TỦ SÁCH LUYỆN THI

46 ĐỀ THI TOÁN VÀO 10 HỆ CHUYÊN

CÓ ĐÁP ÁN

SE

Sachhoc.com

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

NGUYỄN BẢO VƯƠNG

46 ĐỀ THI 10 HỆ CHUYÊN (CÓ ĐÁP ÁN CHI TIẾT)

Mục Lục

Đề số 1. Chuyên Bắc Ninh. Năm học 2014-2015

Câu I. ***(1, 5 điểm)***

Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1) , với ẩn x , tham số m .

1) Giải phương trình (1) khi m = 1

2) Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1 , x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

Câu II. ***(1,5 điểm)***

Trong cùng một hệ toạ độ , gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$ và (d) là đồ thị của hàm số y = -x + 2

1) Vẽ các đồ thị (P) và (d) . Từ đó , xác định toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng đồ thị .

2) Tìm a và b để đồ thị Δ của hàm số y = ax + b song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1

Câu III ***.(2,0 điểm)***

1) Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B , quãng đường AB dài 24km . Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km so với lúc đi , vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút . Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B .

2) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

Câu IV . ***(3,0 điểm)***

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AA’ , BB’ ,CC’ cắt nhau tại H .Vẽ hình bình hành BHCD . Đường thẳng qua D và song song với BC cắt đường thẳng AH tại M .

1) Chứng minh rằng năm điểm A, B ,C , D , M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .Chứng minh rằng BM = CD và góc BAM = góc OAC .

3) Gọi K là trung điểm của BC , đường thẳng AK cắt OH tại G . Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu V ***.(2, 0 điểm)***

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$.

2) Có 6 thành phố trong đó cứ 3 thành phố bất kỳ thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau . Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

.................Hết...............

Hướng dẫn sơ lược đề thi môn toán dành cho tất cả thí sinh năm học 2014-2015
Thi vào THPT chuyên Tỉnh Bắc Ninh

Câu I. ***(1, 5 điểm)***

Giải:
1) GPT khi m =1

+ Thay m =1 v ào (1) ta được $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \{-4 ; 2\}$

KL : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x = 4 hoặc x = 2

2) xét PT (1) : $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1) , với ẩn x , tham số m .

+ Xét PT (1) có $\Delta'_{(1)} = m^2 + 2m + 6 = (m+1)^2 + 5 > 0$ (luôn đúng) với mọi m => PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 với mọi m

+ Mặt khác áp dụng hệ thức viét vào PT (1) ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -(2m+6) \end{cases} (I)$

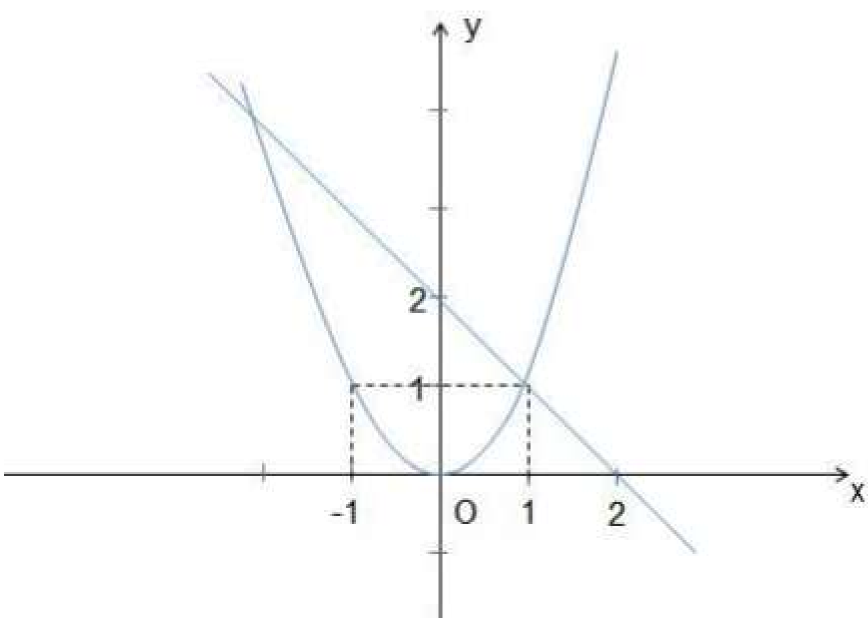
+ Lại theo đề và (I) có :A $= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2m)^2 + 2(2m + 6) = 4m^2 + 4m + 12$

$= (2m + 1)^2 + 11 \geq 11$ với mọi m => Giá trị nhỏ nhất của A là 11 khi m = $-\dfrac{1}{2}$

KL : m = $-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu II. ***(1,5 điểm)***

Giải : 1) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị hàm số:



Dựa vào đồ thị ta có giao điểm của d và (P) là 2 điểm M (1 ; 1); N (-2 ; 4)
2) Do đồ thị Δ của hàm số y = ax + b song song với (d) y = -x + 2

Nên ta có: a = -1.

Δ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng – 1 nên ta thay x = -1 vào pt (P) ta được: y = 1

Thay x = -1; y = 1 vào pt Δ ta được a = -1 ; b = 0

=>Phương trình của Δ là y = - x

Câu III *.(2,0 điểm)*

Giải:
1) Đổi 30 phút = ½ giờ

Gọi x (km /h) là vận tốc người đi xe đạp t ừ A -> B (x > 0) .

Vận tốc người đó đi từ B-> A là: x + 4 (km/h)

Thời gian người đó đi từ A -> B là: $\frac{24}{x}$

Thời gian người đố đi từ B về A là: $\frac{24}{x+4}$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{24}{x}-\frac{24}{x+4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{48(x+4)}{2x(x+4)}-\frac{48x}{2x(x+4)}=\frac{x(x+4)}{2x(x+4)}\Leftrightarrow x^2+4x-192=0$$

=> x = 12 (t/m) . KL : Vậy vận tốc của người đi xe đáp từ A đến B là 12 km/h.

2) ĐKXĐ 0 ≤ x ≤ 1 Đặt 0 < a = $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow\frac{a^2-1}{2}=\sqrt{x(1-x)}$

+ PT mới là : a $+\frac{a^2-1}{2}=1\Leftrightarrow a^2+2a-3=0\Leftrightarrow(a-1)(a+3)=0$

⇔ a = { -3 ; 1 } => a = 1 > 0

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$$

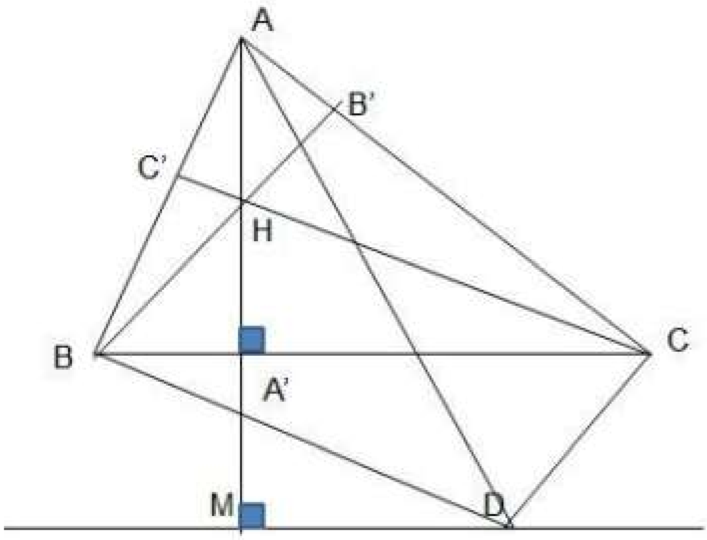
+ Nếu a = 1 = > $\Leftrightarrow x+1-x+2\sqrt{x(1-x)}=1\Leftrightarrow\sqrt{x(1-x)}=0$

⇨ x = { 0 ; 1 } (t/m)

KL : Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là x = 0; x = 1

Câu IV . *(3,0 điểm)*

Giải



1) Chứng minh các tứ giác ABMD , AMDC nội tiếp

Do BHCD là hình bình hành nên:

Ta có: BD//CC' => BD ⊥ AB => ABD = 90º

Có:AA' ⊥ BC nên: MD ⊥ AA' => AMD = 90º

=> ABD + AMD = 180º

=> tứ giác ABMD nội tiếp đường tròn đường kính AD.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác AMDC nội tiếp đường tròn đường kính AD.

=> A, B ,C,D , M nằm trên cùng một đường tròn

2) Xét (O) có dây MD//BC => sđ cung MB = sđ cung CD => dây MB = dây CD hay BM = CD

+ Theo phần 1) và BC//MD => góc BAM =góc OAC

3)Chứng minh OK là đường trung bình của tam giác AHD => OK//AH và OK = $\frac{1}{2}$ AH hay $\frac{OK}{AH}=\frac{1}{2}$ (*)

+ Chứng minh tam giác OGK đồng dạng với tam giác HGA => $\frac{OK}{AH}=\frac{1}{2}=\frac{GK}{AG}\Rightarrow AG=2GK$, từ đó suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC

Câu V .*(2, 0 điểm)*

Giải:

1) Giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi a =b = 1

4P = a^2 - 2 ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab – 4a – 4b) + 4. 2014 – 12

$= (a-b)^2 + 3\,(a + b - 2)^2 + 8044 \geq 8044$

⇨P≥ 2011

Dâu "=" xảy ra ⇔ $\begin{cases} a = b \\ a + b - 2 = 0 \end{cases}$ => $a = b = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi và chỉ khi a = b = 1.

2) Gọi 6 thành phố đã cho là A,B,C,D,E,F

+ Xét thành phố A .theo nguyên l í Dirichlet ,trong 5 thành phố còn lại thì có ít nhất 3 thành phố liên lạc được với A hoặc có ít nhất 3 thành phố không liên lạc được với A (vì nếu số thành phố liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 và số thành phố không liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 thì ngoài A , số thành phố còn lại cũng không vượt quá 4) . Do đó chỉ xảy ra các khả năng sau :

• Khả năng 1 :

số thành phố liên lạc được với A không ít hơn 3 , giả sử B,C,D liên lạc được với A . Theo đề bài trong 3 thành phố B,C,D có 2 thành phố liên lạc được với nhau . Khi đó 2 thành phố này cùng với A tạo thành 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau .

• Khả năng 2 :
số thành phố không liên lạc được với A , không ít hơn ,giả sử 3 thành phố không liên lạc được với A là D,E,F . Khi đó trong bộ 3 thành phố (A,D,E) thì D và E liên lạc được với nhau (v ì D,E không liên lạc được với A)

Tương tự trong bộ 3 (A,E,F) v à (A,F,D) th ì E,F liên lạc được với nhau , F và D liên lạc được với nhau và như vậy D,E,F l à 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau .

Vậy ta có ĐPCM

Đề số 2. Chuyên Bến Tre. Năm học: 2014-2015

Câu 1: (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau: $A=\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$

b) Cho biểu thức: $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$ với $x>0, x\neq 1$

i) Rút gọn biểu thức B

ii) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên

Câu 2: (2,5 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+2y=1 \\ 3x+(m+1)y=-1 \end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ với m = 3.

b) Giải và biện luận hệ theo m.

c) Tìm m nguyên để hệ có nghiệm là số nguyên.

Câu 3: (2 điểm)

Cho phương trình bậc hai: $x^2-mx+m-1=0$ (1), với m là tham số.

i) Giải phương trình (1) khi m = 4

ii) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{2014}$$

Câu 4: (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn đường kính AD.Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ AB(M không trùng với các điểm A và B).

a) Chứng minh MD là đường phân giác của góc BMC

b) Cho AD=2R.Tính diện tích của tứ giác ABDC theo R

c) Gọi O là tâm đường tròn đường kính AD.Hãy tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AMB và dây AB theo R. d) Gọi K là giao điểm của AB và MD,H là giao điểm của AD và MC.Chứng minh ba đường thẳng AM,BD,HK đồng quy.

ĐÁP ÁN

Câu 1: a) Ta có:

$$A=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$$
$$=\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{5^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}}-\sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}}$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{3}-1\right|-\sqrt{3}-1\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.(-2)=-\sqrt{2}$$

b) $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$

i) Với x > 0, x ≠ 1 ta có:

$$B=\left[\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}-\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right].\left(x+\sqrt{x}\right)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x}-1\right)}.\left(x+\sqrt{x}\right)$$
$$=\frac{\left(x+\sqrt{x}-2\right)-(x-\sqrt{x}-2)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.\left(x+\sqrt{x}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}.\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=\frac{2x}{x-1}$$

ii) Ta có: $B=\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$

Do x nguyên nên:

B nguyên ⇔ $\frac{2}{x-1}$ guyên ⇔ x – 1 là ước của 2 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x-1=\pm 1 \\ x-1=\pm 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2;0;3;-1\}$

Vậy các giá trị của x cần tìm là $x\in\{2;0;3;-1\}$

Câu 2:

a) $\begin{cases} mx+2y=1 \\ 3x+(m+1)y=-1 \end{cases}$ (1)

Với m = 3, hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y=2 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 3x+4.(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Khi m = 3 hệ có nghiệm (1;–1)

b) Ta có:

$$\begin{cases} mx+2y=1 \\ 3x+(m+1)y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1-mx}{2} \\ 3x+(m+1).\frac{1-mx}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1-mx}{2} \\ 6x-(m^2+m)x+m+1=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1-mx}{2} \\ (m^2+m-6)x=m+3(*) \end{cases} \quad (II)$$

Khi m = 2: (*) ⇔ 0x = 5 (vô nghiệm) ⇒ Hệ vô nghiệm

Khi m = –3: (*) ⇔ 0x = 0. Hệ phương trình có vô số nghiệm x ∈ ℝ, y = $\frac{1+3x}{2}$

Khi $m^2+m-6\neq 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-2)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -3 \\ m\neq 2 \end{cases}$, ta có:

$$(II)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m+3}{m^2+m-6}=\frac{1}{m-2} \\ y=\frac{1-\frac{m}{m-2}}{2}=\frac{1}{2-m} \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2};\frac{1}{2-m}\right)$

Kết luận: + m = 2: (I) vô nghiệm

+ m = –3: (I) có vô số nghiệm x ∈ ℝ, y = $\frac{1+3x}{2}$

+ m ≠ 2 và m ≠ –3: (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2};\frac{1}{2-m}\right)$

c) Theo câu b, (I) có nghiệm ⇔ m ≠ 2.

Khi m = –3, (I) có nghiệm nguyên chẳng hạn x = 1, y = 2

Khi m ≠ 2 và m ≠ –3: (I) có nghiệm nguyên ⇔ $\frac{1}{m-2}$ ∈ ℤ ⇔ m – 2 là ước của 1

⇔ m – 2 = 1 hoặc m – 2 = –1

⇔ m = 3 hoặc m = 1

Vậy các giá trị m cần tìm là m ∈ {–3;1;3}

Câu 3:

a) $x^2-mx+m-1=0$ (1)

i) Với m = 4, phương trình (1) trở thành

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$

Vậy tập nghiệm của (1) là $\{1;3\}$

ii) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta = m^2-4(m-1)\ge 0$
$\Leftrightarrow m^2-4m+4\ge 0$
$\Leftrightarrow (m-2)^2\ge 0$

(luôn đúng ∀ m)

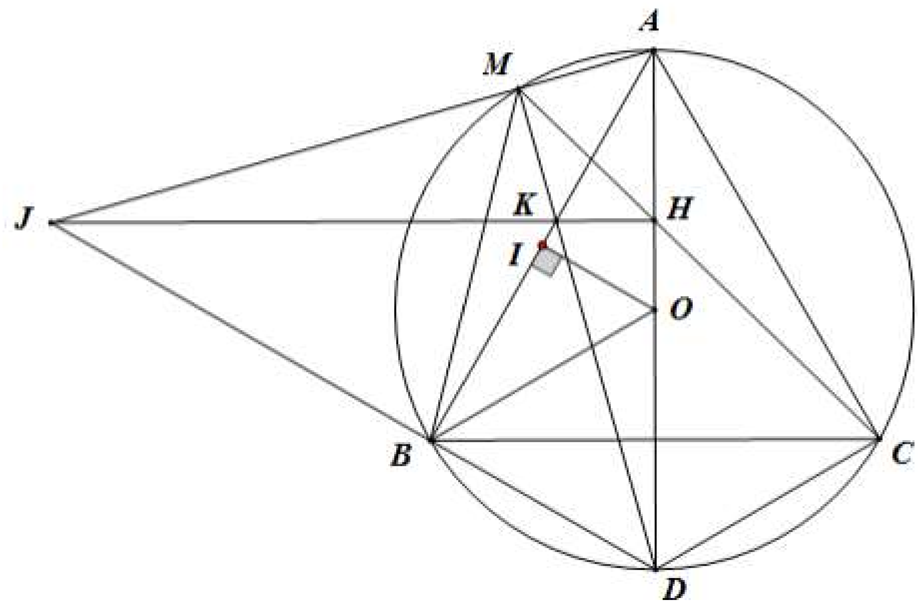
Khi đó, theo định lý Vi–ét: $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{2014} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{2014}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2014(x_1+x_2)-(x_1+x_2)x_1x_2}{2014x_1x_2}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)(2014-x_1x_2)}{2014x_1x_2}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1x_2=2014 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m-1=2014 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2015 \end{array}\right.$$

Vậy m ∈ {0;2015} là giá trị cần tìm.

Câu 4:



a) Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AD nên ABD = ACD = 90º

Xét hai tam giác vuông ABD và ACD có chung cạnh huyền AD, hai cạnh góc vuông AB và AC bằng nhau (do Δ ABC đều)

⇒ Δ ABD = Δ ACD (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

⇒ BAD = CAD (1)

Vì AMBD là tứ giác nội tiếp nên:

BMD = BAD (2)

Vì AMDC là tứ giác nội tiếp nên:

CMD = CAD (3)

Từ (1), (2) và (3) => BMD = CMD

⇒ MD là phân giác của góc BMC.

b) Ta có: $BAD = CAD = \frac{1}{2} BAC = 30^o$

Xét Δ ABD vuông tại B có: $BA = AD.\cos BAD = 2R.\cos 30^o = R\sqrt{3}$

Vì ABC là tam giác đều nên $BC = BA = R\sqrt{3}$

Vì AB = AC, DB = DC nên AD là trung trực của BC

⇒ AD ⊥ BC.

Tứ giác ABDC có AD ⊥ BC nên

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}.2R.R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$$

c) Vẽ OI ⊥ AB tại I. Xét tam giác vuông OIA ta có:

$$OI = OA.\sin OAI = R.\sin 30^o = \frac{R}{2}$$

⇒ Diện tích tam giác AOB là $S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.OI = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)

Ta có: $AOB = 2AOC = 120^o$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Diện tích hình quạt AOB là $\frac{\pi R^2.120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$ (đvdt)

Suy ra diện tích hình viên phân cần tìm là $\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$ (đvdt)

d) Gọi J là giao điểm của AM và BD.

Vì M , B thuộc đường tròn đường kính AD nên DM ⊥ AJ, AB ⊥ DJ

⇒ K là trực tâm của tam giác AJD

⇒ JK ⊥ AD

⇒ JK // BC (cùng ⊥ AD) (4)

Tứ giác AMKH có KMH = KAH (=BMD) nên là tứ giác nội tiếp

⇒ KHA = 180° – KMA = 180° – 90° = 90°

⇒ KH ⊥ AD

⇒ KH // BC (cùng ⊥ AD) (5)

Từ (4) và (5), theo tiên đề Ơ–clít về đường thẳng song song, ta có J, K, H thẳng hàng.

Vậy AM, BD và KH đồng quy tại J.

Đề số 3. Chuyên Toán Sư Phạm Hà Nội. Năm học: 2014-2015

Câu 1.(1,5 điểm) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Câu 2.(1,5 điểm) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^3}=3$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n=1+\frac{2.6.10....(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$$ là một số chính phương

Câu 4.(1,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực dương abc=1 .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{3}{4}$$

Câu 5 (3điểm) Cho hình vuông ABCD với tâm O .Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho MN//AP.Chứng minh rằng

1.Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45^0

2.Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3.Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Câu 6.(1 điểm) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;\ldots;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu x ∈ A, y ∈ A, x > y , thì : $\frac{y^2}{x-y}\in A$

Ghi chú : Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh...số báo danh………………..

Hướng dẫn giải đề thi chuyên Toán sư phạm Hà Nội vòng 2 -2014
Ngày thi 6/6/2014

Câu 1.(1,5 điểm) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ và $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Hướng dẫn

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)=1$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{cxy+ayz+bxz}{abc}\right)=1(*)$$

Từ $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0 \Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$ thay vào (*) ta có

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Câu 2.(1,5 điểm) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^3}=3$$

Hướng dẫn

ĐKXĐ : $|x|\le\sqrt{3};|y|\le 1;|z|\le\sqrt{2}$

Áp dụng Bất đẳng thức $AB\le\frac{A^2+B^2}{2}$ ta có đúng với mọi A,B

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}\le\frac{x^2+1-y^2}{2}+\frac{y^2+2-z^2}{2}+\frac{z^2+3-x^3}{2}=3$$

Kết hợp với GT ta có Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2} \\ y=\sqrt{2-z^2} \\ z=\sqrt{3-x^2} \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=2 \\ z^2+x^2=3 \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=0 \\ z^2=2 \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n = 1+\frac{2.6.10....(4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)} \text{ là một số chính phương}$$

Hướng dẫn

$$a_n = 1+\frac{2^n.(1.3.5......(2n-1).(n-4)!}{(2n)!}1+\frac{2^n.(n+4)!}{2.4.6...2n}=1+\frac{2^n..1.2.3...n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)!}{2^n.1.2.3.4...n}$$

$$=1+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$a_n=(n^2+5n+5)^2$$

Câu 4.(1,5 điểm) Cho a,b,c là các số thực dương abc=1 .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}\leq\frac{3}{4}$$

Hướng dẫn

Đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}; c=\frac{z}{x}$

$$P=\frac{1}{ab+a+2}+\frac{1}{bc+b+2}+\frac{1}{ca+c+2}=\frac{yz}{xy+xz+2yz}+\frac{zx}{xy+yz+2xz}+\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Thì

$$3-P=1-\frac{yz}{xy+xz+2yz}+1-\frac{zx}{xy+yz+2xz}+1-\frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3-P=(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{xy+xz+2yz}+\frac{1}{xy+yz+2xz}+\frac{1}{xz+yz+2xy}\right)$$

Áp dụng Bất đẳng thức $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\geq\frac{9}{A+B+C}$

(Do ta áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương: $A+B+C \ge 3\sqrt[3]{ABC}; \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}}$

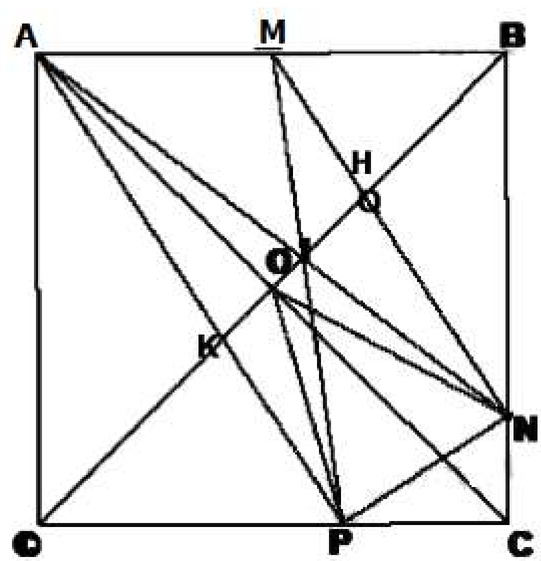
Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên, ta được:

$$(A+B+C)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right) \ge 9 \Rightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \ge \frac{9}{A+B+C}$$

Khi đó Ta có $3-P \ge (xy+yz+xz)\frac{9}{4xy+4yz+4xz} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \le 3-\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} xy+yz+2xz = xy+2yz+xz = 2xy+yz+xz \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Câu 5 (3điểm) Cho hình vuông ABCD với tâm O .Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho MN//AP.Chứng minh rằng



1.Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45^0

1. Đăt AB = a ta có AC = a$\sqrt{2}$ Chứng minh Tam giác ADP đồng dạng tam giác NBM (g.g) suy ra

$\frac{BM}{DP} = \frac{BN}{AD} \Rightarrow BN.DP = \frac{a^2}{2}$ mà OB.OD = $\frac{a^2}{2}$

tam giác DOP đồng dạng BNO (c.g.c). từ đó tính được $\angle NOP = 45^o$

2.Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

Theo a ta có $\frac{OB}{DP} = \frac{ON}{OP} = \frac{OD}{DP}$ góc PON = góc ODP=45^0

tam giác DOP đồng dạng ONP (c.g.c). suy ra góc DOP= góc ONP

nên DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN

3.Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Đặt giao điểm cua MN và BC là Qvà AP là K áp dung tính chát phân giác cho tam giác MBN; APD

$\frac{QM}{QN}=\frac{BM}{BN};\frac{KP}{KA}=\frac{DP}{AD}\Leftrightarrow\frac{QM}{QN}=\frac{KP}{KA}\Rightarrow\frac{QM}{KP}=\frac{QN}{KA}(1)$ ta có. Giả sử MP cắt AN tại I . K I cắt MN tại H Áp dụng định lí ta lét $\frac{HM}{PK}=\frac{HN}{KA}(2)$

Từ (1) và (2) Suy ra $\frac{HM}{HN}=\frac{QM}{QN}$ Q trùng H, vậy BD, PM, AN đồng quy

Câu 6.(1 điểm) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp$\{1;2;3;4;\ldots;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất 2 phần tử và nếu x ∈ A, y ∈ A, x > y , thì : $\frac{y^2}{x-y}\in A$

Hướng dẫn

Với mỗi tập A là tập con của S = {1;2;3;...;2014} thỏa mãn đề bài, gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A (a, b ∈ S, a < b)

Ta chứng minh b ≤ 2a, thật vậy, giả sử b > 2a

Theo giả thiết $c=\frac{a^2}{b-a}\in A.$ Mà b > 2a => b – a > a > 0 => c = $\frac{a^2}{b-a}<\frac{a^2}{a}=a$, mâu thuẫn với a là phần tử nhỏ nhất của A.

Vậy b ≤ 2a

Gọi d là phần tử lớn nhất của tập B = A\{b}. Ta chứng minh b ≥ 2d. Thật vậy giả sử b < 2d, theo giả thiết thì

$d<b=>e=\frac{d^2}{b-d}\in A,$ mà b < 2d => 0 < b – d < d => e > $\frac{d^2}{d}=d$

Suy ra e ∈ A nhưng e ∉ B ⇒ e = b ⇒ $\frac{d^2}{b-d}=b=>d^2=b^2-bd=>5d^2=4b^2-4bd+d^2=(2b-d)^2$

(mâu thuẫn vì VP là số chính phương, VT không là số chính phương)

Vậy b ≥ 2d ⇒ 2d ≤ b ≤ 2a ⇒ d ≤ a. Mà a ≤ d (a và d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của B) nên a = d ⇒ b = 2a

Vậy A = {a;2a}. Kiểm tra lại ta thấy A thỏa mãn đề bài. Vì a ∈ S và 2a ∈ S nên 2 ≤ 2a ≤ 2014 ⇒ 1 ≤ a ≤ 1007

Vậy số tập con A thỏa mãn đề bài là 1007 tập.

Đề số 4. Chuyên SP Hà Nội. Năm học: 2014-2015

Câu 1(2 điểm)

Cho các số thực dương a, b ; a ≠ b.Chứng minh rằng

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}=0$$

Câu 2(2 điểm)

Cho Quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11h40 phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không đổi .Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ ?

Câu 3 (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) : $y=x^2$ và đường thẳng (d) : $y=-\frac{2}{3}(m+1)x+\frac{1}{3}$ (m là tham số)

1.Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt .

2. Gọi x_1 ; x_2 là là hoành độ các giao điểm (d) và (P),đặt $f(x)=x^3+(m+1)x^2-x$

CMR: $f(x_1)-f(x_2)=\frac{-1}{2}(x_1-x_2)^3$

Câu 4 (3 điểm):

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC = 2R .Gọi gọi K,M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE (K ≠ B ; K ≠ E) .Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

1.Chứng minh tứ giác AKPD nội tiếp đường tròn.

2.Chứng minh KP ⊥ PM.

3. Biết ABD = 60° và AK=x .Tính BD theo R và x.

Câu 5: **(1 điểm)** Giải phương trình

$$\frac{x(x^2-56)}{4-7x}-\frac{21x+22}{x^3+2}=4$$

----------------------------------Hết----------------------------------

Họ và tên thí sinh...số báo danh

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN SP HÀ NỘI VÒNG 1
Ngày 5/6/2014

Câu 1

$$Q=\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{3a+3\sqrt{ab}}{b-a}$$

$$=\frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3.(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3}-b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}-\frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}-\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$=\frac{3a\sqrt{a}+3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}-3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}-3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}$$

$$=0(DPCM)$$

Câu 2

Gọi vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là x (km/h) x>10

Thì vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là x-10 (km/h)

Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $\frac{90}{x}(h)$

Thời gian đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $\frac{30}{x}(h)$

Vì thời gian đi cả 2 quãng đường là 11h40 phút – 7h- 10 phút $=\frac{9}{2}(h)$

Nên ta có PT:

$$\frac{90}{x}+\frac{30}{x-10}=\frac{9}{2}$$

$$<=>\frac{180(x-10)}{2x(x-10)}+\frac{60x}{2x(x-10)}=\frac{9x(x-10)}{2x(x-10)}$$

$$<=>240x-1800=9x^2-90x$$

$$<=>9x^2-330x+1800=0$$

Giải ra x=30 thỏa mãn điều kiện. Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu $\frac{90}{30}=3(h)$

Vậy xe hỏng lúc 10 h

Câu 3 a) xét hệ phương trình $\begin{cases}y=x^2\\ y=\frac{-2(m+1)}{3}x+\frac{1}{3}\end{cases}<=>\begin{cases}y=x^2\\ 3x^2+2(m+1)x-1=0(1)\end{cases}$

PT(1) có hệ số a và c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

b) Theo Vi ét $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2(m+1)}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$ <=> $\begin{cases} m+1=\dfrac{-3(x_1+x_2)}{2} \\ 3x_1x_2=-1 \end{cases}$

Ta có

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3+(m+1)(x_1^2-x_2^2)-x_1+x_2$

<=> $2[f(x_1)-f(x_2)]=2x_1^3-2x_2^3-3(x_1+x_2)(x_1^2-x_2^2)-2x_1+2x_2$

<=> $2[f(x_1)-f(x_2)]=-x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_2-x_1)-2(x_1-x_2)$

<=> $2[f(x_1)-f(x_2)]=-x_1^3+x_2^3+(x_1-x_2)-2(x_1-x_2)$

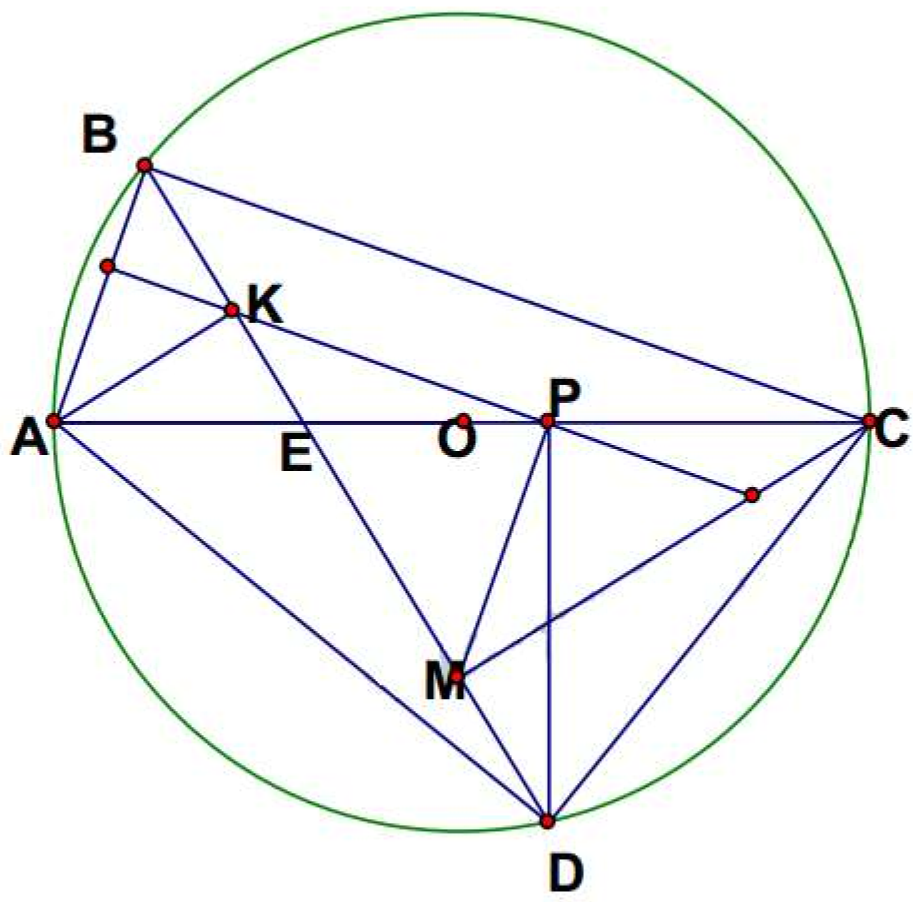
<=> $2[f(x_1)-f(x_2)]=-(x_1^3-x_2^3-3x_1x_2(x_1-x_2))$

<=> $2[f(x_1)-f(x_2)]=-[(x_1-x_2)(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)]$

<=> $2[f(x_1)-f(x_2)]=-(x_1-x_2)^3$

Nên $f(x_1)-f(x_2)=-\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)^3$

Câu 4



1. Ta có ∠ PAD = ∠ PKD

(cùng bằng ∠ CBD đồng vị) nên tứ giác AKPD nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

2.Theo phần 1 thì DP vuông góc AC nên MDCP nội tiếp suy ra: ∠ MPD = ∠ MCD mà ∠ MCD = ∠ ACB (cùng phụ 2 ∠ MDC = ∠ ACB) mà ∠ APK = ∠ ACB (đồng vị) nên ∠ MPD = ∠ APK Ta có ∠ MPD + ∠ MPE = 90 0 ⇒ ∠ APK + ∠ MPE = 90^o suy ra KP ⊥ PM.

3.ta có $AD = R\sqrt{3}$ Pitago tam giác vuông AKD vuông tại K tính được $KD = \sqrt{3R^2 - x^2}$ tam giác BAK vuông tại K có góc ABK=60^0 => $BK = AK.\cot ABK = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$BD = BK + KD = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3R^2 - x^2}$ (dv độ dài)

Câu 5 *(1 điểm)*

ĐKXĐ: $x \neq \frac{4}{7}; x \neq \sqrt[3]{2}$

Đặt : 4 – 7x = b; x^3 + 2 = a; (a; b ≠ 0)

Thì

$x^3 - 56x = x^3 + 2 + 8(4 - 7x) - 34 = a + 8b - 34$

$21x + 24 = -3(4 - 7x) + 34 = 32 - 3b$

Ta có phương trình

$\frac{a + 8b - 34}{b} - \frac{34 - 3b}{a} = 4$

$<=> a^2 + 8ab - 34a - 34b + 3b^2 = 4ab$

$<=> (a + b)(a + 3b - 34) = 0$

$<=> \left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ a + 3b = 34 \end{array}\right.$

V ới a+b=0 ta có

$x^3 - 7x + 6 = 0$

$<=> (\mathrm{x} - 1)(\mathrm{x} - 2)(\mathrm{x} + 3) = 0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x = 2(TM) \\ x = -3(TM) \\ x = 1(TM) \end{array}\right.$

Với a+3b=34 ta có

$x^3 - 21x + 20 = 0$

$<=> (\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} + 4)(\mathrm{x} - 5) = 0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x = -1(TM) \\ x = -4(TM) \\ x = 5(TM) \end{array}\right.$

PT có 6 nghiệm S = {– 4;– 3;– 1;1;2;5}

Đề số 5. Chuyên Hà Tĩnh. Năm học: 2014-2015

Bài 1: Cho biểu thức $P=\left[\frac{-x}{\sqrt{x}(x-9)}+\frac{2}{\sqrt{x}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}+3}\right]:\left(\sqrt{x}+3-\frac{x}{\sqrt{x}-3}\right)$ với x > 0; x ≠ 9

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P=-\frac{1}{4}$

Bài 2: Cho phương trình $x^2-2(m-2)x+m^2-2m+2=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi m = -1

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|2(x_1+x_2)+x_1x_2|=3$

Bài 3: a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}=-1$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2+2y^2-2=x^2+3x \\ x+y=3\sqrt{y-1} \end{cases}$

Bài 4: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có BAC= 45°, BC = a. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC và từ C xuống AB. Gọi I là điểm đối xứng của O qua EF.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BFOC và AEIF nội tiếp được đường tròn

b) Tính EF theo a

Bài 5: Biết phương trình $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ có nghiệm. Chứng minh rằng $a^2+b^2\geq\frac{4}{5}$

BÀI GIẢI

Bài 1:

a)

$$P=\frac{-x+2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)-\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(x-9)}:\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-x}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}:\frac{-9}{\sqrt{x}-3}$$

$$=\frac{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{-9\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}=\frac{-1}{\sqrt{x}+3}$$

b)

$$P=\frac{-1}{4}<=>\frac{-1}{\sqrt{x}+3}=\frac{-1}{4}$$

$$<=>\sqrt{x}+3=4$$

$$<=>x=1(TM)$$

Bài 2: a) Khi m = -1 ta có phương trình

$$x^2+6x+5=0$$

$$<=>(x+1)(x+5)=0$$

$$<=>\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-5\end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình S = {-1; -5}

b)Ta có: $\Delta'=(m-2)^2-(m^2-2m+2)=2-2\text{m}$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì

$\Delta'>0<=>\text{m}<1$

Áp dung hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-4\\x_1x_2=m^2-2m+2\end{cases}$

Do đó:

$$|2(x_1+x_2)+x_1x_2|=3$$

$$<=>|m^2+2m-6|=3$$

$$<=>|(m+1)^2-7|=3$$

$$<=>\left[\begin{array}{l}(m+1)^2-7=3\\(m+1)^2-7=-3\end{array}\right.$$

Với $(m+1)^2-7=3<=>m+1=\pm\sqrt{10}<=>\left[\begin{array}{l}m=-1+\sqrt{10}(L)\\m=-1-\sqrt{10}(TM)\end{array}\right.$

Với $(m+1)^2-7=-3<=>m+1=\pm2<=>\left[\begin{array}{l}m=1(L)\\m=-3(TM)\end{array}\right.$

Bài 3: a) ĐKXĐ: x ≥ -1. Phương trình tương đương

$\sqrt{2x+3}+1=2\sqrt{x+1} <=> 2x+3+2\sqrt{2x+3}+1=4x+4$

$<=> \sqrt{2x+3}=x$

$<=> \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} <=> \begin{cases} x\ge 0 \\ (x-3)(x+1)=0 \end{cases} <=> \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 <=> x=3 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình x = 3

b)ĐKXĐ: $y \ge 1$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$=> y^2(x+2)=(x+1)(x+2)$

$<=> (x+2)(y^2-x-1)=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ y^2-x-1=0 \end{array}\right.$

Xét x = -2 thay vào (2) được $y-2=3\sqrt{y-1} <=> y^2-13y+13=0 <=> y=\dfrac{13\pm\sqrt{117}}{2}$ (với $y \ge 2$)

Xét $x=y^2-1$ thay vào (2) được $y^2+y-1=3\sqrt{y-1}$

Đặt $\sqrt{y-1}=a\ge 0 => y=a^2+1$

$y^2+y-1=3\sqrt{y-1}$

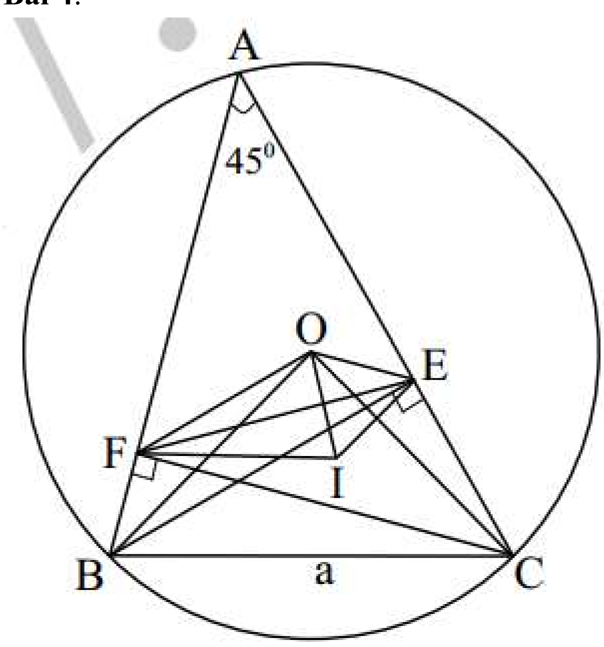
$<=> (a^2+1)^2+a^2=3a$

$<=> a^4+3a^2-3a+1=0$

$<=> a^4+3(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}=0 (VN)$

Đối chiếu ĐKXĐ ta có $\begin{cases} x=-2 \\ x=\dfrac{13+\sqrt{117}}{2} \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho

Bài 4:



a) Ta có BOC= 2.BAC= 2.45° =90° (Góc nội tiếp, góc ở tâm cùng chắn cung BC)
Do đó BFC=BOC=BEC= 90° suy ra đỉnh F, O, E cùng nhìn BC dưới góc 90° nên B, F, O, E, C cùng thuộc một đường tròn đường kính BC (Bài toán cung chứa góc)
Hay tứ giác BFOC nội tiếp
Ta có FOB= FCB (Cùng chắn cung BF)
EOC= EBC (Cùng chắn cung EC)
Mà FCB + EBC= 90° –ABC+ 90° -ACB
= 180° - (ABC+ ACB)= BAC= 45° => FOB+ EOC =45°
Hay EOF= 135° . Mặt khác vì I đối xứng với O qua EF nên EIF= EOF= 135°=> EIF+ BAC= 180°
Do đó tứ giác AEIF nội tiếp đường tròn (Tổng hai góc đối bằng 180^0)
b)Theo câu a tứ giác BFEC nội tiếp nên AFE =ACB (Cùng bù với EFB) ⇒ ΔAFE ~ ΔACB (g – g)

=> $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AE}{\sqrt{2}AE}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ => $EF=\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (Vì ΔAEB vuông cân tại E)

Bài 5: Dễ dàng nhận thấy x = 0 không phải là nghiệm của phương trình
Giả sử $x_0 \neq 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Chia 2 vế của phương trình cho $x_0{}^2 \neq 0$ được

$$(x_0{}^2+\frac{1}{x_0{}^2})+a(x_0+\frac{1}{x_0})+\text{b}=0$$

Đặt $\text{t}=x_0+\dfrac{1}{x_0} \Rightarrow |t|\geq 2; x_o{}^2+\dfrac{1}{x_0{}^2}=t^2-2$

Do đó ta có phương trình:

$t^2-2=-at-b$

Áp dụng BĐT Bunhia được

$(a^2+b^2)(t^2+1)\geq(at+b)^2=(t^2-2)^2$

$$\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{t^4-4t^2+4}{t^2+1}=\frac{t^3-4t^2+4}{t^2+1}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{5t^4-24t^2+16}{5(t^2+1)}+\frac{4}{5}=\frac{(5t^2-4)(t^2-4)}{5(t^2+1)}+\frac{4}{5}\geq\frac{4}{5}$$

Vậy $a^2+b^2\geq\dfrac{4}{5}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|t|=2\\ \dfrac{a}{t}=\dfrac{b}{t}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x_0|=1\\ a=bt\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-\dfrac{2}{5}\\ a=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$

Bài giải: ***Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh***

Đề số 6. Chuyên Khánh Hòa. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,00 điểm)

1) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức: $A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}$

2) Rút gọn biểu thức $B=(\frac{a}{a-2\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}):\frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với a>0; $a\neq 4$

Bài 2: (2,00 điểm)

1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} ax-y=-b \\ x-by=-a \end{cases}$

Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y) = (2;3).

2) Giải phương trình: $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$

Bài 3: (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$

a)Vẽ đồ thị (P).

b)Trên (P) lấy điểm A có hoành độ x_A = -2 . Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho |MA –MB| đạt giá trị lớn nhất, biết rằng B(1;1).

Bài 4: (4,00 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A và B), tia AM cắt d tại N. Gọi C là trung điểm của AM, tia CO cắt d tại D.

a)Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp.

b)Chứng minh rằng: NO $\perp$ AD

c)Chứng minh rằng: CA.CN = CO .CD.

d)Xác định vị trí điểm M để (AM AN) đạt giá trị nhỏ nhất.

---HẾT---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,00 điểm)

1)

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$$

2)

$$B=\left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$$ với a>0; $a\neq 4$

$$=\left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right).\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2}.\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2}.\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$$

Bài 2: (2,00 điểm)

1)Vì hệ phương trình: $\begin{cases}ax-y=-b\\x-by=-a\end{cases}$ có nghiệm (x;y) = (2; 3) nên ta có hpt:

$$\begin{cases}2a-3=-b\\2-3b=-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=3\\a-3b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+3b=9\\a-3b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=7\\2a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$$

Vậy a = 1, b = 1

2)Giải phương trình: $2(2x-1)-3\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-8}$

$\Leftrightarrow 4(2x-1)-6\sqrt{5x-6}=2\sqrt{3x-8}$

$\Leftrightarrow [(5x-6)-6\sqrt{5x-6}+9]+[(3x-8)-2\sqrt{3x-8}+1]=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-6}+3)^2+(\sqrt{3x-8}-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{5x-6}+3=0\\\sqrt{3x-8}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

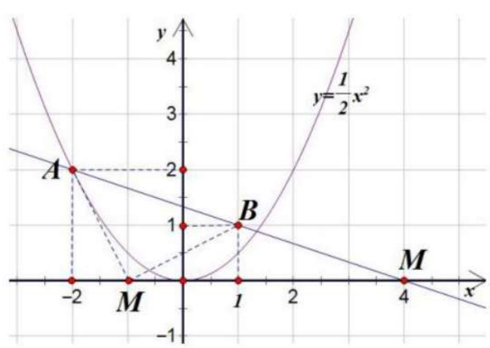
Vậy pt có nghiệm x = 3.

Bài 3: (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$

a)Lập bảng giá trị (HS tự làm)

Đồ thị:



b)Vì A ∈ (P) có hoành độ x_A=-2 nên y_A=2 . Vậy A(-2; 2)

Lấy $M(x_M; 0)$ bất kì thuộc Ox,

Ta có: $|MA-MB| \le AB$ (Do M thay đổi trên O và BĐT tam giác)

Dấu " =" xảy ra khi điểm A, B, M thẳng hàng khi đó M là giao điểm của đường thẳng AB và trục Ox.

- Lập pt đường thẳng AB:

Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng: y = ax +b

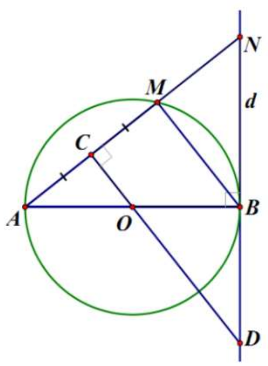
Do A, B thuộc đường thẳng AB nên ta có:

$$\begin{cases} -2a+b=2 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-1}{3} \\ b=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=\dfrac{-1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

- Tìm giao điểm của đường thẳng AB và O (y = 0)=> x = 4 => M(4;0)

Bài 4 (4,00 điểm)



a)Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp

Ta có OC ⊥ AM => OCN=90°

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B nên OBN=90°

Vậy Tứ giác OBNC nội tiếp có OCN+OBN=180°

b)Chứng minh rằng: NO ⊥ AD

Trong ΔAND có hai đường cao là AB và GC cắt nhau tại O.

Suy ra NO là đường cao thứ ba hay: NO ⊥ AD.

c) Chứng minh rằng CA . CN = CO. CD

Ta có Trong tam giác vuông AOC có CAO+AOC=90°

Trong tam giác vuông BOD có BOD+BDO=90°

Mà CAO=BOD(2 góc đối đỉnh)

=>CAO=BDO

=>tam giác CAO đồng dạng với tam giác CDN (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD}=\frac{CO}{CN} \Rightarrow CA.CN=CO.CD$$

d)Xác định vị trí điểm M để (AM AN) đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $2AM+AN \ge 2\sqrt{AM.AN}\,(cauchy-cosi)$

Ta chứng minh: $AM.AN=AB^2=4R^2(1)$

$$\Rightarrow 2AM+AN \ge 2\sqrt{2.4R^2}=4\sqrt{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi: 2AM = AN =>AM= $\dfrac{AN}{2}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = R\sqrt{2}$
=>ΔAOM vuông tại O=> M là điểm chính giữa cung AB.

Đề số 7. Chuyên Nam Định. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (*2,0 điểm*):

1) Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ và a + b + c = 1.

Chứng minh rằng (a-1)(b-1)(c-1)=0

2) Với mỗi số nguyên dương *n*; chứng minh $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (*2,5 điểm*):

1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x^2+4x-12})=8$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2=y^6+y^4 \\ 2\sqrt{y^4+1}+\dfrac{1}{x^2+1}=3-4x^3 \end{cases}$

Bài 3: (3,0 điểm): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA_1; BB_1; CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng AA_1 cắt đường tròn (O) tại K khác A.

1) Chứng minh A_1 là trung điểm của HK.

2) Hãy tính $\frac{HA}{AA_1}+\frac{HB}{BB_1}+\frac{HC}{CC_1}$

3) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên BC. Đường thẳng BB_1 cắt (O) tại giao điểm thứ hai là E, kéo dài MB_1 cắt AE tại N. Chứng minh rằng $\frac{AN}{NE}=(\frac{AB_1}{EB_1})^2$

Bài 4: (*1,0 điểm*): Tìm các số nguyên *x; y* thỏa mãn $x^3+y^3-3xy=1$

Bài 5: (*1,5 điểm*):

1) Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100}. Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không ? Tại sao ?

2) Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{3}{2}$$

__________**Hết**__________

Hướng dẫn giải:

Bài 1: (*2,0 điểm*):

1)Từ GT ta có:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} => (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c})=0$$

$$=> \frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$

$$=> (a+b)\left[(c(a+b+c)+ab\right]=0$$

$$=> (a+b)(\mathrm{b+c})(\mathrm{a+c})=0$$

$$=> \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right.$$

Nếu a + b = 0 => c = 1 => c – 1 = 0 => (a-1)(b-1)(c-1)=0

Nếu c + b = 0 => a = 1 => a – 1 = 0 =>(a-1)(b-1)(c-1)=0

Nếu a + c = 0 => b = 1 => b – 1 = 0 => (a-1)(b-1)(c-1)=0

Vậy ta có đpcm.

