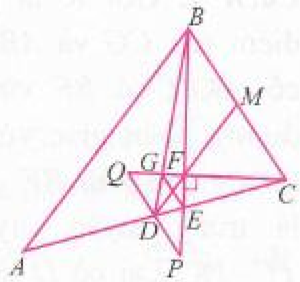
$$= \frac{2AB}{AK} - 2 = \frac{AB}{DF} - 2 = \frac{AE}{DE} - 2 = \frac{CE}{DE}.$$

☞ Vậy $\dfrac{BG}{GD}=\dfrac{CE}{DE}$ suy ra $GE \parallel BC$ (theo định lý Thales đảo).

Cách 4. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC cắt BF và CF theo thứ tự tại P và Q. Ta có:

$$\frac{DP}{MB}=\frac{DQ}{MC}\left(=\frac{DF}{FM}\right)\Rightarrow DP=DQ \text{ (do } MC=MB) \ (1)$$

$$\frac{DP}{BC}=\frac{DE}{EC};\frac{DQ}{BC}=\frac{DG}{GB} \ (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{DG}{GB}=\frac{DE}{EC}\Rightarrow GE \parallel BC$$

(theo định lý Thales đảo).

ĐẬU CÔNG NHO
(GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

➢***Nhận xét.*** Ngoài 4 cách giải trên của tác giả *Đậu Công Nho*, Tòa soạn nhận được một cách giải tương tự cách 1 trên của bạn *Chu Ngọc Chiến*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**, hai cách giải sử dụng định lý Menelaus, sử dụng định lý Ceva tương tự cách 2 của bạn *Lê Quốc Bửu*, 9B, THCS Mạc Đĩnh Chi, **Tây Ninh**. Cách giải theo hướng sử dụng định lý Menelaus của bạn *Bửu* như sau:

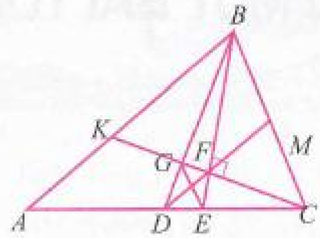
Áp dụng định lý Menelaus cho ΔBDM với cát tuyến GFC có

$$\frac{GB}{GD}\cdot\frac{FD}{FM}\cdot\frac{CM}{CB}=1\Rightarrow\frac{GB}{GD}=\frac{2FM}{FD} \quad (1)$$

Tương tự áp dụng định lý Menelaus cho ΔCDM với cát tuyến EFB có:

$$\frac{EC}{ED}\cdot\frac{FD}{FM}\cdot\frac{BM}{BC}=1\Rightarrow\frac{EC}{ED}=\frac{2.FM}{FD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{GB}{GD}=\dfrac{EC}{ED}\Rightarrow GE \parallel BC$ (theo định lý Thales đảo).



LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 14 sau đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.6.2018.

BÀI TOÁN 14. *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang ($AD \parallel BC$) và $AD=2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (MND). Tính tỉ số $\dfrac{CP}{CS}$.*

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

****

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 25)

Problem T9/491. Assume that a, b, c are three non-negative numbers such that $a+b+c=3$. Find the maximum value of the expression

$$P=a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}.$$

TOWARDS MATHEMMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/491. For every $n\in\mathbb{N}$, let $F_n=2^{2^n}+1$. For each $n\in\mathbb{N}$, let q be a prime divisor of F_n, show that $2^{n+1} \mid q-1$. Furthermore, if $n\geq 2$, show even more that $2^{n+2} \mid q-1$.

Problem T11/491. Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfying

$$f(x)f(y)+f(xy)+f(x)+f(y)=f(x+y)+2xy$$

for all $x,y\in\mathbb{R}$.

Problem T12/491. Given a convex hexagon $ABCDEF$ circumscribing a circle (O). Assume that O is the circumcenter of the triangle ACE. Prove that the circumcircles of the triangles OAD, OBE and OCF has another common point besides O.

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở Tạp chí TH&TT số 489, T3.2018.

