TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

4 2006
Số 346

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

KẾT QUẢ KỲ THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY CASIO

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT LAM SƠN, THANH HOÁ

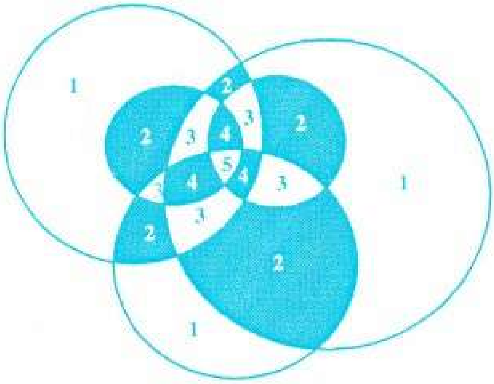
Thử sức trước KỲ THI

ĐỀ THI TOLITI 2006 đợt 2

Jules Henri Poincaré
(1854 - 1912)

BẠN CÓ BIẾT ?

BÀI TOÁN HAI MÀU



Chúng ta đã biết bài toán bốn màu: Bốn màu đủ để tô màu bất kì bản đồ địa lí phẳng nào, sao cho hai nước có một biên giới chung bao giờ cũng được tô màu khác nhau. Kết quả này của Kenneth Appel và Wolfgaug Ha Ken đạt được năm 1976. Gần đây có một chứng minh mới bằng máy vi tính của Georges Gonthier ở Viện nghiên cứu Microsoft Cambridge.

Bên cạnh bài toán bốn màu, có bài toán ít nổi tiếng hơn, cũng được giải bằng máy tính là bài toán hai màu:

(Xem tiếp trang 8)

KẺ THÊM ĐƯỜNG VUÔNG GÓC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Việc kẻ thêm đường trong bài toán hình học nhằm tạo thêm những mối quan hệ giữa các yếu tố về cạnh và góc trong bài toán. Kẻ thêm đường vuông góc là một cách thường được nghĩ đến khi chưa tìm ngay được lời giải của bài toán.

Kẻ thêm đường vuông góc như thế nào ?

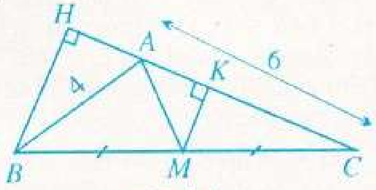
Ta thường kẻ thêm đường vuông góc trong các trường hợp sau đây.

1. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra nửa tam giác đều

Thường dùng cách này khi giải bài toán có góc $60^o, 120^o, 30^o, 150^o$.

Thí dụ 1. (*Lớp 8*). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$, $AB = 4$, $AC = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến AM.

Lời giải.(h.1) Kẻ $BH \perp AC$. Tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{BAH} = 60^o$ nên $AH = \dfrac{AB}{2} = 2$.



Hình 1

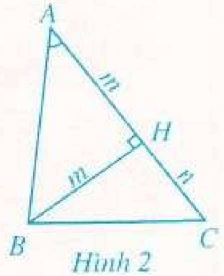
Áp dụng định lí Pythagore, ta tính được $BH = 2\sqrt{3}$. Còn $CH = HA + AC = 2 + 6 = 8$. Kẻ $MK \perp CH$ thì $HK = \dfrac{HC}{2} = 4$ nên $AK = 2$.

Ta lại có $MK = \dfrac{BH}{2} = \sqrt{3}$ nên $AM^2 = AK^2 + MK^2 = 4 + 3 = 7$. Vậy $AM = \sqrt{7}$.

2. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra tam giác vuông cân

Thường dùng cách này khi giải bài toán có góc 45^0, 135^0.

Thí dụ 2.(Lớp 8). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^0$. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC bằng $\dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4}$.



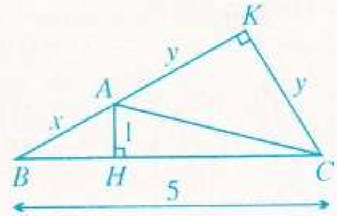
Hình 2

Lời giải (h. 2) Giả sử $AC \geq AB$. Kẻ $BH \perp AC$. Ta có tam giác ABH vuông cân tại H. Đặt $AH = BH = m$, $HC = n$. Khi đó

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 =$$
$$= (m\sqrt{2})^2 + (m+n)^2 - (m^2 + n^2)$$
$$= 2m(m+n) = 2.BH.AC = 4S_{ABC}.$$

Thí dụ 3. (Lớp 8). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 135^o$, $BC = 5$, đường cao $AH = 1$. Tính độ dài các cạnh AB và AC.

Lời giải. (h. 3) Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $\widehat{CAK} = 45^o$ nên tam giác ACK vuông cân tại K. Đặt $AB = x$, $AK = KC = y$.



Hình 3

Ta có

$\Delta HBA \backsim \Delta KBC$ (g.g) nên

$$\frac{AH}{KC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{5} \Rightarrow xy = 5 \quad (1)$$

Xét tam giác BKC vuông, ta có

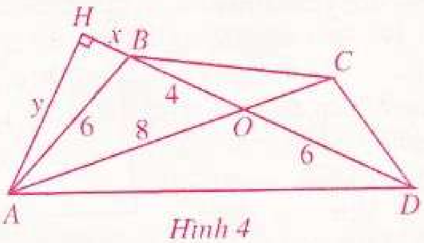
$$BK^2 + KC^2 = BC^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + 2y^2 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $(x; y) = (\sqrt{5}; \sqrt{5})$ hoặc $(x; y) = \left(\sqrt{10}; \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$. Từ đó suy ra $AB = \sqrt{5}$; $AC = \sqrt{10}$ hoặc $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{5}$.

3. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra tam giác vuông

Thí dụ 4.(Lớp 8). Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo, $AB = 6$, $OA = 8$, $OB = 4$, $OD = 6$. Tính độ dài AD.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

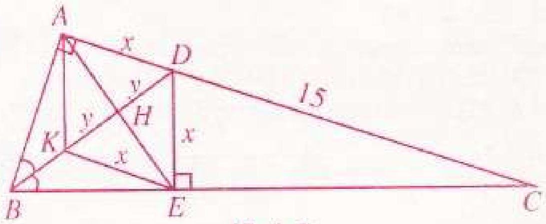
Kẻ $AH \perp OB$. Đặt $BH = x, AH = y$. Áp dụng định lí Pythagore vào các tam giác ABH và AOH, ta có $x^2 + y^2 = 36$ và $(x+4)^2 + y^2 = 64$.

Từ đó ta tìm được $x = \dfrac{3}{2}$, $y^2 = \dfrac{135}{4}$. Do đó $AD^2 = HD^2 + AH^2 = y^2 + (x+10)^2 = 166$. Vậy $AD = \sqrt{166}$.

4. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra hai tam giác vuông bằng nhau

Thí dụ 5. (Lớp 9). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Biết $BD = 7$, $DC = 15$. Tính độ dài AD.

Lời giải. (h. 5)



Hình 5

Kẻ $DE \perp BC$. Ta có $\Delta ABD = \Delta EBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $DA = DE$, $BA = BE$, suy ra BD là đường trung trực của AE. Gọi H là giao điểm của AE và BD. Lấy K đối xứng với D qua H. Tứ giác $AKED$ là hình thoi. Đặt $EK = ED = AD = x$, $DH = HK = y$. Tam giác EBD vuông nên $ED^2 = DB.DH$, suy ra $x^2 = 7y$ (1). Do $EK // AC$ nên $\dfrac{EK}{CD} = \dfrac{BK}{BD} \Leftrightarrow$

$\dfrac{x}{15} = \dfrac{7-2y}{7}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $30x^2 + 49x - 735 = 0$.

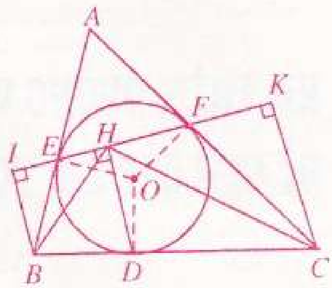
Nghiệm dương của phương trình là $x = 4{,}2$. Vậy $AD = 4{,}2$.

5. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra hai tam giác vuông đồng dạng

Thí dụ 6. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm trên các cạnh BC, AB, AC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.

Lời giải.(h. 6)

Kẻ BI, CK vuông góc với EF. Tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{BEI} = \widehat{CFK}$. Ta có $\Delta BEI \backsim \Delta CFK$ (g. g).



Hình 6

Từ đó suy ra $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{HI}{HK}$ nên $\Delta BHI \backsim \Delta CHK$.

Do đó $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.

Để luyện tập, các bạn hãy làm các bài tập sau:

Bài 1. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 120^\circ$, $AB = 7$, $BC = 8$. Tính độ dài AC.

Bài 2. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo góc ADB.

Bài 3. (Lớp 7). Cho tam giác ABC ($AC > AB$), đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $DB = DE$.

Bài 4. (Lớp 8). Cho tam giác ABC vuông cân tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc AHC.

Bài 5. (Lớp 8). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{CF}{FA}$. Chứng minh rằng AE vuông góc với DF.

Bài 6. (Lớp 9). Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R, cắt nhau tại A và B, trong đó $\widehat{OAO'} = 90^\circ$. Vẽ cát tuyến chung MAN. Tính tổng $AM^2 + AN^2$ theo R.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2005 - 2006

NGÀY THỨ NHẤT

(Dành cho mọi thí sinh)

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*)

1) Cho biểu thức

$$M=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\right).$$

Tìm x để biểu thức M có nghĩa và rút gọn M.

2) Giải phương trình

$$\sqrt{x}+\sqrt{3x}+\sqrt{4x}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

Bài 2. (*1,5 điểm*)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2-3x=y^2-2 \\ 2y^2-3y=x^2-2. \end{cases}$$

Bài 3. (*2 điểm*)

Cho phương trình $x^2-2x-2|x-m|+2=0$.

1) Giải phương trình khi $m=1$.

2) Tìm m để tập nghiệm của phương trình đã cho có đúng hai phần tử.

Bài 4. (*3 điểm*)

Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, ta vẽ nửa đường tròn (C) tâm O đường kính AB và hai tia tiếp tuyến Ax, By với (C). Một đường thẳng (d) thay đổi cắt Ax, By lần lượt tại các điểm M và N (M khác A; N khác B). Gọi I là giao điểm của AN và BM.

1) Chứng minh rằng nếu (d) là tiếp tuyến của (C) thì $\widehat{MON}=90^\circ$.

2) Chứng minh rằng nếu $\widehat{MON}=90^\circ$ thì (d) là tiếp tuyến của (C).

3) Cho (d) tiếp xúc với (C) tại H. Tìm vị trí của (d) để tứ giác $HIBN$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Bài 5. (*1,5 điểm*)

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=60^\circ$; $\widehat{BSC}=90^\circ$; $\widehat{CSA}=120^\circ$ và $SA=SB=SC=a$. Tính thể tích hình chóp theo a.

NGÀY THỨ HAI

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên toán)

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Bài 6. (*2,5 điểm*)

1) Cho biểu thức $P(x)=\sqrt{x^8+12x+12}-3x$.

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$. Chứng minh : $P(x_1)=P(x_2)$.

2) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $3x^2+14y^2+13xy=330$.

Bài 7. (*2 điểm*)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$$

Bài 8. (*2 điểm*)

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}.$$

2) Cho ba số thực x, y, z đều lớn hơn 2 và thoả mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

Chứng minh rằng $(x-2)(y-2)(z-2)\le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Bài 9. (*2 điểm*)

Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, P.

1) Xét trường hợp $AB < AC$, gọi D là giao điểm của các tia AO và MN. Chứng minh $AD \perp DC$.

2) Gọi *(T)* là tam giác có các đỉnh là M, N, P. Giả sử *(T)* đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số k. Tính k ?

Bài 10. (*1,5 điểm*)

Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Tiếp tuyến (d_1) với đường tròn cắt các cạnh AB, AD lần lượt tại các điểm M, P. Tiếp tuyến (d_2) với đường tròn cắt các cạnh CB, CD lần lượt tại các điểm N, Q. Chứng minh $MN \parallel PQ$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU, ĐHQG TP.HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2005 - 2006

(Đề thi đã đăng trên THTT số 345, tháng 3 năm 2006)

Câu 1. a) Để ý rằng $a > 0$, $b > 0$, $c \neq 0$ ta thấy

$\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}=\sqrt{a+b} < \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

$= \sqrt{a}+\sqrt{b}$ nên $c < 0$.

Từ đó

$\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

$\Leftrightarrow a+b=(a+c)+2\sqrt{(a+c)(b+c)}+(b+c)$

$\Leftrightarrow -c=\sqrt{(a+c)(b+c)}$

$\Leftrightarrow c^2 = ab+ac+bc+c^2$

$\Leftrightarrow bc+ac+ab=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{bc+ac+ab}{abc}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0.$

b) Giải hệ PT

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=1 & (1) \\ \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=\sqrt{xy+2} & (2) \end{cases}$$

Từ PT (1) ta có

$$x^2+y^2=x^2y^2 \quad (3)$$

Từ PT (2) có

$(x^2-1)+2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+(y^2-1)=xy+2$

hay

$(x^2+y^2)+2\sqrt{x^2y^2-(x^2+y^2)+1}-xy-4=0(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $x^2y^2-xy-2=0$,

hay $(xy-2)(xy+1)=0$.

• Nếu $xy-2=0$, hay $xy=2$ thì ta có

$(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=$

$=(x^2y^2)^2-4x^2y^2=0 \Rightarrow x^2=y^2$.

Trong trường hợp này hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

• Nếu $xy+1=0$ thì từ

$(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=-3<0$ (vô lí), chứng tỏ hệ không thể có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $xy+1=0$.

Kết luận. $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ là hai nghiệm của hệ đã cho.

Câu 2. a) Vì $p \geq 5$, p là số nguyên tố nên p lẻ và p không chia hết cho 3.

• p lẻ nên $p+1$ chẵn, hay $p+1 \,\vdots\, 2$.

• p không chia hết cho 3 nên p chia cho 3 dư 1 hoặc dư 2.

Nếu p chia cho 3 dư 1 thì $(2p+1) \,\vdots\, 3$, mà $2p+1>3$ nên $2p+1$ không phải là số nguyên tố. Mâu thuẫn với giả thiết. Do đó p chia cho 3 dư 2, nghĩa là $(p+1) \,\vdots\, 3$. Suy ra $p+1$ chia hết cho 6.

Đặt $p+1=6a$ ($a \in \mathbb{Z}$). Ta có

$2p^2+1=2(6a-1)^2+1=72a^2-24a+3$

Ta thấy $(2p^2+1) \,\vdots\, 3$ và $2p^2+1>3$ nên $2p^2+1$ không phải là số nguyên tố (đpcm).

b) Ta tách riêng số 1000 ra, coi các số còn lại có dạng $\overline{abc}$, trong đó $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9\}$. Có 8 cách chọn chữ số a, có 8 cách chọn chữ số b và có 8 cách chọn chữ số c. Do vậy ở mỗi hàng, mỗi loại chữ số xuất hiện $8 \times 8 = 64$ (lần).

Mà $0+1+2+3+6+7+8+9=36$

và $36 \times 64 = 2304$.

Nên tổng các số này là

$$2304+23040+230400.$$

Vậy tổng cần tìm là

$2304+23040+230400+1000=256744$.

c) Theo giả thiết $P(x^2-2)=P^2(x)-2$, ta có

$a(x^2-2)^2+b(x^2-2)+c=(ax^2+bx+c)^2-2$

$\Leftrightarrow ax^4+(-4a+b)x^2+(4a-2b+c)$

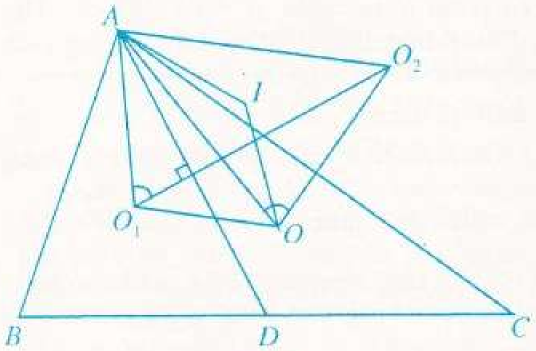
$=a^2x^4+2ab.x^3+(b^2+2ac)x^2+2bc.x+(c^2-2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= a^2 \\ 2ab &= 0 \\ -4a+b &= b^2+2ac \\ 2bc &= 0 \\ 4a-2b+c &= c^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-2. \end{cases}$$

Do đó $P(x)=x^2-2$, từ đây ta có $P(x)=P(-x)$, với mọi x (đpcm).

Câu 3. a) (h.1). Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì O cố định. Nhận xét rằng, O_1O_2 là đường trung trực của AD nên $O_1O_2 \perp AD$, dẫn đến O_1O_2 đi qua trung điểm cung AD của đường tròn (O_1). Trong đường tròn (O_1) có

$$\widehat{AO_1O_2} = \widehat{ABD} \qquad (1)$$



Hình 1

Lại có $\widehat{AOO_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{ABC} \qquad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{AO_1O_2} = \widehat{AOO_2}$, hay tứ giác AO_1OO_2 nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2 luôn đi qua điểm O cố định khác A.

b) Trong đường tròn tâm I ta có $2IO \geq OA$, hay $IO \geq \dfrac{1}{2}OA$ (không đổi).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi OA là đường kính của đường tròn tâm I, khi đó $\widehat{OO_1A} = \widehat{OO_2A} = 90^\circ$, hay AB, AC tương ứng là đường kính của đường tròn tâm O_1 và đường tròn tâm O_2, lúc đó D là chân đường vuông góc kẻ từ A lên BC.

Kết luận: Khi D là hình chiếu của A lên BC thì độ dài IO nhỏ nhất.

Câu 4. a) (h.2).