2)Với mỗi số nguyên dương *n*; chứng minh $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (*2,5 điểm*):

1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x^2+4x-12})=8.$

ĐKXĐ $x \ge 2$, đặt

$$\sqrt{x+6}=a\ge 0;\sqrt{x-2}=b\ge 0 => a^2-b^2=8$$

$$PTTT:(a-b)(1+ab)=a^2-b^2$$

$$<=> (a-b)(1+ab-a-b)=0$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} a=b <=> \sqrt{x+6}=\sqrt{x-2}(VN) \\ 1+ab-a-b=0 <=> (a-1)(b-1)=0 <=> \left[\begin{array}{l} a=1 <=> \sqrt{x+6}=1(VN) \\ b=1 <=> \sqrt{x-2}=1 <=> x=3(TM) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

PT đã cho có nghiệm duy nhất x = 3

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2=y^6+y^4 (1) \\ 2\sqrt{y^4+1}+\dfrac{1}{x^2+1}=3-4x^3 (2) \end{cases}$

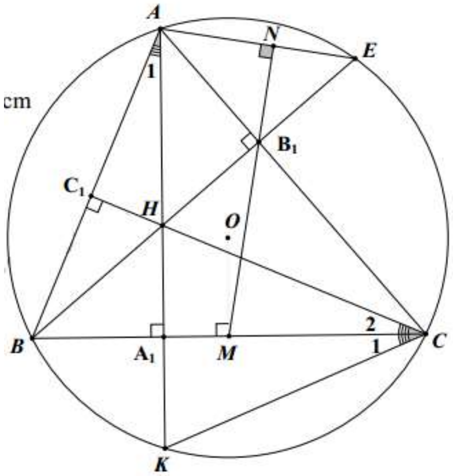
$$(1) <=> (x^3-y^6)+\mathrm{xy}^2-y^4=0$$

$$<=> (x-y^2)(x^2+xy^2+y^4+y^2)=0$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} x=y^2 \\ x^2+xy^2+y^4+y^2=0 <=> (x+\frac{1}{2}y^2)^2+\frac{3}{4}y^4+y^2=0 <=> \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} (TM\ \ (2)) \end{array}\right.$$

Với $x=y^2$

Bài 3: (*3,0 điểm*): Cho tam giác *ABC*



a) góc A_1 = góc C_2 = góc C_1

=> ΔCHK cân C, CA_1 là đ/cao + đ trung trực => đpcm

b) Có:

$$\frac{HA}{AA_1}+\frac{HB}{BB_1}+\frac{HC}{CC_1}=(1-\frac{HA_1}{AA_1})+(1-\frac{HB_1}{BB_1})+(1-\frac{HC_1}{CC_1})=3-(\frac{HA_1}{AA_1}+\frac{HB_1}{BB_1}+\frac{HC_1}{CC_1})$$

$$=3-(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HBA}}{S_{ABC}})=3-1=2$$

c) Từ GT => M trung điểm BC => ....=> ΔB_1MC cân tại M => góc MB_1C = gócMCB_1 = góc AB1N

=> ΔCBB1 đồng dạng ΔB_1AN (g-g) => $B_1N \perp AE$

Áp dụng hệ thức lương trong tam giác vuông ta có:

$$\left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2=\frac{AN.AE}{EN.EA}=\frac{AN}{EN}\text{ (đpcm)}$$

Bài 4: (*1,0 điểm*): Tìm các số nguyên *x; y* thỏa mãn $x^3+y^3-3xy=1$

$x^3+y^3-3xy=1$

$<=> (x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=1$

Đặt x + y = a và xy = b (a, b nguyên) ta có:

$a^3-3ab-3b=1$

$<=> (a+1)(a^2-a+1)-3b(a+1)=2$

$<=> (a+1)(a^2-a+1-3b)=2$

Vì a, b nguyên nên có các TH sau :

1) $\begin{cases} a+1=1 \\ a^2-a+1-3b=2 \end{cases} <=> \begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{-1}{3} \end{cases} (L)$

2) $\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1-3b=1 \end{cases} <=> \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} (TM) <=> \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} => (x;y) \in \{(0;1);(1;0)\}$

3) $\begin{cases} a+1=-1 \\ a^2-a+1-3b=-2 \end{cases} <=> \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} (TM) <=> \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases} => (x;y) \in \varnothing$

4) $\begin{cases} a+1=-2 \\ a^2-a+1-3b=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} (TM) <=> \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=4 \end{cases} => (x;y) \in \varnothing$

Vậy $(x;y) \in \{(0;1);(1;0)\}$

Bài 5: (*1,5 điểm*):

2)Cho các số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy} \le \frac{3}{2}$$

Vì *x, y, z* dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$+)2x^2\sqrt{yz} \le x^4+yz <=> \dfrac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \ge \dfrac{1}{x^4+yz} <=> \dfrac{x^2}{x^4+yz} \le \dfrac{1}{2\sqrt{yz}} (1)$

$+)\dfrac{2}{\sqrt{yz}} \le \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} <=> \dfrac{1}{2\sqrt{yz}} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})(2)$

Từ (1) và (2) => :

$\dfrac{x^2}{x^4+yz} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})$

Tương tự:

$\dfrac{y^2}{y^4+xz} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z})$

$\dfrac{z^2}{z^4+xy} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})$

$=> A \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{xy+yz+zx}{xyz} (3)$

Mà lại có : $xy+yz+zx \le x^2+y^2+z^2 (4)$

Từ (3) và (4) có : $A \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xyz} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3xyz}{xyz} = \dfrac{3}{2}$ đpcm

Dấu "=" xảy ra khi x=y=z=1

Đề số 8. Chuyên Lê Quý Đôn Bình Định. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,0 điểm) Cho biểu thức $A=\frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}-\frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+1$, với a > 0.

a. Rút gọn A.
b. Tìm giá trị của a để A = 2.
c. Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 2: (2,0 điểm)
Gọi đồ thị hàm số $y=x^2$ là parabol (P), đồ thị hàm số y=(m+4)x-2m-5 là đường thẳng (d).

a. Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
b. Khi (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2$ Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3+x_2^3=0$

Bài 3: (1,5 điểm)
Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}$

Bài 4: (3,5 điểm)
Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A ,B là hai tiếp điểm). PO cắt đường tròn tại hai điểm K và I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và đường tròn (O).
a.Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp.
b.Chứng minh AC $\perp$ CH.
c.Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M. Tia AM cắt IB tại Q. Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Bài 5: (1,0 điểm)
Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}$ với 0<x<1

-------HẾT------

BÀI GIẢI

Bài 1: (2,0 điểm)

a) **Rút gọn A.**

Ta có: $A=\dfrac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}-\dfrac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+1$ (với a>0)

$A=\dfrac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3+1]}{a-\sqrt{a}+1}-\dfrac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+1=\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{a-\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}(2\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}}+1$

$=\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)-2\sqrt{a}-1+1$

$=a-\sqrt{a}$

b)Tìm giá trị của a để A = 2

Ta có: $A=a-\sqrt{a}$

Để A=2=> $a-\sqrt{a}=2 => a-\sqrt{a}-2=0$

Đặt $\sqrt{a}=t>0$ có pt:

$t^2-t-2=0$

$<=>\left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=2(TM)\end{array}\right.$

Với t = 2 ⇔ $\sqrt{a}=2 <=> a=4(TM)$

Vậy: a = 4 là giá trị cần tìm.

c)Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Ta có: $A=a-\sqrt{a}=a-2\sqrt{a}.\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2-(\dfrac{1}{2})^2=(\sqrt{a}-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\geq\dfrac{-1}{4}\forall a>0$

Dấu "=" khi $\sqrt{a}-\dfrac{1}{2}=0 <=> a=\dfrac{1}{4}(TMDK$ a>0)

Vậy $A_{Min}=\dfrac{-1}{4}$ khi a=$\dfrac{1}{4}$

Bài 2: (2,0 điểm)

a) **Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt**

Ta có: (d): $y=(m+4)x-2m-5$; (P): y=x^2

Pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$x^2=(m+4)x-2m-5$

$<=> x^2-(m+4)x+2m+5=0(1)$

$\Delta=[-(m-4)]^2-4(2m+5)=(m+4)^2-4(2m+5)=m^2-4=(m-2)(m+2)$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi Pt (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta>0$

$(m-2)(m+2)>0 <=> \left[\begin{array}{l}\begin{cases} m+2>0 \\ m-2>0\end{cases} \\ \begin{cases} m+2<0 \\ m-2<0\end{cases}\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} m-2>0 \\ m+2<0\end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2\end{array}\right.$

Vậy: với m > 2 hoặc m < -2 thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) **Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3+x_2^3=0$**

Với m > 2 hoặc m < -2. Thì Pt: $x^2-(m+4)x+2m+5=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m+4\\x_1x_2=2m+5\end{cases}$

Ta có

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=(m+4)[(m+4)^2-3(2m+5)]$

$=(m+4)(m+1)^2$

Để: $x_1^3+x_2^3=0 \Leftrightarrow$

$(m+4)(m+1)^2=0$

$<=> \left[\begin{array}{l}m=-4(TM)\\m=-1(L)\end{array}\right.$

Vậy : m = −4 là giá trị cần tìm.

Bài 3: (1,5 điểm)

Ta có : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}(x\ge 0; y\ge 0)$

Pt viết: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{2}(1)(0\le\sqrt{x}\le 3\sqrt{2};0\le\sqrt{y}\le 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$\sqrt{x}=3\sqrt{2}-\sqrt{y}\ge 0 <=> (\sqrt{x})^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{y})^2 <=> 6\sqrt{2y}=y-x+18$

$=> \sqrt{2y}=\dfrac{y-x+18}{6}\in Q$

$<=> \sqrt{2y}=a\in Q <=> 2y=a^2\in Q <=> \begin{cases}a^2\in N(Vi\ 2y\in Z \text{ va } a\ge 0)\\ a \vdots 2\end{cases}$

$a=2m(m\in N)$

$=> 2y=(2m)^2 <=> y=2m^2 <=> \sqrt{y}=m\sqrt{2}.TT => \sqrt{x}=n\sqrt{2}$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2}+m\sqrt{2}=3\sqrt{2} <=> m+n=3(m;n\in N)$

$<=> \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n=0\\m=3\end{cases} => \begin{cases}x=0\\y=18\end{cases}\\ \begin{cases}n=1\\m=2\end{cases} => \begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}\\ \begin{cases}n=2\\m=1\end{cases} => \begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}n=3\\m=0\end{cases} => \begin{cases}x=18\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases}x=0\\y=18\end{cases};\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases};\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases};\begin{cases}x=18\\y=0\end{cases}$

Bài 4: (3,5 điểm)

a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp

Xét Δ ABP có: PA = PB

và APO= OPB (tính giất hai tiếp tuyến cắt nhau)

=> Δ ABP cân tại P có PO là phân giác

=> PO cũng là đường cao, trung tuyến ΔABP .

Xét tứ giác BHCP ta có BHP = 90^0 (Vì PO ⊥ AB)

BCP = 90º

(Vì kề bù BCD = 90^0 (nội tiếp nửa đường tròn (O))

BHP= BCP

=> Tứ giác BHCP nội tiếp (Qũi tích cung chứa góc)

b) Chứng minh AC⊥CH **.**

Xét ΔACH ta có

HAC= B_1 (chắn cung BKC của đường tròn (O))

Mà B_1 =H_1 (do BHCP nội tiếp)

=>HAC =H_1

Mà H_1+ AHC= 90º (Vì: PO ⊥ AB)

=> HAC+ AHC = 90^0

=> AHC vuông tại C

Hay AC ⊥CH **.**

c)Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Xét tứ giác ACHM ta có M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔACH)

=> tứ giác ACHM nội tiếp

=> CMH =HAC (chắn cung HC)

Mà HAC= BIC (chắn cung BC của đường tròn (O))

=>CMH= BIC

=> MH//BI (vì cặp góc đồng vị bằng nhau)

Xét ΔABQ có AH = BH (do PH là trung tuyến APB (C/m trên))

Và: MH//BI

=> MH là trung bình ΔABQ

=> M là trung điểm của AQ

Bài 5: (1,0 điểm)

Ta có:

$$y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{1-x}-2+\frac{1}{x}-1+3=\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}+3$$

$Vì\ 0< x<1 => \frac{2x}{1-x}>0; \frac{1-x}{x}>0$

Ta có: $\frac{2x}{1-x}+\frac{1-x}{x}\geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}}=2\sqrt{2}$ (Bất đẳng thức Cô si)

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{2x}{1-x}=\frac{1-x}{x} <=> 2x^2=x^2-2x+1 <=> x^2+2x-1=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{2}(TM) \\ x=-1-\sqrt{2}(L) \end{array}\right.$

$=> y\geq 2\sqrt{2}+3$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-1+\sqrt{2}$

Vậy $y_{\min}=2\sqrt{2}+3$ khi x= -1+$\sqrt{2}$

Đề số 9. Chuyên Ninh Bình. Năm học: 2014-2015

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $A=\left(1-\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}+\dfrac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}}-\dfrac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}\right)(a\ge 0;a\ne 4;a\ne 9)$

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để A+ |A| = 0

Câu 2 (2,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{29-x}+\sqrt{x+3}=x^2-26x+177$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-2y^2=xy+x+y\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-y+1\end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm).

1. Cho hai phương trình: $x^2+bx+c=0(1);x^2-b^2x+bc=0(2)$ (trong đó x là ẩn, b và c là các tham số). Biết phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2, phương trình (2) có hai nghiệm x_3 và x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3-x_1=x_4-x_2=1$. Xác định b và c.

2. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì (p + 1)(p – 1) chia hết cho 24.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho hai đường tròn (O; R) và (O’; R’) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O’). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O’ lần lượt tại M và N (M và N khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I.

Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, D, M, I cùng thuộc một đường tròn.

b) MI.BE = BI.AE

c) Khi điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) Với a ≥ 0, a ≠ 4, a ≠ 9, ta có:

$$A=\left(1-\frac{a-3\sqrt{a}}{a-9}\right):\left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}+\frac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}}-\frac{9-a}{a+\sqrt{a}-6}\right)$$

$$=\frac{a-9-a+3\sqrt{a}}{a-9}:\frac{(\sqrt{a}-2)^2-(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)-9+a}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-2)}$$

$$=\frac{-9+3\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}:\frac{(\sqrt{a}-2)^2-(a-9)-(9-a)}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-2)}$$

$$=\frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}:\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-2)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}+3}:\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}+3}.\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}-2}$$

b) Ta có:

$A+|A|=0$

$<=>|A|=-A$

$<=> A\le 0$

$<=> \frac{3}{\sqrt{a}-2}\le 0$

$<=> \sqrt{a}-2<0$

$<=> 0\le x<4$

Kết hợp với điều kiện, ta có 0 ≤ a < 4 là giá trị cần tìm.

Câu 2

1) $\sqrt{29-x}+\sqrt{x+3}=x^2-26x+177$ (1)

ĐK: –3 ≤ x ≤ 29.

Với mọi a, b ≥ 0, ta có:

$(a-b)^2\ge 0$

$<=> a^2+b^2\ge 2ab$

$<=> 2(a^2+b^2)\ge (\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$

$<=> a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Thay $a=\sqrt{29-x}; b=\sqrt{x+3}$ ta có:

$\sqrt{29-x}+\sqrt{x+3}\le\sqrt{2(29-x+x+3)}=8$

$x^2-26x+177=(x-13)^2+8\ge 8$

$=> \sqrt{29-x}+\sqrt{x+3}\le x^2-26x+177$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{29-x}=\sqrt{x+3}\\ x-13=0\end{cases} <=> x=13$

Do đó (1) ⇔ x = 13 (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là {13}.

2) $\begin{cases}x^2-2y^2=xy+x+y(1)\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-y+1(2)\end{cases}(I)$

ĐK: x ≥ 1, y ≥ 0

Ta có

$(1) <=> x^2-xy-2y^2=x+y$

$<=> (x+y)(x-2y)=x+y$

$<=> (\underbrace{x+y}_{\geq 1+0=1>0})(x-2y-1)=0$

$<=> x-2y-1=0$

Do đó:

$(I) <=> \begin{cases}x=2y+1\\ (2y+1)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2(2y+1)-y+1\end{cases}$

$<=> \begin{cases}x=2y+1\\ (y+1)\sqrt{2y}=2y+3\end{cases} <=> \begin{cases}x=2y+1\\ (y+1)(\sqrt{2y}-3)=0\end{cases}$

$<=> \begin{cases}x=2y+1\\ \sqrt{2y}=3(\text{Do y+1>0})\end{cases} <=> \begin{cases}y=\dfrac{9}{2}\\ x=10\end{cases}$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(10;\dfrac{9}{2}\right)$

Câu 3

1. Vì $x_3-x_1=x_4-x_2=1 => x_3=x_1+1; x_4=x_2+1$

Áp dụng định lý Vi–ét cho phương trình (1) và phương trình (2) có:

$\begin{cases}x_1+x_2=-b\\ x_1x_2=c\end{cases}$

$\begin{cases}x_3+x_4=b^2=(x_1+1)+(x_2+1)=-b+2\\ x_3x_4=bc=(x_1+1)(x_2+1)=(x_1+x_2)+x_1x_2+1=-b+c+1\end{cases}$

$=> \begin{cases}b^2+b-2=0\\ bc+b-c-1=0\end{cases} <=> \begin{cases}(b-1)(b+2)=0\\ (c+1)(b-1)=0\end{cases} <=> \begin{cases}\left[\begin{array}{l}b=1\\ b=-2\end{array}\right.\\ c=-1\end{cases}$

Nếu b = 1 thì (1) có nghiệm $<=> \Delta=1-4c\geq 0 <=> c\leq\dfrac{1}{4}$

Thử lại:

$(1) <=> x^2 + x + c = 0 <=> x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$

$(2) <=> x^2 - x + c = 0 <=> x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$

(thỏa mãn)

Nếu b = –2, c = –1 thì

$(1) <=> x^2 - 2x - 1 = 0 <=> x = 1 \pm \sqrt{2}$

$(2) <=> x^2 - 4x + 2 = 0 <=> x = 2 \pm \sqrt{2}$

(thỏa mãn)

Vậy b = 1, $c \le \dfrac{1}{4}$ hoặc b = –2, c = –1.

2. Đặt A = (p + 1)(p – 1)

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 2 và 3.

p lẻ ⇒ p = 2k + 1 (k ∈ ℕ*)

⇒ A = (2k + 2).2k = 4k(k + 1)

k và k + 1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2 ⇒ k(k + 1) $\vdots$ 2

⇒ A $\vdots$ 8 (1)

Vì p không chia hết cho 3 nên p = 3m + 1 hoặc p = 3m – 1 (m ∈ ℕ*)

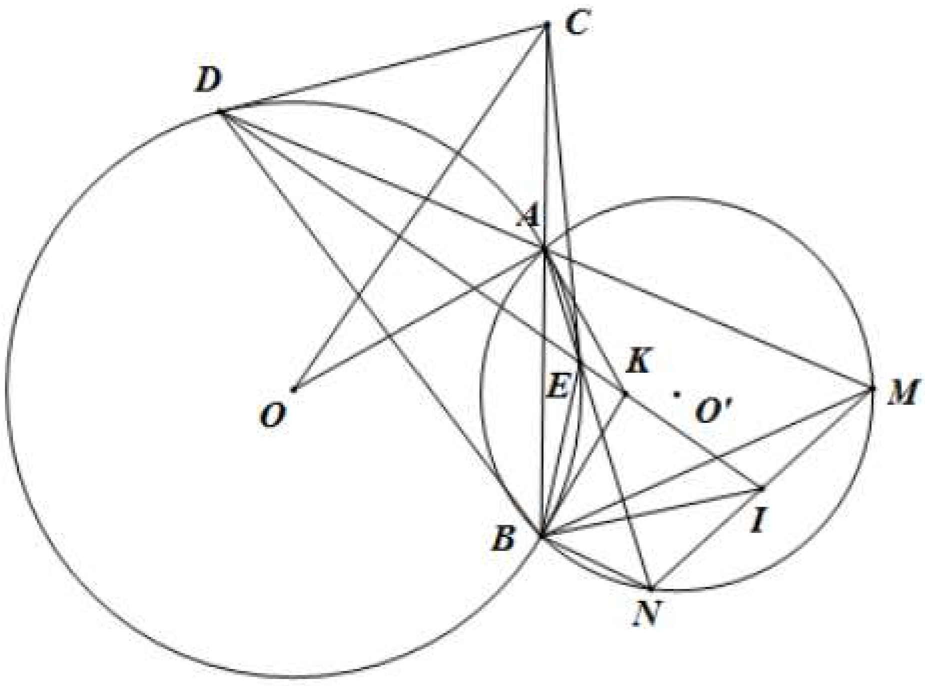
Nếu p = 3m + 1 ⇒ p – 1 $\vdots$ 3 ⇒ A $\vdots$ 3

Nếu p = 3m – 1 ⇒ p + 1 $\vdots$ 3 ⇒ A $\vdots$ 3

Vậy A $\vdots$ 3 (2)

Từ (1) và (2), với chú ý (3;8) = 1 ⇒ A $\vdots$ 24.

Câu 4



a) Vì DAEB là tứ giác nội tiếp nên DAB= DEB

Vì ABNM là tứ giác nội tiếp nên DAB= BNI

Do đó DEB= BNI=> BEI+ BNI =180°

⇒ BEIN là tứ giác nội tiếp

⇒ BEN= BIN

Vì DAEB là tứ giác nội tiếp nên BEN =ADB

Do đó BIN= ADB =>BIM+ MDB = 180°

⇒ BDMI là tứ giác nội tiếp

⇒ B, D, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì ABNM là tứ giác nội tiếp nên BAE =BMI (1)

Vì DAEB và DMIB là các tứ giác nội tiếp nên

ABE =ADE và MBI= ADE =>ABE =MBI (2)

Từ (1) và (2) ⇒tam giác BAE đồng dạng với tam giác BMI (g.g) $=> \frac{BE}{BI} = \frac{AE}{MI} => MI.BE = BI.AE$

c) Ta chứng minh AD. BE =AE. BD

Vì CD là tiếp tuyến của (O) nên

CDA =CBD

=>tam giác CDA đồng dạng với tam giác CBD (g.g)

$=> \frac{DA}{BD} = \frac{CD}{CB}$

Chứng minh tương tự ta có $=> \frac{EA}{EB} = \frac{CE}{CB}$

Mà theo tính chất tiếp tuyến ta có CD = CE nên $\frac{DA}{BD} = \frac{EA}{EB} => AD.BE = AE.BD$

• Ta chứng minh DE đi qua điểm K là giao hai tiếp tuyến tại A và B của (O)

Gọi K_1, K_2 lần lượt là giao điểm của DE với tiếp tuyến của (O) tại A và B.

Khi đó

$$K_1AE = K_1DA => \Delta K_1AE \sim \Delta K_1DA(g.g) => \frac{AE}{AD} = \frac{K_1E}{K_1A} = \frac{K_1A}{K_1D}$$

$$=> \left(\frac{AE}{AD}\right)^2 = \frac{K_1E}{K_1A}.\frac{K_1A}{K_1D} = \frac{K_1E}{K_1D}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\left(\frac{BE}{BD}\right)^2 = \frac{K_2E}{K_2D}$$

Mà AD.BE=AE.BD $=> \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{BD} => \frac{K_1E}{K_1D} = \frac{K_2E}{K_2D}$

Do K_1 và K_2 đều nằm ngoài đoạn DE nên K_1 và K_2 chia ngoài đoạn DE theo các tỷ số bằng nhau ⇒ $K_1 \equiv K_2 \equiv K$.

Vậy DE luôn đi qua điểm K cố định.

Câu 5.

Xét

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}-(2b-a)=\frac{5b^3-a^3-(ab+3b^2)(2b-a)}{ab+3b^2}$$

$$=\frac{5b^3-a^3-(2ab^2-a^2b+6b^3-3b^2a)}{ab+3b^2}=\frac{-b^5-a^3+a^2b+b^2a}{ab+3b^2}$$

$$=\frac{-(a+b)(a-b)^2}{ab+3b^2}\le 0$$

$$=>\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le 2b-a$$

Ta có 2 BĐT tương tự:

$$\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}\le 2c-b$$

$$\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le 2a-c$$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$P\le 2(a+b+c)-(a+b+c)=a+b+c=3$

Dấu bằng xảy ra $<=>\begin{cases}a=b=c\\a+b+c=3\end{cases}<=>a=b=c=1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 ⇔ a = b = c = 1.

Đề số 10. Chuyên Năng Khiếu HCM. Năm học: 2014-2015

Câu I. Cho phương trình $(m^2+5)x^2-2mx-6m=0(1)$ với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2})^4=16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y} \end{cases}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}\geq 3+2\sqrt{2}$$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

a) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R (C ≠ A, C ≠ B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng AN = AC, BM = BC.

b) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

........................Hết......................

ĐÁP ÁN

Câu I.

a) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x. Do đó

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$<=> \Delta' = m^2 + (m^2+5).6m > 0$

$<=> m^2 + 6m^3 + 30m > 0$

$<=> m(6m^2 + m + 30) > 0$

$<=> m\underbrace{\left[5m^2 + (m+\frac{1}{2})^2 + \frac{119}{4}\right]}_{>0\forall m} > 0$

$<=> m > 0$

Khi đó theo định lý Vi–ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2+5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m-1)^2 + 4 > 0$. Mà m>0 => $m^2 + 5 > 2m > 0$

$=> 0 < \frac{2m}{m^2+5} < 1 => 0 < x_1 + x_2 < 1$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$\Delta' \geq 0 <=> \text{m}\left[5m^2 + (m+\frac{1}{2})^2 + \frac{119}{4}\right] \geq 0$

$<=> m \geq 0$

Khi đó, theo định lý Vi–ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2 = \frac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

Ta có:

$(x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2})^4 = 16$

$<=> \left[\begin{array}{l} x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = 2 \\ x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = -2 \end{array}\right.$

$TH1: x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = 2$

$<=> \frac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}} = 2(2)$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

$TH2: x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = -2 <=> \frac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}} = -2(3)$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$<=> (t+1)(3t-2)=0$

$$<=> \left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=\dfrac{2}{3}(\mathrm{T}M) => \dfrac{2m}{m^2+5}=\dfrac{4}{9} <=> 4m^2-18m+20=0 <=> (m-2)(4m-10)=0 <=> \left[\begin{array}{l} m=2(TM) \\ m=\dfrac{2}{5}(TM) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{2;\dfrac{2}{5}\right\}$

Câu II.

$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases} \text{(I)}$$

ĐK: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Đặt $a = x\sqrt{y}; b = y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0$, $b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2 = 9b(1) \\ 2(1+b)^2 = 9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$2(1+a)^2 - 2(1+\mathrm{b})^2 = 9(\mathrm{b}-\mathrm{a})$

$<=> 2(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b}+2)+9(\mathrm{a}-\mathrm{b})=0$

$<=> (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0\forall a,b>0})=0$

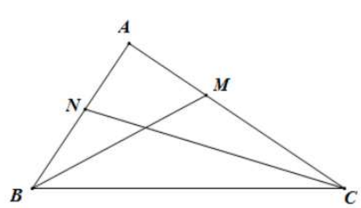
$<=> a=b$

Thay a = b vào (1) ta có

$$2(1+a)^2 = 9a <=> \left[\begin{array}{l} a=2 => b=2(TM) => \begin{cases} x\sqrt{y}=2 \\ y\sqrt{x}=2 \end{cases} <=> x=y=\sqrt[3]{4} \\ a=\dfrac{1}{2} => b=\dfrac{1}{2}(TM) => \begin{cases} x\sqrt{y}=\dfrac{1}{2} \\ y\sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \end{cases} <=> x=y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right);\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}};\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{AB}=>\frac{MC+MA}{MA}=1+\frac{BC}{AB}$$
$$\frac{NB}{NA}=\frac{BC}{AC}=>\frac{BN+NA}{NA}=1+\frac{BC}{AC}$$
$$=>\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}=(1+\frac{BC}{AB})(1+\frac{BC}{AC})=1+\frac{BC^2}{AB.AC}+\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}$$

Áp dụng định lý Pi–ta–go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2\ge 2AB.AC=>\frac{BC^2}{AB.BC}\ge 2$$
$$\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}\ge 2\sqrt{\frac{BC}{AB}.\frac{BC}{AC}}\ge 2\sqrt{2}$$
$$=>\frac{(MA+MC)(NB+NA)}{MA.NA}\ge 1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$$

Câu III.

a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=>\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c}=>c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ ab ⋮ (a + b) ⇒ a ⋮ (a + b) hoặc b ⋮ (a + b)

Điều này mâu thuẫn do 0 < a < a + b, 0 < b < a + b.

Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ c(a+b)=ab=>ca+cb=ab=>ca+ab=2ab-ab=>a(b+c)=b(2a-c)

⇒ a(b + c) ⋮ b (**)

Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1

Do đó từ (**) suy ra a ⋮ b.

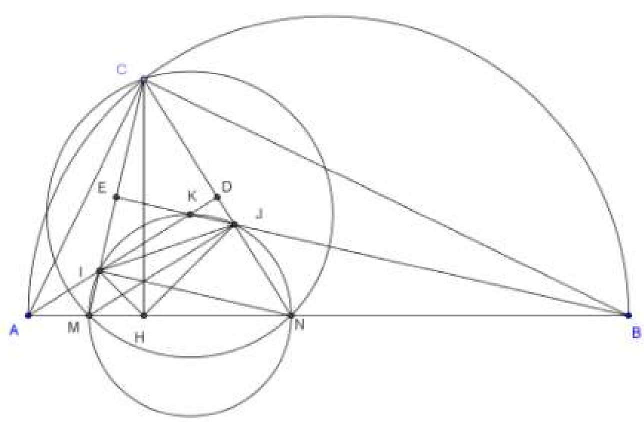
Chứng minh tương tự ta có b(a + c) = a(2b – c) ⇒ b ⋮ a

Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c

Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



a) Ta có: HCA =ABC (cùng phụ với HCB)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên HCN =BCN

Do đó CAN= HCA +HCN= ABC +BCN

Mặt khác, xét Δ BCN với góc ngoài ANC ta có: ANC= ABC+ BCN

Suy ra CAN= ANC ⇒ Δ ACN cân tại A ⇒ AC = AN.

Chứng minh tương tự ta có BC = BM.

b) Vì CM, CN lần lượt alà phân giác của góc ACH và BCH nên

$$MCN = MCH + NCH = \frac{1}{2}ACH + \frac{1}{2}BCH = \frac{1}{2}ACB = 45^o$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

⇒ IC = IN.

⇒ Δ ICN cân tại I.

Tam giác ICN cân tại I có ICN=45^o nên là tam giác vuông cân tại I

⇒ CI ⊥ IN

Chứng minh tương tự ta có CJ ⊥ MJ.

Tứ giác MIJN có MIN=MJN=90^o nên là tứ giác nội tiếp

⇒ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì CH ⊥ MN, MJ ⊥ CN, NI ⊥ CM nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của Δ CMN.

c) Đặt $AC = b; BC = a => a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2(Pi-ta-go)$

Theo câu a, ta có AN=AC= b; BM=BC=b

Do đó a+b=AN+BM=BC+MN=>MN=a+b-BC=a+b-2R

Ta có:

$$(a-b)^2 \ge 0 => 2ab \le a^2 + b^2 => (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) = 8R^2$$

$$<=> a+b \le 2\sqrt{2}R => MN = a+b-2R \le 2R(\sqrt{2}-1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b ⇔ CA = CB ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên CH ≤ R.

Do đó $S_{CMN} = \frac{1}{2}CH.MN \le \frac{1}{2}R.2.R(\sqrt{2}-1) = \mathrm{R}^2(\sqrt{2}-1)$

Dấu bằng xảy ra ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2}-1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2}-1)$ đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Câu V.

a) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e.

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử a < b < c < d < e.

Theo giả thiết ta có a + b + c > d + e ⇒ a + b + c ≥ d + e + 1

Suy ra a ≥ d + e + 1 – b – c.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

d > c ⇒ d ≥ c + 1; c > b ⇒ c ≥ b + 1

Suy ra d ≥ b + 2 ⇒ d – b ≥ 2

e > d ⇒ e ≥ d + 1 ⇒ e ≥ c + 2 ⇒ e – c ≥ 2

Do đó a ≥ (d – b) + (e – c) + 1 ≥ 5. Suy ra b, c, d, e > 5

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

b) Nếu a ≥ 6 ⇒ b ≥ a + 1 ≥ 7. Tương tự c ≥ 8, d ≥ 9, e ≥ 10 ⇒ a + b + c + d + e ≥ 40 (mâu thuẫn)

Suy ra a < 6. Mà theo câu a ta có a ≥ 5 ⇒ a = 5.

Ta có 5 + b + c ≥ d + e + 1 ⇒ b + c ≥ d + e – 4.

Mà d – 2 ≥ b, e – 2 ≥ c ⇒ d + e – 4 ≥ b + c.

Do đó

$\begin{cases} b = d - 2 \\ c = e - 2 \end{cases}$ =>a+b+c+d+e=5+2b+2c+4<40

$=> b + c < \dfrac{31}{2} => b + (b+1) \leq \text{b+ c} < \dfrac{31}{2} => b \leq 7$

Suy ra b = 6 hoặc b = 7

Nếu b = 6 thì d = b + 2 = 8. Vì b < c < d nên c = 7 ⇒ e = c + 2 = 9.

Nếu b = 7 thì d = b + 2 = 9. Vì b < c < d nên c = 8 ⇒ e = c + 2 = 10.

có hai bộ thỏa mãn đề bài là (5;6;7;8;9) và (5;7;8;9;10).

Đề số 11. Chuyên Ngoại Ngữ DHQG Hà Nội. Năm học: 2014-2015

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A=(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}):(3+\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1})$

1. Rút gọn *A*.
2. Tìm giá trị của *x* để *A* > 1.

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2+2x+7=3\sqrt{(x^2+1)(x+3)}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=3-xy\\x^4+y^4=2\end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho phương trình (ẩn x): $x^2-3(\mathrm{m}+1)\mathrm{x}+2\mathrm{m}^2+5m+2=0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=2|x_1-x_2|$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh rằng BCQP là tứ giác nội tiếp.
2. Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MH^2= MB.MC$
3. Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1. Ta có:

$$A=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(3+\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\left[\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}+\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\right]:\frac{3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{3(x-\sqrt{x}-2)+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}.\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$$

2. ĐKXĐ: $x\geq 0; x\neq 1; x\neq 3; x\neq 4$

$$A>1<=>\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}>1<=>\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}-1>0$$

$$<=>\frac{\sqrt{x}+1-3(\sqrt{x}-1)}{3(\sqrt{x}-1)}>0$$

$$<=>\frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)}>0$$

$$<=>\frac{2-\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)}>0$$

$$<=>1<\sqrt{x}<2$$

$$<=>1<x<4$$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta có $\begin{cases}1<x<4\\ x\neq 3\end{cases}$ là điều kiện cần tìm.

Câu 2.

$1.x^2+2x+7=3\sqrt{(x^2+1)(x+3)}(1)$

ĐK: $x\geq -3$

Nhận xét: $x^2+2x+7=(x^2+1)+2(x+3)$

Đặt $a=\sqrt{x^2+1}(a>0), b=\sqrt{x+3}(b\geq 0)$, phương trình (1) trở thành

$$a^2+2b^2=3ab<=>(a-b)(a-2b)=0$$

$$<=>\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=2b\end{array}\right.$$

Với

$a=b \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2+1=x+3 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2(TM) \\ x=-1(TM) \end{array}\right.$

Với

$a=2b \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2+1=4(x+3) \Leftrightarrow x^2-4x-11=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{15}(TM) \\ x=2-\sqrt{15}(TM) \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{2;-1;2-\sqrt{15};2+\sqrt{15}\right\}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$ (I)

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3-xy \\ (3-\text{xy})^2-2x^2y^2=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=3-xy \\ 9-6xy+x^2y^2-2x^2y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=3+xy \\ x^2y^2+6xy-7=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=3+xy \\ \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=-7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+y)^2=4 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+y)^2=-4 \\ xy=-7 \end{cases} (L) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (1;1) và (–1;–1)

Câu 3.

$x^2-3(\text{m}+1)\text{x}+2\text{m}^2+5m+2=0.(1)$

Ta có:

$\Delta=9(m+1)^2-4(2m^2+5m+2)=m^2-2m+1=(m-1)^2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2 \Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1$

Khi đó, theo định lí Vi–ét, ta có:

$\begin{cases} x_1+x_2=3(m-1) \\ x_1x_2=2m^2+5m+2 \end{cases}$

Do đó:

$|x_1+x_2|=2|x_1-x_2|$

$<=> (x_1+x_2)^2=4(x_1-x_2)^2$

$<=> 3(x_1+x_2)^2-16x_1x_2=0$

$<=> 27(m+1)^2-16(2m^2+5m+2)=0$

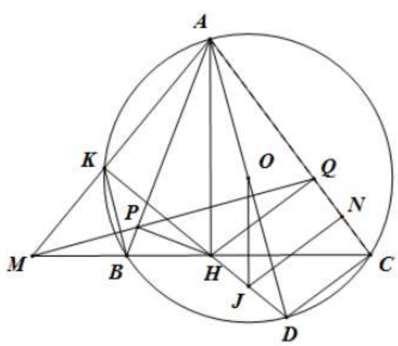
$<=> 5m^2+26m+5=0$

$<=> (m+5)(5m+1)=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} m=-5 \\ m=\dfrac{-1}{5} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq 1$, ta có m = –5 và $m=\dfrac{-1}{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4.



1. Tứ giác APHQ có APH +AQH = 90°+ 90° = 180° nên là tứ giác nội tiếp

⇒ APQ= AHQ

Ta có: AHQ =BCQ (cùng phụ với CHQ)

Do đó APQ =BCQ

Suy ra BPQC là tứ giác nội tiếp.

2. Vì BPQC là tứ giác nội tiếp nên

MBP= MQC

$\Delta MBP \sim \Delta MQC(g.g) => \dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{MP}{MC} => MB.MC=MP.MQ(1)$

Vì APHQ là tứ giác nội tiếp nên: MQH =BAH

Mà BAH= MHP (cùng phụ với PBH)

nên MQH= MHP

$\Delta MQH \sim \Delta MHP(g.g) => \dfrac{MQ}{MH}=\dfrac{MH}{MP} => MH^2=MP.MQ(2)$

Từ (1) và (2) ⇒ MH^2 =MB .MC

3. Vì AKBC là tứ giác nội tiếp nên

$MKB=MCA => \Delta MKB \sim \Delta MCA => \dfrac{MK}{MC}=\dfrac{MB}{MA}$

$=> MK.MA=MB.MC$

Kết hợp với kết quả ý 2, ta có $MH^2=MK.$MA

⇒ HK là đường cao của tam giác vuông AHM.

⇒ AK ⊥ KH

Do đó KH cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O).
Gọi J là trung điểm HD, N là trung điểm QC.
Khi đó OJ là đường trung bình của Δ AHD ⇒ OJ // AH ⇒ OJ ⊥ BC.
Mà OB = OC nên OJ là trung trực BC (3)
Vì HQ // DC (cùng vuông góc AC) nên HQCD là hình thang.
⇒ JN là đường trung bình của hình thang HQCD
⇒ JN // HQ ⇒ JN ⊥ QC
⇒ JN là trung trực của QC (4)
Từ (3) và (4) ⇒ J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BPQC (do BPQC là tứ giác nội tiếp)
⇒ J ≡ I
Mà K, H, J thẳng hàng nên I, K, H thẳng hàng.

Câu 5.

Đặt $S=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}$

Ta có:

$$2S=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+....+\frac{2014}{2^{2012}}+\frac{2015}{2^{2013}}$$

$$=> 2S-S=\frac{3}{2}+\frac{4-3}{2^2}+\frac{5-4}{2^3}+....+\frac{2015-2014}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}$$

$$=> S=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{2013}})-\frac{2015}{2^{2014}}$$

Ta có: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^{2013}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^{2014}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{2013}}$

Do đó:

$$S=2-\frac{1}{2^{2013}}-\frac{2015}{2^{2014}}<2 => 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+....+\frac{2014}{2^{2013}}+\frac{2015}{2^{2014}}<4$$

Đề số 12. Chuyên Nguyễn Trải – Hải Dương. Năm học: 2014-2015

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{43-x}=x-1$
2) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4}-\dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}(x\geq 0; x\neq 1)$

Câu II (2,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d):$y=(m-1)x+m+4$ (tham số m)

1) Với m = 2, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases}$ (tham số m)

Tìm m để hệ đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn $x^2 - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80 km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định là 6 km/h. Trong nửa quãng đường còn lại ô tô đi với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định là 12 km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tìm vận tốc dự định của ô tô.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại H. Dựng hình bình hành BHCD.

1) Chứng minh: Các tứ giác APHN, ABDC là các tứ giác nội tiếp.
2) Gọi E là giao điểm của AD và BN. Chứng minh: AB.AH = AE.AC
3) Giả sử các điểm B và C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn và B ·AC không đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi

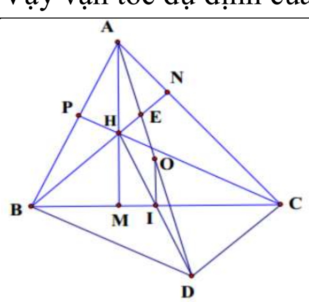
Câu V (1,0 điểm)

Cho x; y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$$

ĐÁP ÁN

Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1	**1) Giải phương trình:** $\sqrt{43-x}=x-1$	**0,25**
	$\sqrt{43-x}=x-1 <=> \begin{cases} x-1\ge 0(1) \\ 43-x=(x-1)^2(2) \end{cases}$	
	$(1) <=> x\ge 1$	**0,25**
	$(2) <=> x^2-x-42=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-6 \end{array}\right.$	**0,25**
	Kết hợp nghiệm ta có: x= 7 (thỏa mãn), x = - 6 (loại) Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là S = {7}.	**0,25**
	2)Rút gọn biểu thức: $A=\frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4}-\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}(x\ge 0; x\ne 1)$	**1,00**
	$A=\frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4}-\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4}+\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}(x\ge 0; x\ne 1)$	
	$=\frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}-\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	**0,25**
	$=\frac{10\sqrt{x}-(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}$	**0,25**
	$=\frac{10\sqrt{x}-(2x-5\sqrt{x}+3)-(x+5\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}=\frac{-3x+10\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}$	**0,25**
	$=\frac{(\sqrt{x}-1)(7-3\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}=\frac{7-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$	**0,25**
Câu 2	**Cho Parabol (*P*): y=x^2 và đường thẳng (d):y=(m-1)x+m+4 (tham số m)**	**0,25**
	Với m = 2, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d). m = 2 ta có phương trình đường thẳng (d) là : y = x + 6	
	Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình: $x^2=x+6$	**0,25**
	$<=> x^2-x-6=0 <=> \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$	**0,25**
	+) x = -2 => y = 4 +) x = 3 => y = 9 Vậy m= 2 thì (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm A(-2;4) và B(3;9)	**0,25**
	2. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung.	**1,00**
	Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:	
	$x^2=(m-1)x+m+4$ $<=> x^2-(m-1)x-m-4=0(*)$	**0,25**
	(d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*)có 2	**0,25**

	nghiệm trái dấu	
	⇔1. (- m – 4) < 0	**0,25**
	⇔ m > - 4	**0,25**
Câu 3	**1) Cho hệ phương trình:** $\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases}$ **(tham số *m*)**	**1,00**
	$\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 2x+2y=6m+4 \\ 3x-2y=11-m \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 5x=5m+15 \\ x+y=3m+2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} x=m+3 \\ y=2m-1 \end{cases}$	**0,25**
	$x^2-y^2=(m+3)^2-(2m-1)^2=-3m^2+10m+8$ $=\frac{49}{3}-3(\mathrm{m}-\frac{5}{3})^2$	**0,25**
	Do $(\mathrm{m}-\frac{5}{3})^2 \geq 0$ với mọi m; dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{5}{3}$	**0,25**
	=> $x^2-y^2 \leq \frac{49}{3}$,dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{5}{3}$ Hay x^2-y^2 lớn nhất bằng $\frac{49}{3}$,dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{5}{3}$	**0,25**
	2. Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) (x > 6) Khi đó thời gian ô tô dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{80}{x}$ (h)	**0,25**
	Thời gian thực tế ô tô đi nửa quãng đường đầu là $\frac{40}{x-6}$ (h) Thời gian thực tế ô tô đi nửa quãng đường còn lại là $\frac{40}{x+12}$ (h)	**0,25**
	Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{40}{x-60}+\frac{40}{x+12}=\frac{80}{x}$	**0,5**
	<=> $\frac{40x(x+12)}{x(x-6)(x+12)}+\frac{40x(x-6)}{x(x-6)(x+12)}=\frac{80(x-6)(x+12)}{x(x-6)(x+12)}$ <=> $40x^2+480x+40x^2-240x=80x^2+480x-5760$ <=> $240x=5760$ <=> $x=24$	
	Vậy vận tốc dự định của ô tô là 24 (km/h)	**0,25**
Câu 4	 Từ giả thiết ta có: APH=90°; ANH =90°	**0,25**
	=>Tứ giác APHN nội tiếp đường tròn đường kính AH	
	Ta có: BD//CH (BDCH là hình bình hành) và CH ⊥ AB	

	⇨ BD ⊥ AB => ABD=90^o ⇨ Tương tự ta có: ACD=90^o	0,25
	⇨ Tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn (đường kính AD)	0,25
	2. Xét 2 tam giác ABE và ACH có: ABE=ACH (cùng phụ với góc BAC) (1)	0,25
	Góc BAE phụ với góc BDA; BDA=BCA (góc nội tiếp cùng chắn cung AB) Góc CAH phụ với góc BCA =>BAE=CAH(2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra 2 tam giác ABE, ACH đồng dạng	0,25
	$=> \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AH} => AB.AH = AC.AE$	0,25
	3. Gọi I là trung điểm của BC => I cố định (do B, C cố định)	0,25
	Gọi O là trung điểm AD => O cố định (do góc BAC không đổi, B, C cố định, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) ⇨ Độ dài OI không đổi	0,25
	Tứ giác ABDC là hình bình hành => I là trung điểm của HD	0,25
	$=> OI = \frac{1}{2}AH$ (OI là đường trung bình của tam giác ADH) ⇨ Độ dài AH không đổi	0,25
	Vì AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN, độ dài AH không đổi => độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN không đổi => đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi.	0,25
Câu 5	Ta có: $S=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}+\frac{(x+y)^2}{xy}$ $=1+\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}+2$	0,25
	$=3+(\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy})+\frac{x^2+y^2}{2xy}$	0,25
	Do x, y là các số dương nên ta có: $\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy}\geq 2\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}.\frac{x^2+y^2}{2xy}}=2$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{2xy} <=> (x^2+y^2)^2=4x^2y^2 <=> (x^2-y^2)^2=0$ $<=> x^2=y^2$ $<=> x=y(x;y>0)$ $x^2+y^2\geq 2xy => \frac{x^2+y^2}{2xy}\geq 1 <=> x=y$	0,25
	Cộng các bất đẳng thức ta được S ≥ 6	0,25
	S = 6 ⇔ x = y. Vậy Min S = 6 khi và chỉ khi x = y	

Đề số 13. Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An. Năm học: 2014-2015

Câu 1 (*7,0 điểm*).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1}+2x\sqrt{x+3}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^2}{(y+1)^2}+\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}\\ 3xy=x+y+1\end{cases}$

Câu 2 (*3,0 điểm*).

a) Tìm các số nguyên *x* và *y* thoả mãn phương trình $9x+2=y^2+y$

b) Tìm các chữ số *a, b* sao cho $(\overline{ab})^2=(a+b)^3$

Câu 3 (*2,0 điểm*).

Cho các số *a, b, c* không âm. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}=2(ab+bc+ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AE và CF cắt nhau tại H. Gọi P là điểm thuộc cung nhỏ BC (P khác B, C); M, N lần lượt là hình chiếu của P trên các đường thẳng AB và AC. Chứng minh rằng:

a) OB vuông góc với EF và $\dfrac{BH}{BO}=2.\dfrac{EF}{AC}$

b) Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng HP.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có $BAC=60^o$;BC $=2\sqrt{3}cm$. Bên trong tam giác này cho 13 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong 13 điểm ấy luôn tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1cm.

----- HẾT -----

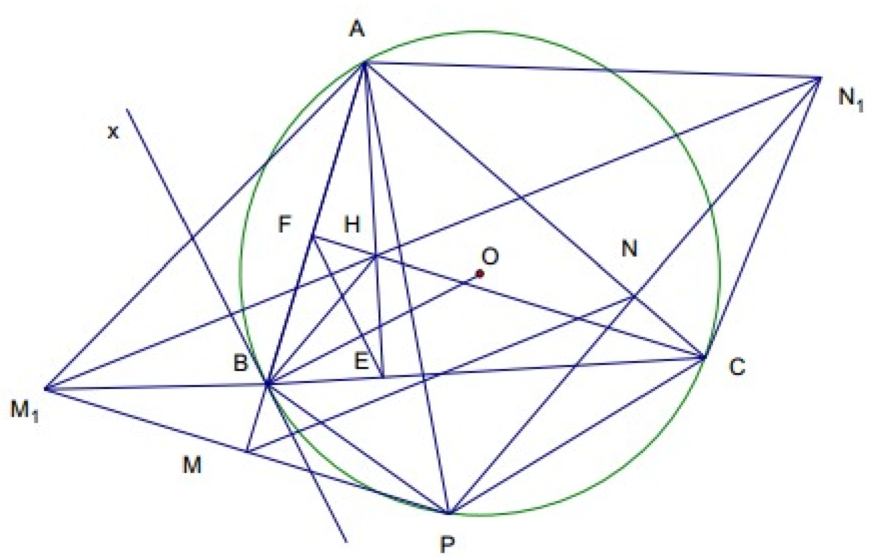
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**

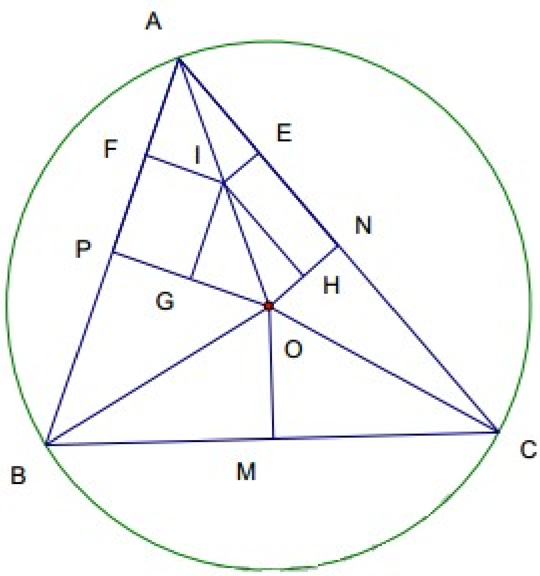
NGHỆ AN **TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU**
NĂM HỌC 2014 – 2015

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
1.		**7,0**
a)		**3,5**
	Điều kiện: $x \ge -1$ Ta có: $\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+3} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x+3} - 2x + \sqrt{x+1} - \sqrt{(x+1)(x+3)} = 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{x+3} - 1) - \sqrt{x+1}(\sqrt{x+3} - 1) = 0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+1} - 2x) = 0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 1 (1) \\ \sqrt{x+1} = 2x (2) \end{array}\right.$	**0,5**
	Ta có (1) $\Leftrightarrow$ x = – 2 (loại)	**0,5**
	(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} (TM)$	**0,5**
	Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$	**0,25**
b)		**3,5**
	Điều kiện: $x \ne -1; y \ne -1$ Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2} + \dfrac{y^2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y+1} \cdot \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$	**0,5**
	Đặt $u = \dfrac{x}{y+1}; v = \dfrac{y}{x+1}$, hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u^2 + v^2 = \dfrac{1}{2} \\ uv = \dfrac{1}{4} \end{cases}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases}$	**0,5**

	$=> \left[\begin{array}{l} u=v=\frac{1}{2} \\ u=v=\frac{-1}{2} \end{array}\right.$	**0,5**
	Nếu $u=v=\frac{1}{2} => \begin{cases} y+1=2x \\ x+1=2y \end{cases} <=> x=y=1$(TM)	**0,75**
	Nếu $u=v=-\frac{1}{2} => \begin{cases} y+1=-2x \\ x+1=-2y \end{cases} <=> x=y=\frac{-1}{3}$(TM) Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $x=y=1$, $x=y=\frac{-1}{3}$	**0,75**
2.		**3,0**
a)		**2,0**
	Phương trình đã cho tương đương với $9x=(y-1)(y+2)(1)$	**0,5**
	Nếu y $-1 \vdots 3$ thì $y+2=(y-1)+3 \vdots 3 =>$ (y$-$1)(y+2)$\vdots$9 Mà 9x $\vdots$9 $\forall x \in Z$ nên ta có mâu thuẫn.	**0,5**
	Suy ra y $-1 \vdots$ 3, do đó: y -1 = 3k($k \in Z$)=>y=3k+1($k \in Z$)	**0,5**
	Thay vào (1) ta có: $9x=3k(3k+3) => x=k(k+1)$	**0,25**
	Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x=k(k+1) \\ y=3k+1 \end{cases} (k \in Z)$	**0,25**
b)		**1,0**
	Từ giả thiết suy ra $\overline{ab}=(a+b)\sqrt{a+b}(1)$ Vì $\overline{ab}$ và a+b $\in N^*$ nên a + b là số chính phương.	**0,25**
	Mặt khác $1 \le a+b \le 18 => a+b \in \{1;4;9;16\}$	**0,25**
	Nếu a+ b=1, a +b = 4, a+ b =16 thì thay vào (1) không thỏa mãn Nếu a +b = 9 thay vào (1) ta được $\overline{ab}=27$ Vậy a=2;b=7	**0,5**
3.		**2,0**
	Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x; \sqrt[3]{b^2}=y; \sqrt[3]{c^2}=z.$ $=> a^2=x^3; b^2=y^3; c^2=z^3, a=\sqrt{x^3}; b=\sqrt{y^3}; c=\sqrt{z^3}; x,y,z \ge 0$ Bất đẳng thức đã cho trở thành: $x^3+y^3+z^3+3xyz \ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})(1)$	**0,5**
	Vì vai trò của x; y ;z bình đẳng nên có thể giả sử x ≥y ≥z ≥ 0 Khi đó $x(x-y)^2+z(y-x)^2+(z+x-y)(x-y)(y-z) \ge 0$ $=> x^3+y^3+z^3+3xyz \ge xy(z+y)+yz(y+z)+zx(z+x)(2)$	**0,5**
	Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $xy(x+y) \ge 2xy\sqrt{xy}=2\sqrt{x^3y^3}$ (3) Tương tự ta có:	**0,5**

	$yz(y+z) \ge 2\sqrt{y^3z^3}$ (4) $zx(z+x) \ge 2\sqrt{z^3x^3}$ (5) Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})$(6)	
	Từ (2) và (6) ta có $x^3+y^3+z^2+3xyz \ge 2(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3})$ Đẳng thức xảy ra khi x=y=z hay a= b =c.	**0,5**
4.		**6,0**
a)		**4,0**
		
	Vì AEC= AFC =90° nên tứ giác ACEF nội tiếp.	**0,5**
	Suy ra BFE =ACB (cùng bù với góc AFE) (1)	**0,5**
	Kẻ tia tiếp tuyến Bx của đường tròn (O) tại B. Ta có ACB= ABx (cùng chắn cung AB) (2)	**0,5**
	Từ (1) và (2) suy ra BFE =ABx	**0,5**
	Do đó Bx// EF	**0,5**
	Mà OB⊥Bx nên OB⊥ EF	**0,5**
	Xét ΔBEF và ΔBAC có ABC chung và BFE= ACB (theo (1)) nên ΔBEF và ΔBAC đồng dạng.	**0,5**
	Mặt khác ΔBEF và ΔBAC lần lượt nội tiếp đường tròn bán kính $\frac{BH}{2}$ và đường tròn bán kính OB nên $\frac{EF}{AC}=\frac{BH}{2.OB}$ Từ đó ta có $\frac{BH}{BO}=2.\frac{EF}{AC}$	**0,5**
b)		**2,0**
	Gọi M_1 và N_1 lần lượt là các điểm đối xứng với P qua AB và AC. Ta có: AM_1B=APB (do tính chất đối xứng) (3)	**0,25**
	APB=ACB (cùng chắn cung AB) (4)	**0,25**

	Tứ giác BEHF nội tiếp nên BFE= BHE (5) Mặt khác theo câu a) BFE =ACB (6)	**0,25**
	Từ (3), (4), (5), (6) suy ra AM_1B= BHE ⇒ AM_1B+ AHB = 180^0,	**0,25**
	do đó tứ giác $AHBM_1$ nội tiếp	**0,25**
	⇒ AHM_1= ABM_1 mà ABM_1= ABP nên AHM_1 =ABP.	**0,25**
	Chứng minh tương tự ta có AHN_1= ACP	**0,25**
	⇒ AHM_1+ AHN_1= ABP+ ACP=180^O ⇒ M_1, N_1, H thẳng hàng Mặt khác MN là đường trung bình của tam giác PM_1N_1 , do đó MN đi qua trung điểm của PH.	**0,25**
5.		**2,0**
		
	Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BC, CA, AB. Do tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác ABC Vì $BAC = 60^O => MOC = 60^O => OA = OB = OC = \frac{MC}{\sin 60^o} = 2$	**0,5**
	Vì O nằm trong tam giác ABC và OM⊥ BC, ON ⊥AC ,OP ⊥AB Suy ra tam giác ABC được chia thành 3 tứ giác ANOP, BMOP, CMON nội tiếp các đường tròn có đường kính 2 (đường kính lần lượt là OA, OB, OC).	**0,25**
	Theo nguyên lý Đirichlê, tồn tại ít nhất một trong 3 tứ giác này chứa ít nhất 5 điểm trong 13 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác ANOP.	**0,25**
	Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, AP, PO, ON và I là trung điểm OA, suy ra IA=IP=IO=IN=1	**0,25**
	Khi đó tứ giác ANOP được chia thành 4 tứ giác AEIF, FIGP, IGOH, IHNE nội tiếp các đường tròn có đường kính 1.	**0,25**
	Theo nguyên lý Đirichlê, tồn tại ít nhất một trong 4 tứ giác này chứa ít nhất 2 điểm trong 5 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác AEIF chứa 2 điểm X, Y trong số 13 điểm đã cho.	**0,25**
	Vì X, Y nằm trong tứ giác AEIF nên X, Y nằm trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác này, do đó XY không lớn hơn đường kính đường tròn này, nghĩa là khoảng cách giữa X, Y không vượt quá 1.	**0,25**

Đề số 14. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2014-2015

Bài 1. *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$ (x > 0, x ≠ 4)

1, Rút gọn biểu thức A.
2, Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 2. *(2, 5 điểm)*

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) : y = 2(m + 3)x – 2m + 2 (m là tham số, m ∈ ℝ).

1, Với m = –5 tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d).

2, Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.

3, Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m

Bài 3. *(1,5 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^2+3xy-2y^2-5(2x-y)=0\\ x^2-2xy-3y^2+15=0\end{cases}$

Bài 4. *(3,5 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O; R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

1, Chứng minh rằng tam giác ABT đồng dạng với tam giác BDT.

2, Chứng minh rằng: AB.CD = BD.AC

3, Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC , góc BDC và đường thẳng BC đồng quy tai một điểm.

4, Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng góc BAD bằng góc MAC.

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: x(x + 1) + y(y + 1) + z(z + 1) ≤ 18.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B=\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1. Với x > 0, x ≠ 4 ta có:

$$A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}-7\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}.\frac{5x-10\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}.\frac{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

2. Vì $x>0\Rightarrow 5\sqrt{x}>0;2\sqrt{x}+1>0\Rightarrow A>0$

Mặt khác, xét $A-3=\dfrac{5\sqrt{x}-3\left(2\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{-\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+1}<0\quad \forall x>0\Rightarrow A<3$

Vậy 0 < A < 3

Do đó A nguyên ⇔ A = 1 hoặc A = 2.

$A=1\Leftrightarrow \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow 3\sqrt{x}=1\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$ (thỏa mãn)

$A=2\Leftrightarrow \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow 5\sqrt{x}=2(2\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow \sqrt{x}=2\Leftrightarrow \sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=4$ (loại)

Vậy $A\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{9}$

Bài 2.

1. Khi m = –5 ⇒ (d) : y = –4x + 12

Khi đó , phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2=-4x+12\Leftrightarrow x^2+4x-12=0\Leftrightarrow (x+6)(x-2)=0$$

⇔ x = –6 hoặc x = 2

Khi x = –6 ⇒ y = 36

Khi x = 2 ⇒ y = 4

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là (–6;36) và (2;4)

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 2(m+3)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + 2m - 2 = 0 \qquad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+3)^2 - (2m-2) > 0$$
$$\Leftrightarrow (m^2 + 6m + 9) - (2m-2) > 0$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 7 > 0$$
$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 3 > 0$$

(luôn đúng ∀ m)

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Hai giao điểm có hoành độ dương ⇔ (1) có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) > 0 \\ x_1x_2 = 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy m > 1.

3. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d) luôn đi qua ∀ m

Khi đó:

$$y_0 = 2(m+3)x_0 - 2m + 2 (\forall m)$$
$$\Leftrightarrow m(2x_0 - 2) + (6x_0 + 2 - y_0) = 0 (\forall m)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = 0 \\ 6x_0 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ 6.1 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 8 \end{cases}$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm (1;8) ∀m.

Bài 3.

$$\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2-5(2x-y)=0(1) \\ x^2-2xy-3y^2+15=0(2) \end{cases}(I)$$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow (2x-y)(x+2y)-5(2x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-y)(x+2y-5)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ x=5-2y \end{array}\right.$$

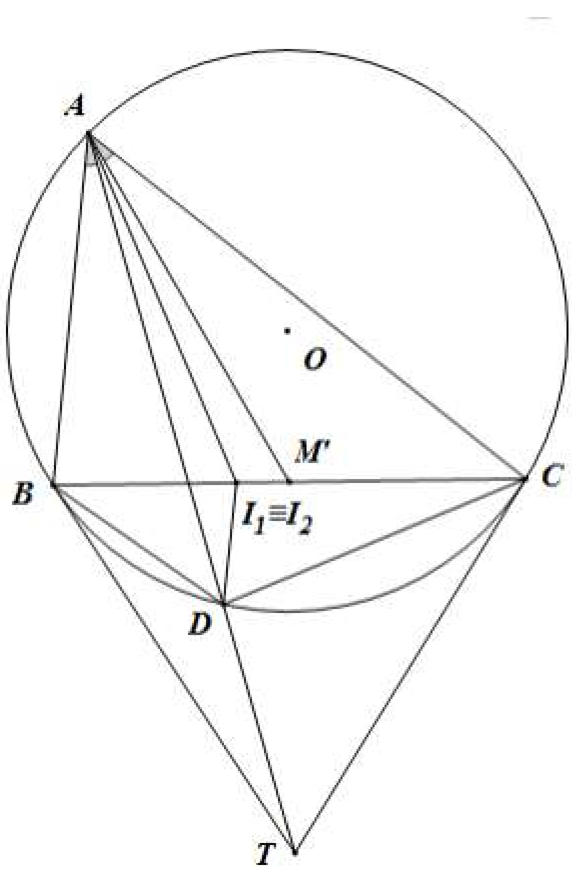
Do đó: $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2-2x.2x-3(2x)^2+15=0 \end{cases}(II)$ hoặc $\begin{cases} x=5-2y \\ (5-2y)^2-2(5-2y)y-3y^2+15=0 \end{cases}(III)$

$$(II)\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ -15x^2+15=0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;y=2 \\ x=-1;y=-2 \end{array}\right.$$

$$(III)\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 5y^2-30y+40=0 \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2;x=1 \\ y=4;x=-3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm (1;2) , (-1;-2) , (-3;4)

Bài 4.



1. Vì TB là tiếp tuyến của (O) nên

BAD = DBT (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng BD)

Xét Δ ABT và Δ BDT có:

$$\begin{cases} ATB(chung) \\ DBT = BAT(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ABT \sim \Delta BDT(g.g)$$

2. Vì $\Delta ABT \sim \Delta BDT \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AT}{BT} = \frac{BT}{DT} \Rightarrow \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \frac{AT}{BT}.\frac{BT}{DT} = \frac{AT}{DT}$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\left(\frac{AC}{CD}\right)^2 = \frac{AT}{DT}$$

Do đó $\left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{AC}{CD}\right)^2 \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = BD.AC$

3. Gọi I_1, I_2 lần lượt là giao điểm của BC với tia phân giác góc BAC và góc BDC.

Xét Δ ABC có tia phân giác AI_1, theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{AB}{AC}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{I_2B}{I_2C} = \frac{DB}{DC}$

Theo câu 2) ta có $AB.CD = BD.AC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{I_1B}{I_1C} = \frac{I_2B}{I_2C}$

Mà I_1, I_2 cùng thuộc đoạn BC nên chúng chia trong đoạn BC theo các tỉ số bằng nhau.

$\Rightarrow I_1 \equiv I_2$

⇒ Đường phân giác góc BAC, đường phân giác góc BDC và đường thẳng BC đồng quy.

4. Gọi M’ là điểm thuộc đoạn BC sao cho CAM’ = BAD . Ta chứng minh M’ ≡ M.

Vì CAM’ = BAD => BAM’ = CAD

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp nên ADB = ACM’ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà CAM' = BAD => ΔADB ~ ΔACM' (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{CM'} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow BD.AC = AD.CM'$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: AB.CD = AD.BM' (2)

Từ (1) và (2) với chú ý BD.AC = AB.CD => AD.CM' = AD.BM' => CM' = BM'

⇒ M' ≡ M

=> BAD = MAC

Bài 5. Với mọi a, b, c > 0, ta có:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \ge 2ab+2bc+2ca$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge a^2+b^2+c^2 2ab+2bc+2ca$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 (*)$$

Với mọi a, b, c > 0, áp dụng BĐT Cô–si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}} > 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} (**)$$

Áp dụng BĐT (*) với a = x, b = y, c = z và từ điều kiện của x, y, z ta có:

$$18 \ge x^2+y^2+z^2+x+y+z \ge \frac{(x+y+z)^2}{3}+x+y+z$$
$$\Rightarrow (x+y+z)^2+3(x+y+z)-54 \le 0$$
$$\Rightarrow (x+y+z+9)(x+y+z-6) \le 0$$

$\Rightarrow x+y+z \le 6$ (do x + y + z + 9 > 0) (***)

Áp dụng BĐT (**) với a = x + y + 1, b = y + z + 1, c = z + x + 1, ta có:

$$B = \frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1} \ge \frac{9}{x+y+1+y+z+1+z+x+1} = \frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

Áp dụng (***) ta có: $B \ge \dfrac{9}{2.6+3} = \dfrac{3}{5}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+1=y+z+1=z+x+1 \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{5}$, xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 2.

Đề số 15. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2014-2015

Bài 1. *(3,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $\sqrt{5x-6}+\sqrt{10-3x}=2x^2-x-2$
2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+8xy^2=96y \\ x^2+32y^2=48 \end{cases}$

Bài 2. *(2,0 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2-2x-4=0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Tính $S=x_1^{\ 7}+x_2^{\ 7}$
2) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2$. Chứng minh a + b + c + d là hợp số.

Bài 3. *(1,0 điểm)*

Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

Chứng minh: $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$

Bài 4. *(3,0 điểm)*

Cho hình bình hành ABCD với A, C cố địnhvà B, D di động. Đường phân giác của góc BCD cắt AB và AD theo thứ tự tại I và J (J nằm giữa A và D). Gọi M là giao điểm khác A của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và AIJ, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ.

1) Chứng minh AO là phân giác góc IAJ.
2) Chứng minh bốn điểm A, B, D, O cùng thuộc một đường tròn.
3) Tìm đường tròn cố định luôn đi qua M khi B, D di động.

Bài 5. *(1,0 điểm)*

Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chi hết cho 11

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$a)\sqrt{5x-6}+\sqrt{10-3x}=2x^2-x-2 \qquad (\frac{6}{5}\le x\le\frac{10}{5})$

$<=> \sqrt{5x-6}-2+\sqrt{10-3x}-2=2x^2-x-6$

$<=> \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2}-\frac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2}-(x-2)(2x+3)=0$

$<=> (\mathrm{x}-2)(\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3)=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x=2(TM) \\ \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3=0(*) \end{array}\right.$

Vì

$\frac{6}{5}\le x\le\frac{10}{5} => \sqrt{5x-6}+2\ge 2 => \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}\le\frac{5}{2} => \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-3<0$

$\frac{6}{5}\le x\le\frac{10}{5} => -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x<0$

$=> \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2}-\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2}-2x-3<0 => (*)VN$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là {2}

2) $\begin{cases} x^3+8xy^2=96y \\ x^2+32y^2=48 \end{cases}$ (I)

(I) $<=> \begin{cases} x^3+8xy^2=48.2y \\ x^2+32y^2=48 \end{cases} <=> \begin{cases} x^3+8xy^2=2y(x^2+32y^2)(*) \\ x^2+32y^2=48 \end{cases}$

$(*) <=> x^3-2x^2y+8xy^2-64y^3=0$

$<=> x^3-(4y)^3-2xy(x-4y)=0$

$<=> (x-4y)(x^2+2xy+16y^2)=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x=4y \\ x^2+2xy+16y^2=0 \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} x=4y \\ (x+y)^2+15y^2=0 \end{array}\right.$

$<=> \left[\begin{array}{l} x=4y \\ x=y=0 \end{array}\right.$

Vì x = y = 0 không thỏa mãn hệ phương trình nên x = 4y

$$(I) <=> \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 4y \\ 16y^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} x = 4y \\ y^2 = 1 \end{cases} <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (4;1), (–4;–1)

Bài 2.

1) Phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Theo định lý Vi–ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}$

Ta có:

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$=> x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2^3 - 3.(-4).2 = 32$$

Và

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2.(-4) = 12$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 12^2 - 2.(-4)^2 = 112$$

Khi đó:

$$(x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_1^4) = x_1^7 + x_2^7 + x_1^3x_2^4 + x_1^4x_2^3$$

$$=> S = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_1^4) - (x_1x_2)^3(x_1 + x_2)$$

$$= 32.112 - (-4)^3.2 = 3712$$

Vậy S = 3172.

2) Ta có

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 => a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2xd + d^2 + ab - cd$$

$$<=> ab - cd = (a+b)^2 - (c-d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(*)$$

Nếu ab-cd=0: Do a+b+c+d>0=>a+b-c-d=0=>a+b+c+d=2(c+d) là hợp số do c + d ∈ ℕ* và c + d > 1

Nếu ab -cd ≠ 0:Từ (*) ⇒ ab – cd ⋮ (a + b + c + d).

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 => 3(ab - cd) + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - 2cd + d^2$$

$$=> 3(ab - cd) = (c-d)^2 - (a-b)^2 = (c - d + a - b)(c - d - a + b) \neq 0$$

⇒ (c – d + a – b)(c – d – a + b) ⋮ (a + b + c + d)

Giả sử a + b + c + d là số nguyên tố thì ta có

c – d + a – b ⋮ a + b + c + d hoặc c – d – a + b ⋮ a + b + c + d

Điều này mâu thuẫn do –(a + b + c + d) < c – d + a – b < a + b + c + d ;

–(a + b + c + d) < c – d – a + b < a + b + c + d và (c – d + a – b)(c – d – a + b) ≠ 0

Vậy a + b + c + d là hợp số.

Bài 3.

Thay 1 = a + b + c ta có:

A+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)

Do đó:

$$\frac{a - bc}{a + bc} = \frac{a + bc - 2bc}{a + bc} = 1 - \frac{2bc}{a + bc} = 1 - \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có 2 đẳng thức tương tự

$$\frac{b-ca}{b+ca}=1-\frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

$$\frac{c-ab}{c+ab}=1-\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Cộng từng vế của 3 đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}=3-2\left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2} <=> \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\right]\ge\frac{3}{4}$$

$$<=> \frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{3}{4}$$

$$<=> 4(b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2)\ge 3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)$$

$$<=> b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2\ge 6abc(*)$$

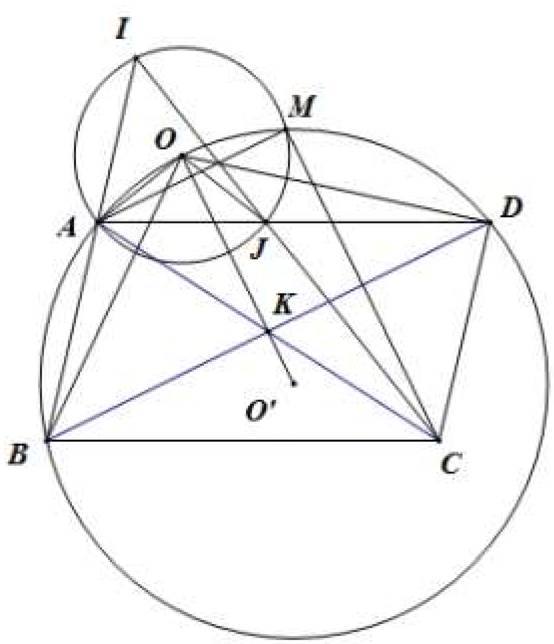
Áp dụng BĐT Cô–si cho ba số dương ta có:

$$\begin{cases} b^2c+c^2a+a^2b\ge 3abc \\ bc^2+ca^2+ab^2\ge 3abc \end{cases} => (*) \text{ đúng}$$

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 4.



1) Vì AI // DC (do ABCD là hình bình hành) nên AIJ= DCJ (so le trong)

Vì AJ // BC nên AJI= BCJ (đồng vị)

Mà CJ là phân giác góc BCD nên DCJ= BCJ=> AIJ= AJI $\Rightarrow \Delta$ AIJ cân ở A

Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ AIJ cân nên AO là trung trực IJ đồng thời là phân giác góc IAJ.

2) Vì JD // BC nên DJC= JCB= JCD ⇒ Δ JDC cân tại D

Suy ra JD = DC = AB (do ABCD là hình bình hành)

Ta có OA = OJ (bằng bán kính (O))

Xét Δ OAJ với góc ngoài OJD có:

OJD= AOJ +OAJ =2AIJ+ OAJ= 2DCJ +OAJ= DCB +OAJ=DAB+OAJ=OAB

Xét Δ OAB và Δ OJD có:

$$\begin{cases} OA = OJ(cmt) \\ OAB = OJD(cmt) => \Delta OAB = \Delta OJD(c.g.c) \\ AB = JD(cmt) \end{cases}$$

$=> OBA = ODJ$

⇒ AODB là tứ giác nội tiếp

⇒ A, O, D, B cùng thuộc một đường tròn.

3) Vì Δ OAB = Δ OJD nên OB = OD. Mà O'B = O'D (bằng bán kính (O')) nên OO' là trung trực của BD.

Gọi K là giao BD và AC ⇒ K là trung điểm BD và AC.

⇒ K ∈ OO'

Vì OA = OM, O'A = O'M nên OO' là trung trực của AM

Mà K ∈ OO' ⇒ KA = KM = KC

⇒ M thuộc đường tròn tâm K bán kính KA, hay đường tròn đường kính AC.

Vậy khi B, D thay đổi, M luôn nằm trên đường tròn đường kính AC.

Bài 5.

Xét 20 số đầu tiên. Trong 20 số này có 2 số chia hết cho 10, chúng có chữ số hàng đơn vị là 0.

Mặt khác, trong 2 số đó có một số có chữ số hàng chục khác 9.

Gọi số đó là N. Xét dãy 11 số thuộc 39 số đã cho:

N, N + 1, ... , N + 9, N + 19

Tổng các chữ số của các số này tương ứng là.

s, s + 1, s + 2, ..., s + 9, s + 10

Thật vậy, nếu N có tổng chữ số là s thì mỗi số N + i với $1 \le i \le 9$ có tất cả các chữ số (trừ hang đơn vị) giống số N và chữ số hàng đơn vị của N + i là i, do đó tổng chữ số của N + i là s + i.

Số N + 19 có chữ số hàng đơn vị là 9, chữ số hàng chục hơn chữ số hàng chục của số N là 1, còn lại tất cả các chữ số ở hàng khác của hai số bằng nhau, do đó tổng chữ số của N + 19 là s + 10.

Trong 11 số liên tiếp s, s + 1, s + 2, ..., s + 9, s + 10 có một số chia hết cho 11.

Bài toán được chứng minh.

Đề số 16. Chuyên HCM. Năm học: 2014-2015

Câu 1: (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-3}=3x-4$

b) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: x + y + z = 0 và xyz ≠ 0.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2-z^2}$

Câu 2: (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\frac{1}{y}=\frac{9}{x} \\ x+y-\frac{4}{x}=\frac{4y}{x^2} \end{cases}$

Câu 3: (1,5 điểm)

Cho tam giác đều ABC và M là một điểm bất kì trên cạnh BC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC. Xác định vị trí của M để tam giác MDE của chu vi nhỏ nhất

Câu 4: (2 điểm).

a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

Câu 5: (2 điểm)

Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB voi OM, I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A).

a) Chứng minh HK vuông góc AI.

b) Tính số đo góc MKB

Câu 6: (1 điểm)

Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$

ĐÁP ÁN

Câu 1

$a) x\sqrt{2x-3} = 3x-4$ (ĐKXĐ: x ≥ 3/2)

$<=> x^2(2x-3) = (3x-4)^2$

$<=> 2x^3 - 3x^2 = 9x^2 - 24x + 16$

$<=> 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = 0$

$<=> 2(x-2)^3 = 0$

$<=> x = 2(TM)$

Vậy S = {2}

b)Ta có

$x + y + z = 0$

$<=> (y+z)^2 = (-x)^2$

$<=> y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$

Tương tự:

$z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$

$x^2 + y^2 - z^2 = -2yx$

$P = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2zx} + \frac{z^2}{-2yx} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz}$

Mà

$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3$

$= (-z)^3 - 3xy(x+y) + z^3 = 3xy$

$=> P = \frac{3xyz}{-2xyz} = \frac{-3}{2}$

Câu 2

ĐKXĐ: x, y ≠ 0

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} (1) \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$\frac{1}{y} + \frac{4}{x} = \frac{9}{x} - \frac{4y}{x^2}$

$<=> \frac{4y}{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{y} = 0$

$<=> x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$

$<=> (x-4y)(x-y) = 0$

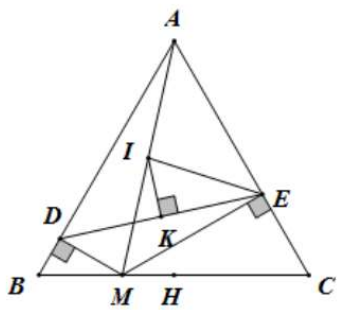
$<=> \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y \end{array}\right.$

Với x = y, thế vào (1) có $2x-\frac{8}{x}=0 <=> x=y=\pm 2$

Với x = 4y, thế vào (1) có $5y-\frac{5}{4y}=0 <=> y=\pm\frac{1}{2} => x=\pm 2$

Vậy $S=\left\{(2;2);(-2;-2);(2;\frac{1}{2});(-2;\frac{-1}{2})\right\}$

Câu 3:



$C_{MDE}=MD+ME+DE=(BM+CM)\sin 60^o+DE$

$=BC.\sin 60^o+DE$

Mà BC.sin60^0 không đổi nên chi vi tam giác MDE nhỏ nhất ⇔ DE nhỏ nhất

Tứ giác ADME nội tiếp đường tròn đường kính AM (ADM =AEM = 90°) nên tam giác ADE cũng nội tiếp đường tròn đường kính AM, tâm I là trung điểm AM.

Gọi K là trung điểm DE, suy ra IK ⊥ DE và $EIK=BAC(=\frac{DIE}{2})$

Gọi R là bán kính đường tròn tâm I đường kính AM thì

$\sin KIE=\frac{KE}{IE}=\frac{0,5DE}{R}=\frac{DE}{2R}=\frac{DE}{AM}$

$=> DE=AM.\sin BAC=AM.\sin 60^o$

Vì sin60º không đổi nên DE nhỏ nhất ⇔ AM nhỏ nhất ⇔ M ≡ H (H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC, mà tam giác ABC đều nên H là trung điểm BC).

Vậy khi M là trung điểm BC thì chu vi tam giác MDE nhỏ nhất.

Câu 4

$a)\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge \frac{x}{y}+\frac{y}{x}(x\ne 0;y\ne 0)$

$<=>\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\ge 0$

$<=>\frac{x^4+y^4-x^3y-xy^3}{x^2y^2}\ge 0$

$<=>\frac{(x-y)(x^3-y^3)}{x^2y^2}\ge 0$

$<=>\frac{(x-y)^2(x^2+xy+y^2)}{x^2y^2}\ge 0$

$<=>\frac{(x-y)^2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]}{x^2y^2}\ge 0$

(luôn đúng $\forall$ x,y $\ne 0$)

c) Tìm minP (a, b > 0)

$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

$=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(\mathrm{a+b})}$

$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab+\frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$

$=\frac{\frac{1}{4}(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}}\ge \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2.ab}}{\sqrt{ab}(a+b)}+\frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

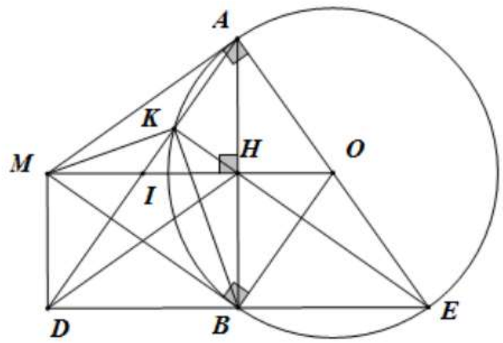
Dấu bằng xảy ra $<=>\begin{cases}\frac{1}{4}(a+b)^2=ab\\ a=b\end{cases}<=>a=b$

Vậy $MinP=\frac{5}{2}<=>a=b$

*Cách khác

$P=\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{(a+b)^2+ab}{\sqrt{ab}(a+b)}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{3}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+(\frac{1}{4}.\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b})\ge \frac{3}{4}.2+2\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}$

Câu 5



a) Kẻ đường kính AE của (O), EH cắt (O) tại K’, AK’ cắt EB tại D. Dễ thấy H là trực tâm tam giác AED nên DH ⊥ AO

⇒ DH // AM (1)

Ta có BDH= EAH =HMB nên tứ giác HMDB nội tiếp

⇒ HM ⊥ MD ⇒ DM // AH (2)

Từ (1) và (2) ⇒ AHDM là hình bình hành.

⇒ AD đi qua trung điểm I của HM

⇒ K’ là giao của AI với (O)

⇒ K’ ≡ K

⇒ HK ⊥ AI

b) Ta có IAM =ABK (cùng chắn cung AK)

AMI= OBA (OAMB nội tiếp)

Nên

IAM+AMI=ABK+OBA

⇔AIH=OBK

Mặt khác

AIH+KHI=90°

OBK+KBM=90°

=>KHI=KBM

⇒ Tứ giác HKMB nội tiếp

=>BKM=BHM=90°

Câu 6

$2015(x^2+y^2)-2014(2xy+1)=25$

$<=> 2014(x-y)^2+x^2+y^2=2039$

Đặt t=|x-y| , $t \in N$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: t = 0, tức x = y ⇒ phương trình vô nghiệm

TH2: t = 1, tức là x – y = ±1

+ Với x – y = 1 hay x = y + 1, phương trình trở thành:

$(y+1)^2+y^2=25 <=> y^2+y-12=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-4 \end{array}\right.$

Với y = 3 thì x = 4; với y = –4 thì x = –3

+ Với x – y = –1 hay x = y – 1, phương trình trở thành:

$(y-1)^2 + y^2 = 25 <=> y^2 - y - 12 = 0$

$<=> \left[\begin{array}{l} y = -3 \\ y = 4 \end{array}\right.$

Với y = –3 thì x = –4; với y = 4 thì x = 3

TH3: t ≥ 2, VT > VP ⇒ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp (x;y) thỏa là (4;3), (–3;–4), (–4;–3), (3;4)

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bình phương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Đề số 17. Chuyên Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2014-2015

Câu 1: (2.0 điểm) Cho biểu thức: $P=\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ (Với x > 0)

1.Rút gọn biểu thức P

2.Tính giá trị của biểu thức khi $x=2\sqrt{2}+3$

Câu 2: (2.0 điểm)

1.Cho phương trình: $2013x^2-(m-2014)x-2015,$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1{}^2+2014}-x_1=\sqrt{x_2{}^2+2014}+x_2$

2.Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+2)^2}=3$

Câu 3: (2.0 điểm) Tìm nghiệm của phương trình: $x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

Câu 4: (3.0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm thuộc cung AB (AB ≠ A, M ≠ B) và I là điểm thuộc đoạn OA (I ≠ O, I ≠ A). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường thẳng này cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của AM với IC, F là giao điểm của BM với ID. Chứng minh rằng:

1.Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp

2.EF // AB

3.OM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM và DFM.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2014$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$

Hết

Họ và tên thí sinh: ……………………………………………….Số báo danh:…………

Chữ ký của giám thị 1:…………………………………Chữ ký của giám thị 2:…………

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHUYÊN TIN

Câu 1:

1.1

$$P=\frac{3x+\sqrt{16x}-7}{x+2\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{3x+4\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}\qquad(0,25d)$$

$$=\frac{3x+4\sqrt{x}-7-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}\qquad(0,25\text{d})$$

$$=\frac{3x+4\sqrt{x}-7-x+1-x+9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}\qquad(0,25\text{d})$$

$$=\frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}=\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\qquad(0,25\text{d})$$

1.2

$x=2\sqrt{2}+3=(\sqrt{2}+1)^2$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$=>\sqrt{x}=\sqrt{2}+1\qquad(0,5d)$

$$=>\text{P}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\qquad(0,5\text{d})$$

Câu 2:

2.1

Ta có: $\Delta=(m-2014)^2+4.2013.2015>0$ với mọi m. Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. (0.25 đ)

Theo hệ thức Vi – et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m-2014}{2013} \\ x_1x_2=\dfrac{-2015}{2013} \end{cases}$

Từ $\sqrt{{x_1}^2+2014}-x_1=\sqrt{{x_2}^2+2014}+x_2$ (0,25đ)

$$=>\begin{cases}2014=(\sqrt{x_1^2+2014}+x_1)(\sqrt{x_2^2+2014}+x_2)\\2014=(\sqrt{x_1^2+2014}-x_1)(\sqrt{x_2^2+2014}-x_2)\end{cases}$$

$$=>\begin{cases}2014=(\sqrt{(x_1^2+2014)(x_2^2+2014)}+x_2\sqrt{x_1^2+2014}+x_1\sqrt{x_2^2+2014}+x_1x_2\\2014=(\sqrt{(x_1^2+2014)(x_2^2+2014)}-x_2\sqrt{x_1^2+2014}-x_1\sqrt{x_2^2+2014}+x_1x_2\end{cases}$$

$$=>\sqrt{x_1^2+2014}(x_1+x_2)+\sqrt{x_2^2+2014}(x_1+x_2)=0$$

$$=>(x_1+x_2)(\sqrt{x_1^2+2014}+\sqrt{x_2^2+2014})=0$$ (0,25 đ)

$$=>x_1+x_2=0$$

$$=>\frac{m-2014}{2013}=0$$

$$=>m=2014$$

Vậy m=2014 là giá trị thỏa mãn đề bài. (0.25 đ)

2.2 Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+2)^2}=3\,(*)$

Đk : $x\neq -1; x\neq -\frac{1}{2}$. Đặt 2x+1=t

$$PT(*) <=> \frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+1)^2}=3$$

$$<=> (\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})^2+\frac{2}{t(t+1)}-3=0 \qquad (0,25d)$$

Đặt $y=\frac{1}{t(t+1)}$ ta có pt:

$$y^2+2y-3=0$$

$$<=>\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-3\end{array}\right. \qquad (0,25d)$$

Với y=1 =>

$$\frac{1}{t(t+1)}=1=>t^2+t-1=0$$

$$=>\left[\begin{array}{l}t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=>x=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}\\t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=>x=\frac{-3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.(TM) \qquad (0,25d)$$

Với y=-3 $\frac{1}{t(t+1)}=-3=>t^2+t+\frac{1}{3}=0(VN)$

Vậy pt có hai nghiệm $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{4}; x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{4}$ (0,25đ)

Câu 3 :

$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

$<=> (x+y)(x^2-xy+y^2)-\text{xy}(\text{x}+\text{y})=5$

$<=> (\text{x}+\text{y})(\text{x}^2-2xy+y^2)=5 \qquad (0,25d)$

$<=> (\text{x}+\text{y})(\text{x}-\text{y})^2=5$

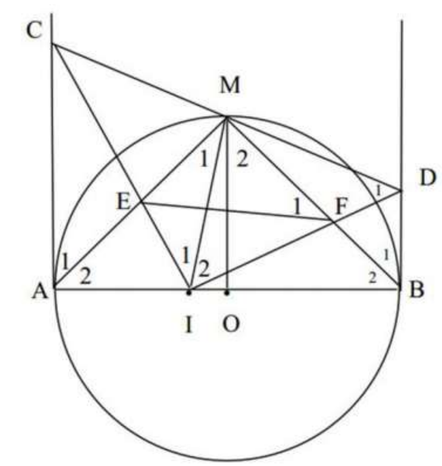
Do $(\text{x-y})^2 \geq 0$ và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (0,25d)$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} => \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (L) $\quad (0,25d)$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Câu 4 :



4.1 CM: Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp:

C/m được các tứ giác ACMI BDMI nội tiếp (đ)

Do đó: $\left.\begin{array}{l} I_1=A_1 \\ I_2=B_1 \end{array}\right\} => I_1+I_2=A_1+B_1$ Mà $A_2+B_2=90^o$ Và $A_1+A_2+B_1+B_2=180^o => I_1+i_2=90^o$ (0,25đ)

$=> EIF=EMF=90^o$ Tứ giác MEIF nội tiếp được. (0.25 đ)

4.2

CM: EF // AB:

Tứ giác MEIF nội tiếp (câu 1) => $I_1=F_1$

Tứ giác ACMI nội tiếp (câu 1) => $I_1=A_1$ (0,5đ)

Trong (O) $B_2=A_1$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM) (0,25Đ)

Do đó => $B_2=F_1$, mà chúng ở vị trí đồng vị => EF // AB. (0.25 đ)

4.3

CM: OM là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác: CEM, DFM

Ta có OA = OM => $M_1=A_2$ Mà $C_1=A_2$ (cùng chắn cung IM) => $C_1=M_1$ => OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME (1). (0.5 đ)

Lại có: OM = OB => $M_2 = B_2$ mà $D_1 = B_2$ (cùng chắn cung IM) => $D_1 = M_2$ => OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF (2). (0.5 đ)

Từ (1) và (2) =>ĐPCM

Câu 5:

Đặt $a=\sqrt{x^2+y^2};b=\sqrt{y^2+z^2};c=\sqrt{z^2+x^2}$ (*) => $a+b+c=2014(1)$

Từ (*) => $x^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2};\mathrm{y}^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2};\mathrm{z}^2=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2}$

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:

$y+z\le\sqrt{2(y^2+z^2)}=b\sqrt{2}$

$z+x\le\sqrt{2(\mathrm{z}^2+x^2)}=c\sqrt{2}$ (0,25đ)

$x+y\le\sqrt{2(\mathrm{x}^2+y^2)}=a\sqrt{2}$

Từ đó ta có:

$$T=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c}+\frac{-a^2+b^2+c^2}{a}\right)$$

$$T\ge\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}-a-b-c\right)(2)\qquad(0{,}25d)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta lại có:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge2a;\frac{c^2}{b}+b\ge2c;\frac{a^2}{c}+c\ge2a;\frac{b^2}{c}+c\ge2b;\frac{b^2}{a}+a\ge2b;\frac{c^2}{a}+a\ge2c\qquad(0,25d)$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}\ge4(a+b+c)-2(a+b+c)=2(a+b+c)(3)$$

Từ (2) và (3)=> $T\ge\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+c)(4)$

Từ (1) và (4) => $T\ge\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.2014.$

Vậy $T_{MIN}=\dfrac{2014}{2\sqrt{2}}$ khi x=y=z=$\dfrac{2014}{3\sqrt{2}}$

Đề số 18. Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,0 điểm): Cho biểu thức: $C = \frac{2}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$

1.Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.

2.Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$

Bài 2: (2,0 điểm)

Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x + y = 2\\ mx + y = m+1\end{cases}$ (m là tham số)

1.Giải hệ phương trình khi m = 2.

2.Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn: $x + 2y \le 3$

Bài 3: (2,0 điểm):

1.Trong hệ tọa độ Oxy, tìm m để đường thẳng (d): y=mx-m+2 cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung.

2.Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y (1)\\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 (2)\end{cases}$

Bài 4: (3,0 điểm): Cho đường tròn O đường kính BC và một điểm A nằm bất kì trên đường tròn (A khác B và C). Gọi AH là đường cao của DABC, đường tròn tâm I đường kính AH cắt các dây cung AB, AC tương ứng tại D, E.

1.Chứng minh rằng: góc DHE bằng 90° và AB.AD=AC.AE

2.Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại D và E cắt BC tương ứng tại G và F. Tính số đo góc GIF.

3.Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để tứ giác DEFG có diện tích lớn nhất.

Bài 5: (1,0 điểm): Cho ba số thực x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $S = \frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$

LỜI GIẢI VÀ THANG ĐIỂM TOÁN CHUNG LAM SƠN

Ngày thi: 17/06/2014

Câu 1:

1/Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa, rút gọn C.

+Biểu thức C có nghĩa khi $\begin{cases} a \ge 0 \\ a-16 \ne 0 \\ \sqrt{a}-4 \ne 0 \\ \sqrt{a}+4 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ a \ne 16 \\ a \ne 16 \\ \forall a \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a \ge 0, a \ne 16$ (0,25d)

+Rút gọn biểu thức C

$$C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

$$= \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

$$= \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}$$

$$= \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}$$

$$= \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} \quad (1,25d)$$

2/ Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9-4\sqrt{5}$

Ta có: $a = 9+4\sqrt{5} = 4+4\sqrt{5}+5 = (2+\sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2+\sqrt{5}$

Vậy $C = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} = \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+4} = \frac{2+\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}}$ (0,5đ)

Câu 2:

1/Giải hệ phương trình khi m = 2.

Khi m = 2 thay vào ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (2-1)x+y=2 \\ 2x+y=2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad (0,75đ)$$

Kết luận: Với m = 2 hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (0,25đ)

2/Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn $2x+y \le 3$

$$\begin{cases} (m-1)x+y=2 \\ mx+y=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-(m-1)x \\ mx+2-(m-1)x=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-(\mathrm{m}-1)\,\mathrm{x} \\ \mathrm{mx}+2-\mathrm{mx}+\mathrm{x}=\mathrm{m}+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2-(m-1)x \\ x=m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-(m-1)(\mathrm{m}-1) \\ \mathrm{x}=\mathrm{m}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-m^2+2m+1 \\ x=m-1 \end{cases}$$

Vậy với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất:

$\begin{cases} y = -m^2 + 2m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$ (0,5đ)

Ta có:

$2x + y - 3 = 2(m-1) - m^2 + 2m + 1 - 3 = -m^2 + 4m - 4 = -(\mathrm{m}-2)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow 2x + y \le 3$ (0,5d)

Câu 3:

1/Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình:

$2x^2 = mx - m + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - mx + m - 2 = 0 (1)$

$\Delta = m^2 - 4.2(m-2) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$

Để đường thẳng (d): y = mx – m + 2 cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-4)^2 > 0 \\ \dfrac{m}{2} > 0 \\ \dfrac{m-2}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ne 4 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow m > 2, m \ne 4$$

Kết luận: Để đường thẳng (d): y = mx – m + 2 cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung thì: $m > 2, m \ne 4$ (1đ)

2/Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y (1) \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} x + 2y \ge 0 \\ 2y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} (*)$

Đặt $\sqrt{x+2y} = t \ge 0$, thay vào phương trình (1) ta có:

$3t = 4 - t^2 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$

1 + 3 – 4 = 0, nên phương trình có hai nghiệm t = 1 và t = -4 (loại)

Với t = 1=> $\sqrt{x+2y} = 1 \Rightarrow x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y$ thay vào phương trình (2) ta có

$\sqrt[3]{2(1-2y)+6}+\sqrt{2y}=2$

$<=>\sqrt[3]{-4y+8}+\sqrt{2y}=2$

$<=>\sqrt[3]{-4y+8}=2-\sqrt{2y}$

$<=>-4+8=8-12\sqrt{2y}+12y-2y\sqrt{2y}$

$<=>16y-12\sqrt{2y}-2y\sqrt{2y}=0$

$<=>8y-6\sqrt{2y}-y\sqrt{y}=0$

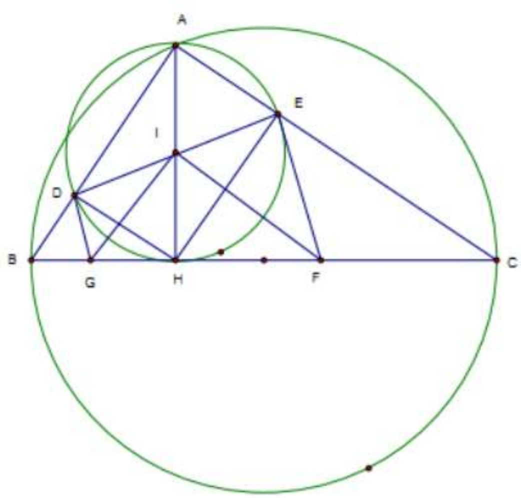
$<=>\sqrt{y}(-\sqrt{2y}+8\sqrt{y}-6\sqrt{2})=0$

$<=>\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{y}-6)=0$

$$<=>\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}=0=>y=0=>x=1(TM(*))\\ \sqrt{y}=\sqrt{2}=>y=2=>x=-3(TM(*))\\ \sqrt{y}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=>y=18=>x=-35(TM(*))\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm (x;y)=(1;0);(-3;2);(-35;18)   (1đ)

Câu 4:



1.Chứng minh DHE=90^o

Tứ giác ADHE có: $\widehat{A}=\widehat{D}=\widehat{E}$ =>ADHE là hình chữ nhật => DHE=90^o

Chứng minh: AB. AD = AC. AE

Xét hai tam giác vuông HAB và HAC ta có: AB.AD=AH^2=AC.AE   (1đ   )

2/Tính góc GIF

DHE=90o=>DE là đường kính => I thuộc DE

$$=>GIF=\frac{1}{2}DIH+\frac{1}{2}HIE=\frac{1}{2}DIE=90^o \qquad (1đ)$$

3/Tứ giác DEFG là hình thang vuông có đường cao DE = AH

Hai đáy DG=GH=GB=$\frac{1}{2}BH$ và EF=FC=FH=$\frac{1}{2}HC$

=>Diện tích tứ giác DEFG là

$\dfrac{\frac{1}{2}(HB+HC).AH}{2}=\dfrac{BC.AH}{4}$ Lớn nhất khi AH lớn nhất vì BC = 2R không đổi

Ta có: AH lớn nhất =>AH là đường kính => A là trung điểm cung AB (1.0 đ)

Câu 5:

Theo Bunhia:

$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2) => x+y+z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$=> S \le \dfrac{xyz(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}=\dfrac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xy+yz+zx)}$

$=> S \le \dfrac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}\sqrt[6]{x^2y^2z^2}\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$

=>S_{max}=$\dfrac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$ khi x=y=z (1đ)

Chú ý:

1/Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm điểm

2/Làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

Đề Số 19. Chuyên Năng Khiếu - HCM. Năm học: 2014-2015

Câu I. Cho phương trình $(m^2+5)x^2-2mx-6m=0(1)$ với m là tham số.

c) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

d) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2})^4=16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x}\\2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y}\end{cases}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}\ge 3+2\sqrt{2}$$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

c) Chứng minh rằng a + b không thể là số nguyên tố.

d) Chứng minh rằng nếu c > 1 thì a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R (C ≠ A, C ≠ B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

d) Chứng minh rằng AN = AC, BM = BC.

e) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

f) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

c) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

d) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

........................Hết......................

ĐÁP ÁN

Câu I.

c) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x. Do đó

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$<=> \Delta' = m^2 + (m^2+5).6m > 0$

$<=> m^2 + 6m^3 + 30m > 0$

$<=> m(6m^2 + m + 30) > 0$

$<=> m\underbrace{\left[5m^2 + (m+\frac{1}{2})^2 + \frac{119}{4}\right]}_{>0\forall m} > 0$

$<=> m > 0$

Khi đó theo định lý Vi–ét ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m^2+5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m-1)^2 + 4 > 0$. Mà m>0 => $m^2 + 5 > 2m > 0$

$=> 0 < \dfrac{2m}{m^2+5} < 1 => 0 < x_1 + x_2 < 1$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

d) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$\Delta' \geq 0 <=> \text{m}\left[5m^2 + (m+\frac{1}{2})^2 + \frac{119}{4}\right] \geq 0$

$<=> m \geq 0$

Khi đó, theo định lý Vi–ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2 = \dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

Ta có:

$(x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2})^4 = 16$

$<=> \left[\begin{array}{l} x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = 2 \\ x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = -2 \end{array}\right.$

$TH1: x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = 2$

$<=> \dfrac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} = 2 (2)$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

$TH2: x_1x_2 - \sqrt{x_1+x_2} = -2 <=> \dfrac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}} = -2 (3)$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$<=> (t+1)(3t-2)=0$

$$<=> \left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=\frac{2}{3}(\mathrm{TM}) => \frac{2m}{m^2+5}=\frac{4}{9} <=> 4m^2-18m+20=0 <=> (m-2)(4m-10)=0 <=> \left[\begin{array}{l} m=2(TM) \\ m=\frac{2}{5}(TM) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{2;\frac{2}{5}\right\}$

Câu II.

$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2=9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2=9x\sqrt{y} \end{cases} \text{(I)}$$

ĐK: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Đặt $a=x\sqrt{y}; b=y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0$, $b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2=9b(1) \\ 2(1+b)^2=9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$2(1+a)^2-2(1+\mathrm{b})^2=9(\mathrm{b}-\mathrm{a})$

$<=> 2(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{a}+\mathrm{b}+2)+9(\mathrm{a}-\mathrm{b})=0$

$<=> (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0\forall a,b>0})=0$

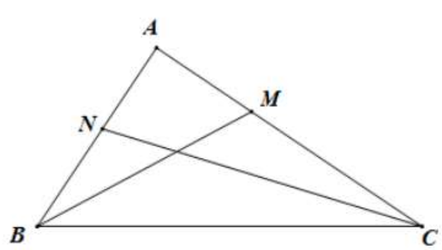
$<=> a=b$

Thay a = b vào (1) ta có

$$2(1+a)^2=9a <=> \left[\begin{array}{l} a=2 => b=2(TM) => \begin{cases} x\sqrt{y}=2 \\ y\sqrt{x}=2 \end{cases} <=> x=y=\sqrt[3]{4} \\ a=\frac{1}{2} => b=\frac{1}{2}(TM) => \begin{cases} x\sqrt{y}=\frac{1}{2} \\ y\sqrt{x}=\frac{1}{2} \end{cases} <=> x=y=\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right);\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}};\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MC}{MA}=\frac{BC}{AB}=>\frac{MC+MA}{MA}=1+\frac{BC}{AB}$$

$$\frac{NB}{NA}=\frac{BC}{AC}=>\frac{BN+NA}{NA}=1+\frac{BC}{AC}$$

$$=>\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA}=(1+\frac{BC}{AB})(1+\frac{BC}{AC})=1+\frac{BC^2}{AB.AC}+\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}$$

Áp dụng định lý Pi–ta–go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2\geq 2AB.AC=>\frac{BC^2}{AB.BC}\geq 2$$

$$\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}\geq 2\sqrt{\frac{BC}{AB}.\frac{BC}{AC}}\geq 2\sqrt{2}$$

$$=>\frac{(MA+MC)(NB+NA)}{MA.NA}\geq 1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$$

Câu III.

c) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=>\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c}=>c(a+b)=ab(*)$

Giả sử a + b là số nguyên tố, khi đó từ (*) ⇒ ab ⋮ (a + b) ⇒ a ⋮ (a + b) hoặc b ⋮ (a + b)

Điều này mâu thuẫn do 0 < a < a + b, 0 < b < a + b.

Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

d) Giả sử a + c và b + c đồng thời là số nguyên tố.

Từ c(a+b)=ab=>ca+cb=ab=>ca+ab=2ab-ab=>a(b+c)=b(2a-c)

⇒ a(b + c) ⋮ b (**)

Mà b + c là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn b + c nên (b + c, b) = 1

Do đó từ (**) suy ra a ⋮ b.

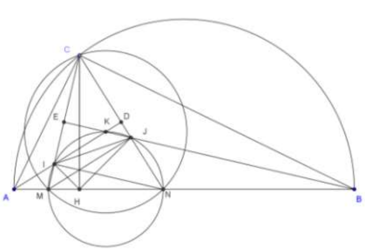
Chứng minh tương tự ta có b(a + c) = a(2b – c) ⇒ b ⋮ a

Vậy a = b. Từ (*) ⇒ a = b = 2c

Do đó a + c = b + c = 3c, không là số nguyên tố với c > 1 (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy a + c và b + c không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



d) Ta có: HCA =ABC (cùng phụ với HCB)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên HCN =BCN

Do đó CAN= HCA +HCN= ABC +BCN

Mặt khác, xét Δ BCN với góc ngoài ANC ta có: ANC= ABC+ BCN

Suy ra CAN= ANC ⇒ Δ ACN cân tại A ⇒ AC = AN.

Chứng minh tương tự ta có BC = BM.

e) Vì CM, CN lần lượt alà phân giác của góc ACH và BCH nên

$$MCN=MCH+NCH=\frac{1}{2}ACH+\frac{1}{2}BCH=\frac{1}{2}ACB=45^o$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

⇒ IC = IN.

⇒ Δ ICN cân tại I.

Tam giác ICN cân tại I có ICN=45° nên là tam giác vuông cân tại I

⇒ CI ⊥ IN

Chứng minh tương tự ta có CJ ⊥ MJ.

Tứ giác MIJN có MIN=MJN=90° nên là tứ giác nội tiếp

⇒ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì CH ⊥ MN, MJ ⊥ CN, NI ⊥ CM nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của Δ CMN.

f) Đặt $AC = b; BC = a => a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2 (Pi - ta - go)$

Theo câu a, ta có AN=AC= b; BM=BC=b

Do đó a+b=AN+BM=BC+MN=>MN=a+b-BC=a+b-2R

Ta có:

$(a-b)^2 \ge 0 => 2ab \le a^2 + b^2 => (a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2) = 8R^2$

$<=> a + b \le 2\sqrt{2}R => MN = a + b - 2R \le 2R(\sqrt{2} - 1)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b ⇔ CA = CB ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên CH ≤ R.

Do đó $S_{CMN} = \frac{1}{2} CH.MN \le \frac{1}{2} R.2.R(\sqrt{2} - 1) = \mathrm{R}^2 (\sqrt{2} - 1)$

Dấu bằng xảy ra ⇔ C là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2} - 1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2 (\sqrt{2} - 1)$ đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Câu V.

c) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e.

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử a < b < c < d < e.

Theo giả thiết ta có a + b + c > d + e ⇒ a + b + c ≥ d + e + 1

Suy ra a ≥ d + e + 1 – b – c.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

d > c ⇒ d ≥ c + 1; c > b ⇒ c ≥ b + 1

Suy ra d ≥ b + 2 ⇒ d – b ≥ 2

e > d ⇒ e ≥ d + 1 ⇒ e ≥ c + 2 ⇒ e – c ≥ 2

Do đó a ≥ (d – b) + (e – c) + 1 ≥ 5. Suy ra b, c, d, e > 5

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

d) Nếu a ≥ 6 ⇒ b ≥ a + 1 ≥ 7. Tương tự c ≥ 8, d ≥ 9, e ≥ 10 ⇒ a + b + c + d + e ≥ 40 (mâu thuẫn)

Suy ra a < 6. Mà theo câu a ta có a ≥ 5 ⇒ a = 5.

Ta có 5 + b + c ≥ d + e + 1 ⇒ b + c ≥ d + e – 4.

Mà d – 2 ≥ b, e – 2 ≥ c ⇒ d + e – 4 ≥ b + c.

Do đó

$\begin{cases} b = d - 2 \\ c = e - 2 \end{cases}$ =>a+b+c+d+e=5+2b+2c+4<40

$=> b + c < \frac{31}{2} => b + (b+1) \le \mathrm{b} + \mathrm{c} < \frac{31}{2} => b \le 7$

Suy ra b = 6 hoặc b = 7

Nếu $b = 6$ thì $d = b + 2 = 8$. Vì $b < c < d$ nên $c = 7 \Rightarrow e = c + 2 = 9$.

Nếu $b = 7$ thì $d = b + 2 = 9$. Vì $b < c < d$ nên $c = 8 \Rightarrow e = c + 2 = 10$.

có hai bộ thỏa mãn đề bài là (5;6;7;8;9) và (5;7;8;9;10).

Đề số 20. Chuyên Hà Nội Amsterdam. Năm học: 2014-2015

Bài I *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+2y^3=10x-10y \end{cases}$

Bài II *(2,5 điểm).*

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn
$x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$

Bài III *(1,5 điểm)*

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn (a + b)(b + c)(c + a) = 1. Chứng minh ab + ac + bc ≤ $\frac{3}{4}$

Bài IV *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC.

1) CMR: MH.MA = MP.MN

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0<\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|<\frac{1}{1000}$

ĐÁP ÁN

Bài I *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình: $x-\sqrt{x-8}-3\sqrt{x}+1=0$. (1)

ĐK: x ≥ 8

$$(1)\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x-8}-6\sqrt{x}+2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-8-2\sqrt{x-8}+1)+(x-6\sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-8}-1)^2+(\sqrt{x}-3)^2=0(2)$$

Ta có: $\begin{cases}\left(\sqrt{x-8}-1\right)^2\geq 0\\ \left(\sqrt{x}-3\right)^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{x-8}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}-3\right)^2\geq 0$

Do đó (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-8}-1=0\\ \sqrt{x}-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{9\}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x^3+2y^3=10x-10y\end{cases}$ (I)

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x^3+2y^3=2(x^2+y^2)(x-y)(*)\end{cases}$$
$$(*)\Leftrightarrow x^3+2y^3=2x^3-2x^2y+2xy^2-2y^3$$
$$\Leftrightarrow x^3-2x^2y+2xy^2-4y^3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2+2y^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x^2+2y^2=0\end{array}\right.$$

Ta có $x^2+2y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$ không là nghiệm của hệ.

Do đó $(I)\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2+y^2=5\\ x=2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=2\end{cases}hay\begin{cases}y=-1\\ x=-2\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm (2;1) và (–2;–1)

Bài II *(2,5 điểm).*

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4-1)\vdots 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

⇒ n chỉ có thể có dạng 10k ± 1 và 10k ± 3 với k ∈ ℕ.

Ta có: $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Do n lẻ nên $n - 1 \vdots 2$; $n + 1 \vdots 2$ và $n^2+1 \vdots 2 \Rightarrow n^4-1 \vdots 8$. (1)

• Nếu $n = 10k \pm 1 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^2 - 1 \vdots 10 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 5$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4 - 1 \vdots 40$

• Nếu $n = 10k \pm 3 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)2 = 9 \pmod{10} \Rightarrow n^2 + 1 \vdots 10 \Rightarrow n^4 - 1 \vdots 5$ (3)

Từ (1) và (3) chú ý (5;8) = 1 suy ra $n^4 - 1 \vdots 40$

Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4 - 1 \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn $\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được $p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$

⇒ $2(y – x)(y + x + 2) \vdots p$. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:

• $y – x \vdots p \Rightarrow y – x = kp$ (k ∈ ℕ*)

Khi đó từ (*) ⇒ $p – 1 = 2k(x + y + 2) \Rightarrow kp – k = 2k^2(x + y + 2) \Rightarrow y – x – k = 2k^2(x + y + 2)$

(loại vì $x + y + 2 > y – x – k > 0$; $2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2(x + y + 2) > y – x – k$)

• $y + x + 2 \vdots p \Rightarrow x + y + 2 = kp$ (k ∈ ℕ*)

Từ (*) ⇒ $p – 1 = 2k(y – x) \Rightarrow kp – k = 2k^2(y – x) \Rightarrow x + y + 2 – k = 2k^2(y – x)$ (**)

Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu k ≥ 2 thì từ (**) ⇒ $x + y = 2k^2(y – x) + k – 2 \geq 8(y – x)$ (vì y – x > 0)
⇒ 9x ≥ 7y ⇒ 7y < 14x ⇒ y < 2x

Do đó từ (2) ⇒ (p – 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p – 1)

(vì 2x(x + 2) = p – 1 theo (1))

⇒ p + 1 < 4 ⇒ p < 3, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)

Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử x ≥ y ≥ z ≥ 1.

Từ (1) ⇒ $0<y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \Rightarrow ny^2z^2-1>0 \Rightarrow ny^2z^2-1 \geq 1$

$\Rightarrow y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \geq x^2 (*)$

Vì x ≥ y ≥ z nên $3x^3 \geq x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2 \geq n^2y^4z^4$

Kết hợp với (*) ta có $9\left(y^3+z^3\right) \geq 9x^2 \geq n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right) \geq n^2yz^4$

Mà $y \geq z \Rightarrow \frac{z^3}{y^3} \leq 1 \Rightarrow n^2yz^4 \leq 9\left(1+\frac{z^3}{y^3}\right) \leq 18 (**)$

Ta có: $(**) \Rightarrow z^4 \leq 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

- Nếu z = 2 : (**) $\Rightarrow 16n^2y \leq 18 \Rightarrow n=y=1$ (loại vì y < z)
- Nếu z = 1 : (**) $\Rightarrow n^2y \leq 18 \Rightarrow n^2 \leq 18 \Rightarrow n \leq 4$

Ta chứng minh n ∉ {2;4}. Thật vậy,

*Nếu n = 4 thì từ $n^2y \leq 18 \Rightarrow 16y \leq 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) ⇒ $x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 ⇒ x = 1 (không thỏa mãn)

*Nếu n = 2 thì từ $n^2y \leq 18$ suy ra $4y \leq 18 \Rightarrow 1 \leq y \leq 4$.

+ $y=1: (1) \Rightarrow x^3-2x^2+2=0 \Rightarrow x^2(x-2)=-2<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x=1 (L)$

+ $y=2: (1) \Rightarrow x^3-8x^2+9=0 \Rightarrow 9=x^2(8-x)$. Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2 \geq y^2 = 4$ nên x=3 (không thỏa mãn)

+ $y=3:(1)\Rightarrow x^3-18x^2+28=0\Rightarrow x^2(18-x)=28.$ Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2 \geq y^2 = 9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y=4:(1)\Rightarrow x^3-32x^2+65=0\Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy n ∉ {2;4}. Do đó n ∈ {1;3}

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là n ∈ {1;3}

Bài III *(1,5 điểm)*

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn (a + b)(b + c)(c + a) = 1. Chứng minh ab + ac + bc ≤ $\frac{3}{4}$

Áp dụng BĐT Cô–si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}=3\Rightarrow a+b+c\geq \frac{3}{2}(2)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} a+b\geq 2\sqrt{ab} \\ b+c\geq 2\sqrt{ac} \\ c+a\geq 2\sqrt{ca} \end{cases}\Rightarrow 1=(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc\Rightarrow abc\leq \frac{1}{8}(3)$$

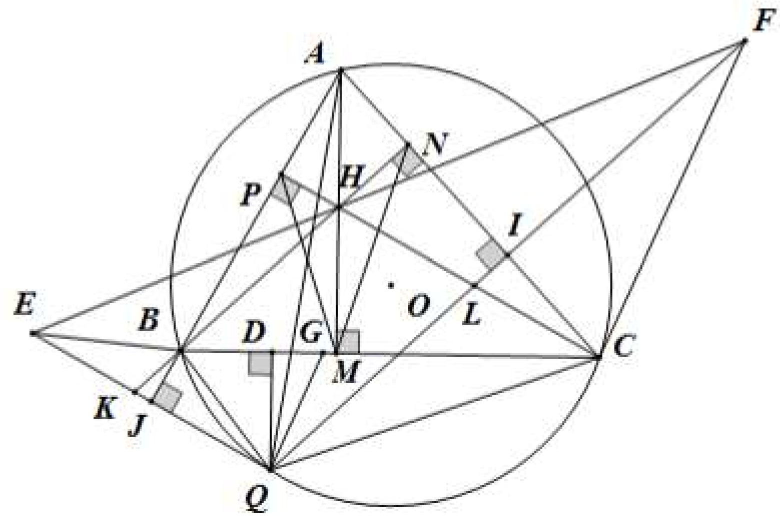
Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$\begin{aligned}
&(a+b)(b+c)(c+a)=1\\
&\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+c^2+ca)=1\\
&\Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+ca)+ac^2+bc^2=1\\
&\Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)-abc=1\\
&\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=1\\
&\Leftrightarrow ab+bc+ca=\frac{1+abc}{a+b+c}\leq \frac{1+\frac{1}{8}}{3}=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{2}$.

Bài IV *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC.



1) CMR: MH.MA = MP.MN

1) Xét tứ giác ANMB có ANB = AMB = 90º nên nó là tứ giác nội tiếp ⇒ BAM = BNM hay PAM = HNM (1)

Xét tứ giác CNHM có HNC + HMC = 90º + 90º = 180º nên nó là tứ giác nội tiếp

=> NHM + NCM = 180º (2)

Tứ giác APMC có APC = AMC = 90º nên là tứ giác nội tiếp ⇒ APM + ACM = 180º (3)

Từ (2) và (3) ⇒ NHM = APM (4)

Từ (1) và (4) ⇒ ΔNHM ~ ΔAPM (g.g) $\Rightarrow \frac{NM}{AM} = \frac{HM}{PM} \Rightarrow MH.MA = MN.MP.$

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

Gọi K là giao BH và QE, L là giao CH và QF.

Tứ giác AJQI có AIQ + AJQ = 90º + 90º = 180º nên là tứ giác nội tiếp ⇒JAI + JQI = 180º

Mà JAI + BQC = 180º (do ABQC là tứ giác nội tiếp) nên JQI = BQC => BQE = CQF (5)

Vì E, F đối xứng với Q qua AB, AC nên BQ = BE, CQ = CF ⇒ Δ BEQ và Δ CQF cân

=> CQF = CFQ (6) . Từ (5) và (6) suy ra CFL = BQK (7)

Ta có LH // QK (cùng vuông góc AB); KH // QL (cùng vuông góc AC) nên QKHL là hình bình hành ⇒ QKH = QLH = FLC hay QKB = FLC (8)

Từ (7) và (8) ⇒ΔQKB ~ ΔFLC (g.g) => $\frac{QK}{FL} = \frac{QB}{FC}$

Hai tam giác cân BQE và CFQ đồng dạng, nên $\frac{QB}{FC} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{FL} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Mà QK = LH (do QKHL là hình bình hành) nên $\frac{LH}{QE}=\frac{FL}{FQ}$

Vì LH' // QE nên theo định lý Ta–lét ta có: $\frac{LH'}{QE}=\frac{FL}{FQ}$

Do đó LH = LH' ⇒ H' ≡ H ⇒ H ∈ EF ⇒ H, E, F thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Vẽ QD ⊥ BC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho CQG = BQA => BQG = CQA

Vì ABQC là tứ giác nội tiếp nên BAQ = GCQ => ΔBAQ ~ ΔGCQ (g.g) => $\frac{BA}{GC}=\frac{AQ}{CQ}$

Vì JAQ = DCQ ; QJA = QDC = 90º => ΔJAQ ~ ΔDCQ (g.g) => $\frac{AQ}{CQ}=\frac{JQ}{DQ}$

Do đó $\frac{BA}{GC}=\frac{JQ}{DQ}\Rightarrow\frac{AB}{QJ}=\frac{GC}{DQ}$

Chứng minh tương tự ta có:

$\frac{AC}{QI}=\frac{GB}{DQ}$

$\Rightarrow\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}=\frac{GC+GB}{DQ}=\frac{BC}{DQ}$

Vì BC không đổi nên $\frac{AB}{QJ}+\frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất ⇔ DQ lớn nhất ⇔ Q là điểm chính giữa cung BC nhỏ của đường tròn (O).

Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0<\left|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right|<\frac{1}{1000}$

Xét nửa khoảng A = (0;1]. Chia nửa khoảng này thành 1000 nửa khoảng

$A_1=\left(0;\frac{1}{1000}\right], A_2=\left(\frac{1}{1000};\frac{2}{1000}\right],..., A_n=\left(\frac{n-1}{1000};\frac{n}{1000}\right],..., A_{1000}=\left(\frac{999}{1000};1\right]$

Xét bộ số $x_1;x_2;...;x_{1001}$ với $x_k=\left[1-k\sqrt{2}\right]+k\sqrt{2}(k\in\mathbb{N}^*,k\le 1001)$

Với mọi k ta có $-k\sqrt{2}<\left[1-k\sqrt{2}\right]\le 1-k\sqrt{2}$ (tính chất phần nguyên) nên $0<\left[1-k\sqrt{2}\right]+k\sqrt{2}\le 1\Rightarrow x_k\in A$

$\Rightarrow$ x_k thuộc một trong các 1000 khoảng A_1, A_2,..., A_{1000}

Có 1001 số x_k mà có 1000 nửa khoảng, do đó tồn tại 2 số x_i, x_j thuộc cùng một nửa khoảng A_m nào đó

$0 \le |x_i - x_j| < \frac{1}{1000}$.

Đặt $a = \left[1 - i\sqrt{2}\right] - \left[1 - j\sqrt{2}\right], b = i - j \Rightarrow x_i - x_j = a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}$

Mà a là số nguyên, $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $a + b\sqrt{2} \ne 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0$

Do đó $0 < |x_i - x_j| < \frac{1}{1000} \Rightarrow 0 < \left|a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}\right| < \frac{1}{1000}$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

Đề số 21. Chuyên Bắc Giang. Năm học: 2015-2016

Câu I: Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1) $2x^2+(\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}=0$

2) $x^4-2x^2-8=0$

3) $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y=3\\ 2x+3y=13\end{cases}$

Câu II:

1) Cho biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa, khi đó rút gọn A

b) Tìm số chính phương x sao cho A có giá trị là số nguyên

2) Tìm giá trị m để phương trình: $x^2+mx+m^2-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 sao cho: $x_1+2x_2=0$

Câu III: Cho quãng đường AB dài 150 km. Cùng một lúc có xe thứ nhất xuất phát từ A đến B, xe thứ hai đi từ B về A. Sau khi xuất phát được 3 giờ thì 2 xe gặp nhau. Biết thời gian đi cả quãng đường AB của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Câu IV: Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O). C ≠ A,B. Tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến tại A,B lần lượt tại P,Q

1) Chứng minh: AP.BQ = R^2

2) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ

3) Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC. Chứng minh: PMNQ là tứ giác nội tiếp.

4) Xác đinh vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ có bán kính nhỏ nhất

Câu V: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: a + b + c = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge\frac{1}{3}$$

ĐÁP ÁN

Câu I:

1) $2x^2+(\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}=0 \quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai có tổng các hệ số

$a+b+c=2+(\sqrt{3}-2)+(-\sqrt{3})=0$ nên có hai nghiệm $x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

2) $x^4-2x^2-8=0 \quad (2)$

Đặt $t=x^2$, với $t \geq 0$ phương trình (2) trở thành

$t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4)=0 \Leftrightarrow$ t = –2 (loại) hoặc t = 4 (thỏa mãn)

Với t = 4 thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $\{-2;2\}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=3 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=3 \\ 2x+3y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=18 \\ 2x+3y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+8y=36 \\ 6x+9y=39 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 6x+9y=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 6x+9.3=39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (2;3)

Câu II:

1) $A=\frac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

a) Để A có nghĩa, điều kiện là:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x-\sqrt{x}-2 \ne 0 \\ \sqrt{x}-2 \ne 0 \\ \sqrt{x}+1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ne 4 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-11-\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)+(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-11-(x-2\sqrt{x})+(2x+\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-2)}$$
$$= \frac{x+4\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-2)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy A = $\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ với x $\ge$ 0 và x $\ne$ 4.

b) Ta có: A = $\frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ = 1 + $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$

Để A có giá trị là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}+1$ là ước của 5 (*)

Mặt khác $\sqrt{x}+1 \ge 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in \{1;\ 5\}$

– Nếu $\sqrt{x}+1$ = 1 $\Rightarrow$ x = 0 (tm)

– Nếu $\sqrt{x}+1$ = 5 $\Rightarrow$ x = 16 (tm)

Vậy các giá trị x cần tìm là x = 0 và x = 16.

2) $x^2+mx+m^2-3=0$ (1)

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ $\Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) > 0$

$\Leftrightarrow -3m^2 + 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = m^2 - 3 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ -2x_2 + x_2 = -m \\ -2x_2.x_2 = m^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = m \\ -2m^2 = m^2 - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2m^2 = m^2 - 3 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \quad \text{(tm)}$$

Thử lại:

– Với m = 1: (1) ⇔ $x^2 + x - 2 = 0$ ⇔ $x_1 = -2$; $x_2 = 1$ (tm)

– Với m = –1: (1) ⇔ $x^2 - x - 2 = 0$ ⇔ $x_1 = 2$; $x_2 = -1$ (tm)

Vậy m = ± 1 là giá trị cần tìm.

Câu III:

Gọi vận tốc của xe đi từ A đến B là x (km/h) (x > 0)

Gọi vận tốc của xe đi từ B đến A là y (km/h) (y > 0)

Sau 3 giờ, quãng đường đi được của xe đi từ A là 3x (km)

quãng đường đi được của xe đi từ B là 3y (km)

Sau 3 giờ kể từ khi cùng xuất phát, hai xe gặp nhau, do đó ta có phương trình 3x + 3y = 150 (1)

Thời gian đi quãng đường AB của xe đi từ A là $\frac{150}{x}$ (giờ) và của xe đi từ B là $\frac{150}{y}$ (giờ)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{150}{x} - \frac{150}{y} = 2,5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ \frac{150}{x} - \frac{150}{y} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{50 - x} = \frac{1}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ \frac{50 - 2x}{x(50 - x)} = \frac{1}{60} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 60(50 - 2x) = x(50 - x) \Rightarrow x^2 - 170x + 3000 = 0$$

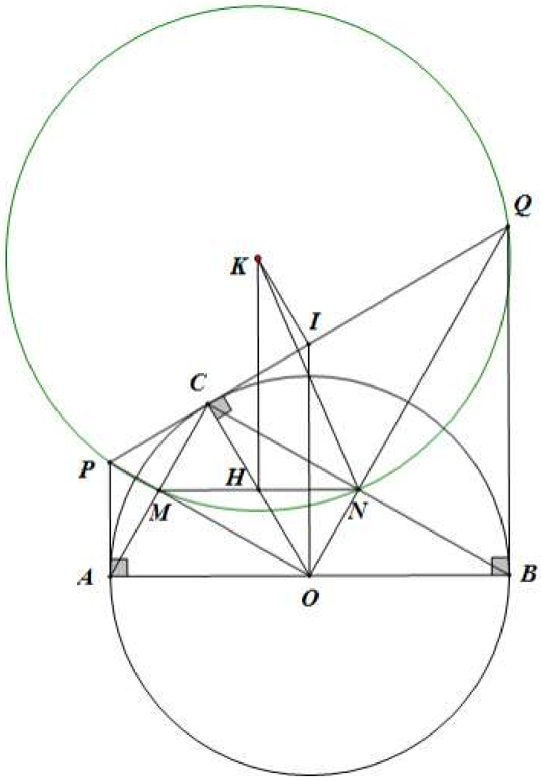
⇔ x = 20 hoặc x = 150

x = 20 ⇒ y = 30 (tm)

x = 150 ⇒ y = –100 (loại)

Vậy vận tốc của hai xe lần lượt là 20km/h và 30km/h.

Câu IV:



1) Vì AP và CP là tiếp tuyến của (O) nên OA ⊥ AP, OC ⊥ PC

Xét tam giác vuông OAP và tam giác vuông OCP có:

$\begin{cases} OP(chung) \\ OA = OC = R \end{cases} \Rightarrow \Delta OAP = \Delta OCP$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \begin{cases} PC = PA(1) \\ POA = POC \Rightarrow POC = \dfrac{1}{2}COA(2) \end{cases}$

Tương tự ta có: $\begin{cases} QC = QB(3) \\ QOC = \dfrac{1}{2}COB(4) \end{cases}$

Từ (2) và (4) ta có: $POQ = POC + QOC = \dfrac{1}{2}(COA + COB) = \dfrac{1}{2}.180^o = 90^o$

⇒ Δ POQ vuông tại O

Từ (1), (3) và áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OPQ ta có: $AP.BQ = CP.CQ = CO^2 = R^2$ (đpcm)

2) Xét tam giác vuông OPQ, gọi I là trung điểm cạnh huyền PQ, khi đó: IP = IQ = IO

⇒ O thuộc đường tròn đường kính PQ (5)

Mặt khác, do AP // BQ nên APQB là hình thang và nhận IO là đường trung bình, suy ra OI // BQ

Mà BQ ⊥ AB ⇒ OI ⊥ AB (6)

Từ (5) và (6) ⇒ AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ tại O.

3) Vì OC = OA = R, PC = PA (cmt) nên PO là trung trực của đoạn AC ⇒ PO ⊥ AC

Tương tự QO ⊥ BC.

Tứ giác OMCN có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật ⇒ OMCN là tứ giác nội tiếp

=> OMN = OCN (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ON) (7)

Mặt khác, do các tam giác OCQ và OCN vuông, suy ra:

OCN = PQO (cùng phụ với CON) (8)

Từ (7) và (8) ⇒ OMN = PQO

Mặt khác OMN + PMN = 180º => PQO + PMN = 180º

⇒ Tứ giác PMNQ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi H, I là trung điểm MN, PQ. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ.

Ta có: KH ⊥ MN và KI ⊥ PQ

Vì OP là trung trực AC (cmt) nên M là trung điểm AC, tương tự N là trung điểm BC.

⇒ MN //AB và MN = $\frac{AB}{2} \Rightarrow HN = \frac{MN}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2}$ (9)

Vì MN // AB, OI ⊥ AB ⇒ MN ⊥ OI. Mà MN ⊥ KH nên OI // KH. Mà KI // HO (cùng vuông góc PQ) nên OIKH là hình bình hành.

⇒ KH = OI ≥ OC = R (10)

Bán kính đường tròn (K) là KN. Từ (9) và (10) ta có:

$$KN = \sqrt{KH^2 + HN^2} \geq \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra ⇔ OI = OC ⇔ O ≡ C ⇔ OC ⊥ AB ⇔ C là điểm chính giữa cung AB.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp PMNQ nhỏ nhất khi C là điểm chính giữa cung AB của đường tròn (O).

Câu V:

Áp dụng BĐT Cô–si cho 4 số không âm, ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{a+2}{27}+\frac{b+2}{27}+\frac{1}{9}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}.\frac{a+2}{27}.\frac{b+2}{27}.\frac{1}{9}}=4\sqrt[4]{\frac{a^4}{9^4}}=\frac{4a}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{(a+2)(b+2)}\ge \frac{11a}{27}-\frac{b}{27}-\frac{7}{27}(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}\ge \frac{11b}{27}-\frac{c}{27}-\frac{7}{27}(2)$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge \frac{11c}{27}-\frac{a}{27}-\frac{7}{27}(3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge \frac{11(a+b+c)}{27}-\frac{a+b+c}{27}-\frac{21}{27}$$

Thay điều kiện a + b + c = 3 ta được:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)}+\frac{b^4}{(b+2)(c+2)}+\frac{c^4}{(c+2)(a+2)}\ge \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Đề số 22. Chuyên Bạc Liêu. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2,0 điểm)

a. Chứng minh với mọi số n lẻ thì $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.

b. Tìm nghiệm (x; y) của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc N*.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a. Cho phương trình $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

b. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 6$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN. Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B. Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F.

a. Chứng minh rằng MNFE là tứ giác nội tiếp.

b. Gọi K là trung điểm của FE. Chứng minh rằng AK vuông góc với MN.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác BHKC.

------HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 MÔN TOÁN CHUYÊN BẠC LIÊU
NĂM HỌC 2015 – 2016

Câu 1.

a. $n^2 + 4n + 5 = (n + 2)^2 + 1$

Vì n là số lẻ suy ra $n + 2 = 2k + 1$, k là số nguyên

Ta có $(n + 2)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4

Vậy $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8

b. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$

<=> $x^2 + 2xy + xy + 2y^2 – 8(x + y) – (x + 2y) + 8 = 0$

<=> $x(x + 2y) + y(x + 2y) – 8(x + y) – (x + 2y) + 8 = 0$

<=> $(x + y – 1)(x + 2y) – 8(x + y – 1) = 0$

<=> $(x + y – 1)(x + 2y – 8) = 0$ (a)

Với $x \geq 1$, $y \geq 1$ (vì thuộc N*) suy ra $x + y – 1 \geq 1 > 0$

Do đó (a) <=> $x + 2y = 8$

Ta có $2y \leq 8 – 1 = 7$

Nên $y \leq 7/2$

Mà y thuộc N* suy ra y = 1; 2; 3

Lập bảng kết quả

x	1	2	3
y	6	4	2

Vậy tập hợp bộ số (x, y) thỏa mãn là {(6; 1), (4; 2), (2; 3)}

Câu 2. $5x^2 + mx – 28 = 0$

$\Delta = m^2 + 560 > 0$ với mọi m

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có: $x_1 + x_2 = –m/5$ (1)

$x_1x_2 = –28/5$ (2)

$5x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

Từ (3) suy ra $x_2 = (1 – 5x_1)/2$ (4)

Thay (4) vào (2) suy ra $5x_1(1 – 5x_1) = –56$

<=> $25x_1^2 – 5x_1 – 56 = 0$

<=> $x_1 = 8/5$ hoặc $x_1 = –7/5$

Với $x_1 = 8/5 \rightarrow x_2 = –7/2$

Thay vào (1) ta có $8/5 – 7/2 = –m/5$ <=> $m = 19/2$

Với $x_1 = –7/5 \rightarrow x_2 = 4 \rightarrow –7/5 + 4 = –m/5$ suy ra $m = –13$

Câu 3.

a. $x^4 – 2(m – 2)x^2 + 2m – 6 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$

(1) <=> $t^2 – 2(m – 2)t + 2m – 6 = 0$ (2)

$\Delta' = (m – 2)^2 – (2m – 6) = m^2 – 6m + 10 = (m – 3)^2 + 1 > 0$ với mọi m.

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi nghiệm t > 0 thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

<=> $2m – 6 > 0$ và $2(m – 2) > 0$ <=> $m > 3$.

Vậy m > 3 thỏa mãn yêu cầu.

b. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 6$

Áp dụng bất đẳng thức cô si: $a^5 + 1/a \geq 2a^2$; $b^5 + 1/b \geq b^2$; $c^5 + 1/c \geq c^2$.

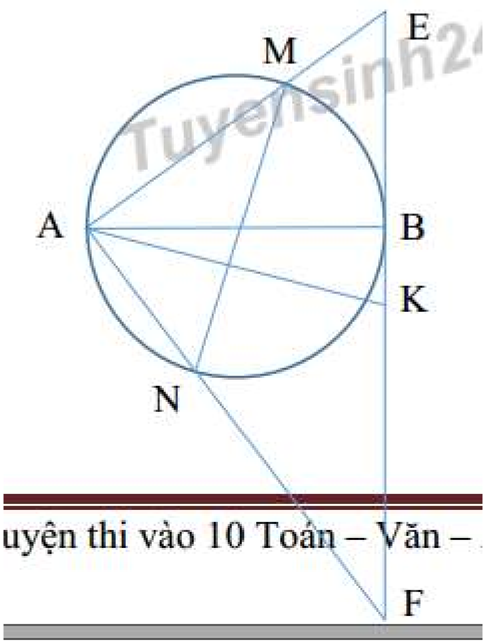
Suy ra $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2(a^2+b^2+c^2)$

Mặt khác $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$

Vậy đpcm.

Câu 4.



a. Tam giác ABE vuông tại B và BM vuông góc với AE

Nên ta có $AM.AE = AB^2$

Tương tự $AN.AF = AB^2$

Suy ra AM.AE = AN.AF

Hay AM/AN = AE/AF

Xét ΔAMN và ΔAFE có góc MAN chung

Và AM/AN = AF/AE

Do đó ΔAMN và ΔAFE đồng dạng

Suy ra góc AMN = góc AFE.

Mà góc AMN + góc NME = 180° (kề bù)

Nên góc AFE + góc NME = 180°

Vậy tứ giác MNFE nội tiếp đường tròn.

b.

Góc MAN = 90°

Nên tam giác AEF vuông tại A suy ra AK = KB = KF

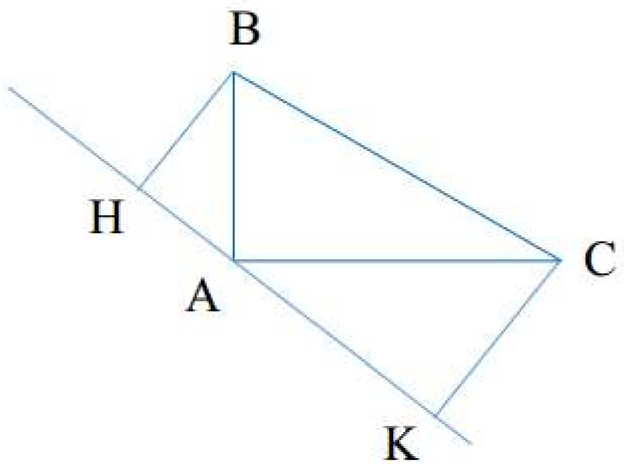
Do đó góc KAF = góc KFA

Mà góc AMN = góc KFA (cmt)

Suy ra góc KAF = góc AMN

Mà góc AMN + góc ANM = 90°

Suy ra góc KAF + góc ANM = 90°.
Vậy AK vuông góc với MN
Câu 5.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = BH^2 + AH^2 + AK^2 + CK^2$
Ta cần chứng minh bất đẳng thức:
$(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (*)
Ta có: (*) $\Leftrightarrow a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \le a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \ge 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \ge 0$ (đúng với mọi a, b, c, d)
Dấu bằng xảy ra khi ad = bc hay a/c = b/d
Áp dụng (*) ta được: $2(BH^2 + AH^2) \ge (BH + AH)^2$ (1)
Tương tự ta có $2(AK^2 + CH^2) \ge (AK + CK)^2$ (2)
Suy ra $2BC^2 \ge (BH + AH)^2 + (AK + CK)^2$ (3)
Đặt BH + AH = m; đặt AK + CK = n
Vì góc CAK + góc BAH = 90°; mà góc BAH + góc ABH = 90° nên góc CAK = góc ABH
Dẫn đến tam giác ABH đồng dạng với tam giác CAK
→ AH/CK = BH/AK = AB/AC = (AH + BH)/(CK + AK) = m/n
Nên $AB^2/m^2 = AC^2/n^2 = (AB^2 + AC^2)/(m^2 + n^2) \ge BC^2/(2BC^2) = ½$
Hay $m \le AB\sqrt{2}$ và $n \le AC\sqrt{2}$
Chu vi tứ giác BHKC là BC + BH + AH + AK + KC = BC + m + n ≤ BC + (AB + AC) $\sqrt{2}$
Vậy chu vi BHKC lớn nhất là BC + (AB + AC) $\sqrt{2}$

Đề số 23. Chuyên Bạc Liêu. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2,0 điểm)

c. Chứng minh với mọi số n lẻ thì $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.

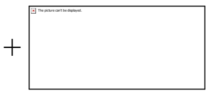
d. Tìm nghiệm (x; y) của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc N*.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

c. Cho phương trình $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

d. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 3. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 +$ 

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN. Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B. Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F.

c. Chứng minh rằng MNFE là tứ giác nội tiếp.

d. Gọi K là trung điểm của FE. Chứng minh rằng AK vuông góc với MN.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác BHKC.

------HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 MÔN TOÁN CHUYÊN BẠC LIÊU NĂM HỌC 2015 – 2016

Câu 1.

c. $n^2 + 4n + 5 = (n + 2)^2 + 1$

Vì n là số lẻ suy ra $n + 2 = 2k + 1$, k là số nguyên

Ta có $(n + 2)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4

Vậy $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8

d. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$

<=> $x^2 + 2xy + xy + 2y^2 – 8(x + y) – (x + 2y) + 8 = 0$

<=> $x(x + 2y) + y(x + 2y) – 8(x + y) – (x + 2y) + 8 = 0$

<=> $(x + y – 1)(x + 2y) – 8(x + y – 1) = 0$

<=> $(x + y – 1)(x + 2y – 8) = 0$ (a)

Với $x \geq 1$, $y \geq 1$ (vì thuộc N*) suy ra $x + y – 1 \geq 1 > 0$

Do đó (a) <=> $x + 2y = 8$

Ta có $2y \leq 8 – 1 = 7$

Nên $y \leq 7/2$

Mà y thuộc N* suy ra y = 1; 2; 3

Lập bảng kết quả

x	1	2	3
y	6	4	2

Vậy tập hợp bộ số (x, y) thỏa mãn là {(6; 1), (4; 2), (2; 3)}

Câu 2. $5x^2 + mx – 28 = 0$

$\Delta = m^2 + 560 > 0$ với mọi m

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Ta có: $x_1 + x_2 = –m/5$ (1)

$x_1x_2 = –28/5$ (2)

$5x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

Từ (3) suy ra $x_2 = (1 – 5x_1)/2$ (4)

Thay (4) vào (2) suy ra $5x_1(1 – 5x_1) = –56$

<=> $25x_1^2 – 5x_1 – 56 = 0$

<=> $x_1 = 8/5$ hoặc $x_1 = –7/5$

Với $x_1 = 8/5 \rightarrow x_2 = –7/2$

Thay vào (1) ta có $8/5 – 7/2 = –m/5$ <=> $m = 19/2$

Với $x_1 = –7/5 \rightarrow x_2 = 4 \rightarrow –7/5 + 4 = –m/5$ suy ra $m = –13$

Câu 3.

c. $x^4 – 2(m – 2)x^2 + 2m – 6 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$

(2) <=> $t^2 – 2(m – 2)t + 2m – 6 = 0$(2)

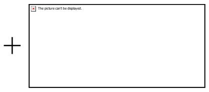
$\Delta' = (m – 2)^2 – (2m – 6) = m^2 – 6m + 10 = (m – 3)^2 + 1 > 0$ với mọi m.

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

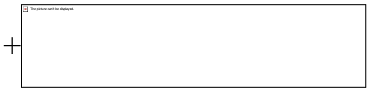
Ứng với mỗi nghiệm t > 0 thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

<=> $2m – 6 > 0$ và $2(m – 2) > 0$ <=> $m > 3$.

Vậy $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu.

d. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 +$ 

Áp dụng bất đẳng thức cô si: $a^5 + 1/a \geq 2a^2$; $b^5 + 1/b \geq b^2$; $c^5 + 1/c \geq c^2$.

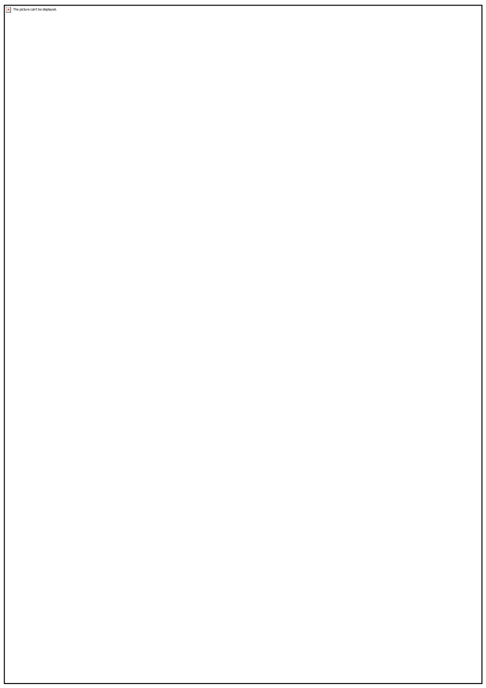
Suy ra $a^5 + b^5 + c^5 +$ 

Mặt khác $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$

Vậy đpcm.

Câu 4.



c. Tam giác ABE vuông tại B và BM vuông góc với AE

Nên ta có $AM.AE = AB^2$

Tương tự $AN.AF = AB^2$

Suy ra $AM.AE = AN.AF$

Hay $AM/AN = AE/AF$

Xét ΔAMN và ΔAFE có góc MAN chung

Và $AM/AN = AF/AE$

Do đó ΔAMN và ΔAFE đồng dạng

Suy ra góc AMN = góc AFE.

Mà góc AMN + góc NME = $180°$ (kề bù)

Nên góc AFE + góc NME = $180°$

Vậy tứ giác MNFE nội tiếp đường tròn.

d.

Góc MAN = $90°$

Nên tam giác AEF vuông tại A suy ra AK = KB = KF

Do đó góc KAF = góc KFA

Mà góc AMN = góc KFA (cmt)

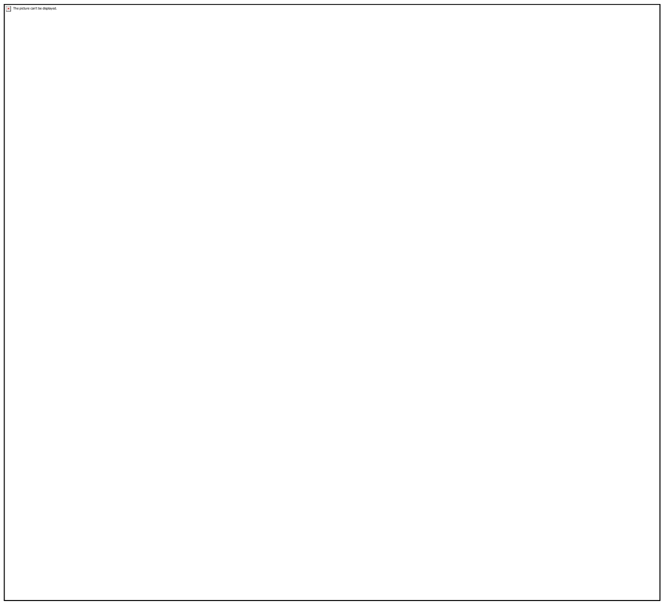
Suy ra góc KAF = góc AMN

Mà góc AMN + góc ANM = $90°$

Suy ra góc KAF + góc ANM = 90°.

Vậy AK vuông góc với MN

Câu 5.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = BH^2 + AH^2 + AK^2 + CK^2$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (*)

Ta có: (*) <=> $a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$ <=> $a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$ <=> $(ad - bc)^2 \geq 0$ (đúng với mọi a, b, c, d)

Dấu bằng xảy ra khi ad = bc hay a/c = b/d

Áp dụng (*) ta được: $2(BH^2 + AH^2) \geq (BH + AH)^2$ (1)

Tương tự ta có $2(AK^2 + CH^2) \geq (AK + CK)^2$ (2)

Suy ra $2BC^2 \geq (BH + AH)^2 + (AK + CK)^2$ (3)

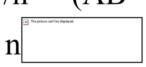
Đặt BH + AH = m; đặt AK + CK = n

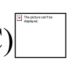
Vì góc CAK + góc BAH = 90°; mà góc BAH + góc ABH = 90° nên góc CAK = góc ABH

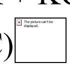
Dẫn đến tam giác ABH đồng dạng với tam giác CAK

→ AH/CK = BH/AK = AB/AC = (AH + BH)/(CK + AK) = m/n

Nên $AB^2/m^2 = AC^2/n^2 = (AB^2 + AC^2)/(m^2 + n^2) \geq BC^2/(2BC^2) = ½$

Hay m và n

Chu vi tứ giác BHKC là BC + BH + AH + AK + KC = BC + m + n ≤ BC + (AB + AC)

Vậy chu vi BHKC lớn nhất là BC + (AB + AC)

Đề số 24. Chuyên Đại học Vinh. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,0 điểm) Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{8}{x-2}$

b) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3x+5}$

Câu 2 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x=y^2+y \\ x^2+y^2=5 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Câu 3 (1,5 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn a + b = 3, ab = 1. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a^2-b^2\right)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$$

Câu 4 (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC. Phân giác góc BAC cắt BC tại D. Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh rằng AD ⊥ EF.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của AD và (O). Chứng minh rằng $\Delta ABD \sim \Delta AKC$

c) Kẻ EH ⊥ AC tại H. Chứng minh rằng HE.AD = EA.EF

d) Hãy so sánh diện tích của tam giác ABC với diện tích của tứ giác AEKF.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ .$$

HẾT

ĐÁP ÁN

ĐỀ THI TUYỂN SINH

VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2015

Câu 1

a) $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{8}{x-2}$ (1)

ĐK: $x\neq -1;\ x\neq 2;\ x\neq -\frac{1}{2}$

(1) $\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2)+3(x+1)(x-2)-8(x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)(x-2)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x^2-3x-2)+3(x^2-x-2)-8(2x^2+3x+1)}{(x+1)(2x+1)(x-2)}=0$

$\Leftrightarrow \frac{-11x^2-30x-16}{(x+1)(2x+1)(x-2)}=0$

$\Rightarrow 11x^2+30x+16=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(tm) \\ x=-\frac{8}{11}(tm) \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{-2;-\frac{8}{11}\right\}$

b) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3x+5}$ (2)

ĐK: $\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ 3-x\geq 0 \\ 3x+5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x\leq 3 \\ x\geq -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq 3$

Với điều kiện trên, ta có:

$(2) \Leftrightarrow 2x+1+3-x+2\sqrt{(2x+1)(3-x)}=3x+5 \Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+3}=2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\ge 0\\ 4(-2x^2+5x+3)=4x^2+4x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ 12x^2-16x-11=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{11}{6}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}(tm)\\ x=\dfrac{11}{6}(tm)\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{11}{6}\right\}$

Câu 2

$$\begin{cases}x^2+x=y^2+y(1)\\ x^2+y^2=5(2)\end{cases}(I)$$

$(1) \Leftrightarrow x^2-y^2+x-y=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\ y=-x-1\end{array}\right.$$

• y = x: Thay vào (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow 2x^2=5 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

• y = – x – 1. Thay vào (2) ta được:

$(2) \Leftrightarrow x^2+(-x-1)^2=5 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$

$x=1 \Rightarrow y=-x-1=-2$

$x=-2 \Rightarrow y=-x-1=1$

Vậy hệ phương trình (I) có 4 nghiệm là $(1;-2),(-2;1),\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2};\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2};-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Câu 3

Ta có

$$P=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a^2-b^2\right)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)(a-b)(a+b)}{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}$$

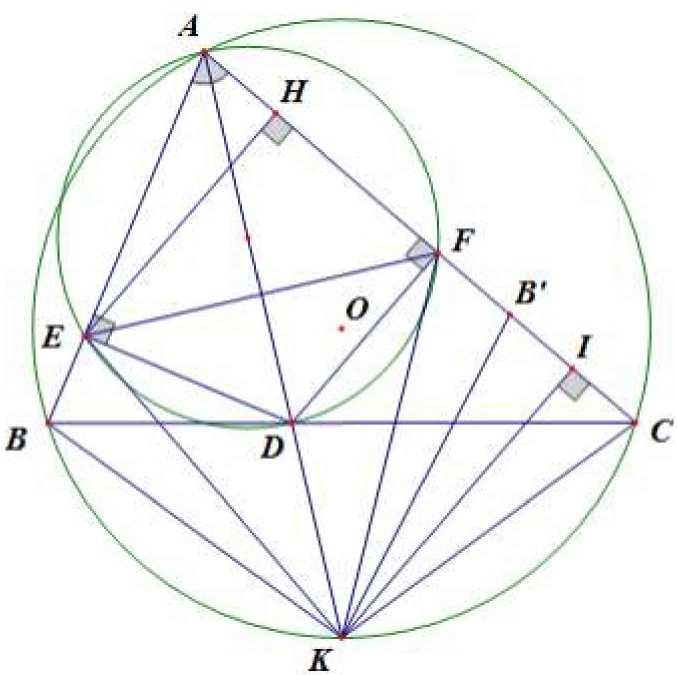
$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a+b)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b-\sqrt{ab}\right)}$$

$$=\frac{\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)(a+b)}{a+b-\sqrt{ab}}$$

Thay a + b = 3, ab = 1 ta được:

$$P=\frac{(3-2.1).3}{3-1}=\frac{3}{2}$$

Câu 4



a) Do E, F thuộc đường tròn đường kính AD nên AED = AFD = 90°

Xét hai tam giác vuông AED và AFD có

$$\begin{cases} AD(chung) \\ EAD = FAD(gt) \end{cases} \Rightarrow \Delta AED = \Delta AFD \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

⇒ AE = AF và DE = DF (hai cạnh tương ứng)

⇒ AD là đường trung trực của đoạn EF.

⇒ AD ⊥ EF.

b) Do ABKC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên ABC = AKC (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Xét hai tam giác ABD và ACK có

$$\begin{cases} BAD = CAK(gt) \\ ABD = AKC(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ACK \text{ (g.g)}$$

c) Vì AEDF là tứ giác nội tiếp nên EDA = EFH (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EA)

Xét tam giác AED và tam giác EHF ta có:

$$\begin{cases} AED = EHF = 90^o \\ EDA = EFH(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta EHF \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EH} = \frac{AD}{EF}$$
$$\Rightarrow HE.AD = EA.EF$$

d) Trên tia AC lấy B' sao cho AB = AB'. Vẽ KI ⊥ AC tại I

Xét Δ ABK và Δ AB'K có

$$\begin{cases} AK(chung) \\ KAB = KAB'(gt) \Rightarrow \Delta ABK = \Delta AB'K \text{ (c.g.c)} \\ AB = AB' \end{cases}$$

⇒ KB = KB' (hai cạnh tương ứng)

Mặt khác AK là phân giác góc BAC nên K là điểm chính giữa cung BC ⇒ KB = KC.

⇒ KB' = KC

⇒ Δ KB'C cân tại K

⇒ I là trung điểm B'C

$$\Rightarrow AI = \frac{AB' + AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$$

⇒ I là trung điểm B'C

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2}DE.AB + \frac{1}{2}DF.AC = \frac{1}{2}DF.(AB + AC)$$

Vì AK là trung trực EF nên AE = AF, EK = FK ⇒ Δ AEK = Δ AFK (c.c.c). Do đó

$$S_{AEDF} = 2.S_{AKF} = KI.AF$$

Vì DF // KI (cùng vuông góc AC) nên theo định lí Ta–lét:

$$\frac{DF}{KI}=\frac{AF}{AI}\Rightarrow S_{AEDF}=KI.AF=DF.AI=DF.\frac{AB+AC}{2}=S_{ABC}$$

Vậy $S_{ABC}=S_{AEDF}$

Câu 5

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$$

Ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2} \qquad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có $1+b^2\ge 2b$

Thay vào (1) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2} \quad (2)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2} \qquad (3)$$

$$\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2} \qquad (4)$$

Cộng từng vế ba BĐT (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\left(\frac{ab+bc+ca}{2}\right) \quad (5)$$

Mặt khác

$$\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ca\right)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3 \qquad (6)$$

Thay điều kiện a + b + c = 3 và BĐT (6) vào (5) ta có

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi a = b = c = 1.

Đề số 25. Chuyên Hà Giang. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{a}-1}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$

a. Rút gọn biểu thức P

b. Tìm a để $P>\frac{1}{6}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$

Câu 3 (1,5 điểm)

Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn (O;R), đường kính AB, C là điểm chính giữa cung AB. Điểm M thuộc cung AC (M ≠ A, M ≠ C). Qua M kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn, gọi H là giao điểm của BM với OC. Từ H kẻ một đường thẳng song song với AB, đường thẳng đó cắt tiếp tuyến d ở E.

a. Chứng minh OHME là tứ giác nội tiếp

b. Chứng minh EH = R

c. Kẻ MK vuông góc với OC tại K. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp Δ OBC đi qua tâm đường tròn nội tiếp Δ OMK.

Câu 5 (1,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của $A=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}$, biết x + y = 4

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a. Ta có: Điều kiện: $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$

$$P = \frac{\sqrt{a}-(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{(a-1)-(a-4)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} . \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

b. Điều kiện: $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$

$$P > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{a}-2) > \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} > 4 \Leftrightarrow a > 16 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $a > 16$ là điều kiện cần tìm

Câu 2

a. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (m+1) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m(m-3) > 0 \Leftrightarrow m > 3$ hoặc $m < 0$

b. Với $m > 3$ hoặc $m < 0$, phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 . Theo Viét ta có

$x_1 + x_2 = 2m - 2$; $x_1x_2 = m + 1 \Rightarrow x_1 = 2m - 2 - x_2$

Ta có $x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow 2m - 2 - x_2 = 3x_2 \Leftrightarrow 4x_2 = 2m - 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{m-1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3(m-1)}{2}$

$$\Rightarrow m+1 = x_1x_2 = \frac{m-1}{2}.\frac{3(m-1)}{2} \Rightarrow 4(m+1) = 3(m-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} \text{ (thỏa mãn) hoặc } m = \frac{5-2\sqrt{7}}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 3

Gọi số giờ để mỗi người làm một mình hết công việc đó lần lượt là x và y (h) (x,y > 0)

Mỗi giờ, người thứ nhất và người thứ hai làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (công việc)

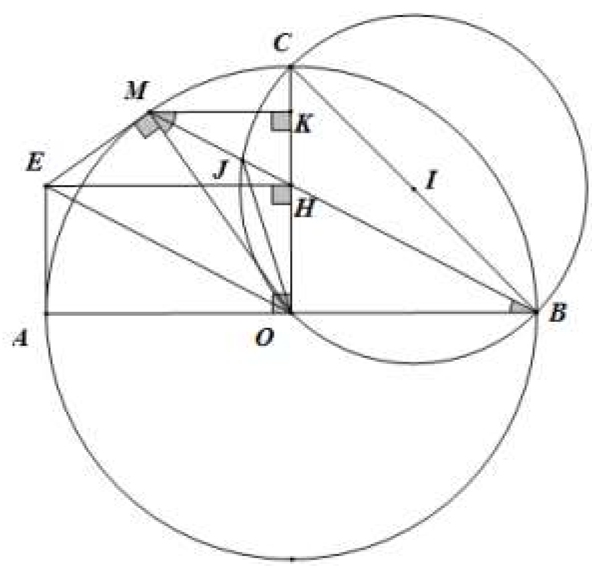
Hai người làm hết công việc đó trong 16h nên $16\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 3h và người thứ 2 làm trong 6h thì được $\frac{1}{4}$ công việc nên $3.\frac{1}{x}+6.\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) có hệ: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\\ 3.\frac{1}{x}+6.\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{24}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{48}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=24\\ y=48\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian để mỗi người làm một mình xong công việc là 24h và 48h

Câu 4



a. Vì C là điểm chính giữa cung AB nên OC ⊥ AB. ME là tiếp tuyến của (O) ⇒ ME ⊥ MO

=> OHE = OME = 90º => OHME là tứ giác nội tiếp (1)

b. Có góc nội tiếp chắn nửa đường tròn AMB = 90º => AMH + AOH = 180º

⇒ OHMA là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) ⇒ 5 điểm O, H, M, E, A cùng thuộc 1 đường tròn ⇒ OMEA là tứ giác nội tiếp

=> EAO = 180º – EMO = 90º

Tứ giác OHEA có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. ⇒ EH = OA = R.

c. Gọi I là trung điểm BC ⇒ đường tròn (I), đường kính BC là đường tròn ngoại tiếp Δ OBC

Gọi J là giao của (I) và BH.

Vì OM = OB nên Δ OMB cân tại O => OMB = OBM

Vì MK ⊥ OC ⇒ MK // AB ⇒ OBM = KMB

Suy ra OMB = KMB ⇒ MJ là phân giác của góc OMK (3)

Vì OJCB là tứ giác nội tiếp nên JOC = JBC (4)

Có MOC = 2.MBC (góc ở tâm và góc nội tiếp) (5)

Từ (4) và (5) ⇒ MOC = 2.JOC => MOJ = JOC => OJ là phân giác góc MOC (6)

Từ (3) và (6) ⇒ J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MKO

Vậy đường tròn (I) đi qua tâm đường tròn nội tiếp Δ MKO

Câu 5

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số (1;1) và $\left(\sqrt{x-1};\sqrt{y-2}\right)$ ta có

$$A^2=\left(1.\sqrt{x-1}+1.\sqrt{y-2}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(x-1+y-2\right)=2\left(x+y-3\right)=2\Rightarrow A\le\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{1}{1}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}}\\ x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=y-2\\ x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\ y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{2}$

Đề số 26. Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình. Năm học: 2015-2016

Câu I (**2*,0 điểm***)

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a)A=\frac{4}{3+\sqrt{5}}-\frac{8}{1+\sqrt{5}}+\frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$b)B=\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

2) Rút gọn biểu thức:

$$C=\frac{a^2-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}+a+1$$

Câu II (2***,0 điểm)***

1) Giải phương trình: $\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{2x+4}=\frac{1}{9x-2}+\frac{1}{5-4x}$

2) Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=z \\ x^3+y^3=z^2 \end{cases}$

Câu III (2***,0 điểm***)

Một vận động viên A chạy từ chân đồi đến đỉnh đồi cách nhau 6km với vận tốc 10km/h rồi chạy xuống dốc với vận tốc 15km/h. Vận động viên B chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi với vận tốc 12km/h và gặp vận động viên A đang chạy xuống. Hỏi điểm hai người gặp nhau cách đỉnh đồi bao nhiêu ki-lô-mét, biết rằng B chạy sau A là 15 phút.

Câu IV (**3*,0 điểm***)

Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN, M khác A, N khác B). Các tia AM và BN cắt nhau tại I, các dây AN và BM cắt nhau tại K.

1) Chứng minh rằng: IK vuông góc với AB.
2) Chứng minh rằng:AK.AN+BK.BM=AB^2
3) Tìm vị trí của dây MN để diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Câu V ***(1,0 điểm)***

1) Chứng minh rằng nếu p và (p+2) là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.
2) Cho $\begin{cases} x>0, y>0, z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$.Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\le 1$

-------- Hết --------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: .... Phòng thi: ....

Giám thị 1 (Họ và tên, chữ ký): ....

Giám thị 2 (Họ và tên, chữ ký): ....

SỞ GD & ĐT HOÀ BÌNH

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ
NĂM HỌC 2015-2016

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
(DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)
(Hướng dẫn chấm này gồm có 03 trang)

Câu I ***(2,0 điểm)***

Phần ý	Nội dung	Điểm
1	$A=\frac{4}{3+\sqrt{5}}-\frac{8}{1+\sqrt{5}}+\frac{15}{\sqrt{5}}$ $=\frac{4(3-\sqrt{5})}{4}-\frac{8(1-\sqrt{5})}{-4}+\frac{15\sqrt{5}}{5}=3-\sqrt{5}+2-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=5$	**0,5đ**
	$B=\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ $=\sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}-1)^2}$ $=\sqrt{\sqrt{2}-1}+1+1-\sqrt{\sqrt{2}-1}$ $=2$	**0,5đ**
2	$C=\frac{a^2-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1}+a+1 \quad (\text{DK}: a\geq 0)$ $\text{C}=\frac{\sqrt{a}\left[(\sqrt{a})^3-1\right]}{a+\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}\left[(\sqrt{a})^3+1\right]}{a-\sqrt{a}+1}+a+1$	**0,5đ**
	$=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)-\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)+a+1$ $=a-\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+a+1$ $=(\sqrt{a}-1)^2$	**0,5đ**

Câu II ***(2,0 điểm)***

Phần ý	Nội dung	Điểm
1	$\frac{1}{3x-1}+\frac{1}{2x+4}=\frac{1}{9x-2}+\frac{1}{5-4x}$: ĐK: $x\neq\frac{1}{3}, x\neq -2, x\neq\frac{2}{9}, x\neq\frac{5}{4}$	**0,25đ**
	Ta có pt: $\frac{5x+3}{(3x-1)(2x+4)}=\frac{5x+3}{(9x-2)(5-4x)}$	**0,25đ**

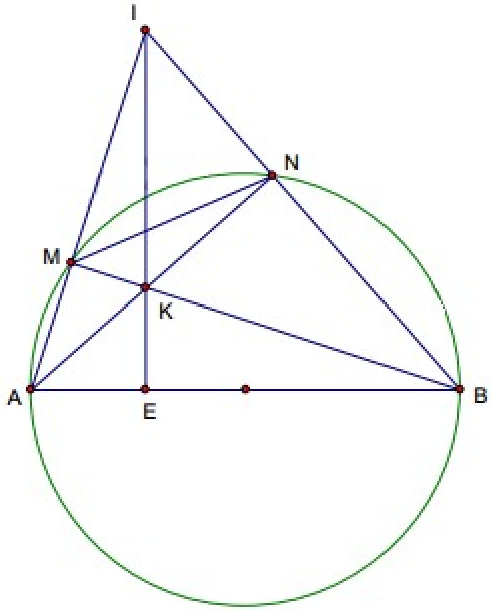
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3}{5} \\ (3x-1)(2x+4)=(9x-2)(5-4x) \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{5} \\ 6x^2+12x-2x-4=-36x^2+45x+8x-10 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{5}(TM) \\ x=\dfrac{6}{7}(TM) \\ x=\dfrac{1}{6}(TM) \end{array}\right.$ Vậy phương trình đã có có 3 nghiệm phân biệt như trên.	**0,5đ**
2	Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-x-y)=0$	**0,25đ**
	Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2-xy+y^2-x-y=0$	
	$\Leftrightarrow 2(x^2-xy+y^2-x-y)=0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$	**0,25đ**
	Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp: + Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y=0 \\ (x-1)^2=1 \Leftrightarrow x=y=2, z=4 \\ (y-1)^2=1 \end{cases}$	**0,25đ**
	+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1=0 \\ (x-y)^2=1 \Leftrightarrow x=1, y=2, z=3 \\ (y-1)^2=1 \end{cases}$	
	+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-y)^2=1 \Leftrightarrow x=2, y=1, z=3 \\ (x-1)^2=1 \end{cases}$	
	Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)	**0,25đ**

Câu III ***(2,0 điểm)***

Phần ý	**Nội dung**	**Điểm**
	Gọi điểm 2 vận động viên gặp nhau cách đỉnh đồi x km (x>0)	**0,25đ**
	Thời gian B đã chạy là $\dfrac{6-x}{12}$. Đổi 15p = $\dfrac{1}{4}$ (giờ)	**0,25đ**
	Thời gian A đã chạy từ chân đồi đến đỉnh đồi là $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ (giờ)	**0,25đ**
	Thời gian A đã chạy từ đỉnh đồi đến chỗ gặp nhau là $\dfrac{x}{15}$.	**0,25đ**
	Ta có phương trình $\dfrac{1}{4}+\dfrac{6-x}{12}=\dfrac{x}{15}+\dfrac{3}{5}$	**0,5đ**
	Giải phương trình được x= 1(km) . KL	**0,5đ**

Câu IV ***(3,0 điểm)***

Phần	**Nội dung**	**Điểm**

ý		
		
1	Ta thấy AN⊥ BI ,BM ⊥AI , nên K là trực tâm tam giác IAB. Do đó IK⊥ AB	**1,0đ**
2	Vì ΔAEK∽ ΔANB ∽ nên AK. AN =AE .AB	**0,25đ**
	Tương tự vì ΔBEK∽ ΔBMA ∽ nên BK .BM =BE. BA	**0,25đ**
	Vậy AK.AN+BK.BM=AE.AB+BE.BA=AB^2	**0,5đ**
3	Chỉ ra sđ MN=60^o nên tính được AIB=60^o , do đó điểm I thuộc cung chứa góc 60^o dựng trên đoạn AB.	**0,5đ**
	Diện tích tam giác IAB lớn nhất khi IE lớn nhất (IE là đường cao của tam giác IAB), khi đó I nằm chính giữa cung chứa góc 60^o dựng trên đoạn AB tương ứng với MN song song với AB.	**0,5đ**

Câu V ***(1,0 điểm)***

Phần ý	**Nội dung**	**Điểm**
1	Ta có: p+(p+2)=2(p+1)	**0,25đ**
	Vì p lẻ nên $(p+1)\vdots 2 \Rightarrow 2(p+1)\vdots 4$ (1)	
	Vì p, (p+1), (p+2) là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và (p+2) nguyên tố nên $(p+1)\vdots 3$ (2)	**0,25đ**
	Từ (1) và (2) suy ra $[p+(p+2)]\vdots 12$ (đpcm)	
2	Đặt $\begin{cases} x=a^3 \\ y=b^3 \\ z=c^3 \end{cases}$, vì $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$	**0,25đ**
	Ta có $x+y+1=a^3+b^3+1=(a+b)(a^2-ab+b^2)+1\geq(a+b)ab+1=ab(a+b+c)=\dfrac{a+b+c}{c}$	
	Do đó $\dfrac{1}{x+y+1}\leq\dfrac{c}{a+b+c}$	**0,25đ**

	Tương tự ta có $\frac{1}{y+z+1} \le \frac{a}{a+b+c}$ $\frac{1}{z+x+1} \le \frac{b}{a+b+c}$	
	Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.	

*** Chú ý:** ***Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.***

Đề số 27. Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ. Năm học: 2015-2016

Câu 1 *(1,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1)$

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

b) Tìm m để phương trình: $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3 *(2,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$

Câu 4 *(3,5 điểm)*

Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối ứng với B qua AC và F và điểm đối ứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.

b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.

c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương *x, y, z* thỏa mãn: $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)} + \frac{z^2x^2}{y(z^2+x^2)} + \frac{x^2y^2}{z(x^2+y^2)}$$

------------- HẾT-------------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀOTẠO
PHÚ THỌ
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2015-2016
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)
*(Hướng dẫn chấm gồm **05** trang)*

I. Một số chú ý khi chấm bài

•Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi, cán bộ chấm thi cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp lô-gic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
•Thí sinh làm bài theo cách khác với Hướng dẫn mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của Hướng dẫn chấm.
• Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án-thang điểm

Câu 1 *(1,5 điểm)*

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thoả mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1)$

Nội dung	Điểm
a) (0,5 điểm) Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0 , 1 hoặc 4. + Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k+1 => n^2+4 = 5k+5 \vdots 5; k \in N^*$. Nên n^2+4 không là số nguyên tố	0,25
Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k+4 => n^2+16 = 5k+20 \vdots 5; k \in N^*$. Nên n^2+16 không là số nguyên tố. Vậy $n^2 \vdots 5$ hay n $\vdots 5$	0,25
b) (1,0 điểm) $x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1) <=> x^2 - 2(y+1)x + 2(y^2-1) = 0 (1)$ Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương	0,25
Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y-1)^2 \le 4$ Δ'chính phương nên $\Delta' \in \{0;1;4\}$	0,25
+ Nếu $\Delta' = 4 => (y-1)^2 = 0 <=> y = 1$ thay vào phương trình (1) ta có : $x^2 - 4x = 0 <=> x(2-4) <=> \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-4 \end{array}\right.$ + Nếu $\Delta' = 1 => (y-1)^2 = 3 <=> y \notin Z$. + Nếu $\Delta' = 0 => (y-1)^2 = 4 <=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$	0,25
+ Với $y = 3$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 <=> (x-4)^2 = 0 <=> x = 4$ + Với y = -1 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 0 <=> x = 0$ Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x;y) \in \{(0;1);(4;1);(4;3);(0;-1)\}$	0,25

<table>
<tr><td colspan="2">

Câu 2 *(2,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

b) Tìm m để phương trình: $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

</td></tr>
<tr><td>

a) (1,0 điểm)

$A=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

$=2\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}\right]=2\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

$=2\left[\dfrac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}\right]=2\left(\dfrac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5+15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5}\right)$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

$=2.\dfrac{20}{20}=2$

Vậy A=2

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

b) (1,0 điểm)

Phương trình

$(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)=m$

<=> $(x^2+2x-8)(x^2+2x-15)=m(1)$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

Đặt $x^2+2x+1=(x+1)^2=y(y\ge 0)$ phương trình (1) trở thành:

$(y-9)(y-16)=m$ <=> $y^2-25y+144-m=0(2)$

Nhận xét: Với mỗi giá trị $y>0$ thì phương trình: $(x+1)^2=y$ có 2 nghiệm phân biệt, do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt⇔ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}$ <=> $\begin{cases}\Delta'=4m+49>0\\25>0\\144-m>0\end{cases}$ <=> $\dfrac{-49}{4}<n<144$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

Vậy với $\dfrac{-49}{4}<n<144$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Câu 3 *(2,0 điểm)*

a)Giải phương trình: $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-\text{x})$

b)Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\x^2+6y^2=10\end{cases}$

</td></tr>
<tr><td>

Nội dung

</td><td>

Điểm

</td></tr>
<tr><td>

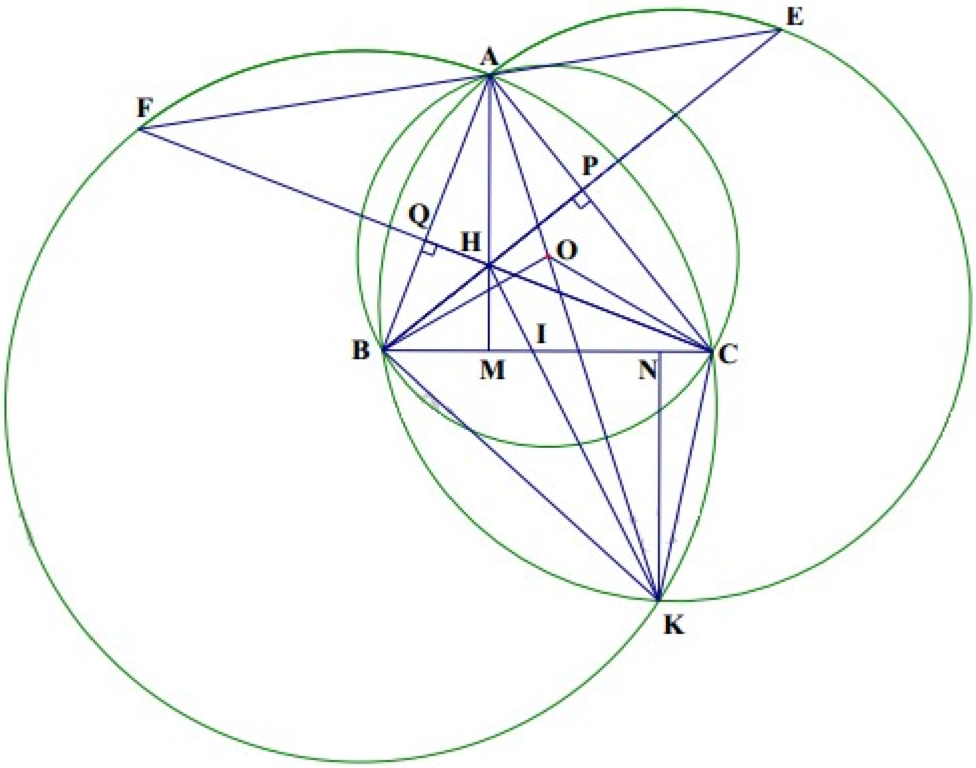
a) (1,0 điểm)

Điều kiện: $x\ge 1(*)$

Ta có:

</td><td>0,25</td></tr>
</table>

$x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$ $<=> x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1-2(x+\sqrt{x-1})-3=0$	
Đặt $x+\sqrt{x-1}=y(y\geq 1)(**)$, phương trình trở thành $y^2-2y-3=0$	0,25
$y^2-2y-3=0 <=> (y+1)(y-3)=0 <=> \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$	0,25
+Với y = −1 không thỏa mãn điều kiện (**). + Với y = 3 ta có phương trình: $x+\sqrt{x-1}=3 <=> \sqrt{x-1}=3-x <=> \begin{cases} x\leq 3 \\ x-1=9-6x+x^2 \end{cases} <=> \begin{cases} x\leq 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} <=> \begin{cases} x\leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} <=> x=2$ thỏa mãn điều kiện (*). Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.	0,25
b) (1,0 điểm) $\begin{cases} x^3+xy^2-10y=0 \\ x^2+6y^2=10 \end{cases} <=> \begin{cases} x^3+xy^2-(x^2+6y^2)y=0 & (1) \\ x^2+6y^2=10 & (2) \end{cases}$	0,25
Từ phương trình (1) ta có: $x^3+xy^2-(x^2+6y^2)y=0$ $<=> x^3+xy^2-x^2y-6y^3=0$ $<=> x^3-2x^2y+x^2y-2xy^2+3xy^2-6y^3=0$ $<=> (x-2y)(x^2+xy+3y^2)=0$	0,25
$<=> \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x^2+xy+3y^2=0 \end{array}\right.$	0,25
+ Trường hợp 1: $x^2+xy+3y^2=0$ $<=> (x+\frac{y}{2})^2+\frac{11y^2}{4}=0 => x=y=0$ V i $x=y=0$ không thỏa mãn phương trình (2). + Trường hợp 2: $x=2y$ thay vào phương trình (2) ta có: $4y^2+8y^2=12 <=> y^2=1 <=> \left[\begin{array}{l} y=1 => x=2 \\ y=-1 => x=-2 \end{array}\right.$ Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$	0,25
Câu 4 *(3,5 điểm)* Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC=R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối ứng với B qua AC và F và điểm đối ứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF. a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp. b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R. c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.	
Nội dung	**Điểm**

	
a) (1,5 điểm) Ta có AKB =AEB (vì cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB) Mà ABE =AEB (tính chất đối ứng) suy ra AKB= ABE (1) AKC= AFC (vì cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC) ACF= AFC (tính chất đối xứng) suy ra AKC= ACF (2)	0,5
Mặt khác ABE =ACF (cùng phụ với BAC) (3). Từ (1), (2) , (3) suy ra AKB= AKC hay KA là phân giác trong của góc BKC.	0,25
Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BE với AC và CF với AB. Ta có $BC = R\sqrt{3}$ nên BOC=120º ; $BAC = \frac{1}{2}BOC = 60^o$. Trong tam giác vuông ABP có APB=90º;BAC=60º=>APB=30º hay ABE=ACF=30º	0,25
Tứ giác APHQ có AQH +APH=180º=> PAQ+ PHQ=180º=> PHQ=120º=> BHC=120º (đối đỉnh).	0,25
Ta có AKC= ABE= 30^0 , AKB= ACF= ABE= 30^0 (theo chứng minh phần a). Mà BKC =AKC +AKB= AFC+ AEB =ACF +ABE = 60^0 suy ra BHC+ BKC =180^0 nên tứ giác BHCK nội tiếp.	0,25
b) (1,5 điểm) Gọi (O’) là đường tròn đi qua bốn điểm B, H,C, K. Ta có dây cung $BC = R\sqrt{3}$ BKC=60º= BAC nên bán kính đường tròn (O’) bằng bán kính R của đường tròn (O).	0,5
Gọi M là giao điểm của AH và BC thì MH vuông góc với BC, kẻ KN vuông góc với BC (N thuộc BC), gọi I là giao điểm của HK và BC. Ta có	0,25

$S_{BHCK}=S_{BHC}+S_{BCK}=\frac{1}{2}BC.HM+\frac{1}{2}BC.KN=\frac{1}{2}BC.(HM+KN)$ $S_{BHCK}\le\frac{1}{2}BC(HI+KI)=\frac{1}{2}BC.\text{KH(Do HM}\le\text{HI;KN}\le\text{KI)}$	
Ta có KH là dây cung của đường tròn (O'; R) suy ra KH ≤ 2R (không đổi) Nên S_{BHCK} lớn nhất khi KH= 2R và HM+ KN= HK =2R .	0,25
Giá trị lớn nhất $S_{BHCK}=\frac{1}{2}R\sqrt{3}.2.R=R^2\sqrt{3}$	0,25
Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, I, N trùng nhau suy ra I là trung điểm của BC nên ΔABC cân tại A. Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC.	0,25
c) (0,5 điểm) Ta có BOC=120º ;BKC =60º suy ra BOC +BKC =180^0 nên tứ giác BOCK nội tiếp đường tròn.	0,25
Ta có OB=OC=R suy ra OB= OC=> BKO= CKO hay KO là phân giác góc BKC theo phần (a) KA à phân giác góc BKC nên K ,O, A thẳng hàng hay AK đi qua O cố định	0,25

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương *x, y, z* thỏa mãn: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{y^2z^2}{x(y^2+z^2)}+\frac{z^2x^2}{\text{y}(\text{z}^2+x^2)}+\frac{x^2y^2}{\text{z}(\text{x}^2+y^2)}$$

Nội dung	Điểm
Ta có: $P=\dfrac{1}{x(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2})}+\dfrac{1}{y(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2})}+\dfrac{1}{z(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})}$	0,25
Đặt $\frac{1}{x}=a;\frac{1}{y}=b;\frac{1}{z}=c$ thì a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$ $P=\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}=\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{\text{b}(1-b^2)}+\frac{c^2}{\text{c}(1-c^2)}$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có: $a^2(1-a^2)^2=\frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2)\le\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)=\frac{4}{27}$ $=>a(1-a^2)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}<=>\frac{a^2}{a(1-a^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2(1)$ Tương tự: $\frac{b^2}{\text{b}(1-b^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2(2);\frac{c^2}{\text{c}(1-c^2)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2(3)$	0,25
Từ (1); (2); (3) ta có $P\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ Đẳng thức xảy ra ⇔ $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x=y=z=\sqrt{3}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0,25

Đề số 28. Chuyên Khánh Hòa. Năm học: 2015-2016

Bài 1. (2.00 điểm)

Cho biểu thức $M = \dfrac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.
2) Tính giá trị của M, biết rằng x $= (1-\sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8}$

Bài 2. (2,00 điểm)

1) Không dùng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$
2) Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 = 2$

Bài 3. (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y = -x^2$

1) Vẽ parabol (P).
2) Xác định toạ độ các giao điểm A, B của đường thẳng (d): y = -x – 2 và (P). Tìm toạ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M.

Bài 4. (4,00 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB<AC). Hai đường tròn (B; BA) và (C; CA) cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E.

1) Chứng minh BC là tia phân giác của ABD
2) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: AD2 = 4BI.CI
3) Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
4) Chứng minh rằng số đo MEN không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 03 trang)

I. Hướng dẫn chung

1)Hướng dẫn chấm chỉ trình bày các bước chính của lời giải hoặc nêu kết quả. Trong bài làm, thí sinh phải trình bày lập luận đầy đủ.
2) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
3) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) phải đảm bảo không làm thay đổi tổng số điểm của mỗi câu, mỗi ý trong hướng dẫn chấm và được thống nhất trong Hội đồng chấm thi.
4) Các điểm thành phần và điểm cộng toàn bài phải giữ nguyên không được làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Bài 1:

$$M=\frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$$

$a)\,\mathrm{DK}: \mathrm{x}\ge 0; \mathrm{y}\ge 0$

$$\mathrm{M}=\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}}$$

$$=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

b)Với $x=(1-\sqrt{3})^2$ và $y=3-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$

$$M=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{3}-1-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Bài 2:

a)

$$\begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\ 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\ 4\sqrt{x}+2\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5\sqrt{y}=0\\ 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{y}=0\\ \sqrt{x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$$

b) $\Delta=(-m)^2-4.1.1=m^2-4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $m^2-4\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 2$ hoặc $m\le -2$

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1+x_2=m$; $x_1.x_2=1$

Ta có: $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=2$.

$x_1^2+2x_1+1+x_2^2+2x_2+1=2$

$<=> (x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)-2x_1x_2=0$

$<=> m^2+2m-2=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3}-1(L) \\ m=-\sqrt{3}-1(TM) \end{array}\right.$

Vậy $m=-\sqrt{3}-1$

Bài 3:

a)Vẽ đồ thị y = -x^2

TXĐ: D = R

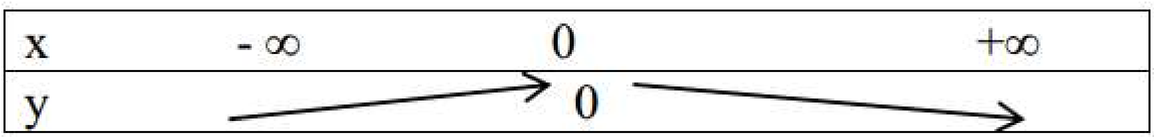
Tọa độ đỉnh: I(0;0)

Trục đối xứng: x = 0

Tính biến thiên:

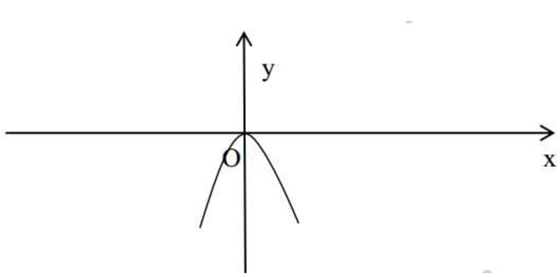
Hàm số đồng biến trên (-∞;0) và nghịch biến trên (0;+∞).

BBT:



Bảng giá trị

x	-1	0	1
y	-1	0	-1



b) HD: Viết pt đường trung trực (d’) của AB, tìm giao điểm của (d’) và (P), ta tìm được hai điểm M.

Hoành độ các giao điểm A, B của đường thẳng (d): y = -x – 2 và (P) là nghiệm của phương trình: – x2 = – x – 2 ⇔ x2 – x – 2 =0 ⇔ x= -1 hoặc x = 2

+ Với x = -1, thay vào (P), ta có: y = –(-1)2 = -1, ta có: A(-1; -1)

+ Với x = 2, thay vào (P), ta có: y = –(2)2 = -4, ta có: B(2; -4)

Suy ra trung điểm của AB là: $I(\frac{1}{2};\frac{-5}{2})$

Đường thẳng (d’) vuông góc với (d) có dạng: y = x + b;

Vì (d’): y = x + b đi qua I nên: $\frac{-5}{2}=\frac{1}{2}+b <=> b=-3$

Vậy (d’): y = x -3

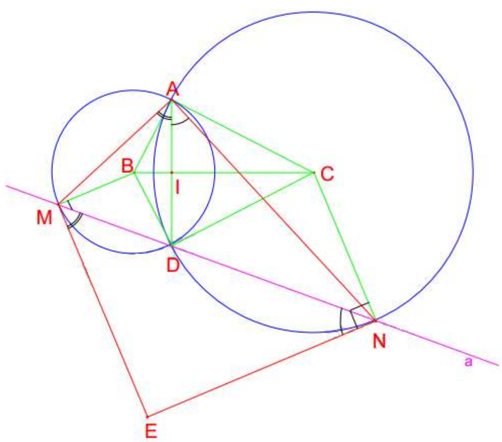
Phương trình hoành độ của (d’) và (P) là: x^2 + x - 3 = 0 $<=> x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

+ Với $x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} => y=\frac{-7-\sqrt{13}}{2}$

+Với $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} => y=\frac{-7+\sqrt{13}}{2}$

Vậy có hai điểm M cần tìm là: $(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-7-\sqrt{13}}{2})$ và $(\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\frac{-7+\sqrt{13}}{2})$

Bài 4:



a) C/m: ΔABC = ΔDBC (ccc) ⇒ ABC=DBC hay: BC là phân giác của ABD
b) Ta có: AB = BD (=bk(B))

CA = CD (=bk(C))

Suy ra: BC là trung trực của AD hay BC ⊥ AD ⇒AI⊥B

Ta lại có: BC ⊥ AD tại I ⇒ IA = ID (đlí)

Xét ΔABC vuông tại A (gt) có: AI⊥BC, suy ra: AI^2 = BI.CI hay: $\frac{AD^2}{4}=BI.CI => AD^2=4BI.CI$

c) Ta có: DME=DAM (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)
DNE =DAN (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

Suy ra: DME+ DNE=DAM+DAN

Trong ΔMNE có: MEN+EMN+ENM = 180º , suy ra: MEN+DAM+DAN = 180º

Hay: MEN+MAN =180º ⇒ tứ giác AMEN nội tiếp.

d) Trong ΔAMN có: MAN+AMN+ANM = 180º , mà: MEN+MAN =180º

suy ra: MEN=AMN+ANM

Ta lại có: $AND = ACB = \frac{1}{2}ACD, AMD = ABC = \frac{1}{2}ABD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà: ΔABC vuông tại A nên: MEN = 90º (không đổi)

Vậy số đo góc MEN không phụ thuộc vào đường thẳng a.

---------------------------HẾT----------------------------

Đề số 29. Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2015-2016

Câu 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2}\right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} (a > 0, a \neq 4)$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $M \leq 0$.

Câu 2: *(2,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ x - \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$

b) Cho phương trình: $x^2 + 2(m-2) - m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân việt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1 < x_2; |x_1| - |x_2| = 6$

Câu 3: *(1,5 điểm)*

Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC vuông tại A và (C) là đường tròn tâm C bán kính CA. Lấy điểm D thuộc đường tròn (C) và nằm trong tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BDM = \frac{1}{2}ACD$; N là giao điểm của đường thẳng MD với đường cao AH của tam giác ABC; E là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn (C). Chứng minh rằng:

a) MN song song với AE.

b) $BD.BE = BA^2$ và tứ giác DHCE nội tiếp.

c) HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu 5: *(1,0 điểm)* Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: x + y + z = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$$

----HẾT----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN LAM SƠN – MÔN TOÁN CHUNG

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	a/ Rút gọn biểu thức M (a > 0 và a ≠ 4.) $M=\left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ $=\left(\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2}$ $=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2}+\frac{a}{\sqrt{a}-2}\right).\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-2}.\frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$ $=\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)=a-2\sqrt{a}$	
	b/ Tìm tất cả các giá trị của a để M ≤ 0 $M\le 0 => \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)\le 0 => \sqrt{a}-2\le 0 (do\ \sqrt{a}\ge 0)$ $=> \sqrt{a}\le 2 => a\le 4$ Kết hợp điều kiện : Với 0 < a < 4 thì M ≤ 0. Không xảy ra dấu = vì a ≠ 0 và a ≠ 4.	
Câu 2	a/ Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+\frac{3}{y}=3\\ x-\frac{2}{y}=5\end{cases}$ Điều kiện: $y\ne 0$. Đặt $\frac{1}{y}=t$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}2x+3t=3\\ x-2t=5(2)\end{cases} <=> \begin{cases}2x+3t=3\\ 2x-4t=10\end{cases} <=> \begin{cases}-7t=7\\ x-2t=5\end{cases} <=> \begin{cases}t=-1\\ x=3\end{cases}$ Với $t=-1 => \frac{1}{y}=-1 => y=-1$ Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}$	
	b/ $x^2+2(m-2)x-m^2=0$ (m là tham số) Ta có: $\Delta'=(m-2)^2+m^2$ Do $\begin{cases}(m-2)^2\ge 0\\ m\ge 0\end{cases} => \Delta'=(m-2)^2+m^2\ge 0$ Dấu = xảy ra khi $\begin{cases}(m-2)^2=0\\ m^2=0\end{cases} => \begin{cases}m=2\\ m=0\end{cases} => m\in\Phi$ Vậy $\Delta'=(m-2)^2+m^2>0$ Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ Theo viet ta có : $\begin{cases}x_1+x_2=4-2m\\ x_1x_2=-m^2\end{cases}$ Để	

	$\mid x_1\mid - \mid x_2\mid = 6 => (\mid x_1\mid - \mid x_2\mid)^2 = 36 => x_1^2 + x_2^2 - 2\mid x_1x_2\mid = 36 (1)$ $Do \quad x_1x_2 = -m^2 \le 0 => \mid x_1x_2\mid = -x_1x_2$ Thay vào (1) => $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 36 => (x_1+x_2)^2 = 36 => \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=6 \\ x_1+x_2=-6 \end{array}\right.$ - Nếu : $x_1+x_2=6$ =>4 - 2m = 6 => m = -1 - Nếu : $x_1+x_2=-6$ =>4 - 2m =-6 => m =5 Với m = -1, thay vào ta có phương trình $x^2-6x-1=0$ $\Delta' = 10 > 0$ Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ là $x_2 = 3+\sqrt{10}; x_1 = 3-\sqrt{10}$ Khi đó: $\mid 3-\sqrt{10}\mid - \mid 3+\sqrt{10}\mid = -6 (KTM)$ Với m = 5, thay vào ta có phương trình $x^2+6x-25=0$ $\Delta' = 34 > 0$ Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ là $x_2 = -3+\sqrt{34}; x_1 = -3-\sqrt{34}$ Khi đó : $\mid -3-\sqrt{34}\mid - \mid -3+\sqrt{34}\mid = 6 (TM)$ Vậy m = 5.	
Câu 3	Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$ (Điều kiện $x \ge -1$) $PT <=> 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2+2)$ Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b\,(a,b \ge 0)$ $=> a^2+b^2 = x^2+2.$ thay vào ta có PT $5ab = 2(a^2+b^2)$ $<=> (2a-b)(2b-a) = 0$ TH1: 2a-b=0=>2a=b $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$ $=> 4x+4 = x^2-x+1$ $<=> x^2-5x-3=0$ $\Delta = 37 > 0$ $=> \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{5+\sqrt{37}}{2} (TM) \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{37}}{2} (TM) \end{array}\right.$ TH2: 2b-a=0 =>2b=a	

$2\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+1}$

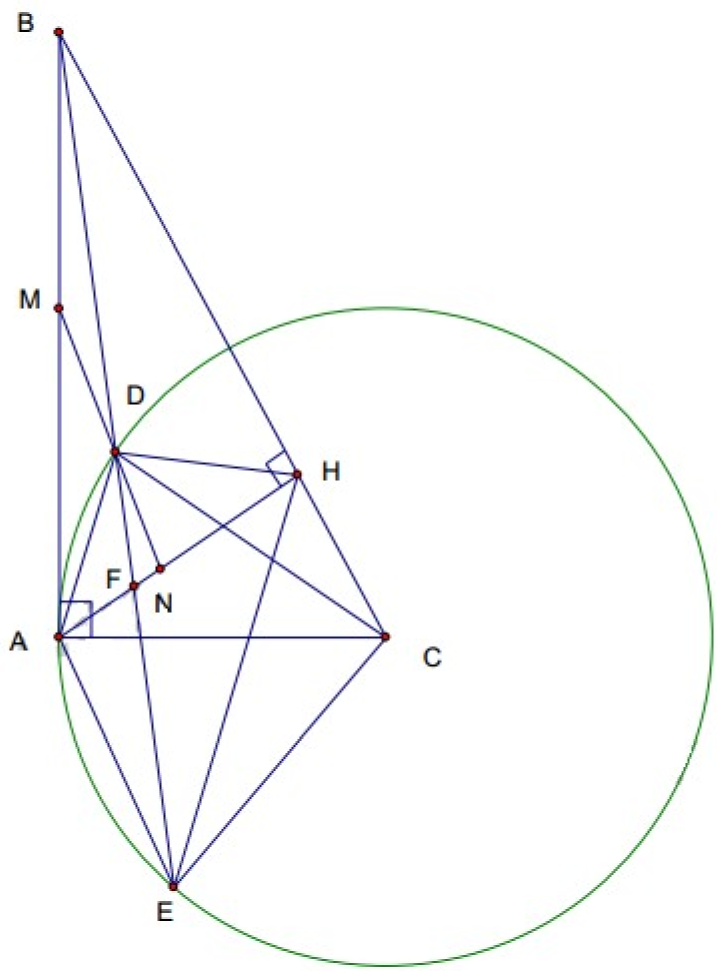
$\Rightarrow 4x^2-4x+4=x+1$

$\Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$

$\Delta=-23<0 \Rightarrow PTVN$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm : $x_1=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}; x_2=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$

Câu 4



a/ Chứng minh MN//AE

Xét đường tròn (C) ta có : $AED=\dfrac{1}{2}ACD$ (góc nôi tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung AD) (1)

$BDM=\dfrac{1}{2}ACD(gt)(2)$

Từ 1, 2 => AED= BDM

=> MN//AE (Vì có 2 góc đồng vị bằng nhau)

b/ Chứng minh BD.BE = DA^2 và tứ giác DHCE nội tiếp

+ Chứng minh BD.BE = BA^2

Xét ΔBAD và ΔBEA có

ABE chung (3)

AD=BEA(cùng chắn cung AD) (4)

Từ 3,4 => ΔBAD ~ ΔBEA (g.g)

$=> \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BA}{BE} => BD.BE = BA^2$(5) (ĐPCM)

+ Chứng minh DHCE nội tiếp

Xét ΔBAC vuông tại A có AH là đường cao => BA^2 = BH.BC (Hệ thức) (6)

Từ 5,6 => BD.BE = BH.BC=> $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BH}{BE}$(7) Mà CBE chung (8)

=> ΔBDH~ ΔBCE (c.g.c) => BHD =BEC (Hai góc tương ứng) (9)

Mà BHD +DHC =180^o (10)

Từ 9,10 => DHC+ BEC =180^o => Tứ giác DHCE nội tiếp (Đ/l) (ĐPCM)

c/ Chứng minh HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN

+ Chứng minh HA là đường phân giác của góc DHE

Xét ΔCHE và ΔCEB có HCE chung (11)

Xét ΔBAC vuông tại A có AH là đường cao => CA^2 = CH.CB (Hệ thức)

Hay CE^2 = CH.CB (do CE = CA = R) => $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CH}{CE}$(12)

Từ 11,12 => ΔCHE và ΔCEB (c.g.c) => CHE =CEB (13)

Từ 9.13 => CHE= BHD

=> AHE= AHD (cùng phụ với 2 góc bằng nhau)

=> HA là đường phân giác của góc DHE

+ D là trung điểm của đoạn thẳng MN

Ta có : MD//AE (câu a) => $\dfrac{DM}{EA} = \dfrac{BD}{BE}(talet)$(14)

Gọi giao của DE và AH là F

Ta có : $\dfrac{DN}{EA} = \dfrac{FD}{FE} = \dfrac{HD}{HE}$ (Ta lét – T/c tia phân giác) (15)

Ta có : ΔHDB ~ ΔHCE (g.g) => $\dfrac{DH}{HC} = \dfrac{BD}{CE} => DH.CE = CH.BD$(16)

Ta có : ΔCHE ~ ΔCEB (g.g) =>=> $\dfrac{HC}{CE} = \dfrac{HE}{BE} => HC.BE = HE.CE$(17)

Từ 16,17 => $\dfrac{DH.CE}{HE.CE} = \dfrac{HC.BD}{HC.BE} => \dfrac{HD}{HE} = \dfrac{BD}{BE}$(18)

Từ 14.15.18 => $\dfrac{DM}{EA} = \dfrac{DN}{EA} => DM = DN$

=> D là trung điểm của MN (ĐPCM)

Câu 5 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn : x + y + z = 3

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{z}{1+x^2}$

Ta có : $\dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{xy^2}{1+y^2} = x; \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{yz^2}{1+z^2} = y = x; \dfrac{z}{1+x^2} + \dfrac{zx^2}{1+x^2} = z$

	$=> S=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}=(x+y+z)-(\frac{xy^2}{1+y^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}+\frac{zx^2}{1+x^2})$ $=> S=3-(\frac{xy^2}{1+y^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}+\frac{zx^2}{1+x^2})$ Ta có: $\frac{xy^2}{1+y^2}\le\frac{xy^2}{2y}=\frac{xy}{2};\frac{yz^2}{1+z^2}\le\frac{yz^2}{2z}=\frac{yz}{2};\frac{zx^2}{1+x^2}\le\frac{zx^2}{2x}=\frac{zx}{2}$ $=>\frac{xy^2}{1+y^2}+\frac{yz^2}{1+z^2}+\frac{zx^2}{1+x^2}\le\frac{xy+yz+zx}{2}$ $=> S\ge 3-\frac{xy+yz+zx}{2}$ Do $(x+y+z)^2\ge 2(xy+yz+zx) => xy+yz+zx\le 3$ $=> S\ge 3-\frac{3}{2} => S\ge\frac{3}{2}$ $=> S_{MIN}=\frac{3}{2}$ khi x=y=z=1	

Đề số 30. Chuyên Nam Định . Năm học: 2015-2016

Bài 1. *(2,0 điểm)*

1) Cho đa thức $P(x)=ax^2+bx+c$. Biết $P(x)$ chia cho x + 1 dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho x – 1 dư 5. Tìm các hệ số a, b, c.

2) Cho các số a, b, x, y thỏa mãn ab ≠ 0, a + b ≠ 0, $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}; x^2+y^2=1$. Chứng minh rằng:

a) $ay^2=bx^2$

b) $\frac{x^{200}}{a^{100}}+\frac{y^{200}}{b^{100}}=\frac{2}{(a+b)^{100}}$

Bài 2. *(2,5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y-x)(y-x-4)=x^2-4x\\ x(y-4)+4\sqrt[3]{x^2-y}=6\end{cases}$

2) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{x^2+x+3}-3x^2-4x-7=0$.

Bài 3. *(3,0 điểm)* Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài tại M. Một đường thẳng cắt đường tròn (O_1) tại hai điểm phân biệt A, B và tiếp xúc với đường tròn (O_2) tại E (B nằm giữa A và E). Đường thẳng EM cắt đường tròn (O_1) tại điểm J khác M. Gọi C là điểm thuộc cung MJ không chứa A, B của đường tròn (O_1) (C khác M và J). Kẻ tiếp tuyến CF với đường tròn (O_2) (F là tiếp điểm) sao cho các đoạn thẳng CF, MJ không cắt nhau. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng JC và EF, K là giao điểm khác A của đường thẳng AI và đường tròn (O_1) . Chứng minh rằng:

1) Tứ giác MCFI là tứ giác nội tiếp và JA = JI = $\sqrt{JE.JM}$

2) CI là phân giác góc ngoài tại C của tam giác ABC.

3) K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI

Bài 4. *(1,0 điểm)* Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$$

Bài 5. *(1,5 điểm)*

1) Trong mặt phẳng cho tập S gồm 8065 điểm đôi một phân biệt mà diện tích của mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc tập S đều không lớn hơn 1 (quy ước nếu 3 điểm thẳng hàng thì diện tích của tam giác tạo bởi 3 điểm này bằng 0). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác T có diện tích không lớn hơn 1 chứa ít nhất 2017 điểm thuộc tập S (mỗi điểm trong số 2017 điểm đó nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác T)

2) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2}\ge 3.$$

---------HẾT---------

ĐÁP ÁN

Bài 1.

Vì P(x) chia cho x + 1 dư 3 nên P(x) – 3 chia hết cho x + 1.

⇒ P(x) – 3 = f(x).(x + 1)

Thay x = –1 vào đẳng thức trên ta có:

P(–1) – 3 = f(–1).(–1 + 1) = 0.

⇒ P(–1) = 3 (1)

Tương tự, P(x) chia cho x dư 1 nên P(0) = 1 (2)

P(x) chia cho x – 1 dư 5 nên P(1) = 5 (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.(-1)^2+b.(-1)+c=3\\ a.0^2+b.0+c=1\\ a.1^2+b.1+c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a-b+c=3\\ c=1\\ a+b+c=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3\\ b=1\\ c=1\end{cases}$$

⇒ P(x) = $3x^2$ + x + 1. Thử lại ta thấy P(x) thỏa mãn đề bài.

Vậy P(x) = $3x^2$ + x + 1.

2)

a) Ta có:

$$\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow\frac{x^4b+y^4a}{ab}=\frac{1}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(x^4b+y^4a)=ab$$
$$\Leftrightarrow abx^4+a^2y^4+b^2x^4+aby^4-ab=0$$
$$\Leftrightarrow ab(x^4+y^4-1)+(ay^2)^2+(bx^2)^2=0(*)$$

Mặt khác $x^2+y^2=1\Rightarrow(x^2+y^2)^2=1\Rightarrow x^4+y^4-1=-2x^2y^2$

Do đó (*) $\Leftrightarrow -2abx^2y^2+(ay^2)^2+(bx^2)^2=0$

$\Leftrightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow ay^2 = bx^2$

b) Vì ab $\neq$ 0 nên

$$ay^2 = bx^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{100} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{100} = \frac{1}{(a+b)^{100}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{200}}{a^{100}} + \frac{y^{200}}{b^{100}} = \frac{2}{(a+b)^{100}}$$

Bài 2. *(2,5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y-x)(y-x-4) = x^2 - 4x (1) \\ x(y-4) + 4\sqrt[3]{x^2 - y} = 6 (2) \end{cases}$

Biến đổi phương trình (1):

$(1) \Leftrightarrow (y-x)(y-4) - x(y-x) = x(x-4)$

$\Leftrightarrow (y-x)(y-4) = x(x-4+y-x)$

$\Leftrightarrow (y-x)(y-4) = x(y-4)$

$\Leftrightarrow (y-4)(y-2x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = 2x \end{array}\right.$

• Với y = 4, thay vào (2) được:

$$(2) \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{x^2 - 4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2\sqrt[3]{x^2 - 2x} - 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, phương trình trở thành:

$t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 (3) \end{array}\right.$

Phương trình (3) có Δ = 1 – 4.3 = –11 < 0 nên vô nghiệm.

Do đó

$t=1 \Rightarrow x^2-2x=1 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

$x=1+\sqrt{2} \Rightarrow y=2+2\sqrt{2}$

$x=1-\sqrt{2} \Rightarrow y=2-2\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $\left(\frac{\sqrt{118}}{4};4\right),\left(-\frac{\sqrt{118}}{4};4\right),\left(1+\sqrt{2};2+2\sqrt{2}\right),\left(1-\sqrt{2};2-2\sqrt{\ }\right)$

2) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{x^2+x+3}-3x^2-4x-7=0.$ (1)

ĐK: $x^2 + x + 3 \geq 0$

Đặt $a=x+1; b=\sqrt{x^2+x+3}$ (b ≥ 0). Ta có $a^2+2b^2=(x^2+2x+1)+2(x^2+x+3)=3x^2+4x+7$

Phương trình (1) trở thành

$$3ab-a^2-2b^2=0$$
$$\Leftrightarrow(-a+b)(a-2b)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a=2b\end{array}\right.$$

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=\sqrt{x^2+x+3}\\x+1=2\sqrt{x^2+x+3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq-1\\\left[\begin{array}{l}x^2+2x+1=x^2+x+3\\x^2+2x+1=4(x^2+x+3)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

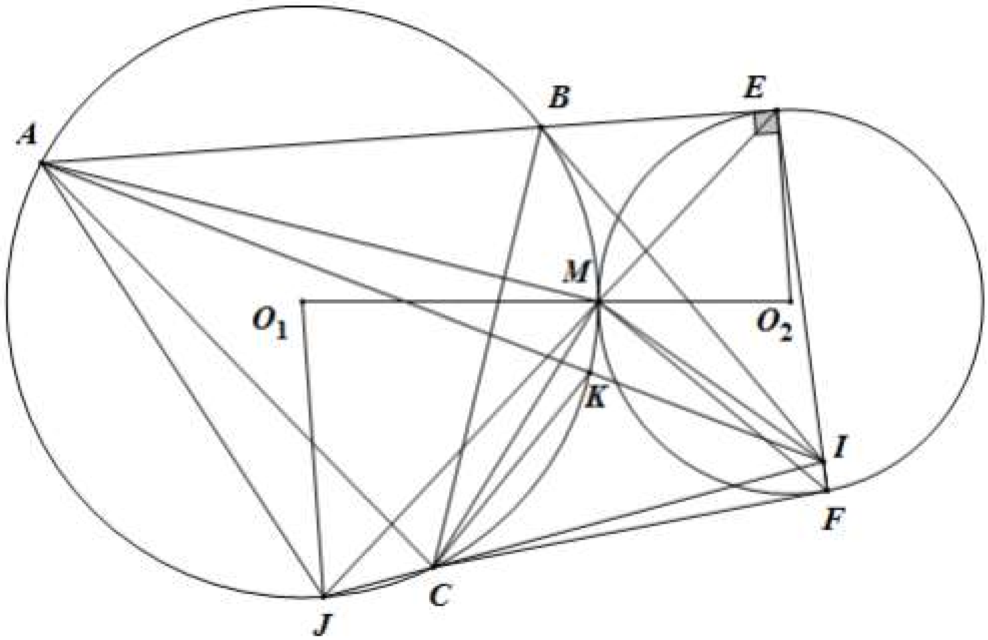
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq-1\\\left[\begin{array}{l}x=2\\3x^2+2x+11=0(2)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

⇔ x = 2 (thỏa mãn)

(Phương trình (2) có Δ' = 1 – 3.11 = –32 < 0 nên vô nghiệm)

Do đó x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3.



1) Ta có tam giác O_1MJ và O_2ME cân nên $O_1MJ = O_1JM$; $O_2ME = O_2EM$

Mặt khác $O_1MJ = O_2ME$ (hai góc đối đỉnh) nên

$\Delta O_1MJ \sim \Delta O_2ME$ (g.g)

=> $O_1 = O_2$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm trong một đường tròn ta có:

$$JAM = \frac{1}{2}O_1$$
$$MFI = \frac{1}{2}O_2$$
$$\Rightarrow JAM = MFI$$

Mặt khác, vì AJCM là tứ giác nội tiếp, nên MCI = JAM (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện)

=> MCI = MFI

⇒ MCFI là tứ giác nội tiếp.

=> MIC = MFC (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Mặt khác xét đường tròn O_2 ta có: MFC = MEF (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MF)

=> MIC = MEI

Do đó ΔJMI ~ ΔJIE (g.g) => $\dfrac{JM}{JI} = \dfrac{JI}{JE}$ => $JM.JE = JI^2$

Tương tự $JAM = MFE = AEJ \Rightarrow \Delta JAM \sim \Delta JEA \Rightarrow JM.JE = JA^2$

Do đó $JA = JI = \sqrt{JE.JM}$

2) Do $O_1 = O_2$ (cmt) nên $O_1J \parallel O_2E \Rightarrow O_1J \perp AB$.

Mà $O_1A = O_1B$ nên O_1J là trung trực của AB

⇒ Tam giác JAB cân tại J

Vì ABCJ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$$BCI = BAJ = \frac{180^o - AJB}{2} = \frac{180^o - ACB}{2} = 90^o - \frac{1}{2}ACB$$

Do đó CI là phân giác ngoài tại đỉnh C của tam giác ABC.

3) Do AJCK là tứ giác nội tiếp nên

ICK = IAJ = KIC => KI = KC

Áp dụng tính chất góc ngoài với tam giác ACI, ta có:

KAC = ACJ – AIC = ABJ – AIJ = BAJ – JAK = BAK => KB = KC.

Do đó KB = KC = KI ⇒ K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI.

Bài 4.

$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$

$\Leftrightarrow \left(2^{2x}+5.2^x+4\right)\left(2^{2x}+5.2^x+6\right)-5^y=11879 \qquad (1)$

Đặt $t = 2^{2x}+5.2^x+5, t \in \mathbb{N}^*,$ ta có:

$(1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1)-5^y = 11879$
$\Leftrightarrow t^2 - 5^y = 11880(2)$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y \vdots 25$

Từ (2) suy ra $t^2 \vdots 5 \Rightarrow t^2 \vdots 25$. Do đó từ (2) ⇒ $11880 \vdots 25$ (vô lí)

• TH2: y = 1

(2) ⇔ $t^2 = 11885$ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)

• TH3: y = 0

(2) ⇔ $t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$

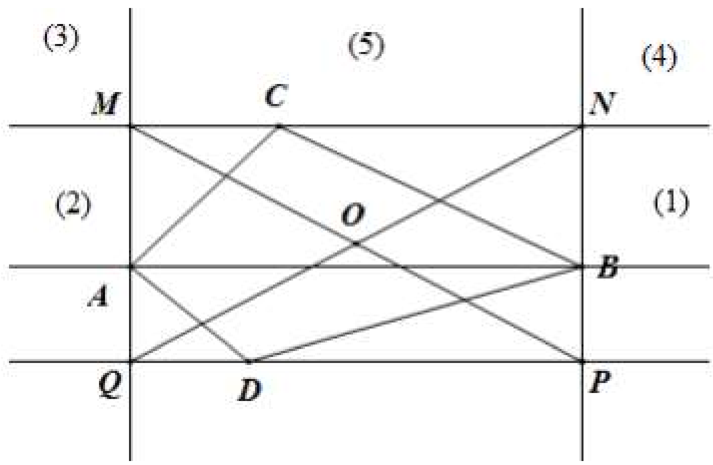
$\Rightarrow 2^{2x}+5.2^{x}+5=109 \Rightarrow 2^{2x}+5.2^{x}-104=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x}=8(tm) \\ 2^{x}=-13(L) \end{array}\right. \Rightarrow x=3.$

Vậy x = 3, y = 0 là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 5.

1)



Gọi A, B là 2 điểm có khoảng cách lớn nhất thuộc 8065 điểm đã cho.

Gọi a, b lần lượt là các đường thẳng qua A, B và vuông góc AB.

Gọi C là điểm có khoảng cách đến đường thẳng AB là lớn nhất trong 8065 điểm đã cho.
Đường thẳng qua C và song song AB cắt a, b lần lượt ở M, N.
Xét 2 trường hợp:

•□TH1: Không tồn tại điểm nào thuộc S mà nằm khác phía C so với AB.

Khi đó tất cả 8065 điểm đã cho đều nằm trong hình chữ nhật AMNB.

Thật vậy, nếu ∀ điểm I ∈ S không nằm trong hình chữ nhật đó thì I chỉ có thể nằm trong các miền (1), (2),(3), (4) hoặc (5).

Nếu I ∈ (1) hoặc I ∈ (4) thì dễ thấy AI > AB (mâu thuẫn với giả sử)

Nếu I ∈ (2) hoặc I ∈ (3) thì dễ thấy BI > AB (mâu thuẫn với giả sử)

Nếu I ∈ (5) thì d(I; AB) > d(C; AB) (mâu thuẫn).

Do đó I thuộc hình chữ nhật AMNB ∀ I ∈ S.

Khi đó xét ba tam giác AMC, ABC và BNC, ta có

$S_{AMC} < S_{ABC} \leq 1$

$S_{BNC} < S_{ABC} \le 1$

và tồn tại một trong ba tam giác chứa ít nhất 2017 điểm, vì nếu không thì cả hình chữ nhật AMNB sẽ chứa ít hơn 3.2017 = 6051 (điểm) , vô lí.

Do đó chọn được tam giác T thỏa mãn.

•TH2 : Tồn tại tập S' các điểm nằm khác phía với C so với AB.

Khi đó gọi D là điểm thuộc S' mà có khoảng cách đến AB là lớn nhất.

Qua D kẻ đường thẳng song song AB cắt a, b lần lượt ở Q, P. Gọi O là giao MP, NQ.

Chứng minh tương tự ta có 8065 điểm đã cho đều nằm trong hình chữ nhật MNPQ.

Theo nguyên lí Đi–rích–lê ⇒ Tồn tại một trong bốn tam giác OMN, ONP, OPQ, OQM chứa ít nhất 2017 điểm.

Mặt khác $S_{OMN} = S_{ONP} = S_{OPQ} = S_{OQM} = \frac{1}{4}S_{MNPQ} = \frac{1}{4}.2.(S_{ACB} + S_{ADB}) \le \frac{1}{4}.2.(1+1) = 1$

Bài toán được chứng minh.

2) Ta có:

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2} = \frac{2(2a^2+b^2+c^2)-(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} = 2 - \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$$

Có hai đẳng thức tương tự.

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \le 3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz cho 4 số dương $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \ge \frac{(x+y)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \le \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2}$$
$$\le \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}\right) + \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2}\right)$$
$$= \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+b^2}\right) + \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

= 3

⇒ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Đề số 31. Chuyên Nam Định. Năm học: 2015-2016

Câu 1. *(2,0 điểm)*

1) Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}$ xác định.
2) Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}$ khi x=$2\sqrt{2}$
3) Tìm tọa độ của các điểm có tung độ bằng 8 và nằm trên đồ thị hàm số $y=2x^2$
4) Cho tam giác ABC vuông tại A, AB=3; BC = 5. Tính cos ACB.

Câu 2. *(1,5 điểm)* Cho biểu thức $Q=(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1})(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x})$ (với x>0;x$\neq$1)

1) Rút gọn biểu thức Q .
2) Tìm các giá trị của x để Q = -1.

Câu 3. *(2,5 điểm)*

1) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-6=0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình với m = 3.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm x_1 ;x_2 , thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=16$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}(x-y+3)=\sqrt{y}\\ x^2+(x+3)(2x-y+5)=x+16\end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A (AB <AC) , đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt các cạnh AB,AC , lần lượt tại M,N. Gọi O là trung điểm của đoạn BC, D là giao điểm của MN và OA.

1) Chứng minh rằng:

a) AM. AB= AN. AC

b) Tứ giác BMNC là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng:

a) $\Delta ADI \backsim \Delta AHO$.

b) $\frac{1}{AD}=\frac{1}{HB}+\frac{1}{HC}$

3) Gọi P là giao điểm của BC và MN, K là giao điểm thứ hai của AP và đường tròn đường kính AH. Chứng minh rằng BKC = 90^o.

Câu 5. *(1,0 điểm)*

1) Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x-6}=3\sqrt{(2-x)^5}+(7x-19)\sqrt{2-x}$
2) Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn abc =1.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}$$

---------HẾT---------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: **TOÁN (Đề chung)**

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

Đáp án	Điểm
1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}$ xác định <=> $\sqrt{x+1};\sqrt{x-3}$ đồng thời xác định	0,25
$\sqrt{x+1}$ xác định ⇔ $x+1\geq 0$ ⇔ $x\geq -1$ $\sqrt{x-3}$ xác định ⇔ $x-3\geq 0$ ⇔ $x\geq 3$ Vậy điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}$ là $x\geq 3$	0,25
2) Với $x=2\sqrt{2}$ ta có: $A=\sqrt{2\sqrt{2}+3}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$	0,25
$=\lvert\sqrt{2}+1\rvert-\lvert\sqrt{2}-1\rvert=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2$	0,25
3) Hoành độ của điểm cần tìm là nghiệm phương trình $2x^2=8$	0,25
<=> $x=\pm 2$. Vậy có hai điểm thỏa mãn là: (2;8) và (-2;8).	0,25
4) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$	0,25
Do đó $\cos ACB=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}$	0,25

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

Đáp án	Điểm
1) ***(1,0 điểm)*** Với điều kiện $x>0$ và $x\neq 1$, ta có $Q=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}-\frac{2}{x-1}\right).\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}\right)$	0,5
$=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\frac{2}{x-1}\right).(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})$	0,25
$=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right).\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$	0,25
2) ***(0,5 điểm)*** Với $x>0$ và $x\neq 1$, ta có $Q=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ Do đó $Q=-1 <=> \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=-1$ <=> $\sqrt{x}-1=-\sqrt{x}$	0,25

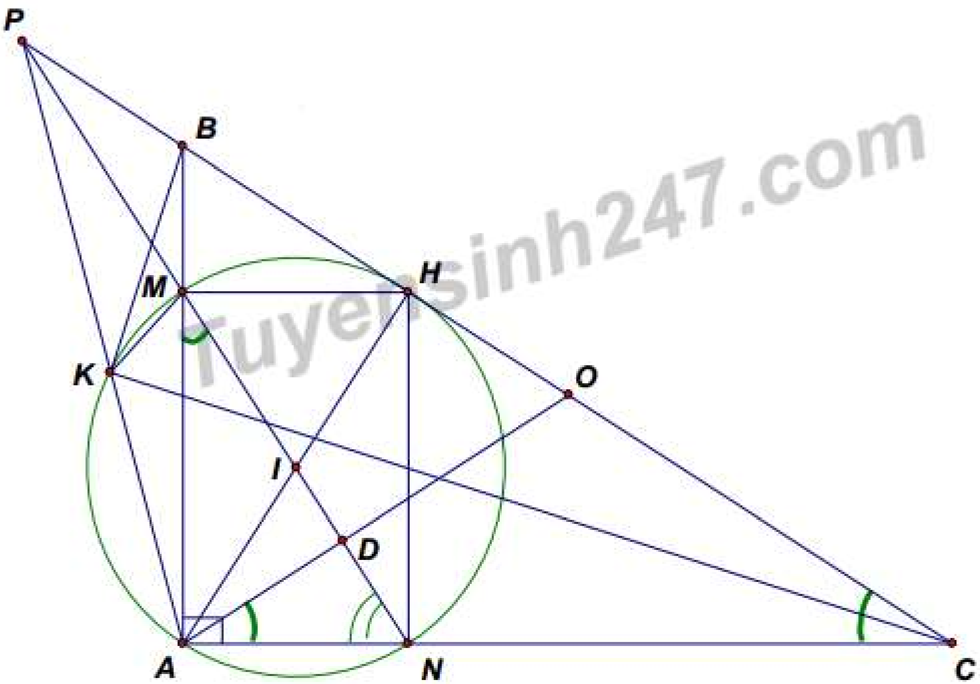
$<=> 2\sqrt{x}=1$ $<=> x=\frac{1}{4}(TM)$ Vậy với $x=\frac{1}{4}$ thì Q= -1	0,25

Câu 3 ***(2,5 điểm)***

Đáp án	Điểm
1) ***(1,5 điểm)*** **a)** ***(0,75 điểm)*** Với $m = 3$, ta có phương trình (1) trở thành x^2-4x=3=0	0,25
Ta có a+b+c =1−4+3 = 0 nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=1$; $x_2=3$	0,25
Vậy với m = 3, phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1=1$; $x_2=3$	0,25
b)(0,75 điểm) $x^2-2(m-1)x+m^2-6=0$ Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x có $\Delta'=(m-1)^2-(m^2-6)=7-2m$ Phương trình (1) có các nghiệm $x_1;x_2 <=> \Delta'\geq 0 <=> 7-2m\geq 0 <=> m\leq\frac{7}{2}$ (*)	0,25
Khi đó theo định lý Viét ta có $x_1+x_2=2(m-1); x_1x_2=m^2-6$ Do đó: $x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2-2(m^2-6)=2m^2-8m+16$	0,25
Vậy $x_1{}^2+x_2{}^2=16 \Leftrightarrow 2m^2-8m+16=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=4 \end{array}\right.$ Kết hợp điều kiện (*) ta có m = 0 là giá trị thỏa mãn.	0,25
2) **(1,0 điểm)** $\begin{cases}\sqrt{x+2}(x-y+3)=\sqrt{y} & (1)\\ x^2+(x+3)(2x-y+5)=x+16 & (2)\end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases}x\geq -2\\ y\geq 0\end{cases}$ Với x≥-2; y≥0, phương trình (1) $<=> \sqrt{x+2}(x-y+2)+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0$ $<=> \sqrt{x+2}[(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{y})^2]+\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0$	0,25
$(\sqrt{x+2}-\sqrt{y})[\underbrace{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{y})+1}_{>0\forall x\geq -2; y\geq 0}]=0$ $<=> \sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0$ $<=> x+2=y$	0,25
Thay y = x+ 2 vào phương trình (2) ta được phương trình: $x^2+(x+3)(2x-(x+2)+5)=x+16$ $<=> x^2+(x+3)^2=x+16$ $<=> 2x^2+5x-7=0$ $<=> \left[\begin{array}{l} x=1(TM) \\ x=\frac{-7}{2}(L) \end{array}\right.$	0,25
+) Với x=1=>y=3. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x;y)=(1;3)	0,25

Câu 4 ***(3,0 điểm)***

Đáp án	**Điểm**



1) *(1,0 điểm)* **a) (0,5 điểm)** Xét đường tròn (I) có AMH=ANH =90º (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên HM ,HN tương ứng là đường cao của các tam giác vuông ABH, ACH	0,25
+) ΔABH vuông tại H , có đường cao HM nên suy ra AM.AB= AH^2 . +) ΔACH vuông tại H , có đường cao HN nên suy ra AN. AC =AH^2. Do đó AM. AB =AN .AC	0,25
b)(0,5 điểm) Theo câu a) ta có $AM.AB = AN.AC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ Xét ΔAMN và ΔACB có A chung, $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ nên suy ra ΔAMN∽ ΔACB (c.g.c)	0,25
Do đó AMN= ACB=> BCN+ BMN= ACB +BMN= AMN +BMN =180^0 Mà các góc BCN;BMN , ở vị trí đối diện nên suy ra tứ giác BMNC nội tiếp.	0,25
2) *(1,0 điểm)* **a)** ***(0,5 điểm)*** Ta có tam giác ABC vuông tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên OA= OB =OC ⇒ ΔOAC cân tại O ⇒ OAC= OCA=> OAC =BCN Mà AMN= ACB= BCN = = nên AMN= OAC=> AMN= DAN	0,25
Vì ΔAMN vuông tại A nên AMN+ ANM=90º=> DAN +ANM=90º=> ADN = 90º Mà MAN = 90^0 ⇒ MN là đường kính của đường tròn (I) ⇒ I là trung điểm của MN nên ADI = 90º . Xét ΔAID và ΔAOH có ADI= AHO= 90^0 và A chung do đó ΔADI∽ ΔAHO (g.g)	0,25
b)(0,5 điểm) Vì ΔADI∽ ΔAHO $\Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{AO}{AH.AI}$ Mà $AO = \frac{1}{BC}; AI = \frac{1}{2}AH; \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{BC}{AH^2}$	0,25
Mặt khác , vì tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao nên AH^2= HB .HC.	0,25

$=> \dfrac{1}{AD} = \dfrac{HB+HC}{HB.HC} = \dfrac{1}{HB} + \dfrac{1}{HC}$	
3) ***(1,0 điểm)*** Vì tứ giác BMNC nội tiếp => PBM =MNC =>PBM +ANM =MNC+ANM =180^0 (1) Vì tứ giác ANMK nội tiếp $\Rightarrow$ PKM =ANM (2) Từ (1) và (2) suy ra PBM+ PKM =180^0, do đó tứ giác PKMB nội tiếp	0,5
$\Rightarrow$PKB =PMB= AMN= ACB =>AKB+ ACB= AKB+ PKB= 180^O Do đó tứ giác BKAC nội tiếp $\Rightarrow$ BKC= BAC= 90^0.	0,5

Câu 5 ***(1,0 điểm)***

Đáp án	Điểm
1) ***(0,5 điểm)*** Điều kiện xác định $\begin{cases}3x^2-6x-6\ge 0\\ 2-x\ge 0\end{cases} <=> x\le 1-\sqrt{3}$ Với $x\le 1-\sqrt{3}$, phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{3x^2-6x-6}=3(2-x)^2\sqrt{2-x}+(7-19)\sqrt{2-x}$ $<=> \sqrt{3x^2-6x-6}=(3x^2-5x-7)\sqrt{2-x}$ $<=> \sqrt{3x^2-6x-6}-\sqrt{2-x}=(3x^2-5x-7)\sqrt{2-x}$ $<=> \dfrac{3x^2-5x-8}{\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x}}=(3x^2-5x-7)\sqrt{2-x}$ $<=> \begin{cases}3x^2-5x-8=0\\ 1=\sqrt{2-x}(\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x})\end{cases}$ $(Do\ \sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x}>0\forall x\le 1-\sqrt{3})$	0,25
$+)3x^2-5x-8=0$ $<=> \left[\begin{array}{l}x=-1(\text{TM})\\ \text{x}=\dfrac{8}{3}(L)\end{array}\right.$ $+)1=\sqrt{2-x}(\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x})$ $<=> 1=2-\text{x}+\sqrt{2-x}\sqrt{3x^2-6x-6}$ $<=> x-1=\sqrt{2-x}\sqrt{3x^2-6x-6}(*)$ $Do\ \text{x}\le 1\text{-}\sqrt{3} => x-1<0\le\sqrt{2-x}\sqrt{3x^2-6x-6} => (*)\ VN$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\text{x}=-1$	0,25
2) ***(0,5 điểm)*** Ta có: $a^4+b^4\ge ab(\text{a}^2+b^2)\forall a;b\in R$ Thật vậy: $a^4+b^4\ge ab(\text{a}^2+b^2)$ $<=> \text{a}^4+b^4\ge a^3b+ab^3$ $<=> (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$ $<=> (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$ (luôn đúng $\forall a;b\in R$) $=> a^4+b^4+c\ge ab(a^2+b^2)+c <=> a^4+b^4+c\ge ab(a^2+b^2)+abc^2>0$ (vì a;b;c >0 và abc=1)	0,25

$<=>\dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c}{ab(a^2+b^2)+abc^2}(Vi\ c>0)<=>\dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c}{ab(a^2+b^2+c^2)}$ $<=>\dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c^2}{abc(a^2+b^2+c^2)}<=>\dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}(1)$	
Tương tự: $\dfrac{b}{a^4+c^4+b}\le\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}(2)$ $\dfrac{a}{b^4+c^4+a}\le\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}(3)$ Cộng theo vế các bất đẳng thức (1),(2) và (3) ta có: $\dfrac{a}{b^4+c^4+a}+\dfrac{b}{a^4+c^4+b}+\dfrac{c}{a^4+b^4+c}\le\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$ Vậy $T\le 1\ \ \forall a;b;c>0$ thỏa mãn abc=1 Với a=b=c=1 thì T=1 Vậy GTLN của T là 1	0,25

Đề số 32. Chuyên HCM. Năm học: 2015-2016

Câu 1. *(1,5 điểm)*

Cho hai số thực a , b thỏa điều kiện ab = 1, a +b $\neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(a+b)^3}(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3})+\frac{3}{(a+b)^4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})+\frac{6}{(a+b)^5}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$$

Câu 2. *(2,5 điểm)*

a) Giải phương trình: $2x^2+x+3=3x\sqrt{x+3}$

b) Chứng minh rằng: $abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)\,\vdots\,7\ \ \forall a,b,c\in R$

Câu 3. *(2 điểm)*

Cho hình bình hành ABCD . Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A vuông góc với BD tại F . Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt đường trung trực của AC tại E . Hai đường thẳng BC và EF cắt nhau tại K . Tính tỉ số $\dfrac{KE}{KF}$

Câu 4. *(1 điểm)*

Cho hai số dương a , b thỏa mãn điều kiện: a+b ≤ 1.

Chứng minh rằng: $a^2-\dfrac{3}{4a}-\dfrac{a}{b}\le\dfrac{-9}{4}$

Câu 5. *(2 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn ( ) O . Gọi M là trung điểm của cạnh BC và N là điểm đối xứng của M qua O . Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D . Kẻ đường kính AE . Chứng minh rằng:

a) Chứng minh BA.BC =2.BD. BE

b) CD đi qua trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC .

Câu 6. *(1 điểm)*

Mười vận động viên tham gia cuộc thi đấu quần vợt. Cứ hai người trong họ chơi với nhau đúng một trận. Người thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, người thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận, ..., người thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu quần vợt không có kết quả hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2$$

HẾT

Hướng dẫn giải

Câu 1.

Với ab = 1 , a + b ≠ 0, ta có:

$$P = \frac{a^3+b^3}{(a+b)^3(ab)^3} + \frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4(ab)^2} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}$$

$$= \frac{a^3+b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5}$$

$$= \frac{a^2+b^2-1}{(a+b)^2} + \frac{3(a^2+b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2+b^2-1)(a+b)^2+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2+b^2-1)(a^2+b^2+2)+3(a^2+b^2)+6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2+4(a^2+b^2)+4}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+2)^2}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{\left[(a+b)^2\right]^2}{(a+b)^4}$$

$$= 1$$

Vậy P = 1, với ab = 1 , a+b ≠ 0.

Câu 2a.

Điều kiện: $x \geq -3$

Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$2x^2-3x\sqrt{x+3}+(\sqrt{x+3})^2=0$

$<=> 2x^2-2x\sqrt{x+3}+(\sqrt{x+3})^2-x\sqrt{x+3}=0$

$<=> 2x(x-\sqrt{x+3})-\sqrt{x+3}(\text{x}-\sqrt{x-3})=0$

$<=> (x-\sqrt{x+3})(2x-\sqrt{x+3})=0$

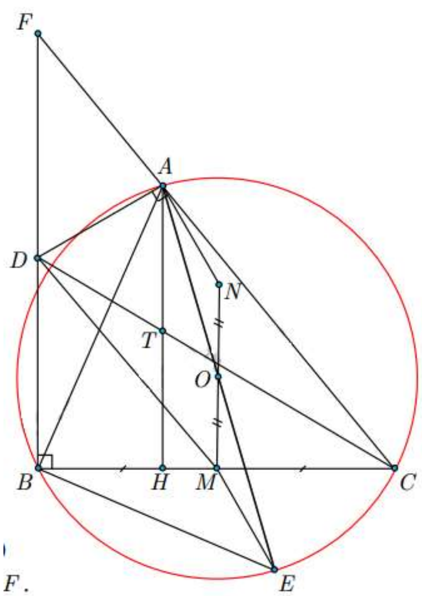
$<=> \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=x(1)\\ \sqrt{x+3}=2x(2)\end{array}\right.$

$\bullet(1):\sqrt{x+3}=x <=> \begin{cases}x\ge 0\\ x+3=x^2\end{cases} <=> \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\end{cases} <=> x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\bullet(2):\sqrt{x+3}=2x <=> \begin{cases}x\ge 0\\ x+3=4x^2\end{cases} <=> \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-3}{4}\end{array}\right.\end{cases} <=> x=1$

So với điều kiện ban đầu, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\left\{1;\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Câu 5.



a) Chứng minh BA . BC = 2BD . BE

• Ta có: DBA+ ABC = 90^0 , EBM +ABC = 90^0

⇒ DBA =EBM (1)

• Ta có: ΔONA = ΔOME (c-g-c)

⇒ EAN= MEO

Ta lại có: DAB +BAE+ EAN = 90^0, và BEM +BAE +MEO = 90^0

⇒ DAB= BEM (2)

• Từ (1) và (2) suy ra ΔBDA đồng dạng ΔBME (g-g)

$=> \dfrac{BD}{BM} = \dfrac{BA}{BE} => DB.BE = BA.\text{BM} = \dfrac{BA.BC}{2}$

$=> 2BD.BE = BA.BC$

b) CD đi qua trung điểm của đường cao AH của Δ ABC

• Gọi F là giao của BD và CA.

Ta có BD.BE= BA.BM (cmt)

$=> \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BM}{BE} => \Delta BDM \sim \Delta BAE(c-g-c)$

$=> BMD = BEA$

Mà BCF=BEA(cùng chắn AB)

=>BMD=BCF=>MD//CF=>D là trung điểm BF

• Gọi T là giao điểm của CD và AH .

ΔBCD có TH //BD $=> \dfrac{TH}{BD} = \dfrac{CT}{CD}$ (HQ định lí Te-let) (3)

ΔFCD có TA //FD $=> \dfrac{TA}{FD} = \dfrac{CT}{CD}$ (HQ định lí Te-let) (4)

Mà BD= FD (D là trung điểm BF) (5)

• Từ (3), (4) và (5) suy ra TA =TH ⇒T là trung điểm AH .

Đề số 33. Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên. Năm học: 2015-2016

Bài 1: (1,5 điểm)

Cho $A=\sqrt{3}-1;B=\sqrt{3}+1$

Tính giá trị của biểu thức $A+B;A.B;\frac{A}{B};A^2+B^2$ bằng cách rút gọn hoặc biến đổi thích hợp

Bài 2: (2,0 điểm) Giải hệ phương trình và phương trình:

$a)\,\mathrm{x}^2+5x-6=0$

$b)\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{5}\\ \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=\frac{-1}{3}\end{cases}$

Bài 3: (1,0 điểm)

Cho phương trình $x^4+2mx^2+4m+5=0(1)$. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 4: (1,5 điểm)

Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc tại một địa điểm: người thứ nhất đi về phía nam, người thứ hai đi về phía tây. Sau 4 giờ hai người cách nhau 100km theo đường chim bay. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng vận tốc của người thứ nhất nhỏ hơn vận tốc của người thứ hai 5km/h.

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy hai điểm C, D trên nửa đường tròn sao cho AC=BD (C nằm giữa A và D). Gọi E là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh hai tam giác ACE, BDE bằng nhau.
b) Chứng minh tứ giác AOEC, BOED nội tiếp.
c) Đường thẳng qua O vuông góc AD cắt CD tại F. Tứ giác AODF là hình gì? Vì sao?
d) Gọi G là giao điểm của AC và BD. Chứng minh O, E, G thẳng hàng.

——Hết——

ĐÁP ÁN

Bài 1:

Ta có:

$A+B=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{3}$

$AB=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3})^2-1^2=3-1=2$

$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=(2\sqrt{3})^2-2.2=12-4=8$

Bài 2:

$a)x^2+5x-6=0\,\mathbf{(1)}$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x, có tổng các hệ số a + b + c = 1 + 5 + (–6) = 0 nên có hai nghiệm $x_1=1;x_2=\frac{-6}{1}=-6$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{-6;1\}$

$b)\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{5}\\ \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=\frac{-1}{3}\end{cases}$

$<=>\begin{cases}\frac{5}{x}+\frac{5}{y}=8\\ \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=\frac{-1}{3}\end{cases}<=>\begin{cases}\frac{7}{x}=\frac{23}{3}\\ \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=\frac{-1}{3}\end{cases}<=>\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{23}{21}\\ 2.\frac{23}{21}-\frac{5}{y}=\frac{-1}{3}\end{cases}<=>\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{23}{21}\\ \frac{1}{y}=\frac{53}{105}\end{cases}<=>\begin{cases}x=\frac{21}{23}\\ y=\frac{105}{53}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất (x;y) = $\left(\frac{21}{23};\frac{105}{53}\right)$

Bài 3:

$x^4+2mx^2+4m+5=0(1)$

Đặt $t=x^2;t\geq 0$, phương trình (1) trở thành

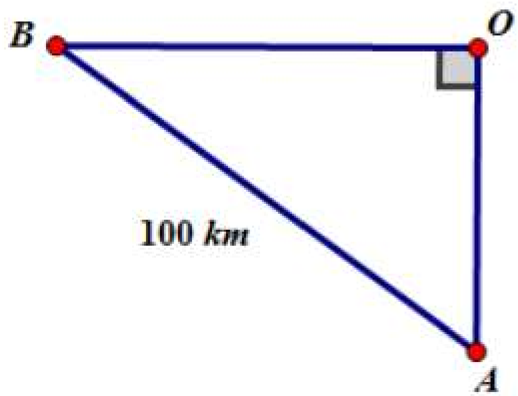
$t^2+2mt+4m+5=0(2)$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases}\Delta'=m^2-(4m+5)>0\\ S=-2m>0\\ P=4m+5>0\end{cases}<=>\begin{cases}m^2-4m+5>0\\ m<0\\ m>\frac{-5}{4}\end{cases}<=>\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>5\\ m<-1\end{array}\right.\\ m<0\\ m>\frac{-5}{4}\end{cases}<=>-\frac{5}{4}<m<-1$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là m ∈ $\left(\frac{-5}{4};-1\right)$

Bài 4:



Gọi O là điểm khởi hành của 2 xe.
Sau 4 giờ, người thứ nhất ở vị trí A, người thứ hai đang ở vị trí B và AB = 100km.
Gọi vận tốc của người thứ nhất là x (km / h) (x > 0)
Vì vận tốc của người thứ nhất nhỏ hơn vận tốc của người thứ hai 5km/h nên vận tốc của người thứ hai là x + 5 (km / h)
Quãng đường người thứ nhất đi trong 4 giờ là OA = 4x (km)
Quãng đường người thứ hai đi trong 4 giờ là OB = 4(x + 5) (km)
Vì Δ OAB vuông ở O nên ta có phương trình:

$OA^2 + OB^2 = AB^2$

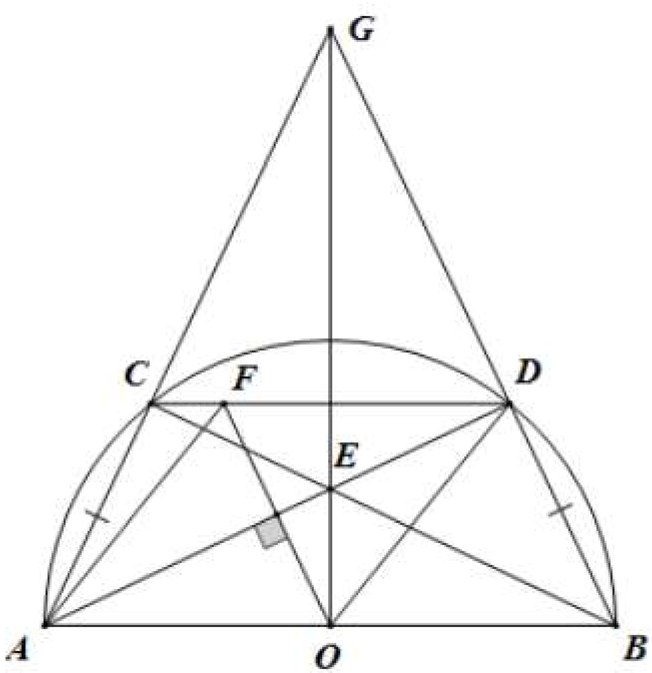
$<=> 16x^2 + 16(x+5)^2 = 100^2$

$<=> 2x^2 + 10x - 600 = 0$

$<=> 2(x-15)(x+20) = 0$

⇔ x = 15 (thỏa mãn) hoặc x = –20 (loại)
Vậy vận tốc của người thứ nhất là 15 km /h và của người thứ hai là 20 km /h.

Bài 5:



a) Vì C, D thuộc đường tr n đường kính AB nên:

ACB=ADB=90º (góc nội tiếp chắn nửa đường tr n)

⇒ Hai tam giác ACE và BDE vuông

=>CAE+AEC=90º;DBE+BED=90º

Mà AEC=BED (hai góc đối đỉnh) nên CAE =DBE

Xét Δ ACE và Δ BDE có:

$$\begin{cases} ACE = BDE = 90^o (\text{cmt}) \\ \text{AC} = \text{BD(gt)} \\ \text{CAE} = \text{DBE(cmt)} \end{cases} => \Delta ACE = \Delta BDE(g.c.g)$$

b) Vì Δ ACE = Δ BDE nên AE = BE (hai cạnh tương ứng)

Mà OA = OB nên OE là đường trung trực của đoạn AB

=>AOE=90º

Tứ giác AOEC có tổng hai góc đối AOE+ACE=90º+90º=180º nên AOEC là tứ giác nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có BOED là tứ giác nội tiếp.

c) Vì EA = EB (cmt) nên Δ ABE cân ở E

=>EAB=EBA (1)

Vì ACDB là tứ giác nội tiếp nên

EAB=ECD (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)(2)

Từ (1) và (2) ⇒ ECD=EBA

⇒ CD // AB (3)

Vì OF ⊥ AD, BD ⊥ AD nên OF // BD (4)

Từ (3) và (4) ⇒ OFDB là hình bình hành

⇒ DF = OB = OA

Mà DF // OA nên tứ giác AODF là hình bình hành

Hình bình hành AODF có hai đường chéo OF và AD vuông góc với nhau nên nó là hình thoi.

d) Vì Δ ACE = Δ BDE nên CAE=DBE

Mà EAB=EBA (cmt) nên CAE+EAB=DBE+EBA=>CAB=DBA

⇒ Δ GAB cân ở G

⇒ GA = GB

⇒ G thuộc đường trung trực của đoạn AB.

⇒ G ∈ OE

⇒ O, E, G thẳng hàng.

Đề số 34. Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức: $A = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x-1} + \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$
2. Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=2m+1 \\ 4x+2y=5m-1 \end{cases}$
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol (P): $y = x^2$ cắt đường thẳng d: $y = mx - 2$ tại 2 điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2-9} - \sqrt{x^2-16} = 1$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(1+x^2) \end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB,AC,BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K.

1. Tính số đo góc BIF
2. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE .

a. Khi AM = AB, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A,O,H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.

b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge 3$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY – NINH BÌNH

Câu 1.

1. Ta có:

$$A=\frac{1}{x+\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x-1}+\frac{1}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}-\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}+\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)-2\sqrt{x}\sqrt{x}+(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{-2x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy A= $\frac{-2}{\sqrt{x}+1}$

2. $B=\sqrt[3]{85+62\sqrt{7}}+\sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$

Đặt $a=\sqrt[3]{85+62\sqrt{7}};b=\sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$ => $a+b=B$

Mặt khác:

$$a^3+b^3=(85+62\sqrt{7})+(85-62\sqrt{7})=170$$

$$ab=\sqrt[3]{85+62\sqrt{7}}\sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}=\sqrt[3]{85^2-(62\sqrt{7})^2}=\sqrt[3]{-19683}=-27$$

Ta có:

$$B^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$=170-3.27.B$$

$$=> B^3+81B-170=0$$

$$=> (B-2)(\underbrace{B^2+2B+85}_{>0})=0$$

$$=> B=2$$

Vậy B=2

Câu 2.

1. $\begin{cases}x+2y=2m+1\\4x+2y=5m-1\end{cases}$ (I)

$$(I)<=>\begin{cases}m=\dfrac{x+2y-1}{2}\\m=\dfrac{4x+2y+1}{5}\end{cases} => \frac{x+2y-1}{2}=\frac{3x+2y+1}{5}$$

$$=> 5(x+2y-1)=2(4x+2y+1) => 3x-6y+7=0$$

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên (x_0; y_0) thì

$3x_0 - 6y_0 + 7 = 0 \Rightarrow 6y_0 - 7 = 3x_0 \vdots 3 \Rightarrow 7 \vdots 3$ (vô lí)

Vậy hệ phương trình không có nghiệm nguyên ∀ m.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - mx + 2 = 0\,(1)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt A(x_1;y_1) và B(x_2;y_2) ⇔ (1) có hai nghiệm phân biệt

⇔ $\Delta = m^2 - 4.2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow m > 2\sqrt{2}$ hoặc $m < -2\sqrt{2}$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của (1). Áp dụng định lí Vi–ét ta có $x_1 + x_2 = m$; $x_1x_2 = 2$.

Do A, B ∈ d nên $y_1 = mx_1 - 2$ và $y_2 = mx_2 - 2$.

Ta có:

$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_1) - 1$

$\Leftrightarrow mx_1 - 2 + mx_2 - 2 = 2(x_1 + x_2) - 1$

$\Leftrightarrow (m-2)(x_1 + x_2) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow m(m-2) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$

⇔ m = –1 (loại) hoặc m = 3 (thỏa mãn)

Vậy m = 3 là giá trị cần tìm.

Câu 3.

1. $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1\,(1)$

ĐK: $x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$.

$(I) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 16} + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x^2 - 16 + 2\sqrt{x^2 - 16} + 1$

$\Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{x^2 - 16}$

$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2 - 16}$

$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm 5$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là S={–5;5}.

2. $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$ (I)

– Xét x = 0, hệ (I) trở thành $\begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$

– Xét x ≠ 0, đặt $\dfrac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3t^3 + 16x \\ 1 + x^2t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4)(1) \\ 4 = x^2(t^2 - 5)(2) \end{cases}$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$4x^3(t^3-1)=4x^3(t-4)(t^2-5)$

$<=> t^3-1=t^3-4t^2-5t+20$ (Do $x \neq 0$)

$<=> 4t^2+5t-21=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$

+ Với t = – 3, thay vào (2) được $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

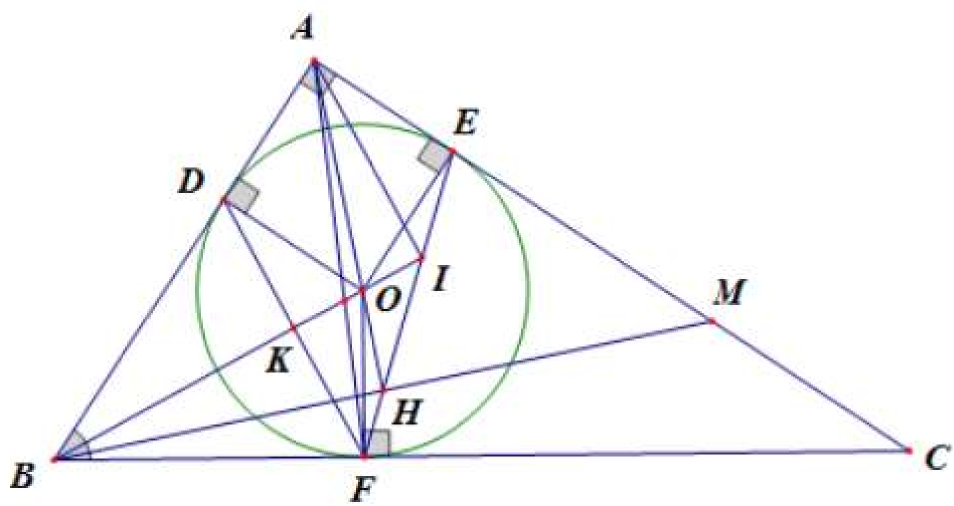
x = 1 thì y = –3, thử lại (1;–3) là một nghiệm của (I)

x = –1 thì y = 3, thử lại (–1;3) là một nghiệm của (I)

+ Với t = $\dfrac{7}{4}$, thay vào (2) được $x^2=-\dfrac{64}{31}$ (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm (0;2), (0;–2), (1;–3), (–1;3).

Câu 4.



1. Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) nên OD ⊥ BD, OF ⊥ BF.

Xét 2 tam giác vuông OBD và OBF có

$\left.\begin{array}{l} OB \text{ chung} \\ \text{OBD=OBF(gt)} \end{array}\right\} => \Delta OBD = \Delta OBF$ (cạnh huyền–góc nhọn)

⇒ BD = BF

Mà OD = OF = r nên OB là trung trực của DF ⇒ OB ⊥ DF ⇒ Δ KIF vuông tại K.

Mà OD = OF = r nên OB là trung trực của DF ⇒ OB ⊥ DF ⇒ Δ KIF vuông tại K. $DOE = 90^o$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cho đường tròn (O), ta có:

$DFE=\dfrac{1}{2}DOE=45^o$

⇒ Δ KIF vuông cân tại K.

=>BIF=45°

2.

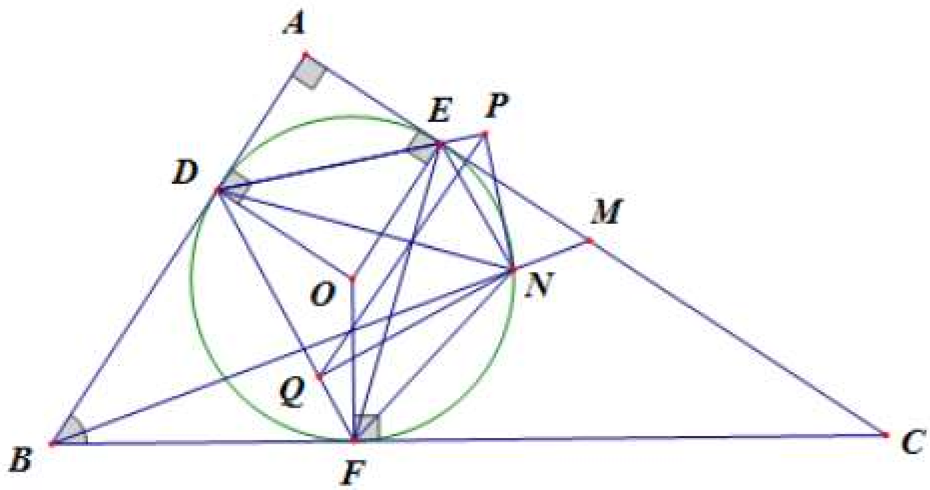
a. Hình chữ nhật ADOE có OD = OE = r nên nó là hình vuông

⇒ AO là trung trực DE (1)

Vì AB = AM nên tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra ABM = 45°

=>DBH=DFH=45°

⇒ BDHF là tứ giác nội tiếp (2)
Vì BDO+BFO=90º+90º=180º nên BDOF là tứ giác nội tiếp (3)
Từ (2) và (3) ⇒ 5 điểm B, D, O, H, F nằm trên một đường tròn.
=>BHO=BFO=90º
⇒ OH ⊥ BM.
Mặt khác ADE=ABM=45º=>DE//BM⇒ OH ⊥ DE
Mà OD = OE nên OH là trung trực của đoạn OE (4)
Từ (1) và (4) ⇒ A, O, H thẳng hàng.
b.



Vì DPN+DQN=90º+90º=180º nên DPNQ là tứ giác nội tiếp
=>QPN=QDN (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN) (5)
Mặt khác DENF là tứ giác nội tiếp nên QDN=FEN (6)
Từ (5) và (6) ta có FEN=QPN (7)
Tương tự ta có: EFN=PQN (8)
Từ (7) và (8) suy ra $\Delta NPQ \sim \Delta NEF (g.g) => \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NF}$
Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có
$NQ \le NF => \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{NQ}{NF} \le 1 => PQ \le EF$
Dấu bằng xảy ra khi Q ≡ F ⇔ NF ⊥ DF ⇔ D, O, N thẳng hàng.
Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN, với N là điểm đối xứng với D qua O.

Câu 5.

Ta chứng minh BĐT
$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9(*)$
$(*) <=> 3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}) \ge 9$
Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương ta có:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$

$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$

=>(*) đúng

$=> \frac{9}{a+b+c}\leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq 3 => a+b+c\geq 3$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương ta có $1+b^2\geq 2b$

Ta có:

$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}(1)$

Tương tự ta có:

$\frac{b}{1+c^2}\geq b-\frac{bc}{2}(2)$

$\frac{c}{1+a^2}\geq c-\frac{ca}{2}(3)$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$=> \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geq a+b+c\geq 3$

=>đpcm

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1.