Bài 20 *(USA TST 2003). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p, q, r) sao cho*

$$p \mid q^r + 1,\ q \mid r^p + 1,\ r \mid p^q + 1.$$

Lời giải. Xét hai trường hợp

TH1: p, q, r khác 2. Khi đó $p \nmid q^r - 1,\ q \nmid r^p - 1,$ $r \nmid p^q - 1$. Vì vậy ta có:

$$\begin{cases} p \mid q^{2r} - 1 \\ q \mid r^{2p} - 1 \\ r \mid p^{2q} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ord}_p(q) \in \{1, 2, 2r\} \mid p - 1 \\ \text{ord}_q(r) \in \{1, 2, 2p\} \mid q - 1 \\ \text{ord}_r(p) \in \{1, 2, 2q\} \mid r - 1 \end{cases}$$

vì $\text{ord}_p(q) \mid 2r, \text{ord}_p(q) \neq r; \text{ord}_q(r) \mid 2p, \text{ord}_q(r) \neq p;$ $\text{ord}_r(p) \mid 2q, \text{ord}_r(p) \neq q.$

Giả sử $\text{ord}_p(q), \text{ord}_q(r), \text{ord}_r(p) \in \{1, 2\}$.

Nếu $\text{ord}_p(q) = 1 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod p$;

Nếu $\text{ord}_p(q) = 2 \Rightarrow q^2 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow q \equiv -1 \pmod p$.

Lập luận tương tự cho $\text{ord}_q(r), \text{ord}_r(p)$, ta được:

$$\begin{cases} q \equiv \pm 1 \pmod p \\ r \equiv \pm 1 \pmod q \\ p \equiv \pm 1 \pmod r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \pm 1 > 2p \\ r \pm 1 > 2q \\ p \pm 1 > 2r \end{cases}$$

do $q \pm 1 \neq p$, $r \pm 1 \neq q$, $p \pm 1 \neq r$ và chúng là lẻ. Nhưng hệ các BĐT trên không thể xảy ra. Vì vậy không mất tính tổng quát, ta đặt $\text{ord}_p(q) = 2r$. Theo (**) ta có $2r \mid p - 1$, nhưng do p, r lẻ nên $r \mid p - 1$. Tuy nhiên $r \mid p^q + 1$, nhưng

$$p^q + 1 \equiv 2 \neq 0 \pmod r: \text{ mâu thuẫn.}$$

TH2: Không mất tính tổng quát giả sử $p = 2$. Từ $p \mid q^r + 1 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod 2$. Do $r \mid 2^q + 1 \Rightarrow r$ là số lẻ. Suy ra $r \nmid 2p^q - 1$ và $q \nmid r^2 - 1$. Ta có:

$$\begin{cases} q \mid r^4 - 1 \\ r \mid 2^{2q} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ord}_q(r) \in \{1, 4\} \mid q - 1 \\ \text{ord}_r(2) \in \{1, 2, 2q\} \mid r - 1 \end{cases} \quad (*)$$

Nếu $\text{ord}_r(2) = 1$ thì $2 \equiv 1 \pmod r$: vô lý. Nếu $\text{ord}_r(2) = 2$ thì $2^2 \equiv 1 \pmod r$ hay $r = 3$. Do đó $q \mid 3^4 - 1 = 80$. Do $q \neq 2$ nên thử lại ta thấy $q = 5$ thỏa mãn (*). Với $(p, q, r) = (2, 5, 3)$ ta có:

$$2 \mid 5^3 + 1 = 126,\ 5 \mid 3^2 + 1 = 10,\ 3 \mid 2^5 + 1 = 33.$$

Từ đó ta có các nghiệm (p, q, r) là $(2, 5, 3)$, $(3, 2, 5)$, $(5, 3, 2)$.

Xét $\text{ord}_r(2) = 2q$, theo (**) ta có $2q \mid r - 1$. Vì vậy từ $q \neq 2$ ta có $r \equiv 1 \pmod q$. Tuy nhiên $q \mid r^p + 1$, nhưng $r^p + 1 \equiv 2 \neq 0 \pmod q$, mâu thuẫn.