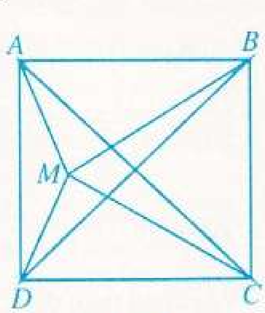
Ta có

$MA + MC \geq AC$

Do đó

$MA^2 + MC^2 =$

$$= \frac{2MA^2 + 2MC^2}{2}$$



Hình 2

$$= \frac{(MA^2 + 2MA.MC + MC^2) + (MA^2 - 2MA.MC + MC^2)}{2}$$

$$= \frac{(MA+MC)^2 + (MA-MC)^2}{2}$$

$$\geq \frac{(MA+MC)^2}{2} \geq \frac{AC^2}{2} = 1.$$

Tương tự có $MB^2 + MD^2 \geq 1$.

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq 2$ (đpcm).

b) Ta có

$2 - x(1-y) - y(1-z) - z(1-t) - t(1-x)$

$= 2 - x + xy - y + yz - z + zt - t + xt$

$= (1 - x + xy - y) + yz + (1 - z + zt - t) + xt$

$= (1 - x)(1 - y) + yz + (1 - z)(1 - t) + xt \geq 0$ (*)

Vì $x, y, z, t \in [0; 1]$ nên $(1 - x)(1 - y) \geq 0$, $yz \geq 0$, $(1 - z)(1 - t) \geq 0$, $xt \geq 0$.

Từ (*) suy ra

$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) + t(1 - x) \leq 2.$

Câu 5. Giả sử xếp được các số đã cho thành dãy, sao cho với mọi $k = 1, 2, ..., 9$, trong mỗi khoảng giữa hai chữ số k liên tiếp ở trên, dãy có đúng k chữ số (*).

Vì có 9 chữ số 9 nên số các khoảng giữa hai chữ số 9 liên tiếp là 8.

Từ (*) có số số ở giữa hai chữ số 9 đầu tiên và cuối cùng (kể từ trái sang phải) là $9 \times 8 = 72$.

Theo đầu bài có 81 chữ số nên như vậy các chữ số đã cho đều nằm giữa hai chữ số 9 này.

Ở mỗi khoảng giữa hai chữ số 9 liên tiếp có nhiều nhất là 1 chữ số 8 vì nếu có từ 2 chữ số 8 trở lên thì giả thiết (*) không thỏa mãn.

Do vậy trên dãy này có nhiều nhất là 8 chữ số 8. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có 9 chữ số 8.

Điều giả sử trên là sai!

Vậy không thể xếp được các chữ số đã cho thành một dãy, sao cho với mọi $k = 1, 2, ..., 9$ mà trong mỗi khoảng giữa hai chữ số k liên tiếp ở trên, dãy có đúng k chữ số.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh, sưu tầm và giới thiệu)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (2 điểm). Cho hàm số

$$y=\frac{-x^2+2kx-5}{x-1} \quad (1) \ (k \text{ là tham số}).$$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $k=1$.

2) Với giá trị nào của tham số k thì hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng (l): $2x-y=0$.

Câu 2. (2 điểm)

1) Giải phương trình

$$2\cos x+\frac{1}{3}\cos^2(x+\pi) =\frac{8}{3}+\sin 2x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin^2 x .$$

2) Với giá trị nào của tham số k thì hàm số $y=\lg\left(3-\left|\frac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|\right)$ xác định với mọi x.

Câu 3. (3 điểm)

1) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng đường cao và bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ và mp(Q) đi qua điểm $M(1;1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;-2)$. Tìm tọa độ các điểm thuộc (Δ) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mp(Q) bằng 1.

Câu 4. (2 điểm)

1) Xác định hệ số của số hạng chứa a^4 trong khai triển nhị thức Newton $\left(a^2-\frac{2}{a}\right)^n$ (với $a\neq 0$), biết rằng tổng các hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển đó bằng 97.

2) Tính tích phân: $I=\int\limits_1^e\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+\ln^2 x\right)dx$.

Câu 5. (1 điểm)

Cho đa thức

$$f(x)=mx^2+(n-p)x+m+n+p$$

Với m, n, p là ba số thực thỏa mãn:

$$(m+p)(m+n+p)<0.$$

Chứng minh rằng

$$n^2+p^2>2[2m(m+n+p)+np].$$

HUỲNH DUY THỦY
(GV trường THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

(Đề đăng trên THTT số 344, tháng 3 năm 2006)

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) $y=\frac{2004x}{x^2-5x+6}=2004\left(\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}\right)$.

Ta chứng minh công thức

$$y^{(n)}=2004.(-1)^n n!\left(\frac{3}{(x-3)^{n+1}}-\frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right)$$

bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=1$: $y'=2004.(-1)\left(\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-2)^2}\right)$ nên công thức đúng.

Với $n>1$: Giả sử công thức đúng cho $n-1$, ta chỉ ra công thức cũng đúng cho n.

Thật vậy $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$

$$=\left(2004.(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{3}{(x-3)^n}-\frac{2}{(x-2)^n}\right)\right)'$$

$$=2004.(-1)^{n-1}.(n-1)!(-n).\left(\frac{3}{(x-3)^{n+1}}-\frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right)$$

$$=2004.(-1)^n n!\left(\frac{3}{(x-3)^{n+1}}-\frac{2}{(x-2)^{n+1}}\right).$$

Vậy công thức đúng cho mọi n .

Câu 2. a) Từ $\frac{B}{3}+\frac{C}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{A}{3}$, ta suy ra

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{A}{3}\right)$$

hay $$\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{3}+\operatorname{tg}\frac{C}{3}}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{3}.\operatorname{tg}\frac{C}{3}}=\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{A}{3}}{1+\sqrt{3}.\operatorname{tg}\frac{A}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{3}+\operatorname{tg}\frac{B}{3}+\operatorname{tg}\frac{C}{3}+$$

$$+\sqrt{3}.\left(\operatorname{tg}\frac{A}{3}.\operatorname{tg}\frac{B}{3}+\operatorname{tg}\frac{B}{3}.\operatorname{tg}\frac{C}{3}+\operatorname{tg}\frac{C}{3}.\operatorname{tg}\frac{A}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{A}{3}.\operatorname{tg}\frac{B}{3}.\operatorname{tg}\frac{C}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg}\frac{A}{3}-\sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{B}{3}-\sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{C}{3}-\sqrt{3}\right)$$

$$=4\left(\operatorname{tg}\frac{A}{3}+\operatorname{tg}\frac{B}{3}+\operatorname{tg}\frac{C}{3}-\sqrt{3}\right).$$

b) Phương trình $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}+\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x}=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \left(\frac{\sin x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)^2=0.\end{cases}$$

hay $\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \sin^2 x=\sin^2 2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \sin^2 x=\sin^2 2x\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos^2 x=\frac{1}{4}.\end{cases}\ \text{Vậy}\ \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Câu 3. a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1+x-1}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x-2}{1+x+x^2}\right)=-1.$$

b) $$I=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}=\int_0^1\sqrt{x^2+4}\,dx-4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_0^1-4\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-4\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}-2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Câu 4. a) Phương trình tham số của (d_1), (d_2) tương ứng là

$$(d_1)\begin{cases}x=t\\ y=-t+2\\ z=2t-4\end{cases}\qquad (d_2)\begin{cases}x=2t'-8\\ y=t'+6\\ z=-t'+10\end{cases}$$

với $t, t'\in\mathbb{R}$.

Lấy $M(t; -t+2; 2t-4)\in(d_1)$,

$N(2t'-8; t'+6; -t'+10)\in(d_2)$.

Ta có

$\overline{MN}=(2t'-t-8; t'+t+4; -t'-2t+14)$.

Để MN nằm trên Ox hay $MN//Ox$ cần và đủ là

$\begin{cases}t'+t+4\ \ =0\\ t'+2t-14=0\end{cases}$ lúc đó $t=18$, $t'=-22$.

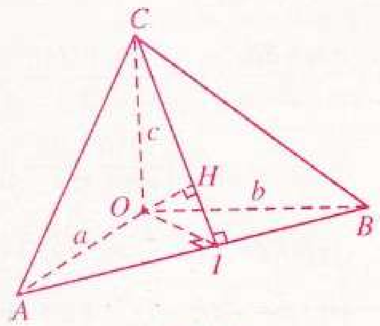
Vậy $M(18; -16; 32)$, $\overline{MN}=(-70; 0; 0)$.

PT tham số đường thẳng (d) có dạng:

$$\begin{cases}x=18-70t,\\ y=-16,\\ z=\ 32,\ t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Vì M không thuộc Ox, nên $(d)\ //\ Ox$.

b) (h. 1). Hạ $OI\perp AB$ ($I\in AB$). Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $CI\perp AB$.



Hình 1

$$S_{ABC} = \frac{CI.AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}.\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

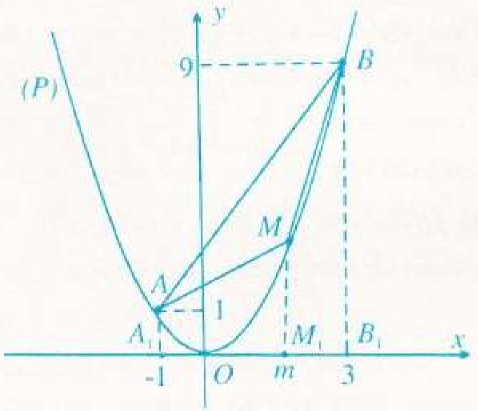
Hạ $OH \perp CI$, $H \in CI$. Khi đó $OH \perp mp(ABC)$. Ta có

$$OH = \frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

Ta có $\widehat{OAH} = \alpha$, $\widehat{OBH} = \beta$, $\widehat{OCH} = \gamma$. Vậy $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$

$$= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right) = 1.$$

Câu 5. (h. 2).



Hình 2

$$S_D = \left(\frac{AA_1+BB_1}{2}\right)[3-(-1)] - \int_{-1}^{3} x^2 dx =$$
$$= \frac{32}{3} \text{ (đvdt)} \qquad (1)$$

$$S_{ABM} = \left(\frac{AA_1+BB_1}{2}\right).4 - \left(\frac{AA_1+MM_1}{2}\right)(m+1) - \left(\frac{MM_1+BB_1}{2}\right)(3-m)$$

$$= 20 - \frac{1}{2}(1+m^2)(m+1) - \frac{1}{2}(m^2+9)(3-m)$$
$$= -2m^2 + 4m + 6 = -2(m-1)^2 + 8 \le 8 \text{ (đvdt) } (2)$$

Vậy, từ (1), (2) suy ra $\frac{S_{ABM}}{S_D} \le \frac{3}{4}$ (đpcm).

ĐÀM VĂN NHỈ

(GV khoa Toán ĐHSP Hà Nội)

BÀI TOÁN ...

(Tiếp bìa 2)

Nếu trong một mặt phẳng, người ta kẻ một số đường thẳng thì các miền được tạo thành có thể được tô màu chỉ bằng hai màu, ví dụ trắng và đen. Định lí hai màu được chứng minh bằng quy nạp trên số các đường thẳng. Chỉ với một đường thẳng thì điều đó là hiển nhiên. Nếu giả thử định lí đúng với n đường thẳng, và nếu người ta thêm vào một đường thẳng thứ $n+1$, đường thẳng mới này chia mặt phẳng ra làm hai miền; ở một trong hai miền đó ta để nguyên các màu gốc, còn ở miền kia ta thay màu đen thành màu trắng và màu trắng thành màu đen, và thế là bản đồ của chúng ta được tô chỉ bằng hai màu, không có hai miền kề nhau nào có thể có cùng một màu. Ta hãy thử cùng xem xét bài toán này với một bản đồ phẳng, trên đó mỗi nước đều có hình dạng là một phần của hình tròn, các biên giới đều là các cung tròn. Kết quả vẫn đúng. Một chứng minh bằng quy nạp như chứng minh trên có thể thực hiện, nhưng có thể không cần. Những người luyến tiếc hình học thời trước có thể sử dụng một phép biến hình, gọi là phép nghịch đảo, biến đổi một đường thành một đường tròn. Những người khác sử dụng lí lẽ về số chẵn, số lẻ. Thực vậy, hai miền nào đó phân cách bằng một cung tròn, phải có miền này đen, miền kia trắng. Chúng ta viết trên mỗi miền một số bằng số các hình tròn chứa miền đó. Nếu số đó là chẵn cho miền đen, nếu số đó là lẻ cho miền trắng, và ngược lại.

Bạn có thể áp dụng phương pháp này để tô màu bản đồ ở trên.

NGUYỄN VĂN THIÊM

*(theo **La Recherche** tháng 4-2005)*

Nhắn tin

Các tác giả có bài trong cuốn **Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ** (Quyển I) chưa nhận được sách biếu xin cho tòa soạn biết địa chỉ để tạp chí gửi sách.

Trân trọng cảm ơn.

THTT

TÌM THÊM ĐIỀU THÚ VỊ TỪ MỘT BÀI TOÁN LƯỢNG GIÁC

TRỊNH TUÂN
(GV Đại học Thủy Lợi Hà Nội)

Trong các kì thi đại học hàng năm, khi đứng trước các bài toán tam giác lượng không ít các bạn đã lúng túng! Trong bài viết này từ một bài toán quen thuộc chúng tôi muốn tìm hiểu thêm các bài toán "vệ tinh"của nó. Việc làm này phần nào gây được nhiều hứng thú trong học tập của các bạn, góp phần giúp các bạn đỡ lúng túng hơn trong các kì thi.

Hẳn các bạn đã từng biết bài toán (BT) quen thuộc sau đây.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC.

Đặt $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$, chứng minh rằng:

1.a) $T < 2$ khi tam giác ABC tù;
$T = 2$ khi tam giác ABC vuông;
$T > 2$ khi tam giác ABC nhọn;

1.b) $T \le \dfrac{9}{4}$.

Việc chứng minh (1.a), (1.b) xin dành cho bạn đọc. Bây giờ chúng ta đi tìm mối quan hệ của nó với một số bài toán khác.

Bài toán 2. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2.$$

Chứng minh $\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B < 1$.

(Đề thi ĐHQG Hà Nội - 1996)

Lời giải. Từ giả thiết và nhờ BT (1.a) ta thấy tam giác ABC tù. Nếu góc A hoặc B tù thì điều chứng minh là hiển nhiên, nếu góc C tù thì khi đó

$$\widehat{A} + \widehat{B} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{B} < \frac{\pi}{2} - \widehat{A}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \mathrm{tg}B < \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \mathrm{cotg}\,A.$$

Vậy: $\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B < \mathrm{tg}A.\mathrm{cotg}A = 1$.

Bài toán 3. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -1$.

Chứng minh rằng $\sin A + \sin B + \sin C \le 1 + \sqrt{2}$.

(Đề thi ĐHQG Hà Nội 1999)

Lời giải. Từ giả thiết :

$$-1 \le \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$$

$$= 3 - 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le 2.$$

Sử dụng BT (1.a) ta thấy tam giác ABC không nhọn. Giả sử góc A lớn nhất, khi đó $\widehat{A} \ge \dfrac{\pi}{2}$, lúc đó $b^2 + c^2 \le a^2$.

Mặt khác

$$\sin^2 B + \sin^2 C \ge \frac{1}{2}(\sin B + \sin C)^2 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có

$\sin B + \sin C \le \sqrt{2}\sin A \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C$ $\le (1+\sqrt{2})\sin A \le 1+\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

Nhận xét. Lời giải này còn giúp các bạn nhận được lời giải cho bài toán sau đây.

Bài toán 4. Tam giác ABC có cạnh a, b, c thỏa mãn $b^2 + c^2 \le a^2$ và $\sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2}$. Tính các góc A, B, C.

(Đề thi ĐH Ngoại thương TP. HCM, khối A, 1998)

Kết quả là: $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:

$$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > 2.$$

Bất đẳng thức trên còn đúng nữa không khi tam giác ABC là tam giác vuông?

(Đề thi ĐHSP Hà Nội II, khối A - 1999)

Có lẽ các bạn cảm thấy khó khăn khi gặp phải dạng toán này? Song thực chất chỉ cần so sánh các số mũ này với 2. Tức là $2\sin B < 2$, $2\sin C < 2$, $2\sin A < 2$ vì ở đây tam giác ABC nhọn.

Như vậy $(\sin A)^{2\sin B} > \sin^2 A$; $(\sin B)^{2\sin C} > \sin^2 B$ và $(\sin C)^{2\sin A} > \sin^2 C$. Cộng các BĐT này theo vế và sử dụng BT (1.a) chúng ta nhận được điều phải chứng minh.

Bây giờ giả sử tam giác ABC vuông tại C. Khi đó

$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A}$

$= (\sin A)^{2\sin B} + \sin^2 B + 1$

$> \sin^2 A + \sin^2 B + 1 = \sin^2 A + \cos^2 A + 1 = 2.$

Nghĩa là BĐT trên vẫn đúng khi tam giác ABC vuông.

Bài toán 6. Tam giác ABC có hai góc nhọn A, B và thỏa mãn $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C}$. Tính số đo góc C.

Lời giải. Vì $\sin C \in (0; 1]$ nên

$\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C} \geq \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$.

Suy ra $\widehat{C} \leq \frac{\pi}{2}$. Mặt khác, giả thiết cho các góc A, B nhọn. Vì vậy tam giác ABC là tam giác không có góc tù.

Từ giả thiết $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt{\sin C}$ suy ra

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sqrt{\sin C} + \sin^2 C$.

Chúng ta lại tiếp tục sử dụng BT (1.a) nhận được $\sqrt{\sin C} + \sin^2 C \geq 2$. Vậy $\widehat{C} = 90^0$.

Nhận xét. Các bạn để ý rằng bậc của căn thức trong bài toán 6 có thể thay đổi mà không ảnh hưởng đến kết quả.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với độ dài các trung tuyến là m_a, m_b, m_c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Đặt $T = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Chứng minh rằng:

- $T > 6R^2$ khi tam giác ABC nhọn;
- $T = 6R^2$ khi tam giác ABC vuông;
- $T < 6R^2$ khi tam giác ABC tù.

Lời giải. Áp dụng công thức đường trung tuyến và định lí sin trong tam giác, ta có

$$T = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

Nhờ BT (1.a) ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$.

Lời giải. Sử dụng BĐT Bunhiacovski, công thức đường trung tuyến, định lí sin trong tam giác và BT (1.b) ta có

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) =$$

$$= \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq \frac{81R^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Các bạn để ý rằng khi đánh giá vế trái của BT 8 qua BĐT Cauchy ta nhận được:

Bài toán 9. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$m_a m_b m_c \leq \frac{27R^3}{8}.$$

(Đề thi ĐH Ngoại Thương, khối A - 1996)

Bài toán 10. Cho tam giác ABC. Đặt

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của M.

(Đề thi ĐH Thủy Lợi Hà Nội - 1998)

Lời giải. $M = \dfrac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} - 1$

$$= \frac{3}{3 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} - 1.$$

Chúng ta thấy rằng M đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ đạt giá trị lớn nhất.

Nhờ BT (1.b) có có $M \leq 3$.

Vậy Max(M) = 3 đạt được khi tam giác ABC đều.

Xin gửi đến các bạn một số bài toán kiểu như (1. a), (1.b) để các bạn tìm hiểu.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\text{cotg} A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{ABC}}$.

2) $a = r\left(\text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2}\right)$.

3) $\text{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

4) $S_{ABC} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}p^2$ (p là nửa chu vi ΔABC).

KÌ THI KHU VỰC GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO
LẦN THỨ SÁU – 2006

TẠ DUY PHƯỢNG (*Viện Toán học*)
NGUYỄN THẾ THẠCH (*Bộ Giáo dục & Đào tạo*)

Ngày 10-3-2006, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức kì thi khu vực *Giải toán trên máy tính Casio* lần thứ sáu. 61 tỉnh, thành phố đã cử đội tuyển dự thi tại một trong bốn địa điểm: Phú Thọ, Thanh Hóa, Đà Nẵng và Cần Thơ do các địa phương tự chọn. Tổng số có 795 thí sinh tham dự. Thí sinh được giải sẽ được hưởng ưu tiên như hàng năm.

Với sự tài trợ của Công ti BITEX, mọi giáo viên và thí sinh tham gia cuộc thi đều có quà lưu niệm. 50% số thí sinh mỗi cấp của từng khu vực được trao giải.

23 thí sinh được giải nhất bao gồm:

THPT (Lớp 12): Nguyễn Thanh Hải (Tây Ninh), Phạm Tuấn Khải (Đồng Tháp), Vũ Đỗ Uyên Vy (TP. Hồ Chí Minh), Phạm Bá Tuân, Nguyễn Mạnh Nhất (Bắc Ninh), Mai Văn Thu (Thanh Hóa), Nguyễn Hữu Huy (Quảng Nam), Nguyễn Thị Tường Vi (Đà Nẵng), Nguyễn Duy Thành (Bắc Giang), Nguyễn Thị Thúy An (Phú Thọ).

THCS (Lớp 9): Nguyễn Minh Hải, Nguyễn Việt Đức (Đồng Nai), Phạm Thành Đạt (TP. Hồ Chí Minh), Nguyễn Anh Tuấn (Bắc Ninh), Nguyễn Minh Thiêm (Hải Dương), Bùi Quốc Dũng (Đăk Lăk), Đoàn Nguyên Nhật (Quảng Nam), Hà Duy Khương (Bắc Giang), Lê Ngọc Sơn (Vĩnh Phúc).

Bổ túc THPT: Võ Thanh Tùng (Đồng Nai), Chu Xuân Hương (Bắc Ninh), Lê Uyên Phương (Thừa Thiên-Huế), Nguyễn Trí Dũng (Hà Nội).

Giải toàn đoàn:

Giải Nhất: Đồng Nai, Thanh Hóa, Đà Nẵng, Bắc Giang;

Giải Nhì: TP. Hồ Chí Minh, Bắc Ninh, Thừa Thiên - Huế, Hòa Bình;

Giải Ba: Tây Ninh, Hà Tĩnh, Quảng Ngãi, Phú Thọ.

Dưới đây là đề thi chính thức của Trung học cơ sở, Trung học phổ thông và Bổ túc Trung học phổ thông.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức rồi điền kết quả vào ô vuông:

a) $A=\dfrac{\sqrt{12{,}35\mathrm{tg}^2 30^0 25'.\sin^2 23^0 30'}}{3{,}06^3.\mathrm{cotg}^3 15^0 45'.\cos^2 35^0 20'}$.

b) $B=\left(\dfrac{5x+y}{x^2-5xy}+\dfrac{5x-y}{x^2+5xy}\right).\dfrac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$

với $x=1{,}257$; $y=4{,}523$.

c) $C=\left[\dfrac{1}{(2x-y)^2}+\dfrac{2}{4x^2-y^2}+\dfrac{1}{(2x+y)^2}\right].$

$.\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{16x}$

với $x=3{,}06$; $y=4{,}15$.

Bài 2. Tìm số dư trong mỗi phép chia sau:

a) 103103103 : 2006;

b) 30419753041975 : 151975;

c) 103200610320061032006 : 2010.

Bài 3. Tìm các chữ số a, b, c, d, e, f trong mỗi phép tính sau, biết rằng hai chữ số a, b hơn kém nhau một đơn vị:

a) $\overline{ab5}.\overline{cdef}=2712960$;

b) $\overline{a0b}.\overline{cdef}=600400$;

c) $\overline{ab5c}.\overline{bac}=761436$.

Bài 4. Cho đa thức

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c.$$

a) Tìm các hệ số của đa thức $P(x)$, biết rằng khi x lần lượt nhận các giá trị 1,2; 2,5; 3,7 thì $P(x)$ có giá trị tương ứng là 1994,728; 2060,625; 2173,653.

b) Tìm số dư r của phép chia đa thức $P(x)$ cho $2x+5$.

c) Tìm giá trị của x khi $P(x)$ có giá trị là 1989.

Bài 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) có ba chữ số thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) Hai chữ số của m cũng là hai chữ số của n ở vị trí tương ứng; chữ số còn lại của m nhỏ hơn chữ số tương ứng của n đúng 1 đơn vị.

2) Cả hai số m và n đều là số chính phương.

Bài 6. Cho dãy số

$$U_n = \frac{(10+\sqrt{3})^n - (10-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Tính các giá trị U_1, U_2, U_3, U_4;

b) Xác lập công thức truy hồi tính U_{n+2} theo U_{n+1} và U_n.

c) Lập quy trình ấn phím liên tục tính U_{n+2} theo U_{n+1} và U_n rồi tính $U_5, U_6, \ldots, U_{16}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AB=2a$ với $a=12{,}75$ cm. Ở phía ngoài tam giác ABC, ta vẽ hình vuông $BCDE$, tam giác đều ABF và tam giác đều ACG.

a) Tính các góc B, C, cạnh AC và diện tích tam giác ABC.

b) Tính diện tích các tam giác đều ABF, ACG và diện tích hình vuông $BCDE$.

c) Tính diện tích các tam giác AGF và BEF.

Bài 8. Tìm các số tự nhiên n $(1000<n<2000)$ sao cho với mỗi số đó thì $a_n=\sqrt{54756+15n}$ cũng là số tự nhiên.

Bài 9. Hai đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ (1) và $y=-\frac{2}{5}x+\frac{7}{2}$ (2) cắt nhau tại điểm A. Một đường thẳng (d) đi qua điểm $H(5;\,0)$ và song song với trục tung Oy cắt lần lượt các đường thẳng (1) và (2) theo thứ tự tại các điểm B và C.

a) Vẽ các đường thẳng (1), (2) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy;

b) Tìm tọa độ của các điểm A, B, C (viết dưới dạng phân số).

c) Tính diện tích tam giác ABC (viết dưới dạng phân số) theo đoạn thẳng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1 cm.

d) Tính số đo mỗi góc của tam giác ABC theo đơn vị độ (chính xác đến phút).

Bài 10. Đa thức

$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có giá trị 11; 14; 19; 26; 35 khi x, theo thứ tự, nhận các giá trị tương ứng là 1; 2; 3; 4; 5.

a) Hãy tính giá trị của đa thức $P(x)$ khi x lần lượt nhận các giá trị 11; 12;13;14;15;16.

b) Tìm số dư r của phép chia đa thức $P(x)$ cho $10x-3$.

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài 1. Tính giá trị của hàm số

$$y = 6 - 3^{\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}} \text{ tại } x = 2006.$$

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$.

a) Tìm giá trị $f(0{,}1)$.

b) Tìm các cực trị của hàm số.

Bài 3. Khai triển biểu thức $(1+x\sqrt{7})^2(1+ax)^8$ dưới dạng $1+10x+bx^2+\ldots$ Hãy tìm các hệ số a và b.

Bài 4. Biết dãy số $\{a_n\}$ được xác định theo công thức: $a_1=1$; $a_2=2$; $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$ với mọi n nguyên dương.

Hãy cho biết giá trị của a_{15}.

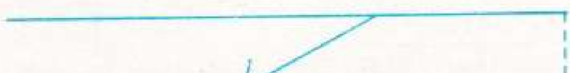
Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 24{,}21x+2{,}42y+3{,}85z=30{,}24 \\ 2{,}31x+31{,}49y+1{,}52z=40{,}95 \\ 3{,}49x+4{,}85y+28{,}72z=42{,}81. \end{cases}$$

Bài 6. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

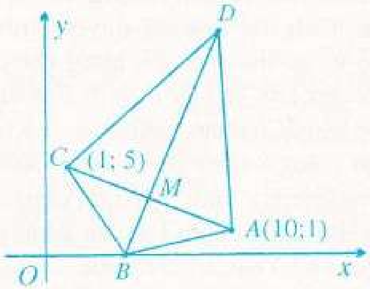
$$\cos \pi x^2 = \cos \pi (x^2+2x+1).$$

Bài 7. Trong bài thực hành của môn Huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Bạn hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1 km theo đường chim bay.



Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$ có $A(10;1)$, B nằm trên trục hoành, $C(1;\,5)$; A và C đối xứng nhau

qua BD; M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD; $BM=\frac{1}{4}BD$.

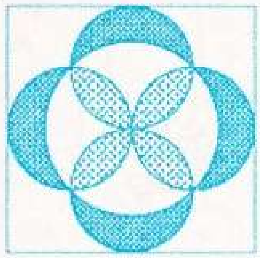


a) Tính diện tích tứ giác $ABCD$;

b) Tính đường cao đi qua đỉnh D của tam giác ABD.

Bài 9. Cho tứ diện $ABCD$ với góc tam diện tại đỉnh A có ba mặt đều là góc nhọn bằng $\frac{\pi}{3}$. Hãy tính độ dài các cạnh AB, AC, AD khi biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 10 và $AB:AC:AD = 1:2:3$.

Bài 10. Viên gạch lát hình vuông với họa tiết trang trí được tô bằng ba loại màu như hình vẽ. Hãy tính tỉ lệ phần trăm diện tích của mỗi mầu có trong viên gạch này.



BỔ TÚC THPT

Bài 1. Tính gần đúng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{3x^2-4x+1}{2x+3}$.

Bài 2. Tính a và b nếu đường thẳng $y=ax+b$ đi qua điểm $M(-2;\ 3)$ và là tiếp tuyến của parabol $y^2=8x$.

Bài 3. Tính gần đúng tọa độ các giao điểm của đường thẳng $3x+5y=4$ và elip

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Bài 4. Tính gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{2}.$$

Bài 5. Tính gần đúng (độ, phút, giây) nghiệm của phương trình

$$9\cos 3x-5\sin 3x=2.$$

Bài 6. Tính gần đúng khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=5x^3-4x^2-3x+2$.

Bài 7. Tính giá trị của a, b, c nếu đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $A(2;\ -3)$, $B(4;\ 5)$, $C(-1;\ -5)$.

Bài 8. Tính gần đúng thể tích khối tứ diện $ABCD$ biết rằng $AB = AC = AD = 8$ dm, $BC = BD = 9$ dm, $CD = 10$ dm.

Bài 9. Tính gần đúng diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác có các đỉnh $A(4;5)$, $B(-6;\ 7)$, $C(-8;-9)$.

Bài 10. Tính gần đúng các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-2y=5 \\ y^2-2x=5. \end{cases}$$

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T10/346. Prove that

$$ab+bc+ca\geq 8(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

where a, b, c are nonnegative real numbers satisfying $a+b+c=1$.

T11/346. The incircle (I) of a triangle $A_1A_2A_3$ has radius r and touches the sides A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 respectively at M_1, M_2, M_3. Let (I_i) be the circle touching the sides A_iA_j, A_iA_k and externally touching (I) $(i, j, k\in\{1, 2, 3\}, i\neq j\neq k\neq i)$. Let K_1, K_2, K_3 be the touching points respectively of (I_1) with A_1A_2, of (I_2) with A_2A_3, of (I_3) with A_3A_1. Put $A_iI_i = a_i$, $A_iK_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Prove that

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i)\geq 2+\sqrt{3}.$$

When does equality occur?

T12/346. Let be given a sphere with center O and a chord AB, not passing through O. Let MM', NN', PP' be three chords (not coinciding with AB) passing through the midpoint I of AB. Let E, E' be the points of intersection of the line AB respectively with the planes (MNP), $(M'N'P')$. Prove that $IE = IE'$.

HENRY POINCARÉ
(1854-1912)

NGUYỄN DUY TIẾN
ĐÀO PHƯƠNG BẮC
(ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Nhân kỉ niệm ngày sinh của Henry Poincaré (Ăng-ri Poăng-ca-rê) chúng tôi giới thiệu đôi nét về cuộc đời và sự nghiệp của nhà khoa học vĩ đại này.

Từ trước đến nay khi nhắc đến thuyết tương đối, nói chung ta thường nghĩ ngay đến A. Einstein. Thế nhưng, từ khá lâu rồi nhiều nhà lịch sử khoa học đã coi H. Poincaré là đồng tác giả của thuyết tương đối, ít nhất là thuyết tương đối hẹp. Bên cạnh đó H. Poincaré còn có nhiều đóng góp nền tảng cho toán học.

Vào cuối thế kỉ XIX, đầu thế kỉ XX, trường phái toán học Đức đang thống trị thế giới với những tên tuổi nổi tiếng như D. Hilbert, E. Noether, B. Riemann, F. Klein,... Tại thời điểm đó có thể những đóng góp của H. Poincaré chưa được đánh giá đúng. Sau một thế kỉ nhìn lại thì thấy thật là không công bằng nếu không kể đến H. Poincaré như một trong những nhà toán học xuất sắc nhất thời bấy giờ.

Ông sinh ngày 29-4-1854 tại Nancy, Pháp trong một gia đình dòng dõi. Xếp thứ năm trong số sinh viên xuất sắc nhất được nhận vào École Normale Supérieure và xếp thứ nhất trong số sinh viên đỗ vào École Polytechnique, nhưng Poincaré lựa chọn École Polytechnique và khi tốt nghiệp trường này ông đứng thứ hai. Sau đó, H. Poincaré chuyển đến trường Đại học Mỏ, nơi mà môn Tinh thể học đã quyết định sở thích toán học và có thể gợi cảm hứng cho niềm đam mê vĩnh cửu của ông đối với lí thuyết nhóm và được cấp bằng Cử nhân Toán ở khoa Khoa học tại Paris vào tháng 8 năm 1876. Ông bảo vệ luận án Tiến sĩ về Phương trình đạo hàm riêng năm 1879 và được Hội đồng chấm luận án đánh giá rất cao về kết quả và bố cục của luận án.

Trở thành Tiến sĩ, ông bắt đầu sự nghiệp khoa học của mình tại khoa Khoa học ở Caen. Hai năm ở Caen (1879-1881) là quãng thời gian đáng nhớ đối với Poincaré. Trong thời gian này ông đã gửi đăng hơn 12 thông báo ngắn cho Thông báo của Viện Hàn lâm Khoa học Paris (C.R.A.S) về ba chủ đề: Số học của các dạng, Lí thuyết định tính phương trình vi phân và Các hàm tự đẳng cấu. Chủ đề số học của các dạng toàn phương và hàm tự đẳng cấu được Poincaré nghiên cứu và chịu ảnh hưởng của người thầy của mình, nhà toán học lừng danh C. Hermite.

Từ thời đó ông đã đặt vấn đề tìm tất cả các nhóm con rời rạc H của một nhóm Lie nửa đơn G cho trước với "đối thể tích" hữu hạn. Điều này mở đầu cho một chuỗi công việc của A. Borel, Harish-Chandra, A. Seberg, I. Piatetski-Shapiro, E. Vinberg. Kết quả là G. Margulis được nhận giải thưởng Fields.

Năm 1885, theo một lời gợi ý của Mittag Leffler, vua Thụy Điển Oscar II, quyết định kỉ niệm sinh nhật lần thứ sáu mươi của mình bằng việc trao giải thưởng cho một đóng góp quan trọng thuộc giải tích toán học, một điều hiếm thấy ở một vị vua chúa. Giải thưởng bao gồm một Huy chương Vàng và 2500 curon tiền vàng. Bất kì công trình nào được xem xét trao giải phải đề cập đến một trong những chủ đề sau:

1. *Bài toán n-vật trong cơ học thiên thể.*

2. *Mở rộng của Fuchs cho những hàm siêu elliptic.*

3. *Các hàm được xác định bởi một phương trình vi phân cấp 1.*

4. *Những liên hệ đại số giữa các hàm Fuchs có một nhóm chung.*

H. Poincaré thực sự bắt tay vào việc nghiên cứu cơ học thiên thể (chủ đề 1) nhằm đoạt giải thưởng của vua Oscar II. Ban đầu ông gửi bản thảo là một bài báo dài 160 trang đến một Hội đồng xét thưởng bao gồm Weierstrass, Hermite và Mittag Leffler và tuyên bố đã giải được gần như trọn vẹn bài toán đặt ra. Hội đồng đã trao giải cho Poincaré và dự định bài báo sẽ ra mắt trong một tạp chí có truyền thống và uy tín bậc nhất thế giới: Tờ "Acta Matematica" do chính Mittag Leffler làm Tổng biên tập. Nhưng trong quá trình biên tập bài báo thì Phragmen, một cộng sự trẻ tuổi của Mittag Leffler đã phát hiện ra chỗ sai và Mittag Leffler đã phải dùng mọi uy tín cùng thế lực của mình để thu lại toàn bộ số tạp chí đó về Stockholm. Poincaré đã phải thừa nhận sai lầm của mình. Ông viết bài dài 270 trang để hoàn thiện công trình và được trao giải của vua Oscar II. Tiền xuất bản ấn phẩm này vượt quá tiền giải thưởng (2500 curon) và Poincaré phải bỏ tiền túi ra để trả. Bi kịch chưa dừng lại ở đấy: Huy chương Vàng của giải thưởng này cũng bị đánh cắp ngay tại căn buồng của cháu nội Poincaré. Thế nhưng trong lúc khắc phục sai lầm này, H. Poincaré đã phát hiện ra một hiện tượng mới trong toán học gọi là chuyển động hỗn độn (*Chaos*).

Nói nôm na, *Chaos* là sự tiến triển không bình thường, không lặp lại trạng thái cũ theo thời gian của một hệ động lực phi tuyến. Ta biết các bài toán thực tế phần lớn được quy về việc nghiên cứu các phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng. Các phương trình vi phân giải hiển được nghiệm thì có rất ít (chẳng hạn có rất ít hàm có thể lấy hiển được tích phân). Hơn nữa số liệu đo được luôn có sai số so với thực tế, nếu giải được cụ thể nghiệm thì nghiệm đó cũng không phải là nghiệm đúng.

Poincaré phát hiện ra những hệ phi tuyến mà ở đó chuyển động của từng quỹ đạo là rất phức tạp không lặp lại trạng thái cũ, hơn nữa chỉ cần điều kiện ban đầu sai khác rất nhỏ thôi cũng khiến cho quỹ đạo chuyển động trong không gian trạng thái khác rất xa nhau.

Mặt khác, tập hút của những hệ động lực phi tuyến này (những trạng thái mà hệ khi ở thời điểm lớn "vô hạn" thì rơi vào đó) cũng có những hình thù rất đặc biệt (có tính chất tự đồng dạng và người ta gọi đó là những tập *fractal*).

Những hệ thống như thời tiết chẳng hạn là những hệ *Chaos* mà ở đó chỉ với sai khác nhỏ thôi cũng khiến cho thời tiết trở nên khác hẳn. Từ đó rút ra kết luận rằng việc dự báo thời tiết dài hạn là không thể thực hiện được.

Ngày nay *Chaos* là một lĩnh vực được nhiều người quan tâm và Poincaré được xem là người sáng lập ra lí thuyết này.

Poincaré cũng có nhiều đóng góp lớn trong tôpô đại số. Ông là tác giả của một loạt khái niệm và kết quả quan trọng trong ngành này như: *nhóm cơ bản, đồng điều, đặc trưng Euler-Poincaré, định lí đối ngẫu Poincaré, giả thuyết Poincaré.*

Giả thuyết Poincaré (một trong bảy bài toán của thiên niên kỉ) và những vấn đề tương tự nhiều chiều hơn của nó đã dẫn đến một số giải thưởng Fields.

Tên tuổi của ông còn được đặt cho nhiều định lí và khái niệm quan trọng khác như: Định lí Poincaré-Birkhoff-Witt (P-B-W) trong lí thuyết về các đại số Lie, Định lí Poincaré-Birkhoff trong động lực Hamilton và hình học symplectic, nửa mặt phẳng Poincaré, ...

Poincaré còn tham gia nhiều vấn đề xã hội, yêu tự do, yêu văn thơ, và sẵn sàng bảo vệ công lí.

Poincaré đột ngột qua đời ngày 17-7-1912 do bị tắc mạch sau lần phẫu thuật. Khoa học thế giới phải mất nhiều năm mới đủ sức để hưởng lợi ích từ di sản của ông. Theo nhà toán học vĩ đại của Pháp Jean Leray:*"Rất ít người có thể theo kịp suy nghĩ của ông, ông không có học trò. Sau một thế kỉ, chúng ta mới có thể hiểu những ý tưởng của ông dễ dàng hơn, nói về chúng theo cách quen thuộc hơn, nhưng càng tiếp cận gần hơn, ta càng ngưỡng mộ và kính trọng ông hơn".*

Một nhà toán học vĩ đại khác của Pháp, André Weil, nhấn mạnh về khía cạnh hiện đại trong công việc của Poincaré: *"Giống với nhiều người khác, tôi hi vọng chỉ ra với bạn rằng sự nghiệp của Poincaré không chỉ thuộc về lịch sử khoa học của chúng ta mà còn thuộc về toàn bộ sự rực rỡ của toán học ngày nay."*

Nhà vật lí toán nổi tiếng David Ruelle cho rằng:

"Vật lí toán cố gắng hiểu một thế giới phức tạp chưa biết bằng những công cụ có hạn chế đã biết. Điều này đòi hỏi sự dũng cảm và khiêm nhường. Hiển nhiên, Henri Poincaré không thiếu phẩm chất nào trong hai đức tính này."

CÁC LỚP THCS

Bài T1/346. (Lớp 6) So sánh $\dfrac{1}{1002}$ với tổng A gồm 2006 số hạng sau:

$$A=\frac{2}{2005+1}+\frac{2^2}{2005^2+1}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{2005^{2^n}+1}+\ldots+\frac{2^{2006}}{2005^{2^{2005}}+1}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T2/346. (Lớp 7). Cho ba số nguyên a, b, c đôi một khác nhau và khác không, thoả mãn $a+b+c=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right).$$

VŨ ANH NAM

(GV THCS Từ Liêm, Nam Ban, Lâm Hà, Lâm Đồng)

Bài T3/346. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc \le 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

CAO MINH QUANG

(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T4/346. Giải phương trình

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}.$$

NGÔ ĐỨC VIỆT

(GV THPT Nghèn, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Bài T5/346. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^4+2x^2+5}+(x-1)^2.$$

ĐỖ BÁ CHỦ

(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

Bài T6/346. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ tù. Đặt $x=\widehat{BAC}$ và $y=\widehat{BCA}$. Chứng minh rằng

$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\sin y.\cos x.$$

LÊ BÁ HOÀNG

(Phòng GD-ĐT, TX Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T7/346. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) có AB không song song với CD và hai đường chéo cắt nhau tại I. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chứng minh rằng nếu NI vuông góc với AB thì MI vuông góc với AD.

HOÀNG HÙNG

(GV THCS Chu Văn An, Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/346. Cho sáu số nguyên dương a, b, c, d, e, f thoả mãn $abc = def$. Chứng minh rằng $a(b^2+c^2)+d(e^2+f^2)$ là hợp số.

TRẦN QUỐC HOÀN

(K09, K50CA, ĐH Công nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/346. Xét các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2+bx+c$ (với a, b, c là các số nguyên và $a>0$) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0\ ;\ 1)$. Trong các tam thức đó, hãy tìm tam thức có hệ số a nhỏ nhất.

BÙI ĐÌNH THÂN

(GV Phân hiệu HS giỏi Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T10/346. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \ge 8(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=1$.

PHẠM KIM HÙNG

(K9 CNTN ngành Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T11/346. Đường tròn (I) bán kính r nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ tiếp xúc với các cạnh A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 tại M_1, M_2, M_3 theo thứ tự. Vẽ các đường tròn (I_i) tiếp xúc với các cạnh A_iA_j, A_iA_k và tiếp xúc ngoài với đường tròn (I) (với i, j, k đôi một khác nhau nhận giá trị 1, 2, 3). Gọi K_1, K_2, K_3 theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I_1) với A_1A_2, của đường tròn (I_2) với A_2A_3, của đường tròn (I_3) với A_3A_1. Đặt $A_iI_i = a_i$, $A_iK_i = b_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i) \ge 2+\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

VŨ THÁI LỘC

(GV THCS Đồng Quang I, Từ Sơn, Bắc Ninh)

Bài T12/346. Cho mặt cầu tâm O và AB là một dây không đi qua O. Giả sử MM', NN', PP' là các dây khác AB và đi qua trung điểm I của AB. Gọi E, E' lần lượt là giao điểm của AB với các mặt phẳng (MNP) và $(M'N'P')$. Chứng minh rằng $IE = IE'$.

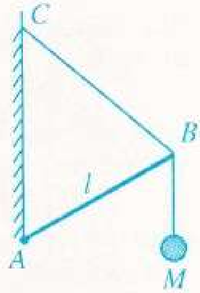
THÁI THỊ THANH HOA
(GV THPT chuyên - ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/346. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc a không đổi trên đoạn đường thẳng nằm ngang. Một người khối lượng m_1 đứng trên sàn ô tô muốn kéo một hòm khối lượng m_2 trên sàn ô tô. Hệ số ma sát giữa hòm và người với sàn đều bằng K. Bỏ qua lực cản của không khí. Hãy xác định lực kéo tối thiểu mà người đó phải tác dụng lên hòm.

NGUYỄN VĂN HẠNH
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh - Nghệ An)

Bài L2/346. Một cái xà đồng chất khối lượng m, chiều dài $AB = l$ có gắn đầu A vào tường AC nhờ một bản lề; AB có thể quay quanh trục cố định nằm ngang đi qua A vuông góc với mặt phẳng (hình vẽ). Đầu B treo một vật khối lượng M. BC là một sợi dây khối lượng không đáng kể.



a) Vẽ sơ đồ các lực đặt lên xà AB.

b) Xác định lực căng của sợi dây BC và các thành phần của phản lực của tường tác dụng lên đầu A của xà; tính góc α tạo bởi AC với phản lực của tường tác dụng lên đầu A của xà. (Tính theo các góc A, B, C và l, m, M).

c) Áp dụng bằng số: Cho $M = 20$ kg; $m = 10$ kg; $l = 4$ m; $\hat{A} = 53^o$; $\hat{C} = 60^o$; $g = 9{,}8$ m/s^2.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/346. (for 6th grade)

Compare the number $\frac{1}{1002}$ with the following sum (consisting of 2006 terms)

$$A=\frac{2}{2005+1}+\frac{2^2}{2005^2+1}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{2005^{2^n}+1}+\ldots+\frac{2^{2006}}{2005^{2^{2005}}+1}.$$

T2/346. (for 7th grade)

Let a, b, c be three distinct integers different from 0 such that $a+b+c=0$. Calculate the value of the expression

$$P=\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right).$$

T3/346. Let a, b, c be positive real numbers satisfying $abc \le 1$. Prove that

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge a+b+c.$$

When does equality occur ?

T4/346. Solve the equation

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}.$$

T5/346. Find the least value of the expression

$$(x^2+1)\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x^4+2x^2+5}+(x-1)^2.$$

T6/346. Let ABC be a triangle with obtuse angle $\widehat{ABC}$. Prove that

$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\sin y.\cos x,$$

where $x=\widehat{BAC}$ and $y=\widehat{BCA}$.

T7/346. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral such that the sides AB, CD are not parallel and let I be the point of intersection of its diagonals. Let M, N be respectively the midpoints of BC, CD. Prove that if NI is perpendicular to AB then MI is perpendicular to AD.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/346. Let a, b, c, d, e, f be six positive integers satisfying $abc = def$. Prove that

$$a(b^2+c^2)+d(e^2+f^2)$$

is a composite number.

T9/346. Consider all quadratic trinomials $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c are integers, $a > 0$) having two distinct roots belonging to the interval $(0 ; 1)$. Find the trinomial such that the coefficient a attains its least value.

(Xem tiếp trang 13)

Bài T1/342 (Lớp 6). *Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho*

$A = 2005^n + n^{2005} + 2005n$ *chia hết cho 3.*

Lời giải. Ta thấy

$(3a+1)(3b+1) = 9ab + 3(a+b) + 1 = 3c + 1$ (1)

với a, b, c là các số tự nhiên.

Sử dụng (1) ta có

$$2005^n = (3.668 + 1)^n = 3d + 1 \qquad (2)$$

với $d \in \mathbb{N}$.

Từ đó $A = 2005^n + n^{2005} + 2004n + n$

$= 3d + 1 + n^{2005} + 3.668n + n$

nên A chia hết cho 3 khi và chỉ khi

$$B = 1 + n + n^{2005} \text{ chia hết cho 3} \qquad (3)$$

Xét ba trường hợp sau:

• Với $n = 3a$ thì $B = 1 + n + n^{2005}$ chia cho 3 dư 1.

• Với $n = 3a + 1$, sử dụng (1) có (với $a, c \in \mathbb{N}$)

$B = 1 + 3a + 1 + (3a+1)^{2005} = 2 + 3a + 3c + 1$

$= 3(a + c + 1)$ nên B chia hết cho 3.

• Với $n = 3a + 2$. Chú ý rằng

$$(3a+2)^2 = 9a^2 + 12a + 4 = 3b + 1$$

và theo (1) ta có

$(3a+2)^{2004} = (3a+2)^{2.1002} = (3b+1)^{1002}$

$= 3c + 1$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Từ đó $B = 1 + n + n^{2005}$

$= 1 + 3a + 2 + (3a+2)^{2004}.(3a+2)$

$= 3(a+1) + (3c+1)(3a+2) = 3d + 2$

với $d \in \mathbb{N}$ nên B không chia hết cho 3.

Từ (3) và kết quả xét ba trường hợp đối với n ta kết luận được A chia hết cho 3 khi và chỉ khi $n - 1$ chia hết cho 3.

Nhận xét. 1) Trong lời giải trên ta tìm được cả số dư khi chia A cho 3. Một số bạn trình bày chưa gọn hoặc lập luận chưa chặt chẽ. Chẳng hạn từ A chia hết cho 3 suy ra B chia hết cho 3 rồi tìm được n nhưng không làm phần ngược lại.

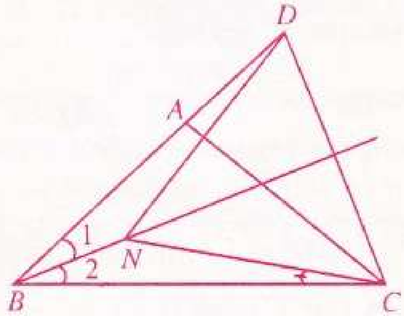
2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Phùng Quang Anh, Kim Huyền Trang*, 6A1, THCS Lâm Thao; **Hà Nội:** *Đặng Vân Hà*, 6D, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Vĩnh Phúc:** *Trần Kiều Việt Nga, Hà Hoàng Anh, Phan Việt Toàn, Phạm Thiên Lý, Nguyễn Thị Hồng Minh, Nguyễn Thái Hà*, 6A, *Kim Đình Đại, Nguyễn Ngọc Khánh, Nguyễn Thị Huân, Nguyễn Thị Hà Anh, Nguyễn Mạnh Hùng, Nguyễn Thị Phương Liên, Hoàng Quỳnh Liên, Tạ Thị Việt Chinh, Nguyễn Văn Hoàng, Kim Hương Linh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Nguyên*, 6A, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Nghệ An:** *Trần Văn Lương*, 6A, THCS Yên Sơn, *Nguyễn Văn Thắng*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Viết Trung*, 6B, THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ; **Quảng Bình:** *Võ Doãn Trọng Nghĩa*, 6, THCS An Ninh, Quảng Ninh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, *Nguyễn Đức Tú*, 6/4, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà, *Nguyễn Thị Ngọc Giàu*, 6/5 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Bình Định:** *Văn Gia Thi*, 6A1, THCS Lê Hồng Phong, TP Quy Nhơn.

VIỆT HẢI

Bài T2/342 (Lớp 7). *Cho tam giác ABC với* $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^o$. *Trên tia phân giác của góc ABC lấy điểm N sao cho* $\widehat{BCN} = 12^o$. *Hãy so sánh độ dài của CN và CA.*

Lời giải. Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$, ta có ΔBCD cân tại B. Vì $\widehat{ABC} = 36^o$ nên $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = \dfrac{180^o - 36^o}{2} = 72^o$.



Ta lại có $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 36^o + 36^o = 72^o$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{DAC}$ $(= 72^o)$. Suy ra ΔACD cân tại C, do đó $CA = CD$ (1)

Xét hai tam giác BDN và BCN, có cạnh BN chung, $BD = BC$, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (gt), suy ra $\Delta BDN = \Delta BCN$ (c.g.c) $\Rightarrow CN = DN \Rightarrow \Delta NCD$ cân tại N. Lại có $\widehat{NCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCN} = 72^o - 12^o = 60^o \Rightarrow$ ΔNCD là tam giác đều $\Rightarrow CN = CD$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $CA = CN$.

Nhận xét. 1) Rất đông các bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Ngoài cách giải trên đây, có bạn còn vẽ tia phân giác của góc NCA, cắt cạnh AB tại E, rồi chứng minh $\Delta EAC = \Delta ENC$.

2) Bạn *Nguyễn Nguyệt Anh*, 7A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội còn đề xuất bài toán ngược lại. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^0$. Trên tia phân giác của góc ABC lấy điểm N sao cho $CN = CA$. Tính góc BCN (lưu ý có hai trường hợp).

3) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả.

Vĩnh Phúc: *Phùng Ngọc Quý*, 7A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Tất Bách*, 7G, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Tây:** *Đinh Ngọc Thiện*, 7A, THCS Cổ Đông, TX. Sơn Tây; **Hải Dương:** *Mạc Đức Huy*, 7C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; *Phạm Thị Vân Nga*, 7C, THCS Chu Văn An, Chí Linh; **Thanh Hóa:** *Lê Đình Huy*, 7B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Nghệ An:** *Đinh Viết Tú*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trường Long*, *Nguyễn Thị Hà Trang*, 7C, THCS Thị trấn Kỳ Anh, Kỳ Anh; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Duyệt*, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7/7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu; **Kiên Giang:** *Trần Minh Hảo*, 7A6, THCS Bàn Tân Định, Giồng Riềng.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/342. *Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình*

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 5x^2 - 4y^2 - 5 = 0.$$

Lời giải. Phương trình có thể viết thành

$$(x^2+y^2+1)^2-5(x^2+y^2+1)=-y^2$$

hay $(x^2+y^2+1)(4-x^2-y^2)=y^2\geq 0$ (1)

Vì $x^2+y^2+1>0$ nên $4-x^2-y^2\geq 0$.

Vì x, y là các số nguyên nên các số x^2+y^2+1, $4-x^2-y^2$ và y^2 là các số nguyên.

Nếu $y\neq 0$, từ (1) suy ra x^2+y^2+1 là ước của y^2.

Điều đó không thể được vì $x^2+y^2+1>y^2$.

Vậy $y=0$, từ (1) suy ra $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4$.

Ta được $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\y=0.\end{cases}$

Dễ dàng kiểm tra hai nghiệm trên thoả mãn PT đã cho.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã giải bài toán bằng cách đặt $t = x^2 + y^2$ và biến đổi giả thiết về $t^2 - 3t - 4 = -y^2 \leq 0$ $\Rightarrow -1 \leq t \leq 4$.

Từ đó có bất đẳng thức $t = x^2 + y^2 \leq 4$. Như vậy, mỗi số x^2 và y^2 chỉ có thể nhận giá trị 0, 1 hoặc 4. Bằng cách thử trực tiếp tìm được nghiệm của phương trình.

2) Một số bạn khác đã biến đổi PT về dạng:

$$(x^2+y^2-1)^2-x^2=5$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+|x|-1)(x^2+y^2-|x|-1)=5$$

Từ đó suy ra $\begin{cases}x^2+y^2+|x|-1=5\\x^2+y^2-|x|-1=1\end{cases}$

Giải hệ trên, ta tìm được nghiệm của phương trình.

3) Có tới gần 1000 bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết có lời giải đúng. Sau đây là một số bạn có lời giải tốt:

Yên Bái: *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX. Nghĩa Lộ; **Lào Cai:** *Lê Đức Thọ*, 8C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Lào Cai; **Hà Nội:** *Trần Huy Khôi*, 9D, HN Amsterdam, *Lê Quang Huy*, 7H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tú*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Hưng Yên:** *Hoàng Văn Cương*, 7B, THCS Phạm huy Thông, Ân Thi; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chúng*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hoá:** *Lê Thị Dung*, 8D, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hoá; **Hà Tĩnh:** *Vương Bằng Việt*, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX. Hà Tĩnh; Trần Đức Thiện, 9G, THCS Thị trấn Kỳ Anh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Tú*, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Hoàn Lão, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Trần Minh Thông*, 9/1, THCS Nguyễn Chánh, Sơn Tịnh; **Đà Nẵng:** *Phạm Trọng Khôi*, 9A, THCS Hoà Khánh, Q. Liên Chiểu; **Đăk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, KRông Buk; **Lâm Đồng:** *Đinh Thành Nhân*, 9A7, THCS Quang Trung TP. Đà Lạt; **TP Hồ Chí Minh:** *Tô Nhã Quế Khanh*, 7A8, THCS Cầu Kiệu Q. Phú Nhuận, Tăng Bửu Vinh, 8^1, THCS Chu Văn An, Q11; **Tây Ninh:** *Nguyễn Quốc Trung*, 9A7, THCS Nguyễn Tri Phương, TX. Tây Ninh; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá; **Đồng Nai:** Đỗ Ngọc Minh Nhật, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, TX. Long Khánh, *Tăng Ngọc Đạt*, 9/1, THCS Long Thành.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/342. *Tìm giá trị của biểu thức*

$$P = a^{2005} + b^{2005} + c^{2005}$$

trong đó a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn các điều kiện :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c} & (1)\\ a^3+b^3+c^3=2^9 & (2)\end{cases}$$

Lời giải

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left[\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=0\\a+c=0\\b+c=0\end{array}\right. \quad (*)$$

, Do vai trò a, b, c trong các điều kiện (1), (2) là như nhau, nên từ (*) ta có thể giả sử $a = -b$. Khi đó từ (2) suy ra $c = 2^3$.

Vậy

$P = a^{2005} + b^{2005} + c^{2005} = c^{2005} = 2^{3.2005} = 2^{6015}$.

Nhận xét. 1) Với lập luận tương tự như trên, bạn đọc dễ dàng giải được bài toán tổng quát sau:

"Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^{2n+1}}+\dfrac{1}{b^{2n+1}}+\dfrac{1}{c^{2n+1}} = \dfrac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}} \\ a^{2m+1}+b^{2m+1}+c^{2m+1} = A \end{cases}$$

với $m, n, k \in \mathbb{N}$, A là số thực cho trước. Khi đó:

$$P = a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1} = \sqrt[2m+1]{A^{2k+1}}.$$

2) Có nhiều bạn tham gia giải bài này, chỉ có 4 bạn giải sai. Các bạn có lời giải tốt là:

Bắc Ninh: *Nguyễn Hồng Vân*, 7D, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trường Giang*, 7A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Sơn A*, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Tây:** *Nguyễn Hữu Ngọc Linh*, 8A2, THCS Võng Xuyên, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** *Lê Thị Nguyệt*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Thanh Hóa:** *Lê Trọng Cường*, 8B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Lê Thị Kiều*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Dương Phúc Thưởng*, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7^7, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/342. *Chứng minh bất đẳng thức sau với x là số thực không âm :*

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \le \sqrt{x+9} \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. ***Cách 1.*** Với $x \ge 0$ thì BĐT (1) luôn có nghĩa và có hai vế luôn dương. Do đó

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2 \le \left(\sqrt{x+9}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x+1}+x+4\sqrt{\frac{2x}{x+1}} \le x+9$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+1}{x+1}-4\sqrt{\frac{2x}{x+1}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{x+1}-4\sqrt{\frac{2x}{x+1}}+1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{\frac{2x}{x+1}}-1\right)^2 \ge 0 \qquad (2)$$

Với $x \ge 0$ BĐT (2) luôn đúng . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}} = 1$ tức là $x = \dfrac{1}{7}$ (thỏa mãn $x \ge 0$).

Như vậy, BĐT (1) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{7}$.

Cách 2. Với $x \ge 0$, áp dụng BĐT Bunhiacovski cho hai cặp $2\sqrt{2}$, $\sqrt{x+1}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ ta có

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2$$

$$\le (8+x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\right) = x+9.$$

Suy ra $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \le \sqrt{x+9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} : \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{7}$ (thỏa mãn $x \ge 0$).

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Tuy nhiên không ít bạn chưa quan tâm đến điều kiện $x \ge 0$ của đề bài nên có những lập luận thiếu chính xác và tính toán nhầm lẫn. Riêng bạn *Võ Nhật Thanh*, 7^3, THCS số I Bắc Lý, Đồng Hới, **Quảng Bình** đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát hơn:

"Với $x \ge 0$ và $a > 1$, luôn có

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \le \sqrt{x+a+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{a-1}$".

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

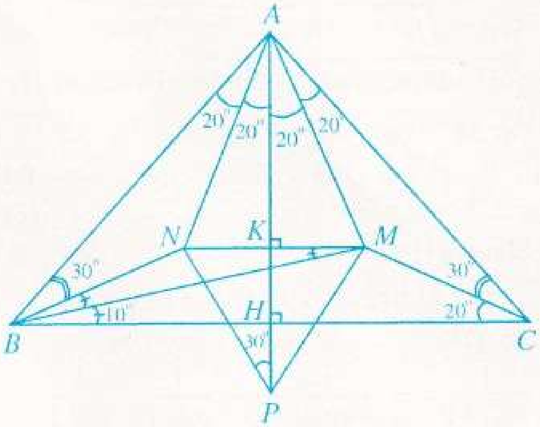
Hà Nội: *Đỗ Như Milan*, 9A1, THCS Chu Văn An, *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 7C, THCS Mai Lâm, Đông Anh; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ;**Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Kim Hùng*, 9A1, THCS Yên Sơn, Yên Lạc, *Phan Thị Thu Trang*, 7A, THCS Triệu Đề, Lập Thạch; **Hà Tây:** *Nguyễn Đức Bình*, *Đỗ Văn Đức*, 9A1, THCS Tế Tiêu, Mĩ Đức, *Trần Thị Thùy Trang*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, *Nguyễn Cao Ban*, 9A1, THCS Hồng Hải, Quỳnh Phụ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Cao Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nam Định:** *Nguyễn Thanh Sơn*, 9B, THCS Trực Hưng, Trực Ninh;**Nghệ An:** *Phạm Sỹ Quang*, *Nguyễn Thúy Vy*, 9A, THCS Lý Nhật Quang; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 9B, THCS Nguyễn Tuấn

Thiện, Hương Sơn, *Nguyễn Thị Thúy*, 8B, THCS Hạnh Lâm, Thanh Chương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Tú*, 6A, THCS Trần Hưng Đạo, TX Đông Hà, *Lê Quốc Tuấn*, 7B, THCS Nguyễn Trãi, Vĩnh Linh; **Quảng Bình:** *Võ Nhật Thanh*, 7^3, THCS Số I Bắc Lý, Đồng Hới; **Bình Định:** *Vũ Ngọc Đức*, 9A1, THCS Nhân Hậu, An Nhơn; **Đà Nẵng:** *Lê Đoàn Thiện Phú*, 9/8, THCS Chu Văn An, *Nguyễn Ngô Minh Thắng*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến; **Vũng Tàu:** *Bùi Thái Bình*, 8A6, THCS Đội I, Xuyên Lộc; **Lâm Đồng:** *Đinh Thành Nhân*, 9A7, THCS Quang Trung, Đà Lạt.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/342. *Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC} = 80^0$. Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = 20^0$ và $\widehat{MCA} = 30^0$. Tính góc $\widehat{MBC}$.*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**).



Trên đường cao AH của tam giác ABC lấy điểm P sao cho $AP = AB = AC$.

Vẽ tam giác AMN sao cho $MN \perp AH$ tại K và $\widehat{PAN} = \widehat{PAM} = 20°$. Từ đó có $\widehat{BAN} = 20°$ và $\Delta AKN = \Delta AKM$ (g.c.g) nên $AM = AN$.

Từ các điều trên suy ra các tam giác ABN, APN, APM, ACM bằng nhau (c.g.c). Do đó

$$\Rightarrow \begin{cases} BN = PN = PM = MC \\ \widehat{NBA} = \widehat{NPA} = \widehat{MPA} = \widehat{MCA} = 30^o \end{cases}$$

Suy ra $\widehat{NBC} = 20°$ và ΔPMN đều $\Rightarrow MN = PN$.

Vậy $BN = MN$ nên $\widehat{NBM} = \widehat{NMB}$ (1)

Chú ý rằng $MN // BC$ (cùng vuông góc với AH) nên $\widehat{NMB} = \widehat{MBC}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{NBM} = \widehat{MBC}$. Do đó $\widehat{MBC} = \frac{1}{2}.20^o = 10^o$.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó, rất nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên, đa số các bài giải đều dùng tứ giác nội tiếp (HH9) hoặc tam giác đồng dạng (HH8). Số lời giải như trên dùng tam giác bằng nhau (HH7) không nhiều.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Đỗ Như Milan*, 9A1, THCS Chu Văn An, Ba Đình, *Phạm Thị Diệu Linh*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Tây:** *Đặng Khánh Hòa*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tuấn Anh*, *Nguyễn Thị Hải Yến*, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Mai Mai*, 9^7, THCS Nga Phú, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Dương Phi Thương*, 9A, THCS Thuận Sơn, Đô Lương.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T7/342. *Cho đường tròn (O), hai dây cung CA, CB không đi qua tâm O và BA ≠ BC. Đường thẳng qua điểm A vuông góc với đường thẳng OB cắt đường thẳng CB tại điểm N. Gọi M là trung điểm của AN. Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) lần nữa tại D. Gọi OE là đường kính của đường tròn đi qua các điểm B, D, O. Chứng minh rằng ba điểm A, C, E thẳng hàng.*

Lời giải. Xét $BA < BC$. Gọi F là trung điểm của AC.

Ta có $MF // NC$. Suy ra

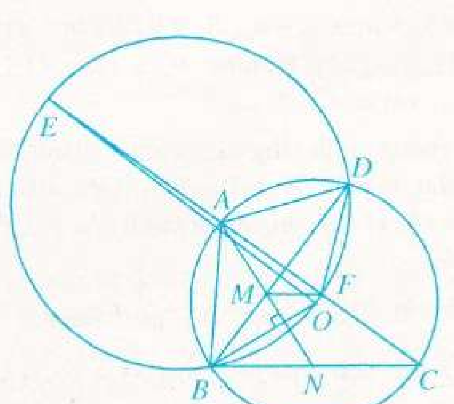
$\widehat{AFM} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Nên tứ giác $AMFD$ nội tiếp.

Từ đó $\widehat{MAF} = \widehat{MDF}$ (1)

Mặt khác, ta lại có $OB \perp AM$, $OF \perp AF$. Xét hai trường hợp sau:

a) Nếu A nằm trong góc BOF (như hình vẽ) thì $\widehat{MAF} + \widehat{BOF} = 180°$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BOFD$ nội tiếp đường tròn đường kính OE. Vậy $\widehat{OFE} = 90° = \widehat{OFA}$.

Hay E thuộc đường thẳng AC tức A, C, E thẳng hàng.

b) Nếu A không nằm trong góc BOF thì $\widehat{MAF} = \widehat{BOF}$ và tứ giác $BFOD$ nội tiếp. Sau đó lập luận tương tự. Trường hợp $BA > BC$ xét tương tự.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Yên Bái: *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, TX Nghĩa Lộ; **Phú Thọ:** *Vũ Hồng Quân*, *9A3*, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; Hưng Yên: *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B,THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, *Nguyễn Hoàng Anh*, 9A3, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** *Võ Thị Minh Trang*, 9A, THCS TTr Quán Hành, Nghi Lộc; **Bình Định:** *Võ Ngọc Đức*, *9A1*,THCS Nhơn Hậu, An Nhơn; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS, Nguyễn Du, KRông Buk.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/342. *Cho tập hợp M gồm 2005 số dương: a_1, a_2, ..., a_{2005}. Xét tất cả các tập hợp con T_i khác rỗng của M, gọi s_i là tổng các số thuộc một tập hợp con T_i nói trên. Chứng minh rằng có thể chia tập hợp tất cả các số s_i được thành lập như vậy thành 2005 tập hợp con khác rỗng không giao nhau sao cho tỉ số của hai số bất kì thuộc cùng một tập hợp con vừa được phân chia không vượt quá 2.*

Lời giải. (Theo bạn *Lê Nam Trường*, 12 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**).

Đặt $n = 2005$. Kí hiệu các phần tử của M là $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$.

Đặt $S_m = a_1 + ... + a_m$, $S_0 = 0$ $(0 \le m \le n)$. Gọi $P = \{s_i, T_i \subseteq M\}$. Kí hiệu $P_m = \{s \in P \mid S_{m-1} < s \le S_m\}$ với $m = 1, 2, ..., n$.

Ta chứng minh rằng cách chia P thành các tập P_m như trên thỏa mãn điều kiện bài toán. Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh nếu $b \in P_m$ thì $2b > S_m$.

Thật vậy do $b > S_{m-1} = a_1 + ... + a_{m-1}$ và $b = \sum_{k=1}^{h} a_{i_k}$ nên phải tồn tại i_k $(k = 1, ..., h)$ mà $i_k \ge m$. Vậy $b \ge a_{i_k} \ge a_m = S_m - S_{m-1} > S_m - b$

$\Rightarrow 2b > S_m$.

Nhận xét. 1) Mặc dù bài toán không khó lắm nhưng khá hay song chỉ có 12 bạn gửi lời giải đến Tòa soạn. Các lời giải đều đúng. Lời giải tốt có các bạn:

Quảng Bình: *Đặng Ngọc Thanh*, 11 chuyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thiện Trung*, 10A chuyên, *Vũ Văn Quang* và *Lê Công Truyền*, 12 chuyên; **Nghệ An :** *Lê Đình Toàn*, 11 chuyên Phan Bội Châu; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Mạch Đông* và *Nguyễn Hồng Phong*, 11 chuyên.

2) Bạn *Lê Minh Trường* nhận xét rằng đây chính là một bài trong đề thi Olympic của Mỹ năm 1996 (USAMO 1996).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/342. *Dãy số (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ được xác định như sau : $x_1 = 1$, và*

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$$

với $n = 1, 2...$

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+2}$ $(n = 1, 2, ...)$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Lời giải. Chú ý $x_2 = 5$ và $x_n > 0$ với mọi $n = 1, 2, ...$ Ta có

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}$$

$$= \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$$

Do đó từ $x_{k+1} = x_k^2+3x_k+1 > 3x_k \ge 3.3^{k-1} = 3^k$ ta dễ chứng minh bằng quy nạp theo $n = 2, 3...$ $x_n > 3^{n-1}$ (2)

Cũng từ (1) suy ra

$$x_{n+1}+1 = x_n^2+3x_n+2 = (x_n+1)(x_n+2).$$

Hệ quả

$$\frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{(x_n+1)(x_n+2)} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n+2} - \frac{1}{x_{n+1}+1}.$$

Bởi vậy

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_{i+1}+1}\right)$$

$= \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$ dần tới $\frac{1}{2}$ khi n tăng vô hạn (do theo (2) $x_{n+1} > 3^n$ với mọi $n \ge 2$).

Như vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Đây là bài toán dạng cơ bản. Tòa soạn nhận được lời giải của 100 bạn học sinh. Tất cả các bạn học sinh đều giải như trên, chỉ khác nhau cách giải thích $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_{n+1}+1} = 0$.

Các bạn lớp 10 sau có lời giải tốt:

Lạng Sơn: *Mông Thanh Thủy*, 10K, THPT Chu Văn An; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Cường*, 10A0, THPT Yên

Phong I; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Khánh Hòa*, 10A2, THPT BC Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên, *Nguyễn Thị Thu Phương*, 10A1, *Trần Tấn Phong*, *Nguyễn Thiệu Trung*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Cường*, 10T, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn;**Đăk Lăk:** *Huỳnh Phi Hùng*, 10B, THPT Krông Buk; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành, TX Bà Rịa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/342. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(a^2+\frac{1}{ab}\right)^\alpha+\left(b^2+\frac{1}{bc}\right)^\alpha+\left(c^2+\frac{1}{ca}\right)^\alpha \ge 3.2^\alpha$$

trong đó a, b, c là các số dương và α là số hữu tỉ lớn hơn 1. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Sử dụng BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$a^2+\frac{1}{ab}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^3b=1$, (1)

$b^2+\frac{1}{bc}\ge 2\sqrt{\frac{b}{c}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b^3c=1$, (2)

$c^2+\frac{1}{ca}\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c^3a=1$. (3)

Từ (1), (2) và (3), ứng với mọi $\alpha > 0$, ta đều có

$\left(a^2+\frac{1}{ab}\right)^\alpha \ge \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^\alpha$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^3b=1$, (4)

$\left(b^2+\frac{1}{bc}\right)^\alpha \ge \left(2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^\alpha$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b^3c=1$, (5)

$\left(c^2+\frac{1}{ca}\right)^\alpha \ge \left(2\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^\alpha$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c^3a=1$. (6)

Cộng theo từng vế của (4), (5) và (6), ta thu được

$$\left(a^2+\frac{1}{ab}\right)^\alpha+\left(b^2+\frac{1}{bc}\right)^\alpha+\left(c^2+\frac{1}{ca}\right)^\alpha \ge$$

$$\ge \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^\alpha+\left(2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^\alpha+\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^\alpha.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Sử dụng BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho bộ ba số

$\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^\alpha$, $\left(2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^\alpha$, $\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^\alpha$, ta thu được

$$\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^\alpha+\left(2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^\alpha+\left(2\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^\alpha \ge 3.2^\alpha,$$

suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Đây là đề toán rất quen biết và thuộc loại dễ nên có rất nhiều bạn giải được (trên 200) và đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên.

Qua cách giải, ta thấy chỉ cần điều kiện $\alpha > 0$ là đủ.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/342. *Gọi r và R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\cos A.\cos B.\cos C \le \frac{r^2}{2R^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (*Theo nhiều bạn*)

Nếu tam giác *ABC* vuông (hoặc tù) thì BĐT (1) hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp tam giác ABC nhọn : Từ đẳng thức quen thuộc

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

ta thấy BĐT đã cho tương đương với

$\cos A.\cos B.\cos C \le 8\sin^2\frac{A}{2}.\sin^2\frac{B}{2}.\sin^2\frac{C}{2}$, hay

$$\cot gA.\cot gB.\cot gC \le \operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}} \le \operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C \qquad (2)$$

Để ý đến $\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$;

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}} =$$

$$= \cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}$$

thì BĐT (2) cần chứng minh tương đương với

$$\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2} \le \text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C \quad (3)$$

Ta có

$$\text{tg}A+\text{tg}B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos(A+B)}$$

$$\ge\frac{2\sin C}{1-\cos C}=\frac{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}=2\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\text{tg}B+\text{tg}C\ge 2\text{cotg}\frac{A}{2};\ \ \text{tg}C+\text{tg}A\ge 2\text{cotg}\frac{B}{2}.$$

Từ đó BĐT (3) được chứng minh. Suy ra BĐT(1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét. 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn còn giải theo các hướng:

* *Hướng 1: Sử dụng BĐT* $\text{tg}\frac{x+y}{2}\le\frac{\text{tg}x+\text{tg}y}{2}$, *với mọi* $x, y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *để chứng minh BĐT*:

$\cos A.\cos B.\cos C\le(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)$.

Từ đó suy ra

$$\cos A\cos B\cos C\le\frac{r^2}{2R^2}.$$

**Hướng 2*: Dùng kết quả : *Với mọi tam giác nhọn* ABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$), *ta có*

$(a+b-c)^2.(a+c-b)^2\ge(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)$.

Đồng thời áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC, suy ra BĐT cần chứng minh.

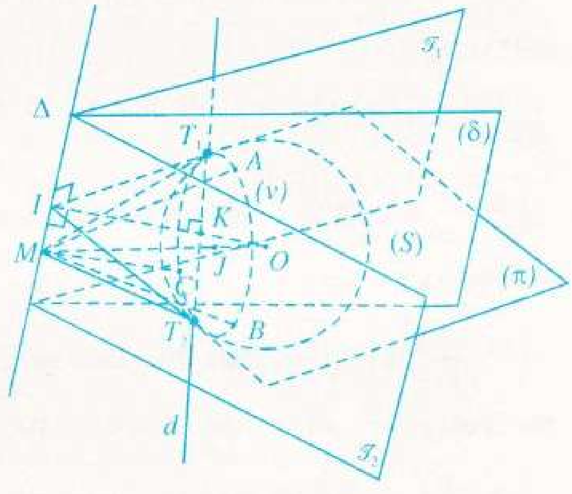
2) Có rất nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán này và đều giải đúng .Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Hà Nội: *Tạ Văn Hà* ,10A1 Toán, *Đào Bùi Kiên Trung*, 11A1 Toán, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Mạnh Long, Phạm Thành Nam*, 10A2, *Nguyễn Quang Kiên, Đoàn Trí Dũng, Đào Văn Thịnh*, 11A1, *Nhữ Anh Tuấn ,Đặng Anh Tuấn, Phạm Anh Toàn*, 11A2, Khối THPT chuyên Toán – Tin ĐHSP Hà Nội; *Hoàng Tùng Bách*, 11T2, THPT Hà Nội– Amsterdam; **Hải Phòng**: *Nguyễn Lâm Ngọc*, 11Tin, THPT*NK Trần Phú*; **Lạng Sơn:** *Mông Thanh Thủy*, 10K, *Bùi Văn Ngọc*,12A ,THPT Chu Văn An; TP. Lạng Sơn; **Phú Thọ:** *Đào Đức Trung* , 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP.Việt Trì; **Hà Tây:** *Lã Vĩnh Hòa*, 11Toán, THPT Nguyễn Huệ, TX. Hà Đông; **Hòa Bình:** *Phạm Quỳnh Mai*,10 CT,THPT Hoàng Văn Thụ, TX. Hoà Bình; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Ngọc*, 11A1, *Vũ Văn Quang, Lê Công Truyền*, 12A1, *Vũ Ngọc Quang*,12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Phan Tiến Dũng,Nguyễn Văn Thọ*, 11Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Phạm Phi Điệp*, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; ***Thanh Hoá:*** *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn, TP. Thanh Hóa, *Lê Thị Tương*, 12B1, THPT Hoằng Hoá II, Hoằng Hoá, *Dương Anh Tuấn*, 11A4 ,THPT Hậu Lộc II, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Phan Xuân Minh*, 10A1, *Hoàng Gia Thọ*, 10A1, Khối THPT chuyên ĐH.Vinh, *Tô Hồng Sơn*, 11A1, THPT Chuyên Phan Bội Châu, TP.Vinh, *Đặng Công Vinh*, 11I, THPT Nghĩa Đàn, Nghĩa Đàn; **Quảng Trị:** *Trương Xuân Nhã*, 11 Toán, *Nguyễn Đình Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TX. Đông Hà; **Thừa Thiên– Huế:** *Trần Nguyễn Tuấn Minh*, 11Toán ,THPT Quốc Học Huế; **Quảng Nam:** *Bùi Ngọc Giao*, 11/1,THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tam Kì; **Khánh Hòa:** *Võ Thái Thông*, 10A1, Trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

HỒ QUANG VINH

Bài T12/342. *Trong không gian cho một mặt cầu (S) và một đường thẳng Δ không cắt (S). Qua một điểm M trên Δ dựng ba tiếp diện bất kì với mặt cầu (S) và gọi A, B, C là các tiếp điểm. Chứng minh rằng mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M di động trên Δ.*

Lời giải. (Dựa theo ý tưởng lời giải của *Võ Thị Chung*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị** và *Nguyễn Trí Dũng*, 11A1, THPT Thuận Thành 1, **Bắc Ninh**).



– Trước hết, hãy thiết lập *Bổ đề* sau đây về tính chất của các tiếp tuyến và tiếp diện xuất phát từ một điểm M tới một mặt cầu (S).

Quỹ tích các tiếp tuyến MT xuất phát từ một điểm M tới một mặt cầu (S) tâm O bán kính R (mà tiếp điểm là T) là một mặt nón tròn xoay , *l* đỉnh M, trục là đường thẳng MO và ngoại tiếp mặt cầu (S) theo một đường tròn (ν) mà (ν) là quỹ tích của các tiếp điểm T. Mặt phẳng qua (ν) vuông góc với trục MO ở tâm J của (ν), J được xác định bởi hệ thức: $\overline{OM}.\overline{OJ}=R^2$ (1).

– Bây giờ hãy áp dụng bổ đề trên vào bài toán của ta. Với một đường Δ không cắt mặt cầu (S) luôn tồn tại hai mặt phẳng $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ qua Δ và tiếp xúc với (S) tại T_1, T_2 theo thứ tự, do đó T_1 và T_2 là hai điểm cố định. Gọi M là điểm bất kì trên Δ thì $MT_1 \perp OT_1$ và $MT_2 \perp OT_2$ nên MT_1, MT_2 đều là tiếp tuyến của mặt cầu (S).

Theo bổ đề trên thì đường tròn (v), quỹ tích các tiếp điểm T của các tiếp diện xuất phát từ điểm M trên Δ tới mặt cầu (S) phải chứa cả 5 điểm A, B, C và T_1, T_2. Do đó, mặt phẳng (ABC) chứa đường tròn (v) thì cũng *chứa đường thẳng cố định* T_1T_2.

Nhận xét. 1) Mỗi tiếp diện với mặt cầu (S) chứa tiếp tuyến MT cũng là một tiếp diện của nón $\mathscr{K}$ theo tiếp tuyến MT và người ta cũng gọi nón $\mathscr{K}$ là *hình bao* của tập hợp các tiếp diện xuất phát từ điểm M tới mặt cầu (S).

2) Dễ thấy rằng mặt phẳng (δ) đi qua Δ và tâm O mặt cầu (S), là một trong hai mặt phẳng phân giác của hai tiếp diện $\mathscr{T}_1 = mp(\Delta, T_1)$ và $\mathscr{T}_2 = mp(\Delta, T_2)$ và do đó, δ là mặt phẳng đối xứng chung của (S), $\mathscr{T}_1$ và $\mathscr{T}_2$, đồng thời hai tiếp điểm T_1, T_2 đối xứng với nhau qua δ. Từ đó suy ra đường thẳng T_1T_2 cố định tìm được (gọi là d) và đường thẳng Δ đã cho là *chéo nhau*, nhưng *vuông góc với nhau* (kí hiệu là $d \perp \Delta$), trong đó Δ không cắt (S), nhưng d cắt (S) ở T_1 và T_2. Người ta còn gọi d là *đường thẳng liên hợp* với đường thẳng Δ đối với mặt cầu (S).

3) Các bạn *Phạm Duy Tùng*, 12A2, THPT Kiến An, **Hải Phòng**; *Nguyễn Văn Ngọc*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** và *Phạm Thanh Hải*, 11I, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An** đã chỉ ra cụ thể cách dựng đường thẳng d cố định cần tìm. Trong mặt phẳng (π) đi qua O và vuông góc với Δ ở I dựng hai tiếp tuyến IT_1 và IT_2 với đường tròn lớn $\mathscr{C}$, trong đó $\mathscr{C}$ là giao tuyến của (π) và mặt cầu (S), $IT_i \perp OT_i$ $(i = 1, 2)$. Vì Δ vuông góc với (π) ở I nên theo định lí ba đường vuông góc thì với M bất kì thuộc A ta có $MT_i \perp OT_i$ $(i = 1, 2)$, do đó MT_1 và MT_2 là hai tiếp tuyến kẻ từ M với mặt cầu (S). Suy ra hai điểm T_i thuộc đường tròn (ABC) và do đó, mặt phẳng (ABC) luôn đi qua đường thẳng T_1T_2 cố định khi M di động trên Δ.

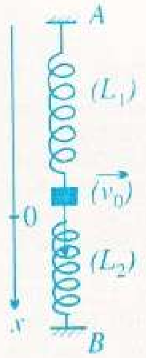
3) Đa số các bạn lại chứng minh rằng với mọi điểm M trên Δ, mặt phẳng (ABC) đi qua điểm cố định K trên đoạn thẳng OI vuông góc với Δ ở I, xác định bởi hệ thức $\overline{OI}.\overline{OK} = R^2$. Sau đó chứng minh rằng đường thẳng d đi qua K và vuông góc với mp $\delta(\Delta, O)$ thì nằm trong mặt phẳng (ABC) với $\forall M \in \Delta$.

Chứng minh này tuy cũng ngắn gọn nhưng chưa chỉ ra được tính chất hình học và cách dựng cụ thể của đường thẳng d cố định cần tìm. Có duy nhất một bạn sử dụng phương pháp tọa độ, tuy giải đúng nhưng lời giải không đạt tính trực quan hình học và chưa chỉ rõ cụ thể yếu tố hình học cần tìm. Ngoài ra, nhìn chung việc biểu diễn hình không gian của các bạn chưa đạt được tính trực quan và độ chính xác của hình biểu diễn (nét thấy, nét khuất). Về mặt trình bày thì chưa thật sáng sủa, còn luộm thuộm; đặc biệt nhiều bạn sử dụng quá tùy tiện kí hiệu "⇒" trong hành văn "viết".

4) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt. **Hà Nội:** *Nhữ Anh Tuấn*, 11A2, khối PTCTT, ĐHSP HN; **Bắc Ninh:** *Lê Tiến Thành*, 11A1, THPT Quế Võ 1; **Vĩnh Phúc:** *Trần Trung Dũng, Lê Tiến Đức*, 11A1, *Đỗ Lê Việt Thắng*, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Tấn Phong*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hưng Yên:** *Vũ Huy Phong*, 12 Tin, THPT chuyên HưngYên; **Hà Tây:** *Lã VĩnhHòa*, 11 Toán, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hòa Bình:** *Vũ Việt Dũng*,11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn; **Thừa Thiên – Huế:** *Nguyễn Tiến Cảnh*, 11 Toán, THPT Quốc học Huế; **Phú Yên:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 11A, THPT Phan Chu Trinh, Xuân Lộc, Sông Cầu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Lê Quang Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Dương Văn An*, 10A1, THPT Châu Thành, TX Bà Rịa; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 10T, THPT chuyên Bạc Liêu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/342. *Hai lò xo nhẹ L_1, L_2 giống hệt nhau có cùng độ cứng $k = 20N/m$ và độ dài tự nhiên $l_0 = 40cm$. Ta bố trí một hệ như hình vẽ: các lò xo luôn luôn thẳng đứng, vật nhỏ nối giữa hai lò xo có khối lượng $m = 100g$. Hai đầu còn lại của hai lò xo gắn cố định vào A và B với $AB = l$. Lấy $g = 10m/s^2$.*



Từ vị trí cân bằng tại thời điểm $t = 0$ người ta truyền cho vật m một vận tốc ban đầu $v_0 = 40cm/s$ theo phương thẳng đứng.

a) Chứng tỏ vật dao động điều hòa. Viết phương trình dao động đó.

b) Khoảng cách $AB = l$ cần thỏa mãn điều kiện gì ở mỗi trường hợp sau để trong quá trình vật dao động thì :

+ Hai lò xo luôn luôn giãn;

+ Hai lò xo luôn luôn nén;

+ Lò xo L_1 luôn luôn giãn còn lò xo L_2 luôn luôn nén.

Lời giải. a) Khi vật ở vị trí cân bằng:

$$\overrightarrow{F_{01}} + \overrightarrow{F_{02}} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow (l_0 - l_{01})k + mg + (l_{02} - l_0)k = 0$$

$$\Rightarrow l_{01} - l_{02} = \frac{mg}{k}.$$

Theo đề bài $l_{01} + l_{02} = l$, suy ra $l_{01} = \dfrac{l}{2} + \dfrac{mg}{2k}$ và $l_{02} = \dfrac{l}{2} - \dfrac{mg}{2k}$.

+ Khi vật có li độ x: $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{P}=m\vec{a}$

$\Rightarrow (l_0 - l_{01} - x)k + mg + (l_{02} - l_0 - x)k = mx''$

$\Rightarrow mx'' + 2kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{2k}{m}x = 0$: vật dao động điều hòa với tần số góc $\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ = 20rad/s.

Phương trình dao động có dạng $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng. Lúc $t = 0$ ta có: $x = 0$ và $v = v_0 = 40$cm/s. Suy ra $\varphi = 0$ và $A = \frac{v_0}{\omega}$ =2cm. Do đó $x = 2\sin 20t$ (cm).

b) Ta thấy $l_{01} > l_{02}$ nên

+ Để hai lò xo luôn luôn giãn chỉ cần L_2 luôn giãn, hay $\frac{l}{2} - \frac{mg}{2k} - A > l_0 \Rightarrow l > 89$ cm.

+ Để hai lò xo luôn luôn nén chỉ cần L_l luôn luôn nén, hay $\frac{l}{2} + \frac{mg}{2k} + A < l_0 \Rightarrow l < 71$ cm.

+ Để L_1 luôn luôn giãn còn L_2 luôn luôn nén, phải có $l_{01} - A > l_0$ và $l_{02} + A < l_0$ hay $\frac{l}{2} + \frac{mg}{2k} - A > l_0$ và $\frac{l}{2} - \frac{mg}{2k} + A < l_0$. Suy ra 79 cm $< l <$ 81 cm.

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng:

Phú Thọ: *Ngô HuyCừ*, 11 Lí, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT Việt Trì, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Phạm Hải Luân*, *Lâm Tiến Tùng*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Yên Bái:** *Trần Đức Mỹ*, 12T, THPT Nguyễn Tất Thành; **Nghệ An:** *Đặng Công Danh*, 12A2, THPT Nghi Lộc 1, *Phạm Văn Toàn*, 12A1, THPT Diễn Châu III; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Vương*, 11T, *Lê Anh Kiệt*, 11F, THPT Lam Sơn, *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 11 Lí, THPT Bỉm Sơn, *Phạm Hương Giang*, 12B, THPT Hà Trung, *Trần Văn Duy*, 12A1, THPT Hậu Lộc I; **Bình Định:** *Lý Viễn Trường*, 11A1, THPT Phù Cát I; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Bắc*, 11A3, *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, *Phùng Đình Phúc*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đăk Lăk:** *Trần Phú*, 11T, THPT Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột.