Đề số 35. Chuyên Nguyễn Du - Đaklak. Năm học: 2015-2016

Câu 1 ***(2,0 điểm)***

Cho phương trình $x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi m = 0

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt x_1; x_2; x_3; x_4 thỏa mãn điều kiện

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 240$

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5 \end{cases}$

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x+1}$

Câu 3 ***(2,0 điểm)***

a) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$

b) Tìm số tự nhiên bé nhất có 4 chữ số biết nó chia hết cho 7 được số dư là 2 và bình phương của nó chia hết cho 11 được số dư là 3.

Câu 4 ***(3,0 điểm)***

a) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hai đường thẳng BH, CH cắt đường tròn (I) lần lượt tại hai điểm P và Q (P khác B và Q khác C)

1, Chứng minh IA ⊥ PQ

2, Trên hai đoạn HB và HC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho AM ⊥ MC, AN ⊥ NB. Chứng minh Δ AMN cân

b) Cho tam giác ABC có $BAC = 2CBA = 4ACB$. Chứng minh $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$

Câu 5 ***(1,0 điểm)*** Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} > 2015$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) Khi m = 0 ta có phương trình:

$(*) \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 8 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 2\sqrt{2} \\ x^2 - 4 = -2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \\ x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}; \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right\}$

b) Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$ ta có $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2(m+4)t + m^2 + 8 = 0$ (**)

Với t = 0 ⇒ x = 0 và mỗi giá trị t > 0 cho 2 giá trị của x nên (*) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ (**) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+4)^2 - (m^2 + 8) > 0 \\ S = 2(m+4) > 0 \\ P = m^2 + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 8 > 0 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Giả sử t_1, t_2 là 2 nghiệm của (**) thì theo Viét ta có $t_1 + t_2 = 2(m + 4)$; $t_1t_2 = m^2 + 8$

Giả sử 4 nghiệm của (*) là $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$. Suy ra

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 240 \Leftrightarrow 2(t_1^2 + t_2^2) = 240 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 120 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2 = 120$$
$$\Leftrightarrow [2(m+4)]^2 - 2(m^2 + 8) = 120 \Leftrightarrow 2m^2 + 32m - 72 = 0$$

⇔ m = 2 (thỏa mãn) hoặc m = –18 (loại)

Vậy m = 2.

Câu 2 ***(2,0 điểm)***

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7(1) \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5(2) \end{cases} (I)$

+) Nếu x = 0, ta có $0^3 + 6.0^2.y = 0 \neq 7$, nên $x \neq 0$

+) Với $x \neq 0$, đặt y = xt ta có

$$\begin{cases} x^3+6x^2y=7(1) \\ 2y^3+3xy^2=5(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+6x^3t=7(1) \\ 2x^3t^3+3x^3t=5(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+6x^3t}{2x^3t^3+3x^3t}=\frac{7}{5} \Leftrightarrow 14t^3-9t-5=0 \Leftrightarrow (t-1)(14t^2+14t+5)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1(14t^2+14t+5=0vn)$$

Do đó y = x, nên ta có:

$7x^3=7 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Vậy hệ có 1 nghiệm duy nhất (1;1)

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+12}=2x-4+\sqrt{x+1}$ (1)

Điều kiện: $x \geq -1$. Có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+12}-\sqrt{x+1}=2x-4$ (2)

Xét $\left(x^2+4x+12\right)-\left(x+1\right)=x^2+3x+11=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{35}{4}>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+4x+12}>\sqrt{x+1}$

Do đó từ (2) $\Rightarrow 2x-4>0 \Rightarrow x>2$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x>2(*) \\ (x^2+4x+12)-2\sqrt{x^2+4x+12}.\sqrt{x+1}+(x+1)=4(x^2-4x+4)(3) \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x^2+4x+12}=a; \sqrt{x+1}=b(a,b>0) \Rightarrow a^2-8b^2=x^2-4x+4$

$$(3) \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=4(a^2-8b^2) \Leftrightarrow 3a^2+2ab-33b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)(3a+11b)=0 \Leftrightarrow a=3b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+12}=3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2+4x+12=9x+9$$

$\Leftrightarrow x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ (không thỏa mãn (*)) hoặc $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là S= $\left\{\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Câu 3

a) Ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{617} \Leftrightarrow xy-617(x+y)=0 \Leftrightarrow xy-617x-617y+617^2=617^2$$

$$\Leftrightarrow (x-617)(y-617)=617^2$$

Vì x, y nguyên dương nên x – 617 và y – 617 là ước lớn hơn –617 của 617^2.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-617=617\\y-617=617\end{cases}\\\begin{cases}x-617=1\\y-617=617^2\end{cases}\\\begin{cases}x-617=617^2\\y-617=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1234\\x=618;y=381306\\x=381306;y=618\end{array}\right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là (1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

b) Gọi x là số cần tìm $(x\in N,1000\le x\le 9999)$

Vì x^2 chia cho 11 dư 3, nên x chia cho 11 dư 5 hoặc dư 6

+) Nếu x^2 chia cho 11 dư 5 nên x – 5 ⋮ 11 => x -5 + 66 = x + 61⋮ 11

Lại có x^2 chia cho 7 dư 2 => x – 2 ⋮7 => x - 2+ 63 = x + 61 ⋮7

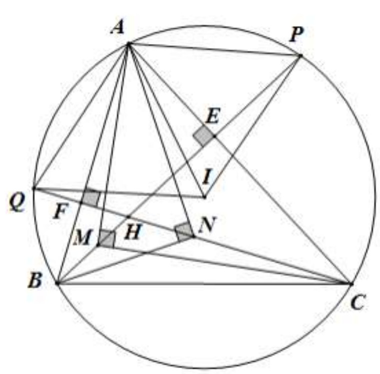
Do đó x + 61 ϵ BC(11;7) => x + 61 = 77k => x = 77k – 61 (kϵ N)

Vì $(x\in N,1000\le x\le 9999)$ => 1000 ≤ 77k – 61 ≤ 9999 => 14 ≤ k ≤ 130

Mà x bé nhất, nên chọn k = 14 => x = 77.14 – 61 = 1017

Vậy số cần tìm là 1017

Câu 4



a) Gọi E, F lần lượt là giao của BH và AC, CH và AB.

1, Ta có ABE = ACF = 90° – BAC suy ra số đo hai cung AP và AQ của đường tròn (I) bằng nhau

$\Rightarrow$ AP = AQ

Mà IP = IQ nên IA là trung trực PQ $\Rightarrow$ IA $\perp$ PQ.

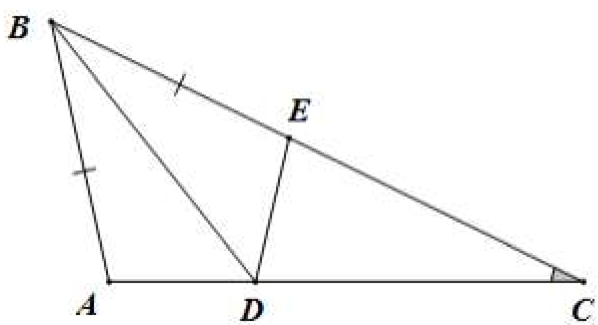
2, Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMC ta có: $AM^2 = AE.AC$

Tương tự ta có: $AN^2 = AF.AB$.

Có $\Delta ABE \sim \Delta ACF(g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AB.AF \Rightarrow AM^2 = AN^2$

Suy ra AM = AN. Tam giác AMN cân tại A.

b)



Đặt C = α => ABC = 2α; A = 4α

Gọi BD là phân giác của góc ABC (D ∈ AC). E thuộc đoạn BC sao cho BE = BA

Ta có ABD = EBD = α $\Rightarrow$ Δ BDC cân tại D $\Rightarrow$ BD = DC

ΔABD = ΔAED (c.g.c) => BED = A = 4α (1)

Vì ABD = C = α => ΔABD ~ ΔACB (g.g) => ADB = ABC = 2α

=> EDB = ADB = 2α => ADE = 4α (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BED = ADE = 4α => CED = CDE = 180° - 4α. Suy ra Δ CED cân tại C

Suy ra CE = CD $\Rightarrow$ BC – BE = BD $\Rightarrow$ BD = BC – BA (3)

Vì $\Delta ABD \sim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \frac{CB.AB}{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$BC - BA = \frac{CB.AB}{AC} \Rightarrow \frac{BC - BA}{BC.BA} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{BA} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$

Câu 5

Với mọi a, b > 0 và x, y, z thỏa điều kiện đề bài, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\,(*)$$

$$\left(x^2+y^2\right)+\left(y^2+z^2\right)+\left(z^2+x^2\right)\geq 2xy+2yz+2zx\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq 3\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow xy+yz+zx\leq\frac{\left(x+y+z\right)^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Áp dụng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$P=\frac{350}{xy+yz+zx}+\frac{386}{x^2+y^2+z^2}=386\left(\frac{1}{2xy+2yz+2zx}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$\geq 386.\frac{4}{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$=\frac{1544}{(x+y+z)^2}+\frac{157}{xy+yz+zx}=1544+\frac{157}{xy+yz+zx}\geq 1544+\frac{157}{\frac{1}{3}}=2015$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z\\x+y+z=1\\2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z=\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}$ (không xảy ra)

Vậy P > 2015 (đpcm)

Đề số 36. Chuyên Hải Dương. Năm học: 2015-2016

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a-b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=a^2(a+1)-b^2(b-1)-11ab+2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x} \\ x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2} \end{cases}$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4+x^2-y^2-y+20=0$.

2) Tìm các số nguyên k để $k^4-8k^3+23k^2-26k+10$ là số chính phương.

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Câu V (1,0 điểm) Cho a,b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

--------------------------Hết---------------------------

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a-b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A=a^2(a+1)-b^2(b-1)-11ab+2015$$

$a-b=\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}-2\sqrt{5}=3$

$A=a^3-b^3+a^2+b^2-11ab+2015$

$=(a-b)(a^2+b^2+ab)+a^2+b^2-11ab+2015$

$=3(a^2+b^2+ab)+a^2+b^2-11ab+2015$

$=4(a^2-2ab+b^2)+2015=4(a-b)^2+2015=2051$

2) Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1.$

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0.$

$xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1\Leftrightarrow\sqrt{(1+x)^2(1+y)^2}=1-xy$

$\Rightarrow(1+x^2)(1+y^2)=(1-xy)^2$

$\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2=1-2xy+x^2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=0\Leftrightarrow(x+y)^2=0\Leftrightarrow y=-x$

$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=x\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}=0$

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}.$

Pt$\Leftrightarrow$ $2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}.$ ĐK: $x\geq-\dfrac{1}{4}$

Đặt $t^2=8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9\Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=\dfrac{t^2-9}{4}$

PTTT $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1$ hoặc t = 3

TH1. t = 1 giải ra vô nghiệm hoặc kết hợp với ĐK $t\geq\sqrt{7}$ bị loại

TH 2. $t=3\Rightarrow 2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3.$ Giải pt tìm được $x=-\dfrac{2}{9}$ (TM)

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{2}{9}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$

ĐK: $y - 2x + 1 \geq 0, 4x + y + 5 \geq 0, x + 2y - 2 \geq 0, x \leq 1$

TH 1. $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$ (Không TM hệ)

TH 2. $x \neq 1, y \neq 1$ Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1) = \frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}}$$

$(x+y-2)\left[\dfrac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y - 2x + 1\right] = 0$. Do $y - 2x + 1 \geq 0$

nên $\dfrac{1}{\sqrt{y-2x+1} + \sqrt{3-3x}} + y - 2x + 1 > 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

Thay $y = 2 - x$ vào pt thứ 2 ta được $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x+7} - \sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x+7} - 1 + 2 - \sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = \dfrac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1} + \dfrac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$

$\Leftrightarrow (x+2)\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1 - x\right] = 0$

Do $x \leq 1$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1 - x > 0$

Vậy $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4$ (TMĐK)

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0.$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$

Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2(x^2+1) < y(y+1) \leq (x^2+4)(x^2+5)$

Vì x, y ∈ $\mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

+ TH1. $y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$

$\Leftrightarrow y = 10; y = -11(t.m)$

+ TH2. $y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2}$ (loại)

+ TH3. $y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$ (loại)

+ TH4. $y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên (x;y) là :

(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Đặt $M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$

Ta có $M = (k^4 - 2k^2 + 1) - 8k(k^2 - 2k + 1) + 9k^2 - 18k + 9$

$= (k^2-1)^2 - 8k(k-1)^2 + 9(k-1)^2 = (k-1)^2.\left[(k-3)^2 + 1\right]$

M là số chính phương khi và chỉ khi $(k-1)^2 = 0$ hoặc $(k-3)^2 + 1$ là số chính phương.

TH 1. $(k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$

TH 2. $(k-3)^2 + 1$ là số chính phương, đặt $(k-3)^2 + 1 = m^2 (m \in \mathbb{Z})$

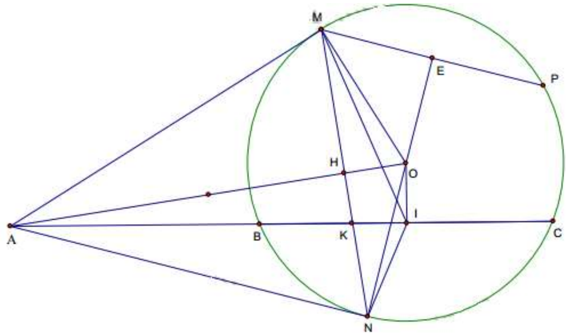
$\Leftrightarrow m^2 - (k-3)^2 = 1 \Leftrightarrow (m-k+3)(m+k-3) = 1$

Vì $m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m-k+3 \in \mathbb{Z}, m+k-3 \in \mathbb{Z}$ nên

$\begin{cases} m-k+3=1 \\ m+k-3=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m-k+3=-1 \\ m+k-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1, k=3 \\ m=-1, k=3 \end{array}\right. \Rightarrow k = 3$

Vậy k = 1 hoặc k = 3 thì $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.



1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

Theo giả thiết AMO = ANO = AIO = 90º = > 5 điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO 0,25

=> AIN = AMN, AIM = ANM (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)

AM = AN => ΔAMN cân tại A => AMN = ANM

=> AIN = AIM => đpcm

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

$$\frac{2}{AK}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\Leftrightarrow 2AB.AC=AK(AB+AC)\Leftrightarrow AB.AC=AK.AI$$

(Do AB+ AC = 2AI)

ΔABN đồng dạng với ΔANC => AB.AC = AN^2

ΔAHK đồng dạng với ΔAIO => AK.AI = AH.AO

Tam giác ΔAMO vuông tại M có đường cao MH => AH.AO = AM^2

=> AK.AI = AM^2 . Do AN = AM => AB.AC = AK.AI

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Ta có AN $\perp$ NO, MP $\perp$ NO, M $\notin$ AN => AN // MP

Do đó AMPN là hình bình hành ⇔ AN = MP = 2x

Tam giác ΔANO đồng dạng với ΔNEM => $\frac{AN}{NE}=\frac{NO}{EM}$ => $NE=\frac{2x^2}{R}$

TH 1.NE = NO – OE => $\frac{2x^2}{R}=R-\sqrt{R^2-x^2}\Leftrightarrow 2x^2=R^2-R\sqrt{R^2-x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2-x^2}=t, t\ge 0 \Rightarrow x^2=R^2-t^2$.

PTTT $2(R^2-t^2)=R^2-\text{R}\,t \Leftrightarrow 2t^2-Rt-R^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=-R\\ t=R\end{array}\right.$

Do $t\ge 0 \Rightarrow t=R \Leftrightarrow \sqrt{R^2-x^2}=R \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow A\equiv B$ (loại)

TH 2 NE = NO + OE => $\dfrac{2x^2}{R}=R+\sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow 2x^2=R^2+R\sqrt{R^2-x^2}$

Đặt $\sqrt{R^2-x^2}=t, t\ge 0 \Rightarrow x^2=R^2-t^2$.

PTTT $2(R^2-t^2)=R^2+Rt \Leftrightarrow 2t^2+Rt-R^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=R\\ t=-R\end{array}\right.$

Do $t\ge 0 \Rightarrow 2t=R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2-x^2}=R \Leftrightarrow x=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ => $AO=2R$ (loại)

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hbh

Câu V (1,0 điểm) Cho a,b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3+4ab\le 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$.

Ta có $12\ge (a+b)^3+4ab\ge \left(2\sqrt{ab}\right)^3+4ab$. Đặt $t=\sqrt{ab}, t>0$ thì

$12\ge 8t^3+4t^2 \Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+3t+3)\le 0$

Do $2t^2+3t+3>0, \forall t$ nên $t-1\le 0 \Leftrightarrow t\le 1$. Vậy $0<ab\le 1$

Chứng minh được $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\le \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Thật vậy, BĐT $\dfrac{1}{1+a}-\dfrac{1}{1+\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{1+b}-\dfrac{1}{1+\sqrt{ab}}\le 0$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})}+\frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})}\le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}\right)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)}\le 0$. Do $0<ab\le 1$ nên BĐT này đúng

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+2015ab\le 2016,\forall a,b>0$ thỏa mãn $ab\le 1$

Đặt $t=\sqrt{ab},0<t\le t$ ta được $\frac{2}{1+t}+2015t^2\le 2016$

$2015t^3+2015t^2-2016t-2014\le 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2+4030t+2014)\le 0$. BĐT này đúng $\forall t:0<t\le 1$

Vậy $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+2015ab\le 2016$. Đẳng thức xảy ra a = b = 1

Đề số 37. Chuyên Quảng Bình. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,0 điểm) Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{8x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ với } x>0,\ x\neq 1,\ x\neq 4$$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để P = –1

Câu 2 (2,5 điểm)

a) Giải phương trình $x^2+x-4\sqrt{3x+1}+6=0$

b) Trong hệ tọa độ Oxy, cho Parabol (P): y = x^2 và đường thẳng (d): y = 2mx + 2 (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho $S_{OAB}=2\sqrt{6}$

Câu 3 (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 11. Tìm GTNN

$$P=\frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)}+\sqrt{12(b^2+11)}+\sqrt{c^2+11}}$$

Câu 4 (1,0 điểm) Tìm số tự nhiên n biết n + S(n) = 2015, với S(n) là tổng các chữ số của n.

Câu 5 (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H và cắt (O) tại M,N, P.

a) Chứng minh M đối xứng H qua BC.

b) Chứng minh (AHB) = (BHC) = (CHA) ((AHB) là đường tròn đi qua ba điểm A,H,B)

c) Tính $T=\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CP}{CF}$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHUYÊN QUẢNG BÌNH NĂM 2015 – 2016

Câu 1

a) Ta có:

$$P=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}-\frac{8x}{4-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{4\sqrt{x}.(2+\sqrt{x})-8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}:\frac{\sqrt{x}-4+(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\frac{-4x+8\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}:\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}-2}$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $P=\dfrac{2x}{\sqrt{x}-1}$

b) ĐKXĐ của P là x > 0, x ≠ 1, x ≠ 4.

$$P=-1\Leftrightarrow\frac{2x}{\sqrt{x}-1}=-1\Leftrightarrow 2x=1-\sqrt{x}\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy P = –1 $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Câu 2

a) $x^2+x-4\sqrt{3x+1}+6=0$ (1)

ĐK: $3x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\dfrac{1}{3}$

$$(1)\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(3x+1-4\sqrt{3x+1}+4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ \sqrt{3x+1}-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

(thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là {1}.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - 2mx - 2 = 0 \ (1)$$

Có $\Delta' = m^2 + 2 > 0 \ \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt ⇒ (P) luôn cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lí Vi–ét: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = -2$.

Do A, B ∈ d nên $y_1 = 2mx_1 + 2$; $y_2 = 2mx_2 + 2$

Tính S_{OAB}: Ta có

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2mx_1 - 2mx_2)^2$$
$$= (1+4m^2)(x_1 - x_2)^2 = (1+4m^2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]$$
$$= (1+4m^2)(4m^2+8)$$
$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{(4m^2+1)(m^2+2)}$$
$$d(O;AB) = d(O;d) = \frac{|0-0+2|}{\sqrt{(2m)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{4m^2+1}}$$
$$\Rightarrow S_{ABO} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2+2} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy m = ±2 là giá trị cần tìm.

Câu 3

Thay 11 = ab + bc + ca vào P, ta có:

$$P = \frac{5a+5b+2c}{\sqrt{12(a^2+11)} + \sqrt{12(b^2+11)} + \sqrt{c^2+11}}$$
$$= \frac{5a+5b+5c}{\sqrt{12(a^2+ab+bc+ca)} + \sqrt{12(b^2+ab+bc+ca)} + \sqrt{c^2+ab+bc+ca}}$$
$$= \frac{5a+5b+5c}{2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}} (*)$$

Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \le 3(a+b) + (a+c) = 4a + 3b + c \qquad (1)$$

Tương tự:

$2\sqrt{3(b+a)(b+c)} \le 4b+3a+c$ (2)

$\sqrt{(c+a)(c+b)} \le \frac{1}{2}(a+b+2c)$ (3)

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$2\sqrt{3(a+b)(a+c)}+2\sqrt{3(b+a)(b+c)}+\sqrt{(c+a)(c+b)} \le \frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c$ (**)

Từ (*) và (**) ta có

$$P \ge \frac{5a+5b+2c}{\frac{15}{2}a+\frac{15}{2}b+3c}=\frac{2}{3}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b)=a+c \\ 3(b+a)=b+c \\ c+a=c+b \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{c}{5} \\ ab+bc+ca=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=5 \end{cases}$

Vậy GTNN của P là $\frac{2}{3}$,đạt được khi a = b = 1, c = 5.

Câu 4

Vì n + S(n) = 2015 nên n ≤ 2015 ⇒ n có nhiều nhất 4 chữ số

⇒ S(n) ≤ 9 + 9 + 9 + 9 = 36

⇒ n = 2015 – S(n) ≥ 2015 – 36 = 1979.

Xét 2 TH:

- TH1: 1979 ≤ n ≤ 1999. Đặt $n=\overline{19ab}$ (0 ≤ a,b ≤ 9)

n + S(n) = 2015 ⇔ $\overline{19ab}+1+9+a+b=2015$ ⇔ 11a + 2b = 105 ⇔ 11a = 105 – 2b

Ta có 105 – 2b lẻ và 105 – 2b ≥ 105 – 2.9 = 87 ⇒ a lẻ và 11a ≥ 87

⇒ a = 9 ⇒ b = 3 ⇒ n = 1993

- TH2: 2001 ≤ n ≤ 2015. Đặt n = $\overline{20cd}$ (0 ≤ c,d ≤ 9)

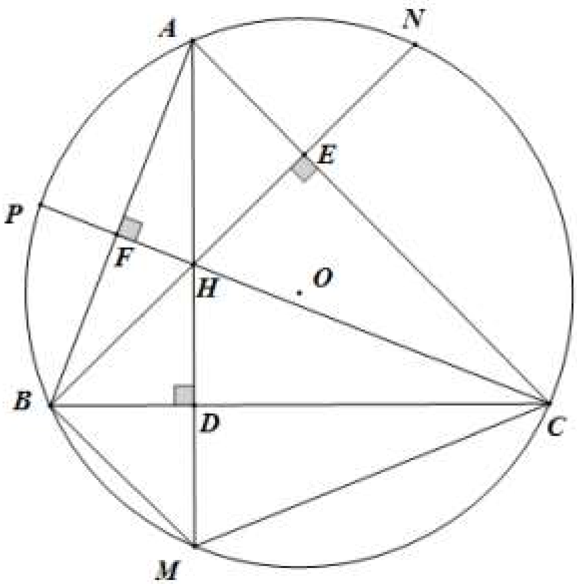
n + S(n) = 2015 ⇔ $\overline{20cd}+2+0+c+d=2015$ ⇔ 11c + 2d = 13

Vì 11c ≤ 13 và 11c = 13 – 2d lẻ nên c = 1 ⇒ d = 1

⇒ n = 2011

Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là n = 1993 và n = 2011

Câu 5



a) Vì 2 tam giác BEC và ADC vuông nên

HBD = DAC (cùng phụ với góc C) (1)

Vì ABMC là tứ giác nội tiếp nên

DAC = MBD (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra

HBD = MBD

Suy ra BD là phân giác của góc HBM. Tam giác HBM có BD vừa là đường cao vừa là phân giác, nên nó là tam giác cân tại B.

⇒ D là trung điểm HM

Mà HM ⊥ BC nên M đối xứng với H qua BC.

b) Vì M đối xứng với H qua BC nên HB = MB; HC = MC

⇒ Δ HBC = Δ MBC

⇒ (HBC) = (MBC) = (O)

Tương tự ta có:

(HAB) = (HAC) = (O)

Vậy (AHB) = (BHC) = (CHA) = (O)

c) Ta có:

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AD+DM}{AD}=1+\frac{DM}{AD}=1+\frac{HD}{AD}$$

Mặt khác:

$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BC.HD}{\frac{1}{2}BC.AD}=\frac{HD}{AD}$$

Suy ra $\frac{AM}{AD}=1+\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$ (3)

Tương tự ta có:

$$\frac{BN}{BE}=1+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} \quad (4)$$

$$\frac{CP}{CF}=1+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} \quad (5)$$

Cộng từng vế của (3), (4) và (5) ta có

$$T=\frac{AM}{AD}+\frac{BN}{BE}+\frac{CP}{CF}=3+\frac{S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=3+\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=4.$$

Đề số 38. Chuyên Quảng Nam. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ (với x ≠ 1; x ≥ 0). Rút gọn A, sau đó tính giá trị A – 1 khi $x=2016+2\sqrt{2015}$

b) Cho $A=2\left(1^{2015}+2^{2015}+...+n^{2015}\right)$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho n(n + 1)

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\dfrac{6}{x^2-9}+\dfrac{4}{x^2-11}-\dfrac{7}{x^2-8}-\dfrac{3}{x^2-12}=0$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+4)(4x+y)=6 \\ x^2+8x+y=-5 \end{cases}$

Câu 3. (1 điểm) Cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (d): y = bx + c với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác vuông trong đó a là độ dài cạnh huyền. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x1 và x2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2<2$

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Các tia phân giác các góc EHB, DHC cắt AB, AC lần lượt tại I và K. Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại M.

a) Chứng minh AI = AK.

b) Giả sử tam giác nhọn ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A di động . Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (2 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kì trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung AM), gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Chứng minh MI vuông góc với AB và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 6. (1 điểm) Cho ba số thực x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = x + y + z – (xy + yz + zx)

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) Với x ≥ 0, x ≠ 1 ta có

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}+1-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$A-1=\frac{\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Ta có $x=2016+2\sqrt{2015}$ thỏa mãn điều kiện x ≥ 0 và x ≠ 1

Có $x=2015+2\sqrt{2015}+1=\left(\sqrt{2015}+1\right)^2\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{2015}+1$. Thay vào biểu thức A – 1 ta được:

$$A-1=\frac{1}{\sqrt{2015}}$$

b) Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015}+b^{2015}=(a+b)(a^{2014}+a^{2013}b+...+ab^{2013}+b^{2014})\Rightarrow a^{2015}+b^{2015}\,\vdots\,(a+b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng khẳng định trên ta có:

$$2\left[1^{2015}+(n-1)^{2015}\right]\vdots\, n$$
$$2\left[2^{2015}+(n-2)^{2015}\right]\vdots\, n$$
$$...$$
$$2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right]\vdots\, n$$

Suy ra

$$A=n^{2015}+2\left[1^{2015}+(n-1)^{2015}\right]+2\left[2^{2015}+(n-2)^{2015}\right]+...+2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015}+\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right]\vdots\, n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2\left[2^{2015} + (n-1)^{2015}\right] + ... + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] \vdots (n+1)$$

Mặt khác n và n + 1 nguyên tố cùng nhau nên A ⋮ n(n + 1)

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có A ⋮ n(n + 1)

Câu 2

a) Điều kiện: $x^2 \neq 8; x^2 \neq 9; x^2 \neq 11; x^2 \neq 12$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{7}{x^2-8}\right) + \left(\frac{4}{x^2-11} - \frac{3}{x^2-12}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\left(x^2-8\right) - 7\left(x^2-9\right)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-8\right)} + \frac{4\left(x^2-12\right) - 3\left(x^2-11\right)}{\left(x^2-11\right)\left(x^2-12\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+15}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-8\right)} + \frac{x^2-15}{\left(x^2-11\right)\left(x^2-12\right)} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 15 = 0(2) \\ -\dfrac{1}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-8\right)} + \dfrac{1}{\left(x^2-11\right)\left(x^2-12\right)} = 0(3) \end{array}\right.$$

Phương trình $(2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$ (thỏa mãn)

Phương trình $(3) \Leftrightarrow \left(x^2-9\right)\left(x^2-8\right) = \left(x^2-11\right)\left(x^2-12\right)$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{\pm\sqrt{15}; \pm\sqrt{10}\right\}$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \left(x^2+4x\right).\left(4x+y\right) = 6 \\ \left(x^2+4x\right) + \left(4x+y\right) = -5 \end{cases}$$

Suy ra $x^2 + 4x$ và $4x + y$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^2+4x=-2 \\ 4x+y=-3 \end{cases}(I)$ hoặc $\begin{cases} x^2+4x=-3 \\ 4x+y=-2 \end{cases}(II)$

Giải (I): $x^2+4x=-2 \Leftrightarrow (x+2)^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{2} \Rightarrow y=-3-4x=5-4\sqrt{2} \\ x=-2-\sqrt{2} \Rightarrow y=-3-4x=5+4\sqrt{2} \end{array}\right.$

Giải (II): $x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-2-4x=2 \\ x=-3 \Rightarrow y=-2-4x=10 \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $\left(-2+\sqrt{2};5-4\sqrt{2}\right),\left(-2-\sqrt{2};5+4\sqrt{2}\right),\left(-1;2\right),\left(-3;10\right)$

Câu 3

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $ax^2=bx+c \Leftrightarrow ax^2-bx-c=0(1)$

Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác vuông với cạnh huyền là a nên a, b, c > 0, $a^2 = b^2 + c^2$

(d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt ⇔ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt ⇔ $\Delta=b^2+4ac>0$ (luôn đúng ∀ a, b, c > 0)

Gọi 2 giao điểm có hoành độ là x_1, x_2 , là 2 nghiệm của (1). Theo Viét ta có:

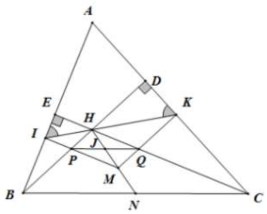
$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Xét $P=x_1^2+x_2^2-2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+2.\dfrac{c}{a}-2=\dfrac{b^2-2ac-2a^2}{a^2}$

Có $b^2+2ac-2a^2=b^2+2ac-(b^2+c^2)-a^2=2ac-c^2-a^2=-(c-a)^2<0,\forall a,c,0<c<a$

Suy ra P < 0 ⇒ đpcm.

Câu 4



a) Vì HI, HK là phân giác của góc EHB và góc DHC nên

$EHI = \frac{1}{2}EHB; DHK = CHK = \frac{1}{2}DHC.$ Mà EHB = DHC (đối đỉnh) => EHI = DHK = CHK (1)

Có AIH = 90º – EHI ; AKH = 90º – DHK => AIH = AKH (2)

Từ (1) suy ra EHI + EHK = CHK + EHK = 180o => I, H, K thẳng hàng (3)

Từ (2) và (3) ⇒ Δ AIK cân tại A ⇒ AI = AK

b) Gọi giao IM và BH là P, giao KM và CH là Q, giao HM và PQ là J, giao HM và BC là N.

Ta có:

ΔHEI ~ ΔHDK (g.g) => $\frac{HE}{HD} = \frac{EI}{DK}$

ΔHEB ~ ΔHDC (g.g) => $\frac{HE}{HD} = \frac{EB}{DC}$

$\Rightarrow \frac{EI}{DK} = \frac{EB}{DC} \Rightarrow \frac{EI}{EB} = \frac{DK}{DC}$ (4)

Vì IP ⊥ AB, HE ⊥ AB ⇒ IP // HE $\Rightarrow \frac{EI}{EB} = \frac{HP}{HB}(5).$ Tương tự $\frac{DK}{DC} = \frac{HQ}{HC}(6)$

Từ (4), (5), (6) $\Rightarrow \frac{HP}{HB} = \frac{HQ}{HC} \Rightarrow$ PQ // BC

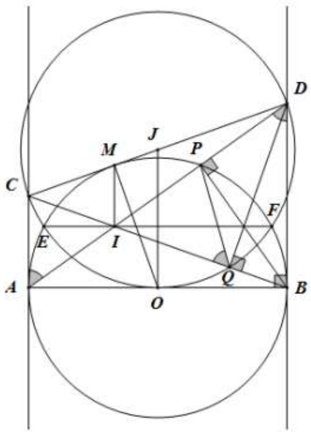
Suy ra $\frac{PJ}{BN} = \frac{HJ}{HN} = \frac{JQ}{NC} \Rightarrow \frac{PJ}{JQ} = \frac{BN}{NC}$

Vì HP // MQ, HQ // PM nên HQMP là hình bình hành ⇒ J là trung điểm PQ ⇒ PJ = JQ

⇒ BN = NC ⇒ N là trung điểm BC

Vậy HM luôn đi qua trung điểm BC là điểm cố định.

Câu 5



a) Vì AC ⊥ AB, BD ⊥ AB ⇒ AC // BD ⇒ ACDB là hình thang

Vì CM, CA là tiếp tuyến của (O) nên CM = CA. Tương tự DM = DB

Gọi J là trung điểm của CD thì JO là đường trung bình của hình thang ACDB suy ra JO // BD và

$$OJ = \frac{AC + BD}{2} = \frac{CM + MD}{2} = \frac{CD}{2} = IC = ID \qquad (1)$$

Vì BD ⊥ AB nên JO ⊥ AB tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (J) đường kính CD

b) Vì CA // BD nên theo định lý Talét ta có: $\frac{CI}{IB} = \frac{CA}{CD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow$ IM // BD

Mà BD ⊥ AB nên MI ⊥ AB

Gọi P, Q lần lượt là giao của AD và (O), BC và (J)

Có APB = CQD = 90^{o} (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => DPB = BQD = 90^{o}

Suy ra BQPD là tứ giác nội tiếp => PDB = PQI

Vì AC // BD nên PDB = IAC

=> PQI = IAC => ΔPQI ~ ΔCAI (g.g) => $\frac{PI}{CI} = \frac{QI}{AI}$ => $IP.IA = IC.IQ$

Suy ra phương tích của điểm I đối với 2 đường tròn (O) và (J) là bằng nhau

Suy ra I nằm trên trục đẳng phương EF của 2 đường tròn.

Vậy I, E, F thẳng hàng.

Câu 6

Ta có:

$$\left(x+y+z\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\left(xy+yz+zx\right)\le 9+2\left(xy+yz+zx\right)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\ge \frac{\left(x+y+z\right)^2-9}{2}$$

$$\Rightarrow P\le x+y+z+\frac{9-(x+y+z)^2}{2}$$

Đặt $x+y+z=t\Rightarrow P\le t+\frac{9-t^2}{2}=-\frac{t^2-2t+1}{2}+5=-\frac{1}{2}(t-1)^2+5\le 5$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=9,\end{cases}$ chẳng hạn khi x = 1, y = 2, z = –2

Vậy giá trị lớn nhất của P là 5.

Đề số 39. Chuyên Quảng Nam. Năm học: 2015-2016

Câu 1. ***(2,0 điểm)***

Cho biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{4}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$, với x > 0.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Thực hiện phép tính để tính giá trị của A khi $x=3-2\sqrt{2}$

c) Tìm x để A = x + 1.

Câu 2. ***(2,0 điểm)***

a) Giải hệ phương trình (không sử dụng máy tính cầm tay): $\begin{cases}2x-y=7\\3x+4y=5\end{cases}$

b) Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): y = 3x + b. Vẽ parabol (P) và tìm b biết (d) đi qua điểm M thuộc (P) có hoành độ x = –1.

Câu 3. ***(2,0 điểm)***

Cho phương trình $x^2-2(\text{m}+1)\text{x}+\text{m}^2-2m+5=0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

b) Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều khác 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{(x_1-1)(x_2-1)}+(x_1+x_2-6)^2$$

Câu 4. ***(4,0 điểm)***

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, với ABC = 60°, BC = 2a và AB < AC. Gọi (O) là đường tròn đường kính BC (O là trung điểm BC). Đường tròn (O) cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (D khác B, E khác C), BE cắt CD tại H.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

b) Chứng minh: HB.DE = HD.BC

c) Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt đường thẳng DI tại M. Tính tỉ số $\dfrac{OB}{OM}$

d) Gọi F là giao điểm của AH và BC. Cho $BF=\dfrac{3a}{4}$, tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF theo a

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC

KÝ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN
Năm học 2015 – 2016
Khóa ngày 03 tháng 6 năm 2015
Môn: TOÁN (Toán chung)
Thời gian làm bài: 120 phút *(không kể thời gian giao đề)*

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{4}{x+2\sqrt{x}}+\frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-4+(x+2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{x-4+x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{x\sqrt{x}+3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\sqrt{x}+1$$

b) ĐKXĐ của A là x > 0, $x=3-2\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x=3-2\sqrt{2}$, ta có:

$$A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+1=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+1$$

$$=|\sqrt{2}-1|+1=\sqrt{2}(Do\ \sqrt{2}-1>0)$$

Vậy khi $x=3-2\sqrt{2}$ thì A=$\sqrt{2}$

c)

$$A=x+1 <=> \sqrt{x}+1=x+1 <=> \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} x=0(L) \\ x=1(TM) \end{array}\right.$$

Vậy A = x + 1 ⇔ x = 1.

Câu 2.

a)

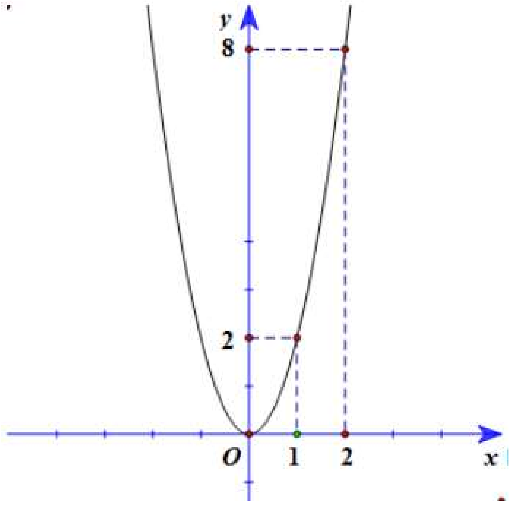
$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ 3x+4y=5 \end{cases}(I)$$

$$<=> \begin{cases} y=2x-7 \\ 3x+4(2x-7)=5 \end{cases} <=> \begin{cases} y=2x-7 \\ 11x=33 \end{cases} <=> \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (3;–1)

b)Vẽ parabol (P)

(P): y = $2x^2$ nên có đỉnh là O(0;0), đi qua điểm A(1;2), B(2;8), nhận Oy là trục đối xứng.



Điểm M(–1;m) thuộc (P) nên m = 2.(–1)^2 = 2 ⇒ M(–1;2)

M(–1;2) ∈ (d) ⇒ 2 = 3.(–1) + b ⇒ b = 5

Vậy b = 5.

Câu 3.

$x^2-2(m+1)x+m^2-2m+5=0$ (1)

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Delta'=(m+1)^2-(m^2-2m+5)>0$

$<=> 4m-4>0 <=> m>1$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1

$\begin{cases} m>1 \\ 1^2-2(m+1).1+m^2-2m+5\neq 0 \end{cases} <=> \begin{cases} m>1 \\ m^2-4m+4\neq 0 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \end{cases}$

Theo định lý Vi–ét: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1x_2=m^2-2m+5 \end{cases}$

Thay vào P ta có:

$P=\dfrac{4}{(x_1-1)(x_2-1)}+(x_1+x_2-6)^2$

$=\dfrac{4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}+(x_1+x_2-6)^2$

$=\dfrac{4}{m^2-2m+5-(2m+2)+1}+(2m+3-6)^2$

$=\dfrac{4}{m^2-4m+4}+(2m-4)^2$

$=4\left[\dfrac{1}{(m-2)^2}+(m-2)^2\right]$

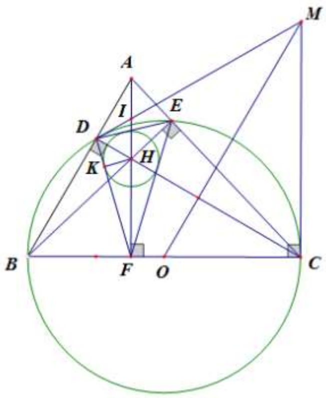
Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số không âm, ta có:

$\dfrac{1}{(m-2)^2}+(m-2)^2\geq 2 => P\geq 8$

Dấu bằng xảy ra khi (m – 2)^2 = 1 ⇔ m = 3 (thỏa mãn) hoặc m = 1 (loại)

Vậy GTNN của P là 8, đạt được khi m = 3.

Câu 4.



a) Gọi I là trung điểm AH.

Vì tam giác ADH vuông tại D, có I là trung điểm cạnh huyền nên IA = IH = ID.

Vì tam giác AEH vuông tại E, có I là trung điểm cạnh huyền nên IA = IH = IE

$\Rightarrow$ IA = IH = ID = IE

$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn tâm I.

b) Vì BDEC là tứ giác nội tiếp nên:

HDE=HBC (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC) (1)

HED=HCB (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) (2)

Từ (1) và (2) =>tam giác HDE đồng dạng với tam giác HBC (g-g)

$=> \frac{HD}{HB} = \frac{DE}{BC} => HD.BC = HB.DE$

c) Vì ID = IH nên Δ IDH cân ở I => IDH=IHD(3)

Vì IH // MC (cùng vuông góc BC) nên IHD=MCD (4)

Từ (3) và (4) => IDH=MCD

Suy ra Δ MDC cân tại M ⇒ MD = MC.

Mà OD = OC nên OM là trung trực của CD.

⇒ OM ⊥ CD

Mà BD ⊥ CD nên OM // BD

=>COM=CBD=60^o

Ta có: $\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{OM} = \cos COM = cos 60^o = \frac{1}{2}$

d) Vì BDH+BFH=90^o+90^o+180^o nên BDHF là tứ giác nội tiếp ⇒ DBH=DFH(5)

Tương tự ta có: ECH=EFH (6)

Vì BDEC là tứ giác nội tiếp nên DBH=ECH (7)

Từ (5), (6), (7) ⇒ DFH=EFH => FH là phân giác góc DFE.

Tương tự ta có: EH là phân giác góc DEF.

Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp Δ DEF. Vẽ HK ⊥ DF tại K. Suy ra bán kính đường tròn (H) nội tiếp Δ DEF là HK.

Tính HK:

Ta có: BD=BC.cosDBC=a

Vì Δ BDC vuông tại D nên $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = a\sqrt{3}$

Hai tam giác vuông CDB và CFH có chung góc C nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{HF}{BD}=\frac{CF}{CD} \Rightarrow HF=\frac{BD.\text{CF}}{CD}=\frac{a.\frac{5}{4}a}{a\sqrt{3}}=\frac{5a}{4\sqrt{3}}$$

Δ BFH vuông tại F nên $BH=\sqrt{BF^2+HF^2}=\sqrt{\frac{9}{16}a^2+\frac{25}{48}a^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

Δ BDH vuông tại D nên $DH=\sqrt{BH^2-BD^2}=\sqrt{\frac{13}{12}a^2-a^2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}$

Có $\begin{cases} BHF=HDK \\ HKD=HFB=90^o \end{cases}$ => ΔHBF đồng dạng với ΔHDK (g.g)

$$\frac{HB}{HD}=\frac{HF}{HK} \Rightarrow HK=\frac{HD.HF}{HB}=\frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}.\frac{5a}{4\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}}=\frac{5a\sqrt{39}}{156}$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp Δ DEF là HK = $\frac{5a\sqrt{39}}{156}$

Đề số 40. Chuyên Quang Trung – Bình Phước. Năm học: 2015-2016

Câu 1 Cho $P=\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1}\right)\left[\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}{4\sqrt{a}}\right](a>0,a\neq 1)$

a) Rút gọn P

b) Đặt $Q=(a-\sqrt{a}+1)P$. Chứng minh Q > 1

Câu 2 Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2=0$ (1). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn $(x_1-m)^2+x_2=m+2$

Câu 3

1. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{2(x^2+4)}=x^2-x-2$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=x^2+xy-2y^2(1)\\ \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x}\right)=3(2)\end{cases}$

Câu 4 Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1$ (1)

Câu 5 Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh AH = 2OM

b) Dựng hình bình hành AHIO. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng

OI. OJ = R^2

c) Gọi N là giao điểm của AH với đường tròn (O) (N khác A). Gọi D là điểm bất kì trên cung nhỏ NC của đường tròn tâm (O) (D khác N và C). Gọi E là điểm đối xứng với D qua AC, K là giao điểm của AC và HE. Chứng minh rằng ACH = ADK

Câu 6

1. Cho a, b là 2 số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)}\geq 1+\sqrt{ab}$

2. Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn a + b = ab. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+2a}+\frac{1}{b^2+2b}+\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) Với a > 0 và a ≠ 1 ta có:

$$P=\left[\frac{\sqrt{a}-1}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}+\frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}\right].\frac{(a+2\sqrt{a}+1)-4\sqrt{a}}{4\sqrt{a}}$$
$$=\frac{4\sqrt{a}+4}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1)}.\frac{a-2\sqrt{a}+1}{4\sqrt{a}}=\frac{4}{(\sqrt{a}-1)^2}.\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

b) Có $Q=\dfrac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$

Xét $Q-1=\dfrac{a-2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}=\dfrac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}}$

Vì $(\sqrt{a}-1)^2>0,\sqrt{a}>0,\forall a>0,a\neq 1\Rightarrow Q-1>0\Rightarrow Q>1$

Câu 2

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1; x_2 $\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-m^2\geq 0\Leftrightarrow 2m+1\geq 0\Leftrightarrow m\geq -\dfrac{1}{2}$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\ x_1x_2=m^2\end{cases}$

Có (2) $\Leftrightarrow x_1^2-2x_1m+m^2+x_2=m+2\Leftrightarrow x_1(x_1-2m)+m^2+x_2=m+2$

Thay $x_1-2m=2-x_2;m^2=x_1x_2$ vào ta có $x_1(2-x_2)+x_1x_2+x_2=m+2\Leftrightarrow 2x_1+x_2=m+2$

Ta có hệ $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\ 2x_1+x_2=m+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-m\\ x_2=3m+2\end{cases}\Rightarrow m^2=x_1x_2=-m(3m+2)\Rightarrow 4m^2+2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

+ Với m = 0: (1) $\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\ x_2=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn đề bài)

+ Với $m=-\dfrac{1}{2}$: (1) $\Leftrightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn đề bài)

Vậy m = 0 hoặc m = $-\frac{1}{2}$ là tất cả các giá trị m cần tìm.

Câu 3

1) $(x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2$ (1)

Điều kiện: $x^2 + 4 \ge 0$ (luôn đúng $\forall$ x)

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = (x-2)(x+1)$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{2(x^2+4)} - (x-2)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \sqrt{2(x^2+4)} = x - 2 (2) \end{array}\right.$$

Có $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2(x^2+4) = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x = -2 \end{cases}$ (loại)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-1\}$

2, $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 (1) \\ \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{y}\right)\left(1 + \sqrt{x^2+3x}\right) = 3 (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 3 \ge 0 \\ x^2 + 3x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{y-x}{y\sqrt{x}} = (x-y)(x+2y) \Leftrightarrow (x-y)\left(x + 2y + \dfrac{1}{y\sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$ do $x + 2y + \dfrac{1}{y\sqrt{x}} > 0, \forall x, y > 0$

Thay y = x vào phương trình (2) ta được:

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2+3x} = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$$
$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2+3x} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3}.\sqrt{x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x} - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 (L) \\ x = 1 (tm) \end{array}\right. \Rightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1

Câu 4

$x^{2015}=\sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)}+1 \qquad (1)$

Có $y(y+1)(y+2)(y+3)=\left[y(y+3)\right]\left[(y+1)(y+2)\right]=(y^2+3y)(y^2+3y+2)$

Đặt $t=y^2+3y+1 \Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3)=t^2-1$ ($t\in\mathbb{Z}$, $t^2\geq 1$)

(1) $\Leftrightarrow x^{2015}-1=\sqrt{t^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015}-1\geq 0 \\ (x^{2015}-1)^2=t^2-1(2) \end{cases}$

Với x, t là số nguyên ta có:

$(2) \Leftrightarrow \left(x^{2015}-1+t\right)\left(x^{2015}-1-t\right)=-1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^{2015}-1+t=1 \\ x^{2015}-1-t=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^{2015}-1+t=-1 \\ x^{2015}-1-t=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2015}=t=1 \\ \begin{cases} x^{2015}=1 \\ t=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

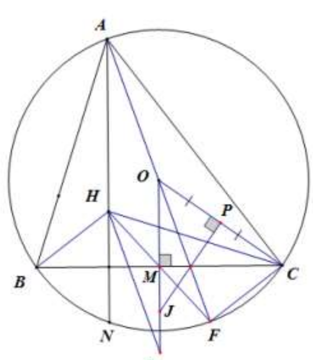
Với $x^{2015}=t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2+3y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-3 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $\begin{cases} x^{2015}=1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases}$

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Câu 5



a) Gọi F là điểm đối xứng với A qua O ⇒ AF là đường kính của (O)

Ta có ACF = ABF = 90° (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) ⇒ AC ⊥ CF , AB ⊥ BF

Mà BH ⊥ AC, CH ⊥ AB ⇒ CF // BH, BF // HC

Suy ra BHCF là hình bình hành ⇒ Trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HF.

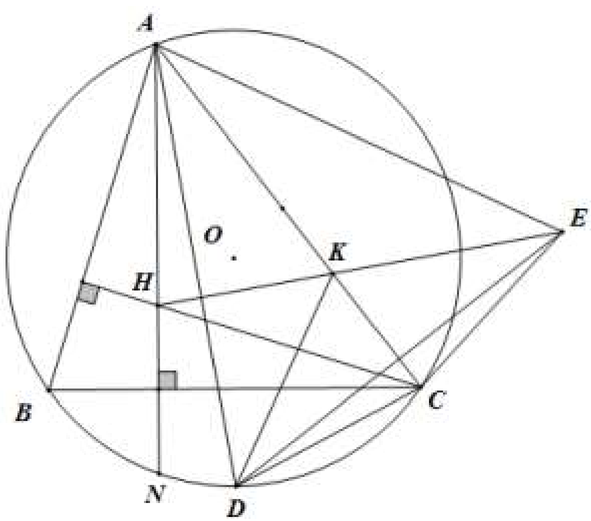
⇒ OM là đường trung bình của Δ AHF ⇒ AH = 2OM

b) Vì AHIO là hình bình hành nên OI = AH = 2OM

Gọi P là trung điểm OC ⇒ PJ là trung trực OC ⇒ PJ ⊥ OC.

Có OM là trung trực BC ⇒ OM ⊥ BC. Suy ra

$$\Delta OJP \sim \Delta OCM\,(g.g) \Rightarrow \frac{OJ}{OC} = \frac{OP}{OM} \Rightarrow OJ.OM = OC.OP$$
$$\Rightarrow OJ.2OM = OC.2OP \Rightarrow OJ.OI = OC.OC = R^2$$



c) Ta có NHC = ABC (cùng phụ với HCB) (1)

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp nên ABC = ADC (2)

Vì D và E đối xứng nhau qua AC nên AC là trung trực DE suy ra

ΔADC = ΔAEC (c.c.c) => ADC = AEC (3)

Tương tự ta có AEK = ADK

Từ (1), (2), (3) suy ra NHC = AEC => AEC + AHC = NHC + AHC = 180°

Suy ra AHCE là tứ giác nội tiếp => ACH = AEK = ADK (đpcm)

Câu 6

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow 1+a+b+ab \ge 1+2\sqrt{ab}+ab$

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$

(luôn đúng với mọi a, b > 0)

2. Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \ge 1+ab = 1+a+b$ (1)

Với mọi x, y > 0, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y) \ge 2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}.2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y} \qquad (2)$$

Áp dụng (1) và (2) ta có:

$$P \ge \frac{4}{a^2+2a+b^2+2b}+1+a+b = \frac{4}{a^2+b^2+2ab}+1+a+b$$
$$= \frac{4}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{8}+\frac{7(a+b)}{8}+1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$a+b = ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow (a+b)^2 \ge 4(a+b) \Rightarrow a+b \ge 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{16}+\frac{a+b}{16} \ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{(a+b)^2}.\frac{a+b}{16}.\frac{a+b}{16}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $P \ge \frac{3}{4}+\frac{7}{8}.4+1 = \frac{21}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi a = b = 2. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{21}{4}$

Đề số 41. Chuyên Quốc Học Huế - Thừa Thiên Huế. Năm học: 2015-2016

Câu 1: (1,5 điểm)

Giải phương trình: $2015\sqrt{2015x-2014}+\sqrt{2016x-2015}=2016$

Câu 2: (1,5 điểm)

Cho phương trình $(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0$ (x là ẩn số). Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=(x+1)(y+1) \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn các điều kiện x + y + z = 2 và $x^2+y^2+z^2=2$.

Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y, z:

$$P=x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R) , Giả sử B , C cố định và A di động trên đường tròn sao cho AB < AC và AC < BC . Đường trung thực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng $OM.ON=R^2$

b) Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng nằm trên một đường tròn

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T , gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng ST . Chứng minh H chạy trên 1 đường tròn cố định khi A di động

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Cho a,b là hai số thay đổi thoã mãn các điều kiện a > 0, a + b ≥ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{8a^2+b}{4a}+b^2$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$2015\sqrt{2015x-2014}+\sqrt{2016x-2015}=2016$ **(1)**

ĐK: $x \ge \dfrac{2015}{2016}$

$(1) <=> (2015\sqrt{2015x-2014}-2015)+(\sqrt{2016x-2015}-1)=0$

$<=> 2015(\sqrt{2015x-2014}-1)+(\sqrt{2016x-2015}-1)=0$

$<=> \dfrac{2015(2015x-2015)}{\sqrt{2015x-2014}+1}+\dfrac{2016x-2016}{\sqrt{2016x-2015}+1}=0$

$<=> (x-1)\left(\underbrace{\dfrac{2015^2}{\sqrt{2015x-2014}+1}+\dfrac{2016}{\sqrt{2016x-2015}+1}}_{>0\ \forall\ x\ \ge \frac{2015}{2016}}\right)=0$

$<=> x=1$

(thoả mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{1\}$

Câu 2:

$(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0(1)$

$<=> (x-2)(x^2-x)+(4m+1)(x-2)=0$

$<=> (x-2)(x^2-x+4m+1)=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-x+4m+1=0(2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\begin{cases} \Delta = 1-4(4m+1)>0 \\ 2^2-2+4m+1\ne 0 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} -16m-3>0 \\ 4m\ne -3 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} m<\dfrac{-3}{16} \\ m\ne \dfrac{-3}{4} \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2) ⇒ (1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, $x_3 = 2$ (*)

Theo định lí Vi–ét: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = 4m + 1$. (**)

Thay (*) và (**) ta có:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$

$<=> (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+4=11$

$<=> 1-2(4m+1)=7$

$<=> m=-1$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy m = –1 là giá trị cần tìm.

Câu 3:

$$a)\begin{cases} x^2+y^2+x+y=(x+1)(y+1) & (1) \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 & (2) \end{cases}$$

ĐK: $x \neq -1$; $y \neq -1$

(1) <=> $x(x+1)+y(y+1)=(x+1)(y+1)$

<=> $\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=1$

Đặt $a=\dfrac{x}{y+1}; b=\dfrac{y}{x+1}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} <=> \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases} <=> \begin{cases} a+b=1 \\ 1-2ab=1 \end{cases} <=> \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases}$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} <=> \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm (0;1), (1;0)

b) $P=x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\dfrac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

Xét $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) => xy+yz+zx=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$

Thay x + y + z = 2 và $x^2+y^2+z^2=2$ ta có xy + yz + zx = 1.

Thay 1 = xy + yz + zx ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=x\sqrt{\frac{(xy+yz+zx+y^2)(xy+yz+zx+z^2)}{xy+yz+zx+x^2}}=x\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)(z+y)(z+x)}{(x+y)(x+z)}}=x(y+z)$$

Tương tự ta có:

$$y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}}=y(z+x)$$

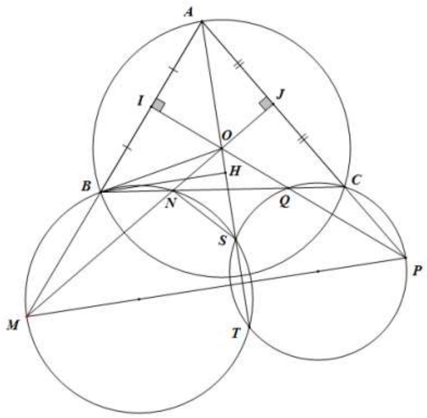
$$z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=z(x+y)$$

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên ta có

$P=xy+xz+yz+yx+zx+zy=2(xy+yz+zx)=2$

Vậy biểu thức P không phụ thuộc vào x, y, z.

Câu 4:



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, AC

Δ OAB cân ở O có OI là đường cao kẻ từ đỉnh O nên OI cũng là phân giác góc O, suy ra

$$BOI = \frac{1}{2}BOA(1)$$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AB của (O):

$$BCA = \frac{1}{2}BOA(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BOI=BCA (3)

Xét Δ OBI vuông tại I có góc ngoài OBM:

$$OBM = 90^O + BOI(4)$$

Xét Δ NJC vuông tại J có góc ngoài ONB:

$$ONB = 90^O + BCA(5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra OBM=ONB

$=> \Delta OBM \sim \Delta ONB(g.g)$

$=> \frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OB} => OM.ON = OB^2 = R^2$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có

$OQ.OP = R^2 => OM.ON = OQ.OP$

$=> \frac{OM}{OQ} = \frac{OP}{ON}$

Xét Δ OMP và Δ OQN có:

$\begin{cases} MOP \text{ chung} \\ \frac{OM}{OQ} = \frac{OP}{ON} \end{cases} => \Delta OMP \sim \Delta OQN(c.g.c)$

$=> \text{OMP} = \text{OQN} => \text{OMP} + \text{NQP} = 180^o$

⇒ Bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta chứng minh O, S, T thẳng hang

Gọi T' là giao điểm khác S của OS với đường tròn ngoại tiếp Δ BMN.

Khi đó MNST' là tứ giác nội tiếp, nên

$OSN = OMT' \Rightarrow \Delta OSN \sim \Delta OMT'(g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{OS}{OM} = \dfrac{ON}{OT'} \Rightarrow OS.OT' = OM.ON$

$\Rightarrow OS.OT' = OQ.OP$

$\Rightarrow \dfrac{OS}{OP} = \dfrac{OQ}{OT'}$

Xét Δ OSQ và Δ OPT’ có:

$\begin{cases} SOQ \text{ chung} \\ \dfrac{OS}{OP} = \dfrac{OQ}{OT'} \end{cases} \Rightarrow \Delta OSQ \sim \Delta OPT'(c.g.c)$

$\Rightarrow OSQ = OPT' \Rightarrow OPT' + QST' = 180^o$

⇒ T’SQP là tứ giác nội tiếp

⇒ T’ thuộc đường tròn ngoại tiếp Δ CPQ

⇒ T’ ≡ T

Vậy O, S, T thẳng hang

⇨ BH ⊥ OH

⇒ H thuộc đường tròn đường kính OB.

Vậy khi A di động, H luôn thuộc đường tròn đường kính OB.

Câu 5:

$a) A = \dfrac{8a^2 + b}{4a} + b^2 = 2a + \dfrac{b}{4a} + b^2 = (a + b^2) + (a + \dfrac{b}{4a})$

Vì

$a > 0; a + b \ge 1 \Rightarrow \dfrac{b}{4a} \ge \dfrac{1-a}{4a}; a \ge 1 - b \Rightarrow a + \dfrac{b}{4a} \ge \dfrac{1}{4a} - b + \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow A \ge (a + b^2) + (\dfrac{1}{4a} - b + \dfrac{3}{4}) = (a + \dfrac{1}{4a}) + (b - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{2}$

Ta có $a + \dfrac{1}{4a} \ge 2\sqrt{a.\dfrac{1}{4a}} = 1$ (BĐT Cô–si cho hai số không âm); $(b - \dfrac{1}{2})^2 \ge 0$

$\Rightarrow A \ge \dfrac{3}{2}$

Dấ u bằng xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

b)Ta có:

$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40 = 4y^2 - 4y + 1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 + 2x + 10) = (2y - 1)^2$

Vì y là số nguyên nên $2y - 1 \ne 0 \Rightarrow x \ne 2$

Vì $(2y - 1)^2$ và $(x - 2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2 + 2x + 10$ là số chính phương.

Đặt $x^2 + 2x + 10 = m^2$ $(m \in N^*)$ suy ra

$(x+1)^2+9=m^2$

$<=> (x+1-m)(x+1+m)=-9$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1+m=9 \\ x+1-m=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1+m=1 \\ x+1-m=-9 \end{cases} (Do\ x+1+m>x+1-m) \\ \begin{cases} x+1+m=3 \\ x+1-m=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ m=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5 \\ m=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ m=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

- $x = 3 \Rightarrow (2y-1)^2 = 25 \Rightarrow y = 3$ hoặc $y = -2$
- $x = -5 \Rightarrow (2y-1)^2 = 1225 \Rightarrow y = 18$ hoặc $y = -17$
- $x = -1 \Rightarrow (2y-1)^2 = 81 \Rightarrow y = 5$ hoặc $y = -4$

Vậy các bộ (x;y) nguyên thỏa yêu cầu bài toán là (3;3),(3;–2),(–5;18),(–5;–17),(–1;5),(–1;–4)

Đề số 42. Chuyên SPHN. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,5 điểm) Cho biểu thức $P=\dfrac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})}$ với a > 0, b > 0, a ≠ b.

1. Chứng minh $P=\dfrac{1}{ab}$
2. Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a+b+\sqrt{ab}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2 (2,0 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-my=2-4m \\ mx+y=3m+1 \end{cases}$ với m là tham số

1. Giải hệ phương trình khi m = 2.
2. Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m. Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của hệ. Chứng minh đẳng thức $x_0{}^2+y_0{}^2-5(x_0+y_0)+10=0$

Câu 3 (1,5 điểm) Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a(a-x)^2+b(x-b)^2=0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh |a| = |b|.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có các góc ABC;ACB nhọn và BAC = 60°. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1. Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.
2. Gọi K là giao điểm thứ hai (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.
3. Chứng minh $AK \perp B_1C_1$.

Câu 5 (1,0 điểm) Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$(a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4})=(2a+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2})$$

ĐÁP ÁN

Câu 1

Ta có:

$$P=\frac{(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1)(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})^2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})}$$

$$=\frac{(\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{ab}{ab})(\frac{a-b}{ab})^2}{\frac{a^4}{a^2b^2}+\frac{b^4}{a^2b^2}-(\frac{a^3b}{a^2b^2}+\frac{ab^3}{a^2b^2})}$$

$$=\frac{(\frac{a^2+b^2+ab}{ab}).\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4+b^4-a^3b-ab^3}{a^2b^2}}$$

$$=\frac{\frac{(a^3-b^3)(a-b)}{a^3b^3}}{\frac{(a^3-b^3)(a-b)}{a^2b^2}}$$

$$=\frac{1}{ab}$$

Vậy $P=\frac{1}{ab}$.

2.Áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương 4a và b ta có:

$$4a+b\ge 2\sqrt{4a.b}=4\sqrt{ab}$$

$$=>1=4a+b+\sqrt{ab}\ge 5\sqrt{ab}$$

$$<=>\sqrt{ab}\le\frac{1}{5}<=>0<ab\le\frac{1}{25}$$

$$=>P=\frac{1}{ab}\ge 25$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}b=4a>0\\4a+b+\sqrt{ab}=1\end{cases}<=>\begin{cases}b=4a>0\\10a=1\end{cases}<=>\begin{cases}a=\frac{1}{10}\\b=\frac{2}{5}\end{cases}$

Vậy minP = 25 $\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{10}\\b=\frac{2}{5}\end{cases}$

Câu 2 Cho hệ phương trình:

1. Thay m = 2, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x+y=7 \end{cases} <=> \begin{cases} 2x-4y=-12 \\ 2x+y=7 \end{cases} <=> \begin{cases} -5y=-19 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} y=\dfrac{19}{5} \\ 2x+\dfrac{19}{5}=7 \end{cases} <=> \begin{cases} x=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{19}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(\frac{8}{5};\frac{19}{5}\right)$

2. Ta có:

$$\begin{cases} x-my=2-4m \\ mx+y=3m+1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=my+2-4m \\ m(my+2-4m)+y=3m+1 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} x=my+2-4m \\ m^2y+2m-4m^2+y=3m+1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=my+2-4m(1) \\ (m^2+1)y=m+1+4m^2(2) \end{cases}$$

Phương trình (2) là phương trình bậc nhất ẩn y có hệ số a = $m^2 + 1 \neq 0$ ∀m nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất $y=\dfrac{m+1+4m^2}{m^2+1}\forall m$

Thay vào (1) ta được:

$$x=my+2-4m$$
$$=\frac{m^2+m+4m^3+2(\text{m}^2+1)-4m(m^2+1)}{m^2+1}$$
$$=\frac{3m^2-3m+2}{m^2+1}$$

Do đó: ∀ m, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$ = $\left(\dfrac{3m^2-3m+2}{m^2+1};\dfrac{m+1+4m^2}{m^2+1}\right)$

*Chứng minh đẳng thức $x_0{}^2+y_0{}^2-5(x_0+y_0)+10=0$ (*)

Vì $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho nên:

$$\begin{cases} x_0-my_0=2-4m \\ mx_0+y_0=3m+1 \end{cases} <=> \begin{cases} m(y_0-4)=x_0-2(3) \\ 1-y_0=m(x_0-3)(4) \end{cases}$$

Xét m = 0 ⇒ $x_0 = 2$ và $y_0 = 1$. Khi đó (*) đúng.

Xét m ≠ 0. Nhân từng vế của (3) và (4) ta được:

$$m(y_0-4)(1-y_0)=m(x_0-2)(x_0-3)$$
$$<=>-y_0{}^2+5y_0-4=x_0{}^2-5x_0+6$$
$$<=>x_0{}^2+y_0{}^2-5(x_0+y_0)+10=0$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh đúng ∀m.

Câu 3:

Phương trình đã cho tương đương với

$$a(x^2-2ax+a^2)+b(x^2-2bx+b^2)=0$$
$$<=>ax^2-2a^2x+a^3+bx^2-2b^2x+b^3=0$$
$$<=>(\text{a}+\text{b})\,\text{x}^2-2x(a^2+b^2)+a^3+b^3=0$$

• Xét a + b = 0 ⇔ b = –a, phương trình (1) trở thành:

$-2x(a^2+a^2)+a^3-a^3=0$

$<=> -4a^2x=0$

$<=> x=0(Do\ \mathrm{a}\neq 0)$

Do đó với a + b = 0 thì (1) có nghiệm duy nhất x = 0.

• Xét a + b ≠ 0. Khi đó (1) là phương trình bậc hai ẩn x.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$\Delta=(a^2+b^2)^2-(a+b)(a^3+b^3)=0$

$<=> a^4+2a^2b^2+b^4-(a^4+ab^3+a^3b+b^4)=0$

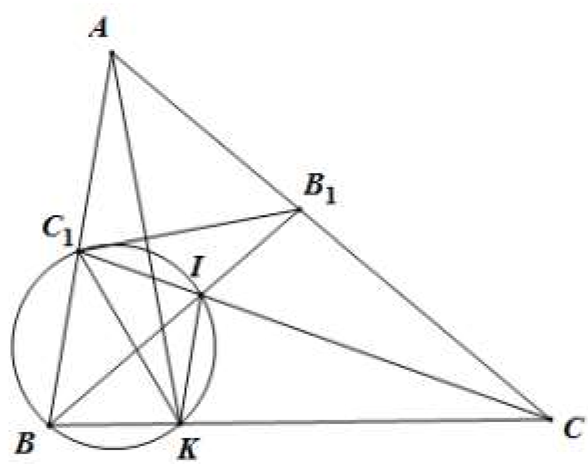
$<=> 2a^2b^2-ab^3-a^3b=0$

$<=> -ab(a-b)^2=0$

$<=> a=b(do\ \mathrm{ab}\neq 0)$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất ⇔ b = ±a ⇔ |a| = |b|.

Câu 4



1. Ta có

B_1IC_1=BIC (hai góc đối đỉnh)

BIC=180°-IBC-ICB=180°-$\frac{ABC}{2}-\frac{ACB}{2}=180^o-\frac{ABC+ACB}{2}=180^o-\frac{180^o-BAC}{2}=120^o$

=>B_1IC_1+BAC=120°+60°=180°

Mà hai góc này là hai góc đối nhau của tứ giác AC_1IB_1 nên tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp.

2.Vì tứ giác BC_1IK là tứ giác nội tiếp (gt) nên BKI=AC_1I (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện)(1)

Vì tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $AC_1I=IB_1C$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (2)

Từ (1) và (2) suy ra IB_1C=BKI=180°-CKI=>IB_1C+CKI=180°

Đây là hai góc đối của tứ giác $CKIB_1$ nên tứ giác này là tứ giác nội tiếp.

3. Vì BC_1IK là tứ giác nội tiếp nên

$BKC_1=BIC_1=180^o-BIC=60^o => CKC_1=180^o-BKC_1=120^o$

$=> CKC_1+CAC_1=180^o$

Suy ra tứ giác AC_1KC là tứ giác nội tiếp.

$=> C_1KA=C_1CA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung C_1A)

Và $=> C_1AK=C_1CK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung C_1K)

Mặt khác CC_1 là phân giác góc C (gt) nên $C_1CK = C_1CA => C_1KA = C_1AK$

Suy ra tam giác C_1AK cân tại $C_1 \Rightarrow C_1A = C_1K$ (3)

Tương tự ta có: $B_1A = B_1K$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra C_1B_1 là trung trực của đoạn thẳng AK.

$\Rightarrow AK \perp B_1C_1$ (đpcm).

Câu 5

Với mọi x, y không âm, ta có:

$(x-\frac{1}{2})^2 \geq 0 <=> x^2+\frac{1}{4} \geq x(*)$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

□à

$(x-y)^2 \geq 0 <=> x^2-2xy+y^2 \geq 0$

$<=> x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$

$<=> (x+y)^2 \geq 4xy(**)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y.

Áp dụng BĐT (*) với x = a và x = b ta được

$$\begin{cases} a^2+b+\frac{3}{4}=(a^2+\frac{1}{4})+b+\frac{1}{2} \geq a+b+\frac{1}{2}>0 \\ b^2+a+\frac{3}{4}=(\mathrm{b}^2+\frac{1}{4})+a+\frac{1}{2} \geq b+a+\frac{1}{2}>0 \end{cases}$$

$$=> (a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4}) \geq (a+b+\frac{1}{2})^2 (1)$$

Áp dụng BĐT (**) ta được:

$$(a+b+\frac{1}{2})^2 = \left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\left(b+\frac{1}{4}\right)^2\right] \geq 4(a+\frac{1}{4})(b+\frac{1}{4})$$

$$=(2a+\frac{1}{2})(2\mathrm{b}+\frac{1}{2})(2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(a^2+b+\frac{3}{4})(b^2+a+\frac{3}{4})=(2\mathrm{a}+\frac{1}{2})(2b+\frac{1}{2})$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ a+\frac{1}{4}=b+\frac{1}{4} \end{cases} <=> a=b=\frac{1}{2}$

Vậy $a=b=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Đề số 43. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2015-2016

Bài 1 (3,0 điểm).

Cho biểu thức: $P=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}(x>0;x\neq 1)$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của thức P khi $x=3-2\sqrt{2}$

c) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của x để biểu thức P có nghĩa thì biểu thức $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên.

Bài 2 (2,0 điểm).

Cho phương trình $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi m = –1.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Bài 3 (1,0 điểm).

Giải phương trình: $\frac{9}{x^2}+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-1=0$

Bài 4 (3,5 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH, tâm O, cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của cạnh HC.

a) Chứng minh AE.AB = AF.AC.

b) Chứng minh rằng MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $\widehat{HAM}=\widehat{HBO}$

d) Xác định điểm trực tâm của tam giác ABM.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}$$

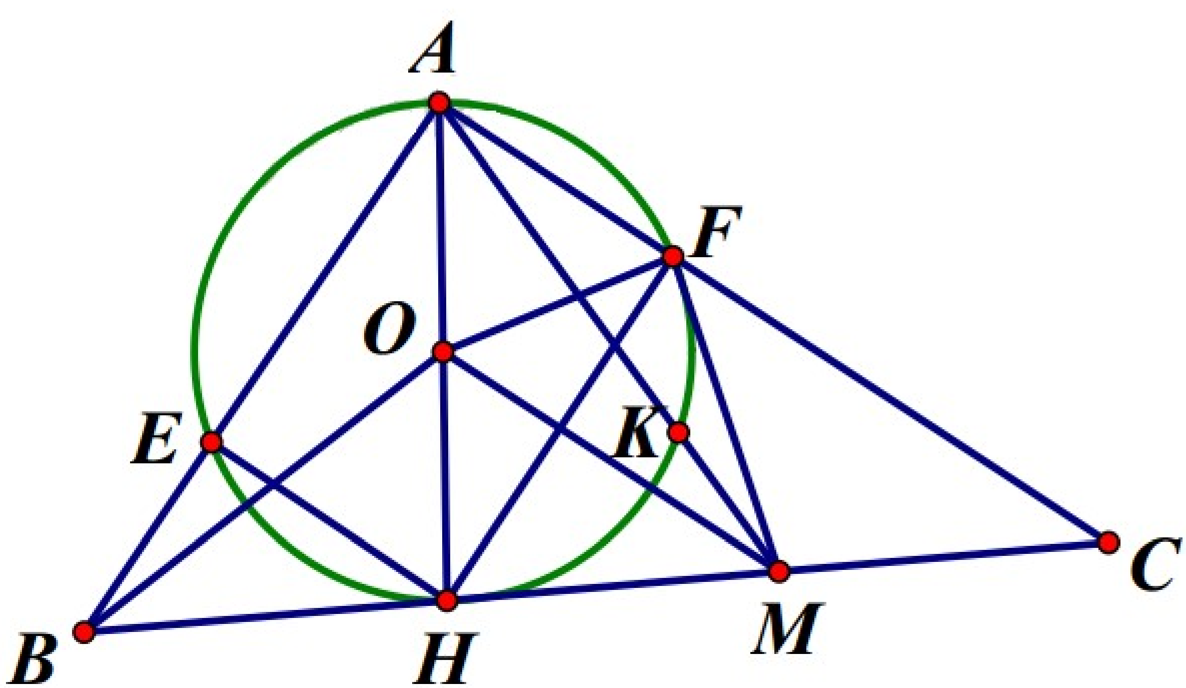
----------Hết----------

SỞ GD-ĐT THÁI BÌNH **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2015-2016**

DỰ THẢO HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

MÔN TOÁN CHUNG

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
1a	$P=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}(x>0;x\neq 1)$	
	$=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}-\frac{\text{x}\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$	**0,25**
	$=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}-\frac{(\sqrt{x}+1)(\text{x}-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$	**0,5**
	$=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	**0,5**
	$=\frac{2x+2}{\sqrt{x}}+2=\frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$	**0,25**
1b	Ta có $x=2-2\sqrt{x}=>\sqrt{x}=\sqrt{2}-1$	**0,25**
	Thay vào biểu thức $P=2(\sqrt{2}-1)+2+\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ $=2\sqrt{2}-2+2+\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$ $=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2$	**0,25**
	$P=4\sqrt{2}+2$	**0,25**
1c	Đưa được $\frac{7}{P}=\frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}}$	**0,25**
	Đánh giá $2x+2+2\sqrt{x}\geq 6\sqrt{x}=>0<\frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}}<\frac{7}{6}$	**0,25**
	Vậy $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên đó là 1 khi $7\sqrt{x}=2x+2+2\sqrt{x}<=>2x-5\sqrt{x}+2=0<=>\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.<=>\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$	**0,25**
2a	Khi m = −1 ta có phương trình $x^2+2x-8=0$	**0,5**
	Ta có: Δ =1+8=9>0 Giải phương trình ta được hai nghiệm: $x_1=2;x_2=-4$	**0,5**
2b	Tính được $\Delta'=m^2-(m-1)^3$	**0,25**
	Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $<=>m^2-(m-1)^3>0(*)$	**0,25**
	Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có:	

	$\begin{cases} x_1+x_2=2m(1) \\ x_1x_2=(\mathrm{m}-1)^3(2) \end{cases}$	
	Giả sử $x_1=(x_2)^2$ thay vào (2) ta được $x_2=m-1; x_1=(m-1)^2$	**0,25**
	Thay hai nghiệm $x_1;x_2$ vào (1) ta được: $(m-1)^2+m-1=2m$ $<=> m^2-3m=0$ $<=> \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=3 \end{array}\right.$	
	Khẳng định hai giá trị m vừa tìm được thỏa mãn điều kiện (*), kết luận	**0,25**
3	Điều kiện: x ≠ 0, đưa phương trình trở thành: $\frac{2x^2+9}{x^2}+2\frac{x}{\sqrt{2x^2+9}}-3=0$	**0,25**
	Đặt ẩn phụ: $\frac{x}{\sqrt{2x^2+9}}=t$, phương trình trở thành: $\frac{1}{t^2}+2t-3=0 <=> 2t^3-3t^2+1=0 <=> (t-1)(2t^2-t-1)=0 <=> \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$	**0,25**
	Trường hợp: $t=1 <=> x=\sqrt{2x^2+9}(VN)$	**0,25**
	Trường hợp: $t=\frac{-1}{2} <=> \sqrt{2x^2+9}=-2x <=> \begin{cases} x<0 \\ 2x^2=9 \end{cases} <=> x=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$	**0,25**
4a	 Xét hai tam giác: AEF và ACB có góc A chung	**0,25**
	Ta có AEF=AHF ;AHF=ACB ; suy ra AEF= ACB (hoặc AFE=AHE ;AHE= ABC ; suy ra AFE= ABC)	**0,25**

	Suy ra hai tam giác AEF và ACB đồng dạng	**0,25**
	Từ tỷ số đồng dạng $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$ ta có AE.AB = AC.AF	**0,25**
4b	Xét hai tam giác OHM và OFM có OM chung, OF = OH.	**0,25**
	Có MF = MH (vì tam giác HFC vuông tại F, trung tuyến FM)	**0,25**
	Suy ra ΔOHM =ΔOFM (c.c.c)	**0,25**
	Từ đó MFO=90º , MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH	**0,25**
4c	Xét hai tam giác AHM và BHO có AHM=BHO=90º	**0,25**
	Trong tam giác vuông ABC, đường cao AH có $AH^2=HB.HC => AH.2OH=HB.2HM => \frac{AH}{HB}=\frac{HM}{HO}$	**0,25**
	Suy ra ΔHBO đồng dạng với ΔHAM	**0,25**
	Suy ra HAM= HBO	**0,25**
4d	Gọi K là giao điểm của AM với đường tròn	
	Ta có HBO= HAM =MHK , suy ra BO // HK	**0,25**
	Mà HK⊥ AM, suy ra BO⊥ AM, suy ra O là trực tâm của tam giác ABM	**0,25**
5	Giả sử a≥b ≥c , từ giả thiết suy ra ab ≥1. Ta có bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab} <=> \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)}\ge 0$ (luôn đúng). Vậy ta cần chứng minh: $\frac{2}{1+ab}+\frac{1}{1+c^2}\ge\frac{3}{2}$	**0,25**
	$<=> c^2+3-ab\ge 3abc^2 <=> c^2+ca+bc\ge 3abc^2 <=> a+b+c\ge 3abc$ Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì $\begin{cases}(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=9\\ ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}\end{cases}$ Hay a+b+c ≥ 3 ≥ 3abc Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1	**0,25**
	Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a+ b +c = 3.Chứng minh rằng: $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$	
	Ta có: $\frac{(a+b+c)^2}{3}\ge ab+bc+ca => ab+bc+ca\le 3$	**0,25**
	Ta có $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\le\frac{ab}{2}(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c})$ $VT\le\frac{1}{2}(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{bc}{b+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b})=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = 1	**0,25**

Đề số 44. Chuyên Vũng Tàu. Năm học: 2016-2017

Câu 1 (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) Giải phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 4x - m$

a) Vẽ parabol (P)

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) có đúng một điểm chung

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 15$

b) Giải phương trình $(x - 1)^4 = x^2 - 2x + 3$

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB = 2R. CD là dây cung thay đổi của nửa đường tròn sao cho CD = R và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). AD cắt BC tại H, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F.

a) Chứng minh tứ giác CFDH nội tiếp

b) Chứng minh CF.CA = CH.CB

c) Gọi I là trung diểm của HF. Chứng minh tia OI là tia phân giác của góc COD.

d) Chứng minh điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn ab + bc + ca = 3abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \le \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) $A=\dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-1}+2-\sqrt{3}=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=2$

b) $\begin{cases}3x-y=1\\2x+3y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-1\\2x+3(3x-1)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-1\\11x=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.

Hệ có nghiệm duy nhất (1;2)

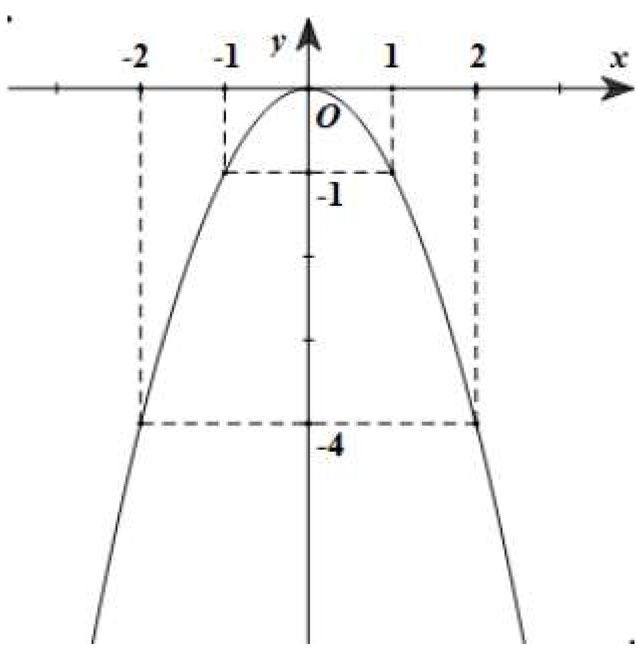
c) $x^2 + 2x - 8 = 0$. Có $\Delta' = 1 + 8 = 9 > 0$

Câu 2

a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị:



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $-x^2 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0$ (1)

(d) và (P) có đúng 1 điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 2^2 - (-m) = 0$

$\Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Vậy m = –4

Câu 3

a) $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta = 5^2 - 4(3m + 1) > 0 \Leftrightarrow 21 - 12m > 0$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{21}{12}$

Với $m < \dfrac{21}{12}$, ta có hệ thức $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 3m+1 \end{cases}$ (Viét)

=> $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5^2 - 4(3m+1)} = \sqrt{21-12m}$

=> $|x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = |5(x_1 - x_2)| = 5|x_1 - x_2| = 5\sqrt{21-12m}$

Ta có $|x_1^2 - x_2^2| = 15 \Leftrightarrow 5\sqrt{21-12m} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{21-12m} = 3 \Leftrightarrow 21 - 12m = 9 \Leftrightarrow 12m = 12 \Leftrightarrow m = 1$ tm

Vậy m = 1 là giá trị cần tìm

b) $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3 (1)$

(1) $\Leftrightarrow \left[(x-1)^2\right]^2 = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)^2 = x^2 - 2x + 3$ (2)

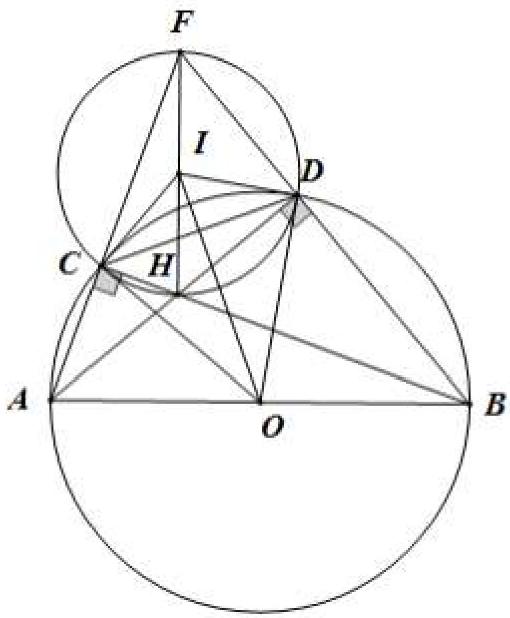
Đặt $t = x^2 - 2x + 1$, $t \geq 0$, phương trình (2) trở thành $t^2 = t + 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow$ t = 2 (tm) hoặc t = –1 (loại)

Với t = 2 có $x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right\}$

Câu 4



a) Vì C, D thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên

$ACB = ADB = 90^o \Rightarrow FCH = FDH = 90^o \Rightarrow FCH + FDH = 180^o$

Suy ra tứ giác CHDF nội tiếp

b) Vì AH ⊥ BF, BH ⊥ AF nên H là trực tâm Δ AFB ⇒ FH ⊥ AB

$\Rightarrow CFH = CBA(= 90^o - CAB) \Rightarrow \Delta CFH \sim \Delta CBA(g.g) \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CF.CA = CH.CB$

c) Vì $FCH = FDH = 90^o$ nên tứ giác CHDF nội tiếp đường tròn tâm I đường kính FH

=> IC = ID. Mà OC = OD nên Δ OCI = Δ ODI (c.c.c) => COI = DOI

=> OI là phân giác của góc COD

d) Vì OC = CD = OD = R nên Δ OCD đều => COD = 60°

Có $CAD = \frac{1}{2}COD = 30^o$ => $CFD = 90^o - CAD = 60^o$

Xét góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung CD của (I), có

CID = 2CFD = 120° => OIC = OID = $\frac{CID}{2} = 60^o$

Mặt khác COI = DOI = $\frac{COD}{2} = 30^o$ => $OID + DOI = 90^o$ => ΔOID vuông tại D

Suy ra $OI = \frac{OD}{\sin 60^o} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Vậy I luôn thuộc đường tròn $\left(O;\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)$

Câu 5

Từ điều kiện đề bài ta có $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a^2+bc\geq 2\sqrt{a^2.bc}=2a\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\leq\frac{2}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}}.\frac{1}{\sqrt{c}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Rightarrow\frac{a}{a^2+bc}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta có: $\dfrac{b}{b^2+ca}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right);\dfrac{c}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Suy ra $\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ca}+\dfrac{c}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{3}{2}.$

Đề số 45. Chuyên Sơn La. Năm học: 2016-2017

Câu I *(2.0 điểm).*

Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}(x>0;x\neq 1)$

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm các giá trị của x để $P>\frac{1}{2}$.

Câu II *(1.5 điểm).*

Cho phương trình: $x^2-5x+m=0$ (1) (m là tham số).

1. Giải phương trình khi m = 6 .
2. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn: $|x_1-x_2|=3$

Câu III *(2.0 điểm).*

Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ 2 là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc mỗi ô tô.

Câu IV *(3.5 điểm).*

Cho đường tròn (O;R); AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O;R) cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác ACBD là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\Delta ACD \sim \Delta CBE$

c) Chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

d) Gọi S, S_1, S_2 thứ tự là diện tích của ΔAEF, ΔBCE và ΔBDF. Chứng minh: $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$

Câu V *(1.0 điểm).*

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a+b\leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

------------------------ HẾT------------------------

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN SƠN LA VÀ PTDT NỘI TRÚ TỈNH SƠN LA NĂM HỌC 2016-2017

Câu I(2đ):

a) Rút gọn biểu thức: $P=\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right):\frac{\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}(x>0;x\neq 1)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right).\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$

$=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}.\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$

$=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$

$=\frac{x-1}{x}$

b)Tìm các giá trị của x để $P>\frac{1}{2}$

Với x > 0, x ≠ 1 thì $\frac{x-1}{x}>\frac{1}{2} <=> 2(x-1)>x <=> x>2$

Vậy với x > 2 thì $P>\frac{1}{2}$

Câu II(1,5đ):

a) Với m = 6 phương trình trở thành: $x^2-5x+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4.1.6=25-24=1>0$

=> phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2}=3; x_2=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2}=2$

b) Để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ ta phải có $\triangle\geq 0$

$<=> (-5)^2-4.1.m\geq 0$

$<=> 25-4m\geq 0$

$<=> m\leq\frac{25}{4}(1)$

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình bậc hai đã cho ta được.

$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1x_2=m \end{cases}(2)$

Mặt khác theo yêu cầu bài toán phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn điều kiện: $|x_1-x_2|=3$ hai vế đẳng thức đều dương, bình phương hai vế ta được:

$(|x_1 - x_2|)^2 = 3^2$

$<=> (x_1 - x_2)^2 = 9$

$<=> (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9(3)$

Thay (2) vào (3) ta được:

$5^2 - 4m = 9$

$<=> m = 4$

Thoả mãn (1) vậy với m = 4 là giá trị cần tìm để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn điều kiện: $|x_1-x_2|=3$

Câu III(2đ):

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai theo thứ tự là: v_1 và v_2 $(v_1 > 0; \mathrm{v}_2 > 0, \mathrm{km/giờ})$

Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10km nên ta có phương trình thứ nhất: $v_1-v_2=10(1)$

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quảng đường AB là: $t_1 = \dfrac{120}{v_1}(h)$

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quảng đường AB là: $t_2 = \dfrac{120}{v_2}(h)$

Vì Ô tô thứ nhất đến trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ nên ta có phương trình thứ hai:

$t_2 - t_1 = 0,4 <=> \dfrac{120}{v_2} - \dfrac{120}{v_1} = 0,4 <=> \dfrac{120(v_1 - v_2)}{v_1v_2} = 0,4(2)$

Thay (1) vào (2) ta được:

$\dfrac{120.10}{v_1v_2} = 0,4 => v_1v_2 = 3000(3)$

Từ (1) => $v_1 = v_2 + 10$ thay vào (3) ta được:

$(3) <=> v_2(v_2 + 10) = 3000$

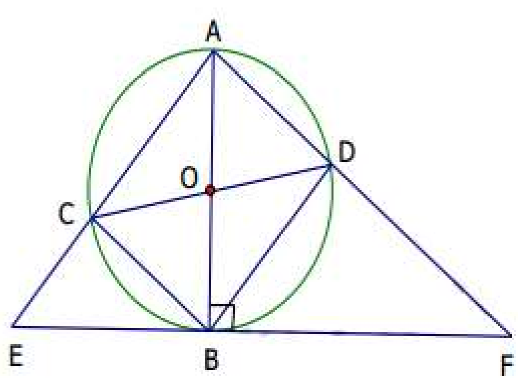
$<=> {v_2}^2 + 10v_2 - 3000 = 0$

$<=> \left[\begin{array}{l} v_2 = 50(TM) \\ \mathrm{v}_2 = -55(L) \end{array}\right.$

Khi $v_2=50=>v_1=50+10=60$

Vậy vận tốc của xe thứ nhất là 60 km/giờ; vận tốc của xe thứ hai là 50 km/giờ

Câu IV(3,5đ):



a) Xét tứ giác ABCD có :

$\begin{cases} AB = CD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases}$ (Đường kính của đường tròn và bán kính của đường tròn).

Tứ giác ACBD có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra ACBD là hình chữ nhật

b) Tứ giác ACBD là hình chữ nhật nên:

CAD= BCE =90º (1). Lại có CBE $= \frac{1}{2}$ sđ BC (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung);

ACD $= \frac{1}{2}$ sđ AD (góc nội tiếp), mà BC =AD (do BC = AD cạnh của hình chữ nhật)⇒CBE =ACD (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ACD \sim \Delta CBE$.

c) Vì ACBD là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: CBE =DFE (3). Từ (2) và (3) suy ra ACD=DFE do đó tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

d) Do CB // AF nên ΔCBE ~ ΔAFE, suy ra: $\frac{S_1}{S} = \frac{EB^2}{EF^2}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{EB}{EF}$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{BF}{EF}$

Từ đó suy ra: $\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$

Câu V(1đ):

Cách 1: Với mọi a, b ta luôn có: $(a - b)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab\,(*)$

Vì a, b đều dương nên ab và a+ b cũng dương bất đẳng thức (*) trở thành:

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow P \geq \frac{4}{a+b}$ mà $a+b \leq 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \geq \sqrt{2}$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a+b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$

Vậy min P=$\sqrt{2}$

Cách 2: Ta có $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow (*)$ giải tiếp ta được.

Cách 3: Với hai số a > 0, b > 0 ta có $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \overset{co-si}{\geq} \frac{2}{\sqrt{ab}} \overset{co-si}{\geq} \frac{2.2}{a+b} = \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Dấu " = " xảy ra $a = b = \sqrt{2}$

Vậy min P=$\sqrt{2}$

Cách 4: Ta chứng minh bài toán sau: Cho a, b là các số dương.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}\,(*)$

Thật vậy áp dụng vất đẳng thức cô sinh cho hai số dương a và b, $\frac{1}{a};\frac{1}{b}$ ta được:

$a+b\geq 2\sqrt{ab}(1)$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}(2)$

Do các vế của (1) và (2) trên đều dương nên nhân vế với vế hai BĐT dương cùng chiều, tađược:

$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a=b.

Áp dụng (*) => P $\geq \frac{4}{a+b}$ vì a+b $\leq 2\sqrt{2}$ => $\frac{1}{a+b}\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ => $\frac{4}{a+b}\geq \frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}(3)$

=> $P\geq \sqrt{2}$ dấu "=" xẩy ra khi (1), (2) và (3) đồng thời xẩy ra dấu "=" và kết hợp với điều kiện bài ra ta có:

Khi đó: $\begin{cases} a=b \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b} \\ a+b=2\sqrt{2} \end{cases}$ => $a=b=\sqrt{2}$ .Vậy minP = $\sqrt{2}$ khi a=b=$\sqrt{2}$

Cách 5: Bằng phương pháp tương đương ta chứng minh bài toán sau: Cho a, b là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b}$ => các bạn giải tiếp.

Cách 6: Cho hai số x, y dương và a, b là hai số bất kì ta có:

$\frac{(a+b)^2}{x+y}\leq \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$ hay $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq \frac{(a+b)^2}{x+y}(1)$ (Bất đẳng thức Svac – xơ)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Thật vậy áp dụng bất đẳng thức Bun nhiacopxki cho

$(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y})(x+y)=\left(\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\right)\left((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\right)$

$\geq (a+b)^2$ => $(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y})(x+y)\geq (a+b)^2$ hay $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$

Áp dụng (1) ta có:

$\left(\frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y}\right)\geq \frac{(1+1)^2}{x+y}$ hay P $\geq \frac{(1+1)^2}{x+y}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Dấu "=" xẩy ra khi và khỉ khi $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ hay a=b kết hợp với điều kiện bài ra ta có:Vậy minP $=\sqrt{2}$ khi a=b=$\sqrt{2}$

------------------------ *Hết*------------------------

Đề số 46. Chuyên SPHN. Năm học: 2016-2017

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$ với 0 < a < 1**.** Chứng minh rằng P = –1

Câu 2 (2,5 điểm). Cho parabol (P): y = -x^2 và đường thẳng d: y = 2mx – 1 với m là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi m = 1

b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $|y_1^2-y_2^2|=3\sqrt{5}$

Câu 3 (1,5 điểm). Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau bằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10 km/h . Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\sqrt{CP.CB}+\sqrt{DP.DA}=AB$

c) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\ge 7$$

————Hết————

ĐÁP ÁN

Câu 1

Với 0 < a < 1 ta có:

$$P=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-\left(\sqrt{1-a}\right)^2}\right]\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}\right]\left[\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}}-\frac{1}{a}\right]$$

$$=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right]\left(\frac{\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}}{a^2}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{2\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}-(1-a)-(1+a)}{2a}$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{-\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)^2}{2a}$$

$$=-\frac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}{2a}$$

$$=-\frac{1+a-1+a}{2a}=-\frac{2a}{2a}=-1$$

Câu 2

a) Khi m = 1 ta có d : y = 2x – 1 và (P): y = –x^2

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

Với $x=-1+\sqrt{2}\Rightarrow y=-3+2\sqrt{2}$

Với $x=-1-\sqrt{2}\Rightarrow y=-3-2\sqrt{2}$

Vậy các giao điểm là $\left(-1+\sqrt{2};-3+2\sqrt{2}\right);\left(-1-\sqrt{2};-3-2\sqrt{2}\right)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P): $-x^2=2mx-1\Leftrightarrow x^2+2mx-1=0$ (*)

Phương trình (*) có Δ’ = $m^2+1>0$ ⇒ (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ∀ m hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Áp dụng Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$

Khi đó ta có $\begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1)^2 - (2mx_2 - 1)^2|$

$\Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| = |(2mx_1 - 1 - 2mx_2 + 1)(2mx_1 - 1 + 2mx_2 - 1)| = |4m(x_1 - x_2)[m(x_1 + x_2) - 1]|$

$= |4m(2m^2 + 1)(x_1 - x_2)| = 4\left|m(2m^2 + 1)\right| |x_1 - x_2| = 4|m|(2m^2 + 1)2\sqrt{m^2 + 1}$

Ta có $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 64m^2(2m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 45 \Leftrightarrow 64(4m^4 + 4m^2 + 1)(m^4 + m^2) = 45$

Đặt $m^4 + m^2 = t \geq 0$ có phương trình $64t(4t + 1) = 45 \Leftrightarrow 256t^2 + 64t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{16}$ (vì $t \geq 0$)

Suy ra $m^4 + m^2 = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Vậy $m = \pm\frac{1}{2}$

Câu 3

Gọi vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu (90 km) là x (km/h) (x > 0)

Vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau là 0,5x (km/h)

Vận tốc của người đi xe máy khi quay trở lại A là x + 10 (km/h)

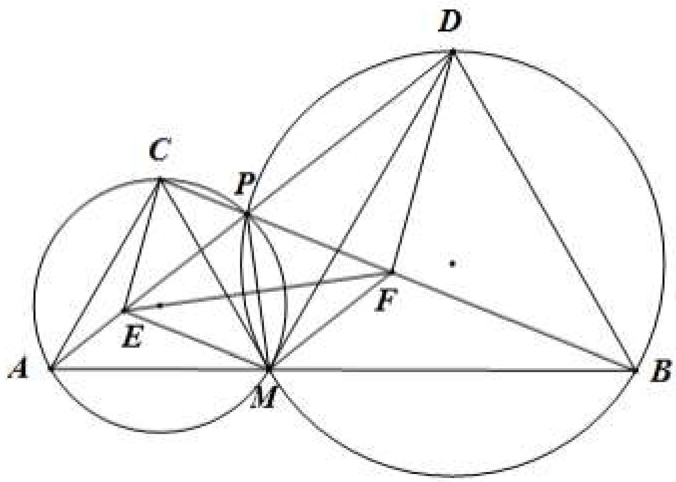
Tổng thời gian của chuyến đi là $\frac{90}{x} + \frac{30}{0,5x} + \frac{120}{x + 10} + \frac{1}{2} = 8,5$

$\Leftrightarrow \frac{90}{x} + \frac{60}{x} + \frac{120}{x + 10} = 8 \Leftrightarrow \frac{150}{x} + \frac{120}{x + 10} = 8 \Leftrightarrow 75(x + 10) + 60x = 4x(x + 10)$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 95x - 750 = 0 \Leftrightarrow x = 30$ (do x > 0)

Vậy vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A là 30 + 10 = 40 (km/h)

Câu 4



a) Vì $CMA = DMB = 60^o \Rightarrow CMB = DMA = 120^o$. Xét Δ CMB và Δ AMD có

$$\begin{cases} CM = AM \\ CMB = DMA \Rightarrow \Delta CMB = \Delta AMD(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} MCB = MAD \\ MBC = MDA \end{cases} \\ MB = MD \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$$CPM = 180^o - CAM = 120^o = CMB \Rightarrow \Delta CPM \sim \Delta CMB(g.g) \Rightarrow \frac{CP}{CM} = \frac{CM}{CB}$$

$\Rightarrow CP.CB = CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP.CB} = CM$. Tương tự $\sqrt{DP.DA} = DM$

Vậy $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = CM + DM = AM + BM = AB$

c) Ta có EF là đường trung trực của PM ⇒ EP = EM ⇒ Δ EPM cân tại E

Mặt khác EPM = ACM = 60º (do AMPC là tứ giác nội tiếp) nên Δ EPM đều

⇒ PE = PM . Tương tự PF = PM

Ta có CM // DB nên PCM = PBD

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên PBD = PMD. Suy ra PCM = PMD

Ta lại có CPM = DPM = 120º $\Rightarrow \Delta CPM \sim \Delta MPD(g.g) \Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{PM}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD}$

Theo định lý Talét đảo ta có CE // DF ⇒ CDFE là hình thang.

Câu 5

Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên $0 \le a, b, c \le 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \ge 0 \\ b(1-b) \ge 0 \\ c(1-c) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge a^2 \\ b \ge b^2 \\ c \ge c^2 \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{5a+4} \ge \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \ge b+2; \sqrt{5c+4} \ge c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \ge (a+b+c)+6 = 7$ (đpcm)