Vậy các bộ ba số nguyên tố (p, q, r) cần tìm là:

$$(2, 5, 3), (3, 2, 5), (5, 3, 2).$$

Nhận xét. 1) Nhắc lại rằng với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì bậc của a theo modulo m là số nguyên dương nhỏ nhất x sao cho $a^x \equiv 1 \pmod m$ và ký hiệu $\text{ord}_p(q)$.

Ví dụ: $\text{ord}_3 5 = 2$, $\text{ord}_9 2 = 6, \ldots$

2) Trong lời giải trên ta đã sử dụng định lí sau: *Với các số nguyên dương a, m nguyên tố cùng nhau thì* $a^n \equiv 1 \pmod m \Leftrightarrow \text{ord}_m a \mid n.$ (**)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.6.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 22. *Chứng minh rằng với mọi số thực α, phương trình*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$$

có một nghiệm (x_1, x_2, x_3, x_3) *mà* x_1, x_2, x_3, x_3 *là các số nguyên đều lớn hơn α.*

NHƯ HOÀNG *(Hà Nội)*

BẠN ĐỌC TRAO ĐỔI

Trong tạp chí TH&TT Số 490, tháng 04 năm 2018, tại chuyên mục "*Bạn có biết*" có bài viết về một mối liên hệ giữa các đa thức. Theo cảm nhận của tôi thì bài viết rất có ý nghĩa đối với những người yêu thích môn toán. Tôi không phải là người nghiên cứu nhiều về đa thức nhưng định lý Davenport đặc biệt gây ấn tượng mạnh đối với tôi vì nó cho ta một mối quan hệ đẹp về bậc của 2 đa thức nguyên tố cùng nhau.

Theo tôi được biết thì trong rất nhiều tài liệu viết về định lý này, khi chỉ ra dấu bằng, có thể do lịch sử để lại (Davenport đưa ra ví dụ này?), hầu hết các bài viết đều trích dẫn cặp đa thức

$$\begin{cases} f(t) = t^6 + 4t^4 + 10t^2 + 6 \\ g(t) = t^9 + 6t^7 + 21t^5 + 35t^3 + \dfrac{63}{2}t \end{cases}$$

để làm ví dụ khi bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Tuy nhiên, ví dụ này là khá cồng kềnh và chúng ta có thể thay thế bằng một ví dụ đơn giản hơn.

Nhắc lại Định lý Davenport:

Giả sử $f(t)$ và $g(t)$ là các đa thức nguyên tố cùng nhau có bậc khác 0. Khi đó ta có

$$\deg\left(f^3 - g^2\right) \geq \frac{1}{2}\deg f + 1.$$

Nhà toán học Anh
Harold Davenport
(1907 - 1969)

Nếu chúng ta chọn cặp đa thức $\begin{cases} f(t) = t^2 + 2 \\ g(t) = t^3 + 3t \end{cases}$

thì khi đó

$$\begin{aligned} f^3 - g^2 &= \left(t^6 + 6t^4 + 12t^2 + 8\right) - \left(t^6 + 6t^4 + 9t^2\right) \\ &= 3t^2 + 8 \end{aligned}$$

nên

$$\deg\left(f^3 - g^2\right) = \frac{1}{2}\deg f + 1 = 2.$$

Ví dụ này là ý kiến chủ quan của riêng tôi nên tôi xin đưa ra để bạn đọc biết và trao đổi.

PHAN THẾ HẢI

(GV Cao Đẳng Sư Phạm Bà Rịa – Vũng Tàu)

GIẢI ĐÁP: **KẾT QUẢ NÀO**

(Đề đăng trên TH&TT số 487, tháng 1 năm 2018)

Phân tích. Tổng của n số hạng đầu trong cấp số cộng có số hạng đầu tiên u_1 và công sai d là

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2u_1 + (n-1)d\right) = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2u_1 - d}{2}n$$

và là đa thức bậc không quá 2 của biến n, có số hạng tự do bằng 0. Trong khi đề bài cho $S_n = 2n^2 - n + 1$ có số hạng tự do bằng 1. Chứng tỏ không có cấp số cộng nào thỏa mãn giả thiết của bài toán. Vậy lời giải của cả ba bạn đều sai.

Lời giải đúng. Giả sử tồn tại cấp số cộng (u_n) có tổng n số hạng đầu là $S_n = 2n^2 - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$u_1 = S_1 = 2.1^2 - 1 + 1 = 2,\ u_1 + u_2 = S_2 = 2.2^2 - 2 + 1 = 7,$
$u_2 = 7 - u_1 = 7 - 2 = 5,\quad d = u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3.$

Dẫn tới $S_n = \frac{n}{2}\left(2u_1 + (n-1)d\right)$

$$= \frac{n}{2}\left(2.2 + (n-1).3\right) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

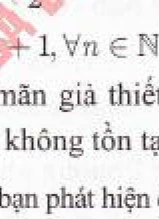
Điều này mâu thuẫn với $S_n = 2n^2 - n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy không có cấp số cộng nào thỏa mãn giả thiết bài toán, do đó tổng $u_{10} + u_{11} + ... + u_{100}$ không tồn tại.

Nhận xét. Trong các bài gửi về chỉ có hai bạn phát hiện đúng sai lầm. Tuyên dương hai bạn này là: **Thừa Thiên Huế**: *Lê Thị Thu Sương*, 10 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre**: *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ cày Nam, Bến Tre.

KIHIVI

PHẦN THƯỞNG
Được hay không?



Sau khi học xong bài vectơ trong không gian, thầy giáo cho một bài tập nâng cao cho lớp 11A1 và yêu cầu em nào giải đúng sẽ nhận được một phần thưởng rất đặc biệt từ thầy.

Bài toán: *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành và M là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) chứa AM lần lượt cắt các cạnh SB, SD tại B', D' khác S. Khẳng định sau đúng hay sai?*

$$\frac{4}{3} \le \frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \le \frac{3}{2}.$$

Tiết hình học hôm sau tại lớp 11A1, bạn *Phương Thảo* đã xung phong giải bài toán trên để được nhận thưởng . Dưới đây là lời giải của bạn *Phương Thảo*.

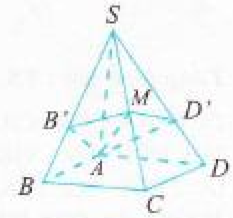
Lời giải. Đặt $\overrightarrow{SB'} = x\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD'} = y\overrightarrow{SD}\ \ (0 < x, y \le 1)$.

Ta có: $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC},$$

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA} + x\overrightarrow{SB},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD'} &= \overrightarrow{SD'} - \overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SD} \\ &= -\overrightarrow{SA} + y(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) \\ &= (y-1)\overrightarrow{SA} - y\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{SC}.\end{aligned}$$



Do $M \in (P)$ nên tồn tại hai số *m*, *n* sao cho

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB'} + n\overrightarrow{AD'} \Leftrightarrow -\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$
$$= (-m + n(y-1))\overrightarrow{SA} + (mx - ny)\overrightarrow{SB} + ny\overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -m + n(y-1) \\ \frac{1}{2} = ny \\ 0 = mx - ny \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2x} \\ n = \frac{1}{2y} \\ -1 = -m + n(y-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}(y-1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3.$$

Do $0 < x, y \le 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$, suy ra

$$y = \frac{x}{3x-1} \text{ với } \frac{1}{3} < x, y \le 1.$$

Do đó: $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = x + y = x + \frac{x}{3x-1}$

$$= \frac{1}{3}\left(3x - 1 + \frac{1}{3x-1}\right) + \frac{2}{3} \ge \frac{4}{3} \text{ (theo BĐT Cauchy).}$$

Khẳng định $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} \le \frac{3}{2}$ là sai, vì khi $x = \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, ta có $\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD} = \frac{12}{5} > \frac{3}{2}$.

Theo bạn, bạn Phương Thảo có được nhận thưởng từ thầy giáo không?