MAI ANH

Bài L2/342. *Một ampe kế mắc nối tiếp với một vôn kế rồi mắc vào hai cực của một nguồn điện có suất điện động E = 6V (điện trở trong nhỏ không đáng kể) thì ampe kế chỉ I và vôn kế chỉ U. Sau đó mắc một điện trở R song song với vôn kế thì ampe kế chỉ I_1 = 2I và vôn kế chỉ U_1 = 0,5U. Hỏi vôn kế lúc đó chỉ mấy vôn?*

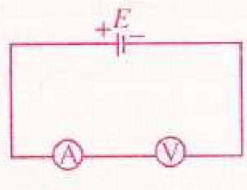
Lời giải. (Dựa theo lời giải của đa số các bạn).

Gọi R_A là điện trở của ampe kế. Khi ampe kế mắc nối tiếp với vôn kế (h. 1), ta có

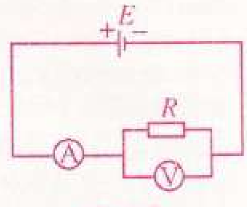
$$E=U+IR_A \qquad (1)$$

Khi mắc thêm điện trở R song song với vôn kế (h. 2), ta có

$$E=U_1+I_1R_A=\frac{U}{2}+2IR_A \qquad (2)$$



Hình 1



Hình 2

Ở đây ta đã thay $U_1=\frac{U}{2}$ và $I_1=2I$ theo đề bài đã cho.

Từ (1) và (2) với E = 6V, suy ra U = 4V.

Vậy $U_1=\frac{U}{2}=2\ V$.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn gửi bài giải được bài toán này.

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn và tốt :

Thanh Hóa: *Lê Bá Ngọc*, 11F, *Trịnh Văn Vương*, 11T, *Nguyễn Văn Thương*, 11H, *Lê Bá Sơn*, 10F, THPT Lam Sơn, *Phạm Văn Luân*, 11B4, THPT Bỉm Sơn, *Nguyễn Tiến Liên*, 12A1, THPT Yên Định II, *Trần Ngọc*, 10A1, THPT Hậu Lộc I, *Tống Tuấn Anh*, 11A5, THPT Nông Cống I, *Nguyễn Văn Cường*, 11A2, *Lê Thị Hồng Nhung*, 11C1, *Đỗ Huy Phú*, 12B1, THPT Hoằng Hóa; **Bắc Giang:** *Nguyễn Đức Toản*, Lí 11, THPT chuyên Bắc Giang; **Tiền Giang:** *Ngô Hải Đăng*, Lí 11, THPT chuyên Tiền Giang; **Phú Thọ** : *Dương Đình Chinh*, 10A5, THPT Phù Ninh; **Thái Nguyên** : *Nguyễn Hồng Phong*, Toán 11, *Nguyễn Mạnh Đồng*, Toán 11, THPT chuyên Thái Nguyên; **Bà Rịa – Vũng Tàu** : *Thiềm Việt Phúc*, 11A1, *Nguyễn Phúc Hưng*, 11A1, THPT Võ Thị Sáu, Đất Đỏ; **Quảng Trị:** *Tống Phước Hoàng Hiếu*, 11H, THPT Hải Lăng; **Nghệ An** : *Nguyễn Văn Mạnh*, 11A, THPT Quỳnh Lưu III, *Nguyễn Thị Ngọc Lan*, 11B, THPT Phạm Hồng Thái, Hưng Nguyên, *Nguyễn Văn Linh*, 11A1, THPT Diễn Châu số 3, *Trần Văn Thắng*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Đậu Lệ Thủy*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV; **Hưng Yên:** *Lâm Tiến Tùng*, Lí 11, *Phạm Đức Linh*, Lí 10, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Nguyễn Bình*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Hà Tĩnh:** *Vương Quang Hùng*, Lí 12, THPT chuyên Hà Tĩnh, *Nguyễn Thành Long*, 11A10, THPT Nguyễn Huệ, Kì Anh; **Hà Tây:** *Tô Quang Ngọc*, Toán 11, THPT Sơn Tây; **Đồng Nai:** *Phạm Như Tuyên*, 11A1, THPT Nguyễn Hữu

Cảnh, Biên Hòa; **Hải Dương** : *Nguyễn Thế Thành*, THPT Nam Sách; **Bình Định**: *Lý Viễn Trường*, 11A1, THPT Phù Cát I ; **Quảng Ngãi** : *Trần Thanh Hà*, 12A6, THPT số 1 Đức Phổ; **Vĩnh Long** : *Huỳnh Thanh Mỹ*, 11 Lí–Tin, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bắc Ninh** : *Trần Thái Hà*, Lí 12, *Nguyễn Minh Cường*, Lí 12, THPT chuyên Bắc Ninh, *Dương Đức Thanh*, 11A3, THPT Lý Thái Tổ; **Vĩnh Phúc**: *Phùng Đình Phúc*, 11A1, *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, *Tạ Đức Mạnh*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Vũ Thị Hồng Tuyến*, 11A7, *Đỗ Duy Chung*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch.

NGUYỄN VĂN THUẬN

VỀ LỜI GIẢI BÀI TOÁN T11/341, SỐ THÁNG 3/2006

Sau khi xem xét lại kĩ lưỡng hai mệnh đề nêu trong phần kết luận và nhận xét (Nhận xét 1) của bài viết giới thiệu đáp án và nhận xét lời giải của bạn đọc về bài toán T11/341 (THVTT số 345, tháng 3/2006), tác giả bài viết phát hiện ra rằng hai mệnh đề đó là *không đúng*, do vội vàng, chưa kiểm tra kĩ đã *ngộ nhận là đúng*. Tác giả bài viết thành thực xin lỗi Tòa soạn và bạn đọc. Xin được *đính chính* như sau:

Biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất $T_{min} = 1$ khi và chỉ khi tứ giác ABCD vừa ngoại tiếp đường tròn (I, r) đồng thời nội tiếp một đường thẳng tròn (O, R) khác.

Thật vậy, trong bài viết giới thiệu Đáp án và nhận xét về bài toán T11/341 trong tạp chí THVTT số 345, tháng 3/2006, *phần kết luận sau đây là hoàn toàn đúng*: "Biểu thức T đạt cực tiểu $T_{min} = 1$ khi và chỉ khi đồng thời các đẳng thức sau được thỏa mãn:

$$\text{(I)}\begin{cases} x_1=d,\ x_2=a,\ x_3=b,\ x_4=c; & \text{(v)}\\ x=\dfrac{da}{p},\ y=\dfrac{ab}{p},\ z=\dfrac{bc}{p},\ t=\dfrac{cd}{p} & \text{(vi)}\end{cases}$$

Như vậy, biểu thức

$$T=\frac{x^2}{x_1x_2}+\frac{y^2}{x_2x_3}+\frac{z^2}{x_3x_4}+\frac{t^2}{x_4x_1}$$

đạt cực tiểu $T_{min} = 1$ khi và chỉ khi hoán vị $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ của tập hợp bốn số a, b, c và d nhất thiết phải là hoán vị $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{d, a, b, c\}$" (sắp xếp theo thứ tự tương ứng này thì mới thỏa mãn điều kiện đòi hỏi để T đạt cực tiểu).

Tuy nhiên, *nghiêm túc* mà nói rằng nếu đáp án của bài toán dừng lại ở đây và xem rằng lời giải đã trọn vẹn và kết thúc thì chưa thể chấp nhận được. Vì sao vậy? Bởi một lí do đơn giản: Tuy rằng hệ thống (I) các đẳng thức được tìm ra ở trên là "các điều kiện cần và đủ" để biểu thức T đạt cực tiểu và giá trị $T_{min} = 1$, nhưng chúng ta vẫn chưa chỉ ra được khi đó tứ giác ngoại tiếp *ABCD có thực sự tồn tại hay không và nếu đã tồn tại thì phải dựng được nó* (không chỉ tồn tại trên lí thuyết) khi bốn đoạn thẳng có độ dài a, b, c, d thỏa mãn đẳng thức $a + c = b + d\ (=p)$ là đã cho trước. Bởi vậy, chúng ta vẫn còn phải tiếp tục nghiên cứu kĩ càng hệ thống các điều kiện (I) ở trên chứ không thể vội vàng dẫn đến kết luận ngộ nhận và hồ đồ như đã xảy ra một cách vô cùng đáng tiếc.

Thật vậy, gọi r là bán kính đường tròn (I) nội tiếp tứ giác $ABCD$ được xét và 2α, 2β, 2γ, 2δ, theo thứ tự là độ lớn các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$. Thế thì ta có các hệ thức sau:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi, \qquad \text{(vii)}$$

và $$\frac{1}{r}=\frac{\text{cotg}\alpha}{x}=\frac{\text{cotg}\beta}{y}=\frac{\text{cotg}\gamma}{z}=\frac{\text{cotg}\delta}{t} \qquad \text{(viii)}$$

Mặt khác, từ (vi) ta lại có

$$xz=yt=\left(=\frac{abcd}{p^2}=r^2\right) \qquad \text{(ix)}$$

Do đó, đối chiếu (viii) và (ix) ta suy ra rằng khi biểu thức T đạt cực tiểu $T_{min} = 1$ thì giữa bốn số α, β, γ và δ nhất thiết phải thỏa mãn hệ thức

$$\text{cotg}\alpha.\text{cotg}\gamma=\text{cotg}\beta.\text{cotg}\delta,$$

hay là $$\text{tg}\alpha.\text{tg}\gamma=\text{tg}\beta.\text{tg}\delta; \qquad \text{(x)}$$

Bởi vậy, từ đẳng thức $1-\text{tg}\alpha.\text{tg}\gamma=1-\text{tg}\beta.\text{tg}\delta$ ta suy ra:

$$\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\gamma}{\text{tg}(\alpha+\gamma)}=\frac{\text{tg}\beta+\text{tg}\delta}{tg(\beta+\delta)} \qquad \text{(xi)}$$

Mặt khác, hệ thức (vii) lại chứng tỏ rằng nếu $\alpha+\gamma\neq\beta+\delta$, cũng tức là $\alpha+\gamma\neq\frac{\pi}{2}$, $\beta+\delta\neq\frac{\pi}{2}$ và do đó $\text{tg}(\beta+\delta)=-\text{tg}(\alpha+\gamma)$. Điều đó nói lên rằng nếu $1-\text{tg}\alpha\text{tg}\gamma=1-\text{tg}\beta\text{tg}\delta\neq0$ thì dẫn đến mâu thuẫn (vì hai vế của (xi) trái dấu nhau). Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\frac{\pi}{2}$, hay $\widehat{A}+\widehat{B}=\widehat{B}+\widehat{D}=\pi$ và $ABCD$ phải là một *tứ giác nội tiếp*. Ta thu được kết luận cần tìm như đã nêu trên.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

VỀ DẤU HIỆU CHIA HẾT CHO 7, CHO 13

NGUYỄN THIỆN
(*Hà Nội*)

Trong bài này trình bày chứng minh dấu hiệu chia hết cho 7, 13 và các thí dụ áp dụng với mong muốn giúp học sinh lớp 6 biết thêm một số dấu hiệu chia hết chưa trình bày trong SGK.

Ta thấy $10^6 - 1 = 9.111111 = 3^3.7.11.13.37$ là số chia hết cho mỗi số 7, 11, 13. Vì vậy để xét một số $K = \overline{a_{6n+6}a_{6n+5}...a_3a_2a_1}$ có chia hết cho 7, 11, 13 hay không có thể quy về xét tổng các số $A_0 + A_1 + ... + A_n$, mỗi số gồm 6 chữ số là

$A_0 = \overline{a_6a_5...a_2a_1}$, $A_1 = \overline{a_{12}a_{11}...a_7}$, ... ,

$A_n = \overline{a_{6n+6}a_{6n+5}...a_{6n+1}}$

có chia hết cho 7, 11, 13 hay không? Thực vậy

$K = A_0 + A_1.10^6 + ... + A_n.10^{6n}$

$= A_0 + A_1 + ... + A_n + A_1(10^6 - 1) + ...$

$+ A_n(10^{6n} - 1) = A_0 + A_1 + ... + A_n + (10^6 - 1)t$

trong đó t là số tự nhiên.

Chú ý rằng nếu các chữ số của số đang xét không là bội của 6 thì có thể thêm các chữ số 0 vào đầu bên trái của số đó.

Bây giờ ta tìm dấu hiệu chia hết cho 7, 13 của số $A = \overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$.

Dấu hiệu chia hết cho 7

Ta thấy

$10 = 7 + 3$; $10^2 = 7.14 + 2$; $10^3 = 7.142 + 6$;

$10^4 = 7.1428 + 4$; $10^5 = 7.14285 + 5$ nên

$A = a_6.10^5 + a_5.10^4 + a_4.10^3 + a_3.10^2$

$+ a_2.10 + a_1$

$= 7t + a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 6a_4 + 4a_5 + 5a_6$ $(t \in \mathbb{N})$

hay $A = 7t + B$

với $B = a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 6a_4 + 4a_5 + 5a_6$.

Kết luận. $A \,\vdots\, 7$ khi và chỉ khi $B \,\vdots\, 7$, hơn nữa A và B khi chia cho 7 có cùng số dư.

Thí dụ 1. Xét số $A = 250430$.

Ta tính được $B = 47$ mà $47 = 7.6 + 5$ nên số 250430 chia cho 7 có dư là 5.

Thí dụ 2. Xét số

$A = 14319748170 = 14319.10^6 + 748\,170 = A_1.10^6 + A_0$.

Tính được $B = B_0 + B_1 = 122 + 46 = 168$ mà $168 \,\vdots\, 7$ nên $A \,\vdots\, 7$.

Dấu hiệu chia hết cho 13

Ta thấy $10^2 = 13.7 + 9$, $10^3 = 13.76 + 12$, $10^4 = 13.769 + 3$, $10^5 = 13.7692 + 4$ nên

$A = a_6.10^5 + a_5.10^4 + a_4.10^3 + a_3.10^2 + a_2.10 + a_1$

$= 13t + a_1 + 10a_2 + 9a_3 + 12a_4 + 3a_5 + 4a_6$ $(t \in \mathbb{N})$

hay $A = 13t + D$

với $D = a_1 + 10a_2 + 9a_3 + 12a_4 + 3a_5 + 4a_6$.

Kết luận: $A \,\vdots\, 13$ khi và chỉ khi $D \,\vdots\, 13$, hơn nữa A và D khi chia cho 13 có cùng số dư.

Thí dụ 3. Xét số $A = 145327$.

Tính được $D = 130$ mà $130 \,\vdots\, 13$ nên $145327 \,\vdots\, 13$.

Thí dụ 4. Xét số $A = 48325$.

Tính được $D = 160 = 13.12 + 4$ nên số 48325 khi chia cho 13 có số dư là 4.

Tương tự như trên ta cũng tìm lại được dấu hiệu chia hết cho 11 như nhiều bạn đã biết.

Cuộc thi vui TOLITI 2006

ĐỀ ĐỢT 2

Bài TOLITI-4. Nhà toán học xếp thế nào ?

Hai mươi người cùng muốn đi du lịch trên sông nhưng thuyền chỉ chở được 10 người. Trong số 20 người đó có 10 nhà toán học. Một nhà toán học đề xuất xếp 20 người thành vòng tròn, sau đó đếm từ chỗ ông ta đứng theo chiều kim đồng hồ. Cứ đến người thứ 7 thì được lên thuyền, những người còn lại đếm bình thường như ban đầu đến người thứ 7 lại được lên thuyền. Hỏi nhà toán học phải xếp chỗ thế nào và ông ta đứng ở đâu để bắt đầu đếm từ chỗ ông ta thì cả 10 nhà toán học đều được lên thuyền ?

Bài TOLITI-5: Tận cùng của vũ trụ

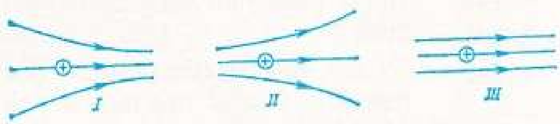
Số 9 là một con số có nhiều điều kì bí. Các nhà vật lí cho rằng con số 9^{9^9} có thể sánh ngang với tổng số electron trong vũ trụ, đó quả là một con số lớn khủng khiếp.

An và Bình đều là những người say mê toán học và biết đến số 9^{9^9} qua cuốn "Vật lí giải trí" của A.I.Perelman. An có một thắc mắc rất tự nhiên: "9^{9^9} đã lớn như vậy thì $9^{9^{9^9}}$ sẽ còn lớn cỡ nào nữa nhỉ?". Hai bạn cho rằng 9^{9^9} và $9^{9^{9^9}}$ ắt phải có những điểm giống nhau, ít ra hai bạn đã thấy rằng chúng có chung chữ số tận cùng.

Bạn có thể chứng minh một khẳng định mạnh hơn rằng 9^{9^9} và $9^{9^{9^9}}$ có chung hai chữ số tận cùng không?

Bài TOLITI-6: Chuyển động của quả cầu

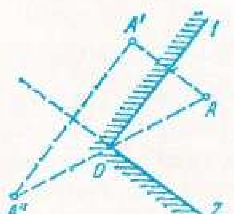
Nếu đặt một quả cầu kim loại tích điện dương vào vị trí bất kì trong các điện trường có phổ đường sức như hình vẽ thì nó sẽ chuyển động về bên phải. Hỏi quả cầu sẽ chuyển động như thế nào nếu như nó không tích điện?



ĐÁP ÁN CÁC BÀI TOLITI ĐỢT I

THÁNG 1 - 2006

Bài TOLITI-1 Soi gương

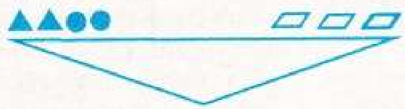


Từ hình vẽ ta thấy, ảnh của A qua gương 1 là A', và ảnh của A' qua gương 2 là A''. Ta cũng sẽ nhận được kết quả như vậy nếu ban đầu lấy ảnh qua gương 2 rồi sau đó lấy ảnh qua gương 1. Vì điểm A và A'' đối xứng với nhau qua gốc O, nên sự đối xứng này vẫn giữ nguyên đối với vật và ảnh qua gương 1 và 2. Cụ thể nếu điểm A ở bên trái của vật thì A'' cũng sẽ ở bên trái của ảnh. Điều này có nghĩa là khi soi gương như trên hình, bên trái và bên phải không đảo ngược với nhau.

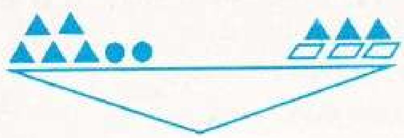
Bài TOLITI-2 Cân các hình

Gấp đôi mỗi bên của hình giả thiết số 1.

Cùng với hình giả thiết số 3 suy ra

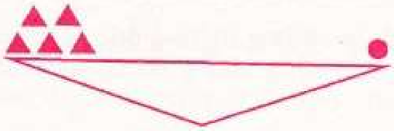


Thêm vào mỗi bên ba hình tam giác



Từ hình giả thiết số 2 suy ra (vì ● = ▲ ▱)

Bớt mỗi bên đi 2 hình tròn.



Kết luận: Một hình tròn thăng bằng với 5 hình tam giác.

Bài TOLITI-3: Phép nhân kì lạ

Đây là thuật toán cổ nhân 2 số tự nhiên.

Mô tả: Giả sử hai số là M, N.

18	~~37~~
9	74
4	~~148~~
2	~~296~~
1	592

	666

Cách viết cột bên trái: Số trên cùng là M. Các số tiếp theo là thương số của số hàng trên chia cho 2. Phép tính dừng lại khi thu được 1.

Cách viết cột bên phải: Số đầu tiên là N. Các số tiếp theo là tích của số trên nhân với 2. Phép tính dừng lại cùng với cột trái.

Tiếp theo: các số tại cột phải tương ứng với số chẵn của cột trái sẽ bị gạch bỏ đi. Tổng các số còn lại của cột phải chính là đáp số của phép nhân kì lạ.

Chứng minh: Có thể lí luận như sau:

Chèn một cột bao gồm các lũy thừa của 2 vào giữa 2 cột trên:

18	2^0	~~37~~
9	2^1	74
4	2^2	~~148~~
2	2^3	~~296~~
1	2^4	592

		666

Dễ dàng chứng minh đẳng thức: (M div 2^K) div $2^L = M$ div 2^{K+L}.

Từ đó theo cách dựng suy ra các số của cột trái chính bằng thương số của M chia cho các số của cột giữa tương ứng, các số của cột phải bằng tích của N với các số cột giữa.

Ta đã biết rằng mỗi số tự nhiên M sẽ được biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$M = 2^{K_1} + 2^{K_2} + ... + 2^{K_s}$$

Với $0 \le K_1 < K_2 < .... < K_S$.

Cũng dễ thấy rằng tương ứng với các chỉ số K_i trong khai triển trên thì số hạng thứ K_i tại cột trái sẽ là số lẻ, các số hạng khác của cột này phải là chẵn. Từ cách dựng ta sẽ có ngay, tổng các số không bị gạch đi của cột phải chính là:

$$N\left(2^{K_1} + 2^{K_2} + ... + 2^{K_s}\right) = N.M$$

Đó chính là đpcm.

Các bạn có lời giải tốt đợt 1 (1-2006):

Bắc Ninh: *Nguyễn Trí Dũng*, 11A1, THPT Thuận Thành I; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Lâm*, 10B Lí, khối PT chuyên ĐHKHTN; **Hà Tĩnh:** *Hồ Thị Quỳnh Nga*, 10 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hải Dương:** *Phan Tiến Thành*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Ninh Bình:** *Phạm Thị Minh Thu*, 11 Lí, THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Nghệ An:** *Nguyễn Khánh Thịnh*, 45A4, THPT chuyên ĐH Vinh; **Lâm Đồng:** *Lê Minh Thuyết*, số nhà 56/24, Thông Thiêm Học, TP. Đà Lạt; **Thái Bình:** *Nguyễn Bình*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Thái Nguyên:** *Chu Tuấn Anh*, 12 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Yên Bái:** *Hoàng Tuấn Linh*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

VŨ KIM - HOÀNG TRỌNG

Giải đáp : CẮT HÌNH VUÔNG...

(Tiếp bìa 4)

...Có $a = AB \ge 3GE + 2r = 4d + 6t$

$\Rightarrow 6t \le a - 4d = 100 - 92 = 8$ (mm).

Chọn $t = 1{,}3$ mm.

Tính được $FH^2 = GF^2 - GH^2 = d^2 - (r+t)^2 =$
$= 23^2 - 12{,}8^2 = 365{,}16 \Rightarrow FH \approx 19{,}109$.

Từ đó

$d + 4FH < 23 + 76{,}44 = 99{,}44 < a = AD$.

Nếu sắp xếp theo kiểu (a) gồm 2 hàng ba hình tròn xen giữa 3 hàng bốn hình tròn thì chỉ được $d = 22$ mm. Nếu sắp xếp theo kiểu (b) (với tâm bốn hình tròn tiếp xúc nhau đôi một tạo thành hình vuông) gồm 6 hàng ba hình tròn thì cũng chỉ được $d = 22$ mm.

2) Với $n = 12$ thì sắp xếp theo kiểu (a) tốt hơn (h. 3). Kẻ $FH \perp GE$.

$$a = AD = 3FH + 2r = (3\sqrt{3}+2)r.$$

$$d = 2r = \frac{2a}{3\sqrt{3}+2} = \frac{2(3\sqrt{3}-2)a}{23} \approx 0{,}277a.$$

Với $a = 100$ mm thì chọn được $d = 27$ mm.

Nếu sắp xếp theo kiểu (b) chỉ được $d = 26$ mm.

PHI PHI

Giải đáp : **Ô CHỮ THÁNG 3**

H	O	N	G	**Q**	U	A	N				
B	A	T	R	**U**	N	G					
			B	**O**	N	M	U	O	I		
H	A	N	G	**C**	H	U	O	I			
		B	A	**T**	R	I	E	U			
			B	**E**	P						
H	A	N	H	**P**	H	U	C				
			T	**H**	O	I	T	R	A	N	G
				U	T	T	I	C	H		
		C	O	**N**	C	A	I				
		G	I	**U**	H	A	I	H	O	A	

Dòng 1: Một cách gọi phụ nữ theo lối cổ: HỒNG QUẦN.

Dòng 2: Người anh hùng dân tộc quê ở Châu Phong: BÀ TRƯNG.

Dòng 3: Năm của cuộc khởi nghĩa đầu tiên của Việt Nam ghi được trong sử sách: BỐN MƯƠI.

Dòng 4: Phố đặt trụ sở báo Phụ nữ Việt Nam: HÀNG CHUỐI.

Dòng 5: Người phụ nữ muốn đạp sóng dữ, chém cá kình ở biển Đông: BÀ TRIỆU.

Dòng 6: Vắng đàn ông quạnh nhà, vắng đàn bà quạnh BẾP.

Dòng 7: Ước mơ lớn của phái đẹp: HẠNH PHÚC.

Dòng 8: Niềm quan tâm của đa số bạn nữ: THỜI TRANG

Dòng 9: Người phụ nữ nổi tiếng thời kháng chiến 1954 - 1975: ÚT TỊCH

Dòng 10: Niềm vui và tài sản lớn nhất của phụ nữ: CON CÁI.

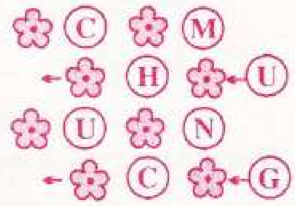
Dòng 11: Để cân bằng giữa công việc và gia đình: GIỮ HÀI HÒA.

Ô chữ hàng dọc : **QUỐC TẾ PHỤ NỮ.**

Giải đáp:

XẾP CHỮ CHÚC MỪNG

Ta nhấc chữ **U** và chữ **G** ở cột đầu tiên lần lượt đặt vào cuối hàng 2 và hàng 4 rồi đẩy sang trái bằng chính các tấm bìa **U** và **G** đó. Chúng sẽ đẩy những tấm khác. Như vậy Hà chỉ cần nhấc lên 2 lần, mỗi lần 1 tấm bìa rồi dùng nó đẩy những tấm khác đúng 1 lần là được như cũ có cột hai và cột bốn sắp được CHÚC MỪNG



Nhận xét. Các bạn sau được quà tặng của Tòa soạn: **Hà Nội:** *Nguyễn Kiều Nga*, 10A2, THPT chuyên ĐHSP, *Trần Đình Vinh*, 11A1, THPT Ngọc Hồi, Thanh Trì; **Hải Dương:** *Trương Thị Hải Yến*, 10E, Trung tâm GDTX Thanh Miện; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Minh*, 10A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh.

VŨ THANH THÀNH

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn sau:

Bắc Ninh: *Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Vũ Thị Lan Anh*, 11C, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bắc Giang:** *Nguyễn Mạnh Khôi*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội :** *Lưu Bích Ngọc*, 10A5, THPT Lương Thế Vinh, Q. Cầu Giấy; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Vân*, 11A1, THPT Đông Sơn 1 và *Nguyễn Thị Hồng Nhung*, 9A1, THCS Lê Thanh Nghị (?).

Các bạn được nhận quà tặng của Tòa soạn.

BNH

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 346 (4-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

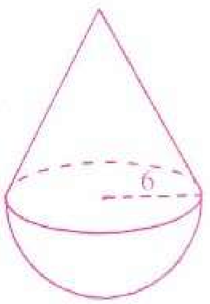
ENGLISCH THROUGH MATH PROBLEMS AND SOLUTIONS

UNIT 3

Problem

A child's toy is formed by joining the plane face of a solid hemisphere of radius 6 cm to the base of a solid cone of radius 6 cm, as shown in the diagram. In this question take π to be 3.142.

The volume of a sphere of radius r is $\frac{4}{3}\pi r^3$.



The volume of a cone is $\frac{1}{3}$ base area × height.

a) Find the volume of the hemisphere.

b) The volume of the cone is 408 cm^3. Find its height.

c)The hemisphere is made of metal alloy which has a density of 1.1 grams per cubic centimetre.

The cone is made of wood which has a density of 0.8 grams per cubic centimete. Find the total mass of the toy.

d) The hemispherical bases of a number of these toys are formed by melting down a solid cylinder of the alloy of radius 8 cm and length 24 cm. Find the number of complete hemispheres that can be made from the cylinder.

Vocabulary

child's toy	đồ chơi trẻ con
join	nối liền
face	mặt
solid	khối
hermisphere	bán cầu
base	đáy
cone	hình nón
diagram	hình, biểu đồ
volume	thể tích
sphere	hình cầu
height	đường cao
metal	kim loại
metal alloy	hợp kim
wood	gỗ
density	khối lượng riêng, mật độ
melting down	nấu chảy
cylinder	hình trụ
length	chiều dài
complete	trọn vẹn, đầy đủ

Solution. (Chờ các bạn gửi về).

VŨ KIM THỦY

SOLUTION OF PREVIOUS ISSUE

UNIT 2

a) The modal score was 1.

b) Because 27 is an odd number so median score was the score of the 14^{th} throw. Deduce the score which was on the 14^{th} throw was 2. But the sum of all frequencies of 1 and 2 scores were 14.

Therefore, the least possible score which was on the 28^{th} throw was 3.

c) The total scores on the extra two throws $= 3 \times 30 - (1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 6 + 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 2) = 12$.

Let the score on the extra two throws are a and b. We have $a \le 6$, $b \le 6$, $a + b = 12$.

Therefore $a = b = 6$.

∴ The scores on the extra two throws are 6 and 6.

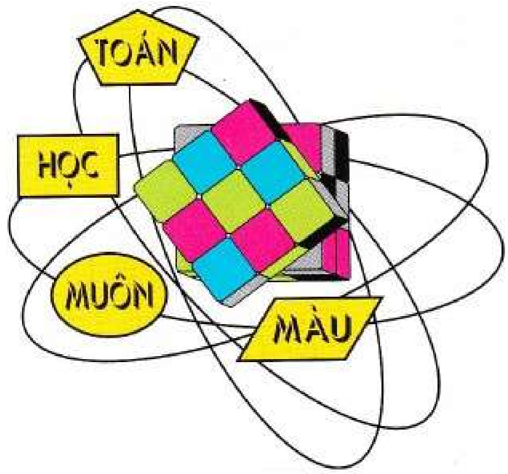
Nhận xét. 1) Vẫn có bạn nhầm điểm mốt (đa tần) với tần số khi trả lời câu a) là 8.

2) Nhiều bạn lập luận ở câu b) chưa rõ.

3) Các bạn sau có lời giải tốt, gửi bài sớm, được nhận quà tặng:

Nguyễn Thu Thủy, 9I, THCS Lê Hồng Phong, *Lê Huyền Mai*, 9D, THCS Yên Thịnh, TP. Yên Bái, **Yên Bái**; *Nguyễn Thị Thanh Hà*, 12A7, THPT Lương Sơn, **Hòa Bình**; *Trần Văn Ngọc Tân*, 11/1, THPT Hoàng Diệu, Điện Bàn, **Quảng Nam**; *Nguyễn Ngọc Kỳ Nam*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa.**

VŨ ĐỖ QUAN

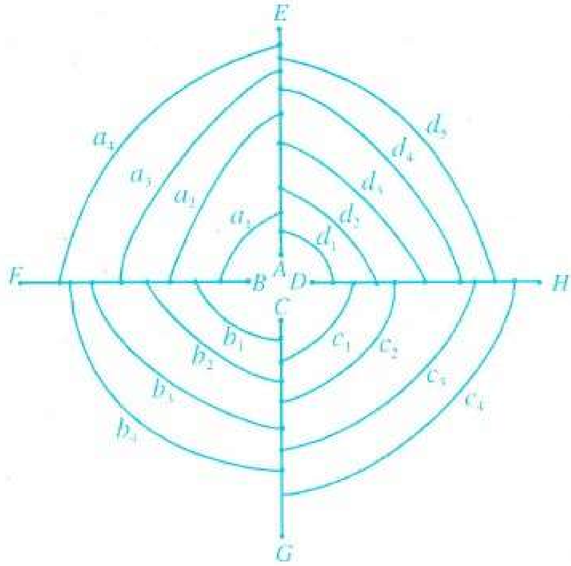


ĐƯỜNG CHUYỂN HÀNG

Trong một nhà máy người ta thiết lập một hệ thống đường chuyển hàng tự động từ các cửa trong A, B, D, C đi qua một số vị trí để hoàn thiện sản phẩm rồi đến các cửa ngoài E, F, G, H. Hàng được chuyển theo các đường chính AE, BF, CG, DH và các đường nhánh a_i (i = 1, 2, 3, 4), b_j (j = 1, 2, 3, 4), c_h (h = 1, 2, 3, 4), d_k (k = 1, 2, 3, 4, 5) mà không có ngã tư nào như ở hình 1 và theo các quy tắc sau:

1) Trên các đường chính phải chuyển theo một chiều từ trong ra ngoài và nếu gặp đường nhánh đầu tiên thì phải rẽ ngay theo đường nhánh đó.

2) Trên các đường nhánh được chuyển theo một trong hai chiều (hoặc đi hoặc về nhưng không quay lại).



Hình 1

Chẳng hạn đường chuyển hàng xuất phát từ cửa trong B được ghi theo công thức $a_1d_2c_2b_3b_4c_4$ và hàng đến cửa H (h. 1).

Dành cho bạn đọc

Giả sử hệ thống đường chuyển hàng ở hình 1 phát triển thêm các đường nhánh a_i, b_j, c_h, d_k với i, j, h, k chạy từ 1 đến 7.

1) Biết công thức một đường chuyển hàng (không ghi chỉ số) là *dabcddabcdabcdabb*. Hãy xác định xem hàng xuất phát từ cửa nào và đến cửa nào? Giải thích cách tìm.

2) Chứng minh rằng nếu hàng xuất phát từ hai cửa trong khác nhau thì đến hai cửa ngoài khác nhau.

Giải đáp : CẮT HÌNH VUÔNG ĐƯỢC CÁC HÌNH TRÒN BẰNG NHAU

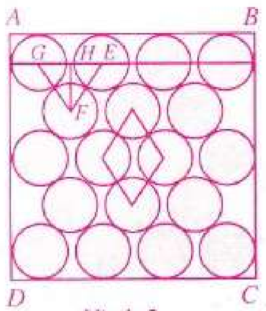
Để giảm bớt khoảng trống thì các hình tròn phải tiếp xúc nhau. Xảy ra hai kiểu sắp xếp:

a) Ba hình tròn tiếp xúc nhau từng đôi một, lúc đó các đoạn nối các cặp tâm tạo thành tam giác đều.

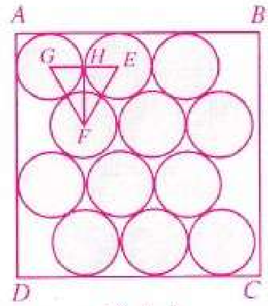
b) Bốn hình tròn tiếp xúc nhau từng đôi một, lúc đó các đoạn nối các cặp tâm đường tròn tiếp xúc nhau tạo thành hình thoi, trường hợp riêng là hình vuông.

1) Với $n = 18$ thì sắp xếp theo kiểu (b) tốt hơn (h. 2). Chọn $d = 2r = 23$ mm.

Đặt $GE = 2r + 2t = d + 2t$. Kẻ $FH \perp GE$...



Hình 2



Hình 3

(Xem tiếp trang 30)

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT48M6

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2006

Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng