TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
5 2008
Số 371

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Cuộc thi vui
Giải trí ngày hè

Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Qu...
dự thi IMO 2008

12 NĂM

TRƯỜNG THCS CHU MẠNH TRINH

TRUNG TÂM CHẤT LƯỢNG CAO HUYỆN VĂN GIANG, HƯNG YÊN

xây dựng và trưởng thành

ĐỊA CHỈ: Thị trấn Văn Giang, huyện Văn Giang, tỉnh Hưng Yên
ĐT: (0321) 931222 - (0321) 931903

Bà CHU THỊ THUẬN
Hiệu trưởng - Bí thư chi bộ

Tháng 9 năm 1996, theo quyết định của UBND huyện Châu Giang - Hưng Yên, trường được thành lập với tên gọi Trường THCS Năng khiếu II Văn Giang. Năm 1999, trường được đổi tên là trường THCS Chu Mạnh Trinh.

Năm học đầu tiên, trường có 5 lớp: 1 lớp 5, và 4 lớp khối cấp II với 195 học sinh và 10 cán bộ giáo viên. Sau 12 năm xây dựng và phát triển, hiện nay trường có 12 lớp với 482 học sinh và 32 cán bộ giáo viên, trong đó có 17 cán bộ có trình độ đại, học, 100% giáo viên đạt chuẩn và trên chuẩn. Khuôn viên của trường gồm 2 dãy nhà cao tầng kiên cố với 12 phòng học hiện đại. có đủ các phòng chức năng phục vụ cho các hoạt động học tập văn hóa, y tế, sinh hoạt đoàn thể..

Suốt chặng đường 12 năm xây dựng và trưởng thành, với sự quan tâm chỉ đạo sâu sát của UBND, Phòng GD&ĐT huyện Văn Giang, giáo viên và học sinh của nhà trường đã gặt hái nhiều thành tích dạy tốt, học tốt, nhà trường trở thành một trung tâm chất lượng cao, một địa chỉ tin cậy của các bậc phụ huynh và học sinh trong toàn huyện. Hàng năm tỉ lệ học sinh tốt nghiệp THCS là 100%, trong đó có 98 % đến 100 % đạt loại khá và giỏi; 100% đỗ vào các trường THPT. Đặc biệt, nhiều em thi đỗ vào lớp chuyên của các trường Đại học, Hà Nội - Amsterdam, THPT chuyên Hưng Yên với số điểm rất cao. Trường liên tục đứng thứ nhất trong toàn huyện về chất lượng học sinh giỏi với 1610 lượt học sinh giỏi cấp huyện, 360 học sinh lớp 9 đoạt học sinh giỏi cấp tỉnh trong đó có nhiều giải Nhất, Nhì, Ba . Chỉ riêng năm học 2007 - 2008 trường có 135 giải học sinh giỏi cấp huyện, 34 giải cấp tỉnh các môn văn hóa. Đội tuyển Tin học trẻ không chuyên của trường đứng thứ Nhất tỉnh với 2 giải Nhất, 1 giải Nhì.

Nhà trường rất quan tâm đến giáo dục toàn diện cho học sinh. Các em trường THCS Chu Mạnh Trinh không chỉ học giỏi mà còn tham gia các phong trào TDTT rất sôi nổi. Trong Hội khỏe Phù Đổng tỉnh Hưng Yên các em đã đoạt 6 Huy chương Vàng, Huy chương Bạc, Huy chương Đồng về thi bóng bàn, cầu lông.

Nhà trường có 120 lượt giáo viên giỏi cấp huyện, trong đó có nhiều giáo viên đoạt giải Nhất; có 10 giáo viên được công nhận giáo viên giỏi cấp tỉnh ; 1 Chiến sĩ thi đua cấp tỉnh. Nhà trường liên tục 11 năm đạt danh hiệu *"Trường tiên tiến xuất sắc"*, trong đó có 3 năm liền được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen. Chi bộ đạt danh hiệu:*"Tổ chức cơ sở Đảng trong sạch, vững mạnh"* và được Tỉnh ủy, Huyện ủy tặng Bằng khen, Giấy khen. Công đoàn nhà trường nhiều năm được Công đoàn ngành và Công đoàn huyện tặng Bằng khen. Liên đội thiếu niên Tiền phong Hồ Chí Minh liên tục là Liên đội mạnh cấp huyện.

Trong suốt 12 năm qua, nhà trường luôn là điểm sáng của phong trào giáo dục huyện Văn Giang nói riêng và tỉnh Hưng Yên nói chung, đã có nhiều đóng góp xuất sắc cho phong trào giáo dục - đào tạo Văn Giang, một vùng đất ven sông Hồng văn hiến từ ngàn xưa, xứng danh với tên tuổi của nhà thơ - tiến sĩ Chu Mạnh Trinh mà mái trường đã mang tên. Giai đoạn tới, nhà trường sẽ vững vàng tiến bước trên con đường giáo dục, đáp ứng những yêu cầu trước mắt và lâu dài về chiến lược con người trong sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước.

Hội đồng sư phạm của nhà trường

Về một tứ giác "ĐẸP"

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

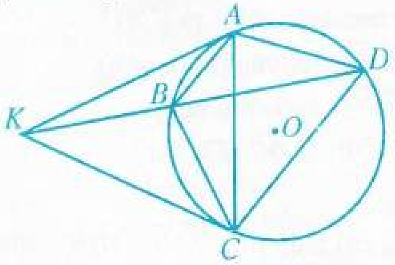
Trong nhiều bài toán, ta gặp tình huống sau: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến KA, KC và cát tuyến KBD với đường tròn đó (h. 1). Tứ giác $ABCD$ ở hình 1 có nhiều tính chất thú vị, ta gọi nó là một "Tứ giác đẹp". Tứ giác đặc biệt này đã được nghiên cứu trên THTT số tháng 1/2001. Sau đây, chúng ta cùng tìm hiểu thêm một số tính chất của "tứ giác đẹp".

A. Vài tính chất của tứ giác "đẹp"

Tính chất sau đây đã nhận được trên THTT số tháng 1/2001.

Tính chất 1. *Trong tứ giác "đẹp", các tích của hai cạnh đối bằng nhau.*

Tính chất 1 có liên quan đến tích của hai cạnh đối của một tứ giác nội tiếp, điều đó làm ta nhớ đến định lí Ptolemy: *Trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cạnh đối* (bạn đọc tự chứng minh định lí này).



Hình 1

Xét tứ giác $ABCD$ (h. 1), ta có $AB.CD = AD.BC$.
Theo định lí Ptolemy ta có

$$AB.CD+AD.BC= AC.BD.$$

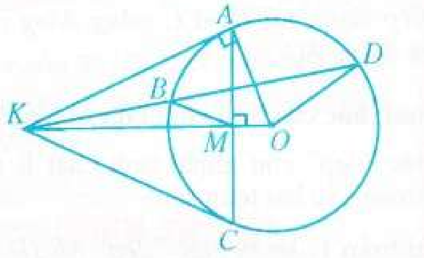
Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$AB.CD = AD.BC = \frac{1}{2}AC.BD.$$

Từ đó ta nhận được tính chất sau.

Tính chất 2. *Trong tứ giác "đẹp", tích của hai cạnh đối bằng nửa tích của hai đường chéo.*

Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$ nói trên, gọi M là giao điểm của AC và KO (h. 2).



Hình 2

Do KA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$KA^2 = KB.KD \qquad (1)$$

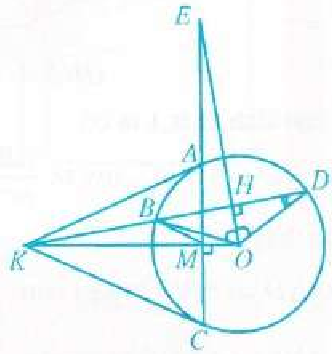
Mặt khác, AM là đường cao của tam giác vuông AKO nên $KA^2 = KO.KM$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $KB.KD = KO.KM$.

Từ đó dễ dàng chứng minh được tính chất sau.

Tính chất 3. *Tứ giác BMOD là tứ giác nội tiếp.*

Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$, gọi M là giao điểm của AC và KO, kẻ OH vuông góc với BD. Kéo dài OH cắt CA ở E (h. 3).



Hình 3

Theo tính chất 3, tứ giác $BMOD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BMO}=180^\circ-\widehat{BDO}$, suy ra $\widehat{BME}=\widehat{BMO}-90^\circ$

$$=180^\circ-\widehat{BDO}-90^\circ=90^\circ-\widehat{BDO} \qquad (3)$$

Ta lại có $\widehat{BOE}=\widehat{DOE}=90^\circ-\widehat{BDO}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BME}=\widehat{BOE}$, do đó ta có

Tính chất 4. *Tứ giác BMOE là tứ giác nội tiếp.*

Từ các tính chất 3 và 4, ta suy ra năm điểm E, B, M, O, D thuộc cùng một đường tròn, do đó

1 – TH&TT5-A

ta chứng minh được $\widehat{OBE}=90°$, $\widehat{ODE}=90°$, hay EB và ED là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tính chất 5. *EB và ED là các tiếp tuyến của đường tròn (O).*

Nhận xét. Có thể diễn đạt tính chất 5 như sau:

Nếu tứ giác nội tiếp $ABCD$ có các tiếp tuyến tại A và C đồng quy với đường thẳng BD thì các tiếp tuyến tại B và C cũng đồng quy với đường thẳng AC.

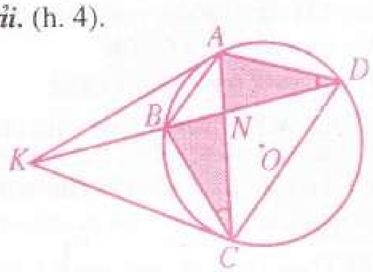
B. Khai thác các tính chất của tứ giác "đẹp"

Tứ giác "đẹp" còn nhiều tính chất lí thú thể hiện trong các bài toán sau.

✪Bài toán 1. *Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$. Gọi N là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng*

$$\frac{NA}{NC}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\left(\frac{AD}{CD}\right)^2.$$

Lời giải. (h. 4).



Hình 4

Theo tính chất 1 ta có

$AB.CD = AD.BC$, suy ra $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}=k$.

Dễ thấy

$\Delta AND \backsim \Delta BNC$ (g.g) nên $\dfrac{NA}{NB}=\dfrac{AD}{BC}$ (5)

$\Delta ANB \backsim \Delta DNC$ (g.g) nên $\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{AB}{CD}$ (6)

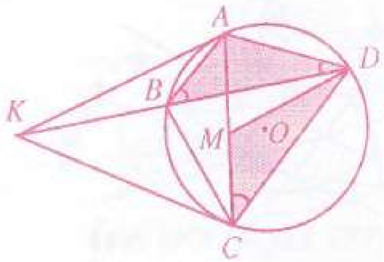
Nhân theo vế (5) với (6) có $\dfrac{NA}{NB}.\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{AD}{BC}.\dfrac{AB}{CD}$

hay $\dfrac{NA}{NC}=\dfrac{AB}{BC}.\dfrac{AD}{CD}=k.k=k^2$.

Vậy $\dfrac{NA}{NC}=\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2=\left(\dfrac{AD}{CD}\right)^2$. □

✪Bài toán 2. *Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$.*

Lời giải. *Cách 1.* (h. 5).



Hình 5

Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$).

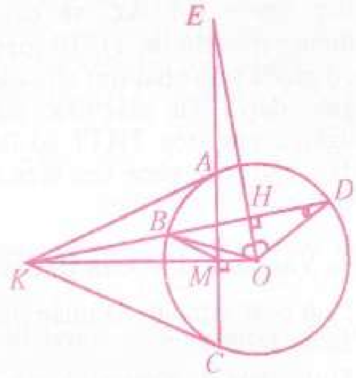
Từ tính chất 2 ta có $AB.CD=\frac{1}{2}.AC.BD = MC.BD$.

Suy ra $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{MC}{CD}$. Từ đó $\Delta ABD \backsim \Delta MCD$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$.

Cách 2.(h. 6).

Kẻ $OH \perp BD$, cắt CA ở E. Theo tính chất 5, BE là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$\widehat{BCD}=\widehat{EBD}$ (7)



Hình 6

Theo các tính chất 3 và 4, các điểm E, B, M, D thuộc cùng một đường tròn nên

$$\widehat{EMD}=\widehat{EBD} \quad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra $\widehat{BCD}=\widehat{EMD}$, dẫn đến $\widehat{BAD}=\widehat{CMD}$.

Xét hai tam giác BAD và CMD có

$\widehat{BAD}=\widehat{CMD}$ (chứng minh trên),

$\widehat{ABD}=\widehat{MCD}$ (góc nội tiếp).

Do đó $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$. □

Nhận xét

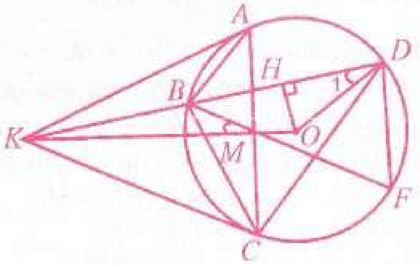
a) Trong bài toán trên $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$, tức là góc tạo bởi DB và cạnh DA bằng góc tạo bởi trung tuyến DM và cạnh DC, ta gọi DB là đường đối trung của tam giác DAC. Bằng cách chứng minh tương tự như chứng minh bài toán 2, ta cũng có các kết quả sau:

BD là đường đối trung của tam giác *BAC*;
AC là đường đối trung của tam giác *ABD*;
CA là đường đối trung của tam giác *CBD*.

b) Có thể diễn đạt bài toán 2 như sau: *Trong một tứ giác "đẹp", đường chéo này là đường đối trung của tam giác có một cạnh là đường chéo kia, hai cạnh còn lại là hai cạnh của tứ giác.*

✪**Bài toán 3.** *Xét tứ giác "đẹp" ABCD. Gọi M là trung điểm của AC, F là giao điểm của BM và đường tròn (O). Chứng minh rằng DF song song với AC.*

Lời giải. *Cách 1.* (h. 7).



Hình 7

Kẻ $OH \perp BD$. Theo tính chất 3, *BMOD* là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{KMB} = \widehat{D_1}$. Suy ra hai góc phụ với hai góc trên bằng nhau, tức là $\widehat{AMB} = \widehat{DOH}$.

Ta lại có $\widehat{DOH} = \widehat{DFB}$ (cùng bằng nửa số đo cung *BD*). Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{DFB}$, vậy *DF*// *AC*.

Cách 2. (h. 7). Theo tính chất của góc nội tiếp ta có $\widehat{CDF} = \widehat{CBF}$, $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$.

Theo bài toán 2, ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CBF}$. Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{CDF}$, vậy *DF*// *AC*. ❒

Tiếp tục khai thác tứ giác "đẹp", chắc chắn bạn đọc sẽ còn phát hiện thêm nhiều kết quả lí thú. Bạn đọc yêu thích tứ giác "đẹp" có thể làm thêm bài tập sau.

BÀI TẬP

Cho đường tròn (*O*), dây *AB*. Gọi *C* là điểm đối xứng với *A* qua *B*. Kẻ tiếp tuyến tại *A* cắt *CD* ở *E*. Gọi *I* là giao điểm của *EB* với đường tròn (*O*). Chứng minh rằng

a) $\Delta AID \backsim \Delta CBD$;

b) *ID* song song với *AB*.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HOÁ NĂM HỌC 2007-2008

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (1,5 *điểm*)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy = 2(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 4zx = 3(z+x). \end{cases}$

Câu 2. (2 *điểm*). Đội bóng bàn của trường *A* thi đấu với đội bóng bàn của trường *B*, mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với mọi đấu thủ của trường kia 1 trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường *B* là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội.

Câu 3. (3 *điểm*). Cho hai điểm *A* và *B* cố định trên đường tròn (*O*). *C* là điểm chính giữa cung *AB*, *M* là điểm chuyển động trên dây *AB*. Tia *CM* cắt đường tròn (*O*) tại điểm thứ hai là *D*. Chứng minh rằng

1) $AC^2 = CM.CD$.

2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADM* thuộc một đường thẳng cố định.

3) Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ADM* và *BDM*. Chứng minh $R_1 + R_2$ là hằng số.

Câu 4. (2 *điểm*). Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho ba điểm *A*(0 ; 3), *B*(4 ; 0), $C\left(5;\frac{3}{4}\right)$ cùng với *O* tạo thành tứ giác lồi *AOBC*. Viết phương trình đường thẳng (*d*) đi qua *A* và chia tứ giác *AOBC* thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Câu 5. (1,5 *điểm*). Chứng minh rằng nếu *a*, *b*, *c* là các số nguyên khác 0 thoả mãn $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$ thì tích *abc* là lập phương của một số nguyên.

PHẠM NGỌC QUANG
(*Sở GD - ĐT Thanh Hoá*) giới thiệu

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN
Trường THPT AMSTERDAM và THPT CHU VĂN AN Hà Nội
NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đăng trên THTT số 369, tháng 3 năm 2008)

Bài 1. 1) Thế $x^2 = 10 - y^2$ vào PT (1) ta được

$$2y^2 + (5-x)y + (x-7) = 0 \qquad (2)$$

Coi y là ẩn, giải PT (2) ta được $y = 1$; $y = \dfrac{x-7}{2}$.

- Với $y = 1$, dẫn đến $x^2 = 9$, suy ra $x = \pm 3$.
- Với $y = \dfrac{x-7}{2}$, dẫn đến $5x^2 - 14x + 9 = 0$, giải ra được $x = 1$, $x = \dfrac{9}{5}$.

Vậy PT (1) có bốn cặp nghiệm $(x\,;\,y)$ là

$(3\,;\,1)$, $(-3\,;\,1)$, $(1\,;\,-3)$, $\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{-13}{5}\right)$.

2) Ta có (1) $\Leftrightarrow (x+3y+1)(x-y-3) = -7$.

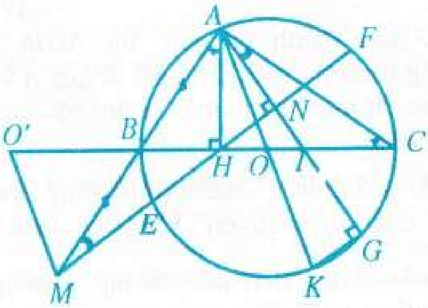
Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên xảy ra bốn trường hợp sau:

$$\begin{cases} x+3y+1=1 \\ x-y-3=-7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+3y+1=-1 \\ x-y-3=7 \end{cases} \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} x+3y+1=7 \\ x-y-3=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+3y+1=-7 \\ x-y-3=1. \end{cases}$$

Từ đó giải ra các nghiệm nguyên $(x\,;\,y)$ của PT (1) là $(-3\,;\,1)$, $(7\,;\,-3)$, $(3\,;\,1)$, $(1\,;\,-3)$.

Bài 2. (Xem hình vẽ). 1) Lấy O' đối xứng với O qua B, khi đó O' cố định. Dễ dàng chứng minh được $O'M = OA = R$, do đó M chuyển động trên đường tròn $(O'\,;R)$ cố định.



2) Ta có ΔABC vuông ở A nên $\widehat{MAH} = \widehat{ACI}$ (1)

và $\dfrac{AC}{HC} = \dfrac{AB}{AH}$, suy ra $\dfrac{AC}{CI} = \dfrac{AM}{AH}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\Delta AHM \backsim \Delta CIA$ (c.g.c).

3) Đặt $HM \cap AI = \{N\}$. Do $\Delta AHM \backsim \Delta CIA$ nên $\widehat{AMH} = \widehat{CAI}$, suy ra

$$\widehat{AMN} + \widehat{NAM} = \widehat{CAI} + \widehat{NAM} = 90^\circ.$$

Từ đó suy ra MH vuông góc với AI.

4) Kẻ đường kính AK, khi đó $\widehat{AGK} = 90^\circ$. Từ đó và câu 3) suy ra $KG \,//\, EF$. Tứ giác $EKGF$ là hình thang nội tiếp đường tròn (O) nên $EKGF$ là hình thang cân. Do đó $GF = EK$, suy ra $AE^2 + GF^2 = AE^2 + EK^2 = AK^2 = 4R^2$.

Tương tự ta được $EG^2 + FA^2 = 4R^2$.

Vậy $AE^2 + GF^2 + EG^2 + FA^2 = 8R^2$.

Bài 3. Gọi số phải tìm là $10000A + 2008$ (với $A \in \mathbb{N}$). Ta có $(10000A + 2008) \,\vdots\, 2007$

$\Leftrightarrow 1972A + 1 \,\vdots\, 2007 \Leftrightarrow 1972A + 1 = 2007k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Từ đó $A = \dfrac{2007k-1}{1972} = k + \dfrac{35k-1}{1972}$.

Do $A \in \mathbb{N}$ nên $35k - 1 = 1972m$, với $m \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $1972m + 1 \,\vdots\, 35 \Leftrightarrow 12m + 1 \,\vdots\, 35$

Tìm được $m = 32$ là số nhỏ nhất thoả mãn. Khi đó $A = 1835$.

Vì số cần tìm là nhỏ nhất khi A nhỏ nhất, dẫn đến m là nhỏ nhất. Do đó số nhỏ nhất cần tìm là 18352008.

Bài 4. Có tất cả 12 tổng (5 cột, 5 hàng, 2 đường chéo). Do chọn điền vào ô các số -1 ; 0 ; 1 nên giá trị mỗi tổng S là số nguyên thoả mãn $-5 \le S \le 5$. Vậy S có thể nhận 11 giá trị.

Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 5. Ta có

$2S = 2^n + 2.2^{n-1} + 3.2^{n-2} + \ldots + (n-1).2^2 + 2n$.

suy ra $2S - S = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2 - n$

hay $S = 2(2^n - 1) - n = 2^{n+1} - (n+2)$.

VŨ QUỐC LƯƠNG

(GV THCS Chu Văn An) giới thiệu.

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2008

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT*)

Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 49 năm 2008 (IMO 2008) đã được tổ chức tại Hà Nội, trong hai ngày 29 và 30/3/2008.

Căn cứ Quy chế thi hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập tất cả 33 học sinh đoạt giải trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2008 tham dự kì thi tuyển chọn nêu trên. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải ba bài toán trong thời gian 240 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20 điểm.

1. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất, 29/3/2008

Bài 1. Trên mặt phẳng, cho góc xOy. Xét điểm M thay đổi trên tia Ox và điểm N thay đổi trên tia Oy. Kí hiệu d là đường phân giác ngoài của góc xOy và gọi I là giao điểm của d với đường trung trực của đoạn thẳng MN. Trên d, lấy hai điểm P, Q sao cho $IP = IQ = IM = IN$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng MQ và NP.

1) Chứng minh rằng K luôn nằm trên một đường thẳng cố định, khi M và N thay đổi trên Ox và Oy.

2) Xét các điểm M, N trên các tia Ox và Oy sao cho đường thẳng d_1 vuông góc với IM tại M và đường thẳng d_2 vuông góc với IN tại N đều cắt đường thẳng d. Gọi E, F tương ứng là giao điểm của d_1, d_2 với d. Chứng minh rằng các đường thẳng EN, FM và OK đồng quy.

Bài 2. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương m sao cho tồn tại các đa thức với hệ số thực $P(x)$, $Q(x)$, $R(x, y)$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi số thực a, b mà $a^m - b^2 = 0$, ta luôn có

$$P(R(a, b)) = a \text{ và } Q(R(a, b)) = b.$$

Bài 3. Cho số nguyên $n > 3$. Kí hiệu T là tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên. Một tập con S của T được gọi là *tập khuyết* trong T nếu S có tính chất: Tồn tại số nguyên dương c không vượt quá $\frac{n}{2}$ sao cho với s_1, s_2 là hai số bất kì thuộc S ta luôn có $|s_1 - s_2| \neq c$. Hỏi tập khuyết trong T có thể có tối đa bao nhiêu phần tử ?

Ngày thi thứ hai, 30/3/2008

Bài 4. Cho m và n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng $(2m+3)^n + 1$ chia hết cho $6m$ khi và chỉ khi $3^n + 1$ chia hết cho $4m$.

Bài 5. Cho k là số thực dương. Cho tam giác nhọn, không cân ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và AD, BE, CF là các đường phân giác trong. Trên các tia AD, BE, CF lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho $\frac{AL}{AD} = \frac{BM}{BE} = \frac{CN}{CF} = k$. Kí hiệu (O_1), (O_2), (O_3) tương ứng là đường tròn đi qua L và tiếp xúc với OA tại A, đường tròn đi qua M và tiếp xúc với OB tại B, đường tròn đi qua N và tiếp xúc với OC tại C.

1) Chứng minh rằng với $k = \frac{1}{2}$, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung và trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.

2) Hãy xác định tất cả các giá trị k để ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.

Bài 6. Kí hiệu M là tập hợp gồm 2008 số nguyên dương đầu tiên. Tô tất cả các số thuộc M bởi ba màu xanh, vàng, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu và mỗi màu đều được dùng để tô ít nhất một số.

Xét các tập hợp:

$S_1 = \{(x, y, z) \in M^3 \mid x, y, z$ có cùng màu và $(x + y + z) \equiv 0 \pmod{2008}\}$;

$S_2 = \{(x, y, z) \in M^3 \mid x, y, z$ đôi một khác màu và $(x + y + z) \equiv 0 \pmod{2008}\}$.

Chứng minh rằng $2|S_1| > |S_2|$.
(M^3 kí hiệu tích Đề các $M \times M \times M$ và $|X|$ kí hiệu số phần tử của tập hữu hạn X).

2. CHẤM THI VÀ KẾT QUẢ

a/ Biểu điểm. Sau khi thảo luận, tổ chấm thi đã hoàn toàn đồng ý phân bố điểm cho các bài toán thi do tổ soạn thảo đề thi đề xuất; cụ thể như sau:

Bài 1: *6 điểm* (Câu 1: 2 *điểm*; Câu 2: 4 *điểm*);
Bài 2, *Bài 3*: *mỗi bài 7 điểm*; *Bài 4*: *6 điểm*;
Bài 5: *7 điểm* (Câu 1: 2,5 *điểm*; Câu 2: 4,5 *điểm*);
Bài 6: *7 điểm*.

b/ Đôi nét về tình hình làm bài của các thí sinh

– Không thí sinh nào giải được câu 2 của Bài 5; hầu hết các thí sinh giải được câu 1 của Bài 5 đều không đạt điểm tối đa của câu này, do ngộ nhận "ba đường tròn có đúng hai điểm chung khi và chỉ khi ba tâm của chúng thẳng hàng", hay "ba đường tròn có đúng hai điểm chung khi và chỉ khi chúng có chung trục đẳng phương". (?!)

– Không ít thí sinh đã tự làm khó mình bằng việc sử dụng các công cụ quá phức tạp để xử lí các bài toán mà để giải quyết chúng, chỉ đòi hỏi khả năng tư duy lô gic tốt chứ không đòi hỏi phải biết các công cụ "dao to, búa lớn".

– Dưới đây là các số liệu thống kê số thí sinh giải hoàn chỉnh (hoặc hầu như hoàn chỉnh) mỗi bài toán thi:

Bài	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Số TS giải hoàn chỉnh	24	9	9	11	0	4

– Có ba thí sinh giải hoàn chỉnh (hoặc hầu như hoàn chỉnh) cả ba bài toán thi của ngày thi thứ nhất.

c/ Kết quả. Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định chọn 6 học sinh có điểm thi cao nhất (có tên dưới đây) vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2008:

STT	*Họ và Tên*	*Lớp*	*Trường - Tỉnh*	*Điểm thi*		
				Ngày 1	*Ngày 2*	*Tổng*
1	Lê Ngọc Anh	12	THPT Lam Sơn - Thanh Hóa	19.50	13.50	**33.00**
2	Nguyễn Phạm Đạt	11	Khối THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội	20.00	9.00	**29.00**
3	Đỗ Thị Thu Thảo	12	THPT Nguyễn Trãi - Hải Dương	19.50	9.00	**28.50**
4	Hoàng Đức Ý	12	THPT Lam Sơn - Thanh Hóa	14.00	14.00	**28.00**
5	Dương Trọng Hoàng	12	Khối THPT Chuyên - ĐH Vinh	12.00	12.50	**24.50**
6	Đặng Trần Tiến Vinh	11	PTNK - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh	9.50	12.50	**22.00**

Đứng đồng hạng ở vị trí thứ 7 là ba thí sinh cùng đạt 21 điểm: *Vũ Ngọc Đào* (lớp 12, THPT Lê Hồng Phong, Nam Định), *Nguyễn Ngọc Đại* (lớp 12, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc) và *Nguyễn Thọ Tùng* (lớp 11, Khối THPT Chuyên – ĐHSP Hà Nội); đứng ở vị trí thứ 10 là thí sinh *Phạm Văn Giang* (lớp 12, THPT Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc; 20,5 điểm); ....

Theo Quy chế hiện hành, tất cả các thí sinh là học sinh lớp 12 đều được miễn thi tốt nghiệp THPT năm 2008.

Ngày 26/4/2008, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập sáu thành viên của Đội tuyển Quốc gia về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn chuẩn bị cho IMO 2008. Trường Đại học Sư phạm Hà Nội được Bộ Giáo dục và Đào tạo giao nhiệm vụ chủ trì việc tập huấn đội tuyển, dưới sự chỉ đạo và giám sát của Bộ.

LTS. *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhiệt liệt chúc mừng 6 học sinh có tên nêu trên và chúc các em giữ gìn sức khỏe thật tốt, nỗ lực học tập và trau dồi chuyên môn để chuẩn bị tốt nhất cho việc dự thi IMO 2008, tổ chức tại Madrid – Tây Ban Nha từ ngày 10/7 đến ngày 22/7/2008.*

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH SIÊU VIỆT

PHẠM GIA LINH
(Hà Nội)

Để giải phương trình (PT) và bất phương trình (BPT) siêu việt (mũ, lôgarit, lượng giác) ta cần nắm vững các kiến thức cơ bản và các phương pháp giải của nó.

A. PT VÀ BPT MŨ, LÔGARIT

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa và các tính chất của luỹ thừa (với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ, số mũ thực) và lôgarit.

2. Tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

3.. Các PT và BPT cơ bản

- Với mọi số dương m thì

$a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m \ (0 < a \neq 1)$;

$$a^x > m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \log_a m \ \text{ khi } a > 1, \\ x < \log_a m \ \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

- Với mọi số thực m thì

$\log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m$;

$$\log_a x > m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a^m \text{ khi } a > 1 \\ x < a^m \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

Trường hợp $a^x < m$, $\log_a x < m$ xét tương tự.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1) Phương pháp đưa về cùng cơ số

★**Thí dụ 1.** *Giải PT* $2^{x+1}.\ 5^x = 2.\ 10^{2x+5}$ (1)

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow 10^x = 10^{2x+5} \Leftrightarrow x = 2x + 5$.

Vậy $x = -5$. □

★**Thí dụ 2.** *Giải PT*

$$\log_3(2x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(3-x) = 0 \quad (2)$$

Lời giải. Biến đổi (2) $\Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3 \dfrac{1}{3-x}$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = \frac{1}{3-x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 2 = 0 \\ x < 3. \end{cases}$$

ĐS. $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$. □

★**Thí dụ 3.** *Giải BPT*

$$\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1) \quad (3)$$

Lời giải. (3) $\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 80(2^{x-2}+1)$

$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2}+1) \Leftrightarrow 4^x - 20.\ 2^x + 64 < 0$

$\Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$. □

★**Thí dụ 4.** *Giải BPT*

$$(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5}+2)^{x-1} \quad (4)$$

Lời giải. Do $\sqrt{5}+2 = (\sqrt{5}-2)^{-1}$ và $\sqrt{5}-2 < 1$ nên $(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}} \leq (\sqrt{5}-2)^{1-x} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} \geq 1 - x$.

ĐS. $x \geq 1$ hoặc $-2 \leq x < -1$. □

Lưu ý 1. Cần nhớ

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$;

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \text{ khi } a > 1, \\ f(x) < g(x) \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

$$\log_a f(x) > \log_a(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) > 0 \text{ khi } a > 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \text{ khi } 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

2) Phương pháp đặt ẩn phụ

★**Thí dụ 5.** *Giải PT*

$$(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62 \quad (5)$$

Lời giải. Nhận xét $(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15}) = 1$.

Đặt $t = (4+\sqrt{15})^x$ $(t > 0)$ thì PT (5) có dạng $t + \dfrac{1}{t} = 62 \Leftrightarrow t^2 - 62t + 1 = 0$, PT có hai nghiệm $t = 31 \pm 8\sqrt{15} = \left(4 \pm \sqrt{15}\right)^2$.

Với $t = (4+\sqrt{15})^2$ thì $(4+\sqrt{15})^x = (4+\sqrt{15})^2 \Leftrightarrow x = 2$; Với $t = (4-\sqrt{15})^2$ thì $x = -2$.

Vậy PT (5) có tập nghiệm là $\{-2 ; 2\}$. □

★**Thí dụ 6.** *Giải BPT*

$$\frac{6}{\log_2 2x}+\frac{4}{\log_2 x^2}>3 \qquad (6)$$

Lời giải. Đặt $t = \log_2 x$ $(t \neq 0)$ thì (6) có dạng

$$\frac{6}{1+t}+\frac{2}{t}>3 \Leftrightarrow \frac{-3t^2+5t+2}{(1+t)t}>0 \Leftrightarrow -1<t<-\frac{1}{3}$$

hoặc $0<t<2$. Khi đó $-1<\log_2 x<-\frac{1}{3}$ hoặc $0<\log_2 x<2$.

Vậy tập nghiệm của (6) là $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup(1;4)$. □

★**Thí dụ 7.** *Giải PT*

$$3.\,49^x+2.\,14^x-4^x=0 \qquad (7)$$

Hướng dẫn. Chia hai vế của PT cho 4^x rồi đặt $t=\left(\frac{7}{2}\right)^x$. ĐS. $x=-\log_{\frac{7}{2}}3$.

Lưu ý 2. Mục đích của phương pháp đặt ẩn phụ là chuyển các bài toán đã cho về PT (hoặc BPT) hữu tỉ đã biết cách giải.

Dạng $(a+\sqrt{b})^{f(x)} \pm (a-\sqrt{b})^{f(x)}=c$ (hoặc $>c$) với $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=1$ nên đặt $t=(a+\sqrt{b})^{f(x)}$.

Dạng $au^{2f(x)}+b(uv)^{f(x)}+cv^{2f(x)}=0$, thì nên chia cho $v^{2f(x)}$ rồi đặt $t=\left(\frac{u}{v}\right)^{f(x)}$; Khi biến đổi PT về dạng $af(x)^2+bf(x)+c=0$ (hoặc >0) với $f(x)=m^{g(x)}$ hoặc $f(x)=\log_m g(x)$, ta đặt $t=f(x)$ để đưa về PT (hoặc BPT) bậc hai ẩn t.

3) Phương pháp lôgarit hoá

★**Thí dụ 8.** *Giải PT* $\quad 3^x.8^{\frac{x}{x+2}}=6 \qquad (8)$

Lời giải. ĐK $x\neq -2$. Lôgarit cơ số 3 hai vế có

$$x+\frac{3x}{x+2}\log_3 2=1+\log_3 2 \Leftrightarrow (x-1)\left(1+\frac{2\log_3 2}{x+2}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-2(1+\log_3 2)$. □

★**Thí dụ 9.** *Giải PT* $\quad 2^{x^2+4}=3^{x-2} \qquad (9)$

Hướng dẫn. Lôgarit cơ số 2 hai vế.

ĐS. Tập nghiệm của PT (9) là $\{2 ; \log_2 3-2\}$.

Lưu ý 3. Phương pháp lôgarit hoá rất có hiệu lực khi hai vế của PT có dạng tích các luỹ thừa nhằm chuyển ẩn số khỏi số mũ. Cần nhớ

$a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b$ $(0<a\neq 1,\ b>0)$;

$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\log_b a=g(x)$.

4) Phương pháp sử dụng tính chất của hàm số

★**Thí dụ 10.** *Giải PT* $\quad 3^x=3-\log_5 x \qquad (10)$

Lời giải. Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của (10).

Với $x>1$ thì $3^x>3^1=3-\log_5 1>3-\log_5 x$;

Với $x<1$ thì $3^x<3^1=3-\log_5 1<3-\log_5 x$.

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của (10). □

★**Thí dụ 11.** *Giải PT* $\quad 2^x=3^{\frac{x}{2}}+1 \qquad (11)$

Lời giải. $(11) \Leftrightarrow 1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Dễ thấy $x=2$ là một nghiệm của (11).

Với $x>2$ thì $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$;

Với $x<2$ thì $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của PT (11). □

★**Thí dụ 12.** *Giải PT* $\log_3(x+1)=\frac{4}{x+2} \qquad (12)$

Hướng dẫn. Vế trái là HS đồng biến, vế phải là HS nghịch biến. ĐS. $x=2$.

Lưu ý 4. Nếu PT có nghiệm x_o, một vế của PT là HS đồng biến, vế kia là HS nghịch biến (hoặc là HS hằng) thì nghiệm x_o là duy nhất.

5) Hệ phương trình mũ và lôgarit

★**Thí dụ 13.** *Giải HPT* $\begin{cases}2^x.3^y=12\\ 3^x.2^y=18.\end{cases}$

Lời giải. Lôgarit cơ số 2 cả hai vế của hai PT $\begin{cases}x+y\log_2 3=2+\log_2 3\\ x\log_2 3+y=1+2\log_2 3\end{cases}$, đây là HPT bậc nhất hai ẩn. Giải tìm được $(x ; y)=(2 ; 1)$. □

★Thí dụ 14. *Giải HPT*

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 & \text{(i)}\\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3 & \text{(ii)}\end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x \geq 1$, $0 < y \leq 2$.

(ii) $\Leftrightarrow 3(1+\log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y$ $\Leftrightarrow x = y$. Thay $y = x$ vào (i) dẫn đến $(x-1)(2-x)=0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Vậy HPT có hai nghiệm $(x\,;y)$ là $(1\,;1)$; $(2\,;2)$. □

★Thí dụ 15. *Giải HPT* $\begin{cases}\log_x(3x+2y)=2\\ \log_y(3y+2x)=2.\end{cases}$

Hướng dẫn. Đưa về HPT đối xứng loại II, từ đó tìm được nghiệm $(x\,;y)=(5\,;5)$.

★Thí dụ 16. *Giải HPT* $\begin{cases}5\log_2 x-3\log_4 y=-8\\ 10\log_2 x^2-\log_4 y=-9.\end{cases}$

Hướng dẫn. Đặt $u=\log_2 x$, $v=\log_4 y$.

Lưu ý 5. Ta cũng dùng các phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ,.. như HPT hữu tỉ đã biết.

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các công thức lượng giác.

2. Các phương trình lượng giác cơ bản
$\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$.

3. Phương trình dạng $a\sin x + b\cos x = c$,
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$.

4. PT đưa về PT đa thức của một hàm số lượng giác.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

★ Thí dụ 17. Giải PT

$$\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=4 \qquad (13)$$

Lời giải. ĐK $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$.
Biến đổi vế trái của (13) ta có

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}$$

$=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$. Suy ra $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Vậy $x = \frac{\pi}{12}+k\pi$; $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. □

★Thí dụ 18. *Giải PT*

$$\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0\ (14)$$

Lời giải. Dùng biến đổi tích thành tổng, ta có

$$1-2\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\frac{3}{2}=0$$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\cos 4x+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1$ (do $|\sin 2x|\leq 1$) $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. □

★Thí dụ 19. *Giải PT*

$\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6$ (15)

Lời giải. ĐK $x\neq\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$. Ta có

$\tan^2 x+\cot^2 x=(\tan x+\cot x)^2-2$

$\tan^3 x+\cot^3 x=(\tan x+\cot x)^3-3(\tan x+\cot x)$.

Đặt $t=\tan x+\cot x$ ($|t|\geq 2$) thì PT (15) có dạng $t^3+t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow t=2$. Do đó

$\tan x+\cot x=2 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. □

★Thí dụ 20. *Giải PT*

$$\sin^3 x-\cos^3 x=\cos 2x\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ (16)$$

Hướng dẫn. ĐK: $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$.

Do $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

nên (16) biến đổi thành

$(\sin x-\cos x)(1-\sin x)(1-\cos x)=0$.

ĐS: $x=\frac{\pi^2}{42}+k\pi$; $x=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.□

BÀI TẬP

Giải các PT, BPT sau :

1. $3\sin^2 x-\cos 2x-\sin 2x+\cos^2 x=1$;

2. $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x$;

3. $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4>0$;

4. $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$;

5. $\log_2(4^x+15.2^x+27)-2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4.2^x-3}=0$;

6. $1+8^{\frac{x}{2}}=3^x$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

(Đề đăng trên THTT số 369, tháng 3 năm 2008)

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) (C_m) có điểm cực đại M và điểm cực tiểu N khi và chỉ khi $m > -2$. Sử dụng điều kiện $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 0$, ta tìm được $m = \frac{7}{5}$.

Câu 2. a) Đưa PT đã cho về dạng

$\sin 3x - \cos 3x = \sin 2x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow 2(\sin 3x - \cos 3x) = \cos x - \cos 3x + \sin 3x + \sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(Bạn đọc tiếp tục giải tiếp).

b) ĐK: $x > 0$, $y > 0$. Biến đổi PT thứ nhất của hệ về dạng $3^x.y = 2^y.x$. PT thứ hai của hệ về dạng $12^x.x = 3^y.y$.

ĐS. Hệ có nghiệm $(x\,;y) = \left(\log_{\frac{4}{3}} 2;\ 2\log_{\frac{4}{3}} 2\right)$.

Câu 3. a) Đặt $u = \sqrt{1+x^3}$. Khi đó $I = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{du}{u^2-1}$. ĐS. $I = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Đặt $v = \cos 2x$, lưu ý rằng $1+\cos^4 x = 1+\left(\frac{1+v}{2}\right)^2$.

Khi đó $J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dv}{1+\frac{(1+v)^2}{4}}$. Tiếp theo đặt $\frac{1+v}{2} = \tan u$. Ta tìm được $J = \frac{\pi}{4}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AC}[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}] \neq 0$, suy ra AB và CD chéo nhau. Giả sử $I\,(5-4t\,;1+5t\,;3-t)$ là một điểm thuộc đường thẳng AB và $J\,(5-t'\,;0\,;6+2t')$ là điểm thuộc đường thẳng CD. Từ IJ là đường vuông góc chung của AB và CD ($\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = 0$ và $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = 0$) ta tìm được tọa độ vectơ $\overrightarrow{IJ}$.

ĐS. $IJ = \frac{3\sqrt{2369}}{103}$; $\frac{x-\frac{586}{103}}{-21} = \frac{y}{12} = \frac{z-\frac{476}{103}}{144}$.

Câu 4. a) Chia cả 2 vế của PT cho $x-2$. Chứng minh hàm số

$$f(x) = 2\sqrt[3]{4x-4} + 2\sqrt{2x-2} - \frac{5}{x-2} - 3$$

đồng biến với mọi $x \geq 1$.

ĐS. $x = 3$ là nghiệm duy nhất của PT.

b) BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{(a+1)(1+b^2)(1+a^2b)}{(a+1)(a^2-a+1)(1+b^3)} \leq 2$$

$\Leftrightarrow a + b^2 + b^2a + a^2b + b^3a^2 + ba^3$

$\leq 1 + 2a^3 + 2b^3 + a^3b^3$ (*)

Từ BĐT Cauchy cho ba số dương $a^3+1+1 \geq 3a$; $2b^3+1 \geq 3b^2$; $3(a^3+b^3) \geq 3(a^2b+ab^2)$; $a^3b^3+a^3+a^3 \geq 3a^3b$; $a^3b^3+a^3b^3+b^3 \geq 3a^2b^3$.

Cộng theo vế các BĐT trên ta thu được BĐT (*).

Câu 5A. a) Xét khai triển $(1+x)^n$, lần lượt lấy đạo hàm cấp một và cấp hai hai vế và cho $x = 1$ ta được

$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-1)C_n^{n-1} + n.C_n^n$;

$n(n-1)2^{n-2} = 2C_n^2 + \ldots + (n-1)(n-2)C_n^{n-1} + n(n-1)C_n^n$

Suy ra $\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

$= n(n-1)2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2} \Rightarrow$ (đpcm).

b) Số hình bình hành là

$C_5^2.C_6^2 + C_5^2.C_7^2 + C_6^2.C_7^2 = 675$ (hình).

Số hình thang là

$C_5^2.C_6^1.C_7^1 + C_6^2.C_5^1.C_7^1 + C_7^2.C_6^1.C_5^1 = 1575$ (hình).

Câu 5B. a) Có hai điểm thoả mãn là

$A_1\left(\frac{2-\sqrt{39}}{5};\frac{1+2\sqrt{39}}{5\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\frac{2+\sqrt{39}}{5};\frac{1-2\sqrt{39}}{5\sqrt{2}}\right)$.

b) Giả sử $A(x_0\,;y_0) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khoảng cách từ A đến đường thẳng (Δ) là $AH = \frac{|x_0 - \sqrt{2}y_0 + 2|}{\sqrt{3}}$. Diện tích ΔABC lớn nhất khi AH lớn nhất. Sử dụng BĐT Bunyakovski chứng minh $(x_0 - \sqrt{2}y_0)^2 \leq 16$. Từ đó suy ra $AH \leq 2\sqrt{3}$. *ĐS.* $A\,(2\,;-\sqrt{2})$.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

ĐỀ SỐ 3

I. PHẦN CHUNG

Câu 1. (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Tìm các giá trị của tham số a để đường thẳng (d) : $y = a(x-3)$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt trong đó ít nhất một giao điểm có hoành độ lớn hơn 1.

Câu 2. (2 *điểm*)

a) Giải phương trình

$2\sin^5 x + 2\sin^3 x.\cos^2 x + \cos 2x - \sin x = 0$ (1)

b) Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -x^3 - 3x^2 + 9x + 10 < 0 \\ x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 4 < 0. \end{cases}$$

Câu 3. (2 *điểm*)

Trong không gian với hệ toạ độ Descartes $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với: $A(4 ; 1 ; 4)$, $B(3 ; 3 ; 1)$, $C(1 ; 5 ; 5)$, $D(1 ; 1 ; 1)$.

a) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng AD lên mặt phẳng (ABC).

b) Tìm điểm K trên đường thẳng AC và điểm H trên đường thẳng BD sao cho đoạn thẳng HK có độ dài nhỏ nhất.

Câu 4. (2 *điểm*)

a) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + x\left(\frac{x}{\cos^2 x} + 2\tan x \right) \right] dx.$

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m \geq 2$, ta có $\left(\dfrac{m^2-1}{m^2} \right)^{2m+1} \left(1 + \dfrac{1}{m-1} \right)^2 < 1$.

II. PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chỉ được chọn làm câu 5A hoặc câu 5B:

Câu 5A. (Theo chương trình THPT không phân ban) (2 *điểm*)

a) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Descartes Oxy cho elip (E) có phương trình

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Tìm điểm S trên (E) sao cho bán kính qua tiêu điểm bên trái của (E) có độ dài nhỏ nhất.

b) Trong một cuộc đi chơi dã ngoại của một tổ học sinh, cứ hai học sinh bất kì đều chụp với nhau một kiểu ảnh làm kỉ niệm (mọi kiểu ảnh đều chỉ có hai người). Hỏi tổ học sinh có mấy người, biết rằng cuốn phim có 36 kiểu chụp vừa đủ.

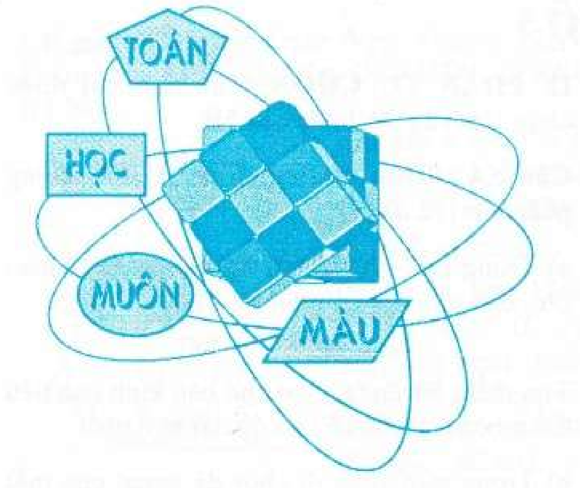
Câu 5B. (Theo chương trình THPT phân ban) (2 *điểm*)

a) Giải bất phương trình

$$\log_{0,3}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4} \right) < 0.$$

b) Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Đáy $ABCD$ là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ biết $SA = h$.

HUỲNH DUY THỦY
(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)



Giải đáp:

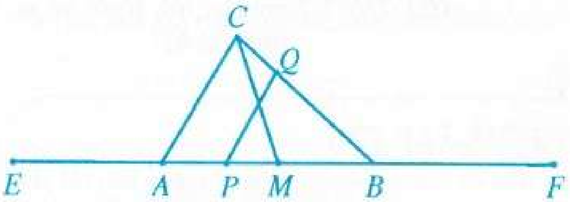
CHIA ĐÔI CHU VI ĐA GIÁC

(Đề đăng trên THTT số 365 tháng 11.2007)

Nhận xét. Nếu coi chu vi đa giác lồi là một đường khép kín không tự cắt thì ta chỉ cần kẻ một đường thẳng nào đó cắt các cạnh của đa giác tại M, N mà chia đôi chu vi đa giác (giả sử điểm M gần điểm cố định P hơn điểm N), sau đó lấy điểm Q sao cho trên đường khép kín các khoảng cách MP và NQ bằng nhau và cùng chiều thì PQ chia đôi chu vi đa giác.

1) *Chia đôi chu vi tam giác ABC.* Giả sử $AC \le BC$. Dưới đây là hai cách chia đơn giản.

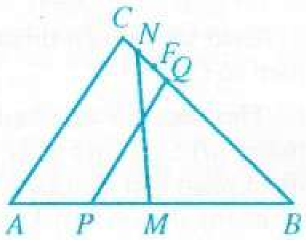
Cách 1. Trên đường thẳng AB lấy các điểm E, F (A nằm giữa E, B và B nằm giữa A, F) sao cho $AE = AC$ và $BF = BC$ (h. 1).



Hình 1

Lấy trung điểm M của EF thì do $AC \le BC < CA + AB$ nên M thuộc đoạn AB và $CA + AM = CB + BM$. Giả sử P thuộc đoạn AM (làm tương tự với các trường hợp khác), trên tia CB lấy điểm Q sao cho $CQ = MP$ thì PQ chia đôi chu vi tam giác ABC.

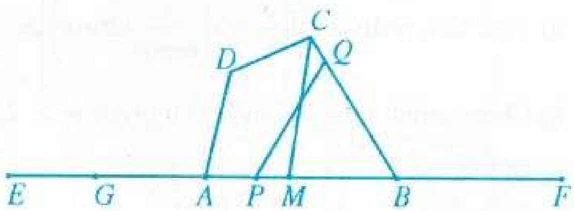
Cách 2. Lấy trung điểm M của AB (h. 2). Trên tia BC lấy điểm F sao cho $BF = AC$ thì F thuộc đoạn BC. Lấy trung điểm N của CF thì $MA + AC + CN = MB + BN$. Giả sử P thuộc đoạn AM (làm tương tự với các trường hợp khác), trên tia NB lấy $NQ = MP$ thì PQ chia đôi chu vi tam giácABC.



Hình 2

2) *Chia đôi chu vi tứ giác ABCD.*

Giả sử $AD + DC \le AB + BC$. Lấy các điểm E, G trên tia đối của tia AB (G nằm giữa E, A) sao cho $AG = AD$ và $GE = DC$ (h. 3). Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF = BC$. Lấy điểm M là trung điểm của EF thì M thuộc đoạn AB và $CD + DA + AM = CB + BM$. Giả sử P thuộc đoạn AM (làm tương tự với các trường hợp khác), trên tia CB lấy điểm Q sao cho $CQ = MP$ thì PQ chia đôi chu vi tứ giác $ABCD$. Với $AB + BC < AD + DC$ ta làm tương tự.



Hình 3

Nhiều bạn không chú ý đến nhận xét trên nên đưa ra nhiều cách giải phức tạp. Bạn *Thiều Đăng Ba*, lớp 10 chuyên toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh** có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm.

PHI PHI

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Bài toán cực trị
TRÊN TẬP HỢP ĐIỂM RỜI RẠC

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài toán cực trị trên tập hợp các điểm rời rạc thường có hai dạng chủ yếu sau đây, mà lời giải của mỗi bài toán đều được thể hiện qua hai bước chính.

Bài toán 1. 1) *Tìm số n nguyên dương lớn nhất để tồn tại tập hợp gồm n phần tử thỏa mãn điều kiện* (τ).

2) *Tìm số n nguyên dương bé nhất để tồn tại tập hợp gồm n phần tử thỏa mãn điều kiện* (τ).

Hướng giải. 1) Hãy chứng tỏ rằng số nguyên dương n_0 là số phải tìm chỉ khi đồng thời xảy ra (hai bước của lời giải):

*) Với mỗi chỉ số $n > n_0$ thì mọi tập hợp có n phần tử đều không thỏa mãn điều kiện (τ).

*) Tồn tại tập hợp có n_0 phần tử thỏa mãn điều kiện (τ).

2) Số nguyên dương n_0 là số phải tìm khi và chỉ khi đồng thời xảy ra:

*) Với mỗi chỉ số $n < n_0$ thì mọi tập hợp có n phần tử đều không thỏa mãn điều kiện(τ).

*) Tồn tại tập hợp có n_0 phần tử thỏa mãn điều kiện (τ). □

Bài toán 2. 1) *Tìm số nguyên dương lớn nhất để mọi tập hợp gồm n phần tử thỏa mãn điều kiện* (τ).

2) *Tìm số n nguyên dương bé nhất để mọi tập hợp gồm n phần tử thỏa mãn điều kiện* (τ).

Hướng giải. 1) Chứng tỏ rằng n_0 là số phải tìm khi và chỉ khi đồng thời xảy ra:

*) Với mỗi chỉ số $n > n_0$ đều tồn tại tập hợp có n phần tử không thỏa mãn điều kiện (τ).

*) Mọi tập hợp có n_0 phần tử đều thỏa mãn điều kiện (τ).

2) n_0 là số phải tìm khi và chỉ khi đồng thời xảy ra:

*) Với mỗi chỉ số $n < n_0$ đều tồn tại tập hợp có n phần tử không thỏa mãn điều kiện (τ).

*) Mọi tập hợp có n_0 phần tử đều thỏa mãn điều kiện (τ). □

Chú ý. Do đặc điểm của quan hệ bao hàm của các tập hợp điểm rời rạc, nhiều khi ta thường kiểm chứng bước 1: với $n := n_0 + 1$ (đối với bài toán tìm n lớn nhất) và với $n := n_0 - 1$ (đối với bài toán tìm n bé nhất). Vì vậy, sự thành công của lời giải được quyết định ở chỗ dự đoán được hằng số nguyên dương n_0. Mặt khác, với việc đưa vào các lượng từ: *tồn tại* ; *với mọi* vào điều kiện (τ) có thể cho ta thấy được mối liên hệ giữa *Bài toán 1* và *Bài toán 2*. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

★Thí dụ 1. *Cho A là tập hợp gồm 16 số tự nhiên từ 1 đến 16. Tìm số nguyên dương n lớn nhất thỏa mãn tính chất sau: Tồn tại tập con gồm n phần tử của tập A sao cho với ba phần tử bất kì (đôi một phân biệt) của tập con đó đều có hai phần tử không nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. *) Ta chứng minh: Với mọi tập con T của A mà $|T| \geq 12$ thì trong T luôn tồn tại ba phần tử (phân biệt) đôi một nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, gọi $P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ (gồm số 1 và các số nguyên tố trong A). Ta có $|P| = 7$ và $|A \setminus P| = 16 - 7 = 9$. Vậy nếu $|T| \geq 12$ thì T phải chứa ít nhất ba phần tử (đôi một phân biệt) của P mà các phần tử của P là đôi một nguyên tố cùng nhau, suy ra $n \leq 11$.

*) Tồn tại tập con của A có 11 phần tử là $B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$ thỏa tính chất ở đề bài. Kết luận số phải tìm là $n = 11$. □

★**Thí dụ 2.** (VMO 2004) *Cho A là tập hợp gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con có k phần tử của tập A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.*

Lời giải chi tiết, bạn đọc có thể tham khảo trên THTT (số 330). Sau đây là tinh thần của hai bước chính trong lời giải, qua đó bạn đọc có thể thấy được mối liên hệ về mặt lôgic giữa Thí dụ 1 và Thí dụ 2.

*) Chỉ ra sự tồn tại tập con T có 8 phần tử của tập A, mà với hai phần tử a, b tùy ý thuộc T thì $a^2 + b^2$ là một hợp số. Từ đó suy ra $k \geq 9$,.

*) Chứng tỏ mọi tập con có 9 phần tử của A đều có hai phần tử phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Kết luận số phải tìm là $k = 9$. ❐

★**Thí dụ 3.** *Tìm số n nguyên dương lớn nhất để tập $A_n = \{1, 2, ..., n\}$ (với $n > 5$) thỏa mãn tính chất: Tồn tại cách phân hoạch tập A_n thành hai tập con thực sự B, C (tức là $A_n = B \cup C$ và $B \cap C = \phi$) sao cho với ba phần tử bất kì (đôi một phân biệt) trong mỗi tập con thì tích của hai phần tử luôn khác với phần tử thứ ba.*

Lời giải. *) Ta chứng minh với $n = 96$ (do đó với mọi $n \geq 96$) thì không tồn tại cách phân hoạch A_n thành hai tập con thỏa mãn yêu cầu.

Thật vậy giả sử tập $A_{96} = \{1, 2, ..., 96\}$ được phân hoạch thành hai tập con B, C sao cho với ba phần tử bất kì (đôi một phân biệt) trong mỗi tập con thì tích của hai phần tử bất kì luôn khác phần tử thứ ba. Không mất tính tổng quát, giả sử $2 \in B$, do đó xảy ra 1 trong 4 trường hợp sau đối với hai phần tử 3 và 4.

Trường hợp 1. Nếu $3 ; 4 \in B$ thì $12 ; 6 ; 8 \in C \Rightarrow 2 ; 48 ; 96 \in B$, vô lí.

Trường hợp 2. Nếu $3 ; 4 \in C$ thì $12 ; 2 \in B \Rightarrow 4 ; 6 ; 24 \in C$, vô lí.

Trường hợp 3. Nếu $3 \in B, 4 \in C$ thì $6 ; 4 \in C \Rightarrow 24 \in B \Rightarrow 6 ; 8 ; 48 \in C$, vô lí.

Trường hợp 4. Nếu $3 \in C, 4 \in B$ thì $8 ; 3 \in C \Rightarrow 24 \in B \Rightarrow 8 ; 48 \in C \Rightarrow 6 ; 4 ; 24 \in B$, vô lí. Vậy $n \leq 95$.

*) Với $n = 95$, ta chứng tỏ tồn tại cách phân hoạch tập $A_{95} = \{1, 2, ..., 95\}$ thành hai tập con thỏa mãn yêu cầu đề bài như sau: Chọn tập $B = \{6, 8, 9, 10, ..., 47\}$ (gồm hai phần tử 6, 8 và tất cả các số tự nhiên liên tiếp từ 9 đến 47) và tập $B = A_{95} \setminus B$ thì cách phân hoạch trên thỏa mãn yêu cầu. Vậy số phải tìm là $n = 95$. ❐

Chú ý. Phân hoạch đã nêu trong lời giải không phải là phân hoạch duy nhất thỏa mãn tính chất của đề bài. Tuy nhiên, theo yêu cầu của bước 2 đối với bài toán này, ta nên chỉ ra một cách phân hoạch đơn giản nhất.

★**Thí dụ 4.** (IMO 1991). *Cho tập $S = \{1, 2, ..., 280\}$. Tìm số n nguyên dương bé nhất thỏa mãn tính chất: Mọi tập con gồm n phần tử của S đều chứa 5 số đôi một nguyên tố cùng nhau.*

Sơ lược lời giải. *) Ta chỉ ra một tập con A của S, có 216 phần tử có tính chất: 5 phần tử tùy ý (đôi một phân biệt) của A đều có ít nhất 2 phần tử không nguyên tố cùng nhau. Thật vậy:

Gọi $A_1 = \{k \in S ; k \,\vdots\, 2\}$, $A_2 = \{k \in S ; k \,\vdots\, 3\}$,
$A_3 = \{k \in S ; k \,\vdots\, 5\}$, $A_4 = \{k \in S ; k \,\vdots\, 7\}$.
(chú ý 2, 3, 5, 7 là bốn số nguyên tố đầu tiên trong S). Gọi $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Mà

$$|A| = \sum_{1\le i\le 4}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le 4}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<l\le 4}|A_i \cap A_j \cap A_l| - \left|\bigcap_{1\le i\le 4} A_i\right|,$$ suy ra $|A| = 216$.

Mặt khác, với 5 phần tử tùy ý (đôi một phân biệt) của A đều có ít nhất 2 phần tử cùng thuộc một tập A_i (với $i = 1, ..., 4$).

*) Ta chứng minh: Nếu B là một tập con tùy ý của S mà $|B| = 217$ thì trong B phải có 5 phần tử phân biệt, đôi một nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, gọi P là tập hợp gồm có số 1 và tất cả các số nguyên tố thuộc S, ta có $|P| = 60$.

Trường hợp 1. Nếu $|B \cap P| \geq 5$ thì ta có điều cần chứng minh.

Trường hợp 2. Nếu $|B \cap P| \leq 4$ thì $|B \cap (S \setminus P)| = |S \setminus (B \cap P)| \geq 217 - 4 = 213$, mà $|S \setminus P| = 220$

suy ra trong tất cả các phần tử của $S\setminus P$ chỉ có nhiều nhất là 7 phần tử không thuộc B. Mặt khác, ta có thể đưa ra được 8 tập con của $S\setminus P$ sau đây (trong mỗi tập đều gồm 5 phần tử đôi một nguyên tố cùng nhau):

$B_1 = \{2\times 23 ; 3\times 19 ; 5\times 17 ; 7\times 13 ; 11\times 11\}$

$B_2 = \{2\times 29 ; 3\times 23 ; 5\times 19 ; 7\times 17 ; 11\times 13\}$

$B_3 = \{2\times 31 ; 3\times 29 ; 5\times 23 ; 7\times 19 ; 11\times 17\}$

$B_4 = \{2\times 37 ; 3\times 31 ; 5\times 29 ; 7\times 23 ; 11\times 19\}$

$B_5 = \{2\times 41 ; 3\times 37 ; 5\times 31 ; 7\times 29 ; 11\times 23\}$

$B_6 = \{2\times 43 ; 3\times 41 ; 5\times 37 ; 7\times 31 ; 13\times 19\}$

$B_7 = \{2\times 47 ; 3\times 43 ; 5\times 41 ; 7\times 37 ; 13\times 19\}$

$B_8 = \{2^2 ; 3^2 ; 5^2 ; 7^2 ; 13^2\}$.

Theo nguyên lí Dirichlet, phải tồn tại chỉ số $i \in \{1, 2, ..., 8\}$ để $B_i \subset B$ (đpcm).

Vậy số phải tìm là $n = 217$. ❐

★Thí dụ 5. *Tìm số nguyên dương n bé nhất ($n > 3$) thỏa mãn tính chất sau: Với n điểm đôi một phân biệt, thẳng hàng và $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n$ thì mọi cách tô màu n điểm đó bằng đúng hai màu khác nhau đều tồn tại ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} (với $1 \le i < 2j - i \le n$) được tô cùng một màu.*

Lời giải. Giả sử ta dùng hai màu là xanh (kí hiệu là (X)) và đỏ (kí hiệu là ($Đ$)).

Bổ đề. Với n điểm đã cho của đề bài, nếu ta đặt chúng trên một trục tọa độ $x'Ox$ sao cho điểm A_k có tọa độ bằng k. Vậy ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} được tô cùng một màu khi và chỉ khi tọa độ của chúng theo thứ tự thành một cấp số cộng.

*) Ta chứng minh: Với $n = 8$ thì tồn tại cách tô màu 8 điểm $A_1, A_2, ..., A_8$ sao cho không có ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} nào được tô cùng màu. Thật vậy, ta chỉ việc tô các điểm A_1, A_2, A_5, A_6 cùng màu (X) và tô các điểm A_3, A_4, A_7, A_8 cùng màu (Đ) $\Rightarrow$ đpcm.

*) Ta chứng minh: Với $n = 9$ thì mọi cách tô màu 9 điểm $A_1, A_2, ..., A_9$ bằng đúng hai màu khác nhau đều tồn tại ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} (với $1 \le i < 2j - i \le n$) được tô cùng một màu. Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại cách tô màu 9 điểm trên sao cho mọi bộ ba điểm A_i, A_j, A_{2j-i} (với $1 \le i < 2j - i \le n$) đều bị tô khác màu. Khi đó, vận dụng bổ đề trên, ta suy ra rằng: Với mỗi chỉ số $k \in \{3, 4, 5\}$ thì các điểm A_k và A_{k+2} phải được tô khác màu (vì nếu điểm A_k và A_{k+2} được tô cùng màu chẳng hạn là màu (X) thì ta có thể tô các điểm A_{k-2}, A_{k+1}, A_{k+4} cùng màu ($Đ$), điều này lại trái với điều giả sử trên). Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử tô A_3 màu ($Đ$), suy ra A_5 màu ($Đ$) và do đó A_7 cũng màu ($Đ$). Vì 3; 4; 5 là cấp số cộng nên A_4 màu (X) và do đó A_6 cũng màu (X). Vì 1; 3; 5 là cấp số cộng nên A_1 màu (X). Vì 2; 5; 8 là cấp số cộng nên A_2 màu (X). Vậy 3 điểm A_2, A_4, A_6 lại cùng màu (X), trái với điều giả sử trên. Vậy số n phải tìm là $n = 9$. ❐

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Trên mặt phẳng cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ (với $n \ge 3$) trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Ta định nghĩa: Một đường tròn tâm X bán kính r được gọi là *đường tròn cực tiểu* đối với n điểm đã cho nếu $XA_k \le r$; với mọi $k = 1, 2, ..., n$ và dấu bằng phải xảy ra với ít nhất ba chỉ số của k. Hãy tìm số nhiều nhất các đường tròn cực tiểu đối với n điểm bất kì trên mặt phẳng, có đặc điểm đã nêu trên.

2. Xét n điểm trên mặt phẳng (với $n \ge 3$), trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có ít nhất bao nhiêu đoạn thẳng có các đầu mút là các điểm được lấy từ n điểm đã cho, được nối theo nguyên tắc sau đây: Với hai điểm A, B bất kì luôn tồn tại điểm C được nối với cả hai điểm A và B ?

3. Gọi S là tập hợp gồm các bộ $(x_i) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7)$ có phân biệt thứ tự, với $x_i \in \{0 ; 1\}$. Giả sử (a_i) và (b_i) là hai phần tử phân biệt của S, ta gọi số $\sum_{i=1}^{7}|a_i - b_i|$ là khoảng cách giữa hai phần tử (a_i) và (b_i). Gọi T là một tập con của S sao cho khoảng cách giữa hai phần tử bất kì của T lớn hơn hoặc bằng 3. Chứng minh rằng số phần tử nhiều nhất của T bằng 16.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/371. (Lớp 6) So sánh hai số

$$A=\frac{1}{2006} \text{ và}$$

$$B=\frac{1}{2008}+\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008^2}\right)^2+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008^2}+\ldots+\frac{1}{2008^{2007}}\right)^{2007}.$$

PHẠM BẮC PHÚ
(SV CLC, K52, ĐHSP Hà Nội)

Bài T2/371. (Lớp 7) Cho tam giác ABC có đường cao AD thoả mãn $AD = DC = 3BD$. Gọi O và H theo thứ tự là giao điểm của ba đường trung trực và trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{OH}{BC}=\frac{1}{4}$.

HUỲNH VIỆT KHÁNH
(SV khoa Toán 01, K30, ĐH Cần Thơ)

Bài T3/371. Tìm các số tự nhiên x, y thoả mãn điều kiện

$$x^3 = y^3 + 2(x^2+y^2) + 3xy + 17.$$

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

Bài T4/371. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^2-c^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^2-a^2}{\sqrt{a+b}}\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

TRẦN TUẤN ANH
(SV khoa Toán-Tin, ĐHKHTN Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T5/371. Giả sử đường tròn (S_1) đi qua các đỉnh A và B của tam giác ABC cắt cạnh BC lần nữa ở D. Đường tròn (S_2) đi qua các đỉnh B và C, cắt cạnh AB lần nữa ở E và cắt đường tròn (S_1) ở F. Chứng minh rằng nếu bốn điểm A, C, D và E cùng nằm trên đường tròn tâm O thì $\widehat{BFO}=90^\circ$.

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/371. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a-30}+\dfrac{y}{a-4}+\dfrac{z}{a-14}+\dfrac{t}{a-10}=1\\[2mm] \dfrac{x}{b-30}+\dfrac{y}{b-4}+\dfrac{z}{b-14}+\dfrac{t}{b-10}=1\\[2mm] \dfrac{x}{c-30}+\dfrac{y}{c-4}+\dfrac{z}{c-14}+\dfrac{t}{c-10}=1\\[2mm] \dfrac{x}{d-30}+\dfrac{y}{d-4}+\dfrac{z}{d-14}+\dfrac{t}{d-10}=1\end{cases}$$

trong đó a, b, c, d là các tham số đôi một khác nhau và không thuộc $\{4 ; 10 ; 14 ; 30\}$.

NGUYỄN DUY THÁI SƠN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T7/371. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng $a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\geq 1$.

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(SV K32 lớp YY0647A1, ĐH Y Dược Cần Thơ)

Bài T8/371. Trên đường tròn tâm O bán kính R lấy sáu điểm D, E, F, G, H, K theo thứ tự đó sao cho $DE = FG = HK = R$. Các đường thẳng KD và EF cắt nhau tại A, EF và GH cắt nhau tại B, GH và KD cắt nhau tại C. Chứng minh rằng

$$OA.\ BC = OB.\ CA = OC.\ AB.$$

NGUYỄN ĐỨC HUY
(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/371. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Chứng minh rằng

$$(AI+DI)^2+(BI+CI)^2\leq (AB+CD)^2$$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?

TRẦN BÁ DUY LINH
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T10/371. Cho phương trình $x^2 - ax - 1 = 0$ với a là số nguyên dương. Gọi α là nghiệm dương của phương trình. Dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = [\alpha x_n],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên n sao cho x_n chia hết cho a.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV trường PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T11/371. Xét hàm số $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho

$$\begin{cases}(f(2n)+f(2n+1)+1)(f(2n+1)-f(2n)-1)=3(1+2f(n))\\ f(2n)\geq f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Gọi $M = \{m \in f(\mathbb{N}) : m \leq 2008\}$. Hỏi tập hợp M có bao nhiêu phần tử ?

VŨ THÁI LUÂN
(SV Cao học khoa Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

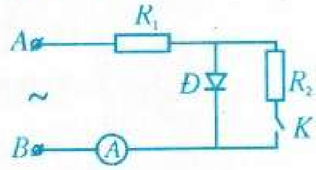
Bài T12/371. Hãy xác định dạng của tam giác ABC, biết rằng các góc và các cạnh của tam giác thoả mãn đẳng thức

$$\frac{bc}{b+c}(1+\cos A)+\frac{ca}{c+a}(1+\cos B)+\frac{ab}{a+b}(1+\cos C)$$
$$=\frac{3}{16}(a+b+c)^2+\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C.$$

NGUYỄN VĂN TIẾN
(SV lớp 03H, CNHH, khoa Hoá kĩ thuật, ĐHBK Đà Nẵng)

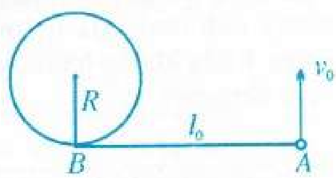
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/371. Cho mạch điện như hình vẽ. R_1, R_2 là điện trở thuần với $R_1 = R_2 = R$. Điốt lí tưởng, ampe kế nhiệt có điện trở không đáng kể. Đặt vào A, B một hiệu điện thế xoay chiều. Biết rằng khi khoá K mở thì ampe kế chỉ I_1. Tìm số chỉ của ampe kế khi khoá K đóng.



NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/371. Trên mặt phẳng nằm ngang có một hình trụ thẳng đứng, cố định, bán kính đáy R và một vòng nhỏ A nối với hình trụ bằng sợi dây nằm ngang AB có độ dài l_0 (hình vẽ nhìn từ trên xuống). Vòng nhỏ A nhận vận tốc ban đầu $\vec{v_0}$ theo phương ngang vuông góc với dây. Tính thời gian chuyển động trong mặt phẳng của A cho đến khi nó gặp hình trụ. Bỏ qua ma sát.



TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế) sưu tầm

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/371. (For 6th grade). Which number is greater?

$$A = \frac{1}{2006} \text{ or}$$

$$B=\frac{1}{2008}+\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008^2}+\ldots+\frac{1}{2008^{2007}}\right)^{2007}$$

T2/371. (For 7th grade). In a triangle ABC with altitude AD, one has $AD = DC = 3BD$. Let O and H be the circumcenter and the orthocenter, respectively. Prove that $\frac{OH}{BC} = \frac{1}{4}$.

T3/371. Find all pairs of natural numbers x and y such that

$$x^3 = y^3 + 2(x^2 + y^2) + 3xy + 17.$$

T4/371. Let a, b, c be positive real numbers. Prove the inequality

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^2-c^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^2-a^2}{\sqrt{a+b}}\geq 0.$$

When does equality occur ?

(Xem tiếp trang 26)

★Bài T1/367. *So sánh tổng S gồm 100 số hạng*
$$S=\frac{1}{1.1.3}+\frac{1}{2.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{4.7.9}+...+\frac{1}{100.199.201}$$
với $\frac{2}{3}$.

Lời giải. Ta so sánh tổng S với một tổng dễ dàng tính được giá trị mà mỗi số hạng của tổng S đều không lớn hơn số hạng tương ứng của tổng mới.

Do $\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,
với mọi n bằng 1, 2, 3, ..., 100 nên $S<P$ với
$$P=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{197.199}+\frac{1}{199.201}$$

Áp dụng đẳng thức $\frac{2}{m(m+2)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+2}$
với mọi m bằng 1, 3, 5, ..., 199 ta có
$$2P=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{197.199}+\frac{2}{199.201}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$$
$$+\frac{1}{197}-\frac{1}{199}+\frac{1}{199}-\frac{1}{201}.$$
$$=1-\frac{1}{201}<1.$$

Từ đó $S<P<\frac{1}{2}$, suy ra $S<\frac{2}{3}$. ❐

Nhận xét. 1) Một cách khác, từ nhận xét
$$\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
suy ra $S<\frac{5}{12}<\frac{2}{3}$.

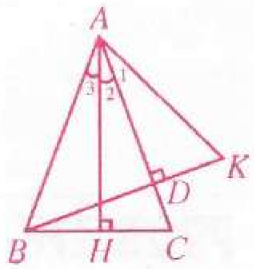
2) Có thể xét bài toán tổng quát, trong đó tổng S gồm n số hạng với số hạng thứ n là $\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}$ và bằng nhận xét 1) chứng minh được $S<\frac{5}{12}$.

3) Các bạn sau có lời giải ngắn gọn, trình bày rõ ràng:

Phú Thọ: *Nguyễn Thị Mai Anh*, 6A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Hữu Hải, Nguyễn Thị Thanh Vân, Tạ Chiếu Xuân, Nguyễn Thị Bích Thủy, Đào Thị Hương, Bùi Xuân Thủy, Nguyễn Trọng Hiệp, Nguyễn Thị Thu Dượng, Nguyễn Thu Hường, Tô Thị Thu Hà, Đỗ Thị Thu Uyên, Phạm Thị Khánh Linh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Trần Xuân Thắng, Trần Trung Kiên*, 6/1, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Lộc*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Dương Thị Hồng*, 6A, THCS Thành Mỹ, Nghi Xuân; **Đắk Lắk :** *Bùi Nguyễn Tấn Thi*, 6A4, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Eakpam, Cưmagar.

VIỆT HẢI

★Bài T2/367. *Cho tam giác ABC cân ở A với:* $\widehat{BAC}<90^\circ$ *và các đường cao BD, AH. Trên tia BD lấy điểm K sao cho BK = BA. Tính số đo của góc HAK.*



Lời giải. (hình vẽ) Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$, suy ra $\widehat{A_2}=\widehat{A_3}$. Mặt khác, $BA = BK$ (gt) nên ΔABK cân tại B, suy ra $\widehat{BKA}=\widehat{BAK}$ hay $\widehat{BKA}=\widehat{A_1}+2\widehat{A_2}$ (1)

Trong tam giác vuông ADK có $\widehat{K}+\widehat{A_1}=90^\circ$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $2\widehat{A_1}+2\widehat{A_2}=90^\circ$, suy ra $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}=45^\circ$. Vậy $\widehat{HAK}=45^\circ$. ❐

Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài cách tính trực tiếp trên đây, có thể lấy I là giao điểm của AK và BC rồi chứng minh ΔAHI vuông cân tại H; hoặc hạ $KJ \perp AH$ ($J \in AH$) rồi chứng minh ΔAJK vuông cân tại J.

2) Một số bạn có nhận xét đúng: *Nếu* $\widehat{BAC}>90^\circ$ *ta có kết quả* $\widehat{HAK}=135^\circ$.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Lạng Sơn: *Phạm Quỳnh Anh*, 7A2, THCS Chi Lăng, *Vũ Ngọc Minh*, 7A, THCS Chu Văn An, TP. Lạng Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Hà Linh, Nguyễn Thành Công, Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Trọng Hiệp, Hoàng Minh Phương*, 6A1, THCS Yên Bái, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Hoàng Phương Linh*, 6B, Trường Hà Nội - Amsterdam, *Lê Minh Phúc*, 7A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Phòng:** *Trịnh Ngọc Tú*, 7A1, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Minh Chung*, 7C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Bảo*, 7D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Phan Thị Quỳnh Trang*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trần Tuấn Trung*, 7H, *Vương Đình Tuấn*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Dương Thị Quỳnh Trang*, 7A, *Võ Thị Phương Thảo, Nguyễn Việt Nhất*, 7B, THCS BC Xuân Diệu, Can Lộc, *Trần Xuân Hòa*, 7A, THCS TTr. Kỳ Anh; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Anh Quân*, 6A4, THCS Hùng Vương, Eakar; **Phú Yên:** *Đoàn Diên Long*, 6G, THCS Lương Thế Vinh, TP. Tuy Hòa; **Bình Định:** *Đỗ Phúc Hòa*, 7A3, THCS Cát Tường, Phù Cát; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Minh Truyền*, 7H, THCS Quảng Phú, *Bùi Ngọc Can*, 7A, THCS Nghĩa Dũng, TP. Quảng Ngãi; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/367. *Cho $0 < b < a \le 4$ và $2ab \le 3a + 4b$. Tìm giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2$.*

Lời giải

Cách 1. • Với $0 < b \le 3$, $0 < b < a \le 4$ thì $a^2 + b^2 \le 4^2 + 3^2 = 25$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4$, $b = 3$.

• Với $3 < b < a \le 4$ thì $0 < a - b < 4 - 3 = 1$, do đó $(a-b)^2 < a - b$. Suy ra

$$a^2 + b^2 < 2ab + a - b \le (3a + 4b) + a - b = 4a + 3b \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Bunyakovski, ta có

$$(4a + 3b)^2 \le (4^2 + 3^2)(a^2 + b^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$(a^2 + b^2)^2 < 25(a^2 + b^2)$, tức là $a^2 + b^2 < 25$.

Cách 2. Do $0 < b < a \le 4$ nên

$(4 - a)(b - a) \le 0 \Leftrightarrow 3a + 4b \le ab + 7a - a^2$

Lại có $2ab \le 3a + 4b$ suy ra $2ab \le ab + 7a - a^2$

$\Leftrightarrow b \le 7 - a$. Do đó

$$a^2 + b^2 \le a^2 + (7 - a)^2 = 2a^2 - 14a + 49$$

hay $a^2 + b^2 \le 2(a-4)(a-3) + 25 \quad (1)$

• Với $0 < b < a < 3$ thì $a^2 + b^2 < 3^2 + 3^2 = 18$.

• Với $3 \le a \le 4$ thì $(a-4)(a-3) \le 0$. Từ (1) suy ra $a^2 + b^2 \le 25$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4$, $b = 7 - a = 3$.

Kết luận. Giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2$ là 25, đạt được khi và chỉ khi $a = 4$, $b = 3$. ❐

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn đã nhầm khi đưa ra đánh giá:

Do $a \le 4$ nên $a(3 - 2b) \le 4(3 - 2b)$ (!)

Do $(a-2)(2b-3) \le 6$ mà $a - 2 \le 2$ nên $2b - 3 \le 3$ (!)

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn, gọn theo 2 cách trên:

Hà Nội: *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, *Nguyễn Đình Duy, Nguyễn Hữu Trưởng, Đỗ Vũ Thạch*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân, Nguyễn Đăng Hiếu*, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 9E, THCS TTr. Đông Hưng; **Nghệ An:** *Võ Ngọc Châu*, 9D, THCS Quỳnh Bá, Quỳnh Lưu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Hải Như*, 7I, THCS Thành Cổ, TX. Quảng Trị; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 9[7] THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Phú Yên:** *Lê Cao Thăng*, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T4/367. *Tìm hai nghiệm có tích bằng 1 của phương trình*

$$5x^6 - 16x^4 - 33x^3 - 40x^2 + 8 = 0 \quad (1)$$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow (5x^2 + 10x + 4)(x^4 - 2x^3 - 5x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x^2 + 10x + 4)(x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x^2 + 10x + 4)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

(do $x^2 + x + 2 > 0, \forall x$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2 + 10x + 4 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{5} \\ x_{3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ta thấy chỉ có hai nghiệm $x_{3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ có tích bằng 1. Đó chính là hai nghiệm cần tìm. ❐

Nhận xét. 1) Có một số cách khác nhau để giải bài toán này, nhưng điều then chốt là phân tích được đa thức vế trái của (1) thành tích các tam thức bậc hai.

2) Bài toán có thể phát biểu dưới dạng: *Chứng minh rằng phương trình(1) có hai nghiệm với tích của chúng bằng 1.*

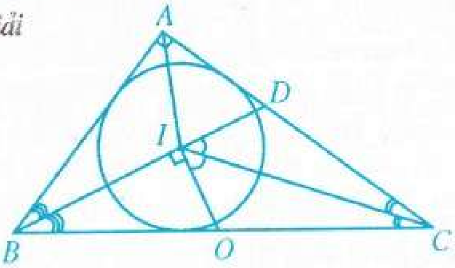
3) Không nhiều bạn tham gia giải bài này. Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Bảo, Nguyễn Hồng Chuyên*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** *Tạ Minh Tùng*, 9A2, THCS TTr. Diêm Điền, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Như Ngọc*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/367. *Xét tam giác ABC vuông ở A và AC > AB. Gọi O là trung điểm của BC và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Tính tỉ số các cạnh của tam giác ABC, biết rằng* $\widehat{OIB} = 90^\circ$.

Lời giải



Gọi D là giao điểm của BI và AC. Ta thấy $\widehat{DIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{OIC} = 45^\circ$. Từ đó $\Delta OIC = \Delta DIC$ (g.c.g), dẫn đến $OC = CD$. Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABC, ta có $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$, nên $\frac{AC}{BC + AB} = \frac{1}{2}$.

Nghĩa là $BC + AB = 2AC$ (1)

Mặt khác, do $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 2AC(BC - AB)$ nên $AC = 2(BC - AB)$, hay $AC - 2BC + 2AB = 0$.

Từ (1) thu được $AC - 2BC + 2(2AC - BC) = 0$, vậy $\frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$ (2)

Lại vì $\frac{BC + AB}{2BC} = \frac{4}{5}$, suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ (3)

Từ (2) và (3) ta nhận được tỉ lệ giữa độ dài các cạnh của tam giác ABC cho bởi $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$. ❐

Nhận xét. Đây là một bài trong Đề thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia lớp 9, năm học 1993-1994 (xem THTT số 209, tháng 11 năm 1994). Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Một số bạn sử dụng *công thức Euler*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ cũng cho kết quả cần tìm. Tuy nhiên do phải chứng minh lại công thức này nên lời giải còn dài. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Anh, Vũ Thu Thảo, Lê Anh Tú, Đỗ Minh Phượng*, 9D9, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Quang Rực*, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Hoàng Khánh Duy*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Triệu Thị Quỳnh Mai*, 9A3, THCS Lâm Thao, *Hạ Hồng Việt*, 9K, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Thái Bình:** *Phan Chi Mai*, 9A1, trường Phân hiệu Học sinh giỏi Thanh Nê, Kiến Xương, *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 9E, THCS TTr. Đông Hưng; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Thắng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Thế Vũ*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Đinh Thị Quỳnh Trang*, 9B, THCS Bến Thủy, Vinh; **Quảng Ngãi:** *Ôn Nữ Quỳnh Như*, 9E, THCS Hành Thịnh, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Lê Cao Thắng*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu, *Phan Minh Trí*, 9B, THCS Trần Quốc Toản, Tuy Hòa, Phú Yên; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 9[7], THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T6/367. *Tìm tất cả các cặp số tự nhiên* $(x\,;y)$ *thoả mãn điều kiện* $y^x - 1 = (y-1)!$ *trong đó y là một số nguyên tố.*

Lời giải. Ta có

$$y^x - 1 = (y-1)!$$
$$\Leftrightarrow y^{x-1} + y^{x-2} + \ldots + y + 1 = (y-2)!.$$

Trước hết ta chứng minh $y < 7$. Giả sử $(x\,;y)$ là một cặp số nguyên thoả mãn bài toán với $y \geq 7$, do y lẻ nên $\frac{y-1}{2} \in \mathbb{N}^*$ và $2 < \frac{y-1}{2} < y - 2$.

Suy ra $(y-2)! \,\vdots\, 2.\frac{y-1}{2}$ hay $(y-2)! \,\vdots\, (y-1)$.

Lại có $y^i \equiv 1 \pmod{y-1}$ với $i = 0, 1, 2, \ldots$, nên $y^{x-1} + y^{x-2} + \ldots + y + 1 \equiv x \pmod{y-1}$.

Suy ra $x \geq y - 1$. Điều này không thể xảy ra vì

$$y^{x-1} < y^{x-1} + y^{x-2} + \ldots + y + 1 = (y-2)!$$
$$< (y-2)^{y-2} < y^{y-2}$$
$$\Rightarrow x - 1 < y - 2 \text{ hay } x < y - 1.$$

Vậy $y < 7$. Do y là số nguyên tố nên y có các giá trị $2\,;3\,;5$.

- Với $y = 2$, có $2^x - 1 = 1$, dẫn đến $x = 1$;
- Với $y = 3$, có $3^x - 1 = 2$, dẫn đến $x = 1$;
- Với $y = 5$, có $5^x - 1 = 24$, dẫn đến $x = 2$.

Vậy có ba cặp số tự nhiên $(x\,;y)$ thoả mãn điều kiện bài toán là $(1\,;2)$, $(1\,;3)$ và $(2\,;5)$. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn nhận xét đúng rằng bài toán này không cần giả thiết y là số nguyên tố. Thật vậy, giả sử $d < y$ là một ước số của y, khi đó $(y-1)! \vdots d$ hay $y^x - 1 \vdots d$. Suy ra $1 \vdots d$, dẫn đến $d = 1$. Vậy d là số nguyên tố.

2) Các bạn tham gia đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc: *Phạm Ngọc Xuyên*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; *Vũ Thị Thu Hà*, 10A1, *Nguyễn Hoàng Hải*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Phạm Duy Long*, 10T1, THPT Amsterdam; *Hà Thành Trung*, 10T1, Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; *Trần Thế Khải*, 10A1, Khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; *Đào Trọng Anh*, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, Long Biên; **Hải Dương:** *Doãn Thế Hà*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang; **Hải Phòng:** *Nguyễn Hữu Định*, 11B4, THPT Phạm Ngũ Lão, Thuỷ Nguyên; *Nguyễn Hoàng Anh*, 10TN2, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ninh:** *Ngô Đức Long*, 10T, THPT chuyên Hạ Long; **Nghệ An:** *Phan Tiến Dũng*, 11A1, Khối THPT chuyên, ĐH Vinh, *Hồ Hữu Quân*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I; **Phú Yên:** *Lưu Lê Khánh Tiên*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hoà; **Đắk Lắk:** *Lê Quang Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T7/367: *Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Đặt $f(a,b,c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

Ta phải chứng minh $f(a,b,c)\ge 0$.

Vì $f(a,b,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)$ nên không mất tính tổng quát có thể giả thiết $c=\min(a,b,c)$.

Nếu $a\ge b\ge c$ thì ta có $f(a,b,c)\ge 0$. Xét trường hợp $b>a\ge c$:

Ta có $f(a,b,c)-f(a,b,0)$

$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-\left(a^2+b^2\right)^2$$
$$-4(a-b)\left((b-c)(c-a)(a+b+c)+ab(a+b)\right)$$
$$=\left((a^2+b^2+c^2)^2-(a^2+b^2)^2\right)$$
$$+4c(b-a)\left(a^2+b^2+ab-c^2\right)\ge 0.$$

Suy ra $f(a,b,c)\ge f(a,b,0)$ (1)

Lại có $f(a,b,0)=\left(a^2+b^2\right)^2+4ab\left(a^2-b^2\right)$

$$=a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b-2a^2b^2-4ab^3$$
$$=\left(a^2+2ab-b^2\right)^2\ge 0 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $f(a,b,c)\ge 0$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} c=0 \\ a^2+2ab-b^2=0 \end{cases}$ (3)

Từ (3), ta có $\left[\begin{array}{l} a=\left(\sqrt{2}-1\right).b \ge 0 \\ a=-\left(\sqrt{2}+1\right).b\le 0. \end{array}\right.$

Vì a, b, c không âm nên dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(a;b;c)=((\sqrt{2}-1)t;t;0);$$
$$(t;0;(\sqrt{2}-1)t);\ (0;(\sqrt{2}-1)t;t)$$

với t là một số thực bất kì. ❒

Nhận xét. 1) Một số bạn đã cho rằng vai trò của a, b, c như nhau nên giả thiết $a\ge b\ge c$ (!). Điều đó là không đúng, vì bài toán chỉ không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh đối với a, b, c. Do đó chỉ có thể giả thiết $c=\min(a,b,c)$ nghĩa là $a\ge c$, $b\ge c$.

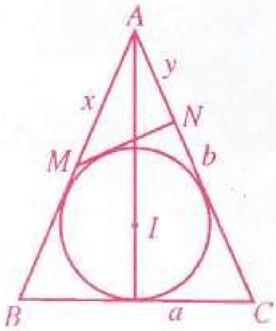
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Bá Trung*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Văn Thạch*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Ninh Bình**: Lương Văn Thiện, 10 Toán K49, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Thanh Hoá**: *Đinh Quang Lộc, Nguyễn Thái Hoàn*, A3, THPT Hậu Lộc 1, Hậu Lộc; **Nghệ An**: *Hồ Hữu Quân*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 1, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh**: *Trần Thế Dũng*, 12/1, THPT Nghèn, Can Lộc; **Đà Nẵng**: *Lê Đình Toàn, Hoàng Bùi Khánh, Trương Hồng Hải*, 10A1, *Lê Văn Tấn Quyền*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng; **Phú Yên**: *Lưu Lê Khánh Tiên*, 10 Toán 1, THPT Lương Văn Chánh, TP Tuy Hoà; **Bình Thuận**: *Phí Thái Thuận*, 10T1, THPT Trần Hưng Đạo, TP Phan Thiết; **Bình Phước**: *Trần Phương Nam*, 11A, *Nguyễn Xuân Đăng*, 11CT, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T8/367. *Cho tam giác ABC cân tại A và BC ≤ AC. Lấy điểm M trên AB và điểm N trên AC (M khác A, B) sao cho MN tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác đó. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $p=\dfrac{AM}{BM.CN}$ *khi điểm M di động trên cạnh AB.*

Lời giải. (Theo bạn *Trịnh Ngọc Dương*, 12A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**).



Đặt $AM = x$, $AN = y$, thì $0 < x < b$, $0 < y < b$, với $BC = a$, $AB = AC = b$ và $a \le b$.

Gọi r là bán kính đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC, do đường tròn (I, r) cũng nội tiếp tứ giác $BCNM$, vì vậy ta có

$BM + CN = BC + MN = (2b - x - y)$.

Ta tìm một hệ thức liên hệ giữa x và y từ điều kiện MN tiếp xúc với đường tròn (I, r). Muốn vậy, ta tính diện tích S của tam giác ABC bằng ba cách khác nhau. Một mặt, ta có

$$S = \frac{1}{2}b^2 \sin A = \frac{1}{2}(a + 2b)r \qquad (1)$$

Mặt khác, $S = S_{BCNM} + S_{AMN}$ nên

$$\frac{1}{2}b^2 \sin A = (2b - x - y)r + \frac{1}{2}xy\sin A \qquad (2)$$

Khử $\sin A$ và r từ (1) và (2) ta thu được

$$(a + 2b)(b^2 - xy) = 2b^2(2b - x - y) \qquad (3)$$

Từ (3) ta tính được y theo x và a, b như sau

$$y = \frac{b^2(2x + a - 2b)}{(a + 2b)x - 2b^2} \qquad (4)$$

Từ (4) tính được $CN = b - y$ theo x và a, b:

$$CN = \frac{ab(b - x)}{2b^2 - (a + 2b)x} \qquad (5)$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$p = \frac{x}{(b - x)(b - y)} \qquad (6)$$

Thay giá trị của $b - y$ từ (5) vào (6) thì được

$$p = p(x) = \frac{[2b^2 - (a + 2b)x]x}{ab(b - x)^2}$$

$$= \frac{b}{a^2} - \frac{1}{b}\left(\frac{x}{b - x} - \frac{b}{a}\right)^2 \le \frac{b}{a^2} \qquad (7)$$

Dấu đẳng thức ở (7) xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{b - x} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow x = \dfrac{b^2}{a + b} \Leftrightarrow y = b - a \ge 0.$

Tóm lại, p đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{b}{a^2}$ khi và chỉ khi M trên cạnh AB và $AM = \dfrac{b^2}{a+b}$. □

Nhận xét. 1) Rất ít bạn tham gia giải bài toán cực trị hình học trên đây (chỉ có 3 bạn), nhưng đáng tiếc một bạn đã giải sai, một bạn tìm được đúng giá trị lớn nhất của biểu thức p song do tính toán nhầm nên xác định sai vị trí của điểm M cần tìm.

2) Bạn *Trịnh Ngọc Dương* là người duy nhất giải được bài toán trọn vẹn và có phương pháp giải hay, ngắn gọn và không sử dụng đến BĐT về trung bình cộng và trung bình nhân (chỉ sử dụng BĐT hiển nhiên nhất $z^2 \ge 0$).

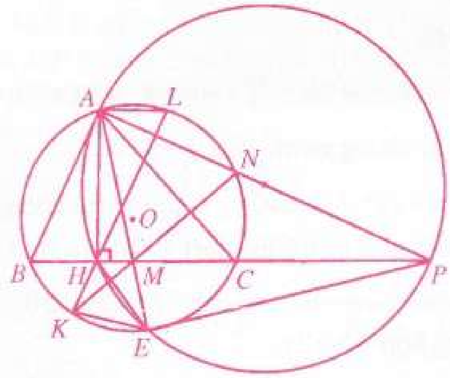
NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

★**Bài T9/367.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Lấy điểm P nào đó trên đường thẳng BC (P khác B, C). Đường tròn tâm O cắt đường thẳng AP ở N và cắt đường tròn đường kính AP ở E (N, E đều khác A). Gọi M là giao điểm của BC và AE. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Có hai trường hợp cần xét.

Trường hợp 1. $\widehat{ABC} = 90^\circ$. Ta có $B \equiv E \equiv M$. Suy ra MN luôn đi qua điểm cố định B.

Trường hợp 2. $\widehat{ABC} \ne 90^\circ$ (hình vẽ).



Gọi H là giao điểm của đường tròn đường kính AP với BC. Ta có $\widehat{AHP} = 90^\circ$. Suy ra H cố định và $H \ne B$ (vì $\widehat{ABC} \ne 90^\circ$). Gọi K là giao điểm của MN và đường tròn (O) ($K \ne N$), gọi L là giao điểm của KH và đường tròn (O) ($L \ne K$).

Ta có $(HM, HE) \equiv (HP, HE) \pmod{\pi}$
$\equiv (AP, AE) \pmod{\pi} \equiv (AN, AE) \pmod{\pi}$

$\equiv (KN, KE) \pmod{\pi} \equiv (KM, KE) \pmod{\pi}$.

Suy ra H, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

Do đó

$(AL, BC) \equiv (AL, KL) + (KH, MH) \pmod{\pi}$

$\equiv (AE, KE) + (KE, ME) \pmod{\pi}$

$\equiv (AE, ME) \pmod{\pi} \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Vậy $AL//BC$, suy ra L cố định. Điều đó có nghĩa là K cố định. Do đó đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định K. ❐

Nhận xét. 1) Chỉ có năm bạn biết sử dụng góc định hướng để tránh tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ. Tuy nhiên, cả năm bạn này đều chưa cẩn thận trong việc sử dụng kí hiệu đồng dư thức

$(a, b) \equiv (a, c) + (c, b) \pmod{\pi}$ đúng;

đẳng thức $(a, b) = (a, c) + (c, b)$ không đúng; Cách viết $(a, b) = (a, c) + (c, b) \pmod{\pi}$ không có nghĩa.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt:

Hà Nội: *Trần Thế Khải*, 10A1, khối THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, *Vũ Minh Thắng*, 10T1, khối THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Thế Anh, Nguyễn Hoàng Hải, Trần Bá Trung, Khổng Hoàng Thao, Nguyễn Huy Hoàng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đà Nẵng:** *Phạm Trọng Khôi*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **TP. Hồ Chí Minh:** *Bùi Trần Long*, 10T, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T10/367. *Cho dãy số (u_n) ($n = 1, 2, \ldots$) được xác định như sau:*

$$u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{16u_n^3 + 27u_n}{48u_n^2 + 9}.$$

Tìm phần nguyên của tổng S gồm 2008 số hạng

$$S = \frac{1}{4u_1+3} + \frac{1}{4u_2+3} + \ldots + \frac{1}{4u_{2008}+3}.$$

Lời giải. (Theo bạn *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**).

Ta sẽ chứng minh $u_n > \frac{3}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bằng phương pháp quy nạp. Hiển nhiên $u_1 = 1 > \frac{3}{4}$. Giả sử $u_k > \frac{3}{4}$ ($k \geq 1$). Khi đó

$$u_{k+1} - \frac{3}{4} = \frac{16u_k^3 + 27u_k}{48u_k^2 + 9} - \frac{3}{4} = \frac{(4u_k - 3)^2}{48u_k^2 + 9} > 0.$$

Do đó $u_n > \frac{3}{4}$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$

Vậy $S < \dfrac{2008}{4.\frac{3}{4} + 3} < 335$.

Mặt khác $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{16u_n^2 + 27}{48u_n^2 + 9} < 1 \Leftrightarrow u_n > \dfrac{3}{4}$ (đúng).

Do đó $S > \dfrac{1}{4u_1+3} + \dfrac{1}{4u_2+3} + \dfrac{2006}{4u_3+3}$.

Dễ thấy $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{43}{57}$, $u_3 < 0{,}751$ do đó $S > 334{,}42 > 334$. Thành thử $[S] = 334$. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn tính được tổng S là

$$S = \frac{2008}{6} - \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{2007}\left(\frac{1}{7}\right)^{3^i},$$ rồi từ đó suy ra $[S] = 334$.

Bằng phương pháp đó bạn *Vũ Thị Thu Hà*, 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** đã giải được bài toán tổng quát, thay 2008 bởi số nguyên dương n và tìm được

$$S_n = \frac{n}{6} - \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{7}\right)^{3^i}.$$

Từ đó chứng minh được rằng

$$[S_n] = \begin{cases} \left[\dfrac{n}{6}\right]n & \text{nếu } n \not\vdots\, 6 \\ \left[\dfrac{n}{6}\right] - 1 & \text{nếu } n \,\vdots\, 6. \end{cases}$$

2) Các bạn tham gia giải bài toán này đều cho đáp số đúng với cách giải về cơ bản tương tự như cách giải nêu trên. Ngoài bạn *Hạnh* và bạn *Hà*, các bạn sau có lời giải tốt:

Nghệ An: *Đoàn Văn Tùng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu 3; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn; **Đà Nẵng:** *Hoàng Bùi Khánh*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Tây:** *Phạm Việt Hà*, THPT Tùng Thiện; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1 Toán, ĐHKHTN- ĐHQG Hà Nội; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 11T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt.

Đặc biệt hoan nghênh các bạn lớp 10A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** đã tham gia giải bài toán này đông đảo với nhiều cách khác nhau.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T11/367. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = \dfrac{1}{\cos^6 a} + \dfrac{1}{\cos^6 b} + \dfrac{1}{\cos^6 c}$, *trong đó ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng với công sai bằng $\frac{\pi}{3}$.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Theo giả thiết thì $a = b - \frac{\pi}{3}$ và $c = b + \frac{\pi}{3}$.

Đặt $\cos^2 b = t$, $0 < t \leq 1$ và $\cos^2 3b = m$, $0 < m \leq 1$ thì

$$\cos^2 3a = \cos^2 3\left(\frac{\pi}{3} - b\right) = \cos^2 3b = m;$$

$$\cos^2 3c = \cos^2 3\left(\frac{\pi}{3} + b\right) = \cos^2 3b = m;$$

và $(4\cos^3 b - 3\cos b)^2 = \cos^2 b(4\cos^2 b - 3)^2 = m$

hay phương trình $16t^3 - 24t^2 + 9t - m = 0$, $0 < m \leq 1$ có các nghiệm

$$t_1 = \cos^2 b,\ t_2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - b\right),\ t_3 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + b\right).$$

Suy ra phương trình

$mu^3 - 9u^2 + 24u - 16 = 0$ có các nghiệm

$$u_1 = \frac{1}{\cos^2 b},\ u_2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - b\right)},\ u_3 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + b\right)}.$$

Khi đó $P = u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$. Sử dụng hệ thức Viète và đẳng thức

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 = (u_1 + u_2 + u_3)^3 - 3(u_1 + u_2)(u_2 + u_3)(u_3 + u_1),$$

ta thu được

$$P = \left(\frac{9}{m}\right)^3 - 3\left(\frac{9}{m} - u_1\right)\left(\frac{9}{m} - u_2\right)\left(\frac{9}{m} - u_3\right)$$

hay $P = P(x) = x^3 - 8x^2 + \frac{16}{3}x$, $x = \frac{9}{m} \geq 9$.

(Do $0 < m \leq 1$).

Nhận xét rằng hàm số này có $P'(x) = 3x^2 - 16x + \frac{16}{3} > 0$, $\forall x \geq 9$, nên $P(x)$ đồng biến trong $[9, +\infty)$.

Suy ra min$P = P(9) = 129$, đạt được khi $m = 1$ hay $\cos^2 3b = 1 \Leftrightarrow \sin 3b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{k\pi}{3}$. Do đó

$a = (k-1)\frac{\pi}{3}$, $c = (k+1)\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Nhận xét. Đây là một bài toán về biến đổi và tính toán lượng giác khá phức tạp. Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên. Một số bạn còn cho cách chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $P \geq 129$ dựa trên nhận xét $\cos^2 3b \leq 1$. Một số khác sử dụng công thức khai triển

$$\tan 3b = \tan b\left(\frac{\pi}{3} - b\right)\tan b\left(\frac{\pi}{3} + b\right) = \frac{3\tan b - \tan^3 b}{1 - 3\tan^2 b}$$

và công thức $\frac{1}{\cos^2 b} = 1 + \tan^2 b$ để đưa bài toán về xét dạng phương trình bậc ba theo $t = \tan b$ và tính P. Các bài giải đều cho đáp số đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/367. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[0 ; 1]$ thoả mãn ba tính chất sau:*

i) $f(1) = 1$;

ii) $f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right)$

với mọi $x \in [0; 1]$;

iii) *Với mọi số thực dương ε nhỏ tùy ý, luôn có một số dương δ_ε (δ_ε phụ thuộc vào ε) sao cho: Với mọi $x, y \in [0 ; 1]$ mà $|x - y| < \delta_\varepsilon$ thì $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Chứng minh rằng $f(x) = 1$ với mọi $x \in [0 ; 1]$.

Lời giải. Theo giả thiết với mọi số thực dương ε, luôn tồn tại một số thực dương δ sao cho nếu $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Xét $x, y \in [0 ; 1]$ tùy ý mà $|x - y| < 3\delta$ ta có

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{3}\left|\sum_{i=0}^{2}\left(f\left(\frac{x+i}{3}\right) - f\left(\frac{y+i}{3}\right)\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}\left|f\left(\frac{x+i}{3}\right) - f\left(\frac{y+i}{3}\right)\right| < \varepsilon$$

do $f(x) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} f\left(\frac{x+i}{3}\right)$, $f(y) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} f\left(\frac{y+i}{3}\right)$

và $\left|\frac{x+i}{3} - \frac{y+i}{3}\right| = \frac{|x-y|}{3} < \delta$

với mọi $i = 0, 1, 2$.

Lặp lại tương tự ta suy ra $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ với mọi $x, y \in [0 ; 1]$, $|x - y| < 3^m.\delta$ và với mọi $m \in \mathbb{N}$. Như vậy $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ với mọi $x, y \in [0 ; 1]$. Khẳng định trên đúng với mọi $\varepsilon > 0$. Do đó $f(x) = f(y)$, với mọi $x, y \in [0 ; 1]$. Bởi vậy $f(x) = f(1) = 1$, với mọi $x \in [0 ; 1]$. Khẳng định của bài toán đã được chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán giải tích dạng cơ bản, không quá khó. Ngoài cách giải trên còn có cách giải khác: dùng sự kiện hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên đoạn [0 ; 1] nên hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Cách giải đó phải dùng nhiều tính chất của hàm số liên tục. Trong các bạn gửi lời giải tới tòa soạn chỉ có hai bạn có lời giải như trên: *Nguyễn Ngọc Trung*, 10A1, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội** và *Võ Thành Văn*, 11T, PTCT, ĐHKH Huế, **Thừa Thiên – Huế**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài L1/367. *Hai điện tích điểm A và B có khối lượng và điện tích tương ứng là (–q, m) và (2q, 2m) được nối với nhau bởi một lò xo nhẹ, cách điện có độ cứng bằng K. Đặt hệ trên một mặt phẳng nằm ngang nhẵn cách điện. Người ta tạo ra một điện trường đều có cường độ E và hướng từ A đến B. Hãy tìm độ giãn lớn nhất của lò xo, biết rằng ở thời điểm ban đầu lò xo không biến dạng. Bỏ qua tương tác điện giữa hai quả cầu.*

Lời giải. Gia tốc khối tâm của hệ hướng từ điện tích A đến điện tích B có độ lớn bằng $a_G = \dfrac{qE}{3m}$. Trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm G, lực quán tính tác dụng lên hai điện tích A và B có hướng từ B đến A, có độ lớn lần lượt bằng $\dfrac{qE}{3}$ và $\dfrac{2qE}{3}$.

Ở thời điểm lò xo dãn cực đại thì độ dịch chuyển của hai điện tích A và B tương ứng là Δl_1 và Δl_2. Khi đó vận tốc của cả hai điện tích bằng không.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\left(\frac{qE}{3}+qE\right).\Delta l_1 + \left(2qE - \frac{qE}{3}\right)\Delta l_2 = \frac{1}{2}.K(\Delta l_1 + \Delta l_2)^2.$$

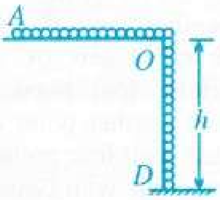
Từ phương trình này rút ra được $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \dfrac{8qE}{3K}$

Vậy độ dãn cực đại của lò xo là $\dfrac{8qE}{3K}$. □

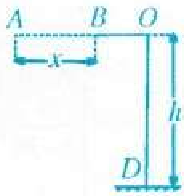
Nhận xét. 1) Lời giải trên ngắn gọn là do đã sử dụng định luật bảo toàn năng lượng. Ngoài cách giải trên, có thể giải bài toán bằng cách lập phương trình dao động của A và B quanh khối tâm G. Chỉ có hai bạn sau có lời giải đúng:

Hà Tây: *Nguyễn Mạnh Quân*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Bình Phước:** *Lê Ngọc Sáng*, 11A-K4, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG



★Bài L2/367. *Một sợi dây xích AOD có độ dài l, đầu D chạm đất, đầu A được giữ chặt trên mặt bàn nằm ngang OA. Cho biết OD = h. Khi thả đầu A ra sợi dây xích sẽ tuột xuống đất. Tìm vận tốc của đầu a khi nó tới mép bàn O. Áp dụng số: l = 50 cm, h = 30cm, g = 9,81 m/s².*



Lời giải. Gọi M là khối lượng của sợi dây xích. Giả sử ở thời điểm t, đầu trên A của xích dịch chuyển tới B, với $AB = x$ (hình vẽ). Theo định lí biến thiên động lượng:

$$dp = d(mv) = mdv + vdm = Fdt \quad (1)$$

trong đó m là khối lượng phần xích BOD:

$$m = \frac{M}{l}(l-x) \Rightarrow dm = -\frac{M}{l}dx$$

còn F là trọng lượng của phần xích OD:

$$F = \frac{M}{l}hg$$

Thay m, dm và F vào (1) ta có

$$\frac{M}{l}(l-x)dv - \frac{Mv}{l}dx = \frac{M}{l}hgdt \quad (2)$$

Từ $v = \dfrac{dx}{dt}$, suy ra $dt = \dfrac{dx}{v}$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được

$$(l-x)dv - vdx = \frac{hg}{v}dx \quad (4)$$

Sau một vài phép biến đổi, phương trình (4) trở thành $\dfrac{vdv}{v^2+gh} = \dfrac{dx}{l-x}$.

Lấy tích phân hai vế $\displaystyle\int_0^v \frac{vdv}{v^2+gh} = \int_0^{l-h} \frac{dx}{l-x}$.

Cuối cùng ta tìm được $v = \sqrt{(l^2-h^2)\dfrac{g}{h}}$.

Áp dụng số $v = \sqrt{(0{,}5^2 - 0{,}3^2)\dfrac{9{,}81}{0{,}3}} \approx 2{,}3$ m/s. □

Nhận xét: Bạn *Phạm Văn Tâm*, trường THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước** có lời giải tốt.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T5/371. A circle (S_1) passing through the vertices A and B of a triangle ABC meets BC at another point D. Another circle, (S_2), passing through B and C meets AB at another point E and meets (S_1) at F. Prove that if all four points A, C, D and E lie on the same circle with center at O, then $\widehat{BFO}=90^o$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/371. Solve the system of equations

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a-30}+\dfrac{y}{a-4}+\dfrac{z}{a-14}+\dfrac{t}{a-10}=1\\ \dfrac{x}{b-30}+\dfrac{y}{b-4}+\dfrac{z}{b-14}+\dfrac{t}{b-10}=1\\ \dfrac{x}{c-30}+\dfrac{y}{c-4}+\dfrac{z}{c-14}+\dfrac{t}{c-10}=1\\ \dfrac{x}{d-30}+\dfrac{y}{d-4}+\dfrac{z}{d-14}+\dfrac{t}{d-10}=1\end{cases}$$

where a, b, c, d are distinct numbers, none of which belong to the set $\{4 ; 10 ; 14 ; 30\}$.

T7/371. Let a, b, c be positive numbers. Prove that $a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\geq 1$.

T8/371. Choose six points D, E, F, G, H, K, in that order, on a circle with radius R and center at O such that $DE = FG = HK = R$. KD and EF meet at A, EF and GH meet at B, and GH meets KD at C. Prove that

$$OA.\ BC = OB.\ CA = OC.\ AB.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/371. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral, inscribed in a circle centered at I. Prove the following inequality

$$(AI+DI)^2+(BI+CI)^2\leq(AB+CD)^2$$

and determine when equality occurs.

T10/371. Consider the quadratic equation $x^2-ax-1=0$ where a is a positive integer. Let α be a positive root of this equation and construct a sequence (x_n) by the following recursive rule

$$x_0=a,\ x_{n+1}=[\alpha x_n],\ n=0,1,2,\ldots$$

Prove that there exists infinitely many integer n such that x_n is a multiple of a.

T11/371. Given a function $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ such that

$$\begin{cases}\big(f(2n)+f(2n+1)+1\big)\big(f(2n+1)-f(2n)-1\big)=3(1+2f(n))\\ f(2n)\geq f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Denote $M=\{m\in f(\mathbb{N}):m\leq 2008\}$. Find the number of elements of M.

T12/371. For what kind of triangle ABC that the following relation among its sides and its angles holds

$$\frac{bc}{b+c}(1+\cos A)+\frac{ca}{c+a}(1+\cos B)+\frac{ab}{a+b}(1+\cos C)$$
$$=\frac{3}{16}(a+b+c)^2+\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C.$$

Translated by LE MINH HA

TIN TỨC DẠY – HỌC TOÁN

Ngày 29/4/2008 vừa qua, tại hội trường B1 ĐHSP Hà Nội, trước sự chứng kiến của đại biểu đến từ Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Thông tin và Truyền thông, Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ Lao động Thương binh và Xã hội, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, các trường phổ thông trên địa bàn Hà Nội, ...Trường học trực tuyến dành cho học sinh phổ thông trên toàn quốc www.truongtructuyen.vn đã chính thức được khai trương và đi vào hoạt động.

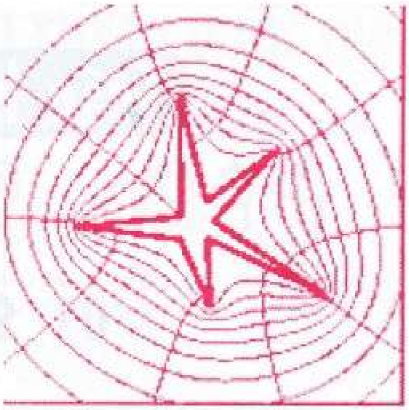
www.truongtructuyen.vn được ra đời từ sự kết hợp giữa "giải pháp học trực tuyến, thi trực tuyến ứng dụng trong việc nâng cao chất lượng đào tạo" của công ti AI, giải pháp đã dành được giải Nhất cuộc thi Nhân tài đất Việt 2007 và đài truyền hình kĩ thuật số VTC cùng sự cố vấn và hợp tác xây dựng nội dung của khối chuyên ĐHSP Hà Nội, trường THPT Nguyễn Tất Thành - ĐHSP Hà Nội, các giảng viên trường ĐHSP Hà Nội và nhiều thầy cô trên toàn quốc.

www.truongtructuyen.vn thật sự là một môi trường hỗ trợ việc học tập cho học sinh THPT một cách hiệu quả. Tại đây, học sinh sẽ được ôn tập và nâng cao kiến thức qua video bài giảng đầy trực quan và sinh động, được ôn thi tốt nghiệp THPT, thi vào Đại học, được các thầy cô có nhiều kinh nghiệm giải đáp những thắc mắc và cùng trao đổi giao lưu với bạn bè trên toàn quốc.

PV

BẠN CÓ BIẾT ?

SỰ MỞ RỘNG CỦA CÔNG THỨC SCHWATZ - CHRISTOFFEL được chờ đợi trong 140 năm



Ánh xạ bảo giác

Trước hết chúng ta cùng làm quen với khái niệm *ánh xạ bảo giác*. Một ánh xạ bảo giác trên một miền thuộc mặt phẳng phức là một hàm giải tích (hàm có các đạo hàm liên tục và có thể khai triển được thành một tổng vô hạn những đơn thức của một biến) có đạo hàm không triệt tiêu trong miền đó. Ánh xạ bảo giác biến một cặp đường cong bất kì cắt nhau tại một điểm trong miền thành một cặp đường cong ảnh mà không làm thay đổi góc giao của chúng (góc giữa hai tiếp tuyến tại giao điểm). Ánh xạ bảo giác là một công cụ lí thuyết then chốt có rất nhiều ứng dụng lí thú trong toán học cũng như trong thực tế. Các nhà toán học, kĩ sư và các nhà khoa học sử dụng công cụ này để chuyển các thông tin phức tạp về dạng đơn giản hơn, do đó có thể phân tích được dễ dàng hơn.

Công cụ lí thuyết này đã có lịch sử lâu dài và đã được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như trong quá trình truyền nhiệt, trong tĩnh điện học, trong dòng chảy đều của chất lưu,... Gần đây nó còn được dùng trong thần kinh học nhằm mô phỏng những cấu trúc phức tạp về chất xám trong bộ não con người.

Công thức Schwarz – Christoffel và sự mở rộng sau hơn 140 năm

Nói chung, ta không thể viết một công thức đơn giản cho một ánh xạ bảo giác từ một miền này sang một miền khác. Tuy nhiên, đối với trường hợp đặc biệt quan trọng là ánh xạ từ nửa mặt phẳng ($\mathrm{Im}(z) > 0$) thì ta có công thức Schwarz – Christoffel (S-Ch). Công thức (S-Ch) xác định một song ánh bảo giác từ nửa mặt phẳng $\mathrm{Im}(z) > 0$ lên một miền đa giác. Công thức này được Schwarz và Christoffel độc lập nghiên cứu xây dựng vào khoảng những năm 60 của thế kỉ XIX.

Tuy nhiên, trong suốt 140 năm qua, công thức này tồn tại một hạn chế lớn là nó chỉ được áp dụng lên những miền rất đơn giản không chứa lỗ thủng hay kì dị. Trong khi các bài toán thực tế đòi hỏi một sự mở rộng công thức (S-Ch) cho những miền phức tạp hơn hay có chứa kì dị.

Bài toán mở rộng (S-Ch) làm nản lòng các nhà toán học trong suốt 140 năm đã được GS. Darren Crowdy, Giáo sư ngành Toán Ứng dụng Đại học Đo lường London (Imperial College) giải quyết. GS. Crowdy đã thực hiện một đột phá trong lĩnh vực toán học về ánh xạ bảo giác. Ông bổ sung điều kiện cho công thức nổi tiếng Schwarz – Christoffel nhằm áp dụng nó trong các trường hợp phức tạp này. Ông giải thích ý nghĩa của công việc của mình "*Công thức này là một mảng thiết yếu của toán học đã được cả thế giới sử dụng. Bây giờ, với sự mở rộng của tôi, nó có thể được sử dụng trong điều kiện phức tạp hơn trước rất nhiều. Chẳng hạn trong công nghiệp, công cụ ánh xạ này trước đây không sử dụng được nếu mảnh kim loại (hay nguyên liệu) không đều khắp nơi, chẳng hạn nếu nó chứa một phần nguyên tố khác, hay có lỗ thủng. Với sự mở rộng của tôi cho công thức này (Công thức Schwarz – Christoffel), bạn có thể tính toán được những sai số và ánh xạ chúng lên một mô hình đĩa đơn giản để phân tích giống như bạn có thể làm với trường hợp kém phức tạp hơn không chứa lỗ thủng*".

(Theo *Science Daily*).

HẢI HÀ
(*Hà Nội*) giới thiệu

Toán học & Đời sống

THI TRẮC NGHIỆM dưới góc nhìn xác suất

(Tiếp theo kì trước)

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Một phương pháp giảm xác suất sai lầm, nâng cao độ tin cậy trong thi TN là trừ điểm các câu sai.

Bài toán 3. *Giả sử đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 đáp án trả lời trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Mỗi câu đúng được cộng 5 điểm, mỗi câu sai bị trừ a điểm. Để tránh điểm âm ta quy định điểm ghi trên bài của học sinh là $X = \max\{0, Y\}$, trong đó Y là điểm thực của học sinh. Thí sinh sẽ đỗ nếu đạt ít nhất 25 điểm.*

Ứng với mỗi trường hợp $a = 1$; 2 hãy tính

a) Tỉ lệ học sinh của nhóm Δ bị điểm 0.

b) Điểm trung bình của các học sinh trong nhóm Δ.

c) Tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ.

Lời giải. Chọn một học sinh bất kì trong nhóm Δ. Giả sử học sinh được chọn tên là An.

Gọi T là số câu trả lời đúng của An. Từ công thức (1), ta có bảng phân bố xác suất của T là

T	0	1	2	3	4	5
P	0,0563	0,1877	0,2816	0,2503	0,1460	0,0584

T	6	7	8	9	10
P	0,0162	0,0031	0,0004	0,0000	0,0000

Bảng 2

Số điểm thực mà An nhận được là

$$Y = 5T - a(10 - T) = (5 + a)T - 10a.$$

Số điểm ghi trên bài của An là

$$X = \max\{0, Y\} = \max\{0, (5 + a)T - 10a\} \quad (2)$$

I. Trường hợp mỗi câu sai trừ 1 điểm ($a=1$)

Theo (2) ta có $X = \max\{0, 6T - 10\}$. X là một hàm của T và có tập xác định là $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Ta có bảng sau đây

T	0	1	2	3	4	5
X	0	0	2	8	14	20

T	6	7	8	9	10
X	26	32	38	44	50

Bảng 3

a) Từ bảng 3, ta thấy An bị điểm 0 khi trả lời đúng nhiều nhất một câu. Từ bảng 2, ta có xác suất để An bị điểm 0 là

$$P(X = 0) = P(T = 0) + P(T = 1)$$
$$= 0{,}0563 + 0{,}1877 = 0{,}244.$$

Như vậy, *tỉ lệ học sinh trong nhóm Δ bị điểm 0 là 24,4%.*

b) Kết hợp bảng 2 với bảng 3, ta nhận được bảng phân bố xác suất của X là

T	0	2	8	14	20	26
P	0,244	0,2816	0,2503	0,1460	0,0584	0,0162

T	32	38	44	50
P	0,0031	0,0004	0,0000	0,0000

Bảng 4

Từ bảng 4, tính được $E(X) = 6{,}314$.

Như vậy *điểm trung bình của các học sinh trong nhóm Δ là 6,314 điểm.*

c) Xác suất để An thi đỗ là

$$P(X \geq 25) = P(X = 26) + P(X = 32) + P(X = 38)$$
$$+ P(X = 44) + P(X = 50) = 0{,}0197.$$

Vậy tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ là 1,97%.

II. Trường hợp mỗi câu sai trừ 2 điểm ($a = 2$)

Theo (2) ta có $X = \max\{0, 7T - 20\}$. Do đó

T	0	1	2	3	4	5
X	0	0	0	1	8	15

T	6	7	8	9	10
X	22	29	36	43	50

Bảng 5

a) Từ bảng 5, ta thấy An bị điểm 0 khi trả lời đúng nhiều nhất hai câu. Từ bảng 2, ta có xác suất để An bị điểm 0 là

$$P(X=0)=P(T=0)+P(T=1)+P(T=2)$$
$$=0{,}0563+0{,}1877+0{,}2816=0{,}5256.$$

Như vậy, tỉ lệ học sinh trong nhóm Δ bị điểm 0 là 52,56%.

b) Lí luận tương tự như trường hợp $a=1$ ta có được bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	8	15	22	29
P	0,5256	0,2503	0,1460	0,0584	0,0162	0,0031

X	36	43	50
P	0,0004	0,0000	0,0000

Bảng 6

Từ bảng 6 ta tính được $E(X)=2{,}75$.

Như vậy *điểm trung bình của các học sinh trong nhóm Δ là 2,75 điểm.*

c) Xác suất để An thi đỗ là

$P(X\geq 25)=P(X=29)+P(X=36)+P(X=43)+P(X=50)=0{,}0035.$

Vậy tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ là 0,35%. ❒

Ta có bảng tổng kết sau đây

Kết quả thi của nhóm Δ	Phương án thi trắc nghiệm		
	Không trừ điểm câu sai	Mỗi câu sai trừ 1 điểm	Mỗi câu sai trừ 2 điểm
Tỉ lệ điểm 0	5,63%	24,34%	52,5%
Tỉ lệ đỗ nhầm	7,81%	1,97%	0,35%
Điểm trung bình	12,5	6,31	2,75

Một cách khác, để làm giảm xác suất sai lầm trong thi TN là tăng phương án lựa chọn trong mỗi câu hỏi. Nhiều nước trên thế giới trong bài thi TN thường có 5 phương án lựa chọn).

✪**Bài toán 4.** *Giả sử đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 5 đáp án trả lời trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai được 0 điểm. Thí sinh sẽ đỗ nếu đạt ít nhất 25 điểm. Hãy tính*

a) Tỉ lệ học sinh của nhóm Δ bị điểm 0.

b) Điểm trung bình của các học sinh trong nhóm Δ.

c) Tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ.

Lời giải. Chọn một học sinh bất kì trong nhóm Δ. Giả sử học sinh được chọn tên là An.

Theo giả thiết với mỗi câu, xác suất để An chọn đúng là 0,2 và chọn sai là 0,8.

Bằng lập luận tương tự như bài toán 2 ta có kết quả sau đây.

a) Xác suất để An nhận điểm 0 là $(0{,}08)^{10}\approx 0{,}1073$.

Vậy tỉ lệ học sinh trong nhóm Δ bị điểm 0 là 10,73%.

b) $P(X=5k)=C_{10}^{k}(0{,}2)^{k}.(0{,}8)^{10-k}$. Từ đó ta có bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	0	5	10	15	20	25
P	0,107	0,268	0,302	0,201	0,088	0,026

X	30	35	40	45	50
P	0,006	0,0008	0,000	0,0000	0,0000

Bảng 7

Từ bảng 7 suy ra kì vọng $E(X)\approx 10$.

Như vậy *điểm trung bình của các học sinh trong nhóm Δ là 10 điểm.*

c) Xác suất để An thi đỗ là

$P(X\geq 25)=P(X=25)+P(X=30)+P(X=35)+P(X=40)+P(X=45)+P(X=50)=0{,}0328.$

Vậy *tỉ lệ học sinh của nhóm Δ thi đỗ là 3,28%.* ❒

Ta có bảng tổng kết sau đây

Kết quả thi của nhóm Δ	Phương án thi trắc nghiệm không trừ điểm câu sai	
	Mỗi câu có 4 đáp án	Mỗi câu có 5 đáp án
Tỉ lệ điểm 0	5,63%	10,7%
Tỉ lệ đỗ nhầm	7,81%	3,28%
Điểm trung bình	12,5	10

Bây giờ xét phương án thi TN trong đó đề thi có 10 câu hỏi, mỗi câu có 5 đáp án trả lời trong đó chỉ có một đáp án đúng. Mỗi câu đúng được cộng 5 điểm, mỗi câu sai bị trừ a điểm ($a\in\{1;2\}$). Điểm cuối cùng ghi trên bài của học sinh là $X=\max\{0,Y\}$, trong đó Y là điểm thực của học sinh. Thí sinh thi đỗ nếu đạt ít nhất 25 điểm.

Mời các bạn tự phát biểu và giải bài toán tương tự như bài toán 3 ở trên.

Kì thi OLYMPIC TOÁN TRUNG HỌC CƠ SỞ *khu vực Balkan 2007*

Kì thi Olympic toán THCS Khu vực Balkan (JBMO) được các nhà toán học từ các nước thuộc vùng Balkan (Vladimir Stoyanovich (Serbia), Khristo Malcheski (Macedonia) và Ivan Tonov (Bulgaria)) tổ chức lần đầu tiên vào năm 1997. Kì thi được tổ chức hàng năm với hình thức giống như thi IMO nhưng dành cho những thí sinh THCS dưới 15,5 tuổi thuộc các quốc gia khu vực Balkan (gồm 11 quốc gia). Những năm gần đây, các nước chủ nhà cũng đã mời thêm những nước ngoài khu vực. Khách mời năm 2007 gồm có Bulgaria 2, Kazakhstan, Shumen & Varna. Kết thúc Kì thi JBMO 2007, tám Huy chương Vàng đã được trao cho tám thí sinh đến từ bốn nước: Rumania (2), Turkey (2), Former Yugoslav Republic of Macedonia (1) và Bulgaria (3). Sau đây chúng tôi xin giới thiệu cùng bạn đọc đề thi JBMO 2007, diễn ra từ 25 đến 30/6/07 tại Shumen, Bulgaria.

Câu 1. Giả sử a là một số thực dương sao cho $a^3 = 6(a + 1)$. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ không có nghiệm thực.

Câu 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $\widehat{DAC} = \widehat{BDC} = 36°$, $\widehat{CBD} = 18°$ và $\widehat{BAC} = 72°$. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại P. Xác định số đo của góc $\widehat{APD}$.

Câu 3. Trên mặt phẳng cho trước 50 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi điểm được tô bởi một trong bốn màu đã chọn trước. Chứng minh rằng có một màu và ít nhất 130 tam giác không cân có các đỉnh được tô cùng màu đó.

Câu 4. Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố thì $7p + 3^p - 4$ không là một số chính phương.

THANH HỒNG giới thiệu

Giải đáp: Tìm chữ số XUÂN MẬU TÝ

(Đề đăng trong THTT số 368 tháng 2.2008)

Các chữ số phải tìm đều khác 0, 2, 8 nên X = 1.

Từ 12 = 3 + 4 + 5 ≤ N + U + Y ≤ 9 + 7 + 6 = 22 nên N + U + Y = 18 (1)

Từ 10 = 2.3 + 4 ≤ 2A + T ≤ 2.9 + 7 = 25 nên 2A + T = 19 (2)

Từ (2) và X = 1 phải có U + M = 8 (3)

Do U, M đều khác 1, 2 nên (U, M) có thể là (3, 5) hoặc (5, 3). Vì A, T không lấy các giá trị 1, 3, 5 mà T lẻ thỏa mãn (2) nên T = 7, suy ra A = 6. Từ đó (N, Y) chỉ có thể là (4, 9) hoặc (9, 4), nên U = 3 và M = 5. Thử thấy các các giá trị (N, Y) này đều thỏa mãn, ta có kết quả

XUAN	1564	1569
MAU	+ 365	+ 365
TY	79	74
2008	2008	2008

Nhận xét. 1) Nếu xét tổng ba số đang xét theo môđun 9 ta có A + U + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 ≡ 2008 (mod 9), dẫn đến A + U ≡ 2 (mod 9), do đó A + U = 11. Kết hợp với (2), (3), (1) suy ra T = 7, A = 6, U = 3, M = 5 và cũng dẫn đến kết quả.

2) Rất nhiều bạn gửi lời giải đúng đến Tòa soạn, trong đó các bạn sau có lời giải gọn và gửi đến sớm được nhận tặng phẩm:

Lê Thị Nguyệt, 11 Tự nhiên 1, THPT Văn Giang, **Hưng Yên**, *Vũ Thanh Tú*, 11A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, **Hải Dương**, *Nguyễn Trọng Hiệp*, 6A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Lê Nhật Hoàng*, 8D, THCS Xuân An, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; *Phạm Hồng Cảnh*, 11A1, THPT Anh Sơn 2, Anh Sơn, **Nghệ An.**

PHI YẾN

Cuộc thi vui GIẢI TRÍ NGÀY HÈ

Hè đến, các bạn đã lên kế hoạch cho mình như thế nào trong những ngày nghỉ chưa? THTT xin mời các bạn tham gia Cuộc thi vui Giải trí ngày hè. Cuộc thi này sẽ được chia làm hai đợt, đăng lần lượt trên các số báo 371 (5.2008) và 372 (6.2008). Đối tượng dự thi là tất cả các bạn yêu toán trên cả nước. Bạn hãy gửi lời giải của ba bài toán vui trong số này về toà soạn trước ngày 31/7/2008 và ba bài ở số tiếp theo về toà soạn trước ngày 31/8/2008. Hi vọng rằng bạn sẽ có tên trong danh sách đoạt giải in trong số 376 tháng 10 năm 2008, ra ngày 15/10/2008.

Bài 1. QUẢ BÓNG

Để làm một quả bóng như hình bên, người ta dùng một số mảnh da hình lục giác đều và hình ngũ giác đều có các cạnh bằng nhau rồi khâu các cạnh chung của từng hai mảnh một sao cho cứ mỗi hình ngũ giác đều có cạnh chung với năm hình lục giác đều. Hỏi mỗi quả bóng có bao nhiêu:

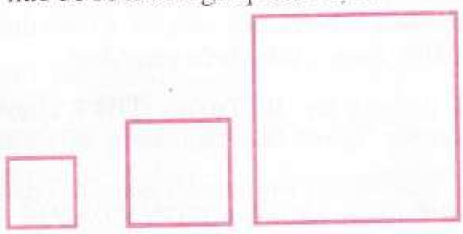
1) hình lục giác đều;
2) hình ngũ giác đều;
3) cạnh ; 4) đỉnh?

Số cạnh, số đỉnh và số các đa giác đều đó liên hệ với nhau như thế nào?

PHI YẾN

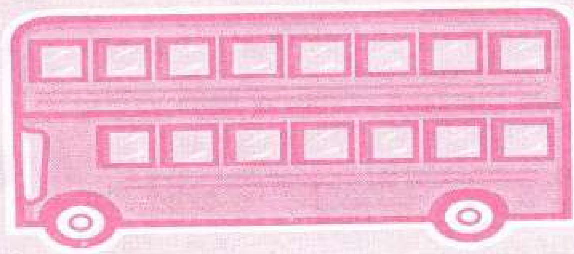
Bài 2. GHÉP THÀNH HÌNH VUÔNG

Bạn có ba tấm gỗ hình vuông kích thước 2 x 2 (dm), 3 x 3 (dm) và 6 x 6 (dm), mà cần phải cắt ra rồi ghép lại để che nắng cho một cửa sổ hình vuông. Bạn sẽ phân chia ba tấm gỗ đó như thế nào để số mảnh ghép là ít nhất?



AN MINH

Bài 3. BIỂN SỐ XE BUÝT



Trên đường từ một cuộc hội thảo khoa học về nhà, một nhà toán học đã để quên một tập tài liệu trên xe buýt. Khi nhà toán học này đến công ti xe buýt tìm lại tài liệu, họ hỏi ông về số xe của chiếc xe buýt đó. Nhà toán học đãng trí không nhớ chính xác số xe mà chỉ nhớ rằng: khi xoay ngược bảng ghi số xe, ông nhìn thấy một số chính phương. Khi chia số này cho số ban đầu, phần dư nhận được cũng là số chính phương và là ƯSCLN của chúng. Bạn hãy chỉ giúp công ti số biển của chiếc xe buýt đó, biết rằng công ti có 500 xe mang biển số từ 1 đến 500.

THANH HỒNG

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 371(5.2008)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1. Phòng GD-ĐT Thành phố Huế phát thưởng Hội thi Kể chuyện tấm gương đạo đức Hồ Chí Minh tháng 9-2007.

PHÒNG GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ HUẾ

* Địa chỉ : 03 Đống Đa, thành phố Huế * Điện thoại: (054)824575

Ông Phan Nam
Trưởng Phòng GD-ĐT
Thành phố Huế

Phòng Giáo dục - Đào tạo (GD - ĐT) thành phố Huế có chức năng, nhiệm vụ quản lí trực tiếp 109 cơ sở giáo dục ở 27 phường, xã thuộc địa bàn Thành phố gồm 47 trường Mầm non, (MN), 39 trường Tiểu học (TH) và 23 trường Trung học cơ sở (THCS) với số lượng cán bộ giáo viên, nhân viên toàn ngành trên 3.000 người và số lượng học sinh hơn 60.000 em.

Những thành quả đã đạt được trong quá trình đổi mới sự nghiệp Giáo dục và Đào tạo:

❖ Phát triển hợp lí quy mô, mạng lưới trường lớp; huy động học sinh trong độ tuổi đến trường đạt tỉ lệ cao.

❖ Trình độ chuyên môn nghiệp vụ của đội ngũ được nâng cao. Tỉ lệ giáo viên MN đạt chuẩn và trên chuẩn là 96%, trong đó trên chuẩn đạt 40%; tỉ lệ giáo viên TH và THCS đạt chuẩn và trên chuẩn hơn 98%, trong đó có 60% đạt trên chuẩn.

❖ Đầu tư xây dựng mới, nâng cấp cơ sở vật chất trường học theo hướng hiện đại hóa và chuẩn hóa. Đã có 11 trường TH, 5 trường MN, 3 trường THCS được công nhận Trường đạt chuẩn Quốc gia.

❖ 100% phường xã đạt chuẩn Quốc gia về phổ cập giáo dục TH đúng độ tuổi, phổ cập THCS và có 9 phường xã đạt chuẩn phổ cập bậc Trung học về trình độ học vấn.

Với sự phát triển không ngừng của sự nghiệp Giáo dục và Đào tạo thành phố, trong những năm qua, Phòng GD-ĐT Huế đã được Sở GD-ĐT Thừa Thiên - Huế khen thưởng 10/10 chỉ tiêu thi đua, Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen (năm 2003), Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Ba (năm 2004) và nhiều Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Ủy ban TDTT, UBND tỉnh và UBND Thành phố Huế.

Năm học 2007-2008, Phòng GD-ĐT Thành phố Huế đã tích cực triển khai thực hiện nhiệm vụ và bước đầu đã đạt được những kết quả nhất định:

❖ Thực hiện tốt cuộc vận động "*Hai không*" với 4 nội dung và cuộc vận động "*Học tập và làm theo tấm gương đạo đức Hồ Chí Minh*" do Bộ Giáo dục và Đào tạo phát động.

❖ Chất lượng giáo dục toàn diện đi vào chiều sâu; chất lượng học sinh giỏi có nhiều kết quả nổi bật: Đoạt giải Nhất toàn đoàn học sinh giỏi THCS và giải Nhất toàn đoàn học sinh giỏi TH cấp Tỉnh.

❖ Công tác phổ cập giáo dục Tiểu học đúng độ tuổi; phổ cập THCS đạt tỉ trọng ngày càng cao; phổ cập bậc Trung học được đẩy mạnh.

❖ Các hoạt động ngoại khóa được đầu tư và quan tâm; các hoạt động văn thể mĩ phát triển mạnh.

❖ Năng lực đội ngũ ngày càng được khẳng định: Đoạt giải Nhất toàn đoàn Hội thi giáo viên dạy giỏi tiểu học cấp Tỉnh; giải Nhất toàn đoàn Hội thi thiết bị dạy học tự làm Mầm non Tiểu học - Trung học cơ sở cấp Tỉnh.

Phát huy những thành quả đã đạt được, toàn thể cán bộ công nhân viên Phòng GD-ĐT Thành phố Huế quyết tâm vượt qua mọi khó khăn, thử thách để hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ năm học 2007-2008, góp phần đưa nền giáo dục tỉnh Thừa Thiên - Huế ngày một vững mạnh đi lên cùng đất nước.

Lãnh đạo và chuyên viên Phòng GD-ĐT Thành phố Huế

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT05M8
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2008
Giá : 5000 đồng
Năm nghìn đồng