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 491 (5.2018)

Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

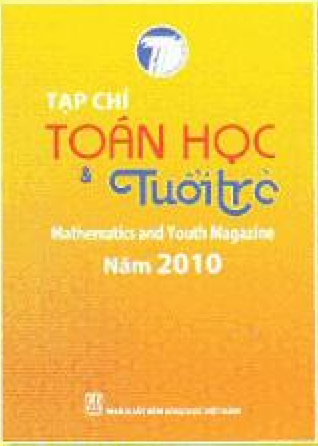
TRONG SỐ NÀY

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

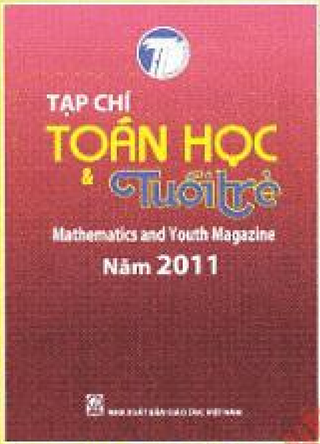
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

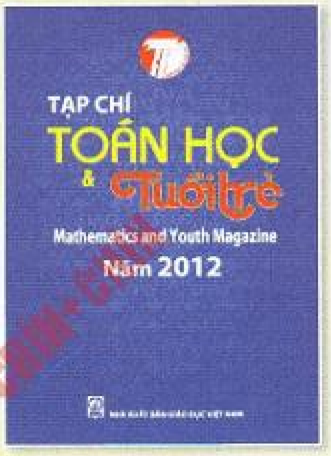
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



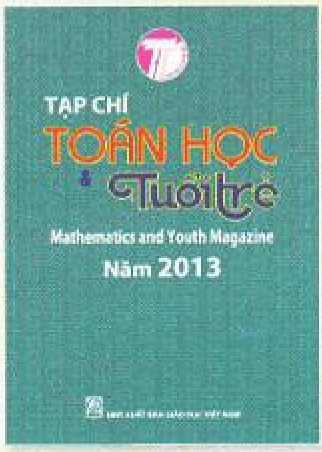
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



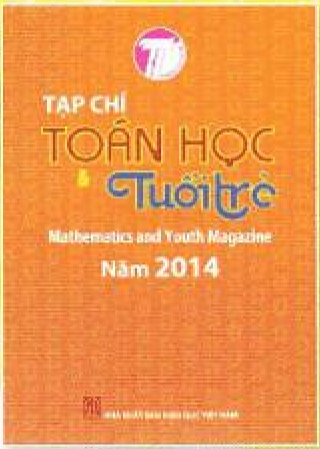
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



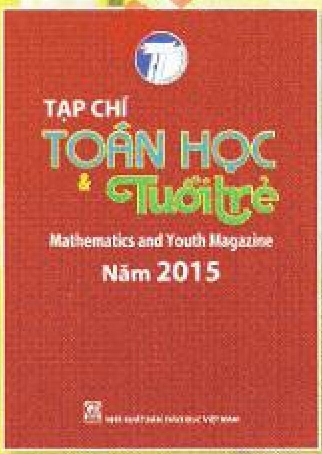
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



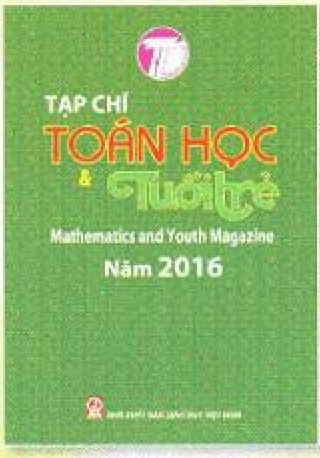
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



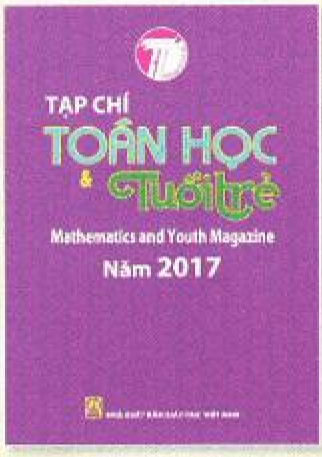
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT05M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng