NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

TẬP 2

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN XUÂN LIÊM

GIẢI TÍCH

TẬP HAI

GIÁO TRÌNH LÍ THUYẾT VÀ BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

11 – 2007/CXB/218 – 2119/GD

Mã số : 7K280T7 – DAI

Chương VII

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Trong chương này, ta sẽ ứng dụng đạo hàm và tích phân để nghiên cứu các tính chất của các đường trong mặt phẳng và các đường, các mặt trong không gian.

§1. ĐƯỜNG THAM SỐ TRONG MẶT PHẲNG

1.1. Định nghĩa. Giả sử T là một tập hợp số thực ($T \subset \mathbf{R}$). Ánh xạ $M : t \longmapsto M(t)$ từ tập hợp T vào mặt phẳng gọi là một *đường tham số phẳng*.

Tập hợp $\Gamma = M(T) = \{M(t) : t \in T\}$ gọi là giá của đường tham số.

Nếu T là một đoạn $[a, b]$ và ánh xạ M liên tục thì đường tham số được gọi là cung tham số, $M(a)$ và $M(b)$ được gọi là hai điểm đầu của cung, $M(a)$ là điểm gốc, $M(b)$ là điểm cuối của cung. Nếu $M(a) = M(b)$ thì cung được gọi là *kín*.

Biến số t được gọi là tham số.

1.2. Trong mặt phẳng ta chọn một hệ tọa độ Đềcác vuông góc $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Khi đó điểm $M(t)$ có các tọa độ $x(t)$ và $y(t)$: $M(t) = (x(t), y(t))$; $t \longmapsto x(t)$ và $t \longmapsto y(t)$ là hai hàm số thực xác định trên tập hợp T.

Ta nói rằng đường tham số được xác định bởi các phương trình $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Người ta cũng gọi tập hợp $\Gamma = M(T)$ là đường với biểu diễn tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$.

Đường tham số gọi là liên tục nếu $M : t \mapsto M(t)$ là một ánh xạ liên tục trên T. Đường tham số là liên tục khi và chỉ khi các hàm số $t \mapsto x(t)$ và $t \mapsto y(t)$ đều liên tục trên T.

Đường tham số gọi là thuộc lớp C^1 nếu ánh xạ $t \mapsto M(t)$ có đạo hàm liên tục trên T. Đường tham số thuộc lớp C^1 khi và chỉ khi các hàm số $t \mapsto x(t)$ và $t \mapsto y(t)$ đều thuộc lớp C^1 trên T.

Ví dụ 1. Giả sử $f : T \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên tập hợp $T \subset \mathbf{R}$. Đồ thị Γ của hàm số f có biểu diễn tham số là

$$x = t,\ y = f(t),\ t \in T.$$

Ví dụ 2. Giả sử a, b, x_o, y_o là những số thực, $a^2 + b^2 > 0$.

Các phương trình

$$x = x_o + at,\ y = y_o + bt,\ t \in \mathbf{R}$$

là biểu diễn tham số của đường thẳng đi qua điểm (x_o, y_o) với vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a, b)$.

Ví dụ 3. Cho elip E : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Đặt $\cos t = \dfrac{x}{a}$, $\sin t = \dfrac{y}{b}$, ta được biểu diễn tham số của E

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Ví dụ 4. Cho hypebôn H : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Ta viết phương trình của H dưới dạng :

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1.$$

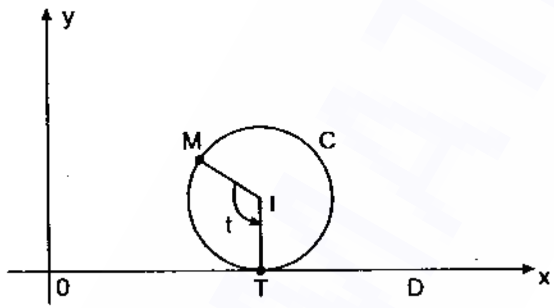
Điểm M(x, y) nằm trên H khi và chỉ khi tồn tại một số thực t sao cho :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t,\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Từ đó ta được biểu diễn tham số của hypebôn H :

$$x = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2}b\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Ví dụ 5. Cho đường tròn C bán kính R > 0 lăn không trượt trên đường thẳng D. Gọi M là một điểm của C cố kết với C. Quỹ đạo của điểm M khi đường tròn C lăn gọi là một đường xiclôit.



Hình 1

Giả sử lúc xuất phát, điểm M ở vị trí của điểm O trên đường thẳng D. Chọn hệ trục tọa độ Đềcác trực chuẩn Oxy như trong hình vẽ. Gọi I là tâm đường tròn C, T là tiếp điểm của C và D t là góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IT}$, $\widehat{(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IT})} = t$. Khi đó

$$\widehat{(\overrightarrow{IT}, \overrightarrow{IM})} = -t, \ \overline{OT} = Rt.$$

Ta có I(Rt, R) và

$$\widehat{(Ox, \overrightarrow{IM})} = \widehat{(Ox, Oy)} + \widehat{(Oy, \overrightarrow{IT})} + \widehat{(\overrightarrow{IT}, \overrightarrow{IM})} = -\frac{\pi}{2} - t.$$

Do đó các tọa độ của vectơ $\overrightarrow{IM}$ là : $x = R\cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) =$ $= -R\sin t$, $y = R\sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) = -R\cos t$. Từ đó suy ra biểu diễn tham số của đường xiclôit :

$$x = R(t - \sin t), \ y = R(1 - \cos t).$$

1.3. Tiếp tuyến

Định lí. Giả sử Γ là đường cong với biểu diễn tham số

$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in (\alpha, \beta)$

và đường cong tham số $t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t))$ có đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq \overrightarrow{0}$ tại điểm $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Khi đó Γ có tiếp tuyến tại điểm $M_0 = M(t_0)$ với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{M}'(t_0)$.

Chứng minh. Ta có

$$\overrightarrow{M}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Do đó $M(t) \neq M_0$ với $|t - t_0| > 0$ đủ nhỏ. Cát tuyến $M_0M(t)$ có vectơ chỉ phương là $\dfrac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{t - t_0}$, vectơ này dần đến $\overrightarrow{M}'(t_0)$ khi $t \to t_0$. Vậy đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{M}'(t_0)$ là tiếp tuyến tại điểm M_0 của đường cong Γ. □

1.4. Biểu diễn tham số của tiếp tuyến M_0T là

$$x = x_0 + x'(t_0)\lambda,\ y = y_0 + y'(t_0)\lambda,$$
$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0).$$

1.5.* Giả sử đường cong tham số $t \longmapsto M(t)$ có các đạo hàm cấp p tại t_0 và

$$\overrightarrow{M}'(t_0) = \overrightarrow{M}''(t_0) = \dots = \overrightarrow{M}^{(p-1)}(t_0) = 0,\ \overrightarrow{M}^{(p)}(t_0) \neq 0.$$

Khi đó, theo công thức Taylo-Iang, ta có

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = \frac{(t - t_0)^p}{p!} (\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0) + \overrightarrow{0}(1)) \quad (t \to t_0).$$

Do đó $M(t) \neq M_0$ với $|t - t_0| > 0$ đủ nhỏ và cát tuyến $M_0M(t)$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0) + \overrightarrow{0}(1)$, vectơ này dần đến

$\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0)$ khi $t \to t_0$. Vậy đường thẳng M_0T đi qua điểm M_0 và song song với vectơ $\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0)$ là tiếp tuyến tại M_0 của Γ.

1.6.* Dạng của đường cong trên lân cận của một điểm của nó

Giả sử đường cong tham số $t \mapsto M(t)$ có các đạo hàm đến cấp q trên một lân cận của điểm t_0, p là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0) \neq 0$ và q là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn p sao cho $\overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)$ không cùng phương với $\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0)$. Đặt

$$\overrightarrow{M^{(p)}}(t_0) = \vec{e}, \quad \overrightarrow{M^{(q)}}(t_0) = \vec{f},$$

Khi đó $\overrightarrow{M^{(k)}}(t_0) = \lambda_k \vec{e}$, $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $k = p + 1, \dots, q - 1$. Áp dụng công thức Taylo–Iang được

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0 + h)} = \frac{h^p}{p!}\vec{e} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1}\vec{e} + \dots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\lambda_{q-1}\vec{e} + \frac{h^q}{q!}(\vec{f} + \vec{0}(1)) \qquad (h \to 0)$$

$$= \frac{h^p}{p!}(1 + 0(1))\vec{e} + \frac{h^q}{q!}(\vec{f} + \vec{0}(1)) \qquad (h \to 0)$$

Trong hệ tọa độ $(M(t_0), \vec{e}, \vec{f})$ điểm $M(t_0 + h)$ có các tọa độ

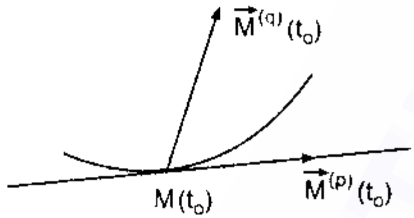
$$\xi = \frac{h^p}{p!}(1 + 0(1)), \quad \eta = \frac{h^q}{q!}(1 + 0(1)).$$

Ta gặp các trường hợp sau :

1° p lẻ, q chẵn.

Khi đó với $|h| > 0$ đủ nhỏ, ξ có cùng dấu với h và $\eta > 0$. Trên một lân cận đủ nhỏ của điểm t_0, đường cong Γ và vectơ $\overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)$ nằm về cùng một phía đối với tiếp tuyến tại điểm $M(t_0)$

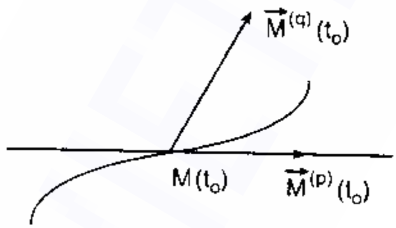
và xuyên qua đường thẳng qua $M(t_0)$ và song song với vectơ $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ (hình 2)



Hình 2

2° p lẻ, q lẻ.

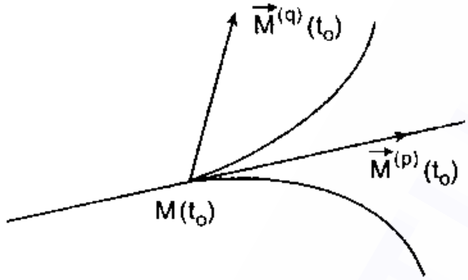
Khi đó với $|h| > 0$ đủ nhỏ, ξ và η có cùng dấu với h. Đường cong Γ xuyên qua tiếp tuyến tại điểm $M(t_0)$ và xuyên qua đường thẳng qua $M(t_0)$ và song song với vectơ $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ (hình 3). Ta gọi $M(t_0)$ là một điểm uốn của đường cong.



Hình 3

3° p chẵn, q lẻ

Khi đó, với $|h| > 0$ đủ nhỏ, $\xi > 0$ và η có cùng dấu với h. Đường cong Γ đi qua tiếp tuyến tại điểm $M(t_0)$ và ở về một phía của đường thẳng qua điểm $M(t_0)$ và song song với vectơ $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ (hình 4). Ta gọi $M(t_0)$ là một điểm lùi loại 1 của đường cong.



Hình 4

4° p chẵn, q chẵn

Khi đó, với $|h| > 0$ đủ nhỏ, $\xi > 0$ và $\eta > 0$. Đường cong Γ nằm về một phía của tiếp tuyến tại điểm $M(t_0)$ và nằm về một phía của đường thẳng đi qua điểm $M(t_0)$ và song song với vectơ $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ (hình 5). Ta gọi $M(t_0)$ là một điểm lùi loại 2 của đường cong.

Hình 5

1.7. Tiệm cận

a) Ta nói rằng đường cong Γ có nhánh vô tận khi $t \to t_0$ nếu khoảng cách từ điểm $M(t)$ đến điểm gốc O của hệ tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dần đến $+\infty$ khi $t \to t_0$. (Tất nhiên có thể thay điểm O bởi một điểm cố định bất kì của mặt phẳng).

Gọi $x(t)$ và $y(t)$ là các tọa độ của điểm $M(t)$. Đường cong Γ có nhánh vô tận khi $t \to t_0$ nếu và chỉ nếu ít nhất một trong hai hàm số $|x|$, $|y|$ có giới hạn $+\infty$ khi $t \to t_0$.

b) Hiển nhiên nếu $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ và $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$ thì $x = x_0$ là tiệm cận của Γ. Nếu $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$ thì $y = y_0$ là tiệm cận của Γ.

Giả sử $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m$.

Khi đó :

1° Nếu $m = 0$ thì ta nói rằng nhánh vô tận của đường cong Γ có phương tiệm cận là phương của Ox. Ta cũng nói rằng đường cong Γ có nhánh parabôn theo phương của Ox (có tên gọi như vậy vì nhánh vô tận của một parabôn với trục Ox cũng có phương tiệm cận là phương của Ox).

2° Nếu $m = \pm\infty$ thì ta nói rằng nhánh vô tận của Γ có phương tiệm cận là phương của Oy hoặc Γ có nhánh parabôn theo phương của Oy.

3° Cuối cùng giả sử m hữu hạn và khác 0.

- Nếu $\lim\limits_{t \to t_0} [y(t) - mx(t)] = p \in \mathbf{R}$ thì đường thẳng $y = mx + p$ là tiệm cận của Γ.

- Nếu $\lim\limits_{t \to t_0} [y(t) - mx(t)] = \pm\infty$ thì ta nói rằng nhánh vô tận của Γ có phương tiệm cận là phương của đường thẳng Δ với độ dốc m hoặc Γ có nhánh parabôn theo phương có độ dốc m.

c) Đặc biệt, nếu $x(t)$ và $y(t)$ được biểu diễn dưới dạng

$$x(t) = \frac{a}{t - t_0} + b + 0(1),\ y(t) = \frac{c}{t - t_0} + d + 0(1) \quad (t \to t_0)$$

trong đó a, b, c, d, là những hằng số và a, c không đồng thời bằng 0 thì điểm

$$N(t) = \left(\frac{a}{t - t_0} + b \ , \ \frac{c}{t - t_0} + d \right)$$

nằm trên đường thẳng Δ với biểu diễn tham số

$$x = a\lambda + b, \ y = c\lambda + d$$

và khoảng cách giữa hai điểm M(t) và N(t) dần đến 0 khi $t \to t_0$. Do đó Δ là tiệm cận của đường cong Γ. Vì khoảng cách từ điểm M(t) đến đường thẳng Δ dần đến 0 khi $t \to t_0$.

1.8. Tính lồi, lõm của đường cong

Có thể sử dụng 1.5 để xét tính lồi, lõm của đường cong. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp có thể sử dụng nhận xét sau : Giả sử hàm số $t \longmapsto x(t)$ đơn điệu nghiêm ngặt trên khoảng I và có đạo hàm khác không trên khoảng này. Khi đó nó có hàm số ngược $x \longmapsto t = \varphi(x)$ trên khoảng x(I) và có đạo hàm $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x'(t)}$. Trên khoảng x(I) ta có $y = y[\varphi(x)]$. Nếu hàm số $t \longmapsto y(t)$ có đạo hàm thì hàm số y có đạo hàm theo x và $y_x' = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

chính là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M(t), $t \in I$. Giả sử hàm số $t \longmapsto m(t)$ có đạo hàm trên I. Khi đó

Đường cong Γ ứng với t ∈ I (tức là tập hợp $\{M(t) = (x(t), y(t)) : t \in I\}$) là lồi khi và chỉ khi $x'(t)m'(t) \geqslant 0$ với mọi $t \in I$.

Thật vậy, ta có $y_x' = m(t) = m[\varphi(x)]$. Do đó

$$y''_{x^2} = m'(t)\varphi'(x) = \frac{m'(t)}{x'(t)} .$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Tương tự, đường cong Γ ứng với $t \in I$ là lõm khi và chỉ khi $x'(t)m'(t) \leqslant 0$ với mọi $t \in I$.

1.9. Khảo sát và dựng đường cong tham số

Để vẽ đường cong với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

ta khảo sát đồng thời hai hàm số x và y theo các bước sau :

1° Tìm tập hợp xác định của các hàm số x và y.

2° Xét tính tuần hoàn, chẵn hoặc lẻ của hai hàm số đó.

3° Xét chiều biến thiên của hai hàm số x, y (xét dấu x' và y').

4° Xác định các điểm đặc biệt và các tiếp tuyến (nếu có) của đường cong tại các điểm đó.

5° Xét các nhánh vô tận.

6° Xét tính lồi lõm của đường cong.

Ví dụ 1. Vẽ đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = t + \frac{1}{t},\ y = t + \frac{1}{2t^2}$$

1° Hai hàm số x, y xác định với $t \neq 0$.

2° Hàm số $t \longmapsto x(t)$ lẻ. Hàm số $t \longmapsto y(t)$ không chẵn, không lẻ.

3° Ta có

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}\ ;\ y'(t) = 1 - \frac{1}{t^3} = \frac{t^3 - 1}{t^3}.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'(t)		+	0	−	‖	−	0	+	
x	$-\infty$ ↗		-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$
y'(t)		+	|	+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$ ↗			↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3/2	↗	$+\infty$

4° Với $t \neq 0$ và $t \neq 1$, $x'(t)$ và $y'(t)$ không đồng thời bằng 0. Do đó Γ có tiếp tuyến tại điểm M(t). Hệ số góc của tiếp tuyến tại M(t) là

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 1 + \frac{1}{t(t+1)}, \ t \neq 0 \text{ và } t \neq 1.$$

$|m(t)| \to +\infty$ khi $t \to -1$.

Ta xét xem với $t = 1$, đường cong Γ có tiếp tuyến hay không. Ta có

$$x''(t) = \frac{2}{t^3}\ ;\ y''(t) = \frac{3}{t^4}, \text{ do đó } x''(1) = 2,\ y''(1) = 3.$$

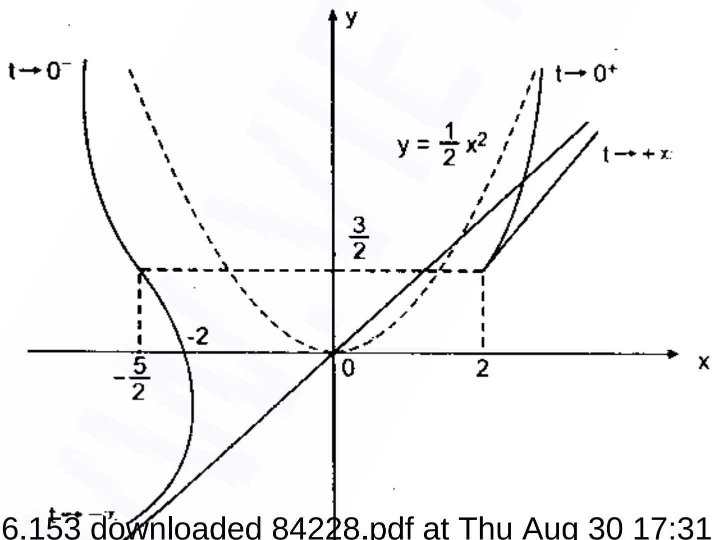
Tiếp tuyến của Γ tại điểm $M(1) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$ có hệ số góc $\frac{3}{2}$. Vì vectơ $\overrightarrow{M}'''(1) = (-6, -12)$ không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}''(1) = (2, 3)$ nên M(1) là điểm lùi loại 1.

5° Bảng biến thiên cho thấy Γ có các nhánh vô tận khi $t \to +\infty$, $t \to -\infty$, $t \to 0^+$ và $t \to 0^-$.

Khi $t \to \pm\infty$, ta có

$$x(t) = t + 0(1),\ y(t) = t + 0\,(1).$$

Do đó Γ có tiệm cận là đường thẳng với biểu diễn tham số $x = t$, $y = t$, tức là đường thẳng $y = x$.



Hình 6

Khi $t \to 0^+$, ta có $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to +\infty$, khi $t \to 0^-$, ta có $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to -\infty$. Do đó đường cong Γ có hai nhánh parabôn theo phương của Oy.

Gọi N(t) là điểm có hoành độ là $\dfrac{1}{t}$, tung độ là $\dfrac{1}{2t^2}$: $N(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{2t^2}\right)$. Khoảng cách giữa hai điểm M(t) và N(t) dần đến 0 khi $t \to 0$. Dễ dàng thấy rằng điểm N(t) nằm trên parabôn $y = \dfrac{1}{2}x^2$. Người ta cũng nói rằng parabôn $y = \dfrac{1}{2}x^2$ là tiệm cận của Γ.

6° Để xét tính lồi lõm của Γ, ta xét dấu tích $m'(t)x'(t)$. Ta có

$$m'(t) = -\frac{2t+1}{(t^2+t)^2},$$

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$m'(t)$		+	‖	+	0	−	‖	−	|	−	
$x'(t)$		+	0	−	|	−	‖	−	0	+	
$m'(t)x'(t)$		+	0	−	0	+	‖	+	0	−	
Γ		lồi	|	lõm	|	lồi	‖	lồi	|	lõm	

Đường cong Γ lồi (tức là quay bề lõm về phía trên) trên các khoảng $(-\infty, -1]$, $\left[-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1]$ và lõm (tức là quay bề lõm về phía dưới) trên các khoảng $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$ và $[1, +\infty)$.

Ví dụ 2. (Đường axtrôit). Khảo sát và dựng đường cong với biểu diễn tham số :

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ a > 0.$$

1° Hai hàm số x, y xác định với mọi $t \in \mathbf{R}$.

2° Đó là hai hàm số tuần hoàn với chu kì 2π ; hàm số $t \longmapsto x(t) = a\cos^3 t$ chẵn, hàm số $t \longmapsto y(t) = a\sin^3 t$ lẻ. Do đó Γ đối xứng qua trục hoành. Do $x(\pi - t) = -x(t)$, $y(\pi - t) = y(t)$, Γ đối xứng qua trục tung.

3° Ta có

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Bảng biến thiên

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
x'(t)	0	+	0	+	0	−	0	−	0
x	−a		0		a		0		−a
y'(t)	0	−	0	+	0	+	0	−	0
y	0		−a		0		a		0

4° Ta có

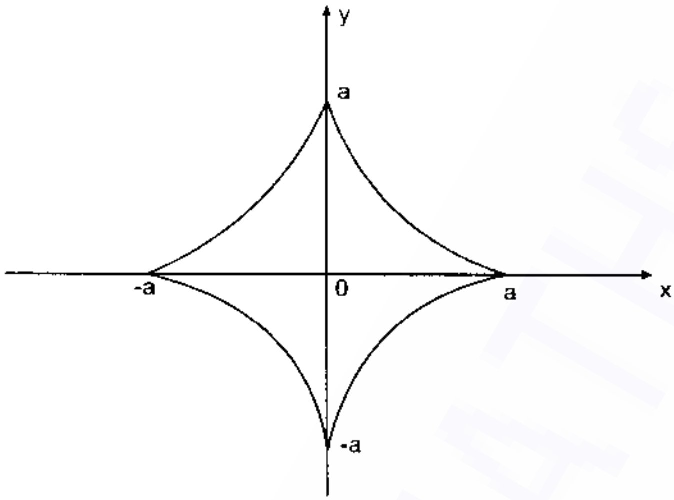
$x''(t) = -3a\cos^3 t + 6a\cos t\sin^2 t$; $y''(t) = -3a\sin^3 t + 6a\sin t\cos^2 t$.
$x''(-\pi) = x''(\pi) = 3a$; $y''(-\pi) = y''(\pi) = 0$.

Tiếp tuyến của Γ tại các điểm $M(-\pi)$ và $M(\pi)$ song song với vectơ $(3a, 0)$, tức là trục hoành là tiếp tuyến của Γ tại điểm $(-a, 0)$.

$x''(0) = -3a$, $y''(0) = 0$. Do đó trục hoành là tiếp tuyến của Γ tại điểm $M(0) = (a, 0)$.

$$x''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ ;\ y''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3a,\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3a.$$

Do đó trục tung là tiếp tuyến của Γ tại các điểm $M\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -a)$ và $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, a)$. Đường cong có 4 điểm lùi loại 1 : $(\pm a, 0)$ và $(0, \pm a)$.



Hình 7

5° Ta có

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\operatorname{tg} t \; ; \; m'(t) = -\frac{1}{\cos^2 t} \; ;$$

$$m'(t)x'(t) = 3a\sin t.$$

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$m'(t)x'(t)$		−		−		+		+	
Γ		lõm	|	lõm	|	lồi	|	lồi	

Trên các khoảng $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ và $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ Γ quay bề lõm về phía dưới. Trên các khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ và $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ đường cong Γ quay bề lõm về phía trên.

Ví dụ 3. Dựng đường xiclôit mà biểu diễn tham số là

$$x = R(t - \sin t), \; y = R(1 - \cos t)$$

(xem ví dụ 5 sau 1.1).

1° Các hàm số x, y xác định với mọi $t \in \mathbf{R}$.

2° Ta có

$$x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi R, \; y(t + 2\pi) = y(t).$$

Do đó điểm $M(t + 2\pi)$ nhận được từ điểm $M(t)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $(2\pi R, 0)$. Vậy chỉ cần vẽ đường cong trong khoảng biến thiên của t có độ dài 2π. Ngoài ra, ta có

$$x(-t) = -x(t), \; y(-t) = y(t).$$

Do đó đường cong đối xứng qua trục tung. Ta sẽ dựng đường cong trên đoạn biến thiên $[0, \pi]$ của t. Từ đó dễ dàng có được toàn bộ đường cong.

3° Ta có

$$x'(t) = R(1 - \cos t), \; y'(t) = R\sin t.$$

t	0		π
x'(t)	0	+	
x(t)	0		πR
y'(t)	0	+	
y(t)	0		2R

4° Với t = 0, ta có $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$; $x''(0) = 0$, $y''(0) = R$.

Do đó trục tung là tiếp tuyến của Γ tại điểm $M(0) = (0, 0)$; M(0) là một điểm lùi loại 1 của đường cong.

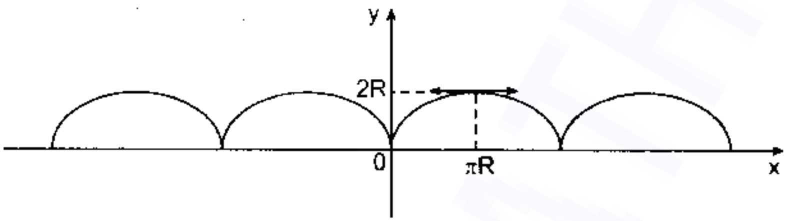
5° Để xét tính lồi, lõm của Γ, ta xét dấu $m'(t)x'(t)$.

Ta có

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{cotg}\frac{t}{2},$$

$$m'(t) = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} < 0 \text{ với mọi } t \in (0, \pi)$$

Vì $x'(t) > 0$ với mọi $t \in (0, \pi)$ nên $m'(t)x'(t) < 0$ với mọi $t \in (0, \pi)$. Do đó đường cong Γ lõm trên khoảng biến thiên $[0, \pi]$ của t, (tức là Γ quay bề lõm về phía dưới).



Hình 8

§2. ĐƯỜNG THAM SỐ TRONG KHÔNG GIAN

Đường tham số trong không gian được định nghĩa tương tự như đường tham số phẳng.

2.1. Định nghĩa. Giả sử T là một tập hợp số thực ($T \subset \mathbf{R}$). Ánh xạ $M : t \longmapsto M(t)$ từ T vào không gian gọi là một *đường tham số trong không gian.*

Tập hợp $\Gamma = M(T) = \{M(t) : t \in T\}$ gọi là giá của đường tham số M. Cung tham số và cung kín trong không gian được định nghĩa như trong §1. Biến số t được gọi là tham số.

2.2. Trong không gian ta chọn một hệ trục tọa độ Đêcác vuông góc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Khi đó điểm M(t) có các tọa độ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$: $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$; $t \longmapsto x(t)$, $t \longmapsto y(t)$, $t \longmapsto z(t)$ là ba hàm số thực xác định trên T.

Ta nói rằng đường tham số M được xác định bởi các phương trình

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Người ta cũng gọi tập hợp $\Gamma = M(T)$ là đường trong không gian với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in T.$$

Đường tham số trong không gian liên tục, có đạo hàm, thuộc lớp C^1 được định nghĩa tương tự như trong §1.

Ví dụ 1. Các phương trình

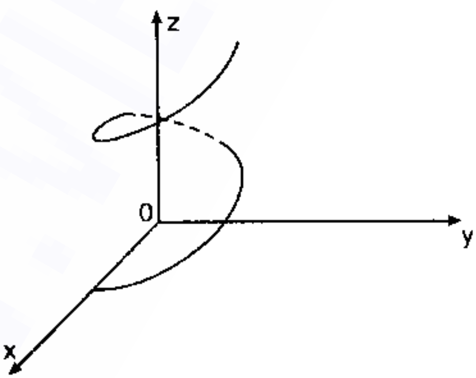
$$x = x_o + lt,\ y = y_o + mt,\ z = z_o + nt,\ t \in \mathbf{R}$$

trong đó x_o, y_o, z_o, l, m, n là những số thực, $(l, m, n) \neq (0, 0, 0)$ là biểu diễn tham số của đường thẳng đi qua điểm (x_o, y_o, z_o) với vectơ chỉ phương (l, m, n).

Ví dụ 2. Các phương trình

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in [0, 2\pi]$$

là biểu diễn tham số của cung của đường xoắn ốc (trên mặt trụ tròn xoay).



Hình 9

Tiếp tuyến của đường cong trong không gian được xác định tương tự như tiếp tuyến của đường cong phẳng.

2.3. Định lí. Giả sử Γ là đường cong với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I,$$

I là một khoảng trong **R**. Nếu đường cong tham số $t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ có đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t_o) = (x'(t_o), y'(t_o), z'(t_o)) \neq 0$ tại $t_o \in I$ thì Γ có tiếp tuyến tại điểm $M(t_o)$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$.

2.4. Nếu đường cong tham số $t \longmapsto M(t)$ có đạo hàm cấp p tại điểm $t_o \in I$ và

$$\overrightarrow{M}'(t_o) = \overrightarrow{M}''(t_o) = \dots = \overrightarrow{M}^{(p-1)}(t_o) = 0 \text{ và } \overrightarrow{M}^{(p)}(t_o) \neq 0$$

thì đường cong $\Gamma = M(I)$ có tiếp tuyến tại điểm $M(t_o)$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_o)$.

2.5. Giả sử $t \longmapsto M(t)$, $t \in I$ là một đường cong tham số trong không gian. Nếu đường cong $\Gamma = M(I)$ có tiếp tuyến Δ tại điểm $M(t_o)$ thì mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm $M(t_o)$ gọi là *pháp diện* của Γ tại điểm $M(t_o)$. Một đường thẳng bất kì vuông góc với tiếp tuyến Δ tại điểm $M(t_o)$ được gọi là một pháp tuyến của Γ tại điểm $M(t_o)$.

Mỗi mặt phẳng chứa tiếp tuyến Δ gọi là một *mặt phẳng tiếp xúc* của Γ tại điểm $M(t_o)$.

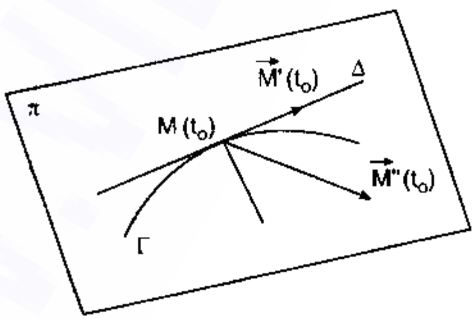
*Mặt phẳng mật tiếp**

2.6. Giả sử I là một khoảng mở, $M : t \longmapsto M(t)$, $t \in I$ là một đường cong tham số trong không gian có các đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o)$ tại điểm $t_o \in I$ và các vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o)$ là độc lập tuyến tính. Gọi Γ là giá của M ($\Gamma = M(I)$) và Δ là tiếp tuyến của đường cong Γ tại điểm $M(t_o)$. Theo công thức Taylo–Iang, ta có

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)} = h\overrightarrow{M}'(t_o) + \frac{h^2}{2}\left(\overrightarrow{M}''(t_o) + \overrightarrow{0}(1)\right) \ (h \to 0).$$

Với $h \neq 0$ đủ nhỏ, các vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o) + \overrightarrow{0}(1)$ là độc lập tuyến tính, do đó vectơ $\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)}$ không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$. Vì đường thẳng Δ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$ nên từ đó suy ra điểm $M(t_o + h)$ không nằm trên đường thẳng Δ. Mặt phẳng $(\Delta, M(t_o + h))$ đi qua điểm $M(t_o + h)$ và chứa đường thẳng Δ song song với hai vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o) + \overrightarrow{0}(1)$. Khi $h \to 0$, mặt phẳng $(\Delta, M(t_o + h))$ tiến dần đến mặt phẳng π đi qua điểm $M(t_o)$ và song song với hai vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o)$. Từ đó ta có

Định nghĩa. Giả sử đường cong tham số $t \mapsto M(t)$, $t \in I$ có các đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o)$ tại điểm $t_o \in I$. Nếu $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o)$ là hai vectơ độc lập tuyến tính thì mặt phẳng π đi qua điểm $M(t_o)$ và song song với hai vectơ $\overrightarrow{M}'(t_o)$ và $\overrightarrow{M}''(t_o)$ gọi là mặt phẳng mật tiếp của đường cong $\Gamma = M(I)$ tại điểm $M(t_o)$.



Hình 10

2.7. Nếu đường cong Γ có mặt phẳng mật tiếp π tại điểm $M(t_0)$ thì pháp tuyến của đường cong Γ tại điểm $M(t_0)$ nằm trong mặt phẳng π gọi là pháp tuyến chính của Γ tại điểm $M(t_0)$.

Ví dụ. Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3.$$

Ta có

$$\overrightarrow{M'}(t) = (1,\ 2t,\ 3t^2)$$
$$\overrightarrow{M''}(t) = (0,\ 2,\ 6t)$$

Vì $\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ với mọi $t \in \mathbf{R}$

nên hai vectơ $\overrightarrow{M'}(t)$ và $\overrightarrow{M''}(t)$ là độc lập tuyến tính với mọi $t \in \mathbf{R}$. Do đó với mọi $t \in \mathbf{R}$, đường cong Γ có mặt phẳng mật tiếp π_t tại điểm $M(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$. Điểm $P(x, y, z)$ thuộc mặt phẳng π_t khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{M(t)P}$, $\overrightarrow{M'}(t)$, $\overrightarrow{M''}(t)$ là đồng phẳng, tức là

$$\begin{vmatrix} x - t & y - t^2 & z - t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$$

Đó là phương trình của mặt phẳng π_t.

2.8. Ta xét trường hợp hai vectơ $\overrightarrow{M'}(t_0)$ và $\overrightarrow{M''}(t_0)$ là phụ thuộc tuyến tính. Giả sử p và q là hai số nguyên dương, $p < q$ và đường cong tham số $t \mapsto M(t)$, $t \in I$ có các đạo hàm đến cấp q tại điểm $t_0 \in I$ (I là một khoảng mở) thỏa mãn các điều kiện sau :

a) $\overrightarrow{M'}(t_0) = \overrightarrow{M''}(t_0) = \ldots = \overrightarrow{M}^{(p-1)}(t_0) = 0$; $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0) \neq 0$,

b) $\overrightarrow{M}^{(p+1)}(t_0)$, $\overrightarrow{M}^{(p+2)}(t_0)$, ..., $\overrightarrow{M}^{(q-1)}(t_0)$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$,

c) $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ không cùng phương với $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$.

Khi đó, theo công thức Taylo-lang, ta có

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)} = \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{M}^{(p)}(t_o) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\overrightarrow{M}^{(p+1)}(t_o) + \dots$$

$$+ \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\overrightarrow{M}^{(q-1)}(t_o) + \frac{h^q}{q!}(\overrightarrow{M}^{(q)}(t_o) + \overrightarrow{0}(1))$$

$$= \frac{h^p}{p!}(1 + 0(1))\overrightarrow{M}^{(p)}(t_o) + \frac{h^q}{q!}(\overrightarrow{M}^{(q)}(t_o) + \overrightarrow{0}(1))\ (h \to 0).$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(t_o)$ và song song với vectơ $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_o)$ là tiếp tuyến của đường cong $\Gamma = M(I)$ tại điểm $M(t_o)$. Lập luận tương tự như trong 2.5, ta thấy với $h \neq 0$ đủ nhỏ, điểm $M(t_o + h)$ không nằm trên đường thẳng Δ và khi $h \to 0$, mặt phẳng $(\Delta, M(t_o + h))$ chứa đường thẳng Δ và đi qua điểm $M(t_o + h)$ tiến dần đến mặt phẳng π đi qua điểm $M(t_o)$ và song song với hai vectơ $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_o)$ và $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_o)$. Từ đó ta có :

Định nghĩa. Với các giả thiết đã nêu, mặt phẳng π đi qua điểm $M(t_o)$ và song song với hai vectơ $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_o)$, $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_o)$ gọi là mặt phẳng mật tiếp của đường cong Γ tại điểm $M(t_o)$.

2.9. *Chú ý.* a) Dễ dàng thấy rằng đường thẳng không có mặt phẳng mật tiếp.

b) Giả sử $t \mapsto M(t)$, $t \in I$ là một đường cong tham số phẳng, I là một khoảng mở. Nếu đường cong $\Gamma = M(I)$ có tiếp tuyến Δ tại điểm $M(t_o)$, $t_o \in I$ và $M(t) \notin \Delta$ với $|t - t_o| > 0$ đủ nhỏ thì, một cách tự nhiên, ta gọi mặt phẳng của đường cong Γ là mặt phẳng mật tiếp của Γ tại điểm $M(t_o)$.

2.10. Từ định nghĩa của mặt phẳng mật tiếp suy ra rằng mặt phẳng mật tiếp của đường cong Γ tại điểm $M(t_o)$ là giới hạn của mặt phẳng tiếp xúc $(\Delta, M(t_o + h))$ đi qua điểm $M(t_o + h)$ khi $h \to 0$.

Có thể chứng minh được rằng

2.11. Nếu đường cong tham số $t \mapsto M(t)$ có các đạo hàm đến cấp ba tại điểm $t_0 \in I$ và nếu các vectơ $\overrightarrow{M}'(t_0)$, $\overrightarrow{M}''(t_0)$, $\overrightarrow{M}'''(t_0)$ là độc lập tuyến tính thì mặt phẳng mật tiếp của đường cong $\Gamma = M(I)$ tại điểm $M(t_0)$ là mặt phẳng tiếp xúc duy nhất của Γ tại điểm $M(t_0)$ mà đường cong Γ xuyên qua tại điểm $M(t_0)$.

§3. ĐỘ DÀI CUNG

3.1. Định nghĩa độ dài cung

Giả sử Γ là một cung (liên tục) với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a, b].$$

Gọi π là một phép phân hoạch đoạn $[a, b]$:

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Đường gấp khúc $M(t_0)M(t_1) \dots M(t_n)$, trong đó $M(t_i)$ là điểm có các tọa độ $x(t_i)$, $y(t_i)$, $z(t_i)$ gọi là nội tiếp cung Γ. Độ dài của đường gấp khúc đó là

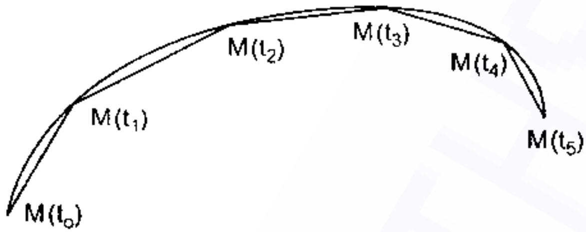
$$l_\pi = \sum_{i=1}^{n} |M(t_{i-1})M(t_i)|$$

Kí hiệu $|M(t_{i-1})M(t_i)|$ chỉ độ dài của đoạn thẳng $M(t_{i-1})M(t_i)$:

$$|M(t_{i-1})M(t_i)| = ([x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[y(t_i)-y(t_{i-1})]^2+[z(t_i)-z(t_{i-1})]^2)^{\frac{1}{2}}$$

Gọi $\mathcal{P}$ là tập hợp các phép phân hoạch đoạn $[a, b]$. Dễ dàng thấy rằng

Nếu $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ và π' mịn hơn π thì $l_{\pi'} \geqslant l_\pi$.



Hình 11

Định nghĩa. Nếu tập hợp $\{l_\pi : \pi \in \mathcal{P}\}$ là bị chặn thì cung Γ được gọi là khả trường (có độ dài) và

$$l(\Gamma) = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} l_\pi$$

gọi là độ dài của cung Γ.

3.2. Định lí. Nếu ánh xạ $t \mapsto M(t)$, $t \in [a, b]$ có đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ và $||\overrightarrow{M}'(t)||$ bị chặn trên $[a, b]$ thì cung Γ là khả trường.

Chứng minh. Tồn tại số dương K sao cho

$|x'(t)| \leq K$, $|y'(t)| \leq K$, $|z'(t)| \leq K$ với mọi $t \in [a, b]$.

Giả sử π là một phép phân hoạch đoạn $[a, b]$:

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b.$$

Khi đó

$$|M(t_{i-1})M(t_i)|^2 = [x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn, ta được

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),\ \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$$

Do đó

$$|x(t_i) - x(t_{i-1})| \leq K(t_i - t_{i-1}),\ i = 1, \ldots, n$$

Tương tự, ta có

$|y(t_i) - y(t_{i-1})| \leq K(t_i - t_{i-1})$ và $|z(t_i) - z(t_{i-1})| \leq K(t_i - t_{i-1})$.

Do đó

$$|M(t_{i-1})M(t_i)|^2 \leq 3K^2(t_i - t_{i-1})^2,\ i = 1, \ldots, n.$$

và

$$l_\pi = \sum_{i=1}^{n} |M(t_{i-1})M(t_i)| \leq \sqrt{3}\,K \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \sqrt{3}\,K(b - a).$$

Vậy $\{l_\pi : \pi \in \mathcal{P}\}$ là một tập hợp bị chặn. Do đó cung Γ là khả trường.□

3.3. Định lí. Giả sử Γ là một cung với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a, b].$$

Nếu ánh xạ $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ có đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ liên tục trên $[a, b]$ thì cung Γ là khả trường và độ dài của Γ là

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Nếu Γ là một cung phẳng với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a, b]$$

và ánh xạ $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ có đạo hàm $\overrightarrow{M}'(t) = (x'(t), y'(t))$ liên tục trên $[a, b]$ thì Γ là khả trường và độ dài của Γ là

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp Γ là một cung phẳng. Trường hợp cung trong không gian được chứng minh tương tự. Vì $t \mapsto \overrightarrow{M}'(t)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $\|\overrightarrow{M}'(t)\|$ bị chặn trên [a, b]. Do đó cung Γ khả trường. Vì $l(\Gamma) = \sup\limits_{\pi \in \mathcal{P}} l_\pi$ nên tồn tại một dãy $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch đoạn [a, b] sao cho

$$\lim_{n \to \infty} l_{\pi_n} = l(\Gamma) \qquad (1)$$

$$\pi_n : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{p_n} = b.$$

Có thể coi $\{\pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc vì, nếu cần, có thể thay π_n bởi một phép phân hoạch mịn hơn và có đường kính nhỏ hơn $\frac{1}{n}$. Ta có $l_{\pi_n} = \sum\limits_{i=1}^{p_n} |M(t_{i-1})M(t_i)|$.

Áp dụng công thức số gia hữu hạn, ta được

$$|M(t_{i-1})M(t_i)| = ([x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}\ (t_i - t_{i-1}),\ \xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$$

$$l_{\pi_n} = \sum_{i=1}^{p_n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)}\ \Delta t_i$$

Đặt $$\sigma_n = \sum_{i=1}^{p_n} \sqrt{x'^2(\xi_i) + \eta'^2(\xi_i)}\ \Delta t_i.$$

Vì hàm số $t \longmapsto \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ liên tục trên [a, b] nên nó khả tích trên đoạn này. Do đó

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

Để kết thúc, ta chứng minh $\lim\limits_{n \to \infty} (l_{\pi_n} - \sigma_n) = 0.$

Thật vậy, ta có

$$l_{\pi_n} - \sigma_n = \sum_{i=1}^{p_n} [\sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\eta_i)} - \sqrt{x'^2(\xi_i) + \eta'^2(\xi_i)}]\,\Delta t_i$$

Từ bất đẳng thức

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| \leqslant |b - c| \text{ với mọi } a, b, c \in \mathbf{R}$$

suy ra

$$|l_{\pi_n} - \sigma_n| \leqslant \sum_{i=1}^{p_n} |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|\, \Delta t_i .$$

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì y' liên tục trên $[a, b]$ nên nó liên tục đều trên đoạn này. Do đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall t, t' \in [a, b])\ |t - t'| < \delta \Rightarrow |y'(t) - y'(t')| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$ nên tồn tại N nguyên dương sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow d(\pi_n) < \delta.$$

Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |l_{\pi_n} - \sigma_n| \leqslant \sum_{i=1}^{p_n} \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{b - a}.(b - a) = \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} (l_{\pi_n} - \sigma_n) = 0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} l_{\pi_n} = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ và từ (1) suy ra công thức cần chứng minh.□

3.4. Nếu hàm số $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ thì đồ thị Γ của f là cung với biểu diễn tham số

$$x = x,\ y = f(x),\ x \in [a, b].$$

Độ dài của Γ là :

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Ví dụ. Tính độ dài cung Γ của đường xiclôit.

$$x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Ta có

$$x'(t) = R(1 - \cos t),\ y'(t) = R\sin t,$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = R^2(1 - \cos t)^2 + R^2\sin^2 t =$$

$$= 2R^2(1 - \cos t) = 4R^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} 2R\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8R.$$

§4. MẶT THAM SỐ

4.1. Định nghĩa. Giả sử D là một tập hợp con của $\mathbf{R}^2$. Ánh xạ $M : (u, v) \mapsto M(u, v)$ từ D vào không gian gọi là một mặt tham số. Các biến số u, v được gọi là các tham số.

Tập hợp $\sum = M(D)$ gọi là giá của mặt tham số M.

Trong không gian chọn một hệ trục tọa độ Đềcác trực chuẩn $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Khi đó điểm $M(u, v)$ có các tọa độ $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Ta nói rằng mặt tham số được xác định bởi các phương trình

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D.$$

Ta cũng gọi giá $\sum = M(D)$ của mặt tham số là mặt với biểu diễn tham số

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D.$$

Mặt tham số gọi là liên tục nếu ánh xạ $(u, v) \mapsto M(u, v)$ liên tục. Mặt tham số là liên tục khi và chỉ khi các hàm số $(u, v) \mapsto x(u, v)$, $(u, v) \mapsto y(u, v)$ và $(u, v) \mapsto z(u, v)$ đều liên tục. Mặt tham số gọi là thuộc lớp C^1 nếu các hàm số x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên D.

Ví dụ 1. Giả sử D là một tập hợp con của $\mathbf{R}^2$, $f : D \to \mathbf{R}$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ là một hàm số xác định trên D. Đồ thị Σ của hàm số f là mặt với biểu diễn tham số

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u, v),\ (u, v) \in D$$

Ví dụ 2. Cho hai vectơ $\vec{V_1} = (a_1, b_1, c_1)$ và $\vec{V_2} = (a_2, b_2, c_2)$ độc lập tuyến tính và $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{R}$. Các phương trình

$$x = x_0 + a_1u + a_2v,\ y = y_0 + b_1u + b_2v,\ z = z_0 + c_1u + c_2v$$

là biểu diễn tham số của mặt phẳng đi qua điểm (x_0, y_0, z_0) và song song với hai vectơ $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$.

Ví dụ 3. Gọi Σ là mặt với biểu diễn tham số

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta, \qquad (1)$$

trong đó R là một số dương cho trước.

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Vậy mọi điểm của Σ nằm trên mặt cầu tâm O bán kính R. Đảo lại, nếu M(x, y, z) là một điểm của mặt cầu này thì $|z| \leqslant R$. Do đó tồn tại một số thực θ sao cho $z = R\cos\theta$. Khi đó $x^2 + y^2 = R^2 - z^2 = R^2\sin^2\theta$. Do đó tồn tại một số thực φ sao cho $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$. Vậy Σ là mặt cầu tâm O bán kính R.

Tiếp diện

4.2. a) Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$ và Σ là một mặt với biểu diễn tham số

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in U,$$

trong đó các hàm số x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Gọi M(u, v) là điểm có các tọa độ x(u, v), y(u, v), z(u, v). Giả sử $(u_0, v_0) \in U$. Khi đó $M_0 = M(u_0, v_0)$ là một điểm của Σ. Các đường cong Γ_{u_0} và Γ_{v_0} với các biểu diễn tham số

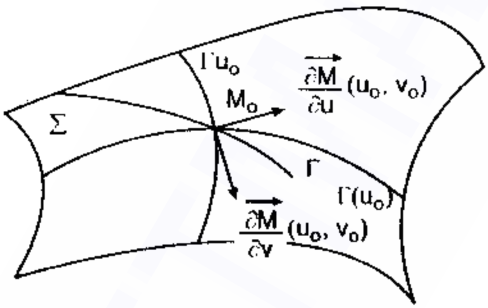
$$x = x(u_0, v),\ y = y(u_0, v),\ z = z(u_0, v)$$

$$x = x(u, v_0),\ y = y(u, v_0),\ z = z(u, v_0)$$

đều nằm trên mặt $\sum$. Giả sử hai vectơ

$$\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0, v_0) = (x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0)) \text{ và}$$
$$\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0, v_0) = (x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0))$$

đều khác $\overrightarrow{0}$. Khi đó đường cong Γ_{u_0} có tiếp tuyến tại điểm M_0 với vectơ chỉ phương $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$ và đường cong Γ_{v_0} có tiếp tuyến tại điểm M_0 với vectơ chỉ phương $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$.



Hình 12

Giả sử hai vectơ $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$ và $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$ là độc lập tuyến tính và π là mặt phẳng đi qua điểm M_0 và song song với hai vectơ đó. Ta sẽ chỉ ra rằng với một đường cong Γ bất kì đi qua điểm M_0 và nằm trong mặt $\sum$, nếu nó có tiếp tuyến tại điểm M_0 thì tiếp tuyến đó nằm trong mặt phẳng π. Một cách chính xác,

Giả sử $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$ là một ánh xạ có đạo hàm từ một khoảng mở $I \subset \mathbf{R}$ vào U (tức là φ và ψ là những hàm số có đạo hàm trên I) và t_0 là một điểm của I sao cho $\varphi(t_0) = u_0$, $\psi(t_0) = v_0$. Khi đó ánh xạ $t \mapsto N(t) = M(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in I$

là một đường cong tham số có đạo hàm, có giá là đường cong Γ đi qua điểm M_0 và nằm trong mặt Σ.

Thật vậy, hiển nhiên $N(t) \in \Sigma$ với mọi $t \in I$ và $N(t_0) = M_0$. Vì các hàm số x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U và các hàm số φ, ψ có đạo hàm trên I nên các hàm số

$$t \mapsto x(\varphi(t), \psi(t)),\ t \mapsto y(\varphi(t), \psi(t)),\ t \mapsto z(\varphi(t), \psi(t))$$

có đạo hàm trên I. Do đó ánh xạ $t \mapsto N(t)$ có đạo hàm trên I.

Gọi $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ là các tọa độ của điểm N(t). Ta có

$$\alpha(t) = x(\varphi(t), \psi(t)),\ \beta(t) = y(\varphi(t), \psi(t)),\ \gamma(t) = z(\varphi(t), \psi(t))$$

và $$\overrightarrow{N}'(t_0) = (\alpha'(t_0), \beta'(t_0), \gamma'(t_0)).$$

Áp dụng công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta được

$$\alpha'(t_0) = x_u'(u_0, v_0)\varphi'(t_0) + x_v'(u_0, v_0)\psi'(t_0),$$

$$\beta'(t_0) = y_u'(u_0, v_0)\varphi'(t_0) + y_v'(u_0, v_0)\psi'(t_0),$$

$$\gamma'(t_0) = z_u'(u_0, v_0)\varphi'(t_0) + z_v'(u_0, v_0)\psi'(t_0).$$

Do đó

$$\overrightarrow{N}'(t_0) = \varphi'(t_0)\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0, v_0) + \psi'(t_0)\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Vậy vectơ $\overrightarrow{N}'(t_0)$ song song với mặt phẳng π đi qua điểm M_0 và song song với hai vectơ $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$. Nếu $\overrightarrow{N}'(t_0) \neq 0$ thì đường cong Γ có tiếp tuyến tại điểm M_0 nằm trong mặt phẳng π.

4.3. Định nghĩa. Mặt phẳng π vừa nêu được gọi là tiếp diện của mặt Σ tại điểm M_0.

4.4. Phương trình của tiếp diện

Ta giữ nguyên các giả thiết và các kí hiệu trong 4.2. Điểm P(X, Y, Z) trong không gian thuộc mặt phẳng π khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{M_0P}$, $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$ là đồng phẳng, tức là

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_u'(u_0, v_0) & y_u'(u_0, v_0) & z_u'(u_0, v_0) \\ x_v'(u_0, v_0) & y_v'(u_0, v_0) & z_v'(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

x_0, y_0, z_0 là các tọa độ của điểm M_0. Đó là phương trình của tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm M_0.

4.5. Trường hợp đặc biệt

Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U. Gọi $\sum$ là đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$; $\sum$ là mặt với biểu diễn tham số

$$x = x,\ y = y,\ z = f(x, y),\ (x, y) \in U.$$

Giả sử (x_0, y_0) là một điểm của U, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ với $z_0 = f(x_0, y_0)$. Khi đó

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x_0, y_0) = (1, 0, f_x'(x_0, y_0)),$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x_0, y_0) = (0, 1, f_y'(x_0, y_0)).$$

Phương trình tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm M_0 là

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x'(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y'(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

hay

$$\boxed{Z - z_0 = (X - x_0)f_x'(x_0, y_0) + (Y - y_0)f_y'(x_0, y_0)}$$

Ví dụ. Viết phương trình tiếp diện của mặt

$$(\textstyle\sum) \quad z = x^2 + y^2,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

tại điểm $M_0 = (1, 1, 2)$.

Ta có $z_x' = 2x$, $z_y' = 2y$, $z_x'(1, 1) = 2$, $z_y'(1, 1) = 2$.

Phương trình tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm M_0 là :

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1),$$

$$z = 2x + 2y - 2.$$

4.6. Pháp tuyến của mặt

Định nghĩa. Giả sử π là tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm M_0. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng π tại điểm M_0 gọi là pháp tuyến của mặt $\sum$ tại điểm M_0.

● Với các giả thiết và các kí hiệu trong 4.2, pháp tuyến của mặt $\sum$ tại điểm M_0 là đường thẳng đi qua điểm M_0 và song song với vectơ

$$\vec{N}(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u'(u_0, v_0) & y_u'(u_0, v_0) & z_u'(u_0, v_0) \\ x_v'(u_0, v_0) & y_v'(u_0, v_0) & z_v'(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix} \right).$$

● Với các giả thiết và các kí hiệu trong 4.5, pháp tuyến của mặt $\sum$ tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là đường thẳng đi qua điểm M_0 và song song với vectơ

$$\vec{N}(x_0, y_0) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x'(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y'(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$= (-f_x'(x_0, y_0), -f_y'(x_0, y_0), 1).$$

Biểu diễn tham số của pháp tuyến đó là

$$x = x_0 + tf_x'(x_0, y_0),\ y = y_0 + tf_y'(x_0, y_0),\ z = z_0 - t,\ t \in \mathbf{R}.$$

§5. PHƯƠNG TRÌNH CỦA CÁC ĐƯỜNG VÀ CÁC MẶT

Trong mục này ta sẽ đề cập đến phương trình của một đường trong mặt phẳng, phương trình của một mặt trong không gian và phương trình của một đường trong không gian.

Phương trình của một đường trong mặt phẳng

5.1. Trong một mặt phẳng chọn một hệ trục tọa độ Đêcac $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Giả sử $(x, y) \mapsto f(x, y)$ là một hàm số thực với hai biến số thực. Tập hợp các điểm $M(x, y)$ của mặt phẳng nghiệm đúng phương trình $f(x, y) = 0$ gọi là đường với phương trình $f(x, y) = 0$.

Ví dụ 1. Đường với phương trình $ax + by + c = 0$, trong đó a, b, c là ba số thực, a, b không đồng thời bằng 0 là một đường thẳng.

Ví dụ 2. Giả sử $(O, \vec{i}, \vec{j})$ là một hệ tọa độ Đêcác trực chuẩn. Đường cong mà phương trình là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ là một elip với hai trục đối xứng Ox, Oy.

Ví dụ 3. Giả sử $f : I \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Đường với phương trình $y = f(x)$ là đồ thị của hàm số f.

5.2. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên U và $M_o(x_o, y_o)$ là một điểm của U sao cho $f(x_o, y_o) = 0$. Nếu ít nhất một trong hai điều kiện $f'_x(x_o, y_o) \neq 0$, $f'_y(x_o, y_o) \neq 0$ được thỏa mãn thì đường Γ với phương trình $f(x, y) = 0$ có tiếp tuyến tại M_o và phương trình của tiếp tuyến đó là :

$$(X - x_o)f_x'(x_o, y_o) + (Y - y_o)f_y'(x_o, y_o) = 0$$

(Xem Giải tích, tập I, VI.B.4.4. trang 283).

Phương trình của một mặt trong không gian

5.3. Trong không gian chọn một hệ trục tọa độ Đêcac $(O, \vec{i}, \vec{j}, k)$. Giả sử $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ là một hàm số với ba biến số thực. Tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ trong không gian nghiệm đúng phương trình $f(x, y, z) = 0$ gọi là mặt với phương trình $f(x, y, z) = 0$.

Ví dụ 1. Giả sử a, b, c là ba số thực không đồng thời bằng 0. Mặt với phương trình $ax + by + cz + d = 0$ là một mặt phẳng.

Ví dụ 2. Giả sử φ là một hàm số với hai biến số thực. Mặt với phương trình $z = \varphi(x, y)$ là đồ thị của hàm φ.

Ví dụ 3. Giả sử $(x, y) \mapsto f(x, y)$ là một hàm số với hai biến số thực. Gọi Γ là đường với phương trình $f(x, y) = 0$ trong mặt phẳng Oxy. Mặt trong không gian với phương trình $f(x, y) = 0$ là mặt trụ có đường chuẩn là Γ với đường sinh song song với Oz.

Ví dụ 4. Giả sử $x_o, y_o, z_o \in \mathbf{R}$ và $R > 0$. Nếu $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ là một hệ trục tọa độ Đêcac trực chuẩn thì mặt với phương trình

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$$

là mặt cầu tâm (x_o, y_o, z_o) bán kính R.

5.4. Tiếp diện của mặt với phương trình $f(x, y, z) = 0$

a) Cho mặt $\sum$ với phương trình $f(x, y, z) = 0$, trong đó $f : U \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở U trong $\mathbf{R}^3$. Giả sử $M_o\ (x_o, y_o, z_o)$ là một điểm của mặt $\sum$ và $f'_z(x_o, y_o, z_o) \neq 0$. Khi đó, theo định lí VI.B.4.5 trang 284 (Giải tích tập I), tồn tại hai số dương α, β sao cho phần của mặt $\sum$ trong hình hộp

$(x_o - \alpha, x_o + \alpha) \times (y_o - \alpha, y_o + \alpha) \times (z_o - \beta, z_o + \beta)$ là mặt $\sum_1$ với phương trình $z = \varphi(x, y)$, trong đó hàm số φ có các đạo hàm riêng liên tục trên $(x_o - \alpha, x_o + \alpha) \times (y_o - \alpha, y_o + \alpha)$ và

$$\varphi'_x(x, y) = -\frac{f_x'(x, y, \varphi(x, y))}{f_z'(x, y, \varphi(x, y))}, \quad \varphi'_y(x, y) = -\frac{f'_y(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))}$$

Theo 4.5, mặt $\sum_1$ có tiếp diện tại mỗi điểm M(x, y, z) của nó và phương trình của tiếp diện đó là

$$Z - z = (X - x)\left(-\frac{f_x'(x, y, z)}{f_z'(x, y, z)}\right) + (Y - y)\left(-\frac{f_y'(x, y, z)}{f_z'(x, y, z)}\right).$$

hay

$$(X - x)f_x'(x, y, z) + (Y - y)f_y'(x, y, z) + (Z - z)f_z'(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

Đương nhiên mọi tiếp diện của mặt $\sum_1$ đều là tiếp diện của mặt $\sum$. Nếu $f_x'(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ hoặc $f_y'(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ thì ta cũng có kết quả tương tự. Vậy nếu ít nhất một trong ba điều kiện

$$f_x'(M_o) \neq 0,\ f_y'(M_o) \neq 0,\ f_z'(M_o) \neq 0 \qquad (2)$$

được thỏa mãn thì tại các điểm M(x, y, z) của mặt $\sum$ trên một lân cận đủ nhỏ của điểm M_o, mặt $\sum$ có tiếp diện và (1) là phương trình của tiếp diện đó.

b) Có thể lập phương trình tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm $M_o = (x_o, y_o, z_o) \in \sum$ theo cách sau :

Giả sử I là một khoảng mở trong **R** và $t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$ là một đường cong tham số có đạo hàm trên I, có giá Γ nằm trên mặt $\sum$ và đi qua điểm M_o. Khi đó

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0 \text{ với mọi } t \in I$$

và tồn tại một điểm $t_o \in I$ sao cho $x(t_o) = x_o$, $y(t_o) = y_o$, $z(t_o) = z_o$. Vì hàm số f có các đạo hàm riêng liên tục trên U nên hàm số

$t \longmapsto F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ có đạo hàm với mọi $t \in I$ và

$$F'(t) = f_x'(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y'(x(t), y(t), z(t))y'(t)$$
$$+ f_z'(x(t), y(t), z(t))z'(t) = 0.$$

với mọi $t \in I$. Đặc biệt, ta có

(3) $f_x'(x(t_o), y(t_o), z(t_o))x'(t_o) + f_y'(x(t_o), y(t_o), z(t_o))y'(t_o) + f_z'(x(t_o), y(t_o), z(t_o))z'(t_o) = 0$

Nếu vectơ $\overrightarrow{M'}(t_o) = (x'(t_o), y'(t_o), z'(t_o)) \neq 0$ thì đường cong Γ có tiếp tuyến tại điểm M_o song song với vectơ $\overrightarrow{M'}(t_o)$. Từ (2) suy ra vectơ $\overrightarrow{V} = (f_x'(M_o), f_y'(M_o), f_z'(M_o) \neq 0$. Từ (3) suy ra

$$\overrightarrow{V} . \overrightarrow{M'}(t_o) = 0.$$

Vậy tiếp tuyến M_oT của đường cong Γ tại điểm M_o nằm trong mặt phẳng π đi qua điểm M_o và vuông góc với vectơ $\overrightarrow{V}$. Ta đã chứng minh rằng nếu đường cong Γ nằm trong mặt $\sum$ và đi qua điểm M_o, có tiếp tuyến tại điểm M_o thì tiếp tuyến đó nằm trong mặt phẳng π. Do đó mặt phẳng π là tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm M_o.

Phương trình tiếp diện của mặt $\sum$ tại điểm $M_o = (x_o, y_o, z_o)$ là : $(x - x_o)f_x'(M_o) + (Y - y_o)f_y'(M_o) + (Z - z_o)f_z'(M_o) = 0$

Ví dụ. Viết phương trình tiếp diện tại $M_o = (x_o, y_o, z_o)$ của mặt elipxôít

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ta có $\quad f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$;

$$f_x'(M_o) = \frac{2x_o}{a^2}, \ f_y'(M_o) = \frac{2y_o}{b^2}, \ f_z'(M_o) = \frac{2z_o}{c^2}.$$

Vì $\dfrac{x_o^2}{a^2} + \dfrac{y_o^2}{b^2} + \dfrac{z_o^2}{c^2} = 1$ nên ít nhất một trong ba điều kiện $f_x'(M_o) \neq 0$, $f_y'(M_o) \neq 0$, $f_z'(M_o) \neq 0$ được thỏa mãn.

Phương trình tiếp diện của mặt elipxôit tại điểm M_0 là

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

hay
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

5.5. *Pháp tuyến của mặt với phương trình $f(x, y, z) = 0$*

Nếu trong không gian ta chọn hệ trục tọa độ Dêcác trực chuẩn thì pháp tuyến của mặt $\sum$ với phương trình $f(x, y, z) = 0$ tại điểm $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ là đường thẳng đi qua M_0 và song song với vectơ $\vec{V} = (f_x'(M_0), f_y'(M_0), f_z'(M_0))$.

§6. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN

6.1. Giả sử $\sum_1$ là mặt với phương trình $f_1(x, y, z) = 0$ và $\sum_2$ là mặt với phương trình $f_2(x, y, z) = 0$. Đường Γ trong không gian, giao tuyến của hai mặt $\sum_1$ và $\sum_2$ được gọi là đường xác định bởi hai phương trình

$$f_1(x, y, z) = 0,$$
$$f_2(x, y, z) = 0.$$

Ví dụ 1. Giả sử $\vec{V_1} = (a_1, b_1, c_1)$ và $\vec{V_2} = (a_2, b_2, c_2)$ là hai vectơ độc lập tuyến tính. Đường xác định bởi hai phương trình

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

là một đường thẳng (đó là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau).

Ví dụ 2. Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Đường xác định bởi các phương trình

$$y = f(x),\ z = g(x),\ x \in I$$

là đường trong không gian với biểu diễn tham số

$$x = x,\ y = f(x),\ z = g(x),\ x \in I.$$

6.2. Tiếp tuyến của một đường xác định bởi hai phương trình

Giả sử Γ là đường xác định bởi hai phương trình

$$f(x, y, z) = 0,\ g(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

trong đó $f, g : U \to \mathbf{R}$ là hai hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập hợp mở $U \subset \mathbf{R}^3$ và $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ là một điểm của Γ, tức là M_0 là một điểm của U sao cho

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0,\ g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Giả sử

$$\begin{vmatrix} f_y'(x_0, y_0, z_0) & f_z'(x_0, y_0, z_0) \\ g_y'(x_0, y_0, z_0) & g_z'(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2)$$

Theo định lí VI.B.4.7. (Giải tích tập I trang 284, 285) tồn tại hai số dương α, β sao cho

Với mỗi $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, hệ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất

$(y, z) = (\varphi(x), \psi(x)) \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta) \times (z_0 - \beta \times z_0 + \beta)$, trong đó các hàm số φ và ψ có các đạo hàm liên tục trên khoảng $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Như vậy, phần của đường Γ trong hình hộp

$(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta) \times (z_0 - \beta, z_0 + \beta)$ là đường Γ_1 với biểu diễn tham số

$$x = x,\ y = \varphi(x),\ z = \psi(x).$$

Vì φ và ψ có đạo hàm trên $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ nên Γ_1 có tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó. Đương nhiên mọi tiếp tuyến của Γ_1 đều là những tiếp tuyến của Γ. Ta viết phương trình tiếp tuyến Δ của Γ tại điểm M_0.

Phương trình $f(x, y, z) = 0$ xác định mặt $\sum_1$ đi qua điểm M_0. Từ (2) suy ra $f_y'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ hoặc $f_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Theo 5.4, $\sum_1$ có tiếp diện P tại điểm M_0 mà phương trình là
$(x - x_0)f_x'(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)f_y'(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)f_z'(x_0, y_0, z_0) = 0.$
Tương tự, phương trình $g(x, y, z) = 0$ xác định mặt $\sum_2$ đi qua điểm M_0 và có tiếp diện Q tại điểm M_0 với phương trình
$(x - x_0)g_x'(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)g_y'(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)g_z'(x_0, y_0, z_0) = 0.$
Vì Γ nằm trong hai mặt $\sum_1$ và $\sum_2$ nên đường thẳng Δ, tiếp tuyến của Γ tại điểm M_0 nằm trong hai mặt phẳng P và Q. Từ (2) suy ra rằng hai mặt phẳng P, Q không trùng nhau và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng P và Q. Vậy nếu điều kiện (2) được thỏa mãn thì đường Γ có tiếp tuyến tại điểm M_0 và tiếp tuyến đó được xác định bởi các phương trình

$$(x - x_0)f_x'(M_0) + (y - y_0)f_y'(M_0) + (z - z_0)f_z'(M_0) = 0,$$

$$(x - x_0)g_x'(M_0) + (y - y_0)g_y'(M_0) + (z - z_0)g_z'(M_0) = 0.$$

§7. TỌA ĐỘ CỰC

7.1. Định nghĩa.

a) Trong mặt phẳng chọn một hệ trục tọa độ Đêcác trực chuẩn $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Giả sử M là một điểm của mặt phẳng và (x, y) là một cặp tọa độ Đêcác của điểm M (x, y được xác định bởi đẳng thức $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$).

Mỗi cặp số thực (θ, r) sao cho

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

gọi là một cặp tọa độ cực của điểm M.

Ví dụ. Gọi M là điểm của mặt phẳng có cặp tọa độ Đêcác (1, 1). Các cặp số thực $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ và $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ đều là những cặp tọa độ cực của điểm M. Hiển nhiên các cặp số thực $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2}\right)$ và $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$ trong đó k là một số nguyên bất kì là tất cả các cặp tọa độ cực của điểm M. Mọi điểm của mặt phẳng đều có vô số cặp tọa độ cực.

b) Cho điểm M với cặp tọa độ Đêcác (x, y). Hãy xác định các cặp tọa độ cực (θ, r) của điểm M.

Ta có

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

1° Nếu M = O thì r = 0 và θ là một số thực bất kì.

2° Nếu M $\neq$ O thì $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ hoặc $r = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

- Nếu lấy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì θ được xác định bởi

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Nếu lấy $r = -\sqrt{x^2 + y^2}$ thì θ được xác định bởi

$$\cos\theta = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

c) Cho một điểm M trong mặt phẳng. Ta có thể tìm các cặp tọa độ cực (θ, r) của điểm M theo cách sau : lấy một trục Ou đi qua điểm M, lấy θ là một số đo của góc định hướng $\widehat{(Ox, Ou)}$ và r là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{OM}$ trên trục Ou. Nếu M $\neq$ O và (θ, r) là một cặp tọa độ cực của điểm M thì

$$(\theta + 2k\pi, r) \text{ và } (\theta + (2k+1)\pi, -r), \; k \in \mathbb{Z}.$$

là mọi cặp tọa độ cực của điểm M.

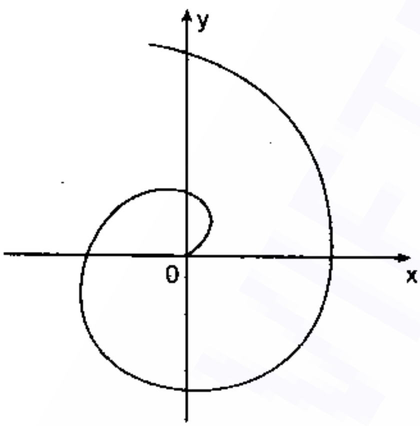
Điểm O được gọi là cực và Ox là trục cực.

7.2. Phương trình cực của một đường cong

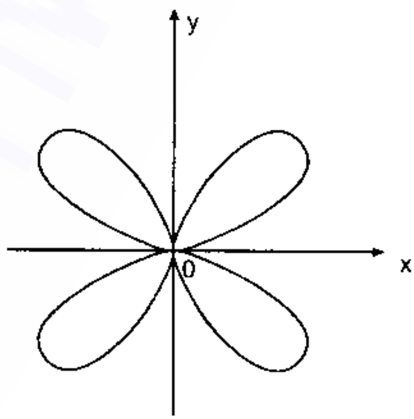
Giả sử f là một hàm số với hai biến số thực. Tập hợp Γ các điểm M của mặt phẳng có ít nhất một cặp tọa độ cực (θ, r) thỏa mãn phương trình $f(\theta, r) = 0$ gọi là đường cong với phương trình cực $f(\theta, r) = 0$.

Đặc biệt nếu $r : \theta \mapsto r(\theta)$ là một hàm số xác định trên tập hợp $I \subset \mathbf{R}$ thì tập hợp Γ các điểm M của mặt phẳng có cặp tọa độ cực $(\theta, r(\theta))$, $\theta \in I$ gọi là đường cong với phương trình cực $r = r(\theta)$, $\theta \in I$.

Ví dụ 1. Đường cong Γ với phương trình cực $r(\theta) = 3$, $\theta \in [0, \pi]$ là nửa trên của đường tròn tâm O bán kính R = 3. Vì θ biến thiên trên một đoạn nên đường cong Γ cũng được gọi là cung với phương trình cực $r(\theta) = 3$, $\theta \in [0, \pi]$.



Hình 13



Hình 14

Ví dụ 2. Đường cong Γ với phương trình cực

$$r = \theta, \ \theta \geq 0$$

gọi là đường xoắn ốc Acximét (Archimède) (hình 13).

Ví dụ 3. Đường cong với phương trình cực

$$r = |\sin 2\theta|, \ \theta \in [0, 2\pi]$$

gọi là đường hoa hồng 4 cánh (hình 14).

Ví dụ 4. Đường với phương trình cực $\theta = \alpha$, trong đó α là một số thực cho trước là một đường thẳng đi qua điểm O.

Trong các ví dụ sau, ta viết phương trình cực của một đường cho trước trong mặt phẳng.

Ví dụ 5. Phương trình cực của một đường thẳng không đi qua cực.

Trong mặt phẳng cho đường thẳng D không đi qua điểm O. Gọi a là đường thẳng đi qua O và vuông góc với D. Chọn một trong hai hướng của đường thẳng a làm hướng dương, ta được trục Oa. Gọi α là một số đo của góc $\widehat{(Ox, Oa)}$. Gọi H là giao điểm của đường thẳng a và đường thẳng D. Đặt $\overline{OH} = h$. Ta có $h \neq 0$. Đường thẳng D được hoàn toàn xác định nếu biết α và h.

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng và P là hình chiếu vuông góc của M trên Oa. Nếu (θ, r) là một cặp tọa độ cực của điểm M thì $\overline{OP} = r\cos(\theta - \alpha)$. Do đó điểm M nằm trên đường thẳng D khi và chỉ khi P = H, tức là $\overline{OP} = h$, hay $r\cos(\theta - \alpha) = h$.

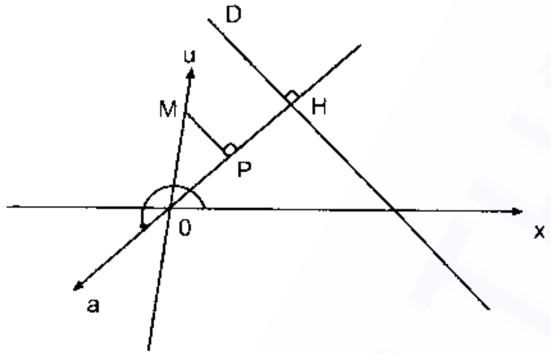
Vậy phương trình cực của đường thẳng D là

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{h}$$

Đặt $A = \dfrac{\cos\alpha}{h}$, $B = \dfrac{\sin\alpha}{h}$, ta được

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \qquad (1)$$

Vì $A^2 + B^2 = \dfrac{1}{h^2}$ nên A, B không đồng thời bằng 0.



Hình 15

Đảo lại, phương trình (1), trong đó A, B là hai số thực cho trước không đồng thời bằng 0, là phương trình cực của một đường thẳng không đi qua cực. Thật vậy, đặt $h = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ hoặc $h = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, ta có $h \neq 0$. Vì $(Ah)^2 + (Bh)^2 = 1$ nên tồn tại một số thực α sao cho

$$\cos\alpha = Ah,\ \sin\beta = Bh \Rightarrow A = \frac{\cos\alpha}{h},\ B = \frac{\sin\beta}{h}.$$

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{h}.$$

Từ đó dễ dàng xác định được đường thẳng D nhận (1) là phương trình cực.

Ví dụ 6. Phương trình cực của đường cônic.

Giả sử Γ là đường cônic mà cực O là một tiêu điểm, đường thẳng D là đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm O và số $e > 0$ là tâm sai. Hãy viết phương trình cực của Γ. (Ta giữ nguyên các kí hiệu D, Oa, α, h như trong ví dụ 5).

Ta biết rằng Γ là tập hợp các điểm M mà tỉ số các khoảng cách đến tiêu điểm O và đường chuẩn D bằng e.

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng, P là hình chiếu vuông góc của M trên Oa (xem hình 15). Khi đó

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MO = ePH.$$

Chọn trục Ou đi qua điểm M sao cho $\overline{OM} = e\overline{PH}$. Khi đó

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \overline{OM} = e\overline{PH} \Leftrightarrow r = e(h - \overline{OP}).$$

Trong ví dụ 5, ta biết rằng nếu (θ, r) là một cặp tọa độ cực của điểm M thì $\overline{OP} = r\cos(\theta - \alpha)$. Do đó

$M \in \Gamma \Leftrightarrow$ Điểm M có một cặp tọa độ cực (θ, r) sao cho

$$r = e(h - r\cos(\theta - \alpha))$$

$$\Leftrightarrow \quad r(1 + e\cos(\theta - r)) = eh$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{eh} + \frac{\cos(\theta - \alpha)}{h} \qquad (1)$$

Đó là phương trình cực của Γ.

Đặt $A = \dfrac{\cos\alpha}{h}$, $B = \dfrac{\sin\alpha}{h}$, $C = \dfrac{1}{eh}$. Phương trình trên có dạng

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + C, \qquad (2)$$

trong đó A, B không đồng thời bằng không và $C \neq 0$.

Đảo lại, phương trình (2), trong đó, A, B không đồng thời bằng không và $C \neq 0$ là phương trình cực của đường cônic có một tiêu điểm là O và có đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm O là đường thẳng với phương trình cực $\dfrac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$.

Thật vậy, chọn $h = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ hoặc $h = -\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ sao cho h, C cùng dấu. Tồn tại một số thực α sao cho $A = \dfrac{\cos\alpha}{h}$, $B = \dfrac{\sin\alpha}{h}$

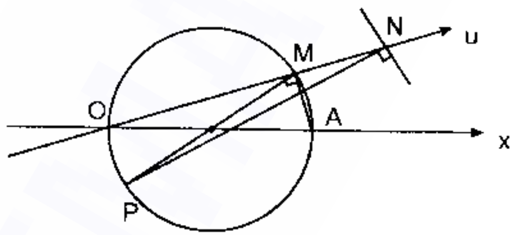
(tương tự như trong ví dụ 5). Đặt $e = \frac{1}{Ch}$, ta được $C = \frac{1}{eh}$, $e > 0$. Thay vào (2), ta được phương trình (1). Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 7. Đường ốc sên Patxcan (Pascal).

Cho đường tròn đường kính OA = a và một số dương b. Giả sử M là một điểm của đường tròn và Ou là trục có giá là đường thẳng OM. Trên Ou lấy một điểm N sao cho

$$\overline{ON} = \overline{OM} + b \qquad (1)$$

Tập hợp Γ các điểm N gọi là đường ốc sên Patxcan.



Hình 16

Chọn điểm O làm cực và đường thẳng OA hướng từ O đến A làm trục cực Ox. Khi đó nếu θ là một số đo của góc $\widehat{(Ox,Ou)}$ thì

$$\overline{OM} = a\cos\theta.$$

Đó là phương trình cực của đường tròn đường kính OA.

Nếu (θ, r) là một cặp tọa độ cực của điểm N thì từ (1) suy ra

$$r = a\cos\theta + b \qquad (2)$$

Đảo lại, nếu điểm N của mặt phẳng có một cặp tọa độ cực (θ, r) thỏa mãn (2) thì tồn tại một trục Ou đi qua N sao cho ta có (1), trong đó M là giao điểm thứ hai của đường thẳng ON với đường tròn đã cho.

Vậy (2) là phương trình cực của đường ốc sên Patxcan Γ.

7.3. Tiếp tuyến của đường với phương trình cực

Giả sử Γ là đường cong với phương trình cực $r = r(\theta)$, $\theta \in I$, trong đó r là một hàm số có đạo hàm trên khoảng $I \subset \mathbf{R}$. Với mỗi $\theta \in I$, gọi $M(\theta)$ là điểm với cặp tọa độ cực (θ, r). Khi đó các tọa độ Đêcác của điểm $M(\theta)$ là $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$.

Đó là biểu diễn tham số của đường cong Γ (θ là tham số). Gọi $\overrightarrow{u}(\theta)$ là vectơ với các tọa độ Đêcác $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\overrightarrow{v}(\theta)$ là vectơ với các tọa độ Đêcác $-\sin\theta$, $\cos\theta$. Vectơ $\overrightarrow{v}(\theta)$ nhận được từ vectơ $\overrightarrow{u}(\theta)$ nhờ phép quay góc $\frac{\pi}{2}$. Ta có

$$\overrightarrow{M}'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,\ r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$

$$= r'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + r(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta)$$

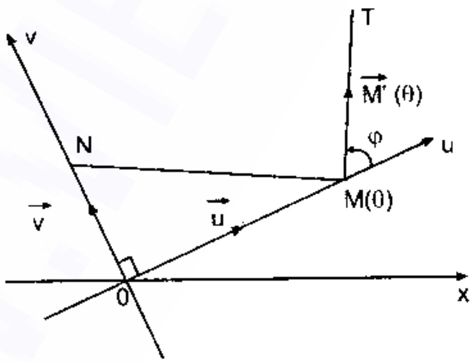
$$= r'(\theta)\overrightarrow{u} + r(\theta)\overrightarrow{v}.$$

Như vậy, trong cơ sở trực chuẩn $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, vectơ $\overrightarrow{M}'(\theta)$ có các tọa độ

$$r'(\theta),\ r(\theta).$$

Nếu $\overrightarrow{M}'(\theta) \neq 0$, tức là $r'(\theta)$ và $r(\theta)$ không đồng thời bằng không thì đường cong Γ có tiếp tuyến $M(\theta)T$ tại điểm $M(\theta)$ với vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{M}'(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u} + r(\theta)\overrightarrow{v}$$



Hình 17

Do đó vectơ $-r(\theta)\overrightarrow{u} + r'(\theta)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{M(\theta)0} + r'(\theta)\overrightarrow{v}$ vuông góc với Γ tại điểm $M(\theta)$ (tức là vuông góc với tiếp tuyến $M(\theta)T$ của Γ tại điểm $M(\theta)$). Nếu N là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{ON} = r'(\theta)\overrightarrow{v}$ thì vectơ $\overrightarrow{M(\theta)N}$ vuông góc với Γ tại điểm $M(\theta)$.

Gọi φ là góc tạo bởi trục Ou và tiếp tuyến $M(\theta)T$ của Γ tại $M(\theta)$. Hiển nhiên nếu $r'(\theta) \neq 0$ thì

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$

Ví dụ. Trở lại ví dụ về đường ốc sên Pátxcan Γ (xem ví dụ 7 trong 7.2). Phương trình cực của đường tròn đường kính OA là : $r_1 = a\cos\theta$, phương trình cực của đường ốc sên là : $r_2 = a\cos\theta + b$. Vì $r_1'(\theta) = r_2'(\theta)$ nên các pháp tuyến của đường tròn và đường ốc sên Γ tại M và N cắt đường thẳng vuông góc với OM tại O tại cùng một điểm P. Từ đó suy ra cách dựng tiếp tuyến của Γ tại N : Gọi P là điểm xuyên tâm đối của điểm M trên đường tròn. Đường thẳng vuông góc tại N với đường thẳng PN là tiếp tuyến của Γ tại N.

Ta xét trường hợp $M(\theta)$ là một điểm dừng của đường cong ($M(\theta)$ gọi là một điểm dừng nếu $\overrightarrow{M}'(\theta) = 0$, tức là $r(\theta) = r'(\theta) = 0$).

Điểm $M(\theta)$ của đường ốc sên Γ là một điểm dừng nếu

$$\begin{cases} a\cos\theta + b = 0, \\ -a\sin\theta = 0. \end{cases}$$

Từ đó $\theta = k\pi$, $(-1)^k a + b = 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Nếu $b \neq a$ thì Γ không có điểm dừng. Nếu $b = a$ thì điểm $M(\theta)$ là điểm dừng với $\theta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Với $\theta \neq \pi$ đủ gần π, ta có $M(\theta) \neq M(\pi) = 0$. Khi $\theta \to \pi$, đường thẳng $OM(\theta)$ tiến dần đến Ox. Vậy tiếp tuyến của Γ tại điểm O là Ox.

7.4. Dựng đường cong cho bởi phương trình cực

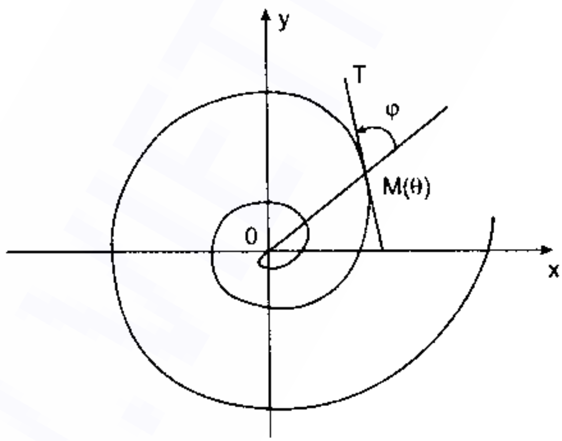
Ví dụ 1. Giả sử m là một số thực bất kì.

Đường cong Γ_m với phương trình cực $r = e^{m\theta}$, $\theta \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$ gọi là một đường xoắn ốc lôgarít. Dễ dàng thấy rằng điểm M với cặp tọa độ cực (θ, r) thuộc Γ_m khi và chỉ khi điểm M' với cặp tọa độ cực $(-\theta, r)$ thuộc đường cong Γ_{-m}. Vì các điểm M và M' đối xứng với nhau qua trục cực Ox nên hai đường cong Γ_m và Γ_{-m} đối xứng với nhau qua Ox. Do đó chỉ cần dựng các đường cong Γ_m với $m > 0$. (Với $m = 0$, Γ_0 là đường tròn tâm O, bán kính 1).

Giả sử $m > 0$. Khi θ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$, $r(\theta)$ tăng từ 0 đến $+\infty$. Gọi $M(\theta)T$ là tiếp tuyến của đường cong Γ_m tại điểm $M(\theta)$ và φ là góc tạo bởi tiếp tuyến $M(\theta)T$ với đường thẳng OM. Ta có

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{e^{m\theta}}{me^{m\theta}} = \frac{1}{m}.$$

Do đó góc φ không đổi khi θ biến thiên.



Hình 18

Ví dụ 2. Đường ốc sên Patxcan Γ có phương trình cực là $r = a\cos\theta + b$, $a > 0$, $b > 0$. Gọi $M(\theta)$ là điểm có các tọa độ cực là θ, $a\cos\theta + b$. Vì $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ nên chỉ cần cho θ biến thiên từ $-\pi$ đến π, ta được toàn bộ đường cong Γ. Vì $r(-\theta) = r(\theta)$ nên hai điểm $M(-\theta)$ và $M(\theta)$ đối xứng với nhau qua trục Ox. Do đó chỉ cần dựng một nửa đường cong ứng với khoảng biến thiên $[0, \pi]$ của θ, sau đó lấy đối xứng cung nhận được qua trục Ox.

Vì $r'(\theta) = -a\sin\theta \leq 0$ trên $[0, \pi]$ nên $r(\theta)$ giảm trên $[0, \pi]$.

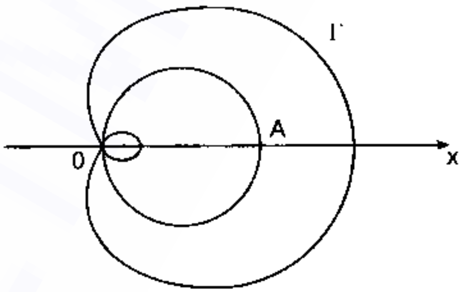
Bảng biến thiên

θ	0	π
r	$a + b$	$b - a$

Ta có $a + b > 0$; $b - a$ có thể lấy các giá trị âm, dương hoặc bằng không và đường ốc sên có các dạng sau :

1° $b < a$

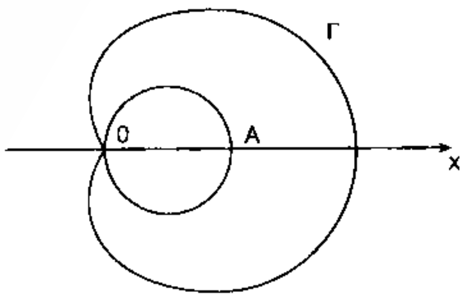
θ	0	$\frac{\pi}{2}$		π
r	$a + b$	b	0	$b - a < 0$



Hình 19

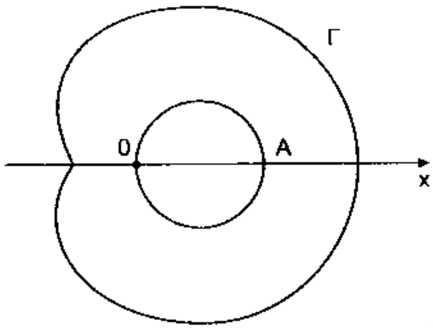
2° $b = a$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	$a + b$	a	0

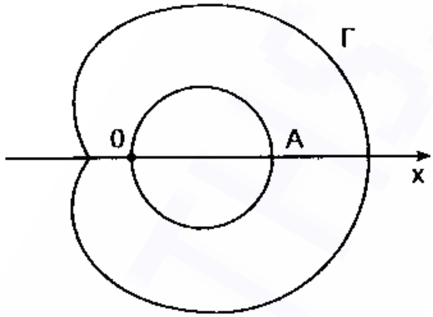


Hình 20

3° $a < b < 2a$ 4° $b \geqslant 2a$



Hình 21



Hình 22

§8. ĐỘ DÀI CUNG VÀ DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG TRONG TỌA ĐỘ CỰC

Độ dài cung

Ta đã định nghĩa và lập công thức tính độ dài của cung với biểu diễn tham số. Từ đó dễ dàng tính được độ dài của cung với phương trình cho trong tọa độ cực.

8.1. Định lí. Giả sử Γ là một cung với phương trình cực $r = r(\theta)$, trong đó r là một hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Khi đó Γ là khả trường và độ dài của nó là

$$l(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta$$

Chứng minh. Γ là cung với biểu diễn tham số

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,\ \theta \in [\alpha, \beta].$$

Ta có

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,$$

$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,\ \theta \in [\alpha, \beta].$$

Vì x', y' đều liên tục trên $[\alpha, \beta]$ nên cung Γ là khả trường và độ dài của nó là

$$l(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}\, d\theta.$$

Ta có

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = r'^2(\theta) + r^2(\theta) \text{ với mọi } \theta \in [\alpha, \beta].$$

Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.□

Ví dụ 1. Tính độ dài cung tròn Γ với phương trình cực

$$r(\theta) = R,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset [0, \pi],\ R \text{ là một số dương.}$$

Độ dài cung Γ là

$$l(\Gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R^2 + 0^2}\, d\theta = R(\theta_2 - \theta_1).$$

Ví dụ 2. Tính độ dài cung Γ của đường xoắn ốc Acximet (Archimède) $r(\theta) = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Độ dài của cung Γ là

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})\right)\Big|_0^{2\pi}$$

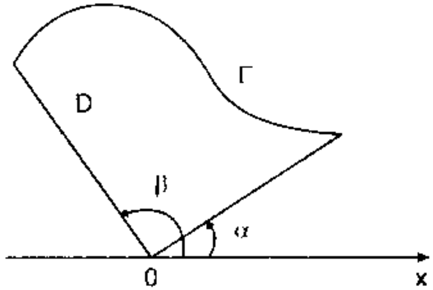
$$= \pi\left(\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right).$$

Diện tích hình quạt

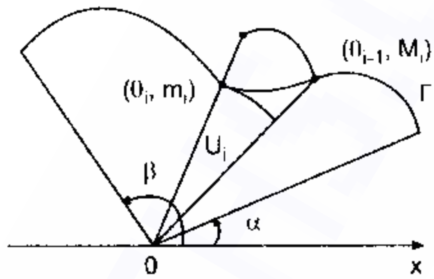
8.2. Giả sử Γ là một cung mà phương trình cực là $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, trong đó $r(\theta) \geq 0$ với mọi $\theta \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$. Tập hợp D trong mặt phẳng giới hạn bởi cung Γ và hai đường thẳng $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$.

$$D = \{(\theta, r) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq r(\theta)\}$$

gọi là một hình quạt (hình 23).



Hình 23



Hình 24

8.3. Công thức tính diện tích hình quạt

Định lí. Nếu $\theta \mapsto r(\theta)$ là một hàm số khả tích trên $[\alpha, \beta]$ thì hình quạt D là đo được theo nghĩa Gioócđan và diện tích của nó là :

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta$$

Chứng minh. Giả sử $\{\pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch $[\alpha, \beta]$:

$$\pi_n : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{p_n} = \beta.$$

Các đường thẳng $\theta = \theta_i$, $i = 0, \dots, p_n$ chia hình quạt D thành các hình quạt $D_i = \{(\theta, r) : \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$, $i = 1, \dots, p_n$.

Đặt $m_i = \inf\limits_{\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]} r(\theta)$, $M_i = \sup\limits_{\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]} r(\theta)$, $i = 1, \dots, p_n$.

Gọi U_i và V_i là các quạt tròn giới hạn bởi hai đường thẳng $\theta = \theta_{i-1}$, $\theta = \theta_i$ và các đường tròn $r = m_i$, $r = M_i$.

$U_i = \{(\theta, r) : \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i, 0 \leqslant r \leqslant m_i\}$,
$V_i = \{(\theta, r) : \theta_{i-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_i, 0 \leqslant r \leqslant M_i\}$. Hiển nhiên $U_i \subset D_i \subset V_i$, $i = 1, \dots, p_n$.

Tổng diện tích các quạt tròn U_i là : $s_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{p_n} m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$;

tổng diện tích các quạt tròn là V_i là : $S_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{p_n} M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$. Đó

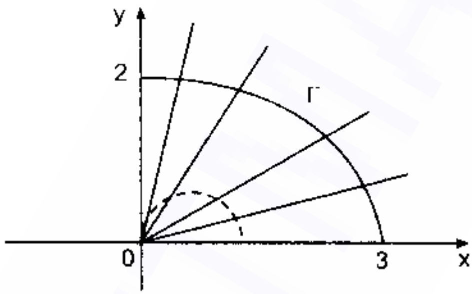
là các tổng Đácbu của hàm số $\theta \mapsto \frac{1}{2} r^2(\theta)$ ứng với phép phân hoạch π_n đoạn $[\alpha, \beta]$. Vì hàm số $\frac{1}{2}r^2$ khả tích trên $[\alpha, \beta]$ (do r khả tích trên đoạn này) nên $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$.

Vậy hình quạt D là đo được theo nghĩa Gioócđan và diện tích của nó là $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$.□

Ví dụ. Tính diện tích hình quạt D giới hạn bởi cung

$$r(\theta) = 2 + \cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]$$

và hai đường thẳng $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.



Hình 25

Ta có

$$D = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 2 + \cos\theta\}.$$

Diện tích hình quạt D là :

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

$$S = 2 + \frac{9}{8}\pi.$$

(Γ là cung của đường ốc sên Patxcan $r = 2 + \cos\theta$)

Chương VIII

CHUỖI SỐ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN

1.1. Định nghĩa. Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy số thực. Ta lập các tổng

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \dots,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\ ,\ \dots$$

S_n gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số thực $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Nếu dãy số thực $\{S_n\}$ có giới hạn S khi $n \to \infty$, tức là $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in \mathbf{R}$ hoặc $S = \pm\infty$ thì ta nói rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có tổng là S và viết

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ .$$

Nếu ngoài ra S hữu hạn, chuỗi số được gọi là hội tụ. Chuỗi số không hội tụ được gọi là phân kì.

u_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi số.

1.2. Định lí. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì

$$\lim u_n = 0.$$

Chứng minh. Ta có $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbf{R}$ và $u_n = S_n - S_{n-1}$. Do đó

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \square$$

Chú ý. Định lí trên cho ta một điều kiện cần để chuỗi hội tụ. Nếu $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì. Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ thì chưa thể nói gì về sự hội tụ của chuỗi.

Ví dụ 1. Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ phân kì vì

$$|u_n| = |(-1)^n| = 1 \not\to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Ví dụ 2. Xét chuỗi số hình học (cấp số nhân)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots, \ a, q \in \mathbf{R}, \ a \neq 0.$$

• Nếu $|q| \geq 1$ thì $|u_n| = |aq^n| \geq |a| > 0$ với mọi n. Vì $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi số phân kì.

• Nếu $|q| < 1$ thì

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} \to \frac{a}{1-q} \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy chuỗi số hội tụ và có tổng là : $S = \dfrac{a}{1-q}$.

1.3. *Chú ý.* Tính hội tụ hoặc phân kì của chuỗi số không thay đổi nếu bớt đi hoặc thêm vào hoặc thay đổi một số hữu hạn số hạng của nó.

Thật vậy, giả sử

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

là một chuỗi số cho trước và

$$u_{p+1} + u_{p+2} + \dots$$

là dãy số nhận được sau khi bỏ đi p số hạng đầu của chuỗi đã cho. Gọi $\{S_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\{T_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi số thứ hai. Khi đó ta có

$$T_n = S_{n+p} - S_p.$$

Do đó dãy $\{T_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi dãy $\{S_n\}$ hội tụ.

Số dư của một chuỗi số

1.4. Định nghĩa. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số hội tụ và S là tổng của nó. Hiệu

$$r_n = S - S_n$$

gọi là số dư thứ n của chuỗi số đã cho.

Hiển nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0.$

1.5. Định lí. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots,$$

tức là r_n là tổng của chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$.

Chứng minh. Gọi S_n là tổng riêng thứ n và S là tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Tổng riêng thứ k của chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ là

$$T_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} = S_{n+k} - S_n.$$

$$\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} (S_{n+k} - S_n) = S - S_n = r_n.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ hội tụ và có tổng là r_n.□

1.6. Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi số hội tụ và có tổng là S và T. Khi đó

a) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ và có tổng là S + T, (chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ gọi là chuỗi tổng của hai chuỗi số đã cho),

b) Nếu $\lambda \in \mathbf{R}$ là một hằng số thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ hội tụ và có tổng là λS.

Chứng minh. a) Gọi S_n, T_n, σ_n, theo thứ tự, là tổng riêng của các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$. Khi đó

$$\sigma_n = S_n + T_n.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = S + T.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ hội tụ và có tổng là S + T.

b) Chứng minh đơn giản dành cho bạn đọc.□

1.7. Tiêu chuẩn hội tụ của một chuỗi số

Định lí. (Côsi) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi với một số $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho $(\forall n, p \in \mathbf{N}^*)\ n \geq N \Rightarrow |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

Chứng minh. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng $\{S_n\}$ của nó hội tụ. Theo tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của một dãy số, dãy $\{S_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi với $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại N nguyên dương sao cho

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Lấy $m = n + p$, ta có $S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.□

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

2.1. Định nghĩa. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có các số hạng $u_n \geqslant 0$ với mọi n được gọi là chuỗi số dương.

2.2. Định lí. Chuỗi số dương bao giờ cũng có tổng.

Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó bị chặn trên.

Chứng minh. Vì $u_n \geqslant 0$ với mọi n nên $\{S_n\}$ là một dãy số tăng. Do đó $\{S_n\}$ có một giới hạn S, S là một số không âm, hữu hạn hoặc bằng $+\infty$. Giới hạn S là hữu hạn khi và chỉ khi dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên.□

2.3. Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi số dương và

$$u_n \leqslant v_n \qquad (1)$$

kể từ một chỉ số nào đó trở đi. Khi đó

a) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ,

b) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.

Chứng minh. Nếu cần thì thay đổi một số hữu hạn số hạng của chuỗi số, có thể coi bất đẳng thức (1) được thỏa mãn với mọi n. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, ta được $S_n \leqslant T_n$ với mọi n. Do đó $\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} T_n$, tức là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

a) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $T = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hữu hạn. Do đó $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hữu hạn, tức là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

b) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì thì $S = +\infty$. Do đó $T = +\infty$, tức là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì.□

2.4. Hệ quả. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi số dương. Nếu

$$u_n \sim v_n \text{ khi } n \to \infty$$

thì hai chuỗi số đã cho cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Chứng minh. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ. Vì $u_n \sim v_n$ khi $n \to \infty$ nên $u_n \leqslant 2v_n$ với n đủ lớn. Theo 2.3, từ đó suy ra $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Tương tự, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ.

Hai mệnh đề 2.3 và 2.4 được gọi là các mệnh đề về dấu hiệu so sánh.

Ví dụ. Cho chuỗi số với số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n - 5}$. Đây là một chuỗi số dương (với $n \geqslant 2$). Ta có

$$u_n \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ khi } n \to \infty.$$

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ nên chuỗi số đã cho hội tụ.

2.5. Dấu hiệu tích phân Côsi

Định lí. Giả sử f là một hàm số liên tục trên khoảng $[1, +\infty)$, $f(x) \geqslant 0$ và f giảm với x đủ lớn. Đặt

$$u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n),\ \ldots$$

Khi đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu giới hạn

$$\lim_{y \to +\infty} \int_1^y f(x)dx \text{ là hữu hạn.}$$

Chứng minh. Nếu cần thì thay đổi các giá trị của f trên một khoảng bị chặn (điều đó chỉ làm thay đổi một số hữu hạn số hạng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$), có thể coi $f(x) \geqslant 0$ và f giảm trên khoảng $[1, +\infty)$. Vì $f(x) \geqslant 0$ trên $[1, +\infty)$ nên hàm số

$$F(y) = \int_1^y f(x)\,dx$$

là tăng trên $[1, +\infty)$. Do đó tồn tại $\lim_{y \to +\infty} F(y)$. Đó là một số không âm hữu hạn hoặc bằng $+\infty$. Ta chứng minh

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \quad (1)$$

Thật vậy, với mỗi số nguyên dương k, hàm số f giảm trên đoạn [k, k + 1]. Do đó trên đoạn này, ta có

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k), \text{ tức là}$$

$$u_{k+1} \leqslant f(x) \leqslant u_k$$

Do đó

$$\int_k^{k+1} u_{k+1}dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1} u_k dx,$$

$$u_{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant u_k.$$

Cộng các bất đẳng thức trên với k = 1, 2, ..., n − 1, ta được

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

Do đó, nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì từ bất đẳng thức thứ hai trong (1) suy ra $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_1^y f(x)dx$ là một số hữu hạn. Nếu $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_1^y f(x)dx$ là một số hữu hạn thì từ bất đẳng thức thứ nhất trong (1) suy ra rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.□

2.6. *Hệ quả.* Nếu số thực s là một hằng số thì chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

hội tụ với s > 1 và phân kì với s ⩽ 1.

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp s > 0. Hàm số $f(x) = \frac{1}{x^s}$ liên tục, dương và giảm trên khoảng $[1, +\infty)$.

• Nếu s = 1 thì $\int_1^y f(x)dx = \int_1^y \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^y = \ln y \to +\infty$ khi $y \to +\infty$.

Với $s \neq 1$, ta có

$$\int_1^y \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_1^y = \frac{y^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}.$$

• Nếu $0 < s < 1$ thì $\frac{y^{1-s}}{1-s} \to +\infty$ khi $y \to +\infty$. Do đó $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^s} = +\infty$

• Nếu $s > 1$ thì $\frac{y^{1-s}}{1-s} \to 0$ khi $y \to +\infty$. Do đó $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$.

Theo định lí 2.4, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ hội tụ với $s > 1$, phân kì với $0 < s \leq 1$.

• Nếu $s \leq 0$ thì $u_n = \frac{1}{n^s} \geq 1$ với mọi n. Do đó chuỗi được xét phân kì.□

2.7. Các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, trong đó s là một hằng số thực gọi là các chuỗi số Riman (Riemann). Với s = 1, ta được chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Chuỗi số này được gọi là chuỗi điều hòa. Chuỗi điều hòa là một chuỗi số phân kì.

Các chuỗi số Riman đóng một vai trò quan trọng trong lí thuyết chuỗi. Trong nhiều trường hợp, khi xét tính hội tụ của một chuỗi số, người ta so sánh nó với các chuỗi số Riman.

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ của chuỗi số với số hạng tổng quát

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ta có $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Vì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi được xét hội tụ.

Ví dụ 2. Xét tính hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ với

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4-1}}{n\sqrt{n+1}}$$

Ta có

$$u_n \sim \frac{n^{4/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/6}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi được xét phân kì.

Ví dụ 3. Cho một số thực $a > 0$. Xét tính hội tụ của các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{a}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{a}{n}$.

Ta có $\sin\frac{a}{n} \sim \frac{a}{n}$ và $\operatorname{tg}\frac{a}{n} \sim \frac{a}{n}$ khi $n \to \infty$. Vì chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{a}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{a}{n}$ phân kì.

Ví dụ 4. Xét tính hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ta có $\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\operatorname{tg}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

$$=\operatorname{tg}\frac{1}{n}\cdot 2\sin^2\frac{1}{2n}$$

$$\sim\frac{1}{n}\cdot 2\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{2n^3}\text{ khi } n\to\infty.$$

Do đó $u_n=\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$ khi $n\to\infty$.

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ nên chuỗi số đã cho hội tụ.

Ví dụ 5. Hằng số Ơle (Euler)

Xét dãy số $\{S_n\}$ xác định bởi

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1),\ n=1,2,\ldots$$

Đây là dãy tổng riêng của chuỗi số với số hạng tổng quát

$$u_n=\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ (n\geqslant 2).$$

Sử dụng khai triển của hàm số $x\longmapsto\ln(1+x)$ trên một lân cận của điểm O ta được

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\,\dot{0}(1)\sim\frac{1}{2n^2}\text{ khi } n\to\infty.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ. Dãy $\{S_n\}$ có một giới hạn hữu hạn C gọi là hằng số Ơle, tức là

$$\lim\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]=C.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln n] = 0$ nên

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C.$$

Phép tính gần đúng cho C = 0,57721... Người ta vẫn chưa biết C là một số hữu tỉ hay vô tỉ.

§3. CHUỖI SỐ HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI

3.1. Định nghĩa. Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

Ví dụ. Chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ là hội tụ tuyệt đối vì

chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

3.2. Định lí. Mỗi chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối đều hội tụ và

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (1)$$

Chứng minh. Ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi (xem định lí 1.7). Giả sử chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và ε là một số dương cho trước bất kì. Khi đó tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$(\forall n, p \in \mathbf{N}^*)\ n \geq N \Rightarrow |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Do đó

$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$ với mọi $n \geq N$ và mọi p.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ. Với mọi n, ta đều có

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k| \qquad (2)$$

Vì cả hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ đều hội tụ nên trong (2) cho $n \to \infty$, ta được bất đẳng thức (1).□

3.3. Dấu hiệu Côsi

Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số với $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$.

Khi đó

a) Nếu $l < 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối,

b) Nếu $l > 1$ thì chuỗi phân kì.

Nếu $l = 1$ thì chưa thể nói gì về tính chất của chuỗi số.

Chứng minh. a) Gọi r là một số sao cho $l < r < 1$. Vì $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$ nên $\sqrt[n]{|u_n|} \leq r$ với n đủ lớn. Do đó $|u_n| \leq r^n$ với n đủ lớn. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ hội tụ nên từ đó suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

b) Vì $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l > 1$ nên $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$ với n đủ lớn.

Do đó $|u_n| \geq 1$ với n đủ lớn. Vậy chuỗi đã cho phân kì.□

Tổng quát hơn ta có

3.4. Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số với $\limsup \sqrt[n]{|u_n|} = l$. Khi đó

a) Nếu $l < 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối,

b) Nếu $l > 1$ thì chuỗi phân kì.

Nếu $l = 1$ thì chưa thể nói gì về tính chất của chuỗi số.

*Chứng minh.** Ta biết rằng với một dãy số thực $\{a_n\}$ bất kì, ta có

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Do đó, nếu $\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$ và β là một số thực lớn hơn α thì $a_n \leq \beta$ với n đủ lớn.

a) Gọi r là một số thực sao cho $l < r < 1$. Vì $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l < r$ nên $\sqrt[n]{|u_n|} \leq r$ với n đủ lớn. Do đó $|u_n| \leq r^n$ với n đủ lớn. Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ hội tụ nên, theo dấu hiệu so sánh, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

b) Tồn tại một dãy con $\{u_{k_n}\}$ của dãy $\{u_n\}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_{k_n}|} = l > 1$. Do đó $\sqrt[n]{|u_{k_n}|} > 1$ với n đủ lớn. Từ đó suy ra $|u_{k_n}| > 1$ với n đủ lớn. Vậy chuỗi đã cho phân kì.□

Ví dụ 1. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Đây là chuỗi số dương. Ta có

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} \text{ khi } n \to \infty.$$

$l = \frac{1}{2} < 1$. Vậy chuỗi được xét hội tụ.

Ví dụ 2. Với hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ta đều có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Tuy nhiên chuỗi thứ nhất phân kì và chuỗi thứ hai hội tụ.

3.5. Dấu hiệu Đalămbe (D'Alembert)

Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số với $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n + 1|}{|u_n|} = l$.

Khi đó

a) Nếu $l < 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

b) Nếu $l > 1$ thì chuỗi phân kì.

Nếu $l = 1$ thì chưa thể nói gì về sự hội tụ của chuỗi số đã cho.

Chứng minh. a) Gọi r là một số sao cho $l < r < 1$. Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n + 1|}{|u_n|} = l < r$ nên $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant r$ với n đủ lớn.

Nếu cần thì thay đổi một số hữu hạn số hạng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, có thể coi $\frac{|u_n + 1|}{|u_n|} \leqslant r$ với mọi n. Khi đó

$$|u_2| \leqslant |u_1|r,\ |u_3| \leqslant |u_2|r \leqslant |u_1|r^2,\ \ldots,\ |u_n| \leqslant |u_1|r^{n-1},\ \ldots$$

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ hội tụ, từ đó suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

b) Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n + 1|}{|u_n|} = l > 1$ nên $\frac{|u_n + 1|}{|u_n|} \geqslant 1$, do đó $|u_{n+1}| \geqslant |u_n|$ với n đủ lớn. Chuỗi đã cho phân kì vì $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$.□

Ví dụ 1. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ hội tụ tuyệt đối vì

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} \text{ khi } n \to \infty.$$

Ví dụ 2. Ta lấy lại ví dụ 2 sau 3.4.

Với cả hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ta đều có $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$. Tuy nhiên, chuỗi đầu hội tụ còn chuỗi thứ hai phân kì.

Định lí 3.5 là một trường hợp riêng của định lí sau :

3.6. Định lí* Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một dãy số thực.

a) Nếu $\limsup_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối,

b) $\liminf_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l > 1$ thì chuỗi đã cho phân kì.

Chứng minh. a) Gọi r là một số sao cho $l < r < 1$. Với n đủ lớn ta có $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant r$, do đó $|u_{n+1}| \leqslant r|u_n|$. Tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi số đã cho được chứng minh tương tự như 3.5.a).

b) Ta biết rằng nếu $\{a_n\}$ là một dãy số thực thì

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Do đó nếu $\liminf_{n\to\infty} a_n = \alpha$ và β là một số thực nhỏ hơn α thì $a_n \geqslant \beta$ với n đủ lớn.

Từ giả thiết trong b) suy ra $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1$ với n đủ lớn. Do đó chuỗi số đã cho phân kì.□

3.7. Định lí (về sự thay đổi thứ tự các số hạng của một chuỗi số hội tụ tuyệt đối). Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số hội tụ tuyệt đối và $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$, $n \mapsto \sigma(n)$ là một song ánh. Đặt $v_n = u_{\sigma(n)}$. Khi đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số dương thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Thật vậy, đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$, $T = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Vì $\{S_n\}$ là một dãy tăng nên nó có giới hạn : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (S là một số hữu hạn hoặc $S = +\infty$) và $S_n \leqslant S$ với mọi n. Hiển nhiên $T_n \leqslant S$ với mọi n. Do đó $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n \leqslant S$. Thay đổi vai trò của hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, ta được $S \leqslant T$. Vậy $S = T$.

Bây giờ giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối. Theo điều vừa chứng minh ta có $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối. Gọi S_n và S là tổng riêng và tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, T_n và T là tổng riêng và tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Với mỗi n, lấy

$$k_n \geqslant \max\{\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(2), \ldots, \sigma^{-1}(n)\}.$$

Hiển nhiên $k_n \geqslant n$. Ta chọn sao cho $k_1 < k_2 < \ldots$ Vì trong tổng $T_{k_n} = v_1 + v_2 + \ldots + v_{k_n}$ có mặt $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nên

$$|T_{k_n} - S_n| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_j| \quad \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} T_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, tức là $T = S$.□

Chú ý. Định lí sau cho thấy các chuỗi số bán hội tụ, tức là các chuỗi số hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối, không có tính chất vừa nêu.

3.8. Định lí. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số bán hội tụ và c là một số thực cho trước tùy ý. Khi đó tồn tại một chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, nhận được từ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng, sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = c$.

Có thể thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ để chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ bằng $+\infty$ hoặc $-\infty$.

*Chứng minh.** Gọi $\sum p_n$ và $\sum q_n$, theo thứ tự, là các chuỗi được lập nên bởi tất cả các số hạng không âm ($u_n \geqslant 0$) và các số hạng âm ($u_n < 0$) của chuỗi số $\sum u_n$, theo thứ tự đã có. Ta có

$$S_{n+m} = P_n + Q_m \tag{1}$$

trong đó S_n, P_n, Q_n là các tổng riêng thứ n của các chuỗi số $\sum u_n$, $\sum p_n$ và $\sum q_n$. Từ hệ thức (1) suy ra rằng hai chuỗi số

$\sum p_n$ và $\sum q_n$ đều phân kì, vì nếu, chẳng hạn, chuỗi $\sum p_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum q_n$ cũng hội tụ. Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ vì

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_{n+m}| = P_n - Q_m.$$

Điều này trái với giả thiết.

Giả sử $c \geq 0$. Gọi n_1 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > c,$$

m_1 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) + (q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}) < c,$$

n_2 là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$$(p_1 + \dots + p_{n_1}) + (q_1 + \dots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_1+n_2}) > c,$$

và cứ tiếp tục như vậy.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$ và $\lim\limits_{m\to\infty} q_m = 0$ nên chuỗi số

$$(p_1 + \dots + p_{n_1}) + (q_1 + \dots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_1+n_2}) + \dots \quad (2)$$

có tổng là c (mỗi số hạng của chuỗi (2) là một tổng viết trong hai dấu ngoặc).

Bây giờ nếu bỏ các dấu ngoặc trong (2), ta được chuỗi số

$$p_1 + \dots + p_{n_1} + q_1 + \dots + q_{m_1} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_1+n_2} + \dots \quad (3)$$

Chuỗi (3) nhận được từ chỗi $\sum u_n$ bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng. Ta chứng minh chuỗi số (3) có tổng là c.

Thật vậy, mỗi tổng riêng của (3) nằm giữa hai tổng riêng liên tiếp của chuỗi (2) vì các số hạng trong hai ngoặc có cùng dấu.

Nếu $c \in \mathbf{R}$ là một số âm thì có thể thay đổi thứ tự các số hạng của $\sum u_n$ để được chuỗi $\sum v_n$ sao cho $\sum - v_n = - c$. Từ đó $\sum v_n = c$.

Tương tự có thể thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi $\sum u_n$ để được chuỗi $\sum v_n$ có tổng là $+\infty$ hoặc $-\infty$.□

Phép nhân các chuỗi số

3.9. Định nghĩa. Cho hai chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Đặt
$$w_o = u_o v_o,$$
$$w_1 = u_o v_1 + u_1 v_o,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_n = u_o v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_o = \sum_{i+j=n} u_i v_j \quad ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ gọi là tích của hai chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

3.10. Định lí. Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng là U và V thì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng $W = UV$.

*Chứng minh.** Trước hết ta chứng minh chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ là hội tụ tuyệt đối. Thật vậy, ta có

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} |u_i v_j| = \sum_{i+j\leq n} |u_i| |v_j| \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right)$$

Vì hai chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ là hội tụ tuyệt đối nên hai dãy $\{\sum_{i=0}^{n} |u_i|\}$ và $\{\sum_{j=0}^{n} |v_j|\}$ đều bị chặn trên. Do đó dãy $\{\sum_{k=0}^{n} |w_k|\}$ bị chặn trên. Vậy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ hội tụ tuyệt đối.

Gọi U_n, V_n và W_n là các tổng riêng thứ n của các chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$. Ta có

$$W_{2n} = \sum_{i+j \leqslant 2n} u_i v_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_i v_j + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n+1}^{2n-i} u_i v_j + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=n+1}^{2n-j} u_i v_j$$

$$= U_n V_n + A_n + B_n \qquad (1)$$

và

$$|A_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=n+1}^{2n} |u_i v_j| = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} |u_i|\Big)\Big(\sum_{j=n+1}^{2n} |v_j|\Big) .$$

Vì các chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ hội tụ nên khi $n \to 0$, ta có

$$\sum_{i=0}^{n} |u_i| \to \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \quad \text{và} \quad \sum_{j=n+1}^{2n} |v_j| \to 0$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$. Tương tự, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$. Bởi vậy từ (1) suy ra

$$\lim_{n\to\infty} W_{2n} = \lim_{n\to\infty} U_n \lim_{n\to\infty} V_n, \text{ tức là } W = UV. \square$$

3.11. Từ hai định lí 3.9 và 3.10 dễ dàng suy ra

Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ là hội tụ tuyệt đối và có tổng là U và V thì chuỗi số mà các số hạng là mọi tích $u_i v_j$,

$i, j = 0, 1, \ldots$ sắp xếp theo một thứ tự tùy ý cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là $W = UV$.

3.12. Tích của hai chuỗi số bán hội tụ có thể là một chuỗi số phân kì (ta sẽ chỉ rõ điều này trong phần bài tập).

Tuy nhiên có thể chứng minh được rằng nếu một trong hai chuỗi số hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ là hội tụ tuyệt đối thì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, tích của chúng là hội tụ và

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) \qquad (1)$$

Người ta cũng chứng minh được rằng nếu $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ là hai chuỗi số bán hội tụ và tích của chúng, chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ cũng hội tụ thì các tổng của chúng thỏa mãn hệ thức (1).

§4. CHUỖI SỐ ĐAN DẤU

4.1. Định nghĩa. Chuỗi số có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots \qquad (1)$$

hoặc

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \ldots \qquad (2)$$

trong đó $u_n > 0$ với mọi n gọi là chuỗi số đan dấu.

4.2. Dấu hiệu Labnit (Leibniz)

Định lí. Nếu $\{u_n\}$ là một dãy giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi số đan dấu (1) hoặc (2) trong 4.1 hội tụ.

Chứng minh. Xét chuỗi số (1) trong 4.1. Gọi $\{S_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi số (1). Ta có

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0 \text{ vì } u_{2n+2} \leqslant u_{2n+1}$$

Ngoài ra

$$S_{2n} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n}] \leqslant u_1 \ (1)$$

với mọi n. Dãy số $\{S_{2n}\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ :

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbf{R}. \text{ Vì } \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ nên}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S.$$

Vậy chuỗi (1) hội tụ và có tổng là S.

Vì chuỗi (2) là chuỗi đối của chuỗi (1) nên với các giả thiết đã cho, chuỗi (2) hội tụ. □

Ví dụ. Chuỗi số

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

hội tụ vì $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ là một dãy giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Chuỗi vừa xét được gọi là chuỗi điều hòa đan dấu.

Chuỗi điều hòa đan dấu hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối vì chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì. Chuỗi điều hòa đan dấu là bán hội tụ.

4.3. Hệ quả. Nếu

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

là một chuỗi đan dấu sao cho $u_n > 0$ với mọi n và $\{u_n\}$ là một dãy giảm đến 0 thì

a) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \leq u_1$,

b) $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots \leq u_{n+1}$

Chứng minh. a) suy ra từ bất đẳng thức (1) trong chứng minh định lí 4.2.

b) suy ra từ a.□

§5. MỘT VÀI DẤU HIỆU HỘI TỤ KHÁC

Trong nhiều trường hợp khi xét tính hội tụ của những chuỗi số không hội tụ tuyệt đối, ta cần đến một số dấu hiệu hội tụ khác với các dấu hiệu đã có. Mục này đề cập đến hai dấu hiệu thuộc loại này : Dấu hiệu hội tụ Điriclê và dấu hiệu Aben.

5.1. Dấu hiệu Điriclê (Dirichlet)

Định lí. Giả sử chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có dãy tổng riêng bị chặn.

a) Nếu dãy số $\{v_n\}$ hội tụ đến không và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - v_{n+1}|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ.

b) Đặc biệt, nếu $\{v_n\}$ là dãy giảm những số không âm hội tụ đến không thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ.

Chứng minh. Gọi $\{U_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Theo giả thiết, tồn tại $M > 0$ sao cho $|U_n| \leq M$ với mọi n.

a) Ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi. Cho $\varepsilon > 0$. Vì $u_n = U_n - U_{n-1}$ nên

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (U_k - U_{k-1})v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} U_{k-1} v_k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} u_k(v_k - u_{k+1}) + U_{n+p}v_{n+p} - U_n v_{n+1}$$

Do đó $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \leq M\sum_{k=n+1}^{n+p}|v_k - v_{k+1}| + M|v_{n+p}| + M|v_{n+1}|$ (1)

Theo giả thiết, tồn tại N nguyên dương sao cho

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p}|v_k - v_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{3M} \text{ và } |v_n| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Do đó từ (1) suy ra

$$n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ.

b) Nếu $\{v_n\}$ là một dãy số giảm đến 0 thì chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}|v_n - v_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1}) \text{ hội tụ. } \square$$

5.2. Dấu hiệu Aben

Định lí. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và dãy số $\{v_n\}$ đơn điệu và bị chặn thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp dãy $\{v_n\}$ tăng (nếu $\{v_n\}$ giảm thì dãy $\{-v_n\}$ tăng). Dãy $\{v_n\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l \in \mathbf{R}$. Đặt $w_n = l - v_n$. Dãy số $\{w_n\}$ giảm và hội tụ đến không. Theo định lí 5.1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n$ hội tụ. Vì $u_n v_n = lu_n - u_n w_n$ và các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} u_n w_n$ đều hội tụ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ.$\square$

Ví dụ 1. Chuỗi đan dấu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

trong đó $a_n > 0$ với mọi n và $\{a_n\}$ là một dãy giảm, hội tụ đến 0, thỏa mãn các điều kiện của dấu hiệu Điriclê. Thật vậy, ta có $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 1$, ... Dãy tổng riêng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bị chặn bởi 1. Do đó chuỗi đã cho hội tụ. Ta thấy lại dấu hiệu Laibnit.□

Ví dụ 2. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$; $p \in \mathbf{R}$.

1° Nếu $p > 1$ thì $|u_n| = \frac{|\sin nx|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$ với mọi n. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hội tụ. Do đó chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối với mọi $x \in \mathbf{R}$.

2° Giả sử $0 < p \leqslant 1$. Ta có

$$2\sin kx \sin\frac{x}{2} = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x.$$

Do đó

$$2\sin\frac{x}{2}(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

Nếu $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ thì

$$\sin x + \dots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Do đó nếu $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ thì

$$|\sin x + \dots + \sin nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Như vậy nếu $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ có dãy tổng riêng bị chặn, dãy số $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ giảm và hội tụ đến không. Theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi đã cho hội tụ. Hiển nhiên nếu $x = 2k\pi$ với một k nguyên nào đó thì chuỗi đã cho hội tụ.

Ta chứng minh với $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ chuỗi đã cho không hội tụ tuyệt đối (nếu $0 < p \leq 1$). Thật vậy, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p}$ hội tụ thì vì $\sin^2 nx \leq |\sin nx|$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^p}$ hội tụ. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^p}\right).$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^p}$ hội tụ với mọi $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nên từ đó suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ với $0 < p \leq 1$ hội tụ, điều này là vô lí.

Vậy nếu $0 < p \leq 1$ và $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ thì chuỗi đã cho bán hội tụ.

3° Giả sử $p \leq 0$. Trước hết ta chứng minh nếu $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ thì $\sin nx \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Thật vậy nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)x = 0$. Vì

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

nên từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0.$$

Điều này là vô lí vì $|\sin nx| + |\cos nx| \geq \sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$.

Từ đó suy ra nếu $p \leqslant 0$ thì $\frac{\sin nx}{n^p} \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi đã cho phân kì.

Ví dụ 3. Xét chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi}{n+1}$.

Chuỗi số đan dấu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit và dãy số $\left\{\cos \frac{\pi}{n+1}\right\}$ tăng và bị chặn. Do đó, theo dấu hiệu Aben, chuỗi số đã cho hội tụ.

Chương IX

DÃY HÀM SỐ VÀ CHUỖI HÀM SỐ

A. DÃY HÀM SỐ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ HỘI TỤ. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ ĐỀU

1.1. Miền hội tụ

Định nghĩa. Giả sử $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ là những hàm số thực xác định trên một tập hợp X. Với mỗi $x \in X$, $\{f_n(x)\}$ là một dãy số thực. Nếu dãy số thực $\{f_n(x)\}$ hội tụ thì ta nói rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ tại điểm x. Điểm x được gọi là điểm hội tụ của dãy hàm số $\{f_n\}$. Tập hợp các điểm hội tụ của dãy hàm số $\{f_n\}$ gọi là miền hội tụ của dãy hàm số đó.

Nếu dãy hàm số $\{f_n\}$ không hội tụ tại điểm $x \in X$ thì x gọi là điểm phân kì của dãy $\{f_n\}$.

Ví dụ. Xét dãy hàm số

$$f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

xác định trên **R**. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = 1, \\ 0 & \text{với } -1 < x < 1, \end{cases}$$

và dãy hàm phân kì tại điểm $x = -1$ và tại các điểm x mà $|x| > 1$. Vậy miền hội tụ của dãy hàm số đã cho là : $(-1, 1]$.

Hội tụ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = 1, \\ 0 & \text{với } -1 < x < 1 \end{cases}$

gọi là hàm số giới hạn của dãy hàm số đã cho.

1.2. Định nghĩa. Giả sử $f, f_1, f_2, \ldots$ là những hàm số xác định trên tập hợp X. Ta nói rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ điểm (hoặc hội tụ) đến f trên X nếu với mọi $x \in X$, ta đều có $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Như vậy dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến hàm số f trên X khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Số nguyên dương N phụ thuộc vào ε và nói chung phụ thuộc vào x.

Nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước đều tìm được một số nguyên dương N chung cho mọi $x \in X$ thì ta nói rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều đến f trên tập hợp X.

1.3. Định nghĩa. Giả sử $f, f_1, f_2, \ldots$ là những hàm số xác định trên tập hợp X. Ta nói rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số f trên tập hợp X nếu với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in X.$$

Khi đó, ta viết

$$f_n \rightrightarrows \text{ trên X hoặc } f_n \xrightarrow{u} f \text{ trên X.}$$

Định lí sau đây cho một điều kiện tương đương của định nghĩa 1.3.

1.4. Định lí. Giả sử $f, f_1, f_2, \ldots$ là những hàm số xác định trên tập hợp X. Khi đó $f_n \rightrightarrows f$ trên X nếu và chỉ nếu

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử $f_n \rightrightarrows f$ trên X và $\varepsilon > 0$ là một số cho trước bất kì. Khi đó, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in X.$$

Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

tức là
$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Đảo lại từ (1) suy ra rằng với $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại N nguyên dương sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in X.$$

Vậy $f_n \rightrightarrows f$ trên X. □

Hiển nhiên nếu $f_n \rightrightarrows f$ trên X thì dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến f trên X. Ví dụ sau đây cho thấy điều ngược lại không đúng.

Ví dụ. Giả sử $\{f_n\}$ là dãy hàm số xác định trên khoảng [0, 1) bởi

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vì $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$ với mọi $x \in [0, 1)$ nên dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến hàm số $f(x) = 0$ trên [0, 1). Tuy nhiên $f \not\rightrightarrows 0$ trên [0, 1).

Thật vậy, ta có

$$\sup_{x \in [0,1)} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,1)} x^n = 1 \not\to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Nếu α là một số sao cho $0 < \alpha < 1$ thì $f_n \rightrightarrows 0$ trên $[0, \alpha]$.

Thật vậy, ta có

$$\sup_{x \in [0,\alpha]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,\alpha]} x^n = \alpha^n \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

1.5. Tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều

Định lí. Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy hàm số xác định trên tập hợp X. Khi đó $\{f_n\}$ hội tụ đều trên X nếu và chỉ nếu với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

với mọi $x \in X$.

Chứng minh. Giả sử dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số f trên X và $\varepsilon > 0$ là một số cho trước bất kì. Khi đó, tồn tại một số nguyên dương N sao cho $n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ với mọi $x \in X$.

Nếu $m \geqslant N$ và $n \geqslant N$ thì

$|f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ và $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ với mọi $x \in X$,

do đó $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$.

Đảo lại, giả sử dãy hàm số thỏa mãn điều kiện (1). Khi đó với mỗi $x \in X$, dãy số $\{f_n(x)\}$ là một dãy Côsi. Do đó dãy hội tụ trong **R** : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Ta đã xác định một hàm số f trên X. Trong (1) cố định $x \in X$ và $n \geqslant N$. Cho $m \to \infty$, ta được $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ (2)

Bất đẳng thức (2) đúng với mọi $n \geqslant N$ và với mọi $x \in X$. Vậy $f_n \rightrightarrows f$ trên X. □

§2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ GIỚI HẠN CỦA MỘT DÃY HÀM SỐ HỘI TỤ ĐỀU

2.1. Tính liên tục

Định lí. Giả sử I là một khoảng của **R** và $\{f_n\}$ là một dãy hàm số liên tục tại điểm $x_o \in I$. Nếu $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số $f : I \to \mathbf{R}$ trên I thì f liên tục tại điểm x_o.

Chứng minh. Với mọi $x \in I$, ta có

$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) -$
$- f(x_0)|$ (1)

Vì $f_n \rightrightarrows f$ trên I nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N nguyên dương sao cho

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

với mọi $x \in I$. Lấy $n \geq N$ và cố định n. Vì f_n liên tục tại x_0 nên tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in I)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$(\forall x \in I)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Vậy f liên tục tại điểm x_0. □

Chú ý. a) Trong định lí 2.1, có thể thay khoảng I bởi một tập hợp bất kì $X \subset \mathbf{R}^p$. Chứng minh định lí không có gì thay đổi.

b) Trong giả thiết của định lí 2.1, không thể bỏ qua điều kiện hội tụ đều của dãy hàm số $\{f_n\}$.

Ví dụ. Cho dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định trên đoạn [0, 1] bởi

$$f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Các hàm số f_n đều liên tục trên [0, 1]. Dễ dàng thấy rằng dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ điểm trên [0, 1] đến hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{với } x = 1. \end{cases}$$

Hàm số giới hạn f gián đoạn tại điểm $x = 1$. Từ định lí 2.1 suy ra rằng dãy hàm $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên [0, 1].

c) Tính hội tụ đều của dãy hàm số $\{f_n\}$ trong định lí 2.1 chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần. Ta lấy lại ví dụ sau định lí 1.4.

Dãy hàm số

$$f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \dots$$

(gồm những hàm số liên tục trên khoảng $[0, 1)$) chỉ hội tụ điểm chứ không hội tụ đều đến hàm số $f(x) = 0$ trên $[0, 1)$. Thế nhưng hàm số giới hạn f lại liên tục trên khoảng này.

Như vậy, tính liên tục của các hàm số f_n và tính liên tục của hàm số giới hạn f không kéo theo tính hội tụ đều của dãy hàm số $\{f_n\}$. Tuy nhiên, ta có

2.2. Định lí Đini (Dini) Giả sử dãy hàm số liên tục $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến hàm số liên tục f trên đoạn $[a, b]$. Nếu $\{f_n\}$ là một dãy đơn điệu trên $[a, b]$ thì $f_n \rightrightarrows f$ trên $[a, b]$.

*Chứng minh.** Ta chứng minh cho trường hợp $\{f_n\}$ là một dãy tăng (nếu $\{f_n\}$ là một dãy giảm thì $\{-f_n\}$ là một dãy tăng). Đặt $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$, $x \in [a, b]$. Khi đó $\{\varphi_n\}$ là một dãy giảm hội tụ đến 0 : $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Ngoài ra $\varphi_n(x) \geqslant 0$ trên $[a, b]$.

Giả sử $f_n \not\rightrightarrows f$ trên $[a, b]$. Khi đó $\varphi_n \not\rightrightarrows 0$ trên $[a, b]$. Tồn tại một số $\varepsilon > 0$ có tính chất sau :

Với mọi n, tồn tại $m \geqslant n$ và tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho

$$\varphi_m(x_n) \geqslant \varepsilon.$$

Vì $\{\varphi_n\}$ là một dãy giảm nên từ đó suy ra $\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon$. Ta được một dãy điểm $\{x_n\}$ của $[a, b]$. Theo định lí Bônzanô-Vâyơxtrát, dãy $\{x_n\}$ có một dãy con $\{x_{k_n}\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_o \in [a, b]$.

Với mỗi số nguyên dương j, ta có $k_n \geqslant j$ với n đủ lớn. Do đó

$$\varphi_j(x_{k_n}) \geqslant \varphi_{k_n}(x_{k_n}) \geqslant \varepsilon.$$

Vì φ_j liên tục nên từ đó suy ra

$$\varphi_j(x_o) = \lim_{n\to\infty} \varphi_j(x_{k_n}) \geqslant \varepsilon \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) đúng với mọi j. Điều này không thể có vì $\lim_{j\to\infty} \varphi_j(x_o) = 0$.□

Chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân

2.3. Định lí. Giả sử dãy hàm số liên tục $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số f trên đoạn [a, b] và $x_o \in [a, b]$. Đặt

$$F_n(x) = \int_{x_o}^{x} f_n(x)\,dx\ ,\ F(x) = \int_{x_o}^{x} f(x)\,dx,\ x \in [a, b].\ \text{Khi đó}$$

$$F_n \rightrightarrows F \text{ trên } [a, b].$$

Chứng minh. Vì các hàm số f_n đều liên tục trên [a, b] và $f_n \rightrightarrows f$ trên [a, b] nên f liên tục trên [a, b]. Do đó f khả tích trên [a, b] và f khả tích trên mỗi đoạn chứa trong [a, b]. Với mọi $x \in [a, b]$,

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_o}^{x} f_n(x)dx - \int_{x_o}^{x} f(x)dx\right| = \left|\int_{x_o}^{x} [f_n(x) - f(x)]dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,dx = (b - a)\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Do đó

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \leqslant (b - a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Vì $f_n \rightrightarrows f$ trên [a, b] nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Do đó

từ bất đẳng thức trên suy ra $F_n \rightrightarrows F$ trên [a, b].□

Từ định lí trên suy ra

2.4. Hệ quả. Nếu dãy hàm số liên tục $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số f trên đoạn [a, b] thì

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

tức là
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

(Như vậy kí hiệu lim đã được chuyển từ ngoài vào trong dấu $\int$).

Chú ý. Ví dụ sau cho thấy trong các giả thiết của 2.4, không thể bỏ qua điều kiện hội tụ đều của dãy hàm số $\{f_n\}$.

Dãy hàm số $\{f_n\}$ với

$$f_n(x) = n^2xe^{-nx},\ x \in [0,\ 1]$$

hội tụ điểm đến hàm số $f(x) = 0$ trên $[0, 1]$. Ta sẽ chỉ ra rằng dãy hàm $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên đoạn này. Thật vậy, ta có

$$|f_n(x) - f(x)| = n^2xe^{-nx}$$

Với mỗi n, ta có $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0\ ,1]$ và $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \dfrac{n}{e}$. Do đó

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{n}{e} \text{ và } \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Ta có

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0,$$

còn

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}[1 - e^{-n}(n + 1)] = 1.$$

• Ví dụ sau cho thấy tính hội tụ đều của dãy hàm số $\{f_n\}$ chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

Ví du. Xét dãy hàm số

$$f_n(x) = nx(1-x)^n,\ n = 1, 2, \dots \text{ trên } [0, 1].$$

Dễ dàng thấy rằng $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến hàm số $f(x) = 0$ trên đoạn $[0, 1]$. Tuy nhiên $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên đoạn này.

Thật vậy, ta có

$$|f_n(x) - f(x)| = nx(1-x)^n,\ x \in [0, 1].$$

Vì $x_n = \dfrac{1}{n} \in [0, 1]$ với mọi n và $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ nên

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \text{ với mọi n.}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ nên $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$ khi $n \to \infty$.

Thế nhưng ta vẫn có đẳng thức.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

2.5. Đạo hàm của hàm số giới hạn

Định lí. Giả sử dãy hàm số $\{f_n\}$ có các đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu

a) Dãy $\{f_n\}$ hội tụ tại một điểm $x_o \in [a, b]$,

b) Dãy $\{f_n'\}$ hội tụ đều đến hàm số g trên $[a, b]$ thì dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều đến một hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ và $f'(x) = g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$.

(Nói một cách khác, ta có $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$)

Chứng minh. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_o)$. Vì $f_n' \rightrightarrows g$ trên $[a, b]$ và các hàm số f_n' đều liên tục trên $[a, b]$ nên g liên tục trên đoạn này. Do đó g khả tích trên $[a, b]$. Đặt

$$f(x) = \alpha + \int_{x_o}^{x} g(t)\,dt,\ x \in [a, b]$$

Ta có $f'(x) = g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ Ta chứng minh

$f_n \rightrightarrows f$ trên $[a, b]$. Thật vậy, ta có

$$f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n'(t)dt, \ x \in [a, b].$$

Vì $f_n' \rightrightarrows g$ trên $[a, b]$ nên, theo định lí 2.3,

$$\int_{x_o}^{x} f_n'(x)dx \rightrightarrows \int_{x_o}^{x} g(t)dt \text{ trên } [a, b].$$

Ngoài ra vì $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_o) = \alpha$ nên từ đó suy ra dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số f trên $[a, b]$.□

Chú ý. Trong giả thiết của định lí 2.5, không thể bỏ qua điều kiện hội tụ đều của dãy đạo hàm $\{f_n'\}$. Song đó chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

B. CHUỖI HÀM SỐ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA VỀ HỘI TỤ. TIÊU CHUẨN VÀ DẤU HIỆU VỀ HỘI TỤ ĐỀU

1.1. Định nghĩa. a) Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy hàm số xác định trên tập hợp X. Nếu với phần tử $x \in X$, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ thì ta nói rằng chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tại điểm x. Điểm x được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm số.

Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi hàm số gọi là miền hội tụ của nó. Nếu $x \in X$ không phải là một điểm hội tụ của chuỗi hàm số thì x được gọi là điểm phân kì.

b) Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi hàm số trên tập hợp X (tức là các hạng tử u_1, u_2, ... của chuỗi hàm là những hàm số xác định trên X). Tổng $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm số đã cho. Hiển nhiên chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tại điểm $x \in X$ khi và chỉ khi dãy hàm số $\{S_n\}$ hội tụ tại điểm x và miền hội tụ của chuỗi hàm cũng là miền hội tụ của dãy tổng riêng của nó.

Ví dụ. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ hội tụ với $|x| < 1$ và phân kì với $|x| \geqslant 1$. Miền hội tụ của chuỗi hàm là : $(-1, 1)$.

1.2. Định nghĩa. a) Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi hàm số trên tập hợp X. Ta nói rằng chuỗi hàm hội tụ (hoặc hội tụ điểm) trên X nếu nó hội tụ tại mỗi điểm của X.

Hiển nhiên, chuỗi hàm số hội tụ trên X khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó hội tụ trên X.

Hàm số $x \mapsto S(x)$, $x \in X$, trong đó $S(x)$ là tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ gọi là tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

b) Giả sử chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ trên tập hợp X, các hàm số S_n và S, theo thứ tự, là tổng riêng thứ n và tổng của chuỗi hàm. Hàm số

$$r_n = S - S_n$$

gọi là phần dư thứ n của chuỗi hàm số đã cho.

Hiển nhiên $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x) = 0$ và

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{với mọi } x \in X.$$

Chuỗi hàm số hội tụ đều

1.3. Định nghĩa. Giả sử chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ trên tập hợp X, S là tổng của nó. Ta nói rằng chuỗi hàm số hội tụ đều trên X nếu dãy tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ đều đến S trên X, tức là

$$\sup_{x \in X} |S(x) - S_n(x)| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

$$\Leftrightarrow \quad \sup_{x \in X} |r_n(x)| = \sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

1.4. Tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của một chuỗi hàm số

Định lí. Giả sử $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ là những hàm số xác định trên tập hợp X. Khi đó chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên X nếu và chỉ nếu với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$(\forall n, p \in \mathbf{N}^*)\ n \geq N \Rightarrow |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$.

Chứng minh. Gọi $\{S_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Chuỗi hàm hội tụ đều trên X khi và chỉ khi dãy hàm $\{S_n\}$ hội tụ đều trên X. Theo tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của một dãy hàm số, từ đó suy ra chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên X khi và chỉ khi với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$(\forall n, p \in \mathbf{N}^*)\ n \geq N \Rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$,

tức là $|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$.

1.5. Dấu hiệu Vâyơxtrat

Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi hàm số xác định trên tập hợp X và $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ là một chuỗi số dương hội tụ. Nếu

$$|u_n(x)| \leq \alpha_n \text{ với mọi } x \in X \text{ và với mọi } n.$$

thì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên X.

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geq N \Rightarrow \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p} < \varepsilon$$

với mọi p nguyên dương. Do đó với mọi $n \geq N$ và với mọi p, ta có

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leq \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} < \varepsilon \text{ với mọi } x \in X.$$

Theo định lí 1.4, từ đó suy ra rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên X.□

Ví dụ. Chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ (điểm) đến hàm số $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ trên khoảng $(-1, 1)$. Song chuỗi hàm đã cho không hội tụ đều trên $(-1, 1)$. Thật vậy, ta có

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

và

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}, \ x \in (-1, 1).$$

Vì với mỗi n, $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty$ nên $\sup\limits_{x \in (-1,1)} |r_n(x)| = +\infty$.

Tuy nhiên nếu α là một số sao cho $0 < \alpha < 1$ thì

$$|x|^n \leq \alpha^n \text{ với mọi } x \in [-\alpha, \alpha]$$

Ngoài ra $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ là một chuỗi số hội tụ. Do đó, theo dấu hiệu

Vâyσxtrat, chuỗi hàm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ đều trên đoạn $[-\alpha, \alpha]$

§2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TỔNG CỦA MỘT CHUỖI HÀM

Từ định nghĩa chuỗi hàm số hội tụ đều và các tính chất của giới hạn của một dãy hàm số hội tụ đều, dễ dàng suy ra các tính chất sau của tổng của một chuỗi hàm số hội tụ đều.

Tính liên tục

2.1. Định lí. Giả sử chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên khoảng I của **R**. Nếu các hàm số u_n đều liên tục tại điểm $x_0 \in I$ thì tổng S của chuỗi hàm số liên tục tại điểm x_0.

Như vậy với các giả thiết của định lí, ta có

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

Kí hiệu lim đã được chuyển từ ngoài vào trong kí hiệu $\sum$.

Chú ý. Định lí 2.1 vẫn đúng nếu khoảng I được thay bởi một tập hợp bất kì $X \subset \mathbf{R}^p$.

2.2. Định lí.* Giả sử chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên tập hợp $X \subset \mathbf{R}^p$ và x_0 là một điểm tụ của X. Nếu với mọi n, ta đều có $\lim_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Chứng minh. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Vì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên X nên, theo tiêu chuẩn Côsi, tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$(\forall n, p \in \mathbf{N}^*)\ n \geq N \Rightarrow |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

với mọi $x \in X$. Trong bất đẳng thức trên cho $x \to x_0$, ta được

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq \varepsilon \text{ với } n \geq N$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

Với mỗi n, đặt

$$\overline{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) \text{ nếu } x \in X \setminus \{x_0\}, \\ a_n \text{ nếu } x = x_0 \end{cases}$$

Từ tính hội tụ đều của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ trên X và tính hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n(x_0)$ dễ dàng suy ra rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_n$ hội tụ đều trên $X \cup \{x_0\}$. Vì các hàm số $\overline{u}_n$ đều liên tục tại điểm x_0 nên áp dụng định lí 2.1, ta có đẳng thức cần chứng minh.□

2.3. Định lí. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi hàm số liên tục hội tụ đều trên đoạn [a, b] và S là tổng của chuỗi hàm. Khi đó

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx,$$

tức là

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Người ta nói rằng có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi hàm.

Chứng minh. Gọi $\{S_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Các hàm số S_n đều liên tục trên [a, b] và $S_n \rightrightarrows S$ trên [a, b]. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Mà

$$\int_a^b S_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx,$$

nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx \right) = \int_a^b S(x)dx,$$

tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.\square$$

2.4. Với các giả thiết của định lí 2.3, ta có

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$ hội tụ đều trên [a, b] về hàm số $\int_a^x S(t)dt$.

2.5. Định lí. Giả sử các hàm số u_1, u_2, ..., u_n,... có đạo hàm liên tục trên đoạn [a, b]. Nếu

a) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tại một điểm $x_0 \in [a, b]$,

b) Chuỗi đạo hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ hội tụ đều trên [a, b] thì

- Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên [a, b],

- Tổng S của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có đạo hàm liên tục trên [a, b] và

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),\ x \in [a, b],$$

tức là

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Người ta nói rằng có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi hàm.

Chú ý. Cũng như đối với các dãy hàm số, trong các định lí của mục này, điều kiện hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không thể bỏ qua, song đó chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần.

§3. MỘT VÀI DẤU HIỆU HỘI TỤ ĐỀU KHÁC

Khi xét tính hội tụ đều của một chuỗi hàm số không hội tụ tuyệt đối, người ta thường sử dụng hai dấu hiệu sau :

3.1. Dấu hiệu Điriclê

Định lí. Giả sử

a) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có dãy tổng riêng bị chặn đều trên tập hợp X, tức là tồn tại một số M > 0 sao cho

$$\sup_{x\in X} |S_n(x)| = \sup_{x\in X} \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq M \text{ với mọi } n,$$

b) Dãy hàm số $\{v_n\}$ giảm trên X (tức là với mỗi $x \in X$, $\{v_n(x)\}$ là một dãy số giảm) và $v_n \rightrightarrows 0$ trên X.

Khi đó chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ đều trên X.

Chứng minh. Ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của chuỗi hàm số. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Với mọi số nguyên dương n, k ta có

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [S_k(x) - S_{k-1}(x)]v_k(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x)v_k(x) - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(x)v_{k+1}(x)\right|$$

$$= \left|S_{n+p}(x)v_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)[v_k(x) - v_{k+1}(x)] - S_n(x)v_{n+1}(x)\right| \quad (1)$$

Vì với mỗi $x \in X$, $\{v_n(x)\}$ là một dãy số giảm nên $v_k(x) - v_{k+1}(x) \geqslant 0$. Ngoài ra, vì $\{v_n(x)\}$ giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = 0$ nên $v_n(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in X$. Theo giả thiết $|S_n(x)| \leqslant M$ với mọi $x \in X$ và với mọi n. Do đó từ bất đẳng thức (1) suy ra

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_{k(x)}v_k(x)\right| \leqslant M\left[v_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}[v_k(x) - v_{k+1}(x)] + v_{n+1}(x)\right]$$

$= 2Mv_{n+1}(x)$ với mọi $x \in X$.

Vì $v_n \rightrightarrows 0$ trên X nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow 0 \leqslant v_{n+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ với mọi } x \in X.$$

Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\, v_k(x)\right| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in X.$$

Vậy chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ đều trên X.□

3.2. Dấu hiệu Aben (Abel)

Định lí. Giả sử

a) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên tập hợp X,

b) Dãy hàm số $\{v_n\}$ đơn điệu trên X (tức là với mỗi $x \in X$, $\{v_n(x)\}$ là một dãy số đơn điệu) và bị chặn đều trên X, tức là tồn tại một số $M > 0$ sao cho

$$\sup_{x\in X} |v_n(x)| \leqslant M \text{ với mọi } n.$$

Khi đó chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ đều trên X.

Chứng minh. Giả sử $\{v_n\}$ là một dãy tăng trên X (Nếu $\{v_n\}$ là một dãy giảm trên X thì $\{-v_n\}$ là một dãy tăng trên X). Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Vì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên X nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$(\forall n, p \in \mathbf{N}^*)\ n \geqslant N \Rightarrow |r_{n,p}(x)| = |u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ (1) với mọi $x \in X$

Ta có

$$u_{n+1} = r_{n,1},\ u_{n+k} = r_{n,k} - r_{n,k-1} \text{ với } k \geqslant 2.$$

Do đó với mọi n, p nguyên dương, ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| =$$

$$= \left|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + \sum_{k=2}^{p} [r_{n,k}(x) - r_{n,k-1}(x)]v_{n+k}(x)\right|$$

$$= \left|r_{n,1}(x)v_{n+1}(x) + \sum_{k=2}^{p} r_{n,k}(x)v_{n+k}(x) - \sum_{k=1}^{p-1} r_{n,k}(x)v_{n+k+1}(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{p-1} r_{n,k}(x)\,[v_{n+k}(x) - v_{n+k+1}(x)] + r_{n,p}(x)v_{n+p}(x)\right| \qquad (2)$$

Vì $\{v_n\}$ là một dãy tăng nên từ (1) và (2) suy ra với mọi $n \geqslant N$ và với mọi p, ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)v_{n+k}(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\sum_{k=1}^{p-1}[v_{n+k+1}(x) - v_{n+k}(x)] + \frac{\varepsilon}{3M}|v_{n+p}(x)|$$

$$= \frac{\varepsilon}{3M}\,[v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)] + \frac{\varepsilon}{3M}\,|v_{n+p}(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M = \varepsilon \text{ với mọi } x \in X.$$

Theo tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của chuỗi hàm số, từ đó suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ hội tụ đều trên X.□

Ví dụ 1. Xét chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$$

Vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên ta không áp dụng được dấu hiệu Vâyơxtrát. Tuy nhiên, nếu đoạn [a, b] chứa trong khoảng $(0, 2\pi)$ thì dãy tổng riêng $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$, n = 1, 2, ... của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ bị chặn đều trên [a, b] (xem ví dụ 2 sau VIII.5.2). Ngoài ra, dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ giảm và hội tụ đến không nên, theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên [a, b].

Ví dụ 2. Xét chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$$

trên đoạn $I = [0, 1]$.

Chuỗi điều hòa đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ. Dãy hàm số $\{e^{-nx}\}$ giảm trên I và bị chặn đều trên I : $0 < e^{-nx} \leq 1$ với mọi $x \in I$. Theo dấu hiệu Aben, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên I. (Chú ý rằng dãy hàm số $\{e^{-nx}\}$ không hội tụ đều đến không trên I).

C. CHUỖI HÀM SỐ LŨY THỪA

§1. ĐỊNH NGHĨA. BÁN KÍNH HỘI TỤ

1.1. Định nghĩa. Chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (1)$$

trong đó a_n là những hằng số thực, x là biến số thực gọi là chuỗi hàm số lũy thừa (gọi tắt là chuỗi lũy thừa).

Một cách tổng quát, chuỗi lũy thừa có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_o)^n = a_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \dots + a_n(x - x_o)^n + \dots,$$

x_o là một số thực không đổi. Tuy nhiên, nếu đặt $t = x - x_o$ thì chuỗi hàm số này được đưa về chuỗi hàm số (1).

Hiển nhiên mọi chuỗi lũy thừa (1) đều hội tụ tại điểm O. Do đó miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là một tập hợp khác rỗng.

1.2. Bổ đề Aben (Abel). Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x_o \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x mà $|x| < |x_o|$.

Chứng minh. Vì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n^n$ hội tụ nên $\lim_{n\to\infty} a_n x_o^n = 0$. Do đó dãy số $\{a_n x_o^n\}$ bị chặn : tồn tại một số $k > 0$ sao cho

$$|a_n x_o^n| \leq k \text{ với mọi } n.$$

Nếu x là một số thực sao cho $|x| < |x_o|$ thì

$$|a_n x^n| = |a_n x_o^n| \left|\frac{x}{x_o}\right|^n \leq k \left|\frac{x}{x_o}\right|^n \text{ với mọi } n.$$

Vì $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ nên chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ. Do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ hội tụ. □

1.3. Định lí. Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Tồn tại một phần tử duy nhất $R \in [0, +\infty]$ sao cho

a) Nếu $|x| < R$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối,

b) Nếu $|x| > R$ thì chuỗi phân kì.

Chứng minh. Gọi X là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Ta biết rằng $X \neq \varnothing$. Đặt

$$R = \sup_{x \in X} |x| \ (R \in \mathbf{R} \text{ hoặc } R = +\infty).$$

a) Nếu $|x| < R$ thì tồn tại $x_o \in X$ sao cho $|x| < |x_o|$.

Vì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_o^n$ hội tụ nên theo bổ đề 1.2, chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ tuyệt đối.

b) Nếu $|x| > R$ thì $x \notin X$. Do đó chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ phân kì.

Tính duy nhất của R. Nếu tồn tại hai số R và R' cùng thỏa mãn các điều kiện a) và b) của định lí và $R \neq R'$, chẳng hạn $R < R'$, thì với mọi $x \in \mathbf{R}$ sao cho $R < |x| < R'$, chuỗi vừa hội tụ tuyệt đối vừa phân kì. Điều này là vô lí.□

1.4. Định nghĩa. Số $R \in [0, +\infty]$ trong định lí 1.3 gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Khoảng $(-R, R)$ gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Ví dụ 1. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$ và phân kì với $|x| > 1$. Vậy bán kính hội tụ của chuỗi hàm là $R = 1$. Để ý rằng hàm không hội tụ tại các điểm $x = \pm 1$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Ta áp dụng dấu hiệu Đalămbe. Với $x \neq 0$, ta có

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbf{R}$. Vậy bán kính hội tụ của chuỗi hàm là $R = +\infty$.

Nhận xét. Từ kết luận trên suy ra rằng với mọi $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Ví dụ 3. Xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$$

Với $x \neq 0$, ta có

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n x|} = \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = (n+1)|x| \to +\infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi lũy thừa phân kì tại mọi điểm $x \neq 0$. Bán kính hội tụ của chuỗi hàm là $R = 0$.

Ví dụ 4. Xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = \frac{n}{n+1}|x| \to |x| \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi hội tụ với $|x| < 1$, phân kì với $|x| > 1$. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $R = 1$.

Chuỗi phân kì tại điểm $x = 1$ và hội tụ tại điểm $x = -1$.

Như vậy tại hai đầu $-R$ và R của khoảng hội tụ $(-R, R)$ của chuỗi lũy thừa, chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kì.

Ví dụ 5. Ta biết rằng nếu n là một số tự nhiên thì

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^n$$

Bây giờ ta xét chuỗi lũy thừa

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

trong đó α là một số cho trước.

- Nếu α là một số tự nhiên thì các hệ số của $x^{\alpha+1}$, $x^{\alpha+2}$, ... đều bằng không

- Nếu α không phải là một số tự nhiên các hệ số của x^n đều khác không với mọi n. Khi đó, với $x \neq 0$, ta có

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n} \right| =$$

$= \left| \dfrac{\alpha - n}{n+1} \right| |x| \to |x|$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hàm hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$ và phân kì với $|x| > 1$. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = 1$.

Nhận xét. Từ kết luận trên suy ra rằng nếu $|x| < 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 0$$

Thay α bởi $\alpha - 1$, ta được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^n = 0.$$

1.5. Định lí Adama (Hadamard). Giả sử $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là một chuỗi lũy thừa và

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \text{ nếu } 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty \text{ nếu } \rho = 0, \\ 0 \text{ nếu } \rho = +\infty \end{cases}$$

Chứng minh. Đặt $u_n(x) = a_n.x^n$. Với $x \neq 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|) = \rho|x|$$

Theo định lí VIII.3.4, chuỗi lũy thừa hội tụ nếu $\rho|x| < 1$ và phân kì nếu $\rho|x| > 1$. Do đó

- Nếu $0 < \rho < +\infty$ thì chuỗi hội tụ với $|x| < \dfrac{1}{\rho}$ và phân kì với $|x| > \dfrac{1}{\rho}$. Vậy bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = \dfrac{1}{\rho}$.

- Nếu $\rho = 0$ thì $\rho|x| = 0$. Chuỗi lũy thừa hội tụ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Vậy bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = +\infty$.

• Nếu $\rho = +\infty$ thì $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = +\infty$ (với mọi $x \neq 0$).

Chuỗi hàm phân kì tại mọi điểm $x \neq 0$. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = 0$.□

Ví dụ. Xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n .$$

Ta có

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} [3+(-1)^n] = 4.$$

Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là : $R = \frac{1}{4}$.

§2. TỔNG VÀ TÍCH CỦA HAI CHUỖI LŨY THỪA

Dễ dàng thấy rằng tổng và tích của hai chuỗi lũy thừa cũng là một chuỗi lũy thừa. Quan hệ giữa bán kính hội tụ của chuỗi tổng và tích với các bán kính hội tụ của hai chuỗi lũy thừa đã cho được cho bởi hai định lí sau.

2.1. Định lí. Nếu các chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ là R, R' và chuỗi tổng $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ có bán kính hội tụ là R'' thì

$$R'' \geqslant \min(R, R')$$

Chứng minh. Giả sử x là một số thực sao cho $|x| < \min(R, R')$. Khi đó $|x| < R$ và $|x| < R'$. Do đó các chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ đều hội tụ tuyệt đối. Vì

$$|(a_n + b_n)x^n| \leqslant |a_n x^n| + |b_n x^n| \text{ với mọi } n$$

nên chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} |(a_n + b_n)x^n|$ hội tụ. Do đó

$$R'' \geqslant \min(R, R'). \square$$

2.2. Định lí. Nếu các chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ là R, R' và chuỗi tích của chúng

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$
$$\dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)x^n + \dots$$

có bán kính hội tụ là R'' thì

$$R'' \geqslant \min(R, R').$$

Chứng minh. Nếu $|x| < \min(R, R')$ thì cả hai chuỗi lũy thừa đã cho đều hội tụ tuyệt đối. Do đó chuỗi tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối. Từ đó suy ra $R'' \geqslant \min(R, R')$ $\square$

§3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA CHUỖI LŨY THỪA

3.1. Định lí. Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ và $0 < \rho < R$. Khi đó chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên đoạn $[-\rho, \rho]$.

Chứng minh. Chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ hội tụ và

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| \rho^n \text{ với mọi } x \in [-\rho, \rho]$$

Theo dấu hiệu Vâyơtrát, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-\rho, \rho]$.□

Từ đó dễ dàng suy ra

3.2. Định lí. Tổng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ liên tục trên khoảng hội tụ $(-R, R)$ của nó.

Chứng minh.

Giả sử $x_0 \in (-R, R)$. Gọi ρ là một số dương sao cho $\rho < R$ và $x_0 \in [-\rho, \rho]$. Vì chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đều trên $[-\rho, \rho]$ và các hạng tử đều là những hàm số liên tục trên $[-\rho, \rho]$ nên tổng S của chuỗi hàm liên tục trên $[-\rho, \rho]$. Do đó S liên tục tại x_0.□

Như vậy, nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ thì với mọi $x_0 \in (-R, R)$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \qquad (1)$$

Ta biết rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có thể hội tụ hoặc phân kì tại các điểm R và $-$ R. Định lí sau cho thấy nếu chuỗi lũy thừa hội tụ tại R (hoặc $-$ R) thì ta cũng có đẳng thức tương tự như (1).

3.3. Định lí (Bổ đề Aben). Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ và S là tổng của nó. Khi đó

a) Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm R thì

$$\lim_{x \to R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$$

b) Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm $-R$ thì

$$\lim_{x \to (-R)^+} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n.$$

*Chứng minh.** a) Đặt $x = rR$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ và $b_n = a_nR^n$, ta được $a_nx^n = b_nr^n$. Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_nr^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{1}$$

Thật vậy, chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tụ. Với mỗi $r \in [0, 1]$, $\{r^n\}$ là một dãy số giảm. Hơn nữa, $\sup_{x \in [0,1]} r^n \leqslant 1$ với mọi n, tức là dãy hàm số $\{r^n\}$ bị chặn đều trên $[0, 1]$. Theo dấu hiệu Aben (xem định lí B.3.2), chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} b_nr^n$ hội tụ đều trên $[0, 1]$. Do đó tổng của nó liên tục trên $[0, 1]$ và ta có đẳng thức (1).

b) được chứng minh tương tự.□

3.4. *Chú ý.* Mệnh đề đảo của định lí trên không đúng : Có những chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ với bán kính hội tụ $R > 0$ sao cho $\lim_{x \to R^-} S(x)$ tồn tại nhưng $\sum_{n=0}^{\infty} a_nR^n$ phân kì. Chẳng hạn, chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^nx^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^nx^n + \dots$$

có bán kính hội tụ $R = 1$ và tổng $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $-1 < x < 1$.

Ta có $\lim_{x \to 1} S(x) = \dfrac{1}{2}$. Tuy nhiên chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ phân kì.

3.5. Định nghĩa. Chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

gọi là chuỗi đạo hàm của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

3.6. Định lí. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và chuỗi đạo hàm của nó có cùng bán kính hội tụ.

Chứng minh. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ là $R = \frac{1}{\rho}$ với $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (nếu $\rho = 0$ thì $R = +\infty$, nếu $\rho = +\infty$ thì $R = 0$).

Hiển nhiên $x \in \mathbf{R}$ là một điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ khi và chỉ khi nó là một điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$. Do đó hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$ có cùng bán kính hội tụ $R' = \frac{1}{\rho'}$ với $\rho' = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{|a_n|}) =$

$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$. Do đó $R' = R$.□

Từ định lí trên suy ra rằng các chuỗi đạo hàm mọi cấp của một chuỗi lũy thừa đều có cùng bán kính hội tụ.

3.7. Định lí. Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó tổng S của nó có đạo hàm trên $(-R, R)$ và

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \qquad (1)$$

với mọi $x \in (-R, R)$.

Chứng minh. Giả sử $x_o \in (-R, R)$ và ρ là một số thực sao cho $|x_o| < \rho < R$. Khi đó chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ cùng hội tụ đều trên $[-\rho, \rho]$. Do đó hàm số S có đạo hàm trên $[-\rho, \rho]$ và $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ với mọi $x \in [-\rho, \rho]$.

Đặc biệt, ta có $S'(x_o) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x_o^{n-1}$. Từ đó ta có đẳng thức (1) với mọi $x \in (-R, R)$.□

Từ định lí 3.7 suy ra

3.8. Hệ quả. Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$ thì tổng S của nó có đạo hàm mọi cấp trên $(-R, R)$ và

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + 2.3a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

....

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} =$$

$$= k!a_k + (k+1)k \dots 2a_{k+1}x + \dots$$

với mọi $x \in (-R, R)$.

3.9. Định lí. Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ R và tổng S. Khi đó chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_o x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (1)$$

có cùng bán kính hội tụ với chuỗi đã cho và

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_o x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (2)$$

với mọi $x \in (-R, R)$.

Chứng minh. Chuỗi lũy thừa (1) có chuỗi đạo hàm là chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Do đó chuỗi (1) có cùng bán kính hội tụ với chuỗi đã cho. Theo 3.7, tổng T(x) của chuỗi hàm (1) có đạo hàm là S(x) trên (− R, R), $T'(x) = S(x)$, $x \in (-R, R)$. Do đó $T(x) = \int_0^x S(t)dt + \lambda$, trong đó λ là một số thực không đổi. Vì $T(0) = 0$ nên $\lambda = 0$. Vậy $\int_0^x S(t)dt = T(x)$, tức là ta có đẳng thức (2).□

§4. CHUỖI HÀM MAC–LÔRANH (MACLAURIN)

Cho đến nay chúng ta xuất phát từ một chuỗi lũy thừa và xét tổng của nó trên khoảng hội tụ. Bây giờ chúng ta đi từ một hàm số f xác định trên một khoảng I có trung điểm là 0. Vấn đề đặt ra là

1° Tồn tại hay không một chuỗi lũy thừa có tổng bằng S trên I ? Khi đó ta nói rằng f khai triển được thành chuỗi hàm lũy thừa trên I.

2° Nếu có một chuỗi lũy thừa như vậy, nó có duy nhất không ?

Định lí sau trả lời cho câu hỏi 2°.

4.1. Định lí. Giả sử I là một khoảng mở với trung điểm 0 và f là một hàm số xác định trên I. Nếu f(x) bằng tổng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với mọi $x \in I$ thì f có đạo hàm mọi cấp trên I và

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(1)}{1!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

Chứng minh. Giả sử

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

với mọi $x \in I$. Khi đó $f(0) = a_0$. Theo 3.8, f có đạo hàm mọi cấp trên I và $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots,\ x \in I$

Do đó $f'(0) = a_1, \ldots$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!\,a_{n+1}x + \ldots$$

Do đó $f^{(n)}(0) = n!a_n$, và $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ... □

4.2. Định nghĩa. Giả sử hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên một lân cận của điểm 0. Chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} a + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

gọi là chuỗi Maclôranh của hàm số f.

4.3. *Chú ý.* Nếu f là hàm số chẵn thì $f^{(2n+1)}(0) = 0$ với mọi n. Do đó chuỗi Maclôranh của f chỉ có các lũy thừa bậc chẵn của x. Tương tự nếu f là một hàm số lẻ thì chuỗi Maclôranh của f chỉ có các lũy thừa bậc lẻ của x.

4.4. Chúng ta hãy trở lại vấn đề 1° đã nêu ở trên. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng I có trung điểm 0. Điều kiện cần để f khai triển thành chuỗi lũy thừa trên I là f có các đạo hàm mọi cấp trên I. Nếu điều kiện này được thỏa mãn thì ta lập được chuỗi Maclôranh của hàm số f. Đó là chuỗi lũy thừa duy nhất có thể có tổng bằng f trên I. Vấn đề 1⁰ bây giờ được đặt ra một cách cụ thể hơn :

a) Chuỗi Maclôranh của f có hội tụ trên I hay không ?

b) Nếu nó hội tụ thì tổng của nó có bằng f trên I hay không ?

Trả lời :

a) Có những ví dụ chứng tỏ rằng chuỗi Maclôranh của f có thể có bán kính hội tụ bằng 0.

b) Xét hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{với } x > 0, \\ 0 & \text{với } x \leq 0. \end{cases}$$

Hiển nhiên f có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dễ dàng chứng minh được rằng $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi n. Như vậy f có đạo hàm mọi cấp trên **R**. Chuỗi Maclôranh của f có mọi số hạng bằng không. Do đó tổng $S(x)$ của nó bằng 0 với mọi $x \in \mathbf{R}$. Như vậy $S(x) \neq f(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

Ví dụ này chứng tỏ rằng chuỗi Maclôranh của f có thể có bán kính hội tụ $R > 0$ nhưng tổng của nó không bằng f trên I.

Tuy nhiên, ta sẽ thấy nhiều hàm số thông thường khai triển được thành chuỗi lũy thừa trên một lân cận của điểm 0.

Định lí sau cho một điều kiện đủ để một hàm số khai triển được thành chuỗi lũy thừa.

4.5. Định lí. Giả sử hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên khoảng $(-R, R)$ $(R > 0)$. Nếu tồn tại một số $M > 0$ sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \text{ với mọi } x \in (-R, R) \text{ và với mọi } n,$$

thì

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (1)$$

với mọi $x \in (-R, R)$.

Chứng minh. Đặt $S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Theo công thức Maclôranh, ta có

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

với $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$$

Do đó, với mọi $x \in (-R, R)$,

$$|f(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant M \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, từ bất đẳng thức trên suy ra $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ với mọi $x \in (-R, R)$, tức là ta có (1).□

Chú ý. Ví dụ dưới đây chứng tỏ điều kiện nêu trong định lí 4.5 chỉ là đủ chứ không phải là cần.

Ví dụ. Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.

Dễ dàng thấy rằng bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $+\infty$. Gọi $f(x)$ là tổng của chuỗi đã cho. Hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbf{R}$.

$$f^{(n)}(0) = 2^n \text{ với mọi } n.$$

Các đạo hàm $f^{(n)}(x)$ của f không bị chặn đều trên bất cứ một khoảng nào chứa điểm 0.

§5. KHAI TRIỂN MỘT SỐ HÀM SỐ THÀNH CHUỖI LŨY THỪA

5.1. Hàm số f(x) = sinx

Ta có $|f^{(n)}(x)| = \left| \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right| \leqslant 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và với mọi n. Do đó, theo định lí 4.5, hàm số f khai triển được thành chuỗi lũy thừa trên $\mathbf{R}$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Tương tự, ta có

5.2. Hàm số f(x) = cosx khai triển được thành chuỗi lũy thừa trên $\mathbf{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$.

5.3. Hàm số $f(x) = e^x$

Áp dụng công thức Maclôranh, ta được

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Với một $x \in \mathbf{R}$ cố định bất kì, ta có

$$|R_n(x)| \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$.

5.4 Thay x bởi −x, ta được

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$.

5.5. Thay e^x và e^{-x} bởi khai triển của chúng trong các đẳng thức

$$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;\ \text{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\text{ch}\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

và

$$\text{sh}\,x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$.

5.6. Với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có $a^x = e^{x\ln a}$. Do đó

$$a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \cdots + \frac{x^n\ln^n a}{n!} + \cdots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$.

5.7. Ta biết rằng

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

với mọi x mà $|x| < 1$.

Lấy tích phân các hạng tử và chú ý rằng $\ln(1 + x) = 0$ với $x = 0$, ta được

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (1)$$

với $|x| < 1$.

Vì chuỗi hàm (1) hội tụ tại điểm $x = 1$ nên, theo bổ đề Aben (định lí 3.3.), ta có

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

5.8. Hàm số f(x) = arctgx

Ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^2 + \dots$$

với mọi x mà $|x| < 1$.

Lấy tích phân các hạng tử của chuỗi hàm và để ý rằng arctg0 = 0, ta được

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

với $|x| < 1$.

Vì chuỗi hàm hội tụ tại điểm x = 1 nên, theo bổ đề Aben (định lí 3.3), ta có

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

5.9. Hàm số $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \notin \mathbf{N}$

Chuỗi Maclôranh của hàm số f là

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Áp dụng dấu hiệu Dalămbe, ta tìm được bán kính hội tụ của chuỗi hàm trên là R = 1 (Xem ví dụ 5 sau 1.4). Ta sẽ chứng minh

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

với mọi x mà $|x| < 1$.

Thật vậy, ta viết công thức Maclôranh cho hàm số f với phần dư dạng Côsi (với $|x| < 1$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

$$= A_n(x)B_n(x)C_n(x),$$

trong đó

$$A_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},$$

$$C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Với x cho trước, $|x| < 1$, ta có

$$|B_n(x)| \leqslant |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1} \text{ nếu } \alpha > 1, \text{ với mọi } n,$$

$$|B_n(x)| \leqslant |\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} \text{ nếu } \alpha < 1, \text{ với mọi } n.$$

và

$$|C_n(x)| \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right)^n < \left(\frac{1-\theta}{1-\theta}\right)^n = 1 \text{ với mọi } n.$$

Như vậy với x cố định, $|x| < 1$, các dãy số $\{B_n(x)\}$ và $\{C_n(x)\}$ đều bị chặn. Ngoài ra, ta có

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0$$

(xem Nhận xét trước 1.5). Do đó

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x)B_n(x)C_n(x) = 0 \text{ với } |x| < 1.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

5.10. Hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$

Trong công thức khai triển hàm số $f(x) = (1+x)^\alpha$, lấy $\alpha = \frac{1}{2}$, ta được

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)\frac{1}{n!}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n)}.$$

Do đó

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n)}x^n + \cdots$$

với $|x| < 1$.

5.11. Lấy $\alpha = -\frac{1}{2}$, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x^n + \cdots$$

với $|x| < 1$.

5.12. Trong 5.11, thay x bởi $-x^2$, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}x^{2n} + \cdots$$

với $|x| < 1$.

5.13. Vì $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ và $\arcsin 0 = 0$ nên

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

với $|x| < 1$.

D. CHUỖI PHUARIÊ

§1. CHUỖI LƯỢNG GIÁC

1.1. Định nghĩa. Chuỗi hàm số có dạng

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots \quad (x \in \mathbf{R}),$$

trong đó $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ là hai dãy số thực gọi là *chuỗi lượng giác.*

Với mỗi n, hàm số $x \mapsto u_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx$ có các đạo hàm mọi cấp trên $\mathbf{R}$ và có chu kì 2π. Nếu chuỗi lượng giác hội tụ đến hàm số $f(x)$ thì f là một hàm số có chu kì 2π trên $\mathbf{R}$. Các hằng số a_n, b_n gọi là các hệ số của chuỗi.

Ta biết rằng chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có đạo hàm mọi cấp trên khoảng hội tụ của nó. Đối với các chuỗi lượng giác thì không phải bao giờ cũng như vậy. Tổng của một chuỗi lượng giác có thể không liên tục trên miền hội tụ của nó. Có những chuỗi lượng giác mà tổng liên tục nhưng không có đạo hàm tại mọi điểm của miền hội tụ.

Sau đây là một số định lí đơn giản về sự hội tụ, đạo hàm và tích phân của một chuỗi lượng giác.

1.2. Định lí. Nếu các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)$$

hội tụ đều trên $\mathbf{R}$ và tổng của nó là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$.

Chứng minh. Ta có

$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \leqslant |a_n| + |b_n|$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $n \geqslant 1$.

Vì chuỗi số $\sum(|a_n| + |b_n|)$ hội tụ nên, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, chuỗi (1) hội tụ đều trên $\mathbf{R}$. Vì các hạng tử của chuỗi là những hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$ nên tổng của chuỗi là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$.□

Áp dụng dấu hiệu Điriclê về sự hội tụ và hội tụ đều của một chuỗi hàm số, ta được

1.3. Định lí. Giả sử $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số dương giảm đến không khi $n \to \infty$. Khi đó chuỗi lượng giác

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

hội tụ tại mọi điểm $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ và hội tụ đều trên mỗi đoạn $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, $k \in \mathbf{Z}$, $\alpha > 0$. Do đó tổng của chuỗi là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$.

Ví dụ 1. Chuỗi lượng giác $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ hội tụ tại mọi điểm $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ và phân kì tại $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 2. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ hội tụ tại mọi $x \in \mathbf{R}$ vì với $x = 2k\pi$, mỗi số hạng của chuỗi đều bằng không. Tuy nhiên tổng của chuỗi chỉ liên tục trên $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. (Ta sẽ thấy rằng tổng của chuỗi đã cho gián đoạn tại các điểm $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$).

1.4. Định lí. Nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) < \infty$$

thì tổng f của chuỗi lượng giác

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$ và đạo hàm $f'(x)$ nhận được bằng cách lấy đạo hàm từng hạng tử của chuỗi (1) :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx).$$

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Do đó chuỗi (1) và chuỗi đạo hàm của nó

$$-a_1\sin x + b_1\cos x + \ldots + (-na_n\sin nx + nb_n\cos nx) + \ldots \quad (2)$$

đều hội tụ đều trên **R**. Vậy f có đạo hàm trên **R** và f′(x) bằng tổng của chuỗi (2) với mọi $x \in \mathbf{R}$.□

Dễ dàng chứng minh được

1.5. Định lí. Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ đều hội tụ tuyệt đối thì tổng f của chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

liên tục trên **R** và tổng của chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right)$$

nhận được nhờ lấy nguyên hàm từng hạng tử của chuỗi (1) là một nguyên hàm của f trên **R**.

§2. CHUỖI PHUARIÊ

Giả sử f là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π. Vấn đề đặt ra là trong những trường hợp nào tồn tại một chuỗi lượng giác hội tụ trên **R** và có tổng bằng f ?

2.1. Định lí. Giả sử chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (1)$$

hội tụ đều trên đoạn $[0, 2\pi]$ (do đó hội tụ đều trên **R**) và có tổng là f(x). Khi đó, ta có

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \ ;$$

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px dx \ ;$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px dx \ , \ p = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh. Vì chuỗi (1) hội tụ đều trên **R** nên chuỗi hàm nhận được bằng cách nhân từng hạng tử của chuỗi (1) với một hàm số bị chặn trên **R** cũng hội tụ đều trên **R**. Do đó các chuỗi hàm

$$f(x)\cos px = \frac{a_o}{2}\cos px + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\cos px,$$

$$f(x)\sin px = \frac{a_o}{2}\sin px + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\sin px,$$

$p = 0, 1, 2\ldots$ hội tụ đều trên **R**. Vì vậy có thể lấy tích phân từng hạng tử của các chuỗi hàm đó trên $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos px dx =$$

$$= \frac{a_o}{2}\int_0^{2\pi}\cos px dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\cos px dx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\cos px dx\right] \quad (3)$$

và

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\, dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\sin px dx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\sin px dx\right] \quad (4)$$

Từ các công thức

$$2\cos nx\cos px = \cos(n-p)x + \cos(n+p)x, \dots$$

dễ dàng tính được

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos px dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin px dx = 0 \text{ với } n,\ p \in \mathbf{N},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos px dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin px dx = \begin{cases} 0 & \text{với } n \neq p, \\ \pi & \text{với } n = p. \end{cases}$$

Do đó từ (3) và (4) suy ra

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \pi a_0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px\, dx = \pi a_p,\ p \geqslant 1$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin px\, dx = \pi b_p,\ p \geqslant 1.$$

Từ đó suy ra các công thức cần chứng minh.□

Định lí 2.1 giải đáp một phần tính duy nhất của chuỗi lượng giác ứng với hàm số f cho trước.

Chuỗi Phuariê và các hệ số Phuariê

Từ đây đến cuối chương ta sẽ chỉ xét các hàm số liên tục từng khúc.

2.2. Định nghĩa. Hàm số f xác định trên đoạn [a, b] gọi là liên tục từng khúc nếu tồn tại một phép phân hoạch

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

của đoạn [a, b] có tính chất sau :

Với mỗi i, hàm số f liên tục trên khoảng (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$ có giới hạn phải hữu hạn tại điểm x_{i-1} và giới hạn trái hữu hạn tại điểm x_i.

Nói một cách khác f là liên tục từng khúc trên [a, b] nếu nó chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại I và liên tục tại mọi điểm còn lại của đoạn.

2.3. Định nghĩa. Giả sử f là một hàm số tuần hoàn xác định trên **R** với chu kì 2π, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn. Chuỗi lượng giác

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trong đó các hệ số được cho bởi các công thức

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \ n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \ n = 1, 2, \dots$$

gọi là chuỗi Phuariê của hàm số f.

a_n, b_n được gọi là các hệ số Phuariê của f.

Trước khi xét tính hội tụ của chuỗi Phuariê, ta nêu ra một vài nhận xét giúp cho việc tính các hệ số Phuariê được thuận tiện hơn.

2.4. Ta giữ nguyên các kí hiệu trong 2.3.

a) Vì f là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên nhờ một phép đổi biến số, dễ dàng chứng minh được rằng

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx \ , \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx dx \ ,$$

với mọi $\alpha \in$ **R**. Đặc biệt, ta có

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \ n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

b) Nếu f là một hàm số chẵn thì $x \mapsto f(x)\cos nx$ là những hàm số chẵn và $x \mapsto f(x)\sin nx$ là những hàm số lẻ. Do đó

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; n \geq 0 \text{ và } b_n = 0, \; n \geq 1.$$

Chuỗi Phuariê của f có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Tương tự, nếu f là một hàm số lẻ thì $x \mapsto f(x)\cos nx$ là những hàm số lẻ và $x \mapsto f(x)\sin nx$ là những hàm số chẵn. Do đó

$$a_n = 0, \; n \geq 0 \text{ và } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \; n \geq 1$$

Khi đó chuỗi Phuariê của f có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Từ định lí 2.3, vấn đề tồn tại một chuỗi lượng giác ứng với hàm số f cho trước đã nêu ở trên được đặt ra một cách tự nhiên như sau :

Giả sử f là một hàm số tuần hoàn chu kì 2π xác định trên $\mathbf{R}$, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn. Chuỗi Phuariê của f có hội tụ về f hay không ?

Chuỗi Phuariê của f có thể phân kì. Trong trường hợp chuỗi Phuariê của f hội tụ, tổng của nó có thể khác f : Người ta có thể xây dựng được những hàm số mà chuỗi Phuariê phân kì hoặc hội tụ đến một hàm số khác. Tuy nhiên việc lập những hàm số như vậy quá dài, chúng ta sẽ không nêu ra ở đây.

Để đảm bảo cho chuỗi Phuariê của một hàm số cho trước hội tụ về chính nó, ta cần một vài điều kiện bổ sung. Điều may mắn là các điều kiện này không quá chặt chẽ.

2.5. *Bổ đề* (Riman). Nếu f là một hàm số liên tục từng khúc trên đoạn [a, b] thì

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0 \; ; \; \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

Chứng minh. Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề có thể xem f liên tục trên [a, b]. Hàm số f bị chặn trên [a, b] : tồn tại một số M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì f liên tục đều trên [a, b] nên tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x', x'' \in [a, b]) \; |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Gọi

$$\pi : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

là một phép phân hoạch đoạn [a, b] có đường kính $d(\pi) < \delta$. Khi đó

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\lambda x dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\cos\lambda x dx.$$

Do đó

$$|I(\lambda)| \leq M \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\lambda x dx \right| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).$$

$$\text{Vì } \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x \, dx \right| = \left| \frac{1}{\lambda} (\sin \lambda x_i - \sin \lambda x_{i-1}) \right| \leq \frac{2}{\lambda}$$

với $\lambda > 0$ nên

$$|I(\lambda)| \leq \frac{2Mn}{\lambda} + \varepsilon (b - a) \text{ với mọi } \lambda > 0.$$

Với $\lambda > \dfrac{2Mn}{\varepsilon}$, ta có $|I(\lambda)| < \varepsilon(1 + b - a)$. Vậy $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = 0$.

Đẳng thức thứ hai được chứng minh tương tự.□

2.6. Định lí. Nếu f là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π xác định trên **R**, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn và a_n, b_n là các hệ số Phuariê của hàm số f thì

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Định lí 2.6 là hệ quả của bổ đề 2.5.

2.7. Công thức Điriclê

Bổ đề. Giả sử f là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π xác định trên **R**, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn và S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi Phuariê của hàm số f. Khi đó

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x + u) + f(x - u)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{\sin \frac{u}{2}} du \qquad (1)$$

(1) được gọi là công thức Điriclê về tổng riêng của chuỗi Phuariê.

Chứng minh. Ta sẽ áp dụng công thức

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2\sin \frac{x}{2}}, \; x \neq 2k\pi, \qquad (2)$$

để lập công thức tính $S_n(x)$.

Gọi

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

là chuỗi Phuariê của hàm số f. Ta có

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \cos nx dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \sin nx dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(x - t)dt.$$

Do đó

$$S_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right] dt$$

Áp dụng công thức (2), ta được

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}} dt$$

Phép biến đổi số u = t − x cho

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} du.$$

Vì các hàm số $u \mapsto f(x + u)$ và $u \mapsto \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}$ đều có chu kì 2π nên

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Thay u bởi $-u$ trong tích phân thứ nhất, ta được

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du. \square$$

2.8. Nếu lấy $f(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$ thì $a_o = 2$, $a_n = 0$, $b_n = 0$ với $n = 1, 2, \ldots$, và $S_n(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và với mọi n. Thay vào công thức Diriclê, ta được

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (1+1)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Từ đó ta được

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du = \pi \text{ với mọi n. } (1)\square$$

2.9. Biểu diễn một hàm số theo chuỗi Phuariê của nó

Ta nhắc lại rằng nếu hàm số liên tục từng khúc trên đoạn $[0, 2\pi]$ thì giới hạn phải $f(x+0) = \lim\limits_{h\to 0^+} f(x+h)$ và giới hạn trái $f(x-0) = \lim\limits_{h\to 0^+} f(x-h)$ tồn tại và hữu hạn tại mỗi điểm $x \in (0, 2\pi)$

(tại 0 và 2π tồn tại $f(+0)$ và $f(2\pi - 0)$ hữu hạn). Thật ra ta có $f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$ trừ một số hữu hạn điểm.

Sau đây là định lí cơ bản về chuỗi Phuariê.

2.10. Định lí (Đini). Giả sử f là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π xác định trên **R**, liên tục từng khúc trên mỗi đoạn bị chặn và x_0 là một số thực sao cho các giới hạn

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}, \ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{h}$$

tồn tại và hữu hạn. Khi đó chuỗi Phuariê của hàm số f hội tụ tại điểm x_0 và có tổng là

$$\frac{1}{2}\ [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$$

Đặc biệt, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì chuỗi Phuariê của f hội tụ tại x_0 và có tổng là $f(x_0)$.

Chứng minh. Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi Phuariê của hàm số f. Áp dụng công thức Điriclê và công thức (1) trong 2.8, ta có

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0 + u) + f(x_0 - u)]\ \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du\ -$$

$$- \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du.$$

Ta chứng minh hàm số

$$g(u) = \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{\sin \frac{u}{2}}$$

liên tục từng khúc trên $[0, \pi]$.

Thật vậy, hiển nhiên hàm số g liên tục từng khúc trên $(0, \pi]$. Chỉ còn phải chứng tỏ giới hạn phải $g(0 + 0) = \lim\limits_{u \to 0^+} g(u)$ tồn tại và hữu hạn. Điều này suy ngay ra từ giả thiết vì

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{\sin \frac{u}{2}} = 2 \lim_{u \to 0^+} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u},$$

và

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{\sin \frac{u}{2}} = 2 \lim_{u \to 0^+} \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u}.$$

Theo bổ đề 2.5 (Riman), từ đó suy ra

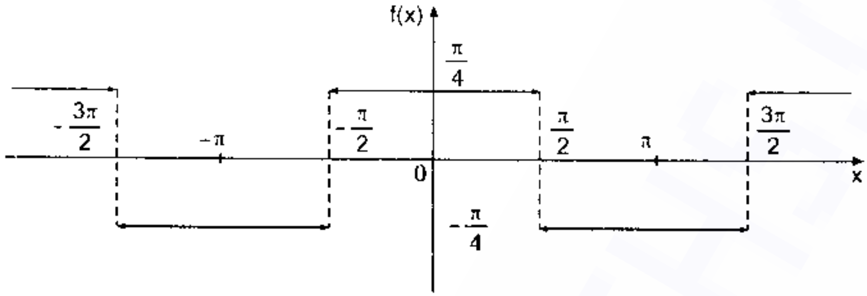
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} g(u) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u du = 0.$$

và ta có điều cần chứng minh.□

§3. MỘT SỐ VÍ DỤ

3.1. Cho hàm số tuần hoàn với chu kì 2π xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ -\frac{\pi}{4} \text{ với } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \\ 0 \text{ với } x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



Hình 26

Dễ dàng thấy rằng hàm số f thỏa mãn các điều kiện của định lí Đini. Ngoài ra

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)] \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Vì f là một hàm số chẵn nên

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Ta có

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}\cos nx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Do đó $a_n = 0$ với n chẵn,

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

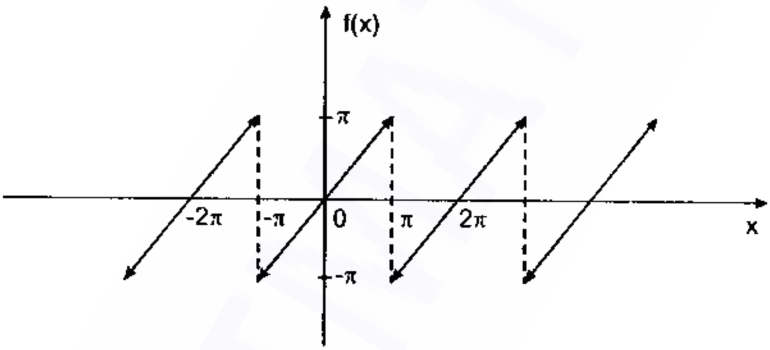
Vậy

$$f(x) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x + \dots$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$. Đặc biệt, với $x = 0$, ta có

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \dots$$

3.2. Cho hàm số f tuần hoàn với chu kì 2π xác định bởi $f(x) = x$ với $|x| < \pi$, $f(\pi) = 0$.



Hình 27

Hàm số f thỏa mãn mọi điều kiện của định lí Đini. Chuỗi Phuariê của f là

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Với $|x| < \pi$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2}.$$

Với $x = \pm\pi$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - \pi) = 0$$

Thay x bởi $x + \pi$, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \text{ với } x \in (0, \pi).$$

Ta thấy rằng tổng của chuỗi lượng giác $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ gián đoạn tại các điểm $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (xem lại ví dụ 2 sau 1.3).

Có thể ứng dụng chuỗi Phuariê để tính tổng của một số chuỗi số. Sau đây là một vài kết quả đặc sắc.

3.3. Cho f là hàm số tuần hoàn chu kì 2π xác định trên **R** bởi

$$f(x) = |x| \text{ với } |x| \leqslant \pi.$$

Đây là một hàm số chẵn. Ta có

$$b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots,\ a_0 = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1),$$

$$a_n = 0 \text{ với n chẵn, } a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

Do đó

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = |x| \text{ với } |x| \leqslant \pi.$$

Với $x = 0$, ta được

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}} \qquad (1)$$

Từ (1) ta tính được $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Thật vậy, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Từ đó

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

và

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}} \qquad (2)$$

3.4. Có thể nhận được đẳng thức (2) bằng cách tìm chuỗi Phuariê của hàm số tuần hoàn chu kì 2π xác định trên $\mathbf{R}$ bởi

$$f(x) = x^2 \text{ với } |x| \leqslant \pi.$$

Hàm số f liên tục thỏa mãn mọi điều kiện của định lí Đini nên bằng tổng của chuỗi Phuariê của nó tại mọi điểm của $\mathbf{R}$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \text{ với } |x| \leqslant \pi. \ (3)$$

Thay $x = \pi$ vào (3), ta được (2).

Thay $x = 0$ vào (3), ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Chương X

TÍCH PHÂN SUY RỘNG
TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

A. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Cho đến nay ta mới chỉ xét tích phân của những hàm số bị chặn trên các đoạn tức là trên các khoảng đóng bị chặn. Nhiều ứng dụng đòi hỏi phải mở rộng khái niệm này. Trong phần đầu của chương này, ta sẽ nghiên cứu tích phân trên một khoảng không bị chặn, sau đó là tích phân của một hàm số không bị chặn. Các tích phân mới này được gọi là tích phân suy rộng. Tích phân trên một khoảng không bị chặn còn gọi là tích phân suy rộng loại I, tích phân của một hàm số không bị chặn còn gọi là tích phân suy rộng loại II.

§1. TÍCH PHÂN TRÊN CÁC KHOẢNG KHÔNG BỊ CHẶN (TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I)

1.1. Định nghĩa. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với $b > a$.

Nếu

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = I,$$

trong đó $I \in \mathbf{R}$, hoặc $I = +\infty$, hoặc $I = -\infty$ thì I được gọi là tích phân của hội tụ f trên khoảng $[a, +\infty)$ và được kí hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Khi đó ta nói rằng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ tồn tại. Nếu I là hữu hạn tức là $I \in \mathbf{R}$ thì ta nói rằng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là hội tụ. Tích phân không hội tụ gọi là phân kì.

Ví dụ 1. Tính $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

Với mọi số thực $b > 0$, ta có

$$\int_0^b e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_0^b = 1 - e^{-b};$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \to +\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Do đó $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ và

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Ví dụ 2. Ta có

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 3. $\int_0^{+\infty} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b dx = \lim_{b \to \infty} b = +\infty.$

Tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} dx$ tồn tại nhưng phân kì.

Ví dụ 4. Xét tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} \sin x dx$.

Tích phân

$$\int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$$

không có giới hạn khi $b \to +\infty$. Do đó $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ phân kì.

Ví dụ quan trọng sau đây được sử dụng nhiều trong thực hành.

1.2. Xét $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, α là một số thực cho trước.

Nếu $\alpha = 1$ thì với mọi $b \in \mathbf{R}$, $b > 1$, ta có

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b \to +\infty \text{ khi } b \to +\infty.$$

Do đó $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$

Giả sử $\alpha \neq 1$. Khi đó, với mọi $b > 1$, ta có

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

- Nếu $\alpha < 1$ thì $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, do đó

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty.$$

- Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$. Các kết quả được phát

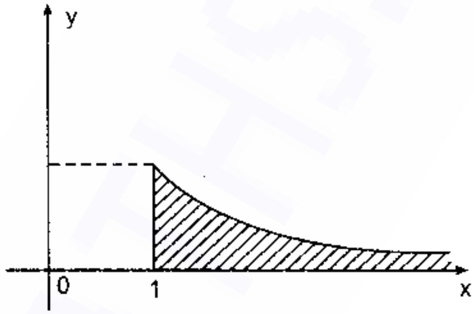
biểu trong định lí sau :

Định lí. Tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kì nếu $\alpha \leq 1$.

Ý nghĩa hình học

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ biểu thị diện tích hình phẳng được gạch chéo.

Hình phẳng được trải ra vô tận nhưng nó vẫn có thể có diện tích hữu hạn.



Hình 28

1.3. Giả sử hàm số f xác định trên khoảng [a, +∞) và khả tích trên mọi đoạn [a, b] với b > a. Khi đó, với mọi số thực a' > a, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^b f(x)dx.$$

Do đó $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_{a'}^b f(x)dx$ tồn tại và

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ khi và chỉ khi } \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx \text{ hội tụ.}$$

Nếu một trong hai tích phân suy rộng nói trên tồn tại thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{a'} f(x)dx + \int_{a'}^{+\infty} f(x)dx.$$

Dễ dàng chứng minh được.

1.4. Định lí. a) Nếu các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]\,dx$ cũng hội tụ và

$$\int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

b) Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và λ là một hằng số thực thì tích phân $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Tích phân suy rộng của các hàm số không âm

1.5. Định lí. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với $b > a$. Nếu $f(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a, +\infty)$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ luôn luôn tồn tại (hữu hạn hoặc bằng $+\infty$).

Chứng minh. Đặt $F(b) = \int_a^b f(x)dx$, $b \geqslant a$. Nếu $b' \geqslant b$ thì

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b'} f(x)dx = F(b) + \int_b^{b'} f(x)dx \geqslant F(b).$$

Hàm số $b \longmapsto F(b)$ tăng trên $[a, +\infty)$ nên tồn tại $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, tức là tồn tại $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, và

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \sup_{b\in[a,+\infty)} F(b) = \sup_{b\in[a,+\infty)} \int_a^b f(x)dx.$$

Hiển nhiên $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\sup\limits_{b\geqslant a} \int_a^b f(x)dx < +\infty$, tức là hàm số $b \longmapsto \int_a^b f(x)dx$ bị chặn trên $[a, +\infty)$.

1.6. Định lí. (Dấu hiệu so sánh).

Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với $b > a$. Nếu

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \text{ với mọi } x \in [a, +\infty)$$

thì

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Từ đó suy ra

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

Chứng minh. Với mọi số thực $b \geqslant a$, ta có

$$\int_a^{b} f(x)dx \leqslant \int_a^{b} g(x)dx.$$

Do đó

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^{b} f(x)dx \leqslant \lim_{b \to +\infty} \int_a^{b} g(x)dx,$$

tức là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

1.7 *Hệ quả.* Giả sử f và g là những hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với $b > a$. Nếu $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ trên $[a, +\infty)$ và

$$f \sim g \text{ khi } x \to +\infty$$

thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Chứng minh. Vì $f \sim g$ $(x \to +\infty)$ nên tồn tại một hàm số h xác định trên $[a, +\infty)$ sao cho

$$f(x) = g(x)h(x) \text{ với x đủ lớn và } \lim_{x \to +\infty} h(x) = 1.$$

Do đó tồn tại một số thực $a' \geqslant a$ sao cho $h(x) < 2$ với mọi $x \geqslant a'$ và ta có

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 2g(x) \text{ với mọi } x \geqslant a'.$$

Theo định lí 1.6, từ đó suy ra rằng nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Thay đổi vai trò của f và g : Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.□

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Ta có $0 < e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ với mọi $x \geqslant 1$. Ta biết rằng $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ. Do đó $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^5+x+1}}$.

Hàm số dưới dấu tích phân dương và liên tục trên $[1, +\infty)$.

$$\frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} \sim \frac{2x}{x^{5/2}} = \frac{2}{x^{3/2}} \text{ khi } x \to +\infty.$$

Vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ nên từ đó suy ra tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x-1}\,dx$.

Hàm số dưới dấu tích phân dương và liên tục trên $[1, +\infty)$.

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{2x^2+x-1} \sim \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}} \ (x \to +\infty).$$

Vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ phân kì nên từ đó suy ra tích phân được xét phân kì.

Ví dụ 4. Xét tính hội tụ của tích phân $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{t}}{t}\,dt$.

Với $t > \frac{2}{\pi}$, ta có $\cos\frac{1}{t} > 0$. Vì vậy khi xét tính hội tụ hoặc phân kì của tích phân, ta có thể xem hàm số dưới dấu tích phân của tích phân đã cho là một hàm số dương.

$$\frac{\cos\frac{1}{t}}{t} \sim \frac{1}{t} \ (t \to +\infty).$$

Vì tích phân $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ phân kì, từ đó suy ra tích phân đã cho phân kì.

Chú ý. Định lí 1.6 và hệ quả 1.7 chỉ được áp dụng cho trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không âm (với giá trị đủ lớn của a).

Định lí sau đây được áp dụng cho cả các hàm số dưới dấu tích phân có dấu bất kì.

1.8. Tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của tích phân

Định lí. Giả sử f là một hàm số xác định trên $[a, +\infty)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, $b > a$. Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nếu và chỉ nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số thực $b_0 \geq a$ sao cho

$$(\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R})\ b_2 \geq b_1 \geq b_0 \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Chứng minh. Gọi F là hàm số xác định trên $[a, +\infty)$ bởi

$$b \mapsto F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Theo tiêu chuẩn Côsi về sự tồn tại giới hạn của hàm số,

$\exists \lim\limits_{b \to +\infty} F(b) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists b_0 \geq a$ sao cho

$$(\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R})\ b_2 \geq b_1 \geq b_0 \Rightarrow |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon.$$

Mà $F(b_2) - F(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx$, nên từ đó suy ra điều cần chứng minh.□

Tính hội tụ tuyệt đối của tích phân

1.9. Định nghĩa. Ta nói rằng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

1.10. Định lí. Tích phân hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Chứng minh. Giả sử tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối, tức là tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Theo tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của tích phân, tồn tại $b_o \geq a$ sao cho

$$b_2 \geq b_1 \geq b_o \Rightarrow \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Do đó

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon \text{ với } b_2 \geq b_1 \geq b_o.$$

Vậy tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (theo tiêu chuẩn Côsi).□

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\cos kx}{a^2+x^2} dx$, $a, k \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Với mọi $a \neq 0$, hàm số dưới dấu tích phân xác định và liên tục trên $[0, +\infty)$. Với mọi $x \geq 1$, ta có

$$\left| \frac{\cos kx}{a^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên tích phân $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos kx}{a^2+x^2} \right| dx$ hội tụ (theo dấu hiệu so sánh), tức là tích phân được xét hội tụ tuyệt đối (do đó hội tụ).

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin \alpha x dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Vì $|e^{-x}\sin\alpha x| \leq e^{-x}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ nên tích phân được xét hội tụ tuyệt đối.

Chú ý. Ta sẽ thấy có những tích phân hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối. Tích phân như vậy gọi là bán hội tụ.

Khi xét sự hội tụ của các tích phân không hội tụ tuyệt đối, ta thường cần tới hai dấu hiệu hội tụ khác : Dấu hiệu Điriclê và dấu hiệu Aben.

1.11. Dấu hiệu Điriclê

Định lí. Giả sử

a) Hàm số f liên tục trên $[a, +\infty)$ và hàm số

$b \longmapsto F(b) = \int_a^b f(x)dx$ bị chặn trên $[a, +\infty)$, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|F(b)| \leqslant M \text{ với mọi } b \geqslant a,$$

b) Hàm số g đơn điệu trên $[a, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

Chứng minh. Ta chứng minh định lí với giả thiết bổ sung : Hàm số g có đạo hàm liên tục trên $[a, +\infty)$.

Ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của tích phân. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Ta biết rằng hàm số $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của hàm số f trên $[a, +\infty)$. Với mọi số thực $b_2 \geqslant b_1 \geqslant a$, ta có $\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx = \int_{b_1}^{b_2} g(x)dF(x) = [F(x)g(x)] \Big|_{b_1}^{b_2} - \int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx$

$$= F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - \int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx \quad (1)$$

Vì hàm số g đơn điệu trên $[a, +\infty)$ nên đạo hàm g' của nó không đổi dấu trên khoảng này. Theo định lí về giá trị trung bình mở rộng của tích phân, tồn tại một số thực $c \in [b_1, b_2]$ sao cho

$$\int_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)dx = F(c)\int_{b_1}^{b_2} g'(x)dx = F(c)[g(b_2) - g(b_1)].$$

Thay vào (1), ta được

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx = [F(b_2) - F(c)]g(b_2) + [F(c) - F(b_1)]g(b_1).$$

Do đó

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2M|g(b_2)| + 2M|g(b_1)|.$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ nên tồn tại một số thực $b_o \geqslant a$ sao cho

$$x \geqslant b_o \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Cuối cùng ta được

$$b_2 \geqslant b_1 \geqslant b_o \Rightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| < 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Vậy tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.□

1.12. Dấu hiệu Aben (Abel)

Định lí. Nếu

a) Hàm số f liên tục trên khoảng $[a, +\infty)$ và tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,

b) Hàm số g đơn điệu và bị chặn trên khoảng $[a, +\infty)$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

Chứng minh. Vì hàm số g đơn điệu và bị chặn trên $[a, +\infty)$ nên hàm số g có giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = A \in \mathbb{R}$. Hàm số g−A đơn điệu trên $[a, +\infty)$ và $\lim_{x\to+\infty} [g(x) - A] = 0$. Từ a) suy ra rằng hàm số $b \mapsto \int_a^b f(x)dx$ bị chặn trên $[a, +\infty)$. Theo dấu hiệu Điriclê, từ đó suy ra tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - A]dx$ hội tụ.

Vì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)[g(x) - A]dx + \int_a^{+\infty} Af(x)dx\,,$$

nên tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ. □

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx,\ p \text{ là một số thực cho trước.}$$

• Dễ dàng thấy rằng nếu $p > 1$ thì tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

• Ta sẽ chứng minh rằng nếu $0 < p \leqslant 1$ thì tích phân được xét là bán hội tụ, tức là hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Thật vậy, với mọi $b \geqslant 1$, ta có

$$\left|\int_1^b \sin x dx\right| = |\cos 1 - \cos b| \leqslant 2.$$

Hàm số $g(x) = \frac{1}{x^p}$ giảm trên $[0, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Do đó, theo dấu hiệu Diriclê, tích phân được xét hội tụ.

Tích phân đã cho không hội tụ tuyệt đối vì nếu nó hội tụ tuyệt đối, tức là tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ hội tụ thì từ bất đẳng thức $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$ với mọi x suy ra tích phân

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x^p} dx$$

hội tụ. Thế mà tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx$ hội tụ, $0 < p \leqslant 1$, theo dấu hiệu Diriclê (chứng minh tương tự như với tích phân đã cho). Do đó tích phân

$$\frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx + \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} dx$$

hội tụ. Điều này không thể vì với $p \leqslant 1$, tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ phân kì.

- Nếu $p \leqslant 0$ thì tích phân đã cho phân kì.

Thật vậy, với $p = 0$, ta được $\int\limits_1^{+\infty} \sin x dx$. Tích phân phân kì.

Giả sử tích phân đã cho hội tụ với một $p < 0$ nào đó. Đặt $f(x) = \frac{\sin x}{x^p}$, $g(x) = x^p$, $x \geqslant 1$. Khi đó $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và hàm số g giảm và bị chặn trên $[1, +\infty)$. Theo dấu hiệu Laibnit, tích phân $\int\limits^{+\infty} f(x)g(x)dx = \int\limits^{+\infty} \sin x dx$ hội tụ. Vô lí !

Ví dụ 2. Tích phân Phơretxnen (Fresnel). Xét sự hội tụ của các tích phân

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx \text{ và } \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx.$$

Hàm số $x \mapsto \cos(x^2)$ liên tục trên $[0, +\infty)$. Ta chứng minh $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ hội tụ. Thực hiện phép đổi biến số $t = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$. Với $b \geq 1$, ta có

$$\int_1^b \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt. \qquad (1)$$

Theo dấu hiệu Điriclê, tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ hội tụ. Do đó

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Do đó từ (1) suy ra

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Vậy tích phân $\int_{n=1}^{\infty} \cos(x^2)dx$ hội tụ. Nó là bán hội tụ vì tích phân $\int_{n=1}^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$ là bán hội tụ (xem ví dụ 1). Tương tự, tích phân $\int_{n=0}^{\infty} \sin(x^2)dx$ cũng là bán hội tụ.

Chú ý rằng trong hai tích phân nói trên, hàm số dưới dấu tích phân không tiến đến 0 khi $x \to +\infty$.

1.13. Tích phân trên các khoảng $(-\infty, b]$ và $(-\infty, +\infty)$

a) Tích phân trên khoảng $(-\infty, a]$ được định nghĩa tương tự như tích phân trên khoảng $[a, +\infty)$:

Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng $(-\infty, a]$ và khả tích trên mọi đoạn $[b, a]$ với $b < a$. Nếu

$$\lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)dx = I,$$

trong đó $I \in \mathbf{R}$ hoặc $I = \pm\infty$ thì I được gọi là tích phân của hàm số f trên khoảng $(-\infty, a]$ và được kí hiệu là $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

b) Giả sử hàm số f xác định trên $\mathbf{R}$. Dễ dàng thấy rằng nếu với một số thực a nào đó, hai tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ tồn tại và tổng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ có nghĩa (tức là không có dạng $\infty - \infty$) thì với mọi số thực b, tổng $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$ có nghĩa và

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (1)$$

Khi đó mỗi tổng trong (1) được gọi là tích phân của hàm số f trên $(-\infty, \infty)$, kí hiệu là $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Nếu tích phân này hữu hạn thì nó được gọi là hội tụ. Hiển nhiên

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Ví dụ. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_{b}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b \to -\infty} (-\operatorname{arctg} b) = \frac{\pi}{2}$.

Cả hai tích phân $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$ và $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ đều hội tụ nên tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ và

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

c) *Giá trị chính Côsi*

Nếu tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\int\limits_{-b}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \right] = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx .$$

Nếu $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)dx$ tồn tại và hữu hạn thì nó được gọi là giá trị chính Côsi của tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, kí hiệu là

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Tuy nhiên từ sự tồn tại của giá trị chính Côsi của tích phân không suy ra tính hội tụ của tích phân. Chẳng hạn, với $f(x) = x$, ta có

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{-b}^{b} x dx = 0.$$

Thế nhưng tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dx$ không tồn tại.

§2. TÍCH PHÂN CỦA CÁC HÀM SỐ KHÔNG BỊ CHẶN (TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI II)

2.1. Định nghĩa. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b] ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) và khả tích trên mọi đoạn [c, b], với $a < c \leqslant b$. Nếu

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx = I,$$

trong đó I là một số thực hoặc $I = \pm\infty$ thì I gọi là tích phân của hàm số f trên khoảng (a, b] và được kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx \text{ hoặc } \int_{a^+}^b f(x)dx.$$

Khi đó ta nói rằng $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại. Nếu I là hữu hạn thì ta nói rằng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. Tích phân không hội tụ gọi là phân kì. Dĩ nhiên ta có thể thay đổi vai trò của a và b, điều này sẽ nói kĩ sau.

Ví dụ. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to (-1)^+} \int_c^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to (-1)^+} (-\arcsin c) = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ quan trọng sau được sử dụng nhiều trong thực hành.

2.2. Xét tính hội tụ của tích phân

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \ \alpha \text{ là một số thực cho trước.}$$

Nếu $\alpha = 1$ thì $\displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{x} = -\ln c \to +\infty$ khi $c \to 0^+$. Do đó

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$$

Nếu $\alpha \neq 1$ thì $\displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ /

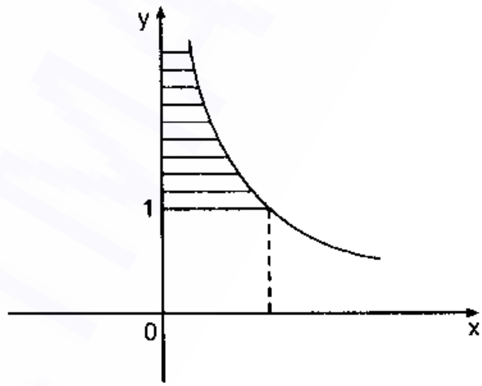
- Nếu $\alpha < 1$ thì $\displaystyle\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$,
- Nếu $\alpha > 1$ thì $\displaystyle\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Các kết quả được phát biểu trong định lí sau :

Định lí. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$ và phân kì nếu $\alpha \geqslant 1$.

Ý nghĩa hình học

Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ biểu thị diện tích hình phẳng được đánh dấu bởi các nét gạch.



Hình 29

2.3. Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a, b] và khả tích trên mọi đoạn [c, b] với $a < c \leqslant b$. Khi đó với $a < c < b' < b$, ta có

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^{b'} f(x)dx + \int_{b'}^b f(x)dx.$$

Do đó

$\displaystyle\lim_{c \to a^+} \int_c^b dx$ tồn tại khi và chỉ khi $\displaystyle\lim_{c \to a^+} \int_c^{b'} f(x)dx$ tồn tại,

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\displaystyle\int_a^{b'} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu một trong hai tích phân suy rộng nói trên tồn tại thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{b'} f(x)dx + \int_{b'}^b f(x)dx.$$

Tích phân của các hàm số không âm

Tương tự như với các tích phân loại I, ta có

2.4. Định lí. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b], khả tích trên mọi đoạn [c, b] với a < c < b. Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại và

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{c \in (a, b]} \int_c^b f(x)dx.$$

Do đó $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi hàm số $c \mapsto F(c) = \int_c^b f(x)dx$ bị chặn trên (a, b].

2.5. Định lí. Giả sử f và g là hai hàm số xác định trên khoảng (a, b], khả tích trên mọi đoạn [c, b] với $a < c \leq b$. Nếu

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ với mọi } x \in (a, b]$$

thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Do đó nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, nếu tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^b g(x)dx$ phân kì.

2.6. Hệ quả. Giả sử f và g là hai hàm số không âm xác định trên khoảng (a, b], khả tích trên mọi đoạn [c, b] với $a < c \leqslant b$. Nếu

$$f(x) \sim g(x) \ (x \to a^+)$$

thì hai tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Hàm số dưới dấu tích phân lấy các giá trị dương trên khoảng (0, 1] và

$$\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x} \ (x \to 0)$$

Vì $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ phân kì nên từ đó suy ra tích phân được xét phân kì.

Ví dụ 2. Xét tính hội tụ của tích phân

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}} dx.$$

Đặt $t = 1 - x$, ta được

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} dt.$$

Hàm số dưới dấu tích phân lấy các giá trị âm trên khoảng $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. (Dễ dàng thấy rằng hệ quả 2.6 vẫn đúng nếu các hàm số f và g lấy các giá trị âm trên khoảng (a, b]). Ta có

$$\frac{1}{(2-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-t}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{t^{-\frac{1}{2}}} \ (t \to 0^+).$$

Vì tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{-1/2}}$ hội tụ nên từ đó suy ra tích phân được xét hội tụ.

Cũng như đối với tích phân loại I, định lí 2.5 và hệ quả 2.6 chỉ áp dụng được cho trường hợp các hàm số dưới dấu tích phân không âm.

2.7. Tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của tích phân

Định lí. Giả sử f là một hàm số xác định trên khoảng (a, b], khả tích trên mọi khoảng (c, b] với $a < c \leq b$. Khi đó tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ nếu và chỉ nếu với một số dương ε bất kì, tồn tại một số dương δ sao cho

$$(\forall c_1, c_2 \in \mathbf{R})\ a < c_1 \leq c_2 \leq a + \delta \leq b \Rightarrow \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

2.8. Định nghĩa. Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu tích phân suy rộng $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ.

2.9. Định lí. Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.

Ví dụ. Tích phân $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha} dx$ hội tụ tuyệt đối với $\alpha < 1$ vì

$$\left| \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \text{ với mọi } x \neq 0$$

và $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ với $\alpha < 1$.

Tương tự như trong trường hợp tích phân suy rộng loại I, ta cũng có các dấu hiệu Đirichlê và Aben đối với tích phân các hàm số không bị chặn. Bạn đọc hãy phát biểu và chứng minh các dấu hiệu này.

2.10. Hàm số Γ

a) Các tích phân suy rộng thuộc hai loại đã nêu (loại I và loại II) có thể đồng thời xuất hiện. Ta hãy xét ví dụ sau :

Cho số thực $\alpha > 0$. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \text{ hội tụ.}$$

Ta có tích phân của một hàm số trên một khoảng không bị chặn. Ngoài ra, nếu $\alpha < 1$ thì hàm số $x \mapsto e^{-x}x^{\alpha-1}$ không bị chặn trên khoảng (0, 1). Ta có

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \quad (1)$$

• Xét tích phân $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}dx$. Ta có

$$e^{-x}x^{\alpha-1} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}} \quad (x \to 0^+)$$

Vì với $\alpha > 0$, ta có $1 - \alpha < 1$. Do đó tích phân hội tụ.

• Xét tích phân $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$.

Ta có

$$x^2f(x) = x^2(e^{-x}x^{\alpha-1}) = e^{-x}x^{1+\alpha} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Do đó $x^2f(x) \leq 1$ với x đủ lớn, tức là

$f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ với x đủ lớn. Vì $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ hội tụ nên từ đó suy ra tích phân được xét hội tụ.

Vì cả hai tích phân ở vế phải của (1) đều hội tụ nên tích phân ở vế trái của (1) hội tụ.

b) Hàm số $\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\alpha \quad \longmapsto \quad \Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha - 1}dx$$

gọi là hàm số gamma Ơle (Euler).

Ta có $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$. Áp dụng công thức tích phân từng phần trên [0, b], ta có

$$\int\limits_0^b e^{-x}x^{\alpha - 1}dx = \frac{1}{\alpha}e^{-x}x^{\alpha}\Big|_0^b + \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^b e^{-x}x^{\alpha}dx.$$

Cho $b \to +\infty$, ta được $\Gamma(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha + 1)$, tức là

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

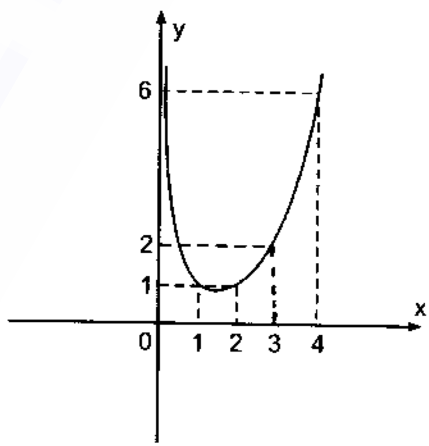
Do đó

$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1!$,

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \ldots,$

$\Gamma(n) = (n - 1)!, \ldots$

Hình 30 cho đồ thị của hàm số Γ.



Hình 30

Hàm số Γ là một trong những hàm số không sơ cấp quan trọng nhất. Nó là thác triển của hàm số giai thừa

$n \mapsto n!$ trên tập hợp các số nguyên dương. Có thể chứng minh được rằng hàm số Γ có đạo hàm mọi cấp trên khoảng $(0, +\infty)$.

Gaoxơ (Gauss) đã chứng minh được rằng hàm số Γ là giới hạn của dãy hàm số sau :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Tích phân suy rộng

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

gọi là tích phân Ơle loại II. Tích phân suy rộng

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

gọi là tích phân Ơle loại I. Người ta chứng minh được rằng tích phân này hội tụ với mọi $x > 0$, $y > 0$ và $\Gamma(x)$ và $B(x, y)$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \ x > 0, \ y > 0.$$

2.11. Tích phân $\int_a^{b^-} f(x)dx$ và các tích phân suy rộng khác

a) $\int_a^{b^-} f(x)dx$ được định nghĩa tương tự như tích phân $\int_{a^-}^{b} f(x)dx$

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $[a, b)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a, c]$ với $a < c < b$. Nếu

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx = I,$$

trong đó I là một số thực hoặc $I = \pm\infty$ thì I gọi là tích phân của hàm số f trên khoảng [a, b) và được kí hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx \text{ hoặc } \int_a^{b^-} f(x)dx.$$

b) Nếu hàm số f xác định trên khoảng (a, b) và với một điểm c nào đó thuộc (a, b), hai tích phân $\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ và $\int_{c}^{b^-} f(x)dx$ đều tồn tại và tổng

$$\int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b^-} f(x)dx \qquad (1)$$

có nghĩa thì tổng đó được gọi là tích phân của hàm số f trên khoảng (a, b) và được kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$ hoặc $\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx$. Nếu tổng (1) hữu hạn thì tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ.

Dễ dàng thấy rằng sự hội tụ và giá trị của tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm c.

c) Giả sử c là một điểm trong của đoạn [a, b] và f là một hàm số xác định trên [a, b] \ {c}. Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^{c^-} f(x)dx$ và $\int_{c^+}^{b} f(x)dx$ đều tồn tại và tổng của chúng có nghĩa thì tổng đó được gọi là tích phân (suy rộng) của hàm số f trên đoạn [a, b] và được kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Tích phân suy rộng này được gọi là hội tụ nếu tổng đã nêu là hữu hạn.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$.

Hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ xác định trên khoảng (0, 1). Ta viết

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1^-} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx \qquad (1)$$

Ta có $f(x) > 0$ trên (0, 1) và

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} \sim -\ln x \quad (x \to 0^+).$$

Vì tích phân suy rộng $\int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \ln x dx$ hội tụ nên tích phân thứ nhất ở vế phải của (1) hội tụ.

Dễ dàng thấy rằng $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$. Do đó tích phân thứ hai ở vế phải của (1) hội tụ.

Vậy tích phân được xét hội tụ.

d) Giả sử c là một điểm trong của đoạn [a, b], hàm số f xác định trên $[a, b] \setminus \{c\}$ và tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x)dx.$$

Hiển nhiên giới hạn

$$\lim \left[\int^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int^{b} f(x)dx \right] \qquad (2)$$

tồn tại và bằng $\int_a^b f(x)dx$. Tuy nhiên sự tồn tại của giới hạn (2) không kéo theo sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$.

Ví dụ. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

Dễ dàng thấy rằng

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^3} = 0$$

với mọi $\varepsilon \in (0, 1)$. Tuy nhiên cả hai tích phân $\int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^3}$ và $\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x^3}$ đều phân kì.

Giới hạn (2) được gọi là giá trị chính Côsi của tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$, kí hiệu là

$$v.p \int_a^b f(x)dx.$$

B. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

1.1. Giả sử f là một hàm số xác định trên hình chữ nhật $R = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant t \leqslant d\}$ và với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, t)$ khả tích trên $[a, b]$. Đặt

$$I(t) = \int_a^b f(x, t)dx, \ t \in [c, d],$$

I là một hàm số xác định trên đoạn [c, d].

Ta sẽ xét các điều kiện để hàm số I liên tục và các điều kiện để có thể lấy đạo hàm và tích phân dưới dấu tích phân.

1.2. Định lí. *Nếu hàm số f liên tục trên hình chữ nhật R thì hàm số I liên tục trên [c, d].*

Chứng minh. Giả sử t_0 là một điểm bất kì của [c, d]. Với mọi $t \in [c, d]$, ta có

$$I(t) - I(t_0) = \int_a^b f(x, t)dx - \int_a^b f(x, t_0)dx$$

$$= \int_a^b [f(x, t) - f(x, t_0)]dx.$$

Vì f liên tục trên tập hợp compắc R nên nó liên tục đều trên R. Do đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall x, x' \in [a, b], \forall t, t' \in [c, d])$$

$$|x - x'| < \delta \text{ và } |t - t'| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x', t')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Đặc biệt

$$(\forall x \in [a, b], \forall t \in [c, d]) \ |t - t_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x, t) - f(x, t_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Do đó

$$|I(t) - I(t_0)| \leqslant \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon$$

với $|t - t_0| < \delta$. Vậy I liên tục tại điểm t_0. □

1.3. Định lí. Giả sử f là một hàm số xác định trên hình chữ nhật $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$. Nếu với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, t)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và đạo hàm riêng f_t' của f liên tục trên R thì hàm số

$$I(t) = \int_a^b f(x, t)dx, \ t \in [c, d]$$

có đạo hàm trên [c, d] và

$$I'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_a^b f(x, t)dx\right] = \int_a^b f_t'(x, t)dx, \ t \in [c, d].$$

Chứng minh. Giả sử t_o là một điểm bất kì của [c, d]. Với mọi $t \in [c, d]$, ta có

$$I(t) - I(t_o) = \int_a^b f(x, t) - f(x, t_o)]dx.$$

Theo định lí Lagrăng, tồn tại một số thực c giữa t và t_o sao cho

$$f(x, t) - f(x, t_o) = f_t'(x, c)(t - t_o).$$

Do đó, với mọi $t \neq t_o$, ta có

$$\frac{I(t) - I(t_o)}{t - t_o} = \int_a^b f_t'(x, c)dx$$

$$= \int_a^b f_t'(x, t_o)dx + \int_a^b [f_t'(x, c) - f_t'(x, t_o)]\, dx.$$

Vì f_t' liên tục trên **R** nên chứng minh tương tự như đối với định lí 1.2, ta được

$$\lim_{t \to t_o} \int_a^b [f_t'(x, c) - f_t'(x, t_o)]dx = 0.$$

Do đó

$$\lim_{t \to t_0} \frac{I(t) - I(t_0)}{t - t_0} = \int_a^b f_t'(x, t_0)dx$$

Vậy I có đạo hàm tại điểm t_0 và

$$I'(t_0) = \int_a^b f_t'(x, t_0)dx \ \square$$

Chú ý. Hiển nhiên định lí 1.3 đúng nếu trong giả thiết của định lí, điều kiện "với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, t)$ liên tục trên $[a, b]$" được thay bởi điều kiện "hàm số f liên tục trên hình chữ nhật R".

Ví dụ 1. Dễ dàng thấy rằng hàm số

$$I_n(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \ n \in \mathbf{N}$$

xác định và có đạo hàm trên $(0, +\infty)$, và

$$I_n'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right] dx,$$

$$I_n'(a) = -2na \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = -2na\, I_{n+1}(a).$$

Từ công thức

$$I_1(a) = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a},$$

dễ dàng tính được các giá trị của

$$I_2(a),\ I_3(a),\ \ldots,\ I_n(a),\ \ldots$$

Ví dụ 2. Dễ dàng tính được

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ với } a > 0,\ |b| < a.$$

Các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+b\cos x}\right) = \frac{-1}{(a+b\cos x)^2} \text{ và } \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{a+b\cos x}\right) = \frac{-\cos x}{(a+b\cos x)^2}$$

đều liên tục, theo thứ tự, trên các tập hợp

$\{(x, a) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, a > |b|\}$ và $\{(x, b) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, -a < b < a\}$, nên, theo định lí 1.3, ta có

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}, \quad \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{-\pi b}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

Lấy đạo hàm liên tiếp hai vế của các đồng nhất thức trên, dễ dàng tìm được các giá trị của

$$\int_0^\pi \frac{\cos^p x dx}{(a+b\cos x)^n} \text{ với mọi } n, p \in \mathbf{N}, p < n.$$

1.4. Định lí. Nếu hàm số f liên tục trên hình chữ nhật $R = \{(x, t) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant t \leqslant d\}$ thì hàm số

$$I(t) = \int_a^b f(x, t)dx$$

khả tích trên đoạn $[c, d]$, và

$$\int_c^d I(t)dt = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, t)dx\right]dt = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, t)dt\right]dx \quad (1)$$

(Để cho gọn, người ta thường viết tích phân $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, t)dx\right]dt$ dưới dạng $\int_c^d dt \int_a^b f(x, t)dx$. Do đó công thức (1) có dạng

$$\int_c^d dt \int_a^b f(x, t)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, t)dt).$$

Chứng minh. Theo định lí 1.2, hàm số I liên tục trên đoạn [c, d], do đó nó khả tích trên đoạn này. Ta sẽ chứng minh

$$\int_c^y \left[\int_a^b f(x, t)dx\right]dt = \int_a^b \left[\int_c^y f(x, t)dt\right]dx$$

với mọi y ∈ [c, d]. Với y = d, ta được đẳng thức cần chứng minh. Đặt

$$F(y) = \int_c^y \left[\int_a^b f(x, t)dx\right]dt\ ,\ G(y) = \int_a^b \left[\int_c^y f(x, t)dt\right]dx.$$

$y \mapsto F(y)$ và $y \mapsto G(y)$ là hai hàm số xác định trên đoạn [c, d].

Vì $I(t) = \int_a^b f(x, t)dx$ là một hàm số liên tục trên [c, d] nên

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left[\int_c^y I(t)dt\right] = I(y) = \int_a^b f(x, y)dx\ . \qquad (1)$$

Hàm số $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \int_c^y f(x, t)dt$, $(x, y) \in \mathbf{R}$ thỏa mãn các giả thiết của định lí 1.3 :

- Với mỗi y ∈ [c, d], hàm số $x \mapsto \varphi(x, y)$ liên tục trên [a, b] (theo định lí 1.2),

- $\varphi_y'(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_c^y f(x, t)dt\right) = f(x, y)$ liên tục trên $\mathbf{R}$.

$$G'(y) = \frac{d}{dy}\left[\int_a^b \varphi(x, y)dx\right] = \int_a^b \varphi_y'(x, y)dx = \int_a^b f(x, y)dx \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra F'(y) = G'(y) với mọi y ∈ [c, d]. Do đó F(y) = G(y) + C với mọi y ∈ [c, d], C là một hằng số. Vì

$F(c) = G(c) = 0$ nên từ đó suy ra $C = 0$. Vậy $F(y) = G(y)$ trên $[c, d]$.$\square$

Ví dụ. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $0 < a \leqslant b$.

Hàm số dưới dấu tích phân có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^t dt.$$

Do đó

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^t dt.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm số $(x, t) \mapsto x^t$ thỏa mãn các điều kiện của định lí 1.4. Do đó có thể đổi thứ tự tích phân :

$$I = \int_a^b dt \int_0^1 x^t dt = \int_a^b \left(\frac{x^{t+1}}{t+1}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dt$$

$$= \int_a^b \frac{dt}{t+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

Có thể áp dụng định lí 1.3 để tính tích phân đã cho.

Xem a là một hằng số và I là một hàm số của b, $b \geqslant a$:

$$I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Do đó

$$I'(b) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{x^b - x^a}{\ln x}\right) dx = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}.$$

và

$$I(b) = \ln(b+1) + C, \ C = \text{const}.$$

Với b = a, ta có I(a) = 0. Từ đó suy ra C = − ln(a + 1) và

$$I = I(b) = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

§2. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ VỚI CÁC CẬN LÀ NHỮNG HÀM SỐ

2.1. Giả sử $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$ là một hàm số liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$, $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ là hai hàm số xác định trên [c, d] và lấy giá trị trên đoạn [a, b]. Khi đó, với mỗi $t \in [c, d]$, tồn tại tích phân

$$I(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx.$$

I là một hàm số xác định trên đoạn [c, d].

Ta sẽ xét các điều kiện để hàm số I liên tục và khả vi trên [c, d].

2.2. Định lí. Nếu hàm số f liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$, các hàm số $\alpha, \beta : [c, d] \times [a, b]$ liên tục trên [c, d] thì hàm số

$$I(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx$$

liên tục trên [c, d].

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh hàm số

$F : P = [c, d] \times [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$

$$(t, u, v) \longmapsto F(t, u, v) = \int_u^v f(x, t)dx$$

liên tục trên hình hộp chữ nhật P.

Thật vậy, giả sử (t_0, u_0, v_0) là một điểm bất kì của P và ε là một số dương cho trước tùy ý. Với mọi $(t, u, v) \in P$, ta có

$$F(t, u, v) - F(t_0, u_0, v_0) = \int_u^v f(x, t)dx - \int_{u_0}^{v_0} f(x, t_0)dx$$

$$= \int_u^{u_0} f(x, t)dx + \int_{v_0}^{v} f(x, t)dx + \int_{u_0}^{v_0} [f(x, t) - f(x, t_0)]dx \quad (1)$$

Hàm số f liên tục trên tập hợp compắc R nên bị chặn trên R : Tồn tại một số $M > 0$ sao cho $|f(x, t)| \leq M$ với mọi $(x, t) \in R$. Do đó từ (1) suy ra

$$|F(t, u, v) - F(t_0, u_0, v_0)| \leq M|u - u_0| + M|v - v_0| +$$

$$+ \left| \int_{u_0}^{v_0} [f(x, t) - f(x, t_0)]dx \right|$$

Theo định lí 1.2, hàm số $t \mapsto \int_{u_0}^{v_0} f(x, t)dt$ liên tục trên $[c, d]$.

Do đó tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$|t - t_0| < \eta \Rightarrow \left| \int_{u_0}^{v_0} [f(x, t) - f(x, t_0)]dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Đặt $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3M}, \eta\right)$, ta được

$|t - t_0| < \delta$, $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta \Rightarrow |F(t, u, v) - F(t_0, u_0, v_0)| < \varepsilon$. Vậy hàm số F liên tục tại điểm (t_0, u_0, v_0).

Vì hàm số α, β đều liên tục trên $[c, d]$ nên từ đó suy ra hàm số hợp $I(t) = F(t, \alpha(t), \beta(t))$ liên tục trên $[c, d]$.□

2.3. Định lí. Công thức Laibnit (Leibniz)

Giả sử

- Hàm số f và đạo hàm riêng f_t' liên tục trên hình chữ nhật $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$,

• Các hàm số $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ có đạo hàm trên $[c, d]$.
Khi đó, hàm số

$$I(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx$$

có đạo hàm trên $[c, d]$, và

$$I'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t'(x, t)dx - f(\alpha(t), t)\,\alpha'(t) + f(\beta(t), t)\beta'(t), \ t \in [c, d].$$

Chứng minh. Hàm số

$$F(t, u, v) = \int_u^v f(x, t)dx$$

có các đạo hàm riêng liên tục trên hình hộp chữ nhật $P = [c, d] \times [a, b] \times [a, b]$:

$$F_t'(t, u, v) = \int_u^v f_t'(x, t)dx,$$

$$F_u'(t, u, v) = -f(u, t),\ F_v'(t, u, v) = f(v, t).$$

Ngoài ra, các hàm số α, β có đạo hàm trên $[c, d]$.

Do đó hàm hợp

$$I(t) = F(t, \alpha(t), \beta(t)) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dt$$

có đạo hàm trên $[c, d]$ và

$$I'(t) = F_t'(t, \alpha(t), \beta(t)) + F_u'(t, \alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) + F_v'(t, \alpha(t), \beta(t))\beta'(t)$$

$$= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t'(x, t)dx - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + f(\beta(t), t)\beta'(t),\ t \in [c, d] \square$$

Ví dụ. Tính các đạo hàm riêng của hàm số

$$f(x, y) = \int_{x}^{x+y} \sin(x^2 + t^2 - y^2)dt.$$

Ta có

$$f_x'(x, y) = \sin[x^2 + (x + y)^2 - y^2] - \sin[x^2 + (x - y)^2 - y^2] + $$
$$+ 2x \int_{x-y}^{x+y} \cos(x^2 + t^2 - y^2)dt$$

$$= 2\cos 2x^2 \sin 2xy + 2x \int_{x-y}^{x+y} \cos(x^2 + t^2 - y^2)dt,$$

$$f_y'(x, y) = \sin[x^2 + (x + y)^2 - y^2] + \sin[x^2 + (x - y)^2 - y^2] -$$
$$- 2y \int_{x-y}^{x+y} \cos(x^2 + t^2 - y^2)dt$$

$$= 2\sin 2x^2 \cos 2xy - 2y \int_{x-y}^{x+y} \cos(x^2 + t^2 - y^2)dt,$$

với mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

§3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

Hội tụ đều

3.1. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp

$R = \{(x, t) : a \leq x < +\infty, c \leq t \leq d\}$ và với mỗi $t \in [c, d]$, tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \tag{1}$$

hội tụ. Khi đó $t \longmapsto I(t)$ là một hàm số xác định trên đoạn $[c, d]$.

Khoảng biến thiên $[c, d]$ của tham số có thể được thay bởi một khoảng bất kì mở, đóng hoặc nửa mở, bị chặn hoặc không

Ví dụ. Cho hàm số $f(x, t) = e^{-tx}$

Với mỗi $t > 0$, hàm số $x \longmapsto e^{-tx}$ liên tục trên $[0, +\infty)$, do đó khả tích trên $[0, b]$ với mọi $b \geqslant 0$. Ta có

$$\int_0^b e^{-tx}dx = \left(-\frac{1}{t}e^{-tx}\right)\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{t}(1 - e^{-tb})$$

Do đó

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-tx}dx = \frac{1}{t}.$$

Hàm số I xác định trên khoảng $(0, +\infty)$.

Để xét tính liên tục, khả vi, ... của hàm số I trong (1), ta thường cần tới khái niệm hội tụ đều của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số. Sự hội tụ đều ở đây được định nghĩa tương tự như sự hội tụ đều của một dãy hàm số. Giả sử tích phân (1) hội tụ trên $[c, d]$ (tức là hội tụ tại mỗi điểm $t \in [c, d]$) và ε là một số dương cho trước tùy ý. Khi đó với mỗi $t \in [c, d]$, tồn tại một số $b_o > a$ sao cho

$$b \geqslant b_o \Rightarrow \left| I(t) - \int_a^b f(x, t)dx \right| < \varepsilon,$$

tức là

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| < \varepsilon.$$

Nói chung số b_o không những phụ thuộc vào ε mà còn phụ thuộc vào $t \in [c, d]$. Nếu tìm được một số b_o chung cho mọi $t \in [c, d]$ (tức là b_o không phụ thuộc vào t) thì ta nói rằng tích phân suy rộng hội tụ đều trên $[c, d]$. Một cách chính xác, ta có

3.2. Định nghĩa. Giả sử f là một hàm số xác định trên tập hợp $R = \{(x, t) : x \geqslant a, c \leqslant t \leqslant d\}$ và với mỗi $t \in [c, d]$, tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$$

hội tụ. Ta nói rằng tích phân này hội tụ đều trên [c, d] nếu với một số $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại một số thực $b_0 \geq a$ sao cho

$$b \geq b_0 \Rightarrow \left| \int_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| < \varepsilon \text{ với mọi } t \in [c, d]$$

Dễ dàng thấy rằng

3.3. Tích phân $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ hội tụ đều trên [c, d] khi và chỉ khi

$$\sup_{t \in [c, d]} \left| \int_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| \to 0 \text{ khi } b \to +\infty.$$

Chú ý rằng trong 3.2 và 3.3 có thể thay đoạn [c, d] bởi một khoảng bất kì trong **R**.

Ví dụ. Xét tính hội tụ đều của tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} te^{-xt}dx$$

trên các khoảng $[a, +\infty)$ với $a > 0$ và $(0, +\infty)$.

Ta tính tích phân

$$\int_b^{+\infty} te^{-xt}dx, \; b \geq 0$$

Với $t = 0$, tích phân bằng 0 với mọi b. Với $t > 0$, đổi biến số $u = tx$, ta được

$$\int_b^{+\infty} te^{-xt}dx = \int_{bt}^{+\infty} e^{-u}du = e^{-bt}.$$

Vì $\sup\limits_{t \in [a, +\infty)} \left| \int\limits_b^{+\infty} te^{-xt}dx \right| = \sup\limits_{t \geq a} e^{-bt} = e^{-ba} \to 0$ khi $b \to +\infty$ nên tích phân đã cho hội tụ đều trên $[a, +\infty)$, trong đó $a > 0$ nhỏ tùy ý.

Tuy nhiên tích phân đã cho không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$ vì

$$\sup_{t > 0} \left| \int\limits_b^{+\infty} te^{-xt}dx \right| = \sup_{t > 0} e^{-bt} = 1 \text{ với mọi } b > 0.$$

3.4. Tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của tích phân

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $R = \{(x, t) : a \leq x < +\infty, c \leq t \leq d\}$ và với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \longmapsto f(x, t)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$ với $b > a$. Khi đó tích phân

$$I(t) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, t)dx \qquad (1)$$

hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu và chỉ nếu với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một số thực $b_o \geq a$ sao cho

$$b' \geq b \geq b_o \Rightarrow \left| \int\limits_b^{b'} f(x, t)dx \right| < \varepsilon \qquad (2)$$

với mọi $t \in [c, d]$.

Chứng minh. Giả sử tích phân (1) hội tụ đều trên $[c, d]$ và ε là một số dương bất kì cho trước. Khi đó, tồn tại một số thực $b_o \geq a$ sao cho

$$b \geq b_o \Rightarrow \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } t \in [c, d].$$

Do đó ta có

$$b' \geq b \geq b_o \Rightarrow \left| \int\limits_b^{b'} f(x, t)dx \right| = \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, t)dx - \int\limits_{b'}^{+\infty} f(x, t)dx \right|$$

$$\leq \left| \int\limits_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| + \left| \int\limits_{b'}^{+\infty} f(x, t)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Đảo lại, giả sử với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $b_0 \geq a$ thỏa mãn (2). Trước hết từ giả thiết này suy ra rằng với mỗi $t \in [c, d]$, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ hội tụ. Cố định $b \geq b_0$ và cho $b' \to +\infty$, ta được

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, t)dx \right| \leq \varepsilon$$

với mọi $t \in [c, d]$. Vậy tích phân (1) hội tụ đều trên $[c, d]$.□

3.5. Dấu hiệu Vâyơxtrat

Định lí. Giả sử hàm số $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ xác định trên tập hợp $R = [a, +\infty) \times [c, d]$ và với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, t)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b]$, $b \geq a$. Nếu tồn tại một hàm số $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ sao cho tích phân $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ hội tụ và

$$|f(x, t)| \leq \varphi(x) \text{ với mọi } (x, t) \in \mathbf{R}$$

thì tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \qquad (1)$$

hội tụ tuyệt đối (với mỗi $t \in [c, d]$) và hội tụ đều trên $[c, d]$.

Chứng minh. Theo dấu hiệu so sánh, từ giả thiết suy ra rằng tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x, t)|dx$ hội tụ với mỗi $t \in [c, d]$. Do đó tích phân (1) hội tụ tuyệt đối với mỗi $t \in [c, d]$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì tích phân $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ hội tụ nên tồn tại $b_0 \geq a$ sao cho

$$b' \geq b \geq b_0 \Rightarrow \int_b^{b'} \varphi(x)dx < \varepsilon.$$

Do đó nếu $b' \geqslant b \geqslant b_0$ thì

$$\left| \int_b^{b'} f(x, t)dx \right| \leqslant \int_b^{b'} |f(x, t)| dx \leqslant \int_b^{b'} \varphi(x)dx < \varepsilon$$

với mọi $t \in [c, d]$. Vậy tích phân (1) hội tụ đều trên $[c, d]$ (theo tiêu chuẩn Côsi).□

Ví dụ 1. Tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{a^2 + x^2} dx \ , \ a \neq 0$$

hội tụ đều trên **R** theo dấu hiệu Vâyơxtrat, vì

$$\left| \frac{\sin tx}{a^2 + x^2} \right| \leqslant \frac{1}{a^2 + x^2} \text{ với mọi } x \geqslant 0, \ t \in \mathbf{R}$$

và $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ hội tụ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ đều của tích phân

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx$$

trên đoạn $[0, a]$, trong đó a là một số dương cho trước.

Ta có

$$|e^{-x}x^t| = e^{-x}x^t \leqslant e^{-x}x^a \text{ với mọi } t \in [0, a].$$

Dễ dàng chứng minh được rằng tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^a$ hội tụ. Do đó, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân đã cho hội tụ đều trên $[0, a]$.

Dấu hiệu Vâyơxtrat rất tiện dụng trong thực hành. Tuy nhiên chỉ áp dụng được dấu hiệu này khi sự hội tụ của tích phân là tuyệt đối và đều. Trong trường hợp tích phân hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối, ta cần đến các dấu hiệu tinh tế hơn : dấu hiệu Diriclê và dấu hiệu Aben.

3.6. Dấu hiệu Diriclê

Định lí. Giả sử

a) $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ là một hàm số liên tục trên tập hợp $R = [a, +\infty) \times [c, d]$ và hàm số

$$(b, t) \mapsto F(b, t) = \int_a^b f(x, t)dx$$

bị chặn trên $[a, +\infty) \times [c, d]$, tức là tồn tại một số $K > 0$ sao cho

$$|F(b, t)| \leq K \text{ với mọi } b \in [a, +\infty), t \in [c, d] \quad (1),$$

b) $g : (x, t) \mapsto g(x, t)$ xác định trên R sao cho với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto g(x, t)$ đơn điệu trên $[a, +\infty)$ và $g(x, t)$ hội tụ đều đến 0 trên $[c, d]$ khi $x \to +\infty$, tức là với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $b_0 \geq a$ sao cho $b \geq b_0 \Rightarrow |g(x, t)| < \varepsilon$ với mọi $t \in [c, d]$.

Khi đó, tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$$

hội tụ đều trên [c, d].

*Chứng minh.** Tương tự như với định lí A.1.11, ta chứng minh định lí với giả thiết bổ sung : Hàm số g có đạo hàm riêng g_x' liên tục trên R. Theo giả thiết, hàm số

$$F : R \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, t) \mapsto F(x, t) = \int_a^x f(u, t)du$$

bị chặn trên R. Vì với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $u \mapsto f(u, t)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ nên $F_x'(x, t) = f(x, t)$, $(x, t) \in R$. Áp dụng công thức tích phân từng phần trên đoạn [b, b'] (với b' ⩾ b ⩾ a), ta được

$$\int_b^{b'} f(x, t)(x, t)dx = \int_b^{b'} F_x'(x, t)g(x, t)dx$$

$$= F(x, t)g(x, t)\Big|_{x=b}^{x=b'} - \int_b^{b'} F(x, t)g_x'(x, t)dx \qquad (2)$$

Vì với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto g(x, t)$ đơn điệu trên $[a, +\infty)$ nên với mỗi $t \in [c, d]$, $g_x'(x, t)$ giữ dấu không đổi khi x biến thiên trên $[a, +\infty)$. Do đó theo định lí về giá trị trung bình mở rộng của tích phân, tồn tại $\xi \in [b, b']$ sao cho

$$\int_b^{b'} F(x, t)g_x'(x, t)dx = F(\xi, t)\int_b^{b'} g_x'(x, t)dx$$

$$= F(\xi, t)[g(x, t)]\Big|_{x=b}^{x=b'} = F(\xi, t)[g(b', t) - g(b, t)].$$

Thay vào (2), ta được

$$\int_b^{b'} f(x, t)g(x, t)dx = [F(b', t) - F(\xi, t)]g(b', t) + [F(\xi, t) - F(b, t)]g(b, t). \quad (3)$$

Do đó từ (1) suy ra

$$\left|\int_b^{b'} f(x, t)g(x, t)dx\right| \leqslant 2K|g(b', t)| + 2K|g(b, t)|.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x, t) = 0$ đều với $t \in [c, d]$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại $b_o \geqslant a$ sao cho

$$x \geqslant b_o \Rightarrow |g(x, t)| < \frac{\varepsilon}{4K} \text{ với mọi } t \in [c, d].$$

Do đó

$$b' \geqslant b \geqslant b_o \Rightarrow \left|\int_b^{b'} f(x, t)g(x, t)dx\right| < 2K.\frac{\varepsilon}{4K} + 2K.\frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon$$

với mọi $t \in [c, d]$. Vậy tích phân I(t) hội tụ đều trên [c, d].□

3.7. Dấu hiệu Aben

Định lí. Giả sử

a) Hàm số $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$ liên tục trên tập hợp $R = [a, +\infty) \times [c, d]$ và tích phân $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$,

b) Hàm số $g : (x, t) \longmapsto g(x, t)$ bị chặn trên $\mathbf{R}$ và với mỗi $t \in [c, d]$, hàm số $x \longmapsto g(x, t)$ đơn điệu trên $[a, +\infty)$.

Khi đó tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$$

hội tụ đều trên $[c, d]$.

*Chứng minh.** Ta chứng minh định lí với giả thiết bổ sung : Hàm số g có đạo hàm riêng g_x' liên tục trên R. Hàm $F : R \to \mathbf{R}$ được định nghĩa như trong chứng minh định lí 3.5. Lập luận tương tự ta đi đến đẳng thức (3) trong chứng minh định lí 3.5. Vì hàm số g bị chặn trên $\mathbf{R}$ nên $|g(x, t)| \leqslant M$ với mọi $(x, t) \in \mathbf{R}$. Từ đẳng thức (3) suy ra

$$\left| \int_b^{b'} f(x, t)g(x, t)dx \right| \leqslant M \left| \int_\xi^{b'} f(x, t)dx \right| + M \left| \int_b^{\xi} f(x, t)dx \right| \quad (1)$$

Vì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ hội tụ đều trên $[c, d]$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại $b_o \geqslant a$ sao cho

$$b' \geqslant b \geqslant b_o \Rightarrow \left| \int_b^{b'} f(x, t)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ với mọi } t \in [c, d].$$

Do đó từ (1) suy ra

$$b' \geqslant b \geqslant b_o \Rightarrow \left| \int_b^{b'} f(x, t)g(x, t)dx \right| < \varepsilon \text{ với mọi } t \in [c, d].$$

Theo tiêu chuẩn Côsi, tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ hội tụ đều trên [c, d].□

Ví dụ. Xét tính hội tụ đều của tích phân

$$I(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \text{ trên } [0, +\infty).$$

Hàm số dưới dấu tích phân liên tục trên $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ nếu lấy 1 làm giá trị của nó với $x = 0$,

$$\left| e^{-tx}\frac{\sin x}{x} \right| \leqslant e^{-tx}$$

Do đó tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối với mọi $t > 0$. Với $t = 0$, ta được tích phân $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. Ta đã biết rằng tích phân này bán hội tụ. Chỉ cần chứng minh $J(t) = \int\limits_\varepsilon^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\varepsilon > 0)$ hội tụ đều trên $[0, +\infty]$.

Hàm số $(x, t) \mapsto f(x, t) = \sin x$ thỏa mãn điều kiện a) trong định lí 3.5 với $K = 2$. Với mỗi $t \geqslant 0$, hàm số $x \mapsto g(x, t) = \dfrac{e^{-tx}}{x}$ giảm trên $(\varepsilon, +\infty)$. Ngoài ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-tx}}{x} = 0$ đều với $t \geqslant 0$ vì $0 \leqslant \dfrac{e^{-tx}}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ với mọi $x > 0$, $t \geqslant 0$. Theo dấu hiệu Điriclê, tích phân $J(t)$ hội tụ đều với $t \geqslant 0$.

Có thể áp dụng dấu hiệu Aben : Tích phân $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ ; hàm số $(x, t) \mapsto e^{-tx}$ bị chặn trên $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$: $0 < e^{-tx} \leqslant 1$ với mọi $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Ngoài ra với mỗi $t \geqslant 0$, hàm số $x \mapsto e^{-tx}$ giảm trên $[0, +\infty)$. Do đó tích phân đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

3.8. Các tích phân suy rộng phụ thuộc tham số có dạng

$$\int_{-\infty}^{a} f(x, t)dx \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)dx$$

được định nghĩa tương tự.

3.9. Tích phân của các hàm số không bị chặn phụ thuộc tham số

Giả sử $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$ là một hàm số xác định trên tập hợp $R = (a, b] \times [c, d]$ ($a \in \mathbf{R}$) và với mỗi $t \in [c, d]$, tích phân

$$I(t) = \int_a^b f(x, t)dx \tag{1}$$

hội tụ. Khi đó $t \longmapsto I(t)$ là một hàm số xác định trên đoạn $[c, d]$.

Ta có

$$I(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x, t)dt.$$

b) Ta nói rằng tích phân (1) hội tụ đều trên $[c, d]$ nếu với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một số $\delta_o > 0$ sao cho $a + \delta_o \leqslant b$ và

$$0 < \delta \leqslant \delta_o \Rightarrow \left| \int_a^{a+\delta} f(x, t)dx \right| < \varepsilon \text{ với mọi } t \in [c, d].$$

Bạn đọc dễ dàng thiết lập được tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của tích phân, các dấu hiệu Vâyơxtrat, Điriclê... như trong trường hợp tích phân phụ thuộc tham số trên các khoảng không bị chặn.

Tính liên tục. Đổi thứ tự tích phân. Tính khả vi

3.10. Định lí. Nếu hàm số $f : (x, t) \longmapsto f(x, t)$ liên tục trên tập hợp $R = [a, +\infty) \times [c, d]$ và tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \qquad (1)$$

hội tụ đều trên [c, d] thì hàm số I liên tục trên [c, d].

Chứng minh. Gọi $I_n : [c, d] \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$I_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Theo định lí 1.2, I_n là những hàm số liên tục trên [c, d]. Từ sự hội tụ đều của tích phân (1) suy ra rằng dãy hàm số $\{I_n\}$ hội tụ đều trên [c, d] đến hàm số I. Do đó I liên tục trên [c, d] (theo định lí IX.A.2.1).□

3.11. Định lí. Nếu hàm số $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ liên tục trên tập hợp $R = [a, +\infty) \times [c, d]$ và

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$$

hội tụ đều trên [c, d] thì

$$\int_c^d I(t)dt = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, t)dt,$$

tức là

$$\int_c^d dt \int_a^{+\infty} f(x, t)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, t)dt.$$

Chứng minh. Giả sử $\{b_n\}$ là một dãy số thực sao cho $b_n \geqslant a$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$

Theo định lí 1.2, các hàm số

$$I_n(t) = \int_a^{b_n} f(x, t)dx$$

đều liên tục trên [c, d]. Do đó chúng khả tích trên đoạn này. Theo định lí 1.4, ta có

$$\int_c^d I_n(t)dt = \int_a^{b_n} dx \int_c^d f(x, t)dt.$$

Vì dãy hàm số $\{I_n\}$ hội tụ đều đến hàm số I trên [c, d] nên, theo định lí IX.A.2.3, ta có

$$\int_c^d I(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_c^d I_n(t)dt$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

3.12. Định lí. Giả sử hàm số $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ và đạo hàm riêng $f_t' : (x, t) \mapsto f_t'(x, t)$ của nó liên tục trên tập hợp $R = [a, +\infty) \to [c, d]$. Nếu tích phân

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$$

hội tụ trên [c, d] và tích phân

$$J(t) = \int_a^{+\infty} f_t'(x, t)dx \tag{1}$$

hội tụ đều trên [c, d] thì hàm số I có đạo hàm trên [c, d] và

$$I'(t) = J(t), \ t \in [c, d],$$

tức là

$$\frac{d}{dt}\int_a^{+\infty} f(x, t)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dt.$$

Chứng minh. Theo định lí 1.3, từ giả thiết suy ra rằng các hàm số

$$I_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t)dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

có đạo hàm trên [c, d] và

$$I_n'(t) = \int_a^{a+n} f_t'(x, t)dx.$$

Từ giả thiết suy ra rằng dãy $\{I_n\}$ hội tụ đến I trên [c, d] và dãy $\{I_n'\}$ hội tụ đều trên [c, d] đến J. Theo định lí A. 2.5, từ đó suy ra rằng hàm số I có đạo hàm trên [c, d] và

$$I'(t) = J(t) \text{ trên } [c, d].\square$$

3.13. Một số ví dụ

Ta sẽ áp dụng các định lí vừa nêu để tính một số tích phân suy rộng.

Ví dụ 1. Tính

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \ a > 0, \text{ n nguyên dương.}$$

Ta sẽ chứng minh rằng hàm số I_n có đạo hàm trên khoảng $(0, +\infty)$ và

$$I_n'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}(x^2 + a^2)^{-n}dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2na}{(x^2 + a^2)^{n+1}}dx = -2naI_{n+1}(a) \quad (1)$$

Thật vậy, các hàm số

$$(x, a) \longmapsto \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \text{ và } (x, a) \longmapsto \frac{a}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

đều liên tục trên $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$. Hiển nhiên tích phân $I_n(a)$ hội tụ với mọi $a > 0$. Ngoài ra nếu cho a biến thiên trên đoạn $[\alpha, \beta]$ với $0 < \alpha < \beta$ thì ta có

$$\left| \frac{a}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right| \leq \frac{\beta}{(x^2 + \alpha^2)^{n+1}}.$$

Vì tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}$ hội tụ nên từ đó suy ra rằng tích phân

$$\int_a^{+\infty} \frac{-2na}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

hội tụ đều trên $[\alpha, \beta]$. Áp dụng định lí 3.10, ta được đẳng thức (1) với mọi $a \in [\alpha, \beta]$. Vì có thể lấy các số $\alpha > 0$ và $\beta > \alpha$ một cách tùy ý nên đẳng thức (1) đúng với mọi $a > 0$.

Từ đẳng thức

$$I_1(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

nhờ công thức truy hồi $I_n'(a) = -2naI_{n+1}(a)$, có thể liên tiếp tính được $I_2(a)$, $I_3(a)$,... :

$$I_2(a) = \frac{\pi}{4a^3};\ I_n(a) = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n-1}} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx \text{ và } J = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

Ta biết rằng hàm số dưới dấu tích phân liên tục trên tập hợp $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ và tích phân $I(t)$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$. Do đó hàm số I liên tục trên $[0, +\infty)$ (Từ định lí 3.10 suy ra rằng I liên tục trên $[0, a]$ với mọi $a > 0$. Do đó I liên tục trên $[0, +\infty)$). Từ đó ta có

$$J = I(0) = \lim_{t\to 0^+} I(t).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng hàm số I khả vi trên $(0, +\infty)$ và tính đạo hàm của nó. Hiển nhiên đạo hàm riêng

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = -e^{-tx}\sin x$$

liên tục trên $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Ngoài ra, nếu α là một số dương bất kì thì với mọi $t \geqslant \alpha$, ta có $|e^{-tx}\sin x| \leqslant e^{-\alpha x}$. Vì tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ hội tụ nên, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx$$

hội tụ đều trên $[\alpha, +\infty)$. Theo định lí 3.12, hàm số I có đạo hàm trên đoạn $[\alpha, \beta]$ với mọi $\beta > \alpha$ và

$$I'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx \text{ với mọi } t \in [\alpha, \beta].$$

Áp dụng công thức tích phân từng đoạn $[0, b]$ $(b > 0)$, ta được

$$-\int_0^{b} e^{-tx}\sin x dx = \left[\frac{e^{-tx}(\cos x + t\sin x)}{1+t^2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=b}$$

cho $b \to +\infty$, ta được

$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \qquad (1)$$

với mọi $t \in [\alpha, \beta]$. Vì các số thực $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$ là tùy ý, từ đó suy ra I khả vi trên $(0, +\infty)$ và (1) đúng với mọi $t > 0$. Từ (1) suy ra

$$I(t) = -\text{arctg}t + C \text{ với mọi } t > 0,$$

C là một hằng số. Từ bất đẳng thức $|\sin x| \leqslant x$ với mọi $x \geqslant 0$ suy ra

$$|I(t)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \frac{1}{t} \text{ với mọi } t > 0.$$

Do đó $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = 0$. Vậy $C = \frac{\pi}{2}$ và

$$I(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} t, \ t > 0$$

Cho $t \to 0^+$, ta được

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 3. Trong ví dụ A.2.10, ta đã xét hàm số gamma Ơle

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \ t > 0.$$

Ta chứng minh Γ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$.

Thật vậy, ta có

$$\Gamma(t) = \int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \qquad (1)$$

Hiển nhiên hàm số dưới dấu tích phân $(x, t) \mapsto e^{-x}x^{t-1}$ liên tục trên $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Giả sử α, β là hai số thực bất kì, $0 < \alpha < \beta$. Khi đó với mọi $x \in (0, 1]$ và với mọi $t \in [\alpha, \beta]$, ta có

$$0 \leqslant e^{-x}x^{t-1} \leqslant x^{\alpha - 1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Vì $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ hội tụ với $\alpha > 0$ nên, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân thứ nhất ở vế phải của (1) hội tụ đều trên $[\alpha, \beta]$.

Tích phân thứ hai ở vế phải của (1) cũng hội tụ đều trên $[\alpha, \beta]$.

Thật vậy, với mọi $x \geqslant 1$ và với mọi $t \in [\alpha, \beta]$, ta có

$0 < x^2.e^{-x}x^{t-1} \leqslant x^2.e^{-x}.x^{\beta-1} = x^{1+\beta}e^{-x} \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Do đó, tồn tại một số $b \geqslant 1$ sao cho

$$x \geqslant b \Rightarrow x^{1+\beta}e^{-x} \leqslant 1$$

Từ đó $0 < e^{-x}x^{t-1} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ với mọi $x \geqslant b$ và mọi $t \in [\alpha, \beta]$.

Vì tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân thứ hai ở vế phải của (1) hội tụ đều trên $[\alpha, \beta]$. Theo định lí 3.10, từ đó suy ra rằng cả hai hàm số

$$t \longmapsto \int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx \text{ và } t \longmapsto \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$$

đều liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Do đó hàm số Γ liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Vì có thể lấy $\alpha > 0$ nhỏ tùy ý và β lớn tùy ý nên Γ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$.

Áp dụng định lí 3.12, dễ dàng chứng minh được rằng hàm số Γ có đạo hàm mọi cấp trên $(0, +\infty)$.

Chương XI

TÍCH PHÂN BỘI

Chương này giới thiệu tích phân hai lớp và ba lớp. Đầu tiên ta đề cập đến tích phân hai lớp trên một hình chữ nhật đóng và tích phân ba lớp trên một hình hộp chữ nhật đóng. Các định nghĩa, các tính chất cơ bản và điều kiện khả tích trong các trường hợp này được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong trường hợp tích phân đơn ở chương IV. Tiếp theo, ta mở rộng định nghĩa tích phân trên một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^2$ và $\mathbf{R}^3$ và xét các tính chất của tích phân trong trường hợp tổng quát. Các định lí Phubini cho phép đưa việc tính tích phân hai lớp và ba lớp về việc tính tích phân một lớp. Các công thức đổi biến số giúp ta chuyển các tích phân cho trước thành những tích phân dễ tính toán hơn. Sau cùng là tích phân bội suy rộng, tích phân bội phụ thuộc tham số và một vài ứng dụng vật lí.

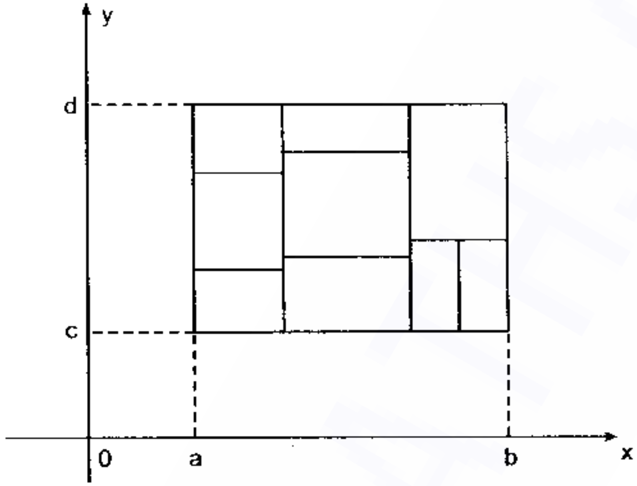
A. TÍCH PHÂN HAI LỚP

§1. TÍCH PHÂN HAI LỚP TRÊN HÌNH CHỮ NHẬT ĐÓNG

1.1. Phép phân hoạch. Tổng tích phân. Các tổng Đácbu

a) Chia hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $a < b$, $c < d)$ thành một số hữu hạn hình chữ nhật đóng

$$\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots, \Delta R_n$$



Hình 31

sao cho hai hình chữ nhật khác nhau bất kì có các phần trong không giao nhau. Như vậy mỗi hình chữ nhật ΔR_i có dạng

$$\Delta R_i = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta], [\alpha, \beta] \subset [a, b], [\gamma, \delta] \subset [c, d],$$

và $$\mathrm{Int}\Delta R_i \cap \mathrm{Int}\Delta R_j = \varnothing \text{ với } i \neq j, \ R = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta R_i.$$

Gọi $|R|$ là diện tích hình chữ nhật R, $|R| = (b - a)(d - c)$. Ta vẫn dùng kí hiệu ΔR_i để chỉ diện tích hình chữ nhật ΔR_i. Khi đó

$$|R| = \sum_{i=1}^{n} \Delta R_i.$$

Mỗi phép chia như vậy gọi là một phép phân hoạch hình chữ nhật R, thường được kí hiệu là π. Như vậy

$$\pi = \{\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots, \Delta R_n\}.$$

Gọi d_i là độ dài đường chéo hình chữ nhật ΔR_i. Số

$$d(\pi) = \max_{i=1,\ldots,n} d_i$$

gọi là đường kính của phép phân hoạch π.

b) *Tổng tích phân*

Giả sử $f: R \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$ và $\pi = \{\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n\}$ là một phép phân hoạch hình chữ nhật R.

Gọi $P_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm bất kì của hình chữ nhật ΔR_i, $i = 1, \ldots, n$. Tổng

$$\sigma = \sigma(\pi, P_1, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\ \Delta R_i$$

gọi là tổng tích phân của hàm số f ứng với phép phân hoạch π hình chữ nhật R và cách chọn các điểm $P_i \in \Delta R_i$.

c) *Các tổng Đacbu.*

● Giả sử $f: R \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$ và $\pi = \{\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n\}$ là một phép phân hoạch hình chữ nhật R. Đặt

$$m_i = \inf_{(x,y) \in \Delta R_i} f(x, y), \quad M_i = \sup_{(x,y) \in \Delta R_i} f(x, y), \ i = 1, \ldots, n.$$

Các tổng

$$s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta R_i \ \text{ và } \ S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta R_i\ ,$$

theo thứ tự, gọi là tổng Đácbu dưới và tổng Đácbu trên của hàm số f ứng với phép phân hoạch π hình chữ nhật R.

Chú ý rằng với một hàm số f cho trước và với một phép phân hoạch π hình chữ nhật R, có vô số tổng tích phân nhưng chỉ có một tổng Đácbu dưới và một tổng Đácbu trên.

d) Với giả thiết trong c), gọi $\sigma(\pi, P_1, \ldots, P_n)$ là tổng tích phân của hàm số f ứng với phép phân hoạch π hình chữ nhật R và cách chọn các điểm $P_i = (\xi_i, \eta_i) \in \Delta R_i$, $i = 1, \ldots, n$. Đặt

$$m = \inf_{(x,y) \in R} f(x, y), \quad M = \sup_{(x,y) \in R} f(x, y).$$

Khi đó, với mọi cách chọn các điểm $P_i \in \Delta R_i$, ta đều có

$$m|R| \leqslant s(\pi) \leqslant \sigma(\pi, P_1, \ldots, P_n) \leqslant S(\pi) \leqslant M|R| \qquad (1)$$

đ) Giả sử

$$\pi = \{\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots, \Delta R_n\}$$

và
$$\pi' = \{\Delta R_1', \Delta R_2', \ldots \Delta R_m'\}$$

là hai phép phân hoạch hình chữ nhật R. Ta nói rằng π' mịn hơn π nếu mỗi hình chữ nhật $\Delta R_j'$ của π' đều chứa trong một hình chữ nhật ΔR_i nào đó của π.

Tương tự như đối với phép phân hoạch một đoạn trong **R**,

- Nếu π' mịn hơn π thì

$$s(\pi') \geqslant s(\pi) \text{ và } S(\pi') \leqslant S(\pi).$$

Từ đó suy ra

$$S(\pi') - s(\pi') \leqslant S(\pi) - s(\pi).$$

- $s(\pi) = \inf\limits_{P_i \in \Delta R_i} \sigma(\pi, P_1, \ldots P_n)$, $S(\pi) = \sup\limits_{P_i \in \Delta R_i} \sigma(\pi, P_1, \ldots, P_n)$.

e) Dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch

Giả sử $\{\pi_n\}$ là một dãy phép phân hoạch hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$\pi_n = \{\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots \Delta R_{p_n}\}.$$

Dãy $\{\pi_n\}$ gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n \to \infty} d(\pi_n) = 0$.

1.2. Định nghĩa tích phân hai lớp

Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên hình chữ nhật

$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

$R = [a, b] \times [c, d]$. Nếu tồn tại một số thực I sao cho với một dãy chuẩn tắc bất kì $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch hình chữ nhật R

$$\pi_n = \{\Delta R_1, \Delta R_2, \dots \Delta R_{p_n}\}$$

và với một cách chọn bất kì các điểm $P_i = (\xi_i, \eta_i) \in \Delta R_i$, $i = 1, \dots, p_n$, ta đều có

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sigma(\pi, P_1, \dots, P_{p_n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta R_i = I$$

thì I được gọi là tích phân hai lớp của hàm số f trên hình chữ nhật R và được kí hiệu là

$$\iint_R f(x, y)dxdy.$$

Khi đó hàm số f được gọi là khả tích trên hình chữ nhật R.

§2. ĐIỀU KIỆN KHẢ TÍCH CỦA MỘT HÀM SỐ

Trừ định lí cuối cùng, các định lí trong mục này đều được chứng minh tương tự như trong trường hợp tích phân đơn.

2.1. Định lí. Nếu hàm số $f : R \to \mathbf{R}$ khả tích trên hình chữ nhật đóng R thì nó bị chặn trên R.

Đây chỉ là điều kiện cần chứ không phải là đủ.

2.2. Định lí. Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$; $\{\pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch R. Khi đó hai dãy tổng Đácbu $\{s(\pi_n)\}$ và $\{S(\pi_n)\}$ hội tụ và giới hạn của chúng không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{\pi_n\}$.

2.3. Định nghĩa. Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên hình chữ nhật đóng R, $\{\pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc bất kì những phép phân hoạch R. Khi đó, các số thực $\lim\limits_{n\to\infty} s(\pi_n)$ và $\lim\limits_{n\to\infty} S(\pi_n)$, theo thứ tự, được gọi là tích phân dưới hai lớp và tích phân trên hai lớp của hàm số f trên hình chữ nhật R, kí hiệu là

$$\underline{\iint_R} f(x, y)dxdy \text{ và } \overline{\iint_R} f(x, y)dxdy.$$

Vì $s(\pi_n) \leqslant S(\pi_n)$ với mọi n, nên

$$\underline{\iint_R} f(x, y)dxdy \leqslant \overline{\iint_R} f(x, y)dxdy .$$

2.4. Định lí. Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên hình chữ nhật đóng R. Khi đó

a) $s(\pi) \leqslant \underline{\iint_R} f(x, y)dxdy \leqslant \overline{\iint_R} f(x, y)dxdy \leqslant S(\pi)$,

với mọi $\pi \in \mathcal{P}(R)$,

b) $\sup\limits_{\pi\in\mathcal{P}(R)} s(\pi) = \underline{\iint_R} f(x, y)dxdy$, $\inf\limits_{\pi\in\mathcal{P}(R)} S(\pi) = \overline{\iint_R} f(x, y)dxdy$,

trong đó $\mathcal{P}(R)$ là tập hợp tất cả các phép phân hoạch hình chữ nhật R.

2.5. Định lí. Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên hình chữ nhật đóng R. Khi đó f khả tích trên R nếu và chỉ nếu

$$\underline{\iint_R} f(x, y)dxdy = \overline{\iint_R} f(x, y)dxdy .$$

2.6. Định lí. Giả sử f là một hàm số bị chặn trên hình chữ nhật đóng R. Khi đó f khả tích trên R nếu và chỉ nếu với một số $\varepsilon > 0$ cho trước bất kì, tồn tại một phép phân hoạch π hình chữ nhật R sao cho

$$S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$$

Từ định lí này, tương tự như đối với tích phân đơn, dễ dàng chứng minh định lí sau :

2.7. Định lí. Hàm số $f : R \to \mathbf{R}$ liên tục trên hình chữ nhật đóng R thì khả tích trên R.

Tổng quát hơn, ta có

2.8. Định lí. Giả sử hàm số f xác định và bị chặn trên hình chữ nhật đóng R. Nếu tồn tại một tập hợp $E \subset R$ có diện tích không và hàm số f liên tục trên $R \setminus E$ thì f khả tích trên R.

*Chứng minh.** Tồn tại một số $M > 0$ sao cho $|f(P)| \leq M$ với mọi $P \in R$. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Vì $|E| = 0$ nên độ đo Gioócđan ngoài của E bằng 0. Từ định nghĩa của độ đo ngoài suy ra rằng tồn tại một phép phân hoạch $\pi = \{\Delta R_1, ..., \Delta R_n\}$ của R sao cho tổng diện tích các hình chữ nhật ΔR_i có điểm chung với E nhỏ hơn ε. Gọi C là hợp của các hình chữ nhật đóng ΔR_i không có điểm chung với E. Vì C là đóng và bị chặn nên C là một tập hợp compắc trong $\mathbf{R}^2$. Hàm số f liên tục trên C nên liên tục đều trên C. Do đó tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho

$$(\forall P, Q \in C)\ \|P - Q\| < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Nếu cần thì thay π bởi một phép phân hoạch hình chữ nhật R mịn hơn, có thể coi $d(\pi) < \delta$. Ta có

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta R_i$$

$$= \sum\nolimits_1 (M_i - m_i)\Delta R_i + \sum\nolimits_2 (M_i - m_i)\Delta R_i.$$

($M_i = \sup\limits_{(x,y) \in \Delta R_i} f(x, y)$, $m_i = \inf\limits_{(x,y) \in \Delta R_i} f(x, y)$), tổng $\sum_1$ chứa các số hạng mà $\Delta R_i \subset C$, tổng $\sum_2$ chứa các số hạng còn lại. Khi đó

$$\sum\nolimits_1 (M_i - m_i)\Delta R_i < \varepsilon \sum\nolimits_1 \Delta R_i \leq \varepsilon |R|,$$

$$\sum\nolimits_2 (M_i - m_i)\Delta R_i \leq 2M \sum\nolimits_2 \Delta R_i < 2M\varepsilon.$$

Do đó

$$S(\pi) - s(\pi) < (|R| + 2M)\varepsilon.$$

Theo định lí 2.6, từ đó suy ra f khả tích trên R. □

Xem như một bài tập, bạn đọc hãy chứng minh định lí sau.

2.9. Định lí. Giả sử f là một hàm số xác định trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$ và I là một số thực

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy = I$$

khi và chỉ khi với mọi số dương ε, tồn tại một số dương δ sao cho với mọi phép phân hoạch π hình chữ nhật R

$$\pi = \{\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots, \Delta R_n\}$$

và với mọi cách chọn các điểm $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta R_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$d(\pi) < \delta \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta R_i - I\right| < \varepsilon.$$

§3. TÍCH PHÂN HAI LỚP TRÊN MỘT TẬP HỢP BỊ CHẶN

3.1. Định nghĩa. Giả sử D là một tích phân bị chặn trong $\mathbf{R}^2$ và $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên D. Khi đó tồn tại một hình chữ nhật đóng R chứa D. Gọi $f_o : R \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f_o(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{với } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{với } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Nếu hàm số f_o khả tích trên R thì ta nói rằng f khả tích trên D và định nghĩa

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R f_o(x, y)dxdy.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng giá trị $\iint_R f_o(x, y)dxdy$ không phụ thuộc vào việc chọn hình chữ nhật đóng R chứa D.

Ý nghĩa hình học của tích phân hai lớp

3.2. Định lí. Giả sử D là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^2$. $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn và không âm trên D. Đặt

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Nếu f khả tích trên D thì tập hợp A là đo được theo nghĩa Gioócđan trong $\mathbf{R}^3$ và thể tích của A là

$$v(A) = |A| = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Chứng minh. Giả sử R là một hình chữ nhật đóng chứa D và $\pi = \{\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n\}$ là một phép phân hoạch hình chữ nhật R. Gọi $f_0 : R \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định từ f nêu trong định nghĩa 3.1, $s(\pi)$ và $S(\pi)$ là các tổng Đácbu của hàm số f_0 ứng với π. Dễ dàng thấy rằng $s(\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta R_i$ là tổng các thể tích của các hình hộp chữ nhật chứa trong A và $S(\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta R_i$ là tổng các thể tích của các hình hộp chữ nhật có điểm chung với A. Vì

$$\underline{\iint\limits_R} f_0(x, y)dxdy = \sup_{\pi \in \mathcal{P}(R)} s(\pi) \text{ và } \overline{\iint\limits_R} f_0(x, y)dxdy = \inf_{\pi \in \mathcal{P}(R)} S(\pi) \text{ nên}$$

từ đó suy ra

$$\underline{\iint\limits_R} f_0(x, y)dxdy \leq v_A \text{ và } \overline{\iint\limits_R} f_0(x, y)dxdy \geq V_A \quad (1)$$

v_A và V_A, theo thứ tự là độ đo trong và độ đo ngoài của A.

Nếu f khả tích trên D thì $\underline{\iint\limits_R} f_0(x, y)dxdy = \overline{\iint\limits_R} f_0(x, y)dxdy =$ $= \iint\limits_R f_0(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Do đó từ (1) suy ra $v_A = V_A = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Vậy A đo được theo nghĩa Gioócđan trong $\mathbf{R}^3$ và thể tích của tập hợp A là

$$|A| = \iint f(x, y)dxdy. \ \square$$

3.3. Định lí. Giả sử D là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^2$ và $\chi : D \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi $\chi(x, y) = 1$ với mọi $(x, y) \in D$. Tập hợp D là đo được theo nghĩa Gioócđan khi và chỉ khi χ khả tích trên D. Khi đó

$$|D| = \iint_D \chi(x, y)dxdy = \iint_D dxdy$$

Chứng minh. Gọi R là một hình chữ nhật đóng chứa D, $\chi_0 : R \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định từ χ như trong định nghĩa 3.1. Giả sử $\pi = \{\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n\}$ là một phép phân hoạch bất kì hình chữ nhật R, $s(\pi)$ và $S(\pi)$ và các tổng Đácbu của hàm số χ_0 ứng với π. Khi đó $s(\pi)$ là tổng diện tích của các hình chữ nhật ΔR_i chứa trong D và $S(\pi)$ là tổng diện tích của các hình chữ nhật ΔR_i có điểm chung với D. Do đó $\underline{\iint_R} \chi_0(x, y)dxdy = s_D$ và

$$\overline{\iint_R} \chi_0(x, y)dxdy = S_D.$$

s_D và S_D là độ đo trong và độ đo ngoài của D. Từ đó suy ra rằng χ khả tích trên D khi và chỉ khi $s_D = S_D$ tức là D đo được theo nghĩa Gioócđan. Khi đó diện tích của D là

$$|D| = \iint_R \chi_0(x, y)dxdy = \iint_D \chi(x, y)dxdy = \iint_D dxdy. \quad \square$$

3.4. *Hệ quả.* Nếu D là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^2$ thì D là đo được theo nghĩa Gioócđan khi và chỉ khi biên của D có diện tích không : $|\partial D| = 0$.

*Chứng minh.** Ta giữ nguyên các kí hiệu trong 3.3. Giả sử D là đo được theo nghĩa Gioócđan, Khi đó, theo 3.3, hàm số $\chi_0 : R \to \mathbf{R}$ khả tích trên hình chữ nhật R. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Theo 2.6, tồn tại một phép phân hoạch π hình chữ nhật sao cho

$$S(\pi) - s(\pi) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Hiệu $S(\pi) - s(\pi)$ là tổng diện tích của các hình chữ nhật ΔR_i có điểm chung với ∂D và không chứa trong D. Ngoài ra có thể có những hình chữ nhật ΔR_j chứa trong D và có điểm chung với ∂D. Hiển nhiên các điểm chung của ∂D và ΔR_j đều nằm trên biên của ΔR_j. Vì vậy có thể chia mỗi ΔR_j đó thành các hình chữ nhật nhỏ hơn sao cho tổng diện tích của các hình chữ nhật có điểm chung với ∂D nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{2}$. Gọi π' là phép phân hoạch hình chữ nhật R nhận được từ π sau phép chia các hình chữ nhật ΔR_j (có điểm chung với ∂D và chứa trong D). Vì π' mịn hơn π nên từ (1) suy ra $S(\pi') - s(\pi') < \frac{\varepsilon}{2}$. Do đó tổng diện tích các hình chữ nhật $\Delta R_i'$ của π' có điểm chung với ∂D nhỏ hơn ε. Vậy $|\partial D| = 0$.

Đảo lại, dễ dàng chứng minh được rằng nếu $|\partial D| = 0$ thì D là đo được theo nghĩa Giooócđan. □

3.5. *Hệ quả.* Nếu hàm số $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ khả tích trên $[a, b]$ thì đồ thị Γ của f có diện tích không.

Chứng minh. Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, có thể giả thiết $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$. Vì f khả tích trên $[a, b]$ nên tập hợp

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

là đo được theo nghĩa Giooócđan trong $\mathbf{R}^2$. Theo 3.4, từ đó suy ra $|\partial D| = 0$.

Vì $\Gamma \subset \partial D$ nên từ đó suy ra $|\Gamma| = 0$. □

Tập hợp mở liên thông trong $\mathbf{R}^p$ được gọi là một *miền* trong $\mathbf{R}^p$. Nếu D là một miền thì tập hợp $\overline{D}$, bao đóng của D gọi là một *miền đóng* ; $\overline{D}$ cũng là một tập hợp liên thông.

Từ 3.4 và 3.5 suy ra

3.6. *Hệ quả.* Nếu biên của một miền bị chặn D trong $\mathbf{R}^2$ là hợp của một họ hữu hạn cung sao cho mỗi cung là đồ thị của một hàm số liên tục $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$ hoặc $x = x(y)$,

$c \leqslant y \leqslant d$ thì D là một tập hợp đo được (ta xem điểm là trường hợp đặc biệt của cung).

Miền bị chặn trong $\mathbf{R}^2$ thỏa mãn các điều kiện của 3.6 gọi là một *miền chính quy* trong $\mathbf{R}^2$.

Phần trong của một đĩa elip, phần trong của một hình tròn bỏ đi tâm hoặc bỏ đi một bán kính, phần trong của một hình vành khăn là những miền chính quy trong $\mathbf{R}^2$.

§4. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN HAI LỚP

Các định lí sau đây (4.1, 4.3, 4.4, 4.5) được chứng minh trước hết cho tích phân hai lớp trên một hình chữ nhật đóng tương tự như trong trường hợp tích phân đơn. Từ định nghĩa 3.1 suy ra rằng các định lí vẫn đúng đối với tích phân hai lớp trên một tập hợp bị chặn.

4.1. *Định lí.* a) Nếu f và g là hai hàm số khả tích trên tập hợp bị chặn $D \subset \mathbf{R}^2$ thì hàm số f + g cũng khả tích trên D và

$$\iint\limits_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

b) Nếu hàm số f khả tích trên D và $\alpha \in \mathbf{R}$ là một hằng số thì hàm số αf cũng khả tích trên D và

$$\iint\limits_D \alpha f(x, y)dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

4.2. *Nhận xét.* Gọi R(D) là tập hợp các hàm số khả tích trên tập hợp bị chặn $D \subset \mathbf{R}^2$. Định lí 4.1. có thể được phát biểu dưới dạng

a) R(D) là một không gian tuyến tính thực.

b) Hàm số $R(D) \ni f \mapsto \iint\limits_D f(x, y)dxdy$

là một dạng tuyến tính trên R(D).

4.3. *Định lí.* Nếu f và g là hai hàm số khả tích trên tập hợp bị chặn $D \subset \mathbf{R}^2$ và $f(x, y) \leq g(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_D g(x, y)dxdy$$

Đặc biệt, nếu f là một hàm số không âm khả tích trên D thì

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0$$

4.4. *Hệ quả.* Giả sử D là một tập hợp đo được trong $\mathbf{R}^2$ và f là một hàm số khả tích trên D. Nếu m và M là hai số thực sao cho

$$m \leq f(x, y) \leq M \text{ với mọi } (x, y) \in D$$

thì

$$m|D| \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq M|D|.$$

4.5. *Định lí.* Nếu hàm số f khả tích trên tập hợp bị chặn $D \subset \mathbf{R}^2$ thì hàm số $|f|$ cũng khả tích trên D và

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|\, dxdy.$$

4.6. *Định lí.* Nếu D là một tập hợp đo được trong $\mathbf{R}^2$ và f là một hàm số liên tục và bị chặn trên D thì f khả tích trên D.

Chứng minh. Giả sử R là một hình chữ nhật đóng chứa D và $f_0 : R \to \mathbf{R}$ là thác triển của f (trong định nghĩa 3.1). Vì D là đo được nên $|\partial D| = 0$. Hiển nhiên f_0 liên tục trên $R \setminus \partial D$. Do đó theo định lí 2.8, f_0 khả tích trên R, tức là f khả tích trên D. $\square$

4.7. *Định lí.* Nếu D là một tập hợp có diện tích không và f là một hàm số bị chặn trên D thì f khả tích trên D và

$$\iint_D f(x, y)dxdy = 0.$$

Chứng minh. Giả sử $|f(x, y)| \leq M$ với mọi $(x, y) \in D$ và ε là một số dương cho trước bất kì. Gọi R là một hình chữ nhật đóng chứa D và $f_0 : R \to \mathbf{R}$ là thác triển của f. Vì D có diện tích không nên tồn tại một phép phân hoạch π hình chữ nhật R sao cho tổng diện tích của các hình chữ nhật ΔR_i có điểm chung với D nhỏ hơn ε. Gọi $s(\pi)$ và $S(\pi)$ là các tổng Đácbu của f_0 ứng với π. Dễ dàng thấy rằng $S(\pi) - s(\pi) < 2M\varepsilon$. Vậy f_0 khả tích trên R. Do đó f khả tích trên D và

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|dxdy \leq M|D| = 0.$$

Vậy $$\iint_D f(x, y)dxdy = 0. \square$$

4.8. *Định lí.* Giả sử $g : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên D và f là một hàm số khả tích trên D. Nếu tập hợp $E \subset D$ có diện tích không và $g(x, y) = f(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \setminus E$ thì g khả tích trên D và $\iint_D g(x, y)dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy$.

Chứng minh. Giả sử R là một hình chữ nhật đóng chứa D, f_0 và g_0 là thác triển của f và g trên R. Khi đó hàm số $h_0 = g_0 - f_0$ bị chặn trên R và bằng 0 trên $R \setminus E$. Theo định lí 4.7, hàm số $h = h_0|_E$ là khả tích trên E và $\iint_E h(x,y)dxdy = 0$. Điều đó có nghĩa là h_0 khả tích trên R và $\iint_R h_0dxdy = 0$. Theo định lí 4.1, từ đó suy ra rằng hàm số $g_0 = f_0 + h_0$ là khả tích trên R và $\iint_R g_0dxdy = \iint_R f_0dxdy + \iint_R h_0dxdy = \iint_R f_0dxdy$. Vậy g khả tích trên D và $\iint_D gdxdy = \iint_D fdxdy$.

4.9. *Định lí.* Giả sử D_1 và D_2 là hai tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^2$. $D_1 \cap D_2$ có diện tích không. Nếu $D = D_1 \cup D_2$ và $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên D_1 và D_2 thì f khả tích trên D và

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy \quad (1)$$

Chứng minh. Giả sử R là một hình chữ nhật đóng chứa D và $f_1 : R \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f_i(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \text{ với } (x, y) \in D_i, \\ 0 \text{ với } (x, y) \in R \setminus D_i, \end{cases}$$

$i = 1, 2$. Từ giả thiết suy ra rằng f_1 và f_2 là những hàm số khả tích trên R và

$$\iint\limits_R f_i(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_i} f(x, y)dxdy, \; i = 1, 2 \qquad (2)$$

Theo định lí 4.1, từ đó suy ra rằng hàm số $f_1 + f_2$ khả tích trên R và

$$\iint\limits_R (f_1 + f_2)dxdy = \iint\limits_R f_1dxdy + \iint\limits_R f_2dxdy \qquad (3)$$

Vì $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D \setminus (D_1 \cap D_2)$ nên, theo định lí 4.8, f khả tích trên D và

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D [f_1(x, y) + f_2(x, y)]dxdy$$

$$= \iint\limits_R [f_1(x, y) + f_2(x, y)]dxdy \qquad (4)$$

Từ các đẳng thức (2), (3), (4) suy ra đẳng thức (1). □

Các định lí về giá trị trung bình của tích phân

4.10. Định lí. Giả sử D là một tập hợp đo được, $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên D. Nếu

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M \text{ với mọi } (x, y) \in D$$

thì tồn tại một số $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \mu|D|.$$

Chứng minh. Nếu $|D| = 0$ thì kết luận hiển nhiên đúng. Giả sử $|D| > 0$. Từ bất đẳng thức trong 4.4 suy ra

$$m \leqslant \frac{1}{|D|} \iint\limits_D f(x, y)dxdy \leqslant M.$$

Số $\mu = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)dxdy$ thỏa mãn kết luận của định lí. □

4.11. Định lí. Nếu D là một tập hợp đóng đo được liên thông và $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên D thì tồn tại một điểm $P = (\xi, \eta) \in D$ sao cho

$$\iint_D f(x, y)dxdy = f(P)|D|.$$

Chứng minh. Giả sử $|D| > 0$. Vì D là một tập hợp đóng và bị chặn nên nó là một tập hợp compắc (chú ý rằng tập hợp đo được là bị chặn). Đặt $m = \inf_{(x, y) \in D} f(x, y)$, $M = \sup_{(x, y) \in D} f(x, y)$. Do

$\mu = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)dxdy \in [m, M]$ và D là một tập hợp liên thông nên theo định lí V.11.13, tồn tại ít nhất một điểm $P = (\xi, \eta) \in D$ sao cho $f(P) = \mu$.

Nếu $|D| = 0$ thì hiển nhiên định lí đúng. □

§5. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN HAI LỚP

Các định lí sau cho phép đưa việc tính tích phân hai lớp về việc tính các tích phân một lớp.

5.1. Định lí Phubini (Fubini) trên hình chữ nhật

Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên hình chữ nhật đóng $R = [a, b] \times [c, d]$.

a) Nếu với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[c, d]$ thì hàm số

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

khả tích trên $[a, b]$ và

$$\iint\limits_R f(x,\ y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx\ ,$$

tức là

$$\iint\limits_R f(x,\ y)dxdy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,\ y)dy\Big]dx \qquad (1)$$

b) Nếu với mỗi $y \in [c,\ d]$, hàm số $x \mapsto f(x,\ y)$ khả tích trên $[a,\ b]$ thì hàm số

$$\psi(y) = \int_a^b f(x,\ y)dx$$

khả tích trên $[c,\ d]$ và

$$\iint\limits_R f(x,\ y)dxdy = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,\ y)dx\Big]dy \qquad (2)$$

Đặc biệt, nếu f là một hàm số liên tục trên R thì ta có đồng thời hai đẳng thức (1) và (2).

(Tích phân $\int_a^b \Big[\int_c^d f(x,\ y)dy\Big]dx$ thường được viết dưới dạng

$\int_a^b dx \int_c^d f(x,\ y)dy$ và gọi là tích phân lặp).

Chứng minh. a) Giả sử $\{\pi_n'\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch $[a,\ b]$,

$$\pi_n' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p_n} = b.$$

Lấy các điểm bất kì $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ và lập tổng tích phân

$$\sigma_n = \sigma(\varphi,\ \pi_n',\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{p_n}) = \sum_{i=1}^{p_n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ta chứng minh

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \iint_R f(x, y)dxdy.$$

Gọi $\{\pi_n''\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch đoạn $[c, d]$.

$$\pi_n'' : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{q_n} = d.$$

Khi đó $\pi_n = \{\Delta x_i \times \Delta y_j\} = \{[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}$ $i = 1, \ldots, p_n$, $j = 1, \ldots, q_n$, $n = 1, 2, \ldots$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch hình chữ nhật R. Đặt

$$m_{ij} = \inf_{(x, y) \in \Delta x_i \times \Delta y_j} f(x, y), \; M_{ij} = \sup_{(x, y) \in \Delta x_i \times \Delta y_j} f(x, y) ,$$

ta có

$$m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij} \text{ với mọi } (x, y) \in \Delta x_i \times \Delta y_j,$$

Đặc biệt,

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \text{ với mọi } y \in \Delta y_j,$$

Do đó

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \leq M_{ij}\Delta y_j \text{ , } j = 1, \ldots, q_n.$$

$$\sum_{j=1}^{q_n} m_{ij}\Delta y_j \leq \int_c^d f(\xi_i, y)dy \leq \sum_{j=1}^{q_n} M_{ij}\Delta y_j,$$

tức là

$$\sum_{j=1}^{q_n} m_{ij}\Delta y_j \leq \varphi(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^{q_n} M_{ij}\Delta y_j, \; i = 1, \ldots, p_n.$$

Từ đó

$$\sum^{p_n} \sum^{q_n} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leq \sum^{p_n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum^{p_n} \sum^{q_n} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j ,$$

tức là

$$s(f, \pi_n) \leq \sigma_n \leq S(f, \pi_n) \text{ với mọi } n,$$

$s(f, \pi_n)$ và $S(f, \pi_n)$ là các tổng Đácbu của hàm số f ứng với phép phân hoạch π_n hình chữ nhật R.

Vì f khả tích trên R nên

$$\lim_{n\to\infty} s(f, \pi_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \pi_n) = \iint_R f(x, y)dxdy.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \iint\limits_R f(x, y)dxdy.$

b) được chứng minh tương tự.

Nếu hàm số f liên tục trên R thì nó khả tích trên R. Hơn nữa với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ liên tục trên $[c, d]$, do đó khả tích trên $[c, d]$. Vì vậy ta có đẳng thức (1). Tương tự ta có (2). □

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_R (x + y)^2dxdy$, $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

Ta có $$I = \int_0^1 dx \int_0^2 (x + y)^2dy,$$

$$\int_0^2 (x + y)^2dy = \frac{(x+y)^3}{3}\Big|_{y=0}^{2} = \frac{1}{3}(x + 2)^3 - \frac{1}{3}x^3,$$

$$I = \frac{1}{3}\int_0^1 (x + 2)^3dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3dx = \frac{16}{3}.$$

5.2. *Định lí Phubini trên tập hợp bị chặn.*

Giả sử φ_1 và φ_2 là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ với mọi $x \in [a, b]$,

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Nếu f là một hàm số khả tích trên D và với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $y \longmapsto f(x, y)$ khả tích trên đoạn $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ thì hàm số

$$\varphi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

khả tích trên [a, b] và

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

tức là

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \qquad (1)$$

(Nếu φ_1, φ_2 đều liên tục trên [a, b] và f liên tục trên D thì ta có đẳng thức (1)).

Chứng minh. Vì φ_1, φ_2 khả tích trên [a, b] nên chúng bị chặn trên [a, b]. Giả sử $\varphi_1(x) \geqslant c$ và $\varphi_2(x) \leqslant d$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó D chứa trong hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$. Đặt

$$f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y) \text{ với } (x, y) \in D, \\ 0 \text{ với } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

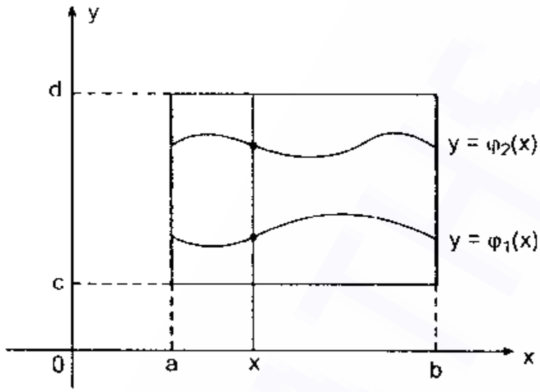
Khi đó, theo định nghĩa 3.1 của tích phân trên một tập hợp bị chặn, ta có

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R f_0(x, y)dxdy \qquad (2)$$

Theo định lí 5.1, ta có

$$\iint_R f_0(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f_0(x, y)dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \qquad (3)$$



Hình 32

vì với mỗi $x \in [a, b]$,

$$\int_c^d f_0(x, y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} f_0(x, y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_0(x, y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} f(x, y)dy =$$

$$= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Từ (2), (3) suy ra đẳng thức (1) cần chứng minh. □

Ví dụ. Tính $I = \iint_D (5x^2 - 2xy)dxdy$, trong đó D là tam giác giới hạn bởi đường thẳng $x + 2y = 2$ và hai trục tọa độ.

Ta có

$$D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - \frac{x}{2}\}$$

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (5x^2 - 2xy)\,dy,$$

$$\int_0^{1-\frac{x}{2}} (5x^2 - 2xy)dy = (5x^2y - xy^2)\Big|_{y=0}^{1-\frac{x}{2}} =$$

$$= -\frac{11}{4}x^3 + 6x^2 - x.$$

$$I = \int_0^2 \left(-\frac{11}{4}x^3 + 6x^2 - x\right)dx = 3.$$

Tương tự như 5.2, ta có

5.3. *Định lí.* Giả sử

$$D = \{(x, y) : \varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

trong đó $x = \varphi_1(y)$ và $x = \varphi_2(y)$ là hai hàm số khả tích trên $[c, d]$, $\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y)$ với mọi $y \in [c, d]$.

Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả tích trên D và với mỗi $y \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên đoạn $[\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$ thì hàm số

$$\varphi(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx$$

khả tích trên $[c, d]$ và

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \varphi(y)dy\ ,$$

tức là
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx.$$

Hiển nhiên, định lí đúng nếu φ_1, φ_2 là hai hàm số liên tục trên $[c, d]$ và f liên tục trên D.

§6. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TÍCH PHÂN HAI LỚP

Trong nhiều trường hợp nhờ một phép đổi biến số thích hợp có thể đưa một tích phân hai lớp cho trước về một tích phân dễ tính hơn. Ta thừa nhận định lí sau :

6.1. *Định lí.* Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^2$, D là một tập hợp con đo được compắc của U, $\varphi : U \to \mathbf{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

trong đó

- Các hàm số $x, y : U \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 trên U,
- Thu hẹp của φ trên IntD là một đơn ánh,
- Giacôbian $J(u, v) = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$ với mọi $(u, v) \in$ IntD.

Khi đó

a) $\varphi(D)$ là một tập hợp compắc đo được.

b) Nếu $f : \varphi(D) \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên $\varphi(D)$ thì

$$\iint_{\varphi(D)} f(x, y)dxdy = \iint_{D} f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|\,dudv. \qquad (1)$$

6.2. Phép đổi biến số trong tọa độ cực

Xét ánh xạ :

$$\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
$$(\theta, r) \longmapsto \varphi(\theta, r) = (x, y)$$

với $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Ánh xạ φ có các hàm số thành phần $x, y : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}^2$ (tức là những hàm số có các đạo hàm riêng mọi cấp liên tục trên $\mathbf{R}^2$) và có giacôbian

$$J(\theta, r) = \frac{D(x, y)}{D(\theta, r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r.$$

Dễ dàng thấy rằng φ không phải là một song ánh. Tuy nhiên với mỗi $\alpha \in \mathbf{R}$, thu hẹp của φ trên tập hợp

$$A = [\alpha, \alpha + 2\pi) \times (0, +\infty)$$

là một song ánh từ A lên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Chú ý rằng ảnh của nửa đường thẳng $\{\alpha\} \times (0, +\infty)$ qua ánh xạ φ là nửa đường thẳng D_α^+ gốc $O(0, 0)$ tạo với trục Ox góc α. Do đó thu hẹp của ánh xạ φ trên tập hợp mở

$$U_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi) \times (0, +\infty)$$

là một song ánh từ U_α lên tập hợp mở $\mathbf{R}^2 \setminus D_\alpha^+$ (mặt phẳng bỏ đi nửa đường thẳng đóng D_α^+). Ngoài ra $J(\theta, r) \neq 0$ với mọi $(\theta, r) \in U_\alpha$.

Nếu D là một tập hợp compắc đo được sao cho $\mathrm{Int}D \subset U_\alpha$ với một $\alpha \in R$ nào đó thì thu hẹp của φ trên Int D là một đơn ánh và $J(\theta, r) \neq 0$ trên IntD. Khi đó, với một hàm số $f : \varphi(D) \to \mathbf{R}$ bất kì liên tục trên $\varphi(D)$, ta có

$$\iint_{\varphi(D)} f(x, y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.$$

Ví dụ. Tính $I = \iint_\Delta e^{-x^2-y^2}dxdy$, trong đó Δ là hình tròn đơn vị ($\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$).

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, dễ dàng thấy rằng $\Delta = \varphi(D)$ với

$$D = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1\} = [0,2\pi] \times [0,1].$$

Do đó

$$I = \iint_D e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-r^2}r\,dr$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

6.3. *Nhận xét*. Nếu trong công thức (1) trong 6.1, ta lấy $f(x, y) = 1$ với mọi $(x, y) \in \varphi(D)$ thì vế trái là diện tích của $\varphi(D)$. Ta có

$|\varphi(D)| = \iint_D |J(u, v)|dudv$. Gọi D_r là hình tròn đóng tâm (u_0, v_0) bán kính r, M_r và m_r là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|J(u, v)|$ trên D_r. Khi đó

$$m_r|D_r| \leqslant \iint\limits_{D_r} |J(u, v)|dudv \leqslant M_r|D_r|,$$

$$m_r|D_r| \leqslant |\varphi(D_r)| \leqslant M_r|D_r|,$$

$$m_r \leqslant \frac{|\varphi(D_r)|}{|D_r|} \leqslant M_r.$$

Khi $r \to 0$, M_r và m_r đều dần đến $|J(u_0, v_0)|$. Vậy

Giá trị tuyệt đối của Giacôbian của ánh xạ φ tại điểm (u_0, v_0) bằng giới hạn của tỉ số các diện tích của hai tập hợp $\varphi(D)$ và D, trong đó D là lân cận của điểm (u_0, v_0), $\varphi(D)$ là ảnh của D qua ánh xạ φ khi D thu dần về điểm (u_0, v_0).

6.4. Tích phân hai lớp trên một tập hợp đối xứng

Giả sử hàm số $f : D \to \mathbf{R}$ khả tích trên tập hợp $D \subset \mathbf{R}^2$, và D là một tập hợp đối xứng (qua một đường thẳng hoặc qua một điểm). Ta kí hiệu $\mathcal{S}$ là phép đối xứng đó. Giả sử

$D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = \mathcal{S}(D_1)$, D_1, D_2 là những tập hợp đo được và $|D_1 \cap D_2| = 0$. Khi đó, từ định nghĩa của tích phân hai lớp suy ra

a) Nếu với mọi $(x, y) \in D$, $f[\mathcal{S}(x, y)] = f(x, y)$ thì

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy,$$

b) Nếu với mọi $(x, y) \in D$, $f[\mathcal{S}(x, y)] = -f(x, y)$ thì

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = 0.$$

Ví dụ. Tính $I = \iint\limits_{D} (x^2 - y^2)dxdy$,

D là đĩa elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

Tập hợp D đối xứng qua hai trục tọa độ. Ngoài ra, ta có

$f(x, -y) = f(x, y)$ và $f(-x, y) = f(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$.

Do đó nếu đặt

$$D_1 = \{(x, y) \in D : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

thì

$$I = 4 \iint_{D_1} (x^2 - y^2)dxdy.$$

Thực hiện phép đổi biến số $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, ta có $|J(r, \theta)| = abr$ và $I = 4 \iint_{\Delta} r^2(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)abrdrd\theta$,

trong đó

$$\Delta = \{(r, \theta) : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\},$$

$$I = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 ab(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)r^3dr$$

$$I = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a^2(1 + \cos 2\theta) - b^2(1 - \cos 2\theta)]\, d\theta$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\cos 2\theta]\, d\theta,$$

$$I = \frac{\pi ab(a^2 - b^2)}{4}.$$

§7. THỂ TÍCH VẬT THỂ

Giả sử D là một tập hợp đo được trong $\mathbf{R}^2$, φ_1 và φ_2 là hai hàm số khả tích trên D, $\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$. Gọi B là tập hợp trong $\mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y)\}.$$

Từ định lí 3.2 dễ dàng suy ra rằng thể tích của tập hợp B (vật thể B) là

$$V = |B| = \iint_D [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)]\,dxdy.$$

Ví dụ. Tính thể tích elipxôit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

Mặt phẳng $z = 0$ chia elipxôit thành hai phần có thể tích bằng nhau. Phần elipxôit nằm về phía trên mặt phẳng $z = 0$ giới hạn bởi mặt $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ và đĩa elip D, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ (trong mặt phẳng $z = 0$). Thể tích của elipxôit là :

$$V = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực (mở rộng) : $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, ta được

$$V = 2abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\,rdr = -2\pi abc\int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\,d(1 - r^2)$$

$$= -\frac{4}{3}\pi abc(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

§8. DIỆN TÍCH MẶT CONG

8.1. Mặt tham số trơn

Định nghĩa. Giả sử U là một miền trong $\mathbf{R}^2$ (tức là một tập hợp mở liên thông trong $\mathbf{R}^2$) và $\sum$ là một mặt với biểu diễn tham số

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in U.$$

a) Mặt Σ gọi là *trơn* nếu x, y, z là những hàm số thuộc lớp C^1 trên U (tức là các hàm số x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U) và hai vectơ

$$\overrightarrow{M}_u'(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

và

$$\overrightarrow{M}_v'(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$$

là độc lập tuyến tính với mọi $(u, v) \in U$.

Ta biết rằng khi đó mặt Σ có tiếp diện tại mỗi điểm $M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ của nó (đó là mặt phẳng đi qua điểm $M(u, v)$ và song song với hai vectơ $\overrightarrow{M}_u'(u, v)$ và $\overrightarrow{M}_v'(u, v)$).

Hiển nhiên mặt Σ là trơn khi và chỉ khi vectơ

$$\overrightarrow{N}(u, v) = \overrightarrow{M}_u'(u, v) \wedge \overrightarrow{M}_v'(u, v)$$

khác không với mọi $(u, v) \in U$. Vectơ $\overrightarrow{N}(u, v)$ là vectơ chỉ phương của pháp tuyến của mặt Σ tại điểm $M(u, v)$.

b) Mặt Σ gọi là *đơn* nếu ánh xạ

$$(u, v) \mapsto M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ (u, v) \in U$$

là một đơn ánh.

8.2. Giả sử Σ là một mặt trơn với biểu diễn tham số

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in U,$$

trong đó U là một miền trong $\mathbf{R}^2$. Khi đó vectơ pháp tuyến của mặt Σ tại điểm $M(u, v)$ là

$$\overrightarrow{N}(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix} \right)$$

$$= (A(u, v), B(u, v), C(u, v)).$$

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{N}(u, v)$ là :

$$||\overrightarrow{N}(u, v)|| = (A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v))^{\frac{1}{2}}.$$

Vì các hàm số x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U nên

$$(u, v) \longmapsto ||\overrightarrow{N}(u, v)||$$

là một hàm số liên tục trên U.

8.3 Diện tích mặt cong

Giả sử $\sum$ là một mặt đơn trơn với biểu diễn tham số

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)), (u, v) \quad (1)$$

với $(u, v) \in U$ trong đó U là một miền của $\mathbf{R}^2$,

S là một mặt với biểu diễn tham số (1) với $(u, v) \in D$, trong đó D là một tập hợp compắc đo được chứa trong U.

Như vậy S là một tập hợp con của $\sum$. Vì ánh xạ

$$(u, v) \longmapsto M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$$

liên tục nên $S = M(D)$ là một tập hợp compắc.

Vì hàm số $(u, v) \longmapsto ||\overrightarrow{N}(u, v)||$ liên tục trên tập hợp compắc đo được D nên nó khả tích trên tập hợp này.

Định nghĩa. Số thực không âm

$$\iint_D ||\overrightarrow{N}(u, v)||\, dudv$$

gọi là diện tích của mặt S, kí hiệu là $\mu(S)$ hoặc $|S|$.

Yếu tố diện tích

Ta kí hiệu

$$dS = ||\overrightarrow{N}(u, v)||\, dudv$$

và gọi nó là yếu tố diện tích của mặt S.

Kí hiệu

$$d\vec{\sigma} = \overrightarrow{N}(u, v)\, dudv$$

gọi là yếu tố vectơ diện tích của S.

8.4. Diện tích mặt $z = f(x, y)$.

Giả sử U là một miền trong $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$ là một hàm số thuộc lớp C^1 trên U. Khi đó mặt $\sum$, đồ thị của hàm số f là một mặt đơn trơn với biểu diễn tham số

$$x = x,\ y = y,\ z = f(x, y),\ (x, y) \in U.$$

Pháp tuyến của mặt $\sum$ tại điểm M(x, y) có vectơ chỉ phương là

$$\vec{N}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x'(x, y) \\ 0 & 1 & f_y'(x, y) \end{vmatrix} = (-f_x'(x, y),\ -f_y'(x, y),\ 1),$$

$$||\vec{N}(x, y)|| = \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}.$$

Nếu S là mặt $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, trong đó D là một tập hợp compắc đo được chứa trong U thì diện tích của mặt S là

$$\mu(S) = |S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy.$$

Ví dụ 1. Tính diện tích phần của mặt đinh ốc

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = h\theta$, $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Ta có

$$\vec{N}(r, \theta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & h \end{vmatrix}$$

$$= (h\sin\theta,\ -h\cos\theta,\ r),$$

$$||\vec{N}(r, \theta)|| = \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Diện tích phần của mặt đinh ốc đã cho là :

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{h^2 + r^2}\,dr = \pi\left(a\sqrt{h^2 + r^2} + h^2\ln(r + \sqrt{h^2 + r^2})\right)\Big|_0^a,$$

$$S = \pi\left(a\sqrt{h^2 + a^2} + h^2\ln\frac{a + \sqrt{h^2 + a^2}}{h}\right).$$

Ví dụ 2. Tìm diện tích phần của mặt parabôlôit $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Mặt trụ cắt mặt parabôlôit theo đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ trong mặt phẳng Oxy. Ta có $z_x' = -2x$, $z_y' = -2y$. Diện tích phần của mặt đã cho là

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy,$$

D là hình tròn $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ trong mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\,rdr = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi.$$

B. TÍCH PHÂN BA LỚP

§1. TÍCH PHÂN BA LỚP TRÊN HÌNH HỘP CHỮ NHẬT ĐÓNG

1.1. Phép phân hoạch hình hộp chữ nhật

Cho hình hộp chữ nhật đóng $P = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$. Chia P thành những hình hộp chữ nhật đóng $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$ đôi một có phần trong không giao nhau. Như vậy mỗi hình hộp chữ nhật Δv_i có dạng

$$\Delta v_i = [\alpha, \alpha'] \times [\beta, \beta'] \times [\gamma, \gamma'] \subset P,$$

$$\mathrm{Int}\Delta v_i \cap \mathrm{Int}\Delta v_j = \varnothing \text{ với } i \neq j,\ P = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta v_i.$$

Gọi $|P|$ là thể tích hình hộp chữ nhật P,
$|P| = (a' - a)(b' - b)(c' - c)$. Ta vẫn dùng kí hiệu Δv_i để chỉ thể tích của hình hộp chữ nhật Δv_i. Khi đó $|P| = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta v_i$.

Mỗi phép chia như vậy gọi là một phép phân hoạch hình hộp chữ nhật P, thường được kí hiệu là π. Như vậy

$$\pi = \{\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n\}.$$

Gọi d_i là độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật Δv_i. Số

$$d(\pi) = \max_{i=1,\dots,n} d_i$$

gọi là đường kính của phân hoạch π.

Dãy $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch hình hộp chữ nhật P gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

1.2. Tổng tích phân và các tổng Đácbu trên và dưới của một hàm số xác định trên một hình hộp chữ nhật được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

1.3. Định nghĩa tích phân ba lớp

Giả sử $f : P \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trên hình hình hộp chữ nhật đóng P. Gọi $\{\pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch hình hộp P,

$$\pi_n = \{\Delta v_1, \dots, \Delta v_{p_n}\}.$$

Lấy một điểm bất kì $Q_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$, $i = 1, \dots, p_n$. Đặt

$$\sigma_n = \sigma(\pi_n, Q_1, \dots, Q_{p_n}) = \sum_{i=1}^{p_n} f(Q_i)\,\Delta v_i.$$

Nếu tồn tại một số thực I sao cho với mọi dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch hình hộp P và với mọi cách chọn các điểm $Q_i \in \Delta v_i$, ta đều có $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = I$

thì I gọi là tích phân ba lớp của hàm số f trên hình hộp chữ nhật đóng P, kí hiệu là

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)dxdydz \text{ hoặc } \iiint\limits_P f(x, y, z)dv.$$

Khi đó hàm số f được gọi là khả tích trên P.

Diều kiện khả tích của một hàm số được thiết lập hoàn toàn tương tự như đối với tích phân hai lớp. Ở đây ta chỉ nêu một định lí về sự tồn tại của tích phân.

1.4. Định lí. Giả sử $f : P \to \mathbf{R}$ là một hàm số bị chặn trên hình hộp chữ nhật đóng P và $E \subset P$ là một tập hợp có thể tích không. Nếu f liên tục trên tập hợp $P \setminus E$ thì f khả tích trên P.

Chứng minh tương tự như chứng minh của định lí A.2.7.

§2. TÍCH PHÂN BA LỚP TRÊN MỘT TẬP HỢP BỊ CHẶN

2.1. Định nghĩa. Giả sử B là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^3$, $f : B \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên B. Gọi P là một hình hộp chữ nhật đóng chứa B và $f_o : P \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f_o(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{với } (x, y, z) \in B, \\ 0 & \text{với } (x, y, z) \in P \setminus B \end{cases}$$

Nếu hàm số f_o khả tích trên P thì ta nói rằng f khả tích trên B và định nghĩa

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_P f_o(x, y, z)dxdydz$$

Giá trị $\iiint\limits_P f_o(x, y, z)dxdydz$ không phụ thuộc vào việc chọn hình hộp chữ nhật P.

Ý nghĩa hình học

2.2. Định lí. Giả sử B là một tập hợp bị chặn trong không gian $\mathbf{R}^3$. Gọi $\chi : B \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$\chi(x, y, z) = 1 \text{ với mọi } (x, y, z) \in \mathbf{B}.$$

Tập hợp B là đo được theo nghĩa Gioócđan khi và chỉ khi hàm số χ khả tích trên B.

Khi đó thể tích của B là

$$v(B) = |B| = \iiint_B \chi(x, y, z)dxdydz = \iiint_B dxdydz = \iiint_B dv$$

Chứng minh tương tự như chứng minh định lí A.3.3.

2.3. *Hệ quả.* Nếu B là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^3$ thì B là đo được theo nghĩa Gioócđan khi và chỉ khi biên ∂B của B có thể tích không : $v(\partial B) = |\partial B| = 0$.

Chứng minh tương tự như chứng minh hệ quả A.3.4.

2.4. Định lí. Giả sử D là một tập hợp đo được trong $\mathbf{R}^2$, $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên D. Khi đó mặt $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, tức là đồ thị S của hàm số f

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

có thể tích không : $|S| = 0$.

Chứng minh. Không làm giảm tính tổng quát của vấn đề, có thể coi $f(x, y) \geqslant 0$ trên D. Theo định lí A.3.2, từ đó suy ra rằng tập hợp

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}$$

là đo được theo nghĩa Gioócđan. Do đó, theo 2.3, biên ∂A của A có thể tích không. Vì $S \subset \partial A$ nên S có thể tích không. □

Từ định lí trên suy ra

2.5. *Hệ quả.* Nếu D là một miền chính quy trong $\mathbf{R}^2$ và $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên D thì mặt $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ có thể tích không.

Từ đó dễ dàng suy ra

2.6. *Hệ quả.* Giả sử B là một tập hợp bị chặn trong $\mathbf{R}^3$. Nếu biên ∂B của B là hợp của một họ hữu hạn mặt $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_z$, $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_x$, $y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_y$, trong đó z, x, y là những hàm số liên tục trên các miền chính quy đóng D_z, D_x, D_y trong các mặt phẳng tọa độ thì B là một tập hợp đo được theo nghĩa Gioócđan (ta gọi bao đóng của một miền chính quy là miền chính quy đóng).

Một số mặt vừa nêu có thể suy biến thành những cung hoặc điểm.

Ví dụ. Hình cầu, elipxôit, hình trụ tròn xoay là những tập hợp đo được theo nghĩa Gioócđan.

2.7. Sự tồn tại tích phân

Định lí. Nếu B là một tập hợp đo được trong $\mathbf{R}^3$ và $f : B \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên B thì f là khả tích trên B.

Chứng minh tương tự như chứng minh định lí A.4.6.

Chú ý. Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự như tích phân hai lớp.

§3. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BA LỚP

Cũng như trong trường hợp tích phân hai lớp, các định lí sau cho phép đưa việc tính tích phân ba lớp về việc tính tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

3.1. Tích phân ba lớp trên hình hộp chữ nhật

Định lí (Phubini). Giả sử $f : P \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên hình hộp chữ nhật đóng $P = [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$

a) Nếu với mỗi $(x, y) \in R = [a, a'] \times [b, b']$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[c, c']$ thì hàm số

$$\varphi(x, y) = \int_c^{c'} f(x, y, z)\,dz$$

khả tích trên R và

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{[a,a']\times[b,b']} \varphi(x, y)\,dxdy,$$

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{[a,a']\times[b,b']} dxdy \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)\,dz \quad (1)$$

b) Nếu với mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \longmapsto f(x, y, z)$ khả tích trên hình chữ nhật $R = [a, a'] \times [b, b']$ thì hàm số

$$\psi(z) = \iint\limits_R f(x, y, z)\,dxdy$$

khả tích trên $[c, c']$ và

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_c^{c'} \psi(z)dz,$$

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_c^{c'} dz \iint\limits_{[a,a']\times[b,b']} f(x, y, z)\,dxdy \quad (2)$$

Chứng minh tương tự như trong trường hợp tích phân hai lớp trên hình chữ nhật đóng.

3.2. Nếu hàm số $f : P \to \mathbf{R}$ liên tục trên hình hộp chữ nhật đóng P thì hiển nhiên ta có hai công thức (1) và (2) trong 3.1. Khi đó vì hàm số $(x, y) \longmapsto \varphi(x, y) = \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)\,dz$ liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, a'] \times [b, b']$ nên

$$\iint\limits_R \varphi(x, y)dxdy = \int\limits_a^{a'} dx \int\limits_b^{b'} \varphi(x, y)dy.$$

Do đó

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^{a'} dx \int\limits_b^{b'} dy \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz.$$

3.3. Giả sử D là một tập hợp đo được theo nghĩa Gioocđan trong $\mathbf{R}^2$, φ_1, φ_2 : D → **R** là hai hàm số khả tích trên D

$$\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y) \text{ với mọi } (x, y) \in D.$$

Gọi B là tập hợp trong $\mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y)\}.$$

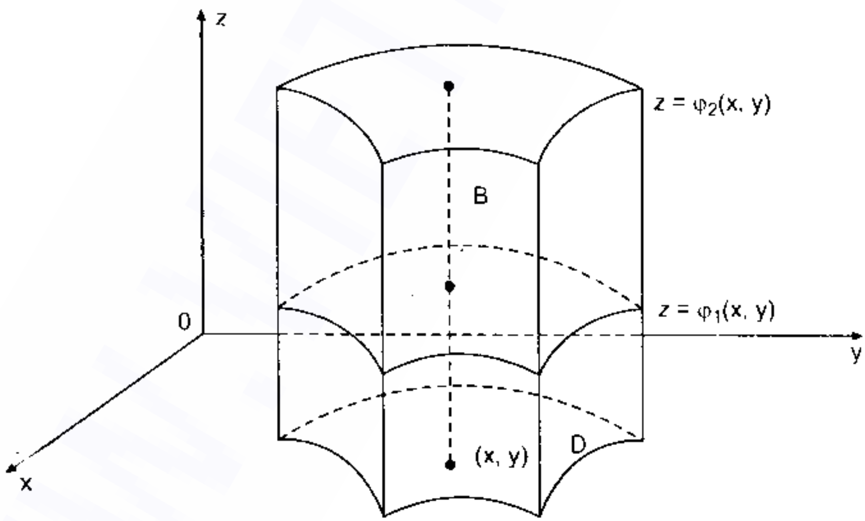
Định lí. (Phubini). Giả sử f : B → **R** là một hàm số khả tích trên B. Nếu với mỗi (x, y) ∈ D, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$ thì hàm số

$$\psi(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$$

khả tích trên D và

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_D \psi(x, y)dxdy,$$

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$



Hình 3.3

Chứng minh. Tương tự như chứng minh của định lí A.5.2.

Lấy một hình hộp chữ nhật đóng P chứa B. Gọi $f_0 : P \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f_0(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{với } (x, y, z) \in B, \\ 0 & \text{với } (x, y, z) \in P \setminus B. \end{cases}$$

Áp dụng định lí 3.1 cho hàm số f_0 trên hình hộp P, ta được công thức cần chứng minh. □

3.4. Đặc biệt, nếu D là một tập hợp đo được trong $\mathbf{R}^2$, φ_1, φ_2 là những hàm số liên tục và bị chặn trên D và $f : B \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên B thì định lí 3.3 đúng.

3.5. Giả sử B là một tập hợp đo được (theo nghĩa Gioócđan) trong $\mathbf{R}^3$, giới hạn bởi hai mặt phẳng $z = c$, $z = c'$ và với mỗi $z \in [c, c']$, thiết diện của B cắt bởi mặt phẳng $Z = z$ là một tập hợp đo được theo nghĩa Gioócđan trong $\mathbf{R}^2$. Gọi B_z là hình chiếu của thiết diện đó trên mặt phẳng Oxy.

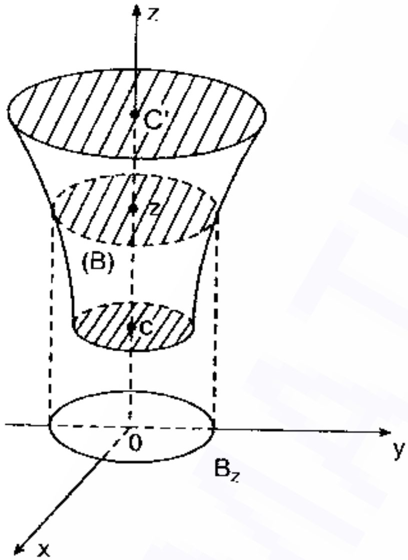
Định lí (Phubini). Giả sử $f : B \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên B. Nếu với mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \longmapsto f(x, y, z)$ khả tích trên B_z thì hàm số

$\varphi(z) = \iint\limits_{B_z} f(x, y, z)dxdy$ khả tích trên $[c, c']$ và

$$\iiint\limits_{B} f(x, y, z)\,dxdydz = \int_c^{c'} \varphi(z)dz,$$

$$\iiint\limits_{B} f(x, y, z)\,dxdydz = \int_c^{c'} dz \iint\limits_{B_z} f(x, y, z)dxdy.$$

Đặc biệt định lí đúng với hàm số f liên tục và bị chặn trên B.



Hình 34

Chứng minh. Lấy hình hộp chữ nhật đóng P chứa B. Gọi $f_0 : P \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f_0(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) \text{ với } (x, y, z) \in B, \\ 0 \text{ với } (x, y, z) \in P \setminus B. \end{cases}$$

Áp dụng định lí 3.1.b) cho hàm số f_0 trên hình hộp P ta được công thức cần chứng minh. □

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz$

$B = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

B là tứ diện OPQR, O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(0, 0, 1). Ta viết B dưới dạng.

$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta OPQ, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$.

Theo định lí 3.3, ta có

$$1 = \iint\limits_{\Delta OPQ} dxdy \int_0^{1-x-y} xdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\right) dx = \frac{1}{24}.$$

§4. PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TÍCH PHÂN BA LỚP

Tương tự như định lí A.6.1, ta có

4.1. Định lí. Giả sử Ω là một tập hợp mở trong $\mathbf{R}^3$, B là một tập hợp con compắc đo được của Ω, $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi

$$\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

trong đó

- Các hàm số x, y, z : $\Omega \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 trên Ω,
- Thu hẹp của φ trên IntB là một đơn ánh,
- Giacôbian $J(u, v, w) = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$

với mọi $(u, v, w) \in \text{IntB}$.

Khi đó

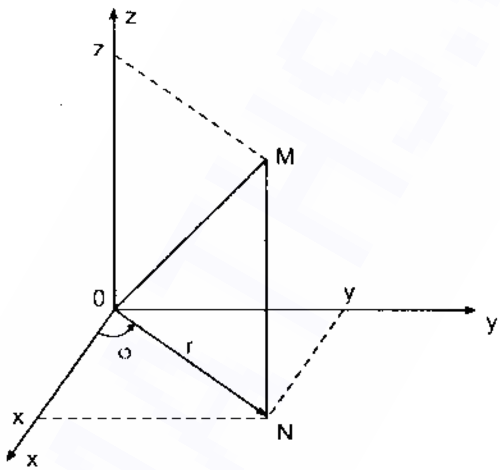
a) $\varphi(B)$ là một tập hợp compắc đo được.

b) Nếu $f : \varphi(B) \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên $\varphi(B)$ thì

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{B} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|J(u, v, w)|\, dudvdw.$$

4.2. Tọa độ trụ



Hình 35

Trong không gian chọn một hệ trục tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz. Giả sử M(x, y, z) là một điểm bất kì trong không gian. Gọi N là hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxy. Đặt $|\overrightarrow{ON}| = r$, $(Ox, \overrightarrow{ON}) = \varphi$, ta được $x = r\cos\varphi$,

$$y = r\sin\varphi. \quad (1)$$

Mỗi bộ ba số thực (r, φ, z), trong đó r, φ thỏa mãn các hệ thức trong (1) gọi là một bộ tọa độ trụ của điểm M(x, y, z). Thường người ta lấy $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Mỗi điểm M(x, y, z) có vô số tọa độ trụ.

Xét ánh xạ $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$\Phi(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Các hàm số $x(r, \varphi, z) = r\cos\varphi$, $y(r, \varphi, z) = r\sin\varphi$, $z = z$ đều thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}^3$.

$$J(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

$J(r, \varphi, z) \neq 0$ với mọi $r > 0$.

Với mỗi $\alpha \in \mathbf{R}$, thu hẹp của Φ trên tập hợp

$$A = (0, +\infty) \times [\alpha, \alpha + 2\pi) \times \mathbf{R}$$

là một song ánh từ A lên không gian $\mathbf{R}^3$ bỏ đi trục Oz. Giacôbian $J(r, \varphi, z) \neq 0$ trên A.

Thu hẹp của Φ trên tập hợp mở

$$\Omega_\alpha = (0, +\infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \times \mathbf{R}$$

là một song ánh từ Ω_α lên tập hợp mở $V_\alpha = \mathbf{R}^3 \setminus P_\alpha^+$, trong đó P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có biên là trục Oz, cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α.

Nếu B là một tập hợp compắc đo được sao cho $\mathrm{Int}B \subset \Omega_\alpha$ với một α nào đó thì thu hẹp của Φ trên IntB là một đơn ánh và $J(r, \varphi, z) \neq 0$ trên IntB. Khi đó, với mọi hàm số $f : \Phi(B) \to \mathbf{R}$ liên tục trên $\Phi(B)$,

ta có $\iiint\limits_{\Phi(B)} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{B} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi dz.$

Ví dụ. Tính $I = \iiint\limits_{B} \dfrac{zdxdydz}{1 + x^2 + y^2}$,

B là hình trụ tròn xoay

$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$, $a, h > 0$.

Chuyển sang tọa độ trụ, đặt

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

B là ảnh của hình hộp chữ nhật $[0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, h]$ qua ánh xạ Φ vừa nêu. Do đó

$$I = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \frac{zr}{1 + r^2}\,dz = 2\pi \int_0^a \frac{r}{1 + r^2}\,dr \cdot \int_0^h zdz$$

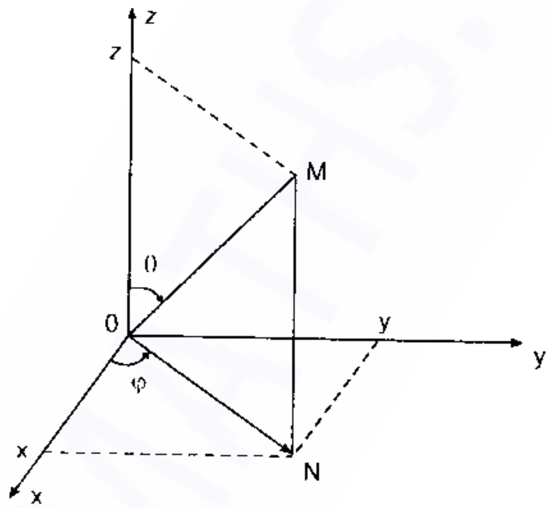
$$I = \frac{1}{2}\pi h^2 \ln(1 + a^2).$$

4.3. Tọa độ cầu

Chọn một hệ trục tọa độ Đềcac vuông góc Oxyz trong không gian. Giả sử M(x, y, z) là một điểm bất kì trong không gian. Gọi N là hình chiếu của M trên mặt phẳng Oxy. Đặt $|\overrightarrow{OM}| = r$, $(Ox, \overrightarrow{ON}) = \varphi$, $(Oz, \overrightarrow{OM}) = \theta$, ta có

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \qquad (1)$$

Mỗi bộ ba số thực (r, φ, θ) thỏa mãn các hệ thức trong (1) gọi là một bộ tọa độ cầu của điểm M(x, y, z). Thường người ta lấy $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.



Hình 46

Xét ánh xạ $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi $\Phi(r, \varphi, \theta) =$
$= (r\sin\theta\cos\varphi,$
$r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$.

Các hàm số

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ đều thuộc lớp C^∞ trên $\mathbf{R}^3$

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

$J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ với mọi $r > 0$ và $0 < \theta < \pi$.

Với mỗi $\alpha \in \mathbf{R}$, thu hẹp của Φ trên tập hợp

$$A = (0, +\infty) \times [\alpha, \alpha + 2\pi) \times (0, \pi)$$

là một song ánh từ A lên không gian $\mathbf{R}^3$ bỏ đi trục Oz. Giacôbian $J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ trên A.

Thu hẹp của Φ trên tập hợp mở

$$\Omega_\alpha = (0, +\infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \times (0, \pi)$$

là một song ánh từ Ω_α lên tập hợp mở $V_\alpha = \mathbf{R}^3 \setminus P_\alpha^+$, trong đó

P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có biên là trục Oz, cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α.

Nếu B là một tập hợp compắc đo được sao cho Int$B \subset \Omega_\alpha$ với một α nào đó thì thu hẹp của Φ trên IntB là một đơn ánh và $J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ trên IntB. Do đó

Với mọi hàm số $f : \Phi(B) \to \mathbf{R}$ liên tục trên $\Phi(B)$, ta có

$$\iiint\limits_{\Phi(B)} f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{B} f(x(r, \varphi, \theta), y(r, \varphi, \theta), z(r, \varphi, \theta))\, r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Ví dụ. Tính thể tích elipxôit

$$B = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Thể tích của elipxôit là :

$V = v(B) = \iiint\limits_{B} dxdydz$. Ta thực hiện phép đổi biến số

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi,\ z = cr\cos\theta,$$

Hình hộp chữ nhật

$$\{(r, \varphi, \theta) : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

có ảnh qua ánh xạ $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$(r, \varphi, \theta) \longmapsto (ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)$$

là elipxôit đang xét.

$$|J(r, \varphi, \theta)| = abcr^2\sin\theta.$$

Do đó

$$V = abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2\sin\theta dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\, abc \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi abc.$$

C. ỨNG DỤNG VẬT LÍ CỦA TÍCH PHÂN BỘI

§1. KHỐI LƯỢNG CỦA MỘT VẬT THỂ

1.1. Khối lượng riêng

Giả sử V là một vật thể và M = (x, y, z) là một điểm của V. Lấy một tập hợp con đo được ΔV chứa điểm M. Giả sử ΔV có thể tích ΔV và khối lượng Δm. Nếu tỉ số $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ có giới hạn khi ΔV thu dần về điểm M thì giới hạn đó được gọi là khối lượng riêng của vật thể V tại điểm M, kí hiệu là $\rho(M)$.

$$\rho(M) = \lim_{\Delta V \to \{M\}} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

ρ là một hàm số xác định trên V. Nếu vật thể V là đồng chất thì ρ là một hàm hằng.

1.2. Tính khối lượng của một vật thể

a) Giả sử V là một vật thể đo được và $\rho(M)$ là khối lượng riêng của vật thể tại điểm M của V. Ta sẽ chỉ ra rằng có thể tính được khối lượng của vật thể V nếu biết hàm số $M \mapsto \rho(M)$, $M \in V$.

Lấy một hình hộp chữ nhật đóng P chứa V. Gọi $\{\pi_n\}$ là một dãy chuẩn tắc những phép phân hoạch hình hộp P,

$$\pi_n = \{\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_{p_n}\}.$$

Đặt $\Delta V_i = V \cap \Delta v_i$, $i = 1, \ldots, p_n$. Lấy một điểm bất kì $M_i \in \Delta V_i$, $i = 1, \ldots, p_n$ và lập tổng

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{p_n} \rho(M_i)\Delta V_i$$

Một số tập hợp ΔV_i có thể bằng ϕ. Khi đó ta gán cho số hạng tương ứng của tổng σ_n giá trị 0. Có thể xem $\rho(M_i)\Delta V_i$ là giá trị gần đúng của khối lượng của vật thể ΔV_i và σ_n là giá trị gần đúng của cái gọi là khối lượng của vật thể V mà ta sẽ định nghĩa. Một cách tự nhiên ta định nghĩa :

Nếu

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = m \in \mathbf{R}$$

và giới hạn m không phụ thuộc vào việc chọn dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ và việc chọn các điểm $M_i \in \Delta V_i$ thì m được gọi là khối lượng của vật thể V.

b) Nếu vật thể V là một tập hợp đo được và ρ là một hàm số liên tục và bị chặn trên V thì khối lượng của V là :

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

Chứng minh. Gọi $\rho_0 : P \to \mathbf{R}$ là thác triển của hàm số ρ từ V lên P :

$$\rho_0(M) = \begin{cases} \rho(M) & \text{với } m \in V, \\ , & \text{với } M \in P \setminus V. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng $s(\pi_n) \leqslant \sigma_n \leqslant S(\pi_n)$, trong đó $s(\pi_n)$ và $S(\pi_n)$ là các tổng Đácbu dưới và trên của hàm số ρ_0 ứng với phép phân hoạch π_n. Vì V là đo được, ρ liên tục và bị chặn trên V nên ρ khả tích trên V, tức là ρ_0 khả tích trên P. Do đó

$$\lim_{n \to \infty} s(\pi_n) = \lim_{n \to \infty} S(\pi_n) = \iiint_P \rho_0(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

Từ đó $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz$

Vậy khối lượng của vật thể V là :

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz$$

Ví dụ. Tính khối lượng của hình lập phương $V = [0, a] \times \times [0, a] \times [0, a]$ biết khối lượng riêng của hình lập phương tại điểm $M = (x, y, z)$ là $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Khối lượng của hình lập phương là :

$$m = \iiint_V (x + y + z)dxdydz$$

$$= \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z)dz$$

$$m = \frac{3}{2} a^4 .$$

1.3. Giả sử D là một bản phẳng đo được, $\rho(M)$ là khối lượng riêng của bản phẳng tại điểm $M = (x, y)$. Nếu ρ là một hàm số liên tục và bị chặn trên D thì khối lương của bản phẳng là :

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy.$$

§2. MÔMEN QUÁN TÍNH CỦA MỘT VẬT THỂ

2.1. Ta biết rằng mômen quán tính của một hệ n chất điểm

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$ với khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ đối với mặt phẳng Oxy, trục Ox và gốc tọa độ O, theo thứ tự, là : $I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 m_i$,

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i ,$$

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) m_i .$$

Tương tự như trong §1, ta có kết quả sau :

2.2. Nếu V là một vật thể đo được và hàm khối lượng riêng $M \mapsto \rho(M)$, $M \in V$ của vật thể liên tục và bị chặn trên V thì mômen quán tính của vật thể V đối với mặt phẳng Oxy, trục Ox và gốc O, theo thứ tự, là :

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x, y, z)dxdydz ,$$

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz ,$$

$$I_o = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dxdydz .$$

2.3. Nếu D là một bản phẳng đo được và hàm khối lượng riêng $M \mapsto \rho(M)$, $M \in D$ của bản phẳng liên tục và bị chặn trên D thì mômen quán tính của bản phẳng đối với trục Ox, trục Oy và gốc tọa độ O là :

$$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x, y)dxdy ,$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x, y)dxdy ,$$

$$I_o = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy.$$

Ví dụ. Tính mômen quán tính của đĩa elip

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

đối với trục Ox biết rằng $\rho(x, y) = 1$ với mọi $(x, y) \in D$.

Mômen quán tính của đĩa elip D đối với trục Ox là :

$$I_x = \iint\limits_D y^2dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực

$$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta,$$

ta được

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 b^2 r^2 \sin^2\theta \,.\, abrdr$$

$$= ab^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi ab^3}{4} .$$

§3. TRỌNG TÂM CỦA VẬT THỂ

3.1. Cho hệ n chất điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$ với khối lượng m_1, ..., m_n. Điểm $G(\xi, \eta, \zeta)$ với các tọa độ

$$\xi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} , \ \eta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} , \ \zeta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} ,$$

gọi là trọng tâm của hệ chất điểm đã cho.

Từ đó suy ra

3.2. Nếu V là một vật thể đo được và hàm khối lượng riêng $M \longmapsto \rho(M)$, $M \in V$ liên tục và bị chặn trên V thì trọng tâm của vật thể là điểm G với

$$x_G = \frac{1}{m} \iiint\limits_V x\rho(x, y, z)dxdydz ,$$

$$y_G = \frac{1}{m} \iiint\limits_V y\rho(x, y, z)dxdydz ,$$

$$z_G = \frac{1}{m} \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)dxdydz ,$$

trong đó $m = \iiint \rho(x, y, z)dxdydz$ là khối lượng của V.

Nếu vật thể V là đồng chất thì

$$x_G = \frac{1}{|V|} \iiint_V x\,dxdydz,$$

$$y_G = \frac{1}{|V|} \iiint_V y\,dxdydz,$$

$$z_G = \frac{1}{|V|} \iiint_V z\,dxdydz,$$

trong đó $|V|$ là thể tích của vật thể V.

3.3. Nếu D là một bản phẳng đo được và hàm khối lượng riêng $M \longmapsto \rho(M)$, $M \in D$ của nó liên tục và bị chặn trên D thì trọng tâm của bản phẳng là điểm $G(x_G, y_G, \varphi)$ với

$$x_G = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)dxdy\ ,\ y_G = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)dxdy,$$

trong đó $m = \iint_D \rho(x, y)dxdy$ là khối lượng của bản phẳng.

Nếu bản phẳng là đồng chất thì

$$x_G = \frac{1}{|D|} \iint_D x\,dxdy,\ y_G = \frac{1}{|D|} \iint_D y\,dxdy,$$

$|D|$ là diện tích của bản phẳng.

Ví dụ. Xác định trọng tâm của $\frac{1}{4}$ hình tròn đồng chất

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

Do D là đối xứng qua đường phân giác $y = x$ nên trọng tâm G của D có các tọa độ bằng nhau : $x_G = y_G$. Ta có

$$x_G = y_G = \frac{1}{|D|} \iint_D x\,dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$x_G = y_G = \frac{1}{|D|}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r\cos\theta r dr$$

$$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^a r^2 dr,$$

$$x_G = y_G = \frac{4a}{3\pi}.$$

D. TÍCH PHÂN BỘI SUY RỘNG VÀ TÍCH PHÂN BỘI PHỤ THUỘC THAM SỐ*

§1. TÍCH PHÂN BỘI SUY RỘNG*

Cho đến nay ta mới chỉ đề cập đến tích phân hai lớp và ba lớp của một hàm số bị chặn trên một tập hợp bị chặn. Cũng như đối với tích phân đơn, ta sẽ định nghĩa tích phân bội trong trường hợp tập hợp trên đó lấy tích phân không phải là một tập hợp bị chặn và trong trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn.

1.1. Dãy bao những tập hợp compắc

Định nghĩa. Giả sử A là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^p$ và $\{K_n\}$ là một dãy tăng những tập hợp con compắc của A (tức là $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \subset A$). Ta gọi $\{K_n\}$ là một dãy bao nếu với mỗi tập hợp con compắc của A, tồn tại một m nguyên dương sao cho $K \subset K_m \subset A$.

Ví dụ 1. Lấy $A = \mathbf{R}^p$ và $K_n = \{x \in \mathbf{R}^p : ||x|| \leqslant n\}$. Dễ dàng thấy rằng $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp compắc trong A.

Ví dụ 2. Giả sử A là một tập hợp con mở thực sự của $\mathbf{R}^p$ và

$$K_n = \{x \in \mathbf{R}^p : ||x|| \leqslant n \text{ và } d(x, \mathbf{R}^p \setminus A) \geqslant \frac{1}{n}\},$$

($d(x, \mathbf{R}^p \setminus A)$ là khoảng cách từ điểm x đến tập hợp $\mathbf{R}^p \setminus A$, $d(x, \mathbf{R}^p \setminus A) = \inf\limits_{y \in \mathbf{R}^p \setminus A} ||x - y||$). Dãy $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc của A.

Chú ý. Hiển nhiên nếu $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc của tập hợp A thì $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Tuy nhiên một dãy tăng $\{K_n\}$ những tập hợp con compắc của A sao cho $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ có thể không phải là một dãy bao của A. Đây là một phản ví dụ : Trong $\mathbf{R}$ lấy $A = (-1, 1)$ và

$$K_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \ n \geqslant 3.$$

Định nghĩa tích phân bội suy rộng.

Từ đây cho đến hết mục này, ta chỉ xét không gian $\mathbf{R}^p$ với $p = 2$ và $p = 3$.

1.2. *Bổ đề.* Giả sử A là một tập hợp trong không gian $\mathbf{R}^3$, $f : A \to \mathbf{R}$ là một hàm số không âm trên A, $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc của A sao cho f khả tích trên mỗi K_n và dãy $\{\iiint\limits_{K_n} fdxdydz\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n\to\infty} \iiint\limits_{K_n} fdxdydz = I \in \mathbf{R}$. Khi đó, nếu $\{H_n\}$ là một dãy bao gồm những tập hợp con compắc của A sao cho f khả tích trên mỗi H_n thì dãy $\{\iiint\limits_{H_n} fdxdydz\}$ hội tụ và

$$\lim \iiint fdxdydz = I.$$

Chứng minh. Vì $\{\iiint_{K_n} fdxdydz\}$ là một dãy tăng nên

$$\iiint_{K_m} fdxdydz \leq \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} fdxdydz = I \text{ với mọi } m$$

Với mỗi n, tồn tại m sao cho $H_n \subset K_m$. Do đó

$$\iiint_{H_n} fdxdydz \leq \iiint_{K_m} fdxdydz \leq I.$$

Dãy $\{\iiint_{H_n} fdxdydz\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{H_n} fdxdydz \leq I.$$

Thay đổi vai trò của H_n và K_n ta được

$$I \leq \lim \iiint_{H_n} fdxdydz$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh. □

1.3. *Bổ đề.* Giả sử $A \subset \mathbf{R}^3$, $f : A \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên A và tồn tại một dãy bao $\{K_n\}$ những tập hợp con compắc của A sao cho f khả tích trên mỗi tập hợp K_n và dãy số $\{\iiint_{K_n} |f| dxdydz\}$ hội tụ. Khi đó

a) Dãy số $\{\iiint_{K_n} fdxdydz\}$ hội tụ : $\lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} fdxdydz = I \in \mathbf{R}$.

b) Nếu $\{H_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc của A sao cho f khả tích trên mỗi H_n thì dãy số $\{\iiint_{H_n} fdxdydz\}$ hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_{H_n} fdxdydz = I.$$

Chứng minh. a) Với $n \leq m$, ta có $K_n \subset K_m$. Vì f khả tích trên K_n và K_m nên nó khả tích trên $K_m \setminus K_n$ và

$$\left|\iiint\limits_{K_m} f dxdydz - \iiint\limits_{K_n} f dxdydz\right| = \left|\iiint\limits_{K_m \setminus K_n} f dxdydz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \iiint\limits_{K_m \setminus K_n} |f| dxdydz = \iiint\limits_{K_m} |f| dxdydz - \iiint\limits_{K_n} |f| dxdydz$$

Dãy số $\{\iiint\limits_{K_n} |f| dxdydz\}$ hội tụ nên là một dãy Côsi. Từ bất đẳng thức trên suy ra $\{\iiint\limits_{K_n} f dxdydz\}$ là một dãy Côsi trong $\mathbf{R}$. Do đó nó là một dãy số hội tụ.

b) Với mỗi n, tồn tại p_n sao cho $H_n \subset K_{p_n}$. Có thể chọn sao cho $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$. Tương tự như trong a), ta có

$$\left|\iiint\limits_{K_{p_n}} f dxdydz - \iiint\limits_{H_n} f dxdydz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \iiint\limits_{K_{p_n}} |f| dxdydz - \iiint\limits_{H_n} |f| dxdydz \qquad (1).$$

Vì $\{\iiint\limits_{K_{p_n}} f dxdydz\}$ là một dãy con của dãy $\{\iiint\limits_{K_n} f dxdydz\}$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \iiint\limits_{K_{p_n}} f dxdydz = I$. Từ bổ đề 5.2 suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{K_{p_n}} |f| dxdydz = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{K_n} |f| dxdydz = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{H_n} |f| dxdydz$$

Do đó trong (1) cho $n\to\infty$, ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \iiint\limits_{H_n} f dxdydz = I$. □

1.4. *Định nghĩa.* Giả sử $A \subset \mathbf{R}^3$ và $f : A \to \mathbf{R}$ là một hàm số xác định trên A. Nếu tồn tại một dãy bao $\{K_n\}$ những tập hợp con compắc của A sao cho f khả tích trên mỗi tập hợp K_n và dãy số $\{\iiint\limits_{K_n} |f| dxdydz\}$ hội tụ thì dãy số $\{\iiint\limits_{K_n} f dxdydz\}$ hội tụ. Giới hạn $I = \lim\limits_{n\to\infty} \iiint\limits_{K_n} f dxdydz$ gọi là tích phân suy rộng của hàm số f trên tập hợp A, kí hiệu là $\iiint\limits_A f dxdydz$. Khi đó ta nói rằng tích phân $\iiint\limits_A f dxdydz$ hội tụ. Tích phân không hội tụ gọi là phân kì.

Trong trường hợp hàm số f khả tích trên tập hợp A, tích phân suy rộng và tích phân của f trên A là bằng nhau.

1.5. Định nghĩa tích phân hai lớp suy rộng hoàn toàn tương tự như định nghĩa tích phân ba lớp suy rộng. Các bổ đề 5.2, 5.3 và định nghĩa 5.4 được lắp lại từng chữ cho trường hợp tích phân hai lớp suy rộng.

1.6. *Chú ý.* a) Từ định nghĩa 5.4 suy ra rằng tích phân suy rộng $\iiint\limits_A f dxdydz$ tồn tại khi và chỉ khi tích phân suy rộng $\iiint\limits_A |f| dxdydz$ tồn tại. Như vậy chỉ có các tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối.

b) Ví dụ sau cho thấy, trong định nghĩa 5.4, sự hội tụ của dãy số $\{\iiint\limits_{K_n} |f| dxdydz\}$ là quan trọng, không thể bỏ qua.

Trong $\mathbf{R}^2$ lấy $A = \{(x, y) : 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}$ và $f : A \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Đặt

$$K_n = \left\{(x, y) : \frac{1}{n} \leq x \leq 1,\ \frac{1}{n} \leq y \leq 1\right\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Dễ dàng thấy rằng $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc của A. Vì f liên tục trên A và K_n là những tập hợp con compắc đo được (theo nghĩa Gioócđan) của A nên f khả tích trên mọi K_n. Hiển nhiên $\iint\limits_{K_n} f dxdy = 0$ với mọi n ; do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} f dxdy = 0.$

Đặt

$$H_n = \left\{(x, y) : \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1,\ \frac{1}{n^2} \leqslant y \leqslant 1\right\},\ n = 1, 2, \ldots$$

$\{H_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc của A. Ta có

$$\iint\limits_{H_n} f dxdy = -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2} + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}\frac{1}{n},$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{H_n} f dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 1. Cho $A = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Tính $I = \iint\limits_{A} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

Đặt

$K_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant n^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\},\ n = 1, 2, \ldots$

$\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc đo được của A. Vì $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ liên tục trên A nên f khả tích trên mọi K_n. Hơn nữa f là dương trên A. Chuyển sang tọa độ cực, ta tính được

$$\iint\limits_{K_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2}),$$

và

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{K_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $\iint\limits_{A} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}$.

Dễ dàng thấy rằng dãy $\{H_n\}$ với

$$H_n = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant n,\ 0 \leqslant y \leqslant n\}$$

cũng là một dãy bao những tập hợp con compắc đo được của A. Do đó f khả tích trên mọi H_n và

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{H_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Vì $\iint_{H_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2$, nên từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Vậy tích phân suy rộng (đơn) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ và

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$. Xét tính hội tụ của tích phân

$$\iiint_A \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Đặt

$K_n = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Dễ dàng thấy rằng $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc đo được của A. Vì $f(x, y, z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ liên tục trên A nên f khả tích trên mọi K_n. Ngoài ra f dương trên A. Chuyển sang tọa độ cầu, ta được

$$I_n = \iiint_{K_n} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_1^n r^{2-\alpha}dr =$$

$$= 4\pi \int_1^n r^{2-\alpha}dr.$$

• Với $\alpha = 3$, ta có $I_n = 4\pi \ln n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Tích phân đã cho phân kì.

- Với $\alpha \neq 3$, ta có $I_n = \dfrac{4\pi}{\alpha - 3}(1 - n^{3-\alpha})$, và

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \frac{4\pi}{\alpha - 3} \text{ với } \alpha > 3, \ \lim_{n \to \infty} I_n = +\infty \text{ với } \alpha < 3.$$

Vậy tích phân được xét hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > 3$. Khi đó

$$\iiint_A \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} = \frac{4\pi}{\alpha - 3}.$$

Ví dụ 3. Cho $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ và hàm số $f : A \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} & \text{với } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{với } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Xét tính hội tụ của tích phân

$$\iiint_A fdxdydz$$

Tương tự như trong ví dụ 2, dễ dàng chứng minh được rằng tích phân hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 3$.

Tính chất của tích phân suy rộng

1.7. *Định lí.* Giả sử $A \subset \mathbf{R}^3$, f và g là hai hàm số xác định trên A. Nếu các tích phân $\iiint_A fdxdydz$, $\iiint_A gdxdydz$ hội tụ và tồn tại một dãy bao $\{K_n\}$ những tập hợp con compắc của A sao cho f và g đều khả tích trên mọi K_n thì với mọi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, tích phân $\iiint_A (\alpha f + \beta g)dxdydz$ hội tụ và

$$\iiint_A (\alpha f + \beta g)dxdydz = \alpha \iiint_A fdxdydz + \beta \iiint_A gdxdydz$$

Định lí suy ra ngay từ định nghĩa của tích phân suy rộng.

1.8. *Hệ quả.* Giả sử $A \subset \mathbf{R}^3$ có một dãy bao những tập hợp con compắc đo được (theo nghĩa Giođcđan). Khi đó

a) Tập hợp các hàm số $f : A \to \mathbf{R}$ liên tục trên A có tích phân $\iiint\limits_A f dxdydz$ hội tụ là một không gian con tuyến tính của không gian $C(A)$ các hàm số liên tục trên A,

b) Hàm số $f \longmapsto \iiint\limits_A f dxdydz$ là một dạng tuyến tính trên $C(A)$.

1.9. Tiêu chuẩn hội tụ

Định lí. Giả sử $A \subset \mathbf{R}^3$ có một dãy bao $\{K_n\}$ những tập hợp con compắc sao cho hàm số $f : A \to \mathbf{R}$ khả tích trên mỗi K_n. Khi đó tích phân $\iiint\limits_A f dxdydz$ hội tụ nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm số không âm $F : A \to \mathbf{R}$ sao cho tích phân $\iiint\limits_A F dxdydz$ hội tụ và

$$|f(x, y, z)| \leq F(x, y, z) \text{ với mọi } (x, y, z) \in A.$$

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên. (Nếu $\iiint\limits_A f dxdydz$ hội tụ thì ta lấy $F = |f|$). Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử tồn tại hàm số không âm F thỏa mãn các điều kiện nêu trong định lí. Khi đó tồn tại một dãy bao $\{H_n\}$ những tập hợp con compắc của A sao cho F khả tích trên mỗi H_n và dãy số $\{\iiint\limits_{H_n} F dxdydz\}$ hội tụ. Với mỗi n, tồn tại m sao cho $K_n \subset H_m$. Gọi P là một hình hộp chữ nhật chứa H_m, $f_0 : P \to \mathbf{R}$ và $F_0 : P \to \mathbf{R}$ là hai hàm số xác định bởi

$$f_0(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{với } (x, y, z) \in K_n, \\ 0 & \text{với } (x, y, z) \in P \setminus K_n, \end{cases}$$

$$F_0(x, y, z) = \begin{cases} F(x, y, z) & \text{với } (x, y, z) \in H_m, \\ 0 & \text{với } (x, y, z) \in P \setminus H_m \end{cases}$$

Vì $|f| \leq F$ trên A và $K_n \subset H_m$ nên $|f_0(x, y, z)| \leq F_0(x, y, z)$ với mọi $(x, y, z) \in P$. Do đó

$$\iiint_P |f_0| dxdydz \leq \iiint_P F_0 dxdydz ,$$

tức là

$$\iiint_{K_n} |f| dxdydz \leq \iiint_{H_m} Fdxdydz \leq \lim_{m \to \infty} \iiint_{H_m} Fdxdydz$$

Dãy số $\{\iiint_{K_n} |f| dxdydz\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

Do đó $\iiint_A fdxdydz$ hội tụ.

Hiển nhiên ta có

$$\left| \iiint_A fdxdydz \right| \leq \iiint_A |f| dxdydz \leq \iiint_A Fdxdydz \; \square$$

Tiêu chuẩn hội tụ 5.9 là đơn giản nhưng được ứng dụng trong phần lớn các trường hợp.

Từ định lí 5.9 suy ra dấu hiệu so sánh sau :

1.10. Định lí. Giả sử $A \subset \mathbf{R}^3$ có các dãy bao $\{K_n\}$ và $\{H_n\}$ những tập hợp con compắc sao cho các hàm số $f, g : A \to \mathbf{R}$, theo thứ tự, khả tích trên mỗi K_n, H_n và

$$0 \leq f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \text{ với mọi } (x, y, z) \in A.$$

Khi đó

a) Nếu $\iiint_A gdxdydz$ hội tụ thì $\iiint_A fdxdydz$ hội tụ,

b) Nếu $\iiint_A fdxdydz$ phân kì thì $\iiint_A gdxdydz$ phân kì.

Hiển nhiên các định lí và hệ quả 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 đúng cho trường hợp tích phân suy rộng hai lớp.

1.11. Áp dụng. Giả sử A là một tập hợp đóng trong $\mathbf{R}^2$ sao cho $A_n = \{(x, y) \in A : x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$, $n = 1, 2, \ldots$ là những tập hợp compắc đo được và

$f : A \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên A. Khi đó

Nếu tồn tại một $\alpha > 2$ và một số $k > 0$ sao cho

$(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}|f(x, y)| \leqslant k$ với $x^2 + y^2$ đủ lớn thì $\iint\limits_A f dxdy$ hội tụ.

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại một số nguyên dương m sao cho

$$(\forall (x, y) \in A)\ x^2 + y^2 \geqslant m^2 \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant \frac{k}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Vì $\{A_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc đo được của A và f liên tục trên A nên f khả tích trên mọi A_n.

Vì $n \geqslant m$, ta có

$$\iint\limits_{A_n} |f| dxdy = \iint\limits_{A_m} |f| dxdy + \iint\limits_{A_n \setminus A_m} |f| dxdy \qquad (1)$$

Mặt khác vì $A_n \setminus A_m$ là đo được (theo nghĩa Gioócđan) và hàm số $g(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ liên tục và bị chặn trên $A_n \setminus A_m$ nên g khả tích trên $A_n \setminus A_m$. Đặt $D_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant n^2\}$, ta được $\displaystyle\iint\limits_{A_n \setminus A_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \iint\limits_{D_n \setminus D_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$.

Chuyển sang tọa độ cực, ta được (với $\alpha > 2$).

$$\iint\limits_{A_n \setminus A_m} |f| dxdy \leqslant k \iint\limits_{D_n \setminus D_m} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = \frac{2k\pi}{\alpha - 2}(m^{2-\alpha} - n^{2-\alpha})$$

$$\leq \frac{2k\pi}{\alpha - 2} m^{2-\alpha} \text{ với mọi } n.$$

Dãy số $\left\{ \iint\limits_{A_n} |f| dxdy \right\}$ tăng và bị chặn trên nên hội tụ. $\square$

§2. TÍCH PHÂN BỘI PHỤ THUỘC THAM SỐ*

Tích phân bội phụ thuộc tham số được định nghĩa tương tự như tích phân đơn phụ thuộc tham số.

2.1. *Định nghĩa.* Giả sử K là một tập hợp compắc đo được trong $\mathbf{R}^2$, $A \subset \mathbf{R}^3$ và $f : K \times A \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục.

$$(x, y, t, u, v) \mapsto (f, x, y, t, u, v)$$

Khi đó với mỗi $(t, u, v) \in A$, hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y, t, u, v)$ liên tục trên K, do đó khả tích trên K. Đặt

$$I(t, u, v) = \iint\limits_K f(x, y, t, u, v)dxdy$$

I là một hàm số xác định trên A.

Tích phân bội phụ thuộc tham số cũng có các tính chất tương tự như tích phân đơn phụ thuộc tham số. Hai định lí sau đây cũng được chứng minh tương tự như trong trường hợp tích phân đơn.

2.2. Định lí. Với các giả thiết trong 2.1, I là một hàm số liên tục trên tập hợp A.

2.3. Định lí. Giả sử K là một tập hợp compắc đo được trong $\mathbf{R}^2$, J là một khoảng của $\mathbf{R}$ và

$$f : K \times J \to \mathbf{R}$$

$$(x, y, t) \mapsto f(x, y, t)$$

là một hàm số liên tục và có đạo hàm riêng f_t' liên tục trên $K \times J$.

Khi đó hàm số

$$I(t) = \iint\limits_K f(x, y, t)dxdy$$

có đạo hàm liên tục trên J, và

$$I'(t) = \iint\limits_K f_t'(x, y, t)dxdy \text{ với mọi } t \in J.$$

Định nghĩa và các tính chất của tích phân đơn suy rộng phụ thuộc tham số và khái niệm hội tụ đều của tích phân đơn suy rộng phụ thuộc tham số được chuyển một cách tự nhiên sang trường hợp tích phân bội suy rộng phụ thuộc tham số. Ta xét một vài ví dụ.

Ví dụ 1. Giả sử A là một miền đóng đo được trong $\mathbf{R}^3$ và $\rho : A \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto \rho(x, y, z)$ là một hàm số liên tục trên A.

Xét tích phân

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iiint\limits_A \frac{\rho(x, y, z)}{r} dxdydz \qquad (1)$$

trong đó $\quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$

Với mỗi điểm $P(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{R}^3 \setminus A$, hàm số dưới dấu tích phân liên tục trên A nên khả tích trên A. Với mỗi $P \in A$, (1) là một tích phân suy rộng. Ta sẽ chứng minh rằng tích phân (1) là hội tụ với mọi $P \in A$.

Thật vậy, với mỗi n, gọi B_n là hình cầu mở tâm P bán kính $\frac{1}{n}$ và $K_n = A \setminus B_n$. Dễ dàng thấy rằng $\{K_n\}$ là một dãy bao những tập hợp con compắc đo được của tập hợp $A \setminus \{P\}$. Vì hàm số dưới dấu tích phân (1) liên tục trên A nên nó khả tích trên mọi K_n.

Đặt $I_n = \iiint\limits_{K_n} \frac{|\rho(x, y, z)|}{r} dxdydz$

Vì hàm số ρ liên tục trên tập hợp compắc A nên ρ bị chặn trên A: Tồn tại $M > 0$ sao cho $|\rho(x, y, z)| \leq M$ với mọi $(x, y, z) \in A$. Với $n \leq m$, ta có $K_n \subset K_m$ và

$$0 \leq I_m - I_n = \iiint\limits_{K_m \setminus K_n} \frac{|\rho(x, y, z)|}{r} dxdydz \leq M \iiint\limits_{K_m \setminus K_n} \frac{1}{r} dxdydz$$

Vì $K_m \setminus K_n \subset B_n \setminus B_m$ nên từ đó suy ra

$$I_m - I_n \leq M \iiint\limits_{B_n \setminus B_m} \frac{1}{r} dxdydz.$$

Chuyển sang tọa độ cầu.

$$x - \xi = r\cos\varphi\sin\theta, \ y - \eta = r\sin\varphi\sin\theta, \ z - \zeta = r\cos\theta,$$

ta được

$$0 \leq I_m - I_n \leq M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} r dr = 2\pi M \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Dãy số $\{I_n\}$ là một dãy Côsi nên hội tụ. Vậy tích phân (1) hội tụ. Như vậy hàm số I trong (1) xác định trên $\mathbf{R}^3$. Có thể chứng minh được rằng hàm số I liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên $\mathbf{R}^3$.

Trong ví dụ sau, ta sẽ xét tích phân đơn suy rộng phụ thuộc hai tham số.

Ví dụ 2. Với mỗi điểm $(\xi, \eta) \in \mathbf{R} \times (0, +\infty)$, đặt

$$v(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - \xi)^2 + \eta^2}.$$

Thực hiện phép đổi biến số $x = \xi + \eta t$, ta được

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Nếu $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên $\mathbf{R}$ thì tích phân

$$u(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-\xi)^2 + \eta^2}\, dx$$

hội tụ tại mọi điểm (ξ, η) của nửa mặt phẳng $\eta > 0$. Có thể chứng minh được rằng hàm số u liên tục trên nửa mặt phẳng $\eta > 0$, có giới hạn tại mỗi điểm biên $(\xi, 0)$ của nửa mặt phẳng $\eta > 0$ bằng $f(\xi)$ và có các đạo hàm riêng cấp hai thỏa mãn phương trình $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$ trên nửa mặt phẳng đó.

BÀI TẬP CHƯƠNG VII

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Để cho gọn, ta giả thiết các mặt phẳng tọa độ và không gian tọa độ trong các bài tập của chương này đều là những mặt phẳng và không gian với hệ trục tọa độ Đêcác trực chuẩn.

1. Cho đường cong phẳng Γ với biểu diễn tham số

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in \mathbf{R}.$$

a) Xác định tiếp tuyến của Γ tại điểm $M(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ với $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) Xác định các điểm dừng $M(t) \in \Gamma$ và tiếp tuyến của Γ tại các điểm dừng đó.

($M(t)$ gọi là một điểm dừng của Γ nếu $\overrightarrow{M'}(t) = 0$).

2. Xét các nhánh vô tận của đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = t^2 + \frac{1}{t+1},\ y = t + \frac{1}{t^2 - 1}.$$

3. Chứng minh rằng hai đường thẳng $x = 2 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 2 - 4t$ và $x = 4 + t$, $y = 6 + 2t$, $z = -2 - 2t$ trùng nhau.

4. Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\ t \in (0, +\infty).$$

Viết phương trình tiếp tuyến của Γ tại điểm $M(t)$ và xác định giao điểm của tiếp tuyến đó với mặt phẳng Oxy.

5. Chứng minh rằng đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = \frac{3}{2}t^2 - 2t + 5,\ y = 7t - 2,\ z = \frac{3}{2}t^2 - 4t + 1$$

là một đường cong phẳng.

6.* Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$x = \cos t$, $y = \sin\theta \sin t$, $z = \cos\theta \sin t$, với $\theta \in \mathbf{R}$ cho trước. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng mật tiếp của Γ tại điểm $M(t) = \Gamma$.

7.* Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3.$$

Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M(t_1)$, $M(t_2)$, $M(t_3)$. Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng mật tiếp của Γ tại điểm $M(t)$.

8.* Cho cung $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a, b].$$

$A = M(a)$, $B = M(b)$. Gọi $C = M(c)$ là một điểm của cung Γ với $c \in (a, b)$.

Chứng minh rằng nếu hai cung $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ khả trường thì cung $\overset{\frown}{AB}$ khả trường và $l(\overset{\frown}{AB}) = l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB})$.

9. Tính độ dài các cung sau :

a) $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

b) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [0, \ln\pi]$,

c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (cung của đường axtrôit),

d) $y^2 = 2px$, $x \in [0, a]$, $p > 0$, $a > 0$,

e) $y = \mathrm{ch}x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

f) $x = e^{2t}\cos t$, $y = e^{2t}\sin t$, $z = -e^{2t} + 1$, $0 \leqslant t \leqslant a$.

10. Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in X \subset \mathbf{R},$$

và vectơ $\vec{V} = (a, b, c) \neq 0$. Viết biểu diễn tham số của mặt trụ có đường chuẩn là Γ và đường sinh song song với $\vec{V}$.

11. Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in X \subset \mathbf{R}$$

và một điểm $S(x_0, y_0, z_0) \notin \Gamma$. Viết biểu diễn tham số của mặt nón có đỉnh là điểm S và đường chuẩn là Γ.

12. Chứng minh rằng hai mặt phẳng P và Q với các biểu diễn tham số

$$x = 2 + u + 2v,\ y = 2 + 2u + v,\ z = 1 - u - v.$$

và $\quad x = 1 + 3u - v,\ y = 3 + 3u + v,\ z = 1 - 2u$

là trùng nhau.

13. Cho đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = \cos u,\ y = \sin u,\ z = u$$

và điểm P nằm trên tiếp tuyến của Γ tại điểm M(u) xác định bởi $\overrightarrow{MP} = v\overrightarrow{M}'(u)$, $v \in \mathbf{R}$. Tìm biểu diễn tham số của mặt $\sum$, tập hợp các điểm P.

14. Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt S với biểu diễn tham số

$$x = R\cos\varphi\cos\theta,\ y = R\cos\varphi\sin\theta,\ z = R\sin\varphi$$

tại điểm $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

15. Viết phương trình tiếp diện của mặt S với biểu diễn tham số

$$x = R\cos\varphi\cos\theta,\ y = R\cos\varphi\sin\theta,\ z = R\sin\varphi$$

tại điểm $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

16. Cho mặt $\sum$ với biểu diễn tham số

$$x = 1 - \cos u,\ y = \sin u\,\mathrm{ch}v,\ z = (1 - \cos u)\mathrm{sh}v.$$

Chứng minh rằng pháp tuyến của mặt $\sum$ luôn tựa trên một đường cong cố định của mặt phẳng Oxy.

17. Cho mặt S với biểu diễn tham số

$$x = (1 + u)\cos v,\ y = (1 - u)\sin v,\ z = u.$$

Viết biểu diễn tham số của đường cong Γ, tập hợp các điểm của mặt S, tại đó tiếp diện của S song song với trục Oz.

18. Cho mặt S với biểu diễn tham số

$$x = v\cos u,\ y = v\sin u,\ z = v + g(u),$$

trong đó g là một hàm số khả vi.

a) Viết phương trình tiếp diện π của mặt S tại điểm $M(u_0, v_0)$ sao cho $g'(u_0) \neq 0$.

b) Chứng minh rằng khi v_0 biến thiên, tiếp diện π luôn đi qua một đường thẳng cố định.

19*. a) Chứng minh rằng đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = 2t$$

nằm trên mặt S với phương trình $e^z = x^2 + y^2$.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng mật tiếp của Γ tại điểm M(t) trùng với tiếp diện của S tại điểm này.

20. Chứng minh rằng đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = \sin 2t,\ y = 1 - \cos 2t,\ z = 2\cos t$$

nằm trên một mặt cầu cố định và Γ là giao tuyến của một mặt trụ tròn xoay và một mặt trụ parabol.

21. Chứng minh rằng các tiếp diện $ax + by + cz + d = 0$ của mặt $27xyz + 1 = 0$ thỏa mãn hệ thức $abc - d^3 = 0$.

22. Chứng minh rằng đường cong Γ với biểu diễn tham số

$$x = e^{t/\sqrt{2}}\cos t\ ,\ y = e^{t/\sqrt{2}}\sin t\ ,\ z = e^{t/\sqrt{2}}$$

nằm trên mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ và Γ tạo với đường sinh của mặt nón góc $\dfrac{\pi}{4}$.

23. Cho mặt S với phương trình $xyz = a^3$, $a > 0$.

a) Viết phương trình tiếp diện π của mặt S tại điểm (x, y, z).

b) Viết phương trình của mặt $\sum$, tập hợp các hình chiếu của điểm gốc trên các tiếp diện π của S.

24. Xác định một tiếp diện của mặt $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ vuông góc với đường thẳng $x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$ (D).

25. Tính độ dài các cung với phương trình cực sau :

a) $r = \frac{6}{\cos\theta}$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

b) $r = e^{\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

c) $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$, $\theta \in [0, 3\pi]$.

26. Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi các đường với các phương trình cực sau :

a) $r = \sin 2\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$,

b) $r = 1 - \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$,

c) $r = 2\sin 3\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$,

d) $r = \frac{p}{1 - \cos\theta}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (parabol).

BÀI GIẢI, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ CHƯƠNG VII

1. a) $\overrightarrow{M}'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \neq 0$ với $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) M(t) là một điểm dừng của Γ nếu $t = 2k\pi$ với một số nguyên k nào đó ; $\overrightarrow{M}''(t) = (\sin t, \cos t)$, $\overrightarrow{M}''(2k\pi) = (0, 1) \neq 0$.

Tiếp tuyến của Γ tại điểm dừng có vectơ chỉ phương là : (0, 1).

2. Khi $t \to -1$, Γ có tiệm cận là đường thẳng $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

Khi $t \to 1$, Γ có tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$. Khi $t \to \pm\infty$, Γ có nhánh parabol theo phương của Ox.

3. Hai đường thẳng có điểm chung (2, 2, 2) và có cùng phương.

4. $\overrightarrow{M}'(t) = (3, 6t, 6t^2)$. Phương trình tiếp tuyến của Γ tại điểm M(t) là :

$$x - 3t = \frac{y - 3t^2}{2t} = \frac{z - 2t^3}{2t^2}.$$

$A(2t, t^2, 0)$.

5. Đường cong Γ nằm trong mặt phẳng đi qua điểm (5, −2, 1) và song song với hai vectơ độc lập tuyến tính $\overrightarrow{V}_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$ và $\overrightarrow{V}_2 = (-2, 7, -4)$.

6. $\overrightarrow{M}'(t) \wedge \overrightarrow{M}''(t) = (0, -\cos\theta, \sin\theta)$.

7. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M(t_1)$, $M(t_2)$, $M(t_3)$ là

$$\begin{vmatrix} x - t_1 & y - t_1^2 & z - t_1^3 \\ t_2 - t_1 & t_2^2 - t_1^2 & t_2^3 - t_1^3 \\ t_3 - t_1 & t_3^2 - t_1^2 & t_3^3 - t_1^3 \end{vmatrix} = 0,$$

tức là

$$(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)x - (t_1 + t_2 + t_3)y + z - t_1t_2t_3 = 0.$$

Từ đó suy ra rằng phương trình mặt phẳng mật tiếp của Γ tại điểm M(t) là

$$3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0.$$

8. Giả sử π là một phép phân hoạch đoạn [a, b].

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Tồn tại i sao cho $t_{i-1} \leqslant c \leqslant t_i$; $\pi_1 = \pi \cup \{c\}$ là một phép phân hoạch đoạn [a, b] mịn hơn π. Đặt

$$\pi' = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, c\} \text{ và } \pi'' = \{c, t_i, \dots, t_n\}.$$

Ta có

$$l_\pi \leqslant l_{\pi_1} = l_{\pi'} + l_{\pi''} \leqslant l(\widehat{AC}) + l(\widehat{CB}).$$

Gọi $\mathcal{P}$ là tập hợp các phép phân hoạch đoạn [a, b]. Tập hợp số thực $\{l_\pi : \pi \in \mathcal{P}\}$ bị chặn nên cung $\overset{\frown}{AB}$ khả trường và

$l(\overset{\frown}{AB}) \leqslant l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB})$ (1)

Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Tồn tại phép phân hoạch π' đoạn [a, c] và phép phân hoạch π'' đoạn [c, b] sao cho

$$l_{\pi'} > l(\overset{\frown}{AC}) - \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } l_{\pi''} > l(\overset{\frown}{CB}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\pi = \pi' \cup \pi''$ là một phép phân hoạch đoạn [a, b] và

$$l_\pi = l_{\pi'} + l_{\pi''} > l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB}) - \varepsilon.$$

Do đó

$$l(\overset{\frown}{AB}) > l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB}) - \varepsilon$$

Từ đó suy ra

$$l(\overset{\frown}{AB}) \geqslant l(\overset{\frown}{AC}) + l(\overset{\frown}{CB}) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức cần chứng minh.

9. a) Độ dài của cung đã cho là

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}\, dt$$

$$= \frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\, dt = -\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\, d(\cos 2t)$$

$$l = -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}\cos 2t + \sqrt{1+3\cos^2 2t})\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$l = \frac{5}{8}\left(2 + \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right).$$

b) $l = \sqrt{2}(\pi - 1)$.

c) Biểu diễn tham số của đường axtrôit là

$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$,

$l = 6a$.

d) Phương trình của parabol là $x = \frac{y^2}{2p}$, $-\sqrt{2pa} \leqslant y \leqslant \sqrt{2pa}$.

$$l = 2\int_0^{\sqrt{2pa}} \sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy = 2\int_0^{\sqrt{2pa}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\,dy = \frac{2}{p}\int_0^{\sqrt{2pa}} \sqrt{y^2 + p^2}\,dy$$

$$= \frac{2}{p}\left(\frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{1}{2}p^2\ln\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right)\right)\Big|_0^{\sqrt{2pa}}$$

$$l = \sqrt{2a(2a + p)} + p\ln\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2a + p}}{\sqrt{p}}$$

e) $l = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

f) $l = \frac{3}{2}(e^{2a} - 1)$.

10. Gọi $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ là một điểm bất kì của Γ. Các điểm của mặt trụ là các điểm có dạng $M(t) + \lambda\vec{V}$, $t \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Tọa độ của các điểm này là :

$$x = x(t) + a\lambda,\ y = y(t) + b\lambda,\ z = z(t) + c\lambda,\ t \in X,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Đó là biểu diễn tham số của mặt trụ.

11. Gọi $M(t)$ là một điểm bất kì của Γ. Các điểm của đường thẳng $SM(t)$ có các tọa độ là :

$$x = x_0 + \lambda(x(t) - x_0),\ y = y_0 + \lambda(y(t) - y_0),\ z = z_0 + \lambda(z(t) - z_0).$$

Các phương trình trên với $t \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ là biểu diễn tham số của mặt nón.

12. Hai mặt phẳng P và Q đều đi qua điểm A(2, 2, 1) và song song với hai vectơ độc lập tuyến tính $\vec{V_1} = (1, 2, -1)$ và $\vec{V_2} = (2, 1, -1)$.

13. Vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại điểm $M(u) \in \Gamma$ là

$$\vec{M}'(u) = (-\sin u, \cos u, 1).$$

$$\overrightarrow{M(u)P} = (-v\sin u,\ v\cos u, v).$$

Tọa độ của điểm P là :

$$x = \cos u - v\sin u,\ y = \sin u + v\cos u,\ z = u + v. \quad (1)$$

Các phương trình (1) với $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$ là biểu diễn tham số của mặt $\sum$.

14. $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi} = (-R\sin\varphi\cos\theta,\ -R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi)$,

$\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial\theta} = (-R\cos\varphi\sin\theta,\ R\cos\varphi\cos\theta,\ 0)$,

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = \frac{\partial\vec{M}}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\vec{M}}{\partial\theta} = R^2 \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -R^2\cos\varphi(\cos\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi).$$

Thay $\varphi = \theta = \dfrac{\pi}{4}$ vào vectơ $(\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$, ta được một vectơ pháp tuyến của mặt S tại điểm $M\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$:

$$\vec{N} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

15. Ta sử dụng bài tập 14.

$$M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right).$$

Phương trình tiếp diện của mặt S tại điểm $M\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ là :

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{R}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{R}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = 0,$$

hay

$$x + y + \sqrt{2}z - 2R = 0.$$

16. $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial u} = (\sin u,\ \cos u\,\mathrm{ch}v,\ \sin u\,\mathrm{sh}v)$,

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} = (0,\ \sin u \operatorname{sh} v,\ (1 - \cos u)\operatorname{ch} v).$$

Pháp tuyến của mặt $\sum$ tại điểm M(u, v) có vectơ chỉ phương là :

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \overrightarrow{v}} = ((\cos u - 1)\operatorname{ch}^2 v + \sin^2 u,\ \sin u(\cos u - 1)\operatorname{ch} v,\ \sin^2 u \operatorname{sh} v).$$

Phương trình pháp tuyến của $\sum$ tại điểm M(u, v) là :

$$\frac{x + \cos u - 1}{(\cos u - 1)\operatorname{ch}^2 v + \sin^2 u} = \frac{y - \sin u \operatorname{ch} v}{\sin u(\cos u - 1)\operatorname{ch} v} =$$

$$= \frac{z + (\cos u - 1)\operatorname{sh} v}{\sin^2 u \operatorname{sh} v}.$$

Pháp tuyến cắt mặt Oxy tại điểm

$$x = \frac{(1 - \cos u)\operatorname{ch}^2 v}{1 + \cos u},\ y = \frac{2\sin u \operatorname{ch} v}{1 + \cos u},\ z = 0.$$

Dễ dàng thấy rằng $y^2 = 4x$. Vậy pháp tuyến của mặt $\sum$ luôn tựa trên parabol $y^2 = 4x$ trong mặt phẳng Oxy.

17. $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} = (\cos v,\ -\sin v,\ 1),$

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} = (-(1 + u)\sin v,\ (1 - u)\cos v,\ 0).$$

$$\overrightarrow{N}(u, v) = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} = ((u - 1)\cos v,\ -(1 + u)\sin v,\ \cos 2v - u)$$

là vectơ chỉ phương của pháp tuyến của mặt S tại điểm M(u, v). Tiếp diện π của mặt S tại điểm M(u, v) song song với trục Oz khi và chỉ khi

$\overrightarrow{N}(u, v) \perp Oz \Leftrightarrow \overrightarrow{N}(u, v) . \overrightarrow{k} = 0 \Leftrightarrow \cos 2v - u = 0$. Biểu diễn tham số của Γ là :

$$x = 2\cos^3 v,\ y = 2\sin^3 v,\ z = \cos 2v.$$

18. a) Phương trình tiếp diện π của mặt S tại điểm $M(u_0, v_0)$ sao cho $g'(u_0) \neq 0$ là :

$$x(v_0\cos u - g'(u_0)\sin u_0) + y(v_0\sin u_0 + g'(u_0)\cos u_0) - v_0 z + v_0 g(u_0) = 0$$

hay

$$v_0(x\cos u_0 + y\sin u_0 - z + g(u_0)) + g'(u_0)(-x\sin u_0 + y\cos u_0) = 0$$

Khi v_0 biến thiên tiếp diện π luôn đi qua đường thẳng

$$x\cos u_0 + y\sin u_0 - z + g(u_0) = 0,\ x\sin u_0 - y\cos u_0 = 0.$$

19. b) $\overrightarrow{M}'(t) = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ 2)$,

$\overrightarrow{M}''(t) = e^t\ (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$.

Phương trình của mặt phẳng mặt tiếp của Γ tại điểm M(t) là :

$$\begin{vmatrix} X - e^t\cos t & Y - e^t\sin t & Z - 2t \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & 2 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pháp tuyến của mặt phẳng mặt tiếp của Γ tại điểm M(t) có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{N}_1 = (-2\cos t,\ -2\sin t,\ e^t).$$

Phương trình tiếp diện π của mặt S tại điểm M(t) là

$$(X - x)2x + (Y - y)2y - (Z - z)e^z = 0.$$

Pháp tuyến của π tại điểm M(t) có vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{N}_2 = (2x,\ 2y,\ -e^z) = (2e^t\cos t,\ 2e^t\sin t,\ -e^{2t}) =$$

$$= -e^t(-2\cos t,\ -2\sin t,\ e^t).$$

Ta có $\overrightarrow{N}_2 = -e^t\overrightarrow{N}_1$.

20. Γ nằm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Hình chiếu của Γ trên mặt phẳng Oxy là đường cong có biểu diễn tham số $x = \sin 2t$, $y - 1 = -\cos 2t$ $(z = 0)$. Đó là đường tròn $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ trong mặt phẳng Oxy.

Hình chiếu của Γ trên mặt phẳng Oyz có biểu diễn tham số là

$y = 2\sin^2 t$, $z = 2\cos t$. Đó là parabol $\dfrac{y}{2} + \left(\dfrac{z}{2}\right)^2 = 1$ trong mặt phẳng Oyz.

21. Đặt $f(x, y, z) = 27xyz + 1$. Ta có

$\frac{\partial f}{\partial x} = 27yz$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 27zx$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 27xy$. Phương trình tiếp diện của mặt đã cho tại điểm $M(x, y, z)$ là :

$$27yz(X - x) + 27zx(Y - y) + 27xy(Z - z) = 0,$$

hay

$$yzX + zxY + xyZ - 3xyz = 0,$$

hay

$$yzX + zxY + xyZ + \frac{1}{9} = 0.$$

vì $xyz = -\frac{1}{27}$. Từ đó dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

22. $\overrightarrow{M}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{t/\sqrt{2}} (\cos t - \sqrt{2}\sin t, \sin t + \sqrt{2}\cos t, 1)$.

Vectơ chỉ phương của đường sinh OM(t) của mặt nón là :

$$\overrightarrow{V} = (\cos t, \sin t, 1).$$

Gọi α là góc tạo bởi tiếp tuyến của Γ tại điểm M(t) và đường sinh của mặt nón đi qua điểm này. Ta có

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{M}'(t) . \overrightarrow{V}|}{||\overrightarrow{M'(t)}|| \, ||\overrightarrow{V}||} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

23. a) Phương trình tiếp diện π của mặt S là :

$$yzX + zxY + xyZ = 3a^3 \qquad (1)$$

b) Phương trình đường thẳng đi qua gốc O và vuông góc với mặt phẳng π là : $\frac{X}{yz} = \frac{Y}{zx} = \frac{Z}{xy} \Leftrightarrow xX = yY = zZ \qquad (2)$

Hình chiếu $H = (X, Y, Z)$ có các tọa độ thỏa mãn đồng thời (1) và (2). Vì $xyz = a^3$, từ đó suy ra

$$xyzX^2 + xyzY^2 + xyzZ^2 = 3a^3 . \sqrt[3]{(xX)(yY)(zZ)}.$$

hay

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^3 = 27a^3XYZ.$$

Đó là phương trình của mặt $\sum$, tập hợp các hình chiếu của O trên π.

24. Phương trình tiếp diện π của mặt elipxôit tại điểm M(x, y, z) là :

$$x(X - x) + y(Y - y) + 2z(Z - z) = 0 \qquad (1)$$

Tiếp diện Π vuông góc với đường thẳng D khi và chỉ khi pháp tuyến n của mặt phẳng π song song với D. Vectơ $\overrightarrow{N} = (x, y, 2z)$ là một vectơ chỉ phương của pháp tuyến n của π. Đường thẳng D có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{V} = (1, 3, -2)$.

$$n \,//\, D \Leftrightarrow x = \frac{y}{3} = -z. \qquad (2)$$

Vì M(x, y, z) là một điểm của mặt elipxôit nên $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$. (3)

Từ (2), (3) ta tính được $x = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Thay vào (1), ta được

$$x(X - x) + 3x(Y - 3x) - 2x(Z + x) = 0.$$

Từ đó ta tìm được phương trình của tiếp diện π vuông góc với đường thẳng D :

$$X + 3Y - 2Z \pm 2\sqrt{3} = 0.$$

25. a) Độ dài của cung đã cho là

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}}\, d\theta$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 6\operatorname{tg}\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 6$$

b) $l = \sqrt{2}\,(2^{2\pi} - 1)$.

c) $l = \frac{3\pi a}{2}$.

26. a) Diện tích hình quạt đã cho là

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

b) $S = \frac{3\pi}{2}$.

c) $S = \frac{\pi}{3}$.

d) $$S = \frac{p^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{p^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\mathrm{cotg}\frac{\theta}{2})}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \mathrm{cotg}^2\frac{\theta}{2}\right) d\left(\mathrm{cotg}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{p^2}{4}\left(\mathrm{cotg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{cotg}^3\frac{\theta}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi/4}$$

$$= \frac{p^2}{4}\left(\mathrm{cotg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}\mathrm{cotg}^3\frac{\pi}{8} - \frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{p^2}{4}\left(\sqrt{2} + 1 + \frac{1}{3}(\sqrt{2} + 1)^3 - \frac{4}{3}\right)$$

$$S = \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2} + 3).$$

BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

CHUỖI SỐ

1. Tính tổng của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$; d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$; f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$.

2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+1}{4n^2-2\sin n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$; f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{sh} n$.

3. Chứng minh rằng nếu các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ với mọi n thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ hội tụ.

Nếu cả hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ đều phân kì thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ có phân kì không ?

4. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-3n}{n^3+3n^2-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+3n-4}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3e^{-n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{(\ln n)^3}$.

5. Chứng minh rằng nếu $\lim_{n\to\infty} nu_n = a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

6. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

7. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là hai chuỗi số dương hội tụ. Chứng minh rằng các chuỗi số sau hội tụ :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

8. Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n^2u_n^2$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối.

9. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \ldots,$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$, p là một số dương cho trước,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}\right)$, a là một số dương cho trước,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{argch}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{\alpha}$.

10. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$ $(a > 0)$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+2^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$;

(a, b là những số thực dương).

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$; h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

11. Tùy theo các giá trị của $a > 0$ và $\alpha \neq 0$ hãy xét sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, với

$$u_n = \frac{a^n}{n^{\alpha}}.$$

12. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

13. Cho

$$a_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

14. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ với

$$u_n=\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n!}.$$

15. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$ và có tổng là $f(x)$. Đặt $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ hội tụ và có tổng là $\frac{f(x)}{1-x}$ với $|x| < 1$.

16. Cho hai chuỗi số với số hạng tổng quát

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},\ n \geq 1.$$

Chứng minh rằng chúng hội tụ nhưng chuỗi số tích của chúng $\sum\limits_{n=2}^{\infty} w_n$ với

$$w_{n+1}=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_2+u_nv_1$$

phân kì.

17. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số dương hội tụ và $\{u_n\}$ là một dãy giảm. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$.

18. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ $(n \neq -x)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3n+1}{n(n+1)}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

19. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)\sqrt[n]{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin\dfrac{1}{n}$.

20. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln n \,.\, \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin\dfrac{1}{n}$.

21. Xét tính hội tụ của các chuỗi số sau :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{n^2+1}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \pi \left(\dfrac{2n^3+n^2+an+b}{2n^2}\right)$, $(a > 0,\ b > 0)$.

22. Xét sự hội tụ của các chuỗi số với số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ $(\alpha > 0)$; b) $u_n = \dfrac{n+1}{(-1)^n\sqrt{n} - n}$;

c) $u_n = \dfrac{a - (-1)^n\sqrt{n}}{n - (-1)^n\sqrt{n}}$ $(a \in \mathbf{R})$;

d) $u_n = \left[1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^{\frac{1}{2}} - 1$.

23. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos na\ln n}{\sqrt{n}}$ (a là một số thực cho trước) ;

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{n\ln n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n}$.

24. Xét sự hội tụ của các chuỗi số với số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$; b) $u_n = \dfrac{\sin^3 n(\ln n)^3}{n^{1/3}}$;

c) $u_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$; d) $u_n = \dfrac{\sin n \sin n^2}{n}$

25. Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{\pi n^2}{n+1}}{(\ln n)^2} .$$

26. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1 + n^q}, \ q > 0,\ 0 < x < \pi.$$

27. Xét tính hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, \ \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

trong các trường hợp sau :

a) $\alpha > 1$; b) $\alpha < 1$; c) $\alpha = 1$.

28. Xét sự hội tụ của các chuỗi số với các số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}}$; b) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$;

c) $u_n = \dfrac{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \dots + \ln^2 n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

d) $u_n = \left(\ln \dfrac{1}{\cos \frac{1}{n}}\right)^\alpha$; e) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n n}}$.

29. Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy số thực và $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ thì

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

30. Cho một chuỗi số dương hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

a) Chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ hội tụ với $\alpha > 1$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một hằng số K sao cho

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{u_k} \leqslant K\sqrt{n} \text{ với mọi } n \geqslant 1.$$

Từ đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{u_k}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)S_1 + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right]S_{n-1} + \frac{S_n}{n^\alpha} \quad (1)$$

chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n^{\alpha}}$ hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Với $\alpha = \frac{1}{2}$, hãy cho một ví dụ về một chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n^{1/2}}$ phân kì.

31. Cho một dãy số thực $\{a_n\}$. Chứng minh rằng nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ hội tụ với $x = x_0$ thì nó cũng hội tụ với mọi $x > x_0$.

BÀI GIẢI, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ CHƯƠNG VIII

1. a) $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \to \frac{1}{3}$$

khi $n \to \infty$. Chuỗi số hội tụ và có tổng $S = \frac{1}{3}$.

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+2} - 2\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} =$

$$= 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$.

Chuỗi số hội tụ và có tổng là $S = 1 - \sqrt{2}$.

c) $\dfrac{2k-1}{k(k^2-4)} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{k} - \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{1}{k+2} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{k-2}$, $k \geq 3$.

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}$$

$$= \frac{7}{48} + \frac{75}{96} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{89}{96}$. Chuỗi số hội tụ và có tổng là $S = \dfrac{89}{96}$.

d) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{(n+1)-n}{1+n(n+1)} = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}n.$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}[\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg}k] = \operatorname{arctg}(n+1) \to \dfrac{\pi}{2}$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi số hội tụ và có tổng là $S = \dfrac{\pi}{2}$.

e) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{4n^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$

$$= \operatorname{arctg}(2n+1) - \operatorname{arctg}(2n-1),$$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}[\operatorname{arctg}(2n+1) - \operatorname{arctg}(2k-1)] = \operatorname{arctg}(2n+1) -$

$- \operatorname{arctg}1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

Chuỗi số hội tụ và có tổng là $S = \dfrac{\pi}{4}$.

f) $\dfrac{7}{2}$.

g) $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n}{(n-1)!} = \dfrac{n-1+1}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!} + \dfrac{1}{(n-1)!}$ với $n \geq 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 1 + e + e - 1 = 2e.$$

h) $\dfrac{n^3}{n!} = \dfrac{n^2}{(n-1)!} = \dfrac{n^2 - 1 + 1}{(n-1)!} = \dfrac{n+1}{(n-2)!} + \dfrac{1}{(n-1)!}$

$$= \frac{n-2+3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \text{ với } n \geq 3.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!} = 1 + 4 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= 5 + e + 3(e-1) + (e-1-1) = 5e.$$

2. Các chuỗi số đã cho đều phân kì vì số hạng tổng quát $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$.

e) Ta chứng minh $\sin n \not\to 0$ bằng phản chứng. Nếu $\sin n \to 0$ khi $n \to \infty$ thì

$$\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1\cos(n+1) \to 0,$$

do đó $\cos n \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ đó suy ra $\sin^2 n + \cos^2 n \to 0$ khi $n \to \infty$; điều này là vô lí vì $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.

f) $\operatorname{sh} n = \dfrac{e^n - e^{(-n)}}{2} \to +\infty$ khi $n \to \infty$.

3. Từ giả thiết suy ra chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n - u_n)$ hội tụ. Từ bất đẳng thức

$$0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n \text{ với mọi } n$$

suy ra chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(w_n - u_n)$ hội tụ. Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ hội tụ.

Từ bất đẳng thức $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ với mọi n và tính phân kì của hai chuỗi số $\sum u_n$ và $\sum v_n$ không suy ra chuỗi $\sum w_n$ phân kì. Ví dụ : lấy $u_n = -\frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n}$, $w_n = 0$ với mọi n.

4. a) Đặt $u_n = \frac{1 - 3n}{n^3 + 3n^2 - 1}$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi số âm. Ta có $-u_n \sim \frac{3}{n^2}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số $\sum(-u_n)$ hội tụ. Do đó $\sum u_n$ hội tụ.

b) Đây là chuỗi số dương. Ta có $u_n \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi phân kì.

c) Ta có $n^2u_n = n^5e^{-n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó

$0 < n^2u_n < 1$ với n đủ lớn $\Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{n^2}$ với n đủ lớn.

Theo dấu hiệu so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

d) $n^{3/2}u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0$ khi $n \to \infty \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{n^{3/2}}$ với n đủ lớn $\Rightarrow$ chuỗi đã cho hội tụ.

e) Lập luận tương tự như c), chuỗi hội tụ.

f) $n^2u_n = \frac{n^2}{10^{(\ln n)^3}}$;

$\ln(n^2u_n) = 2\ln n - (\ln n)^3\ln 10 \to -\infty$ khi $n \to \infty$.

$\Rightarrow n^2u_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi đã cho hội tụ.

5. Giả sử $a > 0$. Khi đó $u_n > 0$ với n đủ lớn. Có thể xem $\sum u_n$ là một chuỗi số dương. Từ đẳng thức đã cho suy ra

$u_n \sim \frac{a}{n}$ khi $n \to \infty$. Vì chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$ phân kì, từ đó suy ra chuỗi đã cho phân kì.

Nếu $a < 0$ thì $-a > 0$. Vì $\lim\limits_{n \to \infty} n(-u_n) = -a > 0$ nên, theo điều vừa chứng minh, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-u_n)$ hội tụ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

6. • Giả sử $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó

$$|\ln(1 + u_n)| \sim |u_n| \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi $\sum u_n$ hội tụ tuyệt đối $\Leftrightarrow \sum \ln(1 + u_n)$ hội tụ tuyệt đối.

• Nếu $u_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$ thì $\ln(1 + u_n) \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Cả hai chuỗi đều phân kì.

8. Ta có

$$|u_n| = |nu_n| \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(n^2u_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ với mọi } n \geqslant 1.$$

Theo dấu hiệu so sánh, từ đó suy ra chuỗi số $\sum |u_n|$ hội tụ.

9. a) Ta có $u_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$,

$$u_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sin\frac{\pi}{2^3},$$

$$u_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)}} =$$

$$= \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)} = 2\sin\frac{\pi}{2^4}.$$

Bằng quy nạp ta được

$$u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

$u_n \sim 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$ khi $\to \infty$. Chuỗi số $\sum \frac{1}{2^n}$ hội tụ. Do đó chuỗi số đã cho hội tụ.

b) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2}u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{(\ln n)^p} = +\infty \Rightarrow \frac{n^{1/2}}{(\ln n)^p} > 1 \text{ với n đủ lớn} \Rightarrow$$

$\frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{1}{n^{1/2}}$ với n đủ lớn. Vì chuỗi $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ phân kì, từ đó suy ra chuỗi số đã cho phân kì.

c) Ta có

$$u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an} = \frac{(2-a)n + 1}{\sqrt{n^4 + 2n + 1} + \sqrt{n^4 + an}}$$

- Nếu $a = 2$ thì $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hội tụ.

- $a \neq 2$ thì ta được một chuỗi số dương hoặc chuỗi số âm. Chuỗi đã cho có cùng tính chất với chuỗi số $\sum \frac{n}{2n^2} = \sum \frac{1}{2n}$.

Chuỗi phân kì.

d) Đặt $u_n = \arccos\sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}$, $0 < u_n \leq \frac{\pi}{2}$. Ta có

$$\cos u_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}} \Rightarrow \sin u_n = \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi hội tụ.

e) Đặt $a_n = \operatorname{argch}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$, ta được $\operatorname{ch} a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$.

Do đó $\operatorname{sh}^2 a_n = \operatorname{ch}^2 a_n - 1 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \operatorname{sh} a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$u_n = a_n^{\alpha} = \left(\arg\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \quad u_n = \left(\ln\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)\right)^{\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha}}$$

khi $n \to \infty$.

Chuỗi hội tụ với $\alpha > 1$, phân kì với $\alpha \leqslant 1$.

10. a) Đây là một chuỗi số dương. Áp dụng dấu hiệu Đalămbe, ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

khi $n \to \infty$.

Chuỗi hội tụ.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{3}{e} > 1$ $(n \to \infty)$. Chuỗi phân kì.

c) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a} \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Chuỗi phân kì.

d) $u_n = \dfrac{2n}{n + 2^n} \sim \dfrac{2n}{2^n} = v_n$ $(n \to \infty)$,

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2} < 1$ $(n \to \infty)$. Chuỗi hội tụ.

e) Đây là chuỗi số dương. Áp dụng dấu hiệu Côsi, ta được

$\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n^{2/n}}{2 + \frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{2} < 1$ $(n \to \infty)$. Chuỗi hội tụ.

f) $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n = \dfrac{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n} \to \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(n \to \infty)$.

- Nếu $a < b$ thì $e^{a-b} < 1$. Chuỗi hội tụ.
- Nếu $a > b$ thì $e^{a-b} > 1$. Chuỗi phân kì.
- Nếu $a = b$ thì $u_n = 1$ với mọi n. Vì $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi phân kì.

g) $$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n^2 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^n} \to$$

$$\to \frac{e^{-5}}{e^{-4}} = \frac{1}{e} < 1 \ (n \to \infty).$$

Chuỗi hội tụ.

h) $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}$. Đặt $a_n = n^{\frac{\ln n}{n}}$ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ta có $\ln a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. Chuỗi hội tụ.

11. Đây là một chuỗi số dương. Áp dụng dấu hiệu Côsi, ta được $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{a}{n^{1/\alpha}}$. Do đó

- Nếu $\alpha > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. Chuỗi đã cho hội tụ.
- Nếu $\alpha < 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$. Chuỗi phân kì.

12. Ta áp dụng công thức

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right) = C$, trong đó C là hằng số Ơle.

Đặt $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$,

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

ta được

$$a_n = c_{2n} - c_n = [c_{2n} - \ln(2n)] - (c_n - \ln n) + \ln 2.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C - C + \ln 2 = \ln 2.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

13. Ta vẫn sử dụng các kí hiệu của bài tập 12. Ta có

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = c_{2n} - c_n.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

14. Đặt

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = C$ (C là hằng số Ơle), và

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \alpha_n + \ln n.$$

Do đó

$$u_n = \frac{\alpha_n}{n!} + \frac{\ln n}{n!}$$

Dễ dàng thấy rằng hai chuỗi số $\sum \frac{\alpha_n}{n!}$ và $\sum \frac{\ln n}{n!}$ đều hội tụ.

Do đó chuỗi số đã cho hội tụ.

15. Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ là tích của hai chuỗi số hội tụ tuyệt đối $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Thật vậy, ta có

$$s_n x^n = a_n x^n.1 + a_{n-1}x^{n-1}.x + a_{n-2}x^{n-2}.x^2 + \dots$$
$$\dots + a_{n-k}x^{n-k}.x^k + \dots + a_0.x^n.$$

Vậy chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$. Tổng của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ với $|x| < 1$. Do đó tổng của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ là : $f(x)\cdot\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{f(x)}{1-x}$ với $|x| < 1$.

16. $\sum u_n$ là một chuỗi đan dấu, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ là một dãy giảm. Theo dấu hiệu Laibnít, chuỗi số $\sum u_n$ hội tụ.

$$w_{n+1} = (-1)^{n+3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$|w_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{k(n-k+1)} \leqslant \frac{k+(n-k+1)}{2} = \frac{n+1}{2},\ k = 1, \dots, n.$$

Do đó

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geqslant \frac{2}{n+1},\ k = 1, \dots, n.$$

và $|w_n| \geqslant \dfrac{2n}{n+1} \to 2$ khi $n \to \infty$. Vì $w_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty} w_n$ phân kì.

17. Giả sử $nu_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó tồn tại một số dương ε có tính chất sau :

Với mọi số nguyên dương n, tồn tại một số nguyên dương $m \geqslant 2n$ sao cho $mu_m \geqslant \varepsilon \Rightarrow u_m \geqslant \dfrac{\varepsilon}{m}$.

Vì dãy $\{u_n\}$ giảm nên $u_n \geqslant \dfrac{\varepsilon}{m}$ với mọi $n \leqslant m$. Do đó

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m| = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_m \geqslant$$

$$\geqslant (m - n)\frac{\varepsilon}{m} \geqslant \frac{m}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{m} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Theo tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ của chuỗi số, từ đó suy ra rằng chuỗi số $\sum u_n$ phân kì. Điều này trái với giả thiết.

18. a) Chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Laibnit.

b) Với n đủ lớn $x + n > 0$. Do đó có thể xem chuỗi số đã cho là một chuỗi đan dấu. Chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Laibnit.

c) Ta có

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{3}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+n}.$$

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit.

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2+n}$ hội tụ tuyệt đối.

Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

d) Ta có

$$u_n = \frac{(-1)^n[n-(-1)^n]}{n^2-1} = \frac{(-1)^n n - 1}{n^2-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n(n-1+1)-1}{n^2-1} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1}$$

Chuỗi đan dấu $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit, chuỗi số $\sum \frac{1}{n^2-1}$ hội tụ, chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ hội tụ tuyệt đối. Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

19. a) Đây là một chuỗi số đan dấu. Đặt $u_n = \frac{1}{(\ln n)\sqrt[n]{n}}$, $n \geq 2$, ta được : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Ta chứng minh $\{u_n\}$ là một dãy số dương giảm. Thật vậy, xét hàm số

$$\varphi(x) = \ln x \,.\, \sqrt[x]{x} \text{ trên } [2, +\infty).$$

$$\varphi(x) = (\ln x)e^{\frac{\ln x}{x}},$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}(x + \ln x - \ln^2 x),\ x \geq 2.$$

$\varphi'(x) > 0$ với n đủ lớn. Do đó hàm số φ tăng trên $[a, +\infty)$ với a đủ lớn. Từ đó suy ra dãy số $\{(\ln n)\sqrt[n]{n}\}$ tăng kể từ một chỉ số nào đó trở đi. Vậy dãy số $\{u_n\}$ giảm kể từ một chỉ số nào đó trở đi. Theo dấu hiệu Laibnit, chuỗi số đã cho hội tụ.

b) Áp dụng công thức khai triển $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^4 0$ (1) $(x \to 0)$;

$(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n} = (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^4}0(1)\right)$. $0(1) \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó

$$(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{(-1)^n}{n^{5/2}} + \frac{(-1)^n}{n^{7/2}}\,0(1)$$

Các chuỗi số $\sum\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}$ và $\sum\frac{(-1)^n}{n^{7/2}}\,0(1)$ hội tụ tuyệt đối, chuỗi số $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit. Dó đó chuỗi số đã cho hội tụ.

20. a) Đây là một chuỗi số đan dấu. Chuỗi thỏa mãn dấu hiệu Laibnit nên hội tụ. Thật vậy, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Để chứng minh dãy $\left\{\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}\right\}$ giảm, ta xét hàm số

$$\varphi(x) = \frac{\ln x)^2}{\sqrt{x}},\ x \geqslant 1.$$

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}(4 - \ln x),$$

$\varphi'(x) < 0$ với x đủ lớn. Do đó hàm số φ giảm trên $[a, +\infty)$ với a đủ lớn.

b) Sử dụng khai triển

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 0(1)$ $(x \to 0)$, ta được

$$\ln n.\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \ln n\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}0(1)\right)$$

$$= (-1)^n\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}0(1).$$

Các chuỗi số $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ và $\sum \frac{\ln n}{n^2}O(1)$ đều hội tụ. Chuỗi đan dấu $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit. Do đó chuỗi đã cho hội tụ

c) Đây là một chuỗi đan dấu. Ta chứng minh nó thỏa mãn dấu hiệu Laibnit. Hiển nhiên $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Xét hàm số

$\varphi(x) = x^{1/x} \sin\frac{1}{x}$ trên $[1, +\infty)$.

$$\varphi'(x) = x^{1/x - 2}\left(\sin\frac{1}{x} - \ln x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sin\frac{1}{x} - \ln x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = -1$ nên

$\sin\frac{1}{x} - \ln x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} < 0$ với x đủ lớn. Do đó $\varphi'(x) < 0$ với x đủ lớn. Vậy hàm số φ giảm trên $[a, +\infty)$ với a đủ lớn. Từ đó suy ra dãy số $\left\{\sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}\right\}$ giảm kể từ một chỉ số nào đó trở đi. Chuỗi đã cho hội tụ.

21. a) Ta có

$$u_n = \sin[(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n) + \pi n] = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n)$$

$$= (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

$\left\{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}\right\}$ là dãy số giảm, $\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ với $n \geq 2$. Do đó dãy

$\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}\right\}$ giảm đến không khi $n \to \infty$. Theo dấu hiệu Laibnit, chuỗi đã cho hội tụ.

b) Ta có

$$u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{an+b}{2n^2}\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{an+b}{2n^2}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \sin \frac{an+b}{2n^2}$$

$\sum u_n$ là một chuỗi số đan dấu với n đủ lớn. Dễ dàng thấy rằng hàm số $\varphi(x) = \frac{ax+b}{2x^2}$ giảm trên $(0, +\infty)$. Với n đủ lớn $\frac{an+b}{2n^2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó dãy số $\left\{\sin\frac{an+b}{2n^2}\right\}$ giảm đến không. Theo dấu hiệu Laibnit, chuỗi đã cho hội tụ.

22. a) $u_n = \frac{(-1)^n[n^\alpha - (-1)^n]}{n^{2\alpha} - 1} = \frac{(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha} - 1} - \frac{1}{n^{2\alpha} - 1}$.

Chuỗi $\sum \frac{(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha} - 1}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit. Chuỗi $\sum \frac{1}{n^{2\alpha} - 1}$ hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$, phân kì với $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Do đó chuỗi đã cho hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$, phân kì với $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$. Chuỗi phân kì.

c) $$u_n = \frac{a - (-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,[\sqrt{n} - (-1)^n]} = \frac{[a - (-1)^n\sqrt{n}]\,[\sqrt{n} + (-1)^n]}{\sqrt{n}(n-1)}$$

$$= \frac{(a-1)\sqrt{n} + (-1)^n a - (-1)^n n}{\sqrt{n}\,(n-1)}$$

$$= \frac{a-1}{n-1} + \frac{(-1)^n a}{\sqrt{n}(n-1)} - \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$$

Chuỗi $\sum \frac{(-1)^n a}{\sqrt{n}(n-1)}$ hội tụ tuyệt đối, chuỗi $\sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit. Chuỗi $\sum \frac{a-1}{n-1}$ hội tụ nếu $a = 1$, phân kì nếu $a \neq 1$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ với $a = 1$, phân kì với $a \neq 1$.

d) Áp dụng khai triển

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 0(1)\ (x \to 0),$$

ta được

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{16}\cdot\frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}}\ 0(1)\ (n \to \infty)$$

Chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ, các chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ và $\sum \frac{1}{n^{3/2}}\ 0(1)$ hội tụ tuyệt đối, chuỗi $\sum \frac{1}{n}$ phân kì. Do đó chuỗi đã cho phân kì.

23. Đặt $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = -1$, $u_4 = 1$, $u_5 = 1$, $u_6 = -1$, $u_7 = -1$, ..., $v_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có dãy tổng riêng bị chặn, dãy số $\{v_n\}$ giảm đến không. Theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi đã cho hội tụ.

b) • Với $a = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ta được chuỗi số $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Vì $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ nên chuỗi phân kì.

• Nếu $a \neq 2k\pi$ thì đặt $u_n = \cos na$, $v_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, ta được $\left|\sum_{k=1}^{n} \cos ka\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{a}{2}\right|}$ với mọi n, dãy số $\{v_n\}$ giảm đến không. Theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi đã cho hội tụ.

c, d) Áp dụng dấu hiệu Điriclê, chuỗi hội tụ.

e) $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\cos 2n}{n}\right)$.

Chuỗi $\sum \frac{1}{n}$ phân kì, chuỗi $\sum \frac{\cos 2n}{n}$ hội tụ. Do đó chuỗi đã cho phân kì.

24. a) Ta có

$$(-1)^n \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = \frac{\cos n(1+\pi)}{\sqrt{n}}.$$

$$|\cos(1+\pi) + \cos 2(1+\pi) + \ldots + \cos n(1+\pi)| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{1+\pi}{2}},$$

dãy số $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ giảm đến không. Theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi hội tụ.

b) Áp dụng công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, ta được

$$4u_n = \frac{4\sin^3 n(\ln n)^3}{n^{1/3}} = \frac{3\sin n(\ln n)^3}{n^{1/3}} - \frac{\sin 3n(\ln n)^3}{n^{1/3}} = 3v_n - w_n.$$

Các chuỗi $\sum v_n$ và $\sum w_n$ hội tụ theo dấu hiệu Điriclê. Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

c) Ta có $u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}} =$

$$= \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{\cos n}{\sqrt{n}} + \frac{\cos^2 n}{n} + \frac{1}{n}\,0(1)\right) \quad (n \to \infty)$$

$$u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{n} + \frac{\cos^3 n}{n^{3/2}} + \frac{\cos n}{n^{3/2}}\,0(1).$$

Chuỗi $\sum \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo dấu hiệu Diriclê, các chuỗi $\sum \frac{\cos^3 n}{n^{3/2}}$ và $\sum \frac{\cos n}{n^{3/2}} 0(1)$ hội tụ tuyệt đối, chuỗi $\sum \frac{\cos^2 n}{n}$ phân kì. Do đó chuỗi đã cho phân kì.

d) Ta có $\sin k . \sin k^2 = \frac{1}{2} [\cos k(k-1) - \cos k(k+1)]$. Do đó

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k \, . \, \sin k^2\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} [\cos k(k-1) - \cos k(k+1)]\right|$$

$$= \frac{1}{2}[1 - \cos n(n+1)] \leqslant 1 \text{ với mọi } n.$$

Dãy số $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ giảm đến không khi $n \to \infty$. Theo dấu hiệu Diriclê, chuỗi hội tụ.

25. Ta có $\frac{\pi n^2}{n+1} \sim \pi n$ khi $n \to \infty$.

Ta làm sáng tỏ điều này trong các đẳng thức sau :

$$\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n + \pi n\right) =$$

$$= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

Do đó

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln n)^2} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

Chuỗi đan dấu $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(\ln n)^2}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit, dãy số $\left\{ \cos \frac{\pi}{n+1} \right\}$ tăng và bị chặn. Theo dấu hiệu Aben, chuỗi số đã cho hội tụ.

26. Vì với $0 < x < \pi$, $\sin nx \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$ nên điều kiện cần để chuỗi đã cho hội tụ là

$$\frac{n^p}{1 + n^q} \to 0 \text{ khi } n \to \infty \Leftrightarrow q > p.$$

Đảo lại, giả sử $q > p$. Ta viết chuỗi đã cho dưới dạng

$$\sum \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n^q}}.$$

Chuỗi $\sum \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$ hội tụ theo dấu hiệu Diriclê, dãy số $\left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{n^q}} \right\}$ tăng đến 1 khi $n \to \infty$. Theo dấu hiệu Aben, chuỗi đã cho hội tụ.

Ta xét tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi đã cho. Ta có

$|u_n(x)| \leq \frac{n^p}{1 + n^q}$ với mọi n. Vì $\frac{n^p}{1 + n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi $\sum \frac{n^p}{1 + n^q}$ hội tụ nếu $q - p > 1$. Vậy với $q - p > 1$, chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối. Ta chứng minh chuỗi đã cho không hội tụ tuyệt đối với $0 < q - p \leq 1$. Thật vậy, nếu chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối thì từ bất đẳng thức

$\sin^2 nx \leq |\sin nx|$ suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin^2 nx}{1 + n^q}$ hội tụ. Mặt khác, ta có $\frac{n^p \sin^2 nx}{1 + n^q} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1 + n^q} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \cos 2nx}{1 + n^q} \right)$

Chuỗi $\sum \frac{n^p}{1+n^q}$ phân kì và chuỗi $\sum \frac{n^p}{1+n^q} \cos 2nx$ hội tụ theo dấu hiệu Đirielê (vì chuỗi $\sum \cos 2nx$ có dãy tổng riêng bị chặn và dãy $\left\{ \frac{n^p}{1+n^q} \right\}$ giảm đến không khi $n \to \infty$). Do đó chuỗi $\sum \frac{n^p \sin^2 nx}{1+n^q}$ phân kì. Ta đi đến mâu thuẫn.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối với $q - p > 1$ và bán hội tụ với $0 < q - p \leq 1$.

27. a) $\alpha > 1$. Đây là chuỗi số dương.

- Nếu $\beta \geq 0$ thì $u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$ với mọi $n \geq 2$.

Vì chuỗi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ nên, theo dấu hiệu so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

- Nếu $\beta < 0$ thì lấy một số p sao cho $\alpha > p > 1$. Khi đó

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^p} \cdot \frac{1}{n^{\alpha - p}(\ln n)^\beta}.$$

Vì $\alpha - p > 0$ nên $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha - p}(\ln n)^\beta} = 0$. Do đó $\frac{1}{n^{\alpha - p}(\ln n)^\beta} < 1$ với n đủ lớn $\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^p}$ với n đủ lớn. Vì chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

Vậy nếu $\alpha > 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ với mọi $\beta \in \mathbf{R}$.

b) $\alpha < 1$.

- Nếu $\beta \leq 0$ thì $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$ với mọi $n \geq 2$. Vì chuỗi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ phân kì nên từ đó suy ra chuỗi đã cho phân kì.

• Nếu $\beta > 0$ thì lấy một số p sao cho $\alpha < p < 1$. Khi đó

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \frac{1}{n^p} \cdot \frac{n^{p-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}}.$$

Vì $p - \alpha > 0$ nên $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^{p-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}} = +\infty$. Do đó $\frac{n^{p-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}} > 1$ với n đủ lớn $\Rightarrow u_n > \frac{1}{n^p}$ với n đủ lớn. Vì chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$ phân kì nên từ đó suy ra chuỗi đã cho phân kì.

Vậy nếu $\alpha < 1$ thì chuỗi đã cho phân kì với mọi $\beta \in \mathbf{R}$.

c) $\alpha = 1$. Khi đó chuỗi đã cho có dạng $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$.

Ta sử dụng dấu hiệu tích phân Côsi. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}, \; x \geqslant 2.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm số f dương và giảm trên $[2, +\infty)$. Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi giới hạn

$$\lim_{y \to +\infty} \int_2^y f(x)dx = \lim_{y \to +\infty} \int_2^y \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} \text{ là hữu hạn.}$$

Thực hiện phép đổi biến số $t = \ln x$, ta được

$$\int_2^y f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln y} \frac{dt}{t^{\beta}}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln y} \frac{dt}{t^{\beta}}$ hữu hạn khi và chỉ khi $\beta > 1$.

Vậy nếu $\alpha = 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ với $\beta > 1$ và phân kì với $\beta \leqslant 1$.

Kết luận.

• Nếu $\alpha > 1$, chuỗi đã cho hội tụ với mọi β,

• Nếu $\alpha < 1$, chuỗi đã cho phân kì với mọi β,

• Nếu $\alpha = 1$, chuỗi hội tụ với $\beta > 1$, phân kì với $\beta \leqslant 1$.

28. a) Đây là một chuỗi số dương, $2^{(-1)^n}$ bằng 2 hoặc $\frac{1}{2}$. Do đó $u_n = \frac{3}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}} \sim \frac{3}{\sqrt{n}}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi đã cho phân kì.

b) $\cos n \neq 0$ với mọi n nguyên dương vì nếu không thì π là một số hữu tỉ ; $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Chuỗi phân kì.

c) Đây là một chuỗi số dương. Ta có

$$u_n \leqslant \frac{\overbrace{\ln^2 n + \ln^2 n + \ldots + \ln^2 n}^{n-1 \text{ số hạng}}}{n^\alpha} = \frac{(n-1)\ln^2 n}{n^\alpha} \sim \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha - 1}} \text{ khi } n \to \infty.$$

• Nếu $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$ thì chuỗi $\sum \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha - 1}}$ hội tụ. Do đó chuỗi đã cho hội tụ.

$$u_n \geqslant \frac{\overbrace{\ln^2 2 + \ln^2 2 + \ldots + \ln^2 2}^{n-1 \text{ số hạng}}}{n^\alpha} = \frac{(n-1)\ln^2 2}{n^\alpha} \sim \frac{\ln^2 2}{n^{\alpha - 1}} \text{ khi } n \to \infty.$$

• Nếu $\alpha - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha \leqslant 2$ thì chuỗi $\sum \frac{\ln^2 2}{n^{\alpha - 1}}$ phân kì. Do đó chuỗi đã cho phân kì. Vậy chuỗi đã cho hội tụ với $\alpha > 2$ và phân kì với $\alpha \leqslant 2$.

d) $\frac{1}{\cos \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 - 2\sin^2 \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\, 0(1)$ $(n \to \infty)$.

Do đó $\ln \frac{1}{\cos n} = \ln\left[1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\, 0(1)\right] \sim \frac{1}{2n^2}$ khi $n \to \infty$, và

$$\left(\ln \frac{1}{\cos \frac{1}{n}}\right)^\alpha \sim \frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi hội tụ với $2\alpha > 1$, tức là $\alpha > \frac{1}{2}$ và phân kì với $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

e) Đây là một chuỗi số dương. Ta có

$$u_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \frac{1}{2^{2k+1}}} \sim \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}} \ (k \to \infty)$$

Vì chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ phân kì nên theo dấu hiệu so sánh, chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1}$ phân kì. Từ đó suy ra rằng chuỗi $\sum u_n$ phân kì. Thật vậy, ta có

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1} \to +\infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum u_n$. Khi đó

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} u_{2k+1} = \sigma_n.$$

Do đó $S_{2n+1} \to +\infty$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi $\sum u_n$ phân kì.

29. Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ nên dãy tổng riêng $\{S_n\}$ bị chặn :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq S \text{ với mọi } n.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta được

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq \sqrt{n}\,.\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} = \sqrt{n}\sqrt{S}.$$

Do đó

$$|b_n| = \frac{|a_1 + ... + a_n|}{n} \leq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n}}.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

30. a) Chuỗi số $\sum u_n$ hội tụ nên $u_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó dãy $\{u_n\}$ bị chặn, tức là

$$0 \leqslant u_n \leqslant M \text{ với mọi } n, \ M \text{ là một hằng số.}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha} \leqslant \dfrac{\sqrt{M}}{n^\alpha}$ với mọi n.

Vì $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh, chuỗi $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ hội tụ.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta được

$$S_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{u_k}\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{\infty} u_k \leqslant n \sum_{k=1}^{\infty} u_k \ .$$

Do đó

$$S_n \leqslant K\sqrt{n} \text{ với mọi } n, \text{ trong đó } K = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Đặt $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{u_k}}{k^\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$ Ta biết rằng chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng $\{T_n\}$ của nó bị chặn.

Trong tổng $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{u_k}}{k^\alpha}$, thay $\sqrt{u_k} = S_k - S_{k-1}$, ta nhận được đẳng thức (1) trong đề bài. Do đó

$$\frac{T_n}{K} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right)\sqrt{2} + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)\sqrt{n-1} + \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} =$$

$$= \sigma_n + \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} \ ,$$

trong đó σ_n là tổng riêng của chuỗi số dương $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$, với

$v_n = \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)\sqrt{n-1}$. Vì

$$v_n = \frac{\sqrt{n-1}}{(n-1)^\alpha}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-\alpha}\right] \sim \frac{\alpha}{n^{\alpha + 1/2}} \text{ khi } n \to \infty \text{ và}$$

$\alpha + \frac{1}{2} > 1$ với $\alpha > \frac{1}{2}$ nên chuỗi số $\sum v_n$ hội tụ. Do đó dãy tổng riêng của nó bị chặn : Tồn tại một số dương L sao cho

$$\sigma_n \leqslant L \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Do đó

$$T_n \leqslant K\left(\sigma_n + \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}\right) \leqslant K(L+1) \text{ với mọi } n.$$

Vậy chuỗi số $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ hội tụ với $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ với $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ hội tụ

nhưng chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n^{1/2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ phân kì (xem bài tập 27).

31. Ta viết chuỗi số đã cho dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_o}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_o}}.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_o}}$ hội tụ, dãy $\left\{\frac{1}{n^{x-x_o}}\right\}$ giảm đến 0 với $x > x_o$.

Do đó chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu Aben.

BÀI TẬP CHƯƠNG IX

DÃY HÀM SỐ VÀ CHUỖI HÀM SỐ

A. Dãy hàm số

1. Xét tính hội tụ đều của các dãy hàm số sau :

a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ trên đoạn $[0, 1]$,

b) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ trên khoảng $[0, +\infty)$,

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ trên $[0, 1]$,

d) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$ trên $\mathbf{R}$,

e) $f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{nx^2+1}$ trên $\mathbf{R}$,

f) $f_n(x) = \dfrac{n}{n^3x^2+1}$ trên $\mathbf{R}$, trên $(0, +\infty)$

g) $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$ trên $\mathbf{R}$,

h) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ trên $(0, +\infty)$,

i) $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$ trên $[1, a]$, $a > 1$.

2. Cho dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định trên $[-1, 1]$

$$f_n(x) = \sin nxe^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2}.$$

Chứng minh rằng

a) $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến một hàm số f trên $[-1, 1]$,

b) $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $[\delta, 1]$, δ là một số dương cho trước, $\delta < 1$. Từ đó suy ra rằng f liên tục trên $(0, 1]$.

c) $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

3. Cho số dương α và dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định trên $[0, +\infty)$.

$$f_n(x) = n^{\alpha}xe^{-nx}, \ n = 1, 2, \dots$$

a) Chứng minh rằng dãy hàm số hội tụ điểm trên $[0, +\infty)$.

b) Chứng minh rằng dãy hàm số hội tụ đều trên $[a, +\infty)$ với mọi số dương a.

c) Với các giá trị nào của α dãy hàm số đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$?

4. Cho dãy hàm số $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f_n(x) = nxe^{-nx} + \sin x, \ n = 1, 2, \dots$$

a) Tìm miền hội tụ Δ của dãy hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng dãy hàm số đã cho hội tụ đều trên $[\delta, +\infty)$, δ là một số dương cho trước. Từ đó suy ra hàm số giới hạn f liên tục trên $(0, +\infty)$.

c) Dãy hàm số đã cho có hội tụ đều trên $(0, +\infty)$ không ?

5. a) Chứng minh rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ với

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{nx} + 1 & \text{với } x \neq 0, \\ 1 & \text{với } x = 0, \end{cases}$$

hội tụ đều trên mọi tập hợp compắc của $\mathbf{R}$.

b) Dãy hàm số đã cho có hội tụ đều trên $\mathbf{R}$ không ?

6. Cho dãy số $\{u_n\}$ hội tụ đến l, $l, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \in (a, b)$ và một dãy hàm số liên tục $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số f trên (a, b).

a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(u_n) = f(l)$.

b) Xét dãy số $\{f_n(u_n)\}$ với $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$ và $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ So sánh với $f(l)$. Giải thích kết quả.

7. Cho hàm số liên tục $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sao cho $|f(x)| < |x|$ với mọi $x \neq 0$ và một số thực $A > 0$.

a) Chứng minh rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

b) Đặt $k = \sup\left\{\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| : x \in [\delta, A] \cup [-A, -\delta]\right\}$. Chứng minh rằng $k < 1$.

c)* Từ đó suy ra rằng dãy hàm số $\{f^n\}$ hội tụ đều trên $[-A, A]$. ($f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ lần}}$).

8. a) Chứng minh rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định trên $[0, 1]$ bởi

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

hội tụ đều trên $[0, 1]$.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}\,dx$.

9. a) Chứng minh rằng dãy hàm số

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}, \quad x \in [0, 1],\ n = 1, 2, \ldots$$

hội tụ điểm trên $[0, 1]$.

b) Dãy hàm số đã cho có hội tụ đều trên $[0, 1]$ không ?

Chứng minh rằng với $0 < \delta < 1$, dãy hàm số đã cho hội tụ đều trên $[\delta, 1]$.

c) Chứng minh rằng dãy hàm $\{f_n - f\}$ bị chặn đều trên $[0, 1]$, tức là tồn tại một số $M > 0$ sao cho

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant M \text{ với mọi } x \in [0, 1] \text{ và với mọi } n.$$

d) Sử dụng b) và c), tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

10. Cho dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx}\right)} & \text{với } x < 0 \text{ hoặc } x > \dfrac{1}{n}, \\ 0 \text{ với } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng các hàm số f_n liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng dãy $\{f_n\}$ hội tụ điểm trên $\mathbb{R}$.

c)* Chứng minh rằng hàm số

$$\varphi(y) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\ln(1-y)}\right| & \text{với } y \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} \text{ với } y = 0, \end{cases}$$

bị chặn trên $(-\infty, 1]$. Từ đó chứng minh dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

11. Cho dãy hàm số $\{f_n\}$ xác định trên $[0, 1]$:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2\ln n} - \frac{1}{1 + x\ln n}, \ n = 1, 2, \dots$$

a) Chứng minh rằng dãy hàm số đã cho hội tụ điểm đến hàm số f trên đoạn $[0, 1]$.

b) Tính $\int\limits_0^1 f(x)dx$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$. Nêu nhận xét.

12. Chứng minh rằng dãy hàm số

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n, \ n = 1, 2, \dots$$

không hội tụ đều trên $[0, 1]$ nhưng

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

13. Giả sử hàm số f có đạo hàm f' liên tục trên (a, b). Chứng minh rằng dãy hàm số $\{f_n\}$ với

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right],\ x \in (a, b)$$

hội tụ đều đến hàm số f' trên mỗi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

14.* Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy hàm số khả tích trên đoạn [a, b] hội tụ đều trên [a, b] đến hàm số f. Chứng minh rằng

a) f khả tích trên [a, b],

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

15.* Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy hàm số hội tụ đều đến hàm số f trên tập hợp $X \subset \mathbf{R}^p$ và x_0 là một điểm tụ của X. Nếu với mọi n, ta đều có $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$ thì dãy số $\{l_n\}$ hội tụ và

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} l_n,$$

tức là

$$\lim_{x\to x_0} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to x_0} f_n(x)).$$

16.* Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy hàm số có đạo hàm trên khoảng bị chặn I. Chứng minh rằng nếu $\{f_n\}$ hội tụ tại một điểm a nào đó của I và dãy đạo hàm $\{f_n'\}$ hội tụ đều đến hàm số g trên I thì

a) $\{f_n\}$ hội tụ đều trên I,

b) Hàm giới hạn f của nó có đạo hàm trên I và

$$f'(x) = g(x) \text{ với mọi } x \in I.$$

B. Chuỗi hàm số

1. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau :

a) $\sum\limits^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$; b) $\sum\limits^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{x^{n+n}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} tg^n\left(x + \frac{y}{n}\right)$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ $(y \geqslant 0)$; h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x \geqslant 0)$.

2. Xét tính hội tụ đều của các chuỗi hàm số sau :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ trên $(0, +\infty)$;

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n$ trên đoạn $[0, 1]$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ trên $(0, +\infty)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{2^n}$ trên $\left(-\infty, \ln\frac{3}{2}\right]$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$ trên đoạn $[-a, a]$ $(a > 0)$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sqrt{1-x^{2n}}$ trên đoạn $[-1, 1]$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ trên $\mathbf{R}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$;

i)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ trên đoạn $[-a, a]$ $(a > 0)$;

j)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$ trên $(0 ; +\infty)$.

3. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ với

$$u_n(x) = (1 - x)^s x^n$$

trên đoạn $[0, 1]$ tùy theo các giá trị của $s > 0$.

(Xét các trường hợp : a) $0 < s < 1$; b) $s = 1$; c) $s > 1$).

4. Chứng minh rằng chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

không hội tụ đều trên $[0, 1]$ nhưng tổng của nó liên tục trên đoạn này.

5. Cho chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ với

$$u_n(x) = \frac{1}{1 + x^n} - \frac{1}{1 + x^{n+1}}, \ x \geq 0.$$

a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số đã cho hội tụ điểm trên $[0, +\infty)$.

b) Chuỗi hàm số đã cho có hội tụ đều trên $[0, +\infty)$, trên $[0, a]$ với $0 < a < 1$, trên $[b, +\infty)$ với $b > 1$ hay không ?

6. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \sin nx}{x^2 + n^2}$$

trên **R**.

7.* Chứng minh rằng chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b] nhưng không hội tụ tuyệt đối tại bất kì điểm nào của **R**.

8. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$$

trên **R**.

9. a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$$

hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ và tổng S của nó là một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

10. Cho chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}, \; x \in \mathbf{R}.$$

a) Với các giá trị nào của x chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ ?

b) Chứng minh rằng tổng của chuỗi hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$

11. a) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n .$$

b) Xét tính liên tục của tổng của chuỗi đã cho trên miền hội tụ của nó.

12. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$;   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2}$

13. Cho một chuỗi số hội tụ tuyệt đối

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad , a_0 \neq 0$$

a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0} \frac{a_n}{x+n}$ hội tụ và tổng S của nó liên tục trên $(0, +\infty)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x)$.

14. Cho số thực $\alpha < 2$ và chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2-\alpha} e^{-nx}.$$

a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số đã cho hội tụ điểm trên $[0, +\infty)$.

b) Chứng minh rằng nếu $\alpha < 1$ thì chuỗi hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

c) Xét tính liên tục của tổng của chuỗi hàm số đã cho trong trường hợp $\alpha = 1$. Chuỗi có hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ không ?

15. a) Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên khoảng $[n, +\infty)$, trong đó h là một số dương cho trước tùy ý.

b) Gọi f là tổng của chuỗi hàm số đã cho. Tính $\int_a^b f(x)dx$, a, b là hai số dương cho trước, $a < b$.

16. Cho chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ với

$$u_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

a) Chứng minh rằng chuỗi đã cho hội tụ điểm trên **R** nhưng chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)dx$ không hội tụ.

b) Chuỗi hàm số đã cho có hội tụ đều trên [0, 1] không ?

17. Tính $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, trong đó $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

18. Chứng minh rằng tổng của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n^3+1}}$$

liên tục trên $[0, +\infty)$ và có đạo hàm trên $(0, +\infty)$.

19. a) Chứng minh rằng tổng S của chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ có đạo hàm mọi cấp trên $(1, +\infty)$.

b) Tìm $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.

20.* Giả sử chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ đều trên [a, b]. Chứng minh rằng nếu các hàm số u_n đều khả tích trên [a, b] thì

a) Tổng S của chuỗi khả tích trên [a, b], và

b) $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

c) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$ hội tụ đều trên [a, b] đến $\int_a^x S(t)dt$.

21.* Giả sử

a) Các hạng tử của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có đạo hàm trên một khoảng bị chặn I,

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tại một điểm a nào đó của I,

c) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ hội tụ đều trên I.

Chứng minh rằng tổng S của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có đạo hàm trên I và

$$S'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \text{ với mọi } x \in I.$$

22.* Xét phương trình Phơrethôm (Fredholm)

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x) \qquad (1)$$

trong đó $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục, f là một hàm số liên tục trên [a, b], φ là một hàm số cần tìm khả tích trên [a, b].

a) Đặt $\varphi_0(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$, $\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi_{n-1}(s)ds$, $n \geq 1$.

Chứng minh rằng φ_n xác định và liên tục trên [a, b] với mọi n.

b) Chứng minh rằng hàm số

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x)$$

xác định và liên tục trên [a, b] với mọi λ thỏa mãn điều kiện

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \text{ trong đó } M = \sup_{\substack{x \in [a, b] \\ s \in [a, b]}} |K(x, s)|.$$

c) Chứng minh rằng ψ là một nghiệm của phương trình (1).

d) Chứng minh rằng phương trình (1) chỉ có nghiệm φ liên tục.

Từ đó suy ra rằng nếu λ thỏa mãn bất đẳng thức trong b) thì φ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Việc giải các bài tập sau cần đến các dấu hiệu hội tụ đều Diriclê và Aben.

23. Cho chuỗi số hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Chứng minh rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

24. Tìm $\lim_{x \to 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}$.

25. Chứng minh rằng chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n + x}}$$

hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

26. Cho chuỗi hàm số

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}.$$

a) Tìm miền hội tụ của chuỗi.

b) Chứng minh rằng tổng của chuỗi hàm số có đạo hàm trên miền hội tụ của nó.

27. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với

$$u_n(x) = \frac{x \sin nx}{2\sqrt{n} + \cos x}, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Chứng minh rằng

a) Chuỗi hội tụ điểm trên khoảng $(0, 2\pi)$,

b) Chuỗi hội tụ đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset (0, 2\pi)$.

C. Chuỗi hàm số lũy thừa

1. Xác định bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \ln(n+1)$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^s}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$;

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{3n+1}}{n+1}$; j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n x^{2n+1}$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

2. Tìm bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arc\,tg} n^{\alpha}) x^n, \ \alpha \text{ là một số thực cho trước.}$$

Xét tính hội tụ của chuỗi tại các điểm R và $-R$.

3. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \right) x^n .$$

4. Xác định miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{n^2} x^n.$$

5. Xác định bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $1 + x - \frac{2x^2}{1^2+1} + \frac{x^3}{1^3+1} + \dots + \frac{(-2)^k x^{2k}}{k^2+1} + \frac{x^{2k+1}}{k^3+1} + \dots$,

b) $x + x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^{11} + x^{13} + \ldots + x^p + \ldots$,

p là số nguyên tố,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, trong đó $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k+\sqrt{k}} & \text{với } n = 3k, \\ \dfrac{1}{k^k} & \text{với } n = 3k+1, \\ (-\alpha)^k & \text{với } n = 3k+2, \end{cases}$

α là một số dương cho trước.

6. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n \text{ , } a > 0 \text{ cho trước}$$

7. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2 - \sin na}$, a là một số thực cho trước,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (n - e^{\sin n\alpha}) x^{n+1}$, α là một số thực cho trước.

8.* Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}(1\,.\,1! + 2\,.\,2! + \ldots + n\,.\,n!)$$

Chứng minh rằng

$$n|x|^n \leqslant |u_n(x)| \leqslant (n+2)|x|^n \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Từ đó xác định bán kính hội tụ của chuỗi đã cho.

9. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

10. Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ dương. Chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ có bán kính hội tụ là $+\infty$.

11. Giả sử các chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ là R_1 và R_2. Chứng minh rằng nếu $R_1 < R_2$ thì chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ có bán kính hội tụ $R = R_1$.

12. Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a^n) \frac{x^n}{n},$$

trong đó a là một số thực cho trước, $a \neq 0$.

13. Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ là 1. Với mỗi n nguyên dương, đặt

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

và
$$t_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}.$$

a) Chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ có bán kính hội tụ bằng 1. Tính tổng T(x) của nó theo tổng S(x) của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

b) Tính bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$.

14. Giả sử hai chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ là R_1 và R_2. Gọi R và R' là bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_0 b_n)x^n$.

a) Cho ví dụ về các chuỗi lũy thừa sao cho $R > \min(R_1, R_2)$.

b) Cho ví dụ về các chuỗi lũy thừa sao cho $R' > \min(R_1, R_2)$.

15. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta$; b) $\sum \frac{x^n}{n} \sin n\theta$,

trong đó θ là một số thực cho trước, $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

16. a) Tìm bán kính hội tụ R của chuỗi hàm lũy thừa với hạng tử tổng quát $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 10^{n-1}} x^{2n+1}$, $n \geqslant 1$.

b) Tìm tổng

$$S(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \ |x| < R.$$

17. Cho chuỗi lũy thừa

$$1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots + x^{3k} - x^{3k+1} + \ldots$$

a) Tính bán kính hội tụ của chuỗi đã cho.

b) Tìm tổng của chuỗi.

18. Cho chuỗi lũy thừa với hạng tử tổng quát

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}, \ n \geqslant 2.$$

a) Tìm miền hội tụ của chuỗi đã cho.

b) Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} u_n'$ và chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} u_n''$.

c) Tính tổng của chuỗi lũy thừa đã cho.

19. Xác định miền hội tụ và tính tổng của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}.$$

20. Xác định miền hội tụ và tìm tổng của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}$.

21. Tính bán kính hội tụ R và tổng của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}.$$

22. Cho chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

a) Xác định miền hội tụ J của chuỗi đã cho.

b) Xác định tập hợp các điểm liên tục của tổng S của chuỗi đã cho.

c) Tính S(x), $|x| < R$ (R là bán kính hội tụ của chuỗi đã cho). Từ đó tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

23. Tìm bán kính hội tụ và tổng của các chuỗi lũy thừa sau :

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \cdots + \frac{n+1}{n+2}x^n + \cdots$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a^n)}{n} x^n$, $a \in \mathbf{R}$, $|a| \neq 1$;

c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n$.

24. a) Tính bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} x^n .$$

b) Chứng minh rằng chuỗi đã cho và chuỗi đạo hàm cấp p của nó hội tụ với $|x| = R$, p là một số nguyên dương bất kì.

25.* a) Tính bán kính hội tụ R_y của chuỗi lũy thừa biến số x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}} .$$

b) Tìm tập hợp Δ các điểm $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho chuỗi đã cho hội tụ.

c) Gọi f(x, y) là tổng của chuỗi lũy thừa đã cho. Chứng minh rằng tồn tại các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ trên IntΔ.

26. a) Chứng minh đẳng thức

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)} ,$$

p là một số tự nhiên.

b) Tính tổng của chuỗi số $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$.

27. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa và tính bán kính hội tụ của chúng :

a) $\cos^2 x$; b) $\dfrac{x}{1 + x - 2x^2}$;

c) $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$; d) $\dfrac{1}{1 + x + x^2}$;

e) shxchx ; f) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$;

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} - \operatorname{arctg} x & \text{với } x \neq 0, \\ 0 & \text{với } x = 0. \end{cases}$; h) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

28. Khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi hàm lũy thừa và tính bán kính hội tụ của chúng :

a) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$; b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$; c) $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt$.

29. Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa tại điểm 0 :

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{1+x^2} .$$

30. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa tại điểm O và tính bán kính hội tụ của chúng :

a) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$; b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$.

31. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \pi^{2n+1} = 0$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = -1$;

c) $\dfrac{e^2+1}{2e} = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4!} + \dots + \dfrac{1}{(2n)!} + \dots$

32. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ bán hội tụ và tính tổng S của nó.

33.* Chứng minh định lí Bơcnơxtainơ (Bernstein).

Nếu hàm số f không âm và có đạo hàm mọi cấp không âm trên đoạn [0, R] thì

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

với mọi $x \in [0, R)$.

34.* Áp dụng định lí Bơcnơxtainơ chứng minh rằng hàm số $f(x) = \operatorname{tg} x$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa tại điểm 0 trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

35.* Chứng minh định lí Taobơ (Tauber) :

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đến f(x) với $|x| < R$ và $a_n \geq 0$ với mọi n. Nếu $\lim_{n \to R^-} f(x) = S$ thì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ hội tụ và có tổng là S.

36.* Chứng minh định lí Taobơ (Tauber) :

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ đến f(x) với $|x| < 1$ và $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$. Nếu $\lim_{x \to 1^-} f(x) = S$ thì chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng là S.

D. Chuỗi Phuariê

1. Cho hàm số f xác định trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \text{ với } x \neq 0, \\ 0 \text{ với } x = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

a) f liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ với mọi n,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$.

2. Cho hàm số tuần hoàn f : **R** → **R** với chu kì 2π, xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -\alpha \text{ với } -\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}, \\ x \text{ với } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \alpha \text{ với } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

α là một số thực cho trước.

a) Viết chuỗi Phuariê của hàm số f. Chuỗi có hội tụ trên **R** không ?

b) Tính $S\left(\frac{\pi}{2}\right)$, S là tổng của chuỗi Phuariê của f.

3. Cho hàm số $f(x) = \sup(\sin x, 0)$, $x \in$ **R**.

a) Xác định chuỗi Phuariê của f.

b) Chứng minh rằng f khai triển được thành chuỗi Phuariê và chuỗi này hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

c) Tính $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$.

4. Cho số thực $\alpha \notin \mathbf{Z}$ và hàm số tuần hoàn f với chu kì 2π xác định trên $\mathbf{R}$ bởi

$$f(x) = \cos\alpha x,\ x \in [-\pi, \pi).$$

a) Chứng minh rằng f liên tục trên $\mathbf{R}$ và f khai triển được thành chuỗi Phuariê trên $\mathbf{R}$. Hãy viết chuỗi Phuariê của f.

b) Chứng minh rằng chuỗi Phuariê của f hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

c) Kiểm tra lại đẳng thức

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

d) Tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right),\ x \in [-\pi, \pi).$$

a_n, b_n là các hệ số Phuariê của f.

5. Cho hàm số

$$f(x) = |\sin x|,\ x \in \mathbf{R}.$$

a) Xác định chuỗi Phuariê của f. Chuỗi có hội tụ đến f không ?

b) Chứng minh rằng với mọi hàm số h liên tục trên đoạn [a, b], ta đều có

$$\lim_{u \to +\infty} \int_a^b h(t)\,|\sin ut|\,dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b h(t)dt.$$

6. a) Chứng minh rằng hàm số tuần hoàn $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ với chu kì 2π xác định trên $[0, 2\pi)$ bởi

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \pi}{2} \text{ với } x \in (0, 2\pi), \\ 0 \text{ với } x = 0, \end{cases}$$

khai triển được thành chuỗi Phuariê trên **R**. Xác định chuỗi Phuariê của F và chỉ rõ các đoạn trên đó chuỗi hội tụ đều.

b) Giả sử $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, liên tục từng khúc trên $[0, 2\pi]$, bằng 0 trên một lân cận của 0 và 2π. Gọi

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

là chuỗi Phuariê của f. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\pi - t}{2} dt.$$

BÀI GIẢI, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ

CHƯƠNG IX

A. Dãy hàm số

1. a) Ta có $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$, $x \in [0, 1]$. Dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ điểm đến hàm số $f(x) = 0$ trên $[0, 1]$. Ta chứng minh

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Thật vậy, ta có

$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0, 1]$.

$r_n'(x) = nx^{n-1} - (n + 1)x^n = x^{n-1}[n - (n + 1)x]$.

$r_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \dfrac{n}{n+1}$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$r_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$r_n(x)$			$r_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$		

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = r_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy dãy hàm số $\{f_n\}$ hội tụ đều đến hàm số $f(x) = 0$ trên $[0, 1]$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0$ với mọi $x \in [0, +\infty)$.

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n} \text{ với mọi } x \in [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,+\infty]} |f_n(x) - 0| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy $f_n \rightrightarrows 0$ trên $[0, +\infty)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x} = x = f(x)$, $x \in [0, 1]$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n+x} - x\right| = \frac{x+x^2}{1+n+x} \leqslant \frac{2}{n+1},$$

$\forall x \in [0, 1]$.

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{2}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy $f_n \rightrightarrows f$ trên $[0, 1]$

d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0,\ x \in \mathbf{R}$.

$\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left|\sin\dfrac{n}{x}\right| = 1$. Vì $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$ nên $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2+1}\right) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \neq 0, \\ 0 \text{ với } x = 0. \end{cases}$

Hàm số giới hạn f gián đoạn tại điểm O nên dãy $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ với $x \neq 0$. Với $x = 0$, ta có $f_n(0) = n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Miền hội tụ của dãy hàm số đã cho là $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dãy $\{f_n\}$ không hội tụ điểm trên $\mathbf{R}$ nên không hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$.

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{n^3x^2+1},\ x > 0,$$

$$r_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1},\ \forall n \Rightarrow \sup_{x>0} r_n(x) \geqslant \frac{n}{n+1} \to 1 \text{ khi } n \to \infty.$$

$\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty \Rightarrow \{f_n\}$ không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

g) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2x}{1+n^3x^2} = 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$ với $x > 0$.

$$r_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+n} \Rightarrow \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{n}{1+n}.$$

$\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

h) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}}$

$\to \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$ khi $n \to \infty$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}}\right| = \frac{\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)^2}, \text{ với mọi } x > 0.$$

$\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ với mọi n. Dãy $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

i) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{1/n} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x,\ x \geqslant 1.$

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n\left(x^{1/n} - 1\right) - \ln x,\ x \geqslant 1.$$

$$r_n'(x) = x^{1/n - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x^{1/n} - 1}{x} > 0 \text{ với mọi } x > 1.$$

Ngoài ra, r_n liên tục trên $[1, a]$. Do đó hàm số r_n tăng trên $[1, a]$. $\Rightarrow \sup\limits_{x\in[1,a]} r_n(x) = r_n(a) \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $f_n(x) \rightrightarrows \ln x$ trên $[1, a]$.

2. a) Với mỗi $x \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$.

b) $|f_n(x) - f(x)| = |\sin nx| e^{-nx^2} \leqslant e^{-n\delta^2}$ với mọi $x \in [\delta, 1]$.

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[\delta,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant e^{-n\delta^2} \to 0$ khi $n \to \infty$.

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ trên $[\delta, 1]$. Vì các hàm số f_n đều liên tục trên $[\delta, 1]$, từ đó suy ra f liên tục trên $[\delta, 1] \Rightarrow$ f liên tục trên $(0, 1]$.

c) $r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = |\sin nx| e^{-nx^2}$,

$r_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sin 1 e^{-1/n} \to \sin 1$ khi $n \to \infty \Rightarrow \sup\limits_{x \in [0,1]} r_n(x) \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Dãy hàm số đã cho không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

3. a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ với mọi $x \geqslant 0$.

b) $r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^{\alpha}xe^{-nx}$, $x \geqslant 0$.

$r_n'(x) = n^{\alpha}e^{-nx}(1 - nx)$; $r_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$.

x	0		$\frac{1}{n}$	
$r_n'(x)$		$+$	0	$-$
$r_n(x)$		$\nearrow$	$\frac{n^{\alpha-1}}{e}$	$\searrow$

Với n đủ lớn, ta có $a > \frac{1}{n}$. Khi đó f_n giảm trên $[a, +\infty)$ và $r_n(x) \leqslant r_n(a) = f_n(a)$ với mọi $x \in [a, +\infty)$.

$\Rightarrow \sup\limits_{x \geqslant a} r_n(x) \leqslant f_n(a) \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy $f_n \rightrightarrows 0$ trên $[a, +\infty)$.

c) $\sup\limits_{x \geqslant 0} r_n(x) = r_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \geqslant 0} r_n(x) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha - 1 < 0$ $(\alpha > 0) \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

4. a) Với $x < 0$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty$. Với $x = 0$, ta có $f_n(0) = 0$ với mọi n. Với $x > 0$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sin x$. Vậy miền hội tụ của dãy hàm số đã cho là : $\Delta = [0, +\infty)$, hàm giới hạn của dãy là $f(x) = \sin x$.

b) Tương tự như câu b) bài 3. Ở đây ta nêu một cách chứng minh khác. Ta có $|f_n(x) - f(x)| = nxe^{-nx}$, $x \geq \delta$,

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx} = \lim\limits_{y\to+\infty} ye^{-y} = 0$ nên $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ sao cho

$$y \geq A \Rightarrow ye^{-y} < \varepsilon.$$

Vì $nx \geq n\delta$ với mọi $x \in [\delta, +\infty)$ nên

$n \geq \dfrac{A}{\delta} \Rightarrow nx \geq A \Rightarrow nxe^{-nx} < \varepsilon$. Nếu N là một số nguyên dương sao cho $N \geq \dfrac{A}{\delta}$ thì

$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - \sin x| < \varepsilon$ với mọi $x \in [\delta, +\infty)$.

Vậy $f_n(x) \rightrightarrows \sin x$ trên $[\delta, +\infty)$.

c) Vì $\left| f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n}\right) \right| = e^{-1}$ với mọi n nên $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

5. a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Giả sử K là một tập hợp compắc trong $\mathbf{R}$. Khi đó tồn tại $a > 0$ sao cho $K \subset [-a, a]$.

$|f_n(x) - f(x)| = \left| x^2 \sin \dfrac{1}{nx} \right| \leq x^2 \cdot \dfrac{1}{n|x|} = \dfrac{|x|}{n} \leq \dfrac{a}{n}$ với $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$. Với $x = 0$, ta có $|f_n(0) - f(0)| = 0$ với mọi n. Do đó

$|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{a}{n}$ với mọi $x \in [-a, a] \Rightarrow$

$\sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{a}{n}$. Vậy $f_n \rightrightarrows f$ trên $[-a, a] \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ trên K.

b) $|f_n(n) - f(n)| = n^2 \sin\frac{1}{n^2} \to 1$ khi $n \to \infty$. Dãy hàm số đã cho không hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

6. a) Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Vì $f_n \rightrightarrows f$ trên (a, b) nên f liên tục trên (a, b).

$$|f_n(u_n) - f(l)| \leqslant |f_n(u_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(l)| \quad (1)$$

Vì $f_n \rightrightarrows f$ trên (a, b) nên $\exists N_1$ nguyên dương sao cho

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

Đặc biệt,

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |f_n(u_n) - f(u_n)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Vì f liên tục trên (a, b) nên $\exists \delta > 0$ sao cho

$$(\forall x \in (a, b))\ |x - l| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ nên $\exists N_2$ nguyên dương sao cho

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \delta$$

Do đó từ (3) suy ra

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |f(u_n) - f(l)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

Đặt $N = \max(N_1, N_2)$. Từ (1), (2), (4) suy ra

$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(u_n) - f(l)| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(u_n) = f(l)$.

b) $f_n(u_n) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ với mọi n ;

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \neq 0, \\ 0 \text{ với } x = 0. \end{cases}$$

$f(1) = f(0) = 0 \neq \lim\limits_{n \to \infty} f_n(u_n) = \frac{1}{2}$. Vì hàm số giới hạn f gián đoạn tại điểm 0 và các f_n đều liên tục trên $[0, +\infty)$ nên $f_n \not\rightrightarrows f$ trên bất kì khoảng nào chứa điểm 0. Điều này giải thích kết quả vừa nêu.

7. a) Từ giả thiết suy ra $f(0) = 0$. Vì f liên tục tại điểm O nên ta có điều cần chứng minh.

b) $K = [\delta, A] \cup [-A, -\delta]$ là một tập hợp compắc trong **R**. Hàm số $x \mapsto \left|\frac{f(x)}{x}\right|$ liên tục trên K nên đạt giá trị lớn nhất trên K : Tồn tại $x_0 \in K$ sao cho $\frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \frac{|f(x_0)|}{|x_0|} = k < 1$ với mọi $x \in K$.

c) Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có

$|f^{n+1}(x)| = |f[f^n(x)]| \leqslant |f^n(x)| \Rightarrow \{|f^n(x)|\}$ là một dãy giảm. Gọi $\delta > 0$ là số nói trong a) Khi đó

$$x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \text{ và } |f^n(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } n.$$

$$x \in K \Rightarrow |f(x)| \leqslant k|x|.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} k^n A = 0$ nên tồn tại N nguyên dương sao cho $k^N A < \delta$.

Ta chứng minh $|f^N(x)| < \delta$ với mọi $x \in [-A, A]$ bằng phản chứng :

Giả sử tồn tại $x_0 \in K$ sao cho $|f^N(x_0)| \geqslant \delta$. Khi đó

$$|f(x_0)| \geqslant |f^2(x_0)| \geqslant \dots \geqslant |f^N(x_0)| \geqslant \delta.$$

Vì $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^N(x_0) \in K$ nên

$$|f(x_0)| \leqslant k|x_0|,$$

$$|f^2(x_0)| = |f[f(x_0)]| \leqslant k|f(x_0)| \leqslant k^2|x_0|, \dots$$

$$|f^N(x_0)| \leqslant k^N|x_0| \leqslant k^N A < \delta.$$

trái với giả thiết phản chứng. Từ đó suy ra

$n > N \Rightarrow |f^n(x)| \leqslant |f^{N+1}(x)| = |f[f^N(x)]| < \varepsilon$ với mọi $x \in [-A, A]$.

Vậy $f^n \rightrightarrows 0$ trên $[-A, A]$.

8. a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$ với mọi $x \in [0, 1]$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{ne^{-x} + x^2}{n + x} - e^{-x}\right| = \frac{|x^2 - xe^{-x}|}{n + x} \leqslant \frac{2}{n} \text{ với}$$

mọi $x \in [0, 1]$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ trên $[0, 1]$.

b) Vì các hàm số f_n đều liên tục trên $[0, 1]$ nên từ a) suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}\,dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}.$$

9. a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases}(x^2 + 1)e^{-x} \text{ với } x \in (0, 1],\\ 0 \text{ với } x = 0\end{cases}$

b) Từ đó suy ra $\{f_n\}$ không liên tục đều trên $[0, 1]$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1} - (x^2 + 1)e^{-x}\right| =$$

$$= \frac{(x^2 + 1)e^{-x}}{nx + 1} \leqslant \frac{2}{n\delta}$$

với mọi $x \in [\delta, 1] \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ trên $[\delta, 1]$.

c) $|f_n(x) - f(x)| \leqslant (x^2 + 1)e^{-x} \leqslant 2$ với mọi $x \in (0, 1]$, mọi n

$$f_n(0) - f(0) = 0 \text{ với mọi } n$$

Do đó $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2$ với mọi $x \in [0, 1]$ và mọi n.

d) Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Ta có

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^\varepsilon f_n(x)dx + \int_\varepsilon^1 f_n(x)dx$$

Từ b) suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\varepsilon}^{1} f_n(x)dx = \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$. Do đó $\exists N$ nguyên dương sao cho

$$n \geq N \Rightarrow \left|\int\limits_{\varepsilon}^{1} f_n(x)dx - \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Từ c) suy ra

$$\left|\int\limits_{0}^{\varepsilon} f_n(x)dx - \int\limits_{0}^{\varepsilon} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{0}^{\varepsilon} |f_n(x) - f(x)|dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{0}^{\varepsilon} 2dx = 2\varepsilon.$$

Do đó

$$n \geq N \Rightarrow \left|\int\limits_{0}^{1} f_n(x)dx - \int\limits_{0}^{1} f(x)dx\right| < 3\varepsilon$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1} f_n(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} (x^2 + 1)e^{-x}dx = 3 - 6e^{-1}.$$

10. a) f_n liên tục tại mọi điểm $x \neq 0$ và $x \neq \frac{1}{n}$. Tại $x = 0$, hiển nhiên $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f_n(x) = 0 = f_n(0)$. Vậy f_n liên tục tại điểm 0. Chứng minh tương tự f_n liên tục tại điểm $\frac{1}{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -x = f(x)$ với $\forall x \in \mathbf{R}$

c) Vì $\lim\limits_{y\to -\infty} \varphi(y) = 0$ nên $\exists A > 0$ sao cho

$$y < -A \Rightarrow \varphi(y) \leq 1.$$

φ liên tục trên $[-A, 1]$ nên bị chặn trên đoạn này. Do đó φ bị chặn trên $(-\infty, 1]$. Tồn tại $M > 0$ sao cho $\varphi(y) \leqslant M$ với mọi $y \leqslant 1$. Ta chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}$. Cho $\varepsilon > 0$ bất kì.

- Với $x < 0$, ta có

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)} + x\right| = \frac{1}{n}\left|nx + \frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)}\right|.$$

$$= \frac{1}{n}\varphi(y) \leqslant \frac{M}{n} < M\varepsilon \text{ với } n > \frac{1}{\varepsilon}.\ \left(y = \frac{1}{nx}\right)$$

Gọi N là số nguyên dương lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$. Khi đó

$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < M\varepsilon$ với mọi $x < 0$.

- Với $x \geqslant \varepsilon$, ta có $x > \frac{1}{n}$ với $n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon}$. Do đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \frac{\varphi(y)}{n} \leqslant \frac{M}{n} < M\varepsilon \text{ với mọi } x \geqslant \varepsilon.$$

- Với $0 \leqslant x < \varepsilon$, ta có $f_n(x) = 0$ hoặc $f_n(x) = \dfrac{1}{n\ln\left(1-\frac{1}{nx}\right)}$.

Do đó

$$|f_n(x) - f(x)| = |x| \text{ hoặc } |f_n(x) - f(x)| = \frac{\varphi(y)}{n}.$$ Từ đó

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |x| + \frac{\varphi(y)}{n} < \varepsilon + \frac{M}{n} < (M+1)\varepsilon \text{ với } n \geqslant N.$$

Tóm lại, ta có

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < (M+1)\varepsilon \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Vậy $\{f_n\}$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

11. a) $f(x) = \lim f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \neq 0, \\ -1 & \text{với } x = 0. \end{cases}$

b) $F_n(x) = \int f_n(x)dx = \frac{\ln(1 + nx^2\ln n)}{2\ln n} - \frac{\ln(1 + x\ln n)}{\ln n}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = F_n(1) - F_n(0) = \frac{\ln(1 + n\ln n)}{2\ln n} - \frac{\ln(1 + \ln n)}{\ln n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}\ ;\ \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$ nên dãy hàm số $\{f_n\}$ không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

$|f'(x) - f_n(x)| = \left| f'(x) - f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \right|$, $0 < \theta < 1$. Lấy β_1 sao cho $a < \alpha < \beta < \beta_1 < b$. Vì f' liên tục đều trên $[\alpha, \beta_1]$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$(\forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta_1])$ $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f'(x_1) - f'(x_2)| < \varepsilon$. Ta lấy $\delta < \beta_1 - \beta$. Với $\frac{1}{n} < \delta$ tức là $n > \frac{1}{\delta}$, ta có $\left| f'(x) - f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \right| < \varepsilon$ với mọi $x \in [\alpha, \beta]$. Gọi N là số nguyên lớn hơn $\frac{1}{\delta}$. Khi đó

$$n \geqslant N \Rightarrow |f'(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in [\alpha, \beta].$$

14.* a) Cho $\varepsilon > 0$ bất kì. Đặt $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$, $x \in [a, b]$. Vì $f_n \rightrightarrows f$ trên $[a, b]$ nên tồn tại n nguyên dương sao cho

$$|r_n(x)| < \varepsilon \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Dễ dàng thấy rằng nếu u và v là những hàm số bị chặn trên tập hợp X thì $\sup_{x \in X} [u(x) + v(x)] \leq \sup_{x \in X} u(x) + \sup_{x \in X} v(x)$, $\inf_{x \in X} [u(x) + v(x)] \geq \inf_{x \in X} u(x) + \inf_{x \in X} v(x)$.

Từ đó suy ra rằng nếu π là một phép phân hoạch đoạn [a, b] :

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

thì

$$S(f, \pi) \leq S(f_n, \pi) + S(r_n, \pi),$$

$$s(f, \pi) \geq s(f_n, \pi) + s(r_n, \pi),$$

$S(f, \pi)$ và $s(f, \pi)$ là các tổng Đácbu trên và dưới của f ứng với π. Do đó

$S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq [S(f_n, \pi) - s(f_n, \pi)] + [S(r_n, \pi) - s(r_n, \pi)]. <$
$< S(f_n, \pi) - s(f_n, \pi) + 2\varepsilon(b - a).$

Vì f_n khả tích trên [a, b] nên tồn tại một phép phân hoạch π đoạn [a, b] sao cho $S(f_n, \pi) - s(f_n, \pi) < \varepsilon$. Với phép phân hoạch đó, ta có

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) < (1 + 2(b - a))\varepsilon.$$

Vậy f khả tích trên [a, b].

b) $$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_a^b \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|\,dx = (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

khi $n \to \infty$ vì $f_n \rightrightarrows f$ trên [a, b]. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

15. $f_n \rightrightarrows f$ trên X nên $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ sao cho

$m \geq N$, $n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$.

Cho $x \to x_o$, ta được

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow |l_m - l_n| \leqslant \varepsilon.$$

Do đó dãy số $\{l_n\}$ hội tụ : $\lim\limits_{n \to \infty} l_n = l \in \mathbf{R}$. Đặt

$$F_n(x) = \begin{cases} f_n(x) \text{ với } x \in X \setminus \{x_o\} \\ l_n \text{ với } x = x_o, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ với } x \in X \setminus \{x_o\} \\ l \text{ với } x = x_o. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng $F_n \rightrightarrows F$ trên $X \cup \{x_o\}$ và các hàm số F_n đều liên tục tại điểm x_o. Do đó F liên tục tại x_o và ta có

$$\lim_{x \to x_o} F(x) = F(x_o), \text{ tức là } \lim_{x \to x_o} f(x) = l.$$

16.* a) Ta áp dụng tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của một dãy hàm số. Đặt $f_{m,n}(x) = f_m(x) - f_n(x)$, $x \in I$. Áp dụng công thức số gia hữu hạn, ta được

$$\begin{aligned} f_m(x) - f_n(x) &= [f_{m,n}(x) - f_{m,n}(a)] + f_{m,n}(a) \\ &= f'_{m,n}(c)(x - a) + f_{m,n}(a) \\ &= [f'_m(c) - f'_n(c)](x - a) + f_m(a) - f_n(a), \end{aligned}$$

$c = a + \theta(x - a)$, $0 < \theta < 1$. Do đó

$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f'_m(c) - f'_n(c)||I| + |f_m(a) - f_n(a)|$, $|I|$ là độ dài của I. Vì $\{f'_n\}$ hội tụ đều trên I và dãy $\{f_n(a)\}$ hội tụ nên

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ nguyên dương sao cho

$$m \geqslant N,\ n \geqslant N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f'_m(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2|I|}$$

và $$|f_m(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó

$$m \geq N,\ n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Vậy $\{f_n\}$ hội tụ đều trên I.

b) Giả sử x_0 là một điểm bất kì của I. Với mọi $x \in I$, $x \neq x_0$, ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Áp dụng bài tập 15, ta chứng minh dãy hàm số $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right\}$ hội tụ đều trên $I \setminus \{x_0\}$. Thật vậy, sử dụng công thức số gia hữu hạn, ta được

$$\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{f_{m,n}(x) - f_{m,n}(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'_{m,n}(c) = f'_m(c) - f'_n(c),$$

$x \in I$, $x \neq x_0$, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$. Do đó từ giả thiết dễ dàng suy ra rằng dãy hàm số $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right\}$ thỏa mãn tiêu chuẩn Côsi về sự hội tụ đều của một dãy hàm số. Theo bài tập 15, ta có

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0) = g(x_0).$$

Vậy $f'(x_0) = g(x_0)$.

B. Chuỗi hàm số

1. a) Áp dụng dấu hiệu Đalămbe hoặc Côsi. Miền hội tụ là : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

b) Áp dụng dấu hiệu Đalămbe hoặc Côsi. Miền hội tụ là : $[0, +\infty)$.

c) Miền hội tụ của chuỗi hàm số là : $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

d) Với $x \leqslant 0$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} ne^{-x} = +\infty$. Chuỗi phân kì.

Với $x > 0$, ta có

$$n^2u_n(x) = n^3e^{-nx} \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

$\Rightarrow u_n(x) < \dfrac{1}{n^2}$ với n đủ lớn. Chuỗi hội tụ.

e) $n + x > 0$ với $n > -x$ nên có thể xem đây là chuỗi số dương.

$u_n(x) = \left(\dfrac{n+x}{n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n^x} \sim \dfrac{e^x}{n^x}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hội tụ với $x > 1$, phân kì với $x \leqslant 1$.

f) $\sqrt[n]{|u_n|} = \left|\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{y}{n}\right)\right| \to |\operatorname{tg}x|$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối với $|\operatorname{tg}x| < 1$, tức là

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi\ ,\ k \in \mathbf{Z},$$

phân kì với $|\operatorname{tg}x| > 1$. Ta xét các trường hợp $|\operatorname{tg}x| = 1$

- Nếu $\operatorname{tg}x = 1$, tức là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ thì

$$u_n = \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + k\pi + \frac{y}{n}\right) = \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{n}\right) = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 - \operatorname{tg}\frac{y}{n}\right)^n}.$$

$\Rightarrow u_n \to \dfrac{e^y}{e^{-y}} = e^{2y}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi đã cho phân kì với mọi $y \in \mathbf{R}$.

• Nếu tgx $= -1$, tức là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = e^{-2y}$.

Chuỗi đã cho phân kì với mọi $y \in \mathbf{R}$.

Miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi \,,\, \frac{\pi}{4} + k\pi \right) \times \mathbf{R}.$$

g) Ta xét các trường hợp sau :

1° $0 \leqslant y \leqslant 1$. Khi đó $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{|x|}{\sqrt[n]{n + y^n}} \to |x|$ khi $n \to \infty$.

Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$, phân kì với $|x| > 1$.

Với $x = 1$, ta có $u_n = \dfrac{1}{n + y^n} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Chuỗi phân kì.

Với $x = -1$, ta có $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + y^n}$. Chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Laibnit.

2° $y > 1$. Khi đó $|u_n| \sim \left(\dfrac{|x|}{y}\right)^n$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $\dfrac{|x|}{y} < 1$, tức là $|x| < y$ và phân kì với $|x| > y$. với $x = \pm y$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 1$. Chuỗi phân kì.

Vậy chuỗi hàm số đã cho hội tụ tuyệt đối với $0 \leqslant y \leqslant 1$ và $|x| < 1$ hoặc $|x| < y$ và $y > 1$, bán hội tụ với $x = -1$ và $0 \leqslant y \leqslant 1$.

h) Ta xét các trường hợp sau :

1° $0 \leqslant x < 1$. Khi đó $\ln(1 + x^n) \sim x^n$ khi $n \to \infty$. Do đó $u_n \sim \dfrac{x^n}{n^y} = v_n$. Vì $\sqrt[n]{v_n} = \dfrac{x}{n^{y/n}} \to x$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi đã cho hội tụ với mọi $y \in \mathbf{R}$.

2° $x = 1$. Khi đó $u_n = \frac{\ln 2}{n^y}$. Chuỗi Riman hội tụ với $y > 1$, phân kì với $y \leqslant 1$.

3° $x > 1$. Khi đó $1 + x^n = x^n\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)$ và

$$\ln(1 + x^n) = n\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)$$

$$= n\ln 1x + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}0(1) \text{ khi } n \to \infty.$$

$$u_n = \frac{\ln x}{n^{y-1}} + \frac{1}{n^y x^n} + \frac{1}{n^y x^n}0(1)\ (n \to \infty)$$

Các chuỗi $\sum \frac{1}{n^y x^n}$ và $\sum \frac{1}{n^y x^n}0(1)$ đều hội tụ với mọi $y \in \mathbf{R}$.

Chuỗi $\sum \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ hội tụ với $y > 2$, phân kì với $y \leqslant 2$. Do đó chuỗi đã cho hội tụ với $y > 2$, phân kì với $y \leqslant 2$.

2. a) Tổng của chuỗi hàm số đã cho là $S(x) = e^x$; phần dư là $r_n(x) = e^x - S_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{x!}$;

$$|r_n(x)| = e^x\left|1 - \frac{1}{e^x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \to +\infty \text{ khi } x \to +\infty.$$

$\Rightarrow \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |r_n(x)| = +\infty$ với mọi n. Chuỗi không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

b) $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(1 - x)x^k = 1 - x^{n+1}$, $x \in [0, 1]$.

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \in [0, 1), \\ 0 \text{ với } x = 1. \end{cases}$$

$|r_n(x)| = x^{n+1}$ với $x \in [0, 1)$, $r_n(1) = 0$.

$\sup\limits_{x \in [0,1]} |r_n(x)| = \sup\limits_{x \in [0,1]} x^{n+1} = 1$. Chuỗi không hội tụ đều trên [0, 1].

Cách khác. S gián đoạn tại điểm x = 1, các hàm số $u_n(x) = (1 - x)x^n$ đều liên tục trên [0, 1]. Do đó chuỗi đã cho không hội tụ đều trên [0, 1].

c) $$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = 1 \ , \ x > 0.$$

$\sup\limits_{x>0} |r_n(x)| = \sup\limits_{x>0} \dfrac{1}{nx+1} = 1 \Rightarrow$ chuỗi không hội tụ đều trên $(0, +\infty)$.

d) $|u_n(x)| = \dfrac{e^{nx}}{2^n} \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ với mọi $x \leqslant \ln \dfrac{3}{2}$.

Theo dấu hiệu Vâyơxtrat, chuỗi đã cho hội tụ đều trên $\left(-\infty, \ln\dfrac{3}{2}\right)$.

e) $|u_n(x)| \leqslant 2^n \dfrac{|x|}{3^n} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n a$ với mọi $x \in [-a, a]$. Chuỗi đã cho hội tụ đều trên [-a, a].

f) u_n xác định với $|x| \leqslant 1$ và $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ với $|x| \leqslant 1$. Chuỗi hội tụ đều trên [-1, 1].

g) Ta có $1 + n^5x^2 \geqslant 2n^{5/2}|x|$ với $x \neq 0$.

$$\Rightarrow |u_n(x)| \leqslant \frac{n|x|}{2n^{5/2}|x|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (1)$$

với $x \neq 0$. Bất đẳng thức (1) cũng đúng với $x = 0$. Chuỗi số $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ $\Rightarrow$ Chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$.

h) Ta có $x^n + x^{-n} \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ với $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

$$\Rightarrow |u_n(x)| \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1} \text{ với } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2.$$

Chuỗi số dương $\sum \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ hội tụ theo dấu hiệu Đalămbe.

Do đó chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

i) Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức

$$\ln(1 + x) \leqslant x \text{ với mọi } x \geqslant 0.$$

Do đó

$$|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n\ln^2 n} \leqslant \frac{a^2}{n\ln^2 n} \text{ với mọi } x \in [-a, a].$$

Chuỗi số dương $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ hội tụ nên chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-a, a]$.

j) Với mỗi $x > 0$, ta có $2^n \sin \frac{1}{3^n x} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x}$ $(n \to \infty)$.

Do đó chuỗi hàm đã cho hội tụ điểm trên $(0, +\infty)$.

Ta chứng minh chuỗi hàm không hội tụ đều trên khoảng này bằng phản chứng. Theo tiêu chuẩn Côsi, nếu chuỗi hàm hội tụ đều trên $(0, +\infty)$ thì

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x > 0} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = 0.$$

Đặt biệt, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x>0} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |u_n(x)| = 0.$$

Mặt khác, ta có

$$u_n\left(\frac{1}{3^n}\right) = 2^n \sin 1 \to +\infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Ta đi đến mâu thuẫn.

3. Dễ dàng thấy rằng nếu $s > 0$, chuỗi hàm đã cho hội tụ điểm trên $[0, 1]$; $u_n(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in [0, 1]$.

a) $0 < s < 1$.

$$|r_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = (1-x)^s \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = (1-x)^s \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{1-s}}$$

với mọi $x \in [0, 1)$. Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^{n+1}}{(1-x)^{1-s}} = +\infty$ nên $\sup\limits_{x\in[0,1]} |r_n(x)| = +\infty$.

Chuỗi không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

b) $s = 1$.

$$|r_n(x)| = x^{n+1} \text{ với mọi } x \in [0, 1) ; \sup_{x\in[0,1]} |r_n(x)| = 1.$$

Chuỗi không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

c) $s > 1$.

$$|u_n(x)| = u_n(x) = (1 - x)^s x^n ;$$

$$u_n'(x) = x^{n-1}(1 - x)^{s-1}[n - (n+s)x] ;$$

$$u_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = \frac{n}{n+s}.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\max_{x\in[0,1]} u_n(x) = u_n\left(\frac{n}{n+s}\right) \leqslant \left(1 - \frac{n}{n+s}\right)^s = \frac{s^s}{(n+s)^s} < \frac{A}{n^s}$$

$(A = s^s = \text{const})$.

$\Rightarrow |u_n(x)| \leqslant \dfrac{A}{n^s}$ với mọi n. Chuỗi hội tụ đều trên [0, 1].

4. $S_n(x) = nxe^{-nx}$; $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = 0$ với mọi $x \in [0, 1]$.

$|r_n(x)| = nxe^{-nx}, x \in [0, 1]$; $\left|r_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| = n \times \dfrac{1}{n} e^{-1} = e^{-1}$ với mọi n. Chuỗi không hội tụ đều trên [0, 1]. Tuy nhiên S liên tục trên [0, 1].

5. a) $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x^{n+1}}, \ x \geqslant 0.$

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ với } x = 0, \ x = 1, \\ \dfrac{-x}{1+x} \text{ với } 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{1+x} \text{ với } x > 1. \end{cases}$$

Vậy chuỗi hội tụ điểm trên $[0, +\infty)$.

b) • S không liên tục trên $[0, +\infty)$ nên chuỗi không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$

• Với $0 \leqslant x \leqslant a < 1$, ta có

$$|r_n(x)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{n+1}} + \frac{x}{1+x}\right| = \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leqslant a^{n+1}$$

với mọi n. Chuỗi hội tụ đều trên [0, a] theo dấu hiệu Vâyσxtrat.

• Với $x \geqslant b > 1$, ta có

$$|r_n(x)| = \frac{1}{1+x^{n+1}} \leqslant \left(\frac{1}{b}\right)^n \text{ với mọi n.}$$

Chuỗi hội tụ đều trên $[b, +\infty)$ theo dấu hiệu Vâyσxtrat.

6. Với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{x^2+n^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2}.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ta chứng minh chuỗi hàm số đã cho không hội tụ đều trên **R** bằng phản chứng. Nếu chuỗi hội tụ đều trên **R** thì từ tiêu chuẩn Côsi suy ra $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_n(x)| = 0$ (1)

$$\text{Lấy } x_n = n\pi + \frac{\pi}{2n}, \text{ ta có}$$

$$|u_n(x_n)| = \frac{\left(n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)^2 \left|\sin\left(n^2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)^2 + n^2}$$

$$= \frac{\left(n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)^2}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2n}\right)^2 + n^2} \to \frac{\pi^2}{\pi^2 + 1} \text{ khi } n \to \infty,$$

trái với (1).

7. Tồn tại $M > 0$ sao cho $[a, b] \subset [-M, M]$.

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^2}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}, \ x \in \mathbf{R}.$$

$$\left|(-1)^n \frac{x^2}{n^2}\right| = \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{M^2}{n^2} \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

$\Rightarrow$ Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ. Do đó chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[a, b]$.

$$|u_n(x)| = \frac{x^2 + n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}.$$

Với mọi $x \in \mathbf{R}$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2}$ hội tụ, còn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ phân kì.

8. Dễ dàng thấy rằng với mỗi $x \in \mathbf{R}$, chuỗi đã cho là một chuỗi đan dấu thỏa mãn dấu hiệu Laibnit. Do đó nó hội tụ.

Hiển nhiên chuỗi đã cho không hội tụ tuyệt đối tại bất kì điểm nào của $\mathbf{R}$. Ta có $|r_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^2+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ với mọi x và mọi n. Do đó chuỗi đã cho hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

9. a) Với mỗi $x \geqslant 0$, ta có một chuỗi đan dấu thỏa mãn các điều kiện của dấu hiệu Laibnit. Do đó chuỗi hội tụ điểm trên $[0, +\infty)$.

$$|r_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{e^{-\sqrt{n+1}\,x}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ với mọi } x \geqslant 0.$$

Vậy chuỗi hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

b) Vì chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ nên với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại N nguyên dương sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } x \geqslant 0. \quad (1)$$

Lấy $n \geqslant N$ và cố định n.

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x),\ x \geqslant 0. \quad (2)$$

Hiển nhiên $\lim_{x \to +\infty} S_n(x) = 0$. Do đó $\exists A > 0$ sao cho

$$x \geqslant A \Rightarrow |S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$x \geqslant A \Rightarrow |S(x)| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = 0$.

10. a) Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $x > 1$, bán hội tụ với $0 < x \leqslant 1$, phân kì với $x \leqslant 0$.

b) Giả sử a là một số dương bất kì. Ta chứng minh chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[a, +\infty)$. Thật vậy, với mọi $x \geqslant a$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ là một chuỗi đan dấu thỏa mãn các điều kiện của dấu hiệu Laibnit, và

$$|r_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[a, +\infty)$. Từ đó suy ra tổng S của chuỗi đã cho liên tục trên $[a, +\infty)$. Vì có thể lấy $a > 0$ nhỏ tùy ý nên S liên tục trên $(0, +\infty)$.

11. a) $\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \left| x + \dfrac{1}{n} \right| \to |x|$ khi $n \to \infty$. Theo dấu hiệu Côsi, chuỗi hội tụ với $|x| < 1$ và phân kì với $|x| > 1$. Với $x = 1$, ta có $u_n(1) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$ khi $n \to \infty$. Chuỗi phân kì. Với $x = -1$, ta có $|u_n(-1)| = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi phân kì. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là : $(-1, 1)$.

b) Giả sử r là một số dương bất kì nhỏ hơn 1. Ta có

$$|u_n(x)| \leqslant \left(r + \frac{1}{n}\right)^n \text{ với mọi } x \in [-r, r].$$

Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(r + \dfrac{1}{n}\right)^n$ hội tụ. Do đó chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-r, r] \Rightarrow$ Tổng S của chuỗi đã cho liên tục trên $[-r, r] \Rightarrow$ S liên tục trên $(-1, 1)$.

12. a) Dễ dàng chứng minh được rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$. Do đó tổng của nó liên tục trên $[0, +\infty)$ và ta có

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

b) $|u_n(x)| = \frac{x^2}{1 + n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ với mọi $x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2}$ hội tụ đều trên **R**. Ngoài ra, $\lim_{x \to +\infty} u_n(x) = \frac{1}{n^2}$. Do đó

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

13. a) Ta viết chuỗi hàm số dưới dạng

$$\frac{a_o}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x + n}.$$

$$|u_n(x)| = \left| \frac{a_n}{x + n} \right| \leqslant \frac{|a_n|}{n} \text{ với mọi } x \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x + n}$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ theo dấu hiệu Vâyơxtrat. Do đó tổng T của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x + n}$ liên tục trên $[0, +\infty)$ và

$$S(x) = \frac{a_o}{x} + T(x),\ x > 0. \quad (1)$$

Hiển nhiên S liên tục trên $[0, +\infty)$.

b) Vì T liên tục trên $[0, +\infty)$ nên

$$\lim_{x \to 0^+} T(x) = T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

Do đó từ (1) suy ra

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = \begin{cases} -\infty \text{ nếu } a_0 < 0, \\ +\infty \text{ nếu } a_0 > 0. \end{cases}$$

14. a) Với $x > 0$, ta có $0 < e^{-x} < 1$. Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ là một cấp số nhân với công bội e^{-x} nên nó hội tụ. Từ đó suy ra rằng chuỗi hàm số đã cho hội tụ với mọi $x > 0$. Với $x = 0$, ta có $u_n(0) = 0$ với mọi n. Vậy chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \geq 0$.

b) $$u_n'(x) = e^{-nx}x^{1-\alpha}(2 - \alpha - nx)\ ;$$

$$u_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \frac{2-\alpha}{n}.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{2-\alpha}{n}$,

$$u_n\left(\frac{2-\alpha}{n}\right) = (2-\alpha)^{2-\alpha} . e^{\alpha-2} . \frac{1}{n^{2-\alpha}},$$

$$|u_n(x)| \leq (2-\alpha)^{2-\alpha}e^{\alpha-2}\frac{1}{n^{2-\alpha}}$$ với mọi $x \geq 0$ và với mọi n.

Nếu $\alpha < 1$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ hội tụ. Do đó, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, chuỗi đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

c) Với $\alpha = 1$, ta được chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$. Với $x > 0$, tổng của chuỗi đã cho là :

$$S(x) = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}$$

Với $x = 0$, ta có $S(0) = 0$. Do đó $S(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ với mọi $x \geq 0$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} S(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1 \neq S(0)$ nên tổng S của chuỗi gián đoạn tại điểm 0. Từ đó suy ra chuỗi không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

15. b) Lấy một số dương h sao cho $h < a < b$. Từ a) suy ra rằng chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[a, b]$. Do đó có thể lấy tích phân từng hạng tử của chuỗi đã cho :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b ne^{-nx}dx = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Big|_a^b$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nb}$$

$$= \frac{1}{e^a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{e^b} \cdot \frac{1}{1 - e^{-b}}$$

$$= \frac{1}{e^a - 1} - \frac{1}{e^b - 1}.$$

16. a) Với $x = 0$, ta có $u_n(0) = 0$ với mọi n. Với $x \neq 0$, chuỗi đã cho là một cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{1 + x^2} < 1$. Do đó chuỗi hội tụ. Vậy chuỗi đã cho hội tụ điểm trên **R**. Ta có

$$v_n = \int_0^1 u_n(x)dx = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2^n(n-1)}.$$

b) Dễ dàng thấy rằng chuỗi $\sum v_n$ không hội tụ. Do đó chuỗi hàm số đã cho không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

17. Dễ dàng thấy rằng chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$ hội tụ đều trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó có thể lấy tích phân từng hạng tử của chuỗi.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}\, dx,$$

$$\frac{1}{2^n} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}\, dx = \frac{1}{2^n} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\cos \frac{x}{2^n}}\, dx = -\ln\cos \frac{x}{2^n} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \ln\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2^n}\right) - \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\right);$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2^n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\right).$$

$$= \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\right)\right), \quad (1)$$

trong đó kí hiệu $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$ chỉ tích

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdots = \lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}\right).$$

Ta có

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}$$

$$= 2^3\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\sin\frac{x}{2^3} = \ldots$$

$$= 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}.$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k} = \sin x \cdot \frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} \sim \sin x\,\frac{1}{2^n \cdot \frac{x}{2^n}} \sim \frac{\sin x}{x}$$ khi

$n \to \infty$, với $x \neq 0$. Do đó

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{x} \text{ với } x \neq 0 \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \ln\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} - \ln\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{3}{2}.$$

18. a) $|u_n(x)| = \dfrac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{n^3}+1} \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$ với mọi $x \geqslant 0$ và mọi $n \geqslant 1$.

$\Rightarrow$ chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$. Vì các hàm số u_n đều liên tục trên $[0, +\infty)$ nên từ đo suy ra rằng tổng S của chuỗi liên tục trên $[0, +\infty)$.

b) $u_n'(x) = \dfrac{-\sqrt{n}\,e^{-\sqrt{n}\,x}}{n^{3/2}+1}$. Giả sử a là một số dương bất kì.

$|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{e^{-\sqrt{n}a}}{n}$ với mọi $x \geqslant a$ và mọi n. Vì chuỗi số dương

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}a}}{n}$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ hội tụ đều trên $[a, +\infty)$. Do đó S có đạo hàm trên $[a, +\infty)$. Vì có thể lấy $a > 0$ nhỏ tùy ý nên S có đạo hàm trên $(0, +\infty)$.

19. a) Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ hội tụ với $x > 1$.

Giả sử $a > 1$. Ta có $u_n'(x) = -\frac{\ln n}{n^x}$;

$$|u_n'(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a} \text{ với mọi } x \geq a.$$

Dễ dàng thấy rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ hội tụ. Theo dấu hiệu Vâyơxtrat, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ hội tụ đều trên $[a, +\infty)$. Do đó tổng S của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ có đạo hàm trên $[a, +\infty)$ và

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad x \geq a \qquad (1)$$

Vì có thể lấy $a > 1$ gần 1 tùy ý nên S có đạo hàm trên $(1, +\infty)$.

Bằng quy nạp, ta chứng minh được S có đạo hàm cấp p với p nguyên dương bất kì trên $(1, +\infty)$ và

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}, \quad x > 1.$$

b) Ta có $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 1$. Chứng minh tương tự như 9b).

20. Áp dụng bài tập A.14.

21. Áp dụng bài tập A.16.

22. a) $\varphi_0 = f$ xác định và liên tục trên $[a, b]$. Giả sử φ_{n-1} xác định và liên tục trên $[a, b]$. Khi đó

$$\varphi_n(x') - \varphi_n(x'') = \int_a^b [K(x', s) - K(x'', s)]\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Hàm số K liên tục trên tập hợp compắc $[a, b] \times [a, b]$ nên liên tục đều trên tập hợp đó : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ sao cho

$(\forall x', x'', s', s'' \in [a, b])$ $|x' - x''| < \delta$ và $|s' - s''| < \delta$ $\Rightarrow |K(x', s') - K(x'', s'')| < \varepsilon$ (2).

Do đó

$(\forall x', x'' \in [a, b])$ $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |K(x', s) - K(x'', s)| < \varepsilon$ với mọi $s \in [a, b]$

$$\Rightarrow |\varphi_n(x') - \varphi(x'')| \leqslant \int_a^b |K(x', s) - K(x'', s)||\varphi_{n-1}(s)|ds$$

$$\leqslant \varepsilon \int_a^b |\varphi_{n-1}(s)|ds.$$

Vậy φ_n liên tục trên $[a, b]$.

b) Đặt $k = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, ta được

$$|\varphi_0(x)| \leqslant k \text{ với mọi } x \in [a, b],$$

$$|\varphi_1(x)| \leqslant \int_a^b |K(x, s)||\varphi_0(s)|ds \leqslant Mk(b - a), \ldots$$

$$|\varphi_n(x)| \leqslant kM^n(b - a)^n.$$

Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n\varphi_n$ trên $[a, b]$. Ta có

$$|\lambda^n\varphi_n(x)| = |\lambda|^n|\varphi_n(x)| \leqslant k(|\lambda|M(b - a))^n \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Nếu $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (|\lambda|M(b-a))^n$ hội tụ. Do đó, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, chuỗi được xét hội tụ đều trên $[a, b]$.

Vì các hàm số $\lambda^n\varphi_n$ đều liên tục trên [a, b] nên tổng ψ của chuỗi liên tục trên [a, b].

$$\text{c) } \lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = \lambda \int_a^b K(x, s)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\varphi_n(s)\Big)ds \qquad (3)$$

Vì với mỗi $x \in [a, b]$, hàm số $s \longmapsto K(x, s)$ bị chặn trên [a, b] nên với mỗi x, chuỗi hàm số $s \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} K(x, s)\lambda^n\varphi_n(s)$ hội tụ đều trên [a, b]. Ngoài ra các hạng tử của chuỗi đều liên tục nên có thể tích phân từng hạng tử của nó. Do đó từ (3) suy ra

$$\lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, s)\varphi_n(s)ds$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}\varphi_{n+1}(x) = \psi(x) - f(x)\ ,\ x \in [a, b].$$

d) Chỉ cần chứng minh hàm số $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$h(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

liên tục. Thật vậy, với $x', x'' \in [a, b]$, ta có

$$|h(x') - h(x'')| \leqslant \int_a^b |K(x', s) - K(x'', s)|\varphi(s)|ds.$$

Vì K liên tục đều trên $[a, b] \times [a, b]$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |K(x', s) - K(x'', s)| < \varepsilon.$$

Do đó

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |h(x') - h(x'')| \leqslant \varepsilon \int_a^b |\varphi(s)|ds.$$

Vậy h liên tục trên [a, b].

ψ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Giả sử ψ_1 và ψ_2 là hai nghiệm của (1). Đặt $\mu = \sup\limits_{x \in [a,b]} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$. Khi đó

$$\psi_1(x) - \psi_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)[\psi_1(s) - \psi_2(s)]ds ;$$

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant |\lambda| M\mu(b - a) \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

$$\Rightarrow \mu \leqslant |\lambda| M\mu(b - a).$$

Nếu $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ thì từ bất đẳng thức trên suy ra $\mu = 0$. Do đó

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

23. Theo giả thiết, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Với mỗi $x \in [0, +\infty)$, dãy số $\left\{\dfrac{1}{n^x}\right\}$ giảm. Ngoài ra $0 < \dfrac{1}{n^x} \leqslant 1$ với mọi $x \geqslant 0$ và với mọi $n \geqslant 1$, tức là dãy hàm số $x \longmapsto \dfrac{1}{n^x}$, $n = 1, 2, \ldots$ bị chặn đều trên $[0, +\infty)$. Do đó, theo dấu hiệu Aben, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

24. Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ hội tụ. Với mỗi $x \in [1, +\infty)$, dãy số $\left\{\dfrac{x^n}{x^n + 1}\right\}$ tăng. Hơn nữa, ta lại có $0 \leqslant \dfrac{x^n}{x^n + 1} \leqslant 1$ với mọi $x \geqslant 1$, mọi n, tức là dãy hàm số $x \longmapsto \dfrac{x^n}{x^n + 1}$, $n = 1, 2, \ldots$ bị chặn đều trên $[1, +\infty)$. Theo dấu hiệu Aben, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[1, +\infty)$. Vì các hạng tử của nó đều là những hàm số liên tục trên $[1, +\infty)$ nên tổng S của chuỗi hàm số liên tục trên $[1, +\infty)$. Do đó

$$\lim_{x \to 1^+} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \lim_{x \to 1^+} \frac{x^n}{x^n + 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2$$

25. $2S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin x \sin kx = \sum_{k=1}^{n} [\cos(k-1)x - \cos(k+1)x]$

$$= 1 + \cos x - \cos nx - \cos(n+1)x.$$

Do đó

$$|S_n(x)| \leq 2 \text{ với mọi } x \in \mathbf{R} \text{ và với mọi } n.$$

Với mỗi $x \geq 0$, dãy số $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+x}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ giảm.

$\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ với mọi $x \geq 0 \Rightarrow$ Dãy hàm số $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n+x}}$, $n = 1, 2, \dots$ hội tụ đều đến 0 trên $[0, +\infty)$.

Theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

26. a) Với mỗi $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ hội tụ theo dấu hiệu Laibnit. Do đó chuỗi đã cho hội tụ tại mọi $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

b) $u_n'(x) = \left(\frac{(-1)^n x}{n+x} \right)' = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ với mọi $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

- u_n' là những hàm số liên tục trên $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$
- Áp dụng dấu hiệu Điriclê, dễ dàng chứng minh được rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ hội tụ đều trên mỗi khoảng $(k, k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Do đó có thể lấy đạo hàm từng hạng tử của chuỗi hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(k, k+1)$, từ đó trên $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, tức là tổng S của chuỗi đã cho có đạo hàm trên $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ và

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}.$$

27. a) Với mỗi $x \in (0, 2\pi)$, dãy $\left\{\frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}\right\}$ giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x} = 0$. Ngoài ra, với mỗi $x \in (0, 2\pi)$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ có dãy tổng riêng bị chặn

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \tag{1}$$

Theo dấu hiệu Điriclê, chuỗi đã cho hội tụ tại mọi $x \in (0, 2\pi)$.

b) Giả sử $[a, b] \subset (0, 2\pi)$. Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ có dãy tổng riêng bị chặn đều trên $[a, b]$. Thật vậy, hàm số $x \longmapsto \left|\sin\frac{x}{2}\right|$ liên tục trên $[a, b]$ nên đạt được giá trị nhỏ nhất m trên đoạn này. Hiển nhiên $m > 0$. Từ (1) suy ra

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{m} \text{ với mọi } x \in [a, b] \text{ và với mọi } n.$$

Ta đã biết với mỗi $x \in (0, 2\pi)$, dãy $\left\{\frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}\right\}$ giảm. Ngoài ra

$$0 \leq \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x} < \frac{2\pi}{2\sqrt{n} - 1} \text{ với mọi } x \in [a, b] \text{ và mọi } n.$$

Do đó dãy hàm số $x \longmapsto \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}$, $n = 1, 2, \ldots$ hội tụ đều đến không trên $[a, b]$.

Theo dấu hiệu hội tụ đều Điriclê, từ đó suy ra chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[a, b]$.

C. Chuỗi hàm số lũy thừa

1. a) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = 1$. Miền hội tụ là : $[-1, 1)$.

b) $R = 1$. Miền hội tụ là $(-1, 1)$.

c) $R = 0$. Miền hội tụ là $\{0\}$.

d) $R = +\infty$. Miền hội tụ là $\mathbf{R}$.

e) $R = 1$.

• Với $x = 1$, ta được chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$. Chuỗi hội tụ nếu $s > 1$, phân kì nếu $s \leq 1$.

• Với $x = -1$, ta được chuỗi số đan dấu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^s}$. Chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $s > 1$, bán hội tụ nếu $s \leq 1$.

Vậy nếu $s > 1$ thì miền hội tụ của chuỗi là $[-1, 1]$, nếu $s \leq 1$ thì miền hội tụ của chuỗi là $[-1, 1)$.

f) Áp dụng dấu hiệu Côsi :

$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |x| \to e|x|$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $e|x| < 1$, tức là $|x| < \frac{1}{e}$, phân kì với $|x| > \frac{1}{e}$.

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $R = \frac{1}{e}$.

• Với $x = \frac{1}{e}$, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$. Đặt $\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$, ta có

$$\ln \alpha_n = -n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= -n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\, 0(1)\right) = -\frac{1}{2} + 0(1) \ (n \to \infty)$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \ln \alpha_n = -\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = e^{-\frac{1}{2}}$. Chuỗi phân kì.

- Tương tự với $x = -\dfrac{1}{e}$, chuỗi phân kì.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là : $\left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$.

g) $R = 4$.

Với $x = \pm 4$, ta có $\dfrac{|u_{n+1}(\pm 4)|}{|u_n(\pm 4)|} = \dfrac{2(n+1)}{2n+1} > 1$ với mọi n. $|u_n(x)| \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi phân kì. Miền hội tụ của chuỗi là $(-4, 4)$.

h) • Nếu $a > b$ thì

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{a^n + b^n} = \frac{|x|^n}{a^n\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]} \sim \left(\frac{|x|}{a}\right)^n \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x| < a$, phân kì với $|x| \geq a$.

- Nếu $a = b$ thì $|u_n(x)| = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|x|}{a}\right)^n$. Chuỗi hội tụ với $|x| < a$, phân kì với $|x| \geq a$. Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \max(a, b)$. Miền hội tụ là $(-R, R)$

i) Với $x \neq 0$, ta có

$\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}|x|^3 \to 2|x|^3$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $2|x|^3 < 1$, tức là $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, phân kì với $|x| > \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

• Với $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ta được chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{(-1)^n}{n+1}$. Chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Laibnit.

• Với $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ta được chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}\,(n+1)}\right)$. Chuỗi phân kì, miền hội tụ của chuỗi là : $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

j) $R = \frac{1}{\sqrt{|a|}}$. Miền hội tụ là $\left(-\frac{1}{\sqrt{|a|}}, \frac{1}{\sqrt{|a|}}\right)$.

2. • Nếu $\alpha > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n^\alpha = \frac{\pi}{2}$. Do đó với $x \neq 0$

$$|u_n(x)| \sim \frac{\pi}{2}|x|^n \ (n \to \infty)$$

Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$, phân kì với $|x| \geqslant 1$. Bán kính hội tụ : $R = 1$.

• Nếu $\alpha = 0$ thì chuỗi đã cho là $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4} x^n$. Chuỗi hội tụ tuyệt đối $|x| < 1$, phân kì với $|x| \geqslant 1$. Bán kính hội tụ $R = 1$.

• Nếu $\alpha < 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = 0$ và $\operatorname{arctg} n^\alpha \sim n^\alpha \ (n \to \infty)$. Với $x \neq 0$,

$$|u_n(x)| \sim n^\alpha |x|^n \ (n \to \infty).$$

Áp dụng dấu hiệu Đalămbe, ta được $R = 1$.

Vậy với mọi $\alpha \in \mathbf{R}$, ta đều có $R = 1$.

Với $x = 1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} n^\alpha$, với $x = -1$, ta được $\sum (-1)^n \operatorname{arc\,tg} n^\alpha$

• Nếu $\alpha \geq 0$ thì $\operatorname{arctg} n^{\alpha} \not\to 0$. Chuỗi đã cho phân kì tại $x = \pm 1$.

• Nếu $\alpha < 0$ thì $\operatorname{arctg} n^{\alpha} \sim n^{\alpha}$ $(n \to \infty)$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n^{\alpha}$ hội tụ với $-\alpha > 1$ tức là $\alpha < -1$ và phân kì với $-1 \leq \alpha < 0$.

Chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} n^{\alpha}$ hội tụ với $\alpha < 0$ theo dấu hiệu Laibnit.

3. $$\lim_{k \to \infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{(2k)^{1/2k}} \left(1 + \frac{2k}{2^{2k}}\right)^{1/2k} = 1\ ;$$

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)^{1/2k+1} = 1\ .$$

Vậy $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Theo định lí Ađama, ta có $R = 1$.

• Với $x = 1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$. Chuỗi hội tụ.

• Với $x = -1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{1}{n}\right)$. Chuỗi phân kì.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là : $(-1, 1]$.

4. $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e \Rightarrow R = \frac{1}{e}$.

• Với $x = \frac{1}{e}$, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{e}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n\right]^n$.

Đặt $u_n = \left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n\right)^n$, ta có

$$u_{2k} = \left(\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}\right)^{2k} \text{ và}$$

$$\ln u_{2k} = 2k\left[-1 + 2k\ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\right]$$

$$= 2k\left[-1 + 2k\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{8k^2} + \frac{1}{k^2}0(1)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} + 0(1)\ (k \to \infty)$$

$\Rightarrow \ln u_{2k} \to -\frac{1}{2}$ khi $k \to \infty \Rightarrow u_{2k} \to e^{-\frac{1}{2}}$ khi $k \to \infty$.

$\Rightarrow u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi số phân kì.

- Với $x = -\frac{1}{e}$, ta cũng có $u_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

5. a) Ta có

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-2)^k}{k^2+1} & \text{với } n = 2k, \\ \dfrac{1}{k^4+1} & \text{với } n = 2k+1. \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{(k^2+1)^{1/2k}} = \sqrt{2},$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k^4+1)^{1/2k+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}. \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ không nguyên tố,} \\ 1 & \text{nếu } n \text{ nguyên tố.} \end{cases}$

Dãy số $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ có hai giới hạn riêng : 0 và 1.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

c) $$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \dfrac{1}{(k+\sqrt{k})^{\frac{1}{3}k}} & \text{với } n = 3k, \\ \left(\dfrac{1}{k}\right)^{k/3k+1} & \text{với } n = 3k+1, \\ \alpha^{k/3k+2} & \text{với } n = 3k+2. \end{cases}$$

Dãy $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ có ba giới hạn riêng : 1, 0, $\alpha^{1/3}$.

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max(1, \alpha^{1/3})$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\max\left(1, \alpha^{1/3}\right)} = \min\left(1, \alpha^{-1/3}\right).$$

6. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} a^{\sqrt{n}/n} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Với x = 1, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$; với x = − 1 ta được $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^{\sqrt{n}}$:

1° Nếu $a \geqslant 1$ thì $a^{\sqrt{n}} \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi đã cho phân kì tại các điểm $x = \pm 1$. Khi đó miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $(-1, 1)$.

2° Giả sử $0 < a < 1$. Ta lấy một số thực $s > 1$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} n^s a^{\sqrt{n}} = 0. \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có

$$\ln(n^s a^{\sqrt{n}}) = s\ln n + \sqrt{n}\ln a \to -\infty \text{ khi } n \to \infty.$$

Từ đó suy ra (1) và ta có

$$n^s a^{\sqrt{n}} < 1, \text{ tức là } a^{\sqrt{n}} < \frac{1}{n^s} \text{ với } n \text{ đủ lớn}$$

$\Rightarrow$ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ hội tụ $\Rightarrow$ Chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ tuyệt đối tại $x = \pm 1$. Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $[-1, 1]$.

7. a) $|u_n(x)| \leqslant |x|^{2n}$ với mọi $n \Rightarrow$ Chuỗi hội tụ với $|x| < 1$.

$|u_n(x)| \geqslant \frac{|x|^{2n}}{3}$ với mọi $n \Rightarrow$ chuỗi phân kì với $|x| > 1$.

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là $R = 1$.

Với $x = \pm 1$, $u_n(x) \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Chuỗi đã cho phân kì tại ± 1. Miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1, 1)$.

b) $(n - e)|x|^{n+1} \leqslant |u_n(x)| \leqslant (n - e^{-1})|x|^{n+1}$.

$\Rightarrow$ Chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$, phân kì với $|x| > 1$ $\Rightarrow R = 1$. Hiển nhiên chuỗi đã cho phân kì tại $x = \pm 1$. Miền hội tụ của nó là $(-1, 1)$.

8. $$u_n(x) = x^n\left(1.\frac{1}{n!} + \frac{2}{n(n-1)\ldots 3} + \cdots + \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} + n\right) \quad (1)$$

Do đó $|u_n(x)| \geqslant n|x|^n$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Tổng $1.\frac{1}{n!} + \frac{2}{n(n-1)\ldots 3} + \ldots + \frac{n-2}{n(n-1)}$ có $n - 2$ số hạng, trong đó $\frac{n-2}{n(n-1)}$ là số hạng lớn nhất. Do đó tổng này nhỏ hơn

$(n - 2)\frac{n-2}{n(n-1)} < 1$. Từ đó suy ra tổng trong dấu ngoặc ở vế phải của (1) nhỏ hơn

$$1 + \frac{n-1}{n} + n < 2 + n.$$

$\Rightarrow |u_n(x)| \leqslant (n+2)|x|^n$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Từ bất đẳng thức đã chứng minh suy ra : $R = 1$.

Với $x = \pm 1$, ta có $n \leqslant |u_n(\pm 1)| \leqslant n + 2$ với mọi n. Chuỗi lũy thừa đã cho phân kì tại các điểm $x = \pm 1$.

9. a) $\frac{1}{e}\int_0^1 x^n dx < a_n < \int_0^1 x^n dx$,

$$\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n+1} \text{ với mọi } n. \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{e}}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \text{ với mọi } n.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là $R = 1$.

- Với $x = 1$, ta được chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Từ (1) suy ra chuỗi này phân kì.

- Với $x = -1$, ta được chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Chuỗi đan dấu hội tụ theo dấu hiệu Laibnit.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $[-1, 1)$.

b) Với $x \neq 0$, ta có

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}|x| \to |x| \text{ khi } n\to\infty.$$

Theo dấu hiệu Đalămbe, từ đó suy ra $R = 1$.

Có thể sử dụng dấu hiệu Ađama : Đặt $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Hiển nhiên

$$1 < a_n < n \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Với $x = 1$, ta được chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; với $x = -1$, ta được $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Vì $a_n \not\to 0$ khi $n \to \infty$ nên cả hai chuỗi số đều phân kì.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $(-1, 1)$.

10. Theo giả thiết, tồn tại $x_o \in \mathbf{R}$, $x_o \neq 0$ sao cho chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n$ hội tụ. Do đó dãy $\{a_n x_o^n\}$ bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$|a_n x_o^n| \leq M \text{ với mọi } n.$$

Ta chứng minh chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ hội tụ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Thật vậy,

$$\left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| \leq \frac{M}{n!} \left| \frac{x}{x_o} \right|^n \text{ với mọi } n.$$

Đặt $\alpha = \left| \frac{x}{x_o} \right|$. Chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} \alpha^n$ hội tụ theo dấu hiệu Đalămbe. Theo dấu hiệu so sánh, từ đó suy ra chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n!} x^n \right|$ hội tụ.

11. Với $|x| < R_1$, các chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ đều hội tụ.

Do đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ hội tụ. Từ đó $R \geq R_1$.

Giả sử $R > R_1$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $R_1 < |x_0| < \min(R, R_2)$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ phân kì, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$ hội tụ và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ hội tụ. Vô lí ! Vậy $R = R_1$.

12. Chuỗi lũy thừa đã cho có cùng bán kính hội tụ với chuỗi đạo hàm của nó $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a^n)x^{n-1}$

và do đó có cùng bán kính hội tụ với chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a^n)x^n \qquad (1)$$

Đó là tổng của hai chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n$. Các chuỗi này có bán kính hội tụ là $R_1 = 1$, $R_2 = \frac{1}{|a|}$.

1° Nếu $R_1 \neq R_2$, tức là $|a| \neq 1$ thì bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là $R = \min\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$.

2° $|a| = 1$

- Nếu $a = 1$ thì chuỗi (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$. Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

- Nếu $a = -1$ thì chuỗi (1) trở thành $\sum_{n=1} 2x^{2n}$. Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Vậy với mọi $a \neq 0$, bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $R = \min\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$.

13. a) Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ là tích của hai chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ cùng có bán kính hội tụ là 1. Do đó bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ là $R \geq 1$.

Mặt khác, ta có $a_0 = s_0$ và $a_n = s_n - s_{n-1}$ với $n \geq 1$. Do đó với $|x| < 1$, ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n .$$

Nếu $|x| < R$ thì từ đẳng thức trên suy ra rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ. Do đó $R \leq 1$. Vậy $R = 1$.

$$T(x) = S(x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{S(x)}{1-x} \text{ với } |x| < 1.$$

b) Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ có cùng bán kính hội tụ với chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} x^{n+1}$. Chuỗi này là một nguyên hàm của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$. Do đó chúng có cùng bán kính hội tụ. Vậy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ có bán kính hội tụ là 1.

14. a) Từ bài tập 11 suy ra điều kiện cần để có bất đẳng thức trong a) là $R_1 = R_2$.

Lấy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^n)$. Hai chuỗi lũy thừa cùng có bán kính hội tụ là 1 còn chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ có bán kính hội tụ là $R = +\infty$.

b) Lấy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$. Chuỗi thứ nhất có bán kính hội tụ là $R_1 = 1$, chuỗi thứ hai có bán kính hội tụ là $R_2 = +\infty$. Tích của hai chuỗi đó là chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ có bán kính hội tụ $R' = +\infty$.

15. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sin n\theta$ có cùng bán kính hội tụ với chuỗi đạo hàm $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \sin n\theta$ của nó, do đó có cùng bán kính hội tụ với chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\theta$. Vậy hai chuỗi lũy thừa đã cho có cùng bán kính hội tụ. Với chuỗi trong a), ta có

$|x^n \sin n\theta| \leq |x|^n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó chuỗi hội tụ tuyệt đối với $|x| < 1$. Với $|x| = 1$, ta có

$|u_n(x)| = |\sin n\theta| \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$ (vì $\theta \neq k\pi$). Do đó chuỗi phân kì. Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

16. a) $u_n(x) = -\frac{10}{3}(x)\left(-\frac{x^2}{10}\right)^n$. Chuỗi đã cho là một cấp số nhân với công bội $q = -\frac{x^2}{10}$. Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi

$$\frac{x^2}{10} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{10}$$

Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $R = \sqrt{10}$.

b) $S(x) = x + \dfrac{10x^3}{3(x^2+10)}$, $|x| < \sqrt{10}$.

17. a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = 1$.

b) Đặt $u_1 = 1$, $u_2 = -x$, ..., $u_{2k} = -x^{3k-2}$, ...

$$S_{2k}(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + \dots + x^{3(k-1)} - x^{3k-2}$$

$$= (1-x)(1 + x^3 + \dots + x^{3(k-1)}) =$$

$$= (1-x)\frac{1-x^{3k}}{1-x^3} = \frac{1-x^{3k}}{1+x+x^2}.$$

Với $|x| < 1$, ta có

$$S(x) = \lim_{k\to\infty} S_{2k}(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

18. a) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ là $R = 1$.

Miền hội tụ của nó là $[-1, 1]$. Chuỗi hội tụ tuyệt đối tại $x = \pm 1$.

b) Miền hội tụ của chuỗi $\sum u_n'$ là $(-1, 1]$.

Miền hội tụ của chuỗi $\sum u_n''$ là $(-1, 1)$.

c) $S''(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $S'(x) = \ln(1+x)$; $S(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$.

19. Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$. Miền hội tụ : $(-1, 1)$.

Lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi. Tổng của chuỗi đạo hàm là $S'(x) = \dfrac{x^2}{1-x^4}$. Từ đó tính được

$$S(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\ ,\ |x| < 1.$$

20. a) Ta viết chuỗi đã cho dưới dạng $x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$;

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ là chuỗi đạo hàm của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ có bán kính hội tụ $R = 1$, miền hội tụ là $(-1, 1)$ và tổng $S(x) = \frac{x}{1-x}$.

Tổng của chuỗi đã cho là $\frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

b) Lấy nguyên hàm từng hạng tử của chuỗi đã cho, ta được chuỗi lũy thừa có tổng là $\frac{x}{(1+x)^2}$, $|x| < 1$. Chuỗi đã cho có tổng là $\frac{1-x}{(1+x)^3}$, $|x| < 1$.

21. $R = 1$. Gọi S là tổng của chuỗi đã cho. Lấy đạo hàm từng hạng tử của chuỗi, ta được

$$S'(x) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)}\ ,\ |x| < 1\ ;$$

$$S''(x) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n-2}\ ,\ |x| < 1\ ;$$

$$S'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ ,\ |x| < 1.$$

Từ đó tính được

$$S''(x) = -\ln(1-x),\ |x| < 1\ ;$$

$$S'(x) = x + (1-x)\ln(1-x),\ |x| < 1\ ;$$

$$S(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2\ln(1-x),\ |x| < 1\ ;$$

$$S(-1) = \frac{5}{4} - 2\ln 2\ ;\ S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{4}.$$

22. a) $R = 1$; $J = [-1, 1]$.

b) Chuỗi hội tụ đều trên J. Tổng S liên tục trên J.

c) $u_n'(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1}$.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} = xT(x),\ |x| < 1.$$

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2} = -\frac{1}{1+x^2},\ |x| < 1\ ;$$

$T(x) = -\,\text{arctg}x$, $|x| < 1$. Do đó

$$S'(x) = -\,x\,\text{arctg}x,\ |x| < 1. \Rightarrow S(x) = -\int_0^x t\,\text{arctg}t\,dt.$$

$$S(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2+1}{2}\,\text{arctg}\,x,\ |x| < 1.$$

Vì S liên tục tại điểm $x = 1$ nên

$$S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2} - \text{arctg}1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4},$$

tức là $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

23. a) $R = 1$. Chuỗi phân kì tại các điểm $x = \pm 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2},\ |x| < 1\ ;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ |x| < 1. \text{ Đặt } T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2},\ |x| < 1.$$

$$x^2T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2};\ (x^2T(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x},\ |x| < 1.$$

$$x^2T(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt = -x - \ln(1-x),\ |x| < 1.$$

$$T(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2} \text{ với } x \neq 0,\ |x| < 1.$$

Tổng của chuỗi đã cho là :

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ với } x = 0, \\ \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(1-x)}{x^2} \text{ với } x \neq 0,\ |x| < 1. \end{cases}$$

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ có bán kính hội tụ $R_1 = 1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n$ có bán kính hội tụ là $R_2 = \frac{1}{|a|}$. Vì $R_1 \neq R_2$ nên bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $R = \min\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$.

Gọi S là tổng của chuỗi đã cho. Với $|x| < R$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x);\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n} = -\ln(1-ax).$$

Do đó

$$S(x) = -\ln[(1-x)(1-ax)],\ |x| < R.$$

c) Áp dụng dấu hiệu Đalămbe, ta tìm được $R = +\infty$. Ta có

$$n^3 = An(n-1)(n-2) + Bn(n-1) + Cn + D,$$

vì $\{x(x-1)(x-2),\ x(x-1),\ x,\ x^0\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 3. Bằng phương pháp hệ số bất định ta tìm được : $A = 1$, $B = 3$, $C = 1$, $D = 0$.

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

$$\Rightarrow \frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!},\ n \geqslant 3.$$

$$S(x) = x + 4x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

$S(x) = (x^3 + 3x^2 + x)e^x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

24. a) Áp dụng dấu hiệu Côsi, ta tính được $R = 1$.

b) Chuỗi đạo hàm của chuỗi đã cho là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n - 1}} x^{n-1}$$

Chuỗi đạo hàm cấp p của chuỗi đã cho là

$$\sum_{n=p}^{\infty} u_n^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{n^{\ln n - 1}} x^{n-p}$$

Với $|x| = 1$, ta có

$$|u_n^{(p)}(x)| = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{n^{\ln n - 1}}$$

$$\leqslant \frac{n^{p-1}}{n^{\ln n - 1}} = \frac{1}{n^{\ln n - p}}$$

Với n đủ lớn, ta có $\ln n - p > 2$, do đó $n^{\ln n - p} > n^2$ và

$$|u_n^{(p)}(\pm 1)| < \frac{1}{n^2}.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=p}^{\infty} u_n^{(p)}(x)$ hội tụ với $|x| = 1$.

25. a) $\dfrac{|x^n \cos ny|}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ với mọi $y \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ với $|x| < 1$. Do đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $R_y \geq 1$. Ta chứng minh $R_y \leq 1$.

Thật vậy, chuỗi đạo hàm của chuỗi lũy thừa đã cho $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^{n-1} \cos ny$ cũng có bán kính hội tụ là R_y. Với $x = 1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cos ny$. Với mọi $y \in \mathbf{R}$, ta có $\cos ny \not\to 0$ khi $n \to \infty$ (vì nếu $\cos ny \to 0$ khi $n \to \infty$ thì trong đẳng thức $\cos 2ny = 2\cos^2 ny - 1$, cho $n \to \infty$, ta được $0 = -1$. Vô lí !). Do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cos ny$ phân kì. Từ đó $R_y \leq 1$. Vậy $R_y = 1$.

b) Miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \cos ny$ hội tụ với $|x| < 1$, $y \in \mathbf{R}$ bất kì.

- Với $x = 1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos ny}{\sqrt{n}}$. Chuỗi này hội tụ với $y \neq 2k\pi$ (theo dấu hiệu Diriclê). Với $y = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, chuỗi phân kì.

- Với $x = -1$, ta được chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos ny}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(y+\pi)}{\sqrt{n}}.$$

Chuỗi hội tụ với $y + \pi \neq 2k\pi$, tức là $y \neq (2k - 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ và phân kì với $y = (2k - 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là :

$\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\} \cup \{(1, y) : y \neq 2k\pi\} \cup \{(-1, y) : y \neq (2k - 1)\pi\}$.

c) $\text{Int}\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$.

- Với mỗi $y \in \mathbf{R}$, chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}$ với biến số x

có bán kính hội tụ $R = 1$. Tổng f của nó có đạo hàm riêng theo x trên $(-1, 1)$ và

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^{n-1} \cos ny .$$

- Với mỗi $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$, chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}$ với

biến số y hội tụ trên $\mathbf{R}$. Chuỗi đạo hàm của nó

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n \sin ny$$

hội tụ đều trên $\mathbf{R}$ theo dấu hiệu Vâyơxtrat vì

$|-\sqrt{n}\, x^n \sin ny| \leqslant \sqrt{n}\, |x|^n$ với mọi n.

Do đó f có đạo hàm riêng theo y và

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n \sin ny .$$

26. a) $\dfrac{1}{2 + x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{2^n}$; $|x| < 2$.

$$\Rightarrow \frac{x^p}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+p}}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2.$$ Lấy tích phân từng hạng tử trên đoạn [0, 1], ta được đẳng thức cần chứng minh.

b) $\frac{10}{3} + 8\ln\frac{2}{3}$.

27. a) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$;

$R = +\infty$;

b) $\frac{1}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+2x}$;

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \ |x| < 1$;

$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots + (-1)^n 2^n x^n + \dots, \ |x| < \frac{1}{2}$.

$$\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2^{n+1} + 1]\, x^{n+1}, \ R = \frac{1}{2}.$$

c) $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots\right); \ |x| < 1.$$

d) $\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x^{3n} - x^{3n+1}); \ R = 1.$$

e) $\text{shxchx} = \frac{1}{2}\,\text{sh}2x$

$$= x + \frac{2^2x^3}{3!} + \frac{2^4x^5}{5!} + \dots + \frac{2^{2k}x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots ;\ R = +\infty.$$

f) $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' =$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots ;\ R = 1.$$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n(2n-1)} x^{2n-1}$; $R = 1$.

h) $\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$;

$$(1-2x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + x + \frac{1.3}{2!}x^2 + \frac{1.3.5}{3!}x^3 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + \dots ;$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + x^2 + \frac{1.3}{2}x^3 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1} + \dots ;$$

$R = \frac{1}{2}$

$((2n-1)!! = 1.3.5\dots(2n-1))$.

28. a) $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right) = e^{-x^2}$. Khai triển e^{-x^2} thành chuỗi lũy thừa sau đó lấy tích phân từng hạng tử, ta được

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} ;\ R = +\infty ;$$

b) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$; $R = +\infty$;

c) $\int\limits_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$; $R = +\infty$.

29. $f'(x) = \frac{-2x}{1 + x^4} = -2x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n}$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{4n+1} \ ; \ R = 1.$$

Lấy nguyên hàm từng hạng tử của chuỗi, ta được

$$f(x) = \lambda + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

Từ $f(0) = \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$ suy ra $\lambda = \frac{\pi}{4}$. Do đó

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{4n+2} \ ; \ R = 1.$$

30. a) $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$; $R_1 = 1$;

$\frac{1}{x - 1} = -1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n - \dots$; $R_2 = 1$.

Nhân hai đẳng thức trên, ta được

$$\frac{\ln(1-x)}{x-1} = x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \dots + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x^n.$$

Chuỗi (1) có bán kính hội tụ $R \geq \min(R_1, R_2) = 1$. Nếu $R > 1$ thì tổng của chuỗi (1), tức là hàm số f liên tục tại điểm $x = 1$. Điều đó không đúng. Vậy $R \leq 1$. Từ đó suy ra $R = 1$.

Có thể lập luận như sau : Với $x = 1$, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$. Vì $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \not\to 0$ khi $n \to \infty$ nên chuỗi phân kì. Vậy $R = 1$.

b) $\frac{e^{-x}}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)x^n$; $R = 1$.

31. a) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Thay $x = \pi$, ta được đẳng thức cần chứng minh.

b) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Thay $x = \pi$, ta được đẳng thức cần chứng minh.

c) $\frac{e^2+1}{2e} = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$.

32. Dễ dàng thấy rằng chuỗi số đã cho là bán hội tụ. Xét chuỗi lũy thừa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2};$$

$f(-1) = S$. Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = 1$. Theo bổ đề Aben (định lí 3.3), hàm số f liên tục tại điểm $x = -1$ và ta có

$$S = \lim_{x\to(-1)^+} f(x).$$

Lấy đạo hàm từng hạng tử trên $(-1, 1)$, ta được

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}.$$

Từ đó ta tìm được

$$f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{x+2}, \ x \in (-1, 1),$$

và

$$S = -\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

33. Ta viết công thức Maclôranh với phần dư dạng tích phân.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \ (1)$$

trong đó

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt, \ x \in [0, R].$$

(Xem Giải tích tập I, chương IV, A.8.6)

Đổi biến số $t = sx$, ta được

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sx)ds.$$

Vì với $x = R$, $n + 1$ số hạng đầu trong (1) đều không âm nên $f(R) \geqslant R_n(R)$, tức là

$$f(R) \geqslant \frac{R^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sR)ds \qquad (2)$$

Vì $f^{(n+2)}(x) \geqslant 0$ trên $[0, R]$ nên $f^{(n+1)}$ tăng trên $[0, R]$. Do đó

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(sR)ds \text{ với mọi } x \in [0, R]. \ (3).$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} f(R) \text{ với } 0 \leqslant x \leqslant R.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \text{ với mọi } x \in [0, R).$$

34. Dễ dàng chứng minh được rằng hàm số $f(x) = \operatorname{tg} x$ có đạo hàm mọi cấp không âm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó, theo định lí Bơcnơxtainơ, chuỗi Maclôranh của f có tổng bằng f(x) với mọi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vì f là một hàm số lẻ, từ đó suy ra rằng f khai triển được thành chuỗi lũy thừa trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

35. Với mỗi n, ta có

$$\lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k + \lim_{x \to R^-} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = S.$$

Vì $a_n \geqslant 0$ với mọi n nên $\lim_{x \to R^-} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \geqslant 0$. Do đó

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leqslant S \text{ với mọi } n.$$

Chuỗi số dương $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ có dãy tổng riêng bị chặn nên hội tụ. Theo định lí 3.3 (bổ đề Aben), ta có $\lim_{x \to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Do đó $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

36. Đặt $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k|a_k|$, ta có $\lim_{n \to \infty} T_n = 0$ (xem bài tập 11 Giải tích tập I chương II, trang 291). Ta cũng có $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = S$ với $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Do đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N sao cho

$$n \geqslant N \Rightarrow |f(x_n) - S| < \frac{\varepsilon}{3},\ T_n < \frac{\varepsilon}{3},\ n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Đặt $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Với $|x| < 1$, ta có

$$S_n - S = f(x) - S + \sum_{k=0}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k .$$

Với mỗi $x \in (0, 1)$ và mỗi k, ta có

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^{k-1}) \leqslant k(1 - x).$$

Do đó với mỗi $x \in (0, 1)$ và $n \geqslant N$, ta có

$$|S_n - S| \leqslant |f(x) - S| + (1 - x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1-x)} .$$

Lấy $x = x_n = 1 - \frac{1}{n}$, ta được

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

D. Chuỗi Phuariê

1. a) Chỉ cần chứng minh f liên tục tại điểm O. Áp dụng quy tắc Lôpitan ta được

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0 = f(0).$$

Vậy f liên tục tại điểm O.

b) Ta biết rằng

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\, du = \pi \text{ với mọi } n.$$

(Xem công thức (1) trong 2.8). Đổi biến số $u = 2x$, ta được

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \pi.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

c) Áp dụng bổ đề 2.5 (Riman), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)x\,dx = 0\text{ , tức là}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\sin(2n+1)x\,dx = 0.$$ Do đó từ công thức trong b) suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Đổi biến số $t = (2n+1)x$, ta được

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

2. a) Vì f là một hàm số lẻ nên chuỗi Phuariê của nó có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx + \frac{2\alpha}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx = -\frac{\pi}{2n}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin n\frac{\pi}{2}.$$

- Với n chẵn, n = 2k,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx = -\frac{\pi}{4k}\cos k\pi = (-1)^{k-1}\frac{\pi}{4k},$$

- Với n lẻ, n = 2k − 1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx dx = \frac{1}{(2k-1)^2}\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right).$$

- Với n = 2k, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2kx dx = \frac{1}{2k}\left((-1)^k - 1\right).$

- Với n = 2k − 1, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2k-1)x dx = \frac{1}{2k-1}.$

Vậy

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k} + \frac{\alpha}{\pi k}((-1)^k - 1);$$

$$b_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{2\alpha}{\pi(2k-1)}.$$

Chuỗi Phuariê của f là :

$$\sum_{k=1}^{\infty}[b_{2k-1}\sin(2k-1)x + b_{2k}\sin 2kx].$$

Vì f thỏa mãn các điều kiện của định lí Đini nên

$$S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

b) $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$

3. a) f là một hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}, \; n \geqslant 2,$$

$$a_1 = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x \sin nx dx;$$

$$b_1 = \frac{1}{2}; \; b_n = 0 \text{ với } n \geqslant 2.$$

Chuỗi Phuariê của f là :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

b) Dễ dàng thấy rằng f thỏa mãn các điều kiện của định lí Đini. Ngoài ra f liên tục trên **R**. Do đó f khai triển được thành chuỗi Phuariê trên **R**.

Chuỗi hội tụ đều trên **R** (theo dấu hiệu Vâyơxtrat).

c) Với $x = \frac{\pi}{2}$, ta có

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}.$$

Do đó

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

4. Hiển nhiên f liên tục phải tại điểm $x = -\pi$.

Với $x \in [-3\pi, -\pi)$, ta có $x + 2\pi \in [-\pi, \pi)$. Do đó $f(x) = f(x + 2\pi) = \cos\alpha(x + 2\pi)$ và $\lim\limits_{x \to (-\pi)^{-}} f(x) = \cos\alpha\pi = f(-\pi) \Rightarrow$ f liên tục trái tại điểm $-\pi$. Vậy f liên tục trên $[-\pi, \pi)$. Vì f là tuần hoàn với chu kì 2π nên f liên tục trên **R**. Ngoài ra dễ dàng thấy rằng f thỏa mãn các điều kiện của định lí Dini. Do đó f khai triển được thành chuỗi Phuariê trên **R**.

Vì f là một hàm số chẵn nên chuỗi Phuariê của f có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x dx = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x \cos nx dx = (-1)^n \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Chuỗi Phuariê của f là :

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos nx.$$

b) Áp dụng dấu hiệu Vâyơxtrat.

c) Cho $x = 0$, ta được

$$f(0) = 1 = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

d) Vì chuỗi Phuariê của f hội tụ đều trên **R** nên có thể lấy tích phân từng hạng tử của chuỗi. Với mọi $x \in [-\pi, \pi)$, ta có

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n \cos ntdt$$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx.$$

$$\frac{\sin \alpha t}{\alpha} \Big|_0^x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx .$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} x \ , \ x \in [-\pi, \pi).$$

5. a) Chuỗi Phuariê của hàm số f là :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} . \qquad (1)$$

Hàm số f thỏa mãn các điều kiện của định lí Đini. Ngoài ra f liên tục trên **R**. Do đó f khai triển được thành chuỗi Phuariê trên **R**.

b) Dễ dàng thấy rằng chuỗi (1) hội tụ đều trên **R**. Ta có

$$|\sin ut| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kut}{4k^2 - 1} \ \text{với mọi } t \in \mathbf{R},$$

$$\Rightarrow 2\ h(t)|\sin ut| = \frac{2}{\pi} h(t) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(t)\cos 2kut}{4k^2 - 1} \ , \ t \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Vì h bị chặn trên [a, b] nên chuỗi hàm số (2) hội tụ đều trên [a, b]. Tích phân từng hạng tử của chuỗi, ta được

$$\int_a^b h(t)|\sin ut|dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b h(t)dt - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \int_a^b h(t)\cos 2kutdt \ (3)$$

Vì chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$ hội tụ nên tồn tại một số nguyên dương N sao cho

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} < \varepsilon.$$

Khi đó
$$\left| \frac{4}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \int_a^b h(t)\cos 2kut\,dt \right|$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \int_a^b |h(t)|\,dt \leqslant K\varepsilon, \qquad (4)$$

với $K = \int_a^b |h(t)|\,dt.$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\left| \int_a^b h(t)|\sin ut|\,dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b h(t)\,dt \right|$$

$$\leqslant \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2 - 1} \left| \int_a^b h(t)\cos 2kut\,dt \right| + K\varepsilon \qquad (5)$$

Vì $\lim\limits_{u \to +\infty} \int_a^b h(t)\cos 2kut\,dt = 0$ nên

$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2 - 1} \left| \int_a^b h(t)\cos 2kut\,dt \right| \to 0$ khi $u \to +\infty$. Do đó tồn tại $A > 0$ sao cho

$$u \geqslant A \Rightarrow \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2 - 1} \left| \int_a^b h(t)\cos 2kut\,dt \right| < \varepsilon.$$

Do đó

$$u \geqslant A \Rightarrow \left| \int_a^b h(t)|\sin ut|\,dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b h(t)\,dt \right| < (1 + K)\varepsilon,$$

tức là ta có đẳng thức cần chứng minh.

6. a) Dễ dàng thấy rằng hàm số F thỏa mãn các điều kiện của định lí Dini. Hàm số gián đoạn tại điểm O. Tại đó, ta có $F(+0) = -\frac{\pi}{2}$. Với $x \in [-2\pi, 0)$, ta có $x + 2\pi \in [0, 2\pi)$. Do đó

$$F(x) = F(x + 2\pi) = \frac{x + 2\pi - \pi}{2} = \frac{x + \pi}{2},$$

và $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, tức là $F(-0) = \frac{\pi}{2}$. Vì

$$\frac{F(+0) + F(-0)}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 = F(0),$$

nên F khai triển được thành chuỗi Phuariê trên $\mathbf{R}$.

Vì F là một hàm số lẻ nên chuỗi Phuariê của nó có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \pi)\sin nx dx = -\frac{1}{n}.$$

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx.$$

Chuỗi hội tụ đều trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (2k\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) $$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right) dx \qquad (1)$$

(Giả sử f triệt tiêu trên $[0, \alpha_0]$ và $[\beta_0, 2\pi]$).

Vì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ hội tụ đều trên $[\alpha_0, \beta_0]$ và f bị chặn trên $[\alpha_0, \beta_0]$ nên chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} f(x) \frac{\sin nx}{n}$ hội tụ đều trên $[\alpha_0, \beta_0]$. Do đó trong (1), cho $n \to \infty$, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x) (-F(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x) \frac{\pi - x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \frac{\pi - x}{2} dx .$$

BÀI TẬP CHƯƠNG X

TÍCH PHÂN SUY RỘNG
TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

A. Tích phân suy rộng

1. Tính các tích phân suy rộng sau :

a) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+x-6)}$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;

c) $\int_1^{+\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} dx$; d) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$;

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x)^2} dx$;

f) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$;

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

h) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$;

i) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$;

j) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2. Xét tính hội tụ của các tích phân sau :

a) $\int_2^{+\infty} \frac{5x+1}{x^2-2} dx$;

b) $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^5+3x-2}} dx$;

c) $\int_1^{+\infty} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} dx$;

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\left(e^{1/x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

f) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$;

g) $\int_1^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$;

h) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{2}{x}\right) dx$.

3. Cho hai số thực α, β. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} dx$$

là hội tụ nếu $\beta > 1$ hoặc $\beta = 1$ và $\alpha < -1$, phân kì nếu $\beta < 1$ hoặc $\beta = 1$ và $\alpha \geqslant -1$.

4. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$;

c) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$;

d) $\int_0^1 x\ln^2 x\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

f) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

g) $\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$;

h) $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

5. Xét tính hội tụ của các tích phân sau :

a) $\int_0^1 \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$;

b) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}$;

c) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)x}$;

d) $\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$;

e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

f) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(1-x^2)}$;

g) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

h) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$;

i) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x^{5/2}\sin x}\,dx$;

j) $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$;

l) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2}}$;

m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}$;

n) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$;

o) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$;   p) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx$;

q) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$;   r) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}$, $n > 1$.

6. Với các giá trị nào của $\alpha \in \mathbf{R}$, tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha - 1}}{1 + x} dx$$

hội tụ ?

7. Với các giá trị nào của n, tích phân

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}$$

hội tụ ? Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

8. Cho hàm số f liên tục trên khoảng $[0, +\infty)$. Đặt

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt & \text{với } x > 0, \\ 0 \text{ với } x = 0 \end{cases}$$

a) Giả sử tích phân $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và A là giá trị của nó. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x)$. Cho $A \neq 0$. Xét tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} F(x)dx$.

b) Giả sử A là một số thực bất kì. Xét tính hội tụ của tích phân

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)dx .$$

9. Chứng minh rằng với mọi a > 0, ta đều có

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx < \frac{1}{a} e^{-a^2}.$$

10. Xét tính hội tụ tuyệt đối của tích phân

$$\int_1^{+\infty} (\sin x - 2\cos x - 1) \frac{x}{\sqrt{x^5 + 3x^2 - 3}} dx.$$

11. Chứng minh rằng tích phân sau hội tụ tuyệt đối :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) dx.$$

12. a) Xét tính hội tụ tuyệt đối của các tích phân sau :

$$I = \int_0^1 \cos\frac{1}{x} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \text{ và } J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{x}} dx$$

b) Áp dụng công thức tích phân từng phần, hãy chứng minh rằng tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ hội tụ.

13. a) Chứng minh rằng tích phân

$$I(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}\ln x}$$

hội tụ với mọi số dương a < 1.

b) Tìm $\lim_{a \to 0^+} I(a)\ln a$.

14. Cho hai hàm số f, g : [a, +∞) → **R** thỏa mãn các điều kiện sau :

a) f liên tục trên [a, +∞) và hàm số

$b \mapsto F(b) = \int_a^b f(x)dx$ bị chặn trên $[a, +\infty)$, tức là tồn tại một số K sao cho

$$|F(b)| \leq K \text{ với mọi } b \geq a,$$

b) g có đạo hàm liên tục trên $[a, +\infty)$, tích phân $\int_a^{+\infty} g'(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Chứng minh rằng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

15. Với các giá trị nào của p, q ∈ **R**, các tích phân sau hội tụ :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$;

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arc\,tg} x}{x^q + 2} dx$ $(q > 0)$;

d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

16. Với giá trị nào của $\alpha \in \mathbf{R}$, tích phân sau hội tụ :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x^\alpha} dx \ ?$$

17*. Với các giá trị nào của $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, tích phân

$$I(\alpha, \beta) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1 + x^\beta)}$$

hội tụ ? Tính $I(1, \beta)$.

18. Xét tính hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các tích phân sau :

a) $\int_1^{+\infty} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$;

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x + 1} dx$;

c) $\int_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)dx$; d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x}\,dx$.

19. a) Cho một số $\alpha > 0$. Chứng minh rằng nếu f là một hàm số liên tục trên $[1, +\infty)$ và tích phân $\int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

b) Giả sử $P_n(x)$ là một đa thức sao cho $P_n(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$. Chứng minh rằng tích phân $\int_0^{+\infty} P_n(x)\sin x dx$ phân kì $(n > 0)$.

20. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1 + t^{-4}}\,dt}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln \frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \right)$,

trong đó $\alpha > 0$ và f liên tục trên $[0, 1]$, $f(0) \neq 0$.

21.* Cho hàm số f có đạo hàm liên tục và bị chặn trên khoảng $[a, +\infty)$. Ngoài ra tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Chứng minh rằng

a) Tích phân $I = \int f'(x)f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

b) Hàm số f^2 có giới hạn hữu hạn tại $+\infty$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = 0$.

22.* Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ và tích phân

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$$

hội tụ với mọi số dương α, a và b là hai số dương sao cho $a < b$.

a) Chứng minh rằng tích phân $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$ hội tụ và tính giá trị của nó.

b) Chứng minh rằng tích phân $\displaystyle\int_{0}^{\alpha} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$ hội tụ và giá trị của nó bằng $f(0)\ln\dfrac{b}{a} + \displaystyle\int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t}\, dt$.

Từ đó suy ra sự hội tụ và giá trị của tích phân $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx$.

23. a) Chứng minh rằng tích phân

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$$

hội tụ và

$$I = J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$$

b) Tính I.

24.* a) Chứng minh rằng tích phân $I_n = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin^{2n} x dx$ hội tụ.

b) Tìm hệ thức giữa I_n và I_{n-1}. Từ đó suy ra

$$0 < I_n < u_n, \text{ với } u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Tính $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

25.* Chứng minh rằng tích phân

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^\alpha)}$$

không phụ thuộc vào α (α là một số thực cho trước bất kì).

B. Tích phân phụ thuộc tham số

1. Chứng minh rằng hàm số

$$F(t) = \int_0^1 \frac{tf(x)}{t^2 + x^2}\, dx$$

liên tục trên $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ và gián đoạn tại điểm $t = 0$, biết rằng hàm số f liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$.

2. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{t \to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + t^2}\, dx$; b) $\lim\limits_{t \to 0} \int_{t}^{1+t} \frac{dx}{1 + x^2 + t^2}$.

3. a) Tính tích phân

$$I(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)}, \ a \neq 1, \ a > 0.$$

b) Từ đó tính

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

4. Cho hàm số $I(t) = \int_0^t \frac{x}{t^2} e^{-x^2/t^2} dx$.

Có thể tìm $\lim_{t \to 0} I(t)$ bằng cách chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân được không ? Giải thích kết quả.

5. a) Chứng minh rằng hàm số

$$J(t) = \int_0^a \frac{dx}{t + x^2}$$

có đạo hàm mọi cấp trên $(0, +\infty)$, a là một số dương cho trước.

Tìm hệ thức giữa $J^{(n-1)}(t)$ và $I_n = \int_0^a \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$.

b) Tính $\int_0^a \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

6. Giả sử f là một hàm số liên tục trên [a, b] và I là hàm số xác định bởi $I(t) = \int_a^t (t - x)f(x)dx$, $t \in [a, b]$.

Tính $I''(t)$.

7. Cho hàm số

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)d\theta, \; x \in (-1, 1).$$

a) Tính $I'(x)$.

b) Chứng minh rằng I là một hàm hằng.

(Thực hiện phép đổi biến số $t = \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$)

8. Giả sử $f : (u, v) \mapsto f(u, v)$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng hàm số

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x + \alpha, x - \alpha)dx, \ \alpha \in \mathbf{R}$$

có đạo hàm trên **R** và

$$I'(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2\int_0^{\alpha} f_u'(x + \alpha, x - \alpha)dx.$$

9. Giả sử f là một hàm số liên tục trên **R**.

a) Chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x + \lambda)dx = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(x)dx \ , \lambda \in \mathbf{R}.$$

b) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số

$$F(x) = \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta)\, d\eta,$$

h là một số dương cho trước.

10. Tìm các điểm cực tiểu của hàm số

$$I(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx.$$

11. a) Tính tích phân

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x}, \ \alpha > 0, \beta > 0.$$

b) Sử dụng phép lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, hãy tính tích phân

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x)^2}.$$

12. Cho hai hàm số

$$f(t) = \left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 \text{ và } g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx.$$

a) Tìm đạo hàm của các hàm số đó. Từ đó suy ra

$$f(t) + g(t) = C,$$

C là một hằng số thực.

b) Tìm $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$. Từ đó tính tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

13. Sử dụng phép lấy đạo hàm dưới dấu tích phân, hãy tính tích phân

$$I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}, \ |a| < 1.$$

14. Chứng minh rằng tích phân

$$I(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx$$

hội tụ đều trên đoạn $[0, \beta]$ với mọi $\beta > 0$ nhưng không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

15. Xét tính hội tụ đều của tích phân

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^t}$$

trên các khoảng

a) $[a, +\infty)$ với $a > 1$,

b) $(1, +\infty)$.

16. Xét tính hội tụ đều của tích phân

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^t}$$

trên khoảng $(0, 1)$.

17. Xét tính hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ của các tích phân sau :

a) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx$; b) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}$.

18. Chứng minh rằng tích phân

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

hội tụ đều trên mọi đoạn $[a, b]$ không chứa điểm O và không hội tụ đều trên mọi đoạn $[a, b]$ chứa điểm O.

19. Xét tính hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ của các tích phân sau :

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$; b) $I(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p}\, dx$.

20. Xét tính hội tụ đều của tích phân

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$

trên $[0, +\infty)$.

21. Chứng minh rằng hàm số

$$I(t) = \int\limits_0^{+\infty} t e^{-t^2 x^2} dx$$

gián đoạn tại điểm $t = 0$. Xét tính hội tụ đều của tích phân trên đoạn $[0, 1]$.

22. a) Chứng minh rằng hàm số

$$I(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1 + x^2)} \sin t dx$$

gián đoạn tại điểm $t = 0$.

b) Tích phân $I(t)$ có hội tụ đều trên $\mathbf{R}$ không ?

23. Tính tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{tdx}{1 + t^2x^2}$$

Xét tính hội tụ đều của tích phân I(t) trên một đoạn chứa điểm O.

24. Tính tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1 + t^2x^2}\,dx\ ,\ t \in \mathbf{R}.$$

Xét tính liên tục của hàm số I trên **R**. Giải thích kết quả.

25. Chứng minh rằng hàm số

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\,dx$$

liên tục trên **R**.

26. Chứng minh rằng

a) Hàm số

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^\alpha}$$

liên tục trên $(2, +\infty)$.

b) Hàm số

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

liên tục trên $(0, +\infty)$.

27.* Chứng minh rằng hàm số

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1 + x^2}\,dx$$

xác định và liên tục trên **R**.

Tính I(0) và chứng minh rằng $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = 0$.

28. Cho tích phân

$$I = \int_0^{+\infty} dt \int_1^2 e^{-tx} dx.$$

Chứng minh rằng có thể đổi thứ tự phép lấy tích phân. Từ đó suy ra giá trị của tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$$

29. a) Tính tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} (2tx - t^2x^2)e^{-tx}dx, \ t \geq 0.$$

b) So sánh hai tích phân

$$\int_0^1 I(t)dt \text{ và } \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 (2tx - t^2x^2)e^{-tx}dt.$$

Tích phân I(t) có hội tụ đều đoạn [0, 1] không ?

30. Cho tích phân

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dx, \ t > 0.$$

a) Chứng minh rằng có thể nhận được đạo hàm cấp n của hàm số I bằng cách lấy đạo hàm n lần dưới dấu tích phân.

b) Từ đó suy ra

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}, \ t > 0$$

31. Chứng minh rằng nếu **n** là một số nguyên lớn hơn 1 thì hàm số

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+t^2)^n}\,dx$$

có đạo hàm mọi cấp trên $(0, +\infty)$ và

$$I_n'(t) = -2ntI_{n+1}(t),\ t > 0.$$

32. Cho hàm số

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos tx\,dx,\ t \in \mathbf{R}.$$

a) Chứng minh rằng $I'(t) = -\dfrac{1}{2}\,tI(t),\ t \in \mathbf{R}$.

b) Tính I(t). Từ đó chứng minh công thức

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx^2}\cos tx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}\ e^{-t^2/4c},\ c > 0.$$

33. Cho hàm số

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}\,dx,\ t \geq 0.$$

a) Chứng minh rằng $I'(t) = -2I(t),\ t > 0$.

b) Tìm I(t). Từ đó chứng minh công thức

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2|t|} \text{ với mọi } t \in \mathbf{R}.$$

34. Tính tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

bằng cách lấy đạo hàm dưới dấu tích phân.

35. Áp dụng công thức $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, chứng minh rằng

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \text{ với mọi } t > 0.$$

Từ đó chứng minh công thức

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx = \frac{1.3...(2n-1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

BÀI GIẢI, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ CHƯƠNG X

A. Tích phân suy rộng

1. a) $I(b) = \int_3^b \frac{dx}{(x+1)(x^2+x-6)}$

$$= \frac{1}{30}\int_3^b \left(\frac{-5}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{30}\ln\frac{(x+3)^3(x-2)^2}{(x+1)^5}\Big|_3^b.$$

Tích phân đã cho là

$$I = \lim_{b\to+\infty} I(b) = -\frac{1}{30}\ln\frac{6^3}{4^5} = -\frac{1}{30}\ln\frac{3^3}{2^7}.$$

b) $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 =$

$$= (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1);$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{(x^2+1-x\sqrt{2})+x\sqrt{2}}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)} =$$

$$= \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{x\sqrt{2}}{x^4+1}\ ;$$

$$I(b) = \int_0^b \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)\Big|_0^b + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\Big|_0^b\ ;$$

$$I = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

c) $I = +\infty$ (áp dụng công thức tích phân từng phần).

d) $I = 2$ (áp dụng công thức tích phân từng phần).

e) Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được

$$I(b) = \int_0^b \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x)^2}\,dx = -\int_0^b \operatorname{arc\,tg} x\, d\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}\Big|_0^b + \int_0^b \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\operatorname{arc\,tg} b}{1+b} + \frac{1}{2}\int_0^b \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arc\,tg} b}{1+b} + \frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} b\ ;$$

$$I = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \frac{\pi}{4}.$$

f) $$\frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \frac{1}{x^6\sqrt{\dfrac{1}{x^{10}}+\dfrac{1}{x^5}+1}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{\left(\dfrac{1}{x^5}\right)'}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{x^5}\right)^2+\dfrac{1}{x^5}+1}}.$$

Đổi biến số $t = \frac{1}{x^5}$, ta được

$$I = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{5}\ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\right)\Big|_0^1 ;$$

$$I = \frac{1}{5}\ln\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

g) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} ;$$

$$I(b) = 2\int_0^b \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{2}{3}\int_0^b \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\operatorname{arc\,tg} b - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{2}\right) ;$$

$$I = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \frac{\pi}{6}.$$

h) Đổi biến số $t = \operatorname{arctg}x$, ta được

$$dt = \frac{dx}{1+x^2} ; \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t \ (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}) ;$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt = (t\sin t + \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

i) Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt

$$u = x^n,\ dv = e^{-x}dx,$$

ta được

$$I_n(b) = \int_0^b x^n e^{-x}dx =$$

$$= -b^n e^{-b} + n\int_0^b x^{n-1}e^{-x}dx.$$

$$I_n = \lim_{b \to +\infty} I_n(b) = n\, I_{n-1}\ ;$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1\ ;\ I_n = n!.$$

j) Đổi biến số $t = \sqrt{1 + x^2}$, ta được $t^2 = 1 + x^2$; $tdt = xdx$.

$$I(b) = \int_1^b \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+b^2}} \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+b^2}-1}{\sqrt{1+b^2}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\ ;$$

$$I = \lim_{b \to +\infty} I(b) = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\ .$$

2. a) $\dfrac{5x+1}{x^2-2} \sim \dfrac{5}{x}$ $(x \to +\infty)$. Vì $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ phân kì nên tích phân đã cho phân kì.

b) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^5+3x-2}} \sim \dfrac{x}{x^{5/2}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ $(x \to +\infty)$. Vì $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.

c) $\dfrac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2+1} \sim \dfrac{x\cdot\frac{1}{x}}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ $(x \to +\infty)$. Tích phân đã cho hội tụ.

d) $$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}0(1),$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}0(1)\ (x \to +\infty),$$

$$e^{1/x} - \cos\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}0(1)\ (x \to +\infty)\ ;$$

$$\frac{1}{x}\left(e^{1/x} - \cos\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^2} \ (x \to +\infty).$$ Tích phân đã cho hội tụ.

e) $\dfrac{\ln(1+x)}{x} > \dfrac{1}{x}$ với mọi $x > e - 1$. Vì tích phân $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kì nên theo dấu hiệu so sánh, tích phân đã cho phân kì.

f) Lấy một số thực α sao cho $1 < \alpha < 2$. Áp dụng quy tắc Lôpitan, dễ dàng chứng minh được

$$x^\alpha . \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{\ln(1+x)}{x^{2-\alpha}} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Do đó

$$x^\alpha . \frac{\ln(1+x)}{x^2} \leqslant 1 \text{ với } x > 0 \text{ đủ lớn.}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\ln(1+x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \text{ với } x > 0 \text{ đủ lớn.}$$

Vì $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh, từ đó suy ra tích phân đã cho hội tụ.

g) Lấy một số thực $\alpha > 1$. Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta được

$$x^\alpha . (x^3 e^{-x}) = \frac{x^{\alpha+3}}{e^x} \to 0 \text{ khi } x \to +\infty.$$

Do đó

$$0 < x^3 e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^\alpha} \text{ với } x > 0 \text{ đủ lớn.}$$

Theo dấu hiệu so sánh, từ đó suy ra tích phân đã cho hội tụ.

h) $\cos\dfrac{2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\, 0(1) \ (x \to +\infty)$

$$\Rightarrow 1 - \cos\frac{2}{x} \sim \frac{2}{x^2} \ (x \to +\infty).$$ Tích phân đã cho hội tụ.

3. • Giả sử $\beta > 1$. Gọi s là một số thực sao cho $1 < s < \beta$. Khi đó

$$\lim_{x \to +\infty} x^s \cdot \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^{\beta - s}} = 0.$$

Do đó

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \leqslant \frac{1}{x^s} \text{ với } x > 0 \text{ đủ lớn.}$$

Theo dấu hiệu so sánh từ đó suy ra rằng tích phân đã cho hội tụ.

• Nếu $\beta = 1$ thì đổi biến số $t = \ln x$, ta được

$$\int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t^{-\alpha}} dt.$$

Tích phân hội tụ khi và chỉ khi $-\alpha > 1$, tức là $\alpha < -1$.

• Giả sử $\beta < 1$. Gọi r là một số thực sao cho $\beta < r < 1$. Khi đó $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r \cdot \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x \to +\infty} [x^{r-\beta} (\ln x)^\alpha] = +\infty$

Do đó

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \geqslant \frac{1}{x^r} \text{ với } x > 0 \text{ đủ lớn.}$$

Theo dấu hiệu so sánh, từ đó suy ra tích phân đã cho phân kì.

4. a) Với mọi $b \in (0, 1)$, ta có

$$\int_0^b \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + b}{1 - b} \to +\infty$$

khi $b \to 1^-$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2} = +\infty.$

b) Với mọi $b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $\int_0^b \operatorname{tg}x dx = \int_0^b \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln\cos b \to +\infty$

khi $b \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx = +\infty$.

c) $-\ln 2$. (Áp dụng công thức tích phân từng phần).

d) Với mọi số thực $\delta \in (0, 1)$, ta có

$$I(\delta) = \int_\delta^1 x\ln^2 x dx = -\frac{1}{2}\delta^2\ln^2\delta + \frac{1}{2}\delta^2\ln\delta + \frac{1}{4} - \frac{\delta^2}{4}.$$

$$\lim_{\delta\to 0^+} I(\delta) = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \int_0^1 x\ln^2 x dx = \frac{1}{4}.$$

e) Với mọi số thực α, β sao cho $0 < \alpha < \beta < 1$, ta có

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x - 1)\Big|_\alpha^\beta$$

$$= \arcsin(2\beta - 1) - \arcsin(2\alpha - 1);$$

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0^+\\ \beta\to 1^-}} I(\alpha, \beta) = \pi. \text{ Vậy } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

f) Với mọi số thực b sao cho $0 < b < 1$, đặt

$$I(b) = \int_0^b \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

Đổi biến số $t = \sqrt{1 - x}$, ta được

$$I(b) = -2\int_1^{\sqrt{1-b}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} 1 - 2\operatorname{arctg}\sqrt{1-b};$$

$\lim\limits_{b \to 1^-} I(b) = \dfrac{\pi}{2}$. Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}$.

g) Với mọi số thực α, β sao cho $-3 < \alpha < \beta < 3$, ta có

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = -\int_\alpha^\beta \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2}\right)\Big|_\alpha^\beta$$

$$\lim_{\substack{\alpha \to (-3)^+ \\ \beta \to 3^-}} I(\alpha, \beta) = \frac{9}{2}\pi. \text{ Vậy } \int_{-3}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\pi.$$

h) Áp dụng công thức tích phân từng phần, với mọi số thực α, β sao cho $0 < \alpha < \beta$, ta có

$$I(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \left(\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\ln x}{2(1+x^2)}\right)\Big|_\alpha^\beta .$$

$$\lim_{\substack{\beta \to +\infty \\ \alpha \to 0^+}} I(\alpha, \beta) = \lim_{\alpha \to 0^+}\left[\frac{\ln\alpha}{2(1+\alpha^2)} - \frac{1}{4}\ln\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\alpha \to 0^+}\left(\frac{\alpha^2\ln\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+\alpha^2}\right) = 0.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = 0$.

5. a) $\dfrac{x}{\sin^2 x} \sim \dfrac{1}{x}$ $(x \to 0)$. Tích phân đã cho phân kì.

b) $\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x \to 0)$. Tích phân đã cho hội tụ.

c) phân kì ;

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} \ln x) = 0$; $x = 0$ là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số dưới dấu tích phân f. Do đó f khả tích trên $[0, 1]$.

e) Tích phân hội tụ. Có thể áp dụng định nghĩa hoặc đổi biến số : Đặt $t = 1 - x$, ta được

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

f) Phân kì.

g) $$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = I_1 + I_2,$$

với $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Dễ thấy I_1 hội tụ. Với I_2, đổi biến số $t = 1 - x$, ta được

$$\frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\ln x}{(1+x)^{3/2}\sqrt{1-x}} = \frac{\ln(1-t)}{(2-t)^{3/2}\sqrt{t}};$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{(2-t)^{3/2}\sqrt{t}}\,dt.$$

Hàm số dưới dấu tích phân lấy các giá trị âm với mọi $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$;

$$\frac{\ln(1-t)}{(2-t)^{3/2}\sqrt{t}} \sim -\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{t} \quad (t \to 0^+)$$

I_2 hội tụ. Vậy tích phân đã cho hội tụ.

h) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x} = I_1 + I_2$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ nên tích phân $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x}$ hội tụ.

Với $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x}$, đổi biến số $x = 1 - t$, ta được

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\ln(1-t)}$$

Ta có tích phân của một hàm số âm trên khoảng $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Vì $\frac{1}{\ln(1-t)} \sim -\frac{1}{t}$ $(t \to 0^+)$ nên I_2 phân kì. Do đó I phân kì.

i) phân kì.

j) hội tụ.

k) Đổi biến số $t = \operatorname{tg}x$, ta được

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg}x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt \text{ ; I hội tụ.}$$

l) $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2}} = I_1 + I_2$.

Vì $\frac{1}{\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{x}$ $(x \to 0)$ nên I_1 phân kì. Vì $\frac{1}{\sqrt{x^3+x^2}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ $(x \to +\infty)$ nên I_2 hội tụ. Do đó I phân kì.

m) Đổi biến số $x = \frac{\pi}{2} - t$, ta được

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \cos t}} \; ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{1}{\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}} \sim \frac{\sqrt{2}}{t} \; (t \to 0^+).$$

Tích phân đã cho phân kì.

n) $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ phân kì, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ hội tụ. Do đó I phân kì.

o) $\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} < 0$ với mọi $x \in \left(0 \, , \, \frac{\pi}{2}\right)$. Nếu α là một số thực sao cho $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ thì

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^{\alpha} \cdot \frac{\ln(\sin x)}{x^{1/2}} \right) = 0.$$

Từ đó suy ra tích phân đã cho hội tụ.

p) $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1 - x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx = I_1 + I_2$.

Dễ dàng thấy rằng I_1 hội tụ và

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó I_2 hội tụ. Vậy I hội tụ.

q) $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = I_1 + I_2$.

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ nên hàm số $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ khả tích trên [0, 1], tức là I_1 hữu hạn. Với mọi $x \geq 1$, ta có

$$0 \leqslant \frac{1-\cos x}{x^2} \leqslant \frac{2}{x^2}.$$

Do đó I_2 hội tụ. Vậy I hội tụ.

r) Ta có

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

Do đó

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/n}} \quad (x \to 1^-)$$

Vì với $n > 1$, ta có $\frac{1}{n} < 1$ nên tích phân đã cho hội tụ.

6. $0 < \alpha < 1$.

7. Dễ thấy với $n \leqslant 0$, I_n phân kì. Với $n > 0$,

$$\frac{1}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^n} \quad (x \to +\infty)$$

I_n hội tụ với $n > 1$. Ta có

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \qquad (1)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^n} = 0$. (2)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1 - \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx\ ;$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx < \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{1+x^n} = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$.

8. a) Hiển nhiên $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Ta có

$$A = \int\limits_0^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_0^{x} f(t)dt + \int\limits_x^{+\infty} f(t)dt.$$

Do đó

$$F(x) = \frac{A - \int\limits_x^{+\infty} f(t)dt}{x}\ .$$

Với $A \neq 0$, ta có

$$F(x) = \frac{A}{x}[1 + 0(1)] \quad (x \to +\infty)$$

Do đó $F(x) \sim \dfrac{A}{x}$ $(x \to +\infty)$.

Vậy tích phân $\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx$ phân kì.

b) Từ định nghĩa của F suy ra rằng tồn tại một số M sao cho

$$F^2(x) \leqslant \frac{M}{x^2} \text{ với } x \text{ đủ lớn.}$$

Do đó $\int\limits_0^{+\infty} F^2(x)dx$ hội tụ (điều này vẫn đúng với $A = 0$).

9. Với mọi $x > a$, ta có

$$ax < x^2 \Rightarrow e^{-ax} > e^{-x^2} \qquad (1)$$

Vì $x \longmapsto e^{-ax}$ và $x \longmapsto e^{-x^2}$ là hai hàm số liên tục và dương trên $[0, +\infty)$ nên hai tích phân $\int\limits_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} e^{-ax}dx$ đều tồn tại. Từ (1) suy ra $\int\limits_a^{+\infty} e^{-x^2}dx < \int\limits_a^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a}e^{-a^2}$.

10. $\left|(\sin x - 2\cos x - 1)\dfrac{x}{\sqrt{x^5 + 3x^2 - 3}}\right| \leqslant 4\dfrac{x}{\sqrt{x^5 + 3x^2 - 3}}$

với mọi $x \geqslant 1$.

Vì $$\frac{x}{\sqrt{x^5 + 3x^2 - 3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad (x \to +\infty)$$

và $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

11. Đổi biến số $t = \dfrac{1}{\cos x}$, ta được

$$x = \arccos\frac{1}{t}, \quad dx = \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} \text{ và}$$

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \int\limits_1^{2} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} + \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin t dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = I_1 + I_2$$

Ta có

$$\left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t^2-1}}\right| \leqslant \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \text{ với mọi } t > 1.$$

Vì

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{t\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-1}} \ (t \to 1^+)$$

và tích phân $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ hội tụ nên I_1 hội tụ tuyệt đối.

Vì

$$\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \sim \frac{1}{t^{3/2}} \ (t \to +\infty)$$

và tích phân $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ hội tụ nên I_2 hội tụ tuyệt đối.

Vậy I hội tụ tuyệt đối.

12. a) Ta có

$$\left|\cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \text{ với mọi } x \in (0, 1].$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ $(x \to 0^+)$ nên I hội tụ tuyệt đối.

$$J = \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{x}}dx = J_1 + J_2$$

Vì $\frac{\sin x}{x\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $(x \to 0^+)$ nên J_1 hội tụ.

Từ

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt[3]{x}}\right| \leqslant \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{4/3}} \ (x \to +\infty).$$

suy ra J_2 hội tụ tuyệt đối. Vậy J hội tụ tuyệt đối.

b) Áp dụng công thức tích phân từng phần, với mọi $b > 1$, ta có

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_1^b \frac{1}{x}\,d(\cos x) = \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Vì tích phân $\int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ hội tụ tuyệt đối, từ đẳng thức trên dễ dàng suy ra rằng tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ hội tụ.

13. a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Từ đó suy ra $|\ln x| > 1$ với $x > 0$ đủ nhỏ. Do đó

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right| < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0 \text{ đủ nhỏ.}$$

Vậy $I(a)$ hội tụ tuyệt đối với $0 < a < 1$.

b) Đổi biến số $t = \sqrt{x}$, ta được

$$I(a) = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{dt}{\ln t}.$$

Hiển nhiên hàm số $f : [0, \sqrt{a}] \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln t} & \text{với } 0 < t \leq \sqrt{a}, \\ 0 & \text{với } t = 0 \end{cases}$$

liên tục trên $[0, \sqrt{a}]$. Theo định lí về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại một số thực $c \in (0, \sqrt{a})$ sao cho $I(a) = \frac{\sqrt{a}}{\ln c}$. Do đó

$$I(a)\ln a = \frac{\sqrt{a}\ln a}{\ln c}.$$

Khi $a \to 0^+$, ta có $\sqrt{a}\ln a \to 0$ và $\ln c \to -\infty$. Do đó $\lim I(a)\ln a = 0$.

14. Áp dụng công thức tích phân từng phần trên đoạn [a, b], b > a, ta được

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = [F(x)g(x)]\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

$$= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Cho $b \to +\infty$. Vì F(b) bị chặn và $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b) = 0$ nên $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)g(b) = 0$. Ngoài ra, vì

$$|F(x)g'(x)| \leqslant K|g'(x)| \text{ với mọi } x \geqslant a$$

nên tích phân $\int_0^{+\infty} F(x)g'(x)dx$ hội tụ tuyệt đối. Do đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

15. a) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = I_1 + I_2$

Nếu p = q thì I_1 hội tụ với p < 1, I_2 hội tụ với p > 1. Do đó I phân kì. Giả sử p > q. Khi đó

- $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^q(1 + x^{p-q})}$;

$$\frac{1}{x^q(1 + x^{p-q})} \sim \frac{1}{x^q} \quad (x \to 0^+).$$

I_1 hội tụ với q < 1, phân kì với $q \geqslant 1$.

- $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1 + x^{q-p})}$;

$$\frac{1}{x^p(1 + x^{q-p})} \sim \frac{1}{x^p} \quad (x \to +\infty).$$

I_2 hội tụ với $p > 1$, phân kì với $p \leqslant 1$.

Vậy I hội tụ với $p > 1$ và $q < 1$ hoặc $p < 1$ và $q > 1$.

b) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = I_1 + I_2$$

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p} \quad (x \to 0^+),$$

I_1 hội tụ với $p < 1$, phân kì với $p \geqslant 1$.

$$\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{\cos^q x} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q} \quad \left(x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right),$$

I_2 hội tụ với $q < 1$, phân kì với $q \geqslant 1$.

Vậy I hội tụ với $p < 1$ và $q < 1$.

c) $$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arc\,tg} x}{x^q + 2} dx = \int_0^1 \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{x^q + 2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{x^q + 2} dx = I_1 + I_2$$

$$f(x) = \frac{x^p \operatorname{arc\,tg} x}{x^q + 2} \sim \frac{1}{2} x^{p+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{-p-1}} \quad (x \to 0^+) ;$$

I_1 hội tụ với $-(p + 1) < 1$, tức là $p > -2$, phân kì với $p \leqslant -2$.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{q-p}} \quad (x \to +\infty) ;$$

I_2 hội tụ với $q - p > 1$, phân kì với $q - p \leqslant 1$.

Vậy I hội tụ với $p > -2$ và $q - p > 1$.

d) Đổi biến số $t = \ln x$, ta được $x = e^t$ và

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt = \int_0^1 \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt$$

$$= I_1 + I_2$$

$$f(t) = \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} \sim \frac{1}{t^q} \ (t \to 0^+) ;$$

I_1 hội tụ với $q < 1$, phân kì với $q \geqslant 1$.

- Với $p > 1$, lấy một số thực $s > 1$ bất kì, ta có

$$t^s f(t) = \frac{e^{(1-p)t}}{t^{q-s}} \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Do đó $0 < f(t) < \dfrac{1}{t^s}$ với t đủ lớn. Do đó I_2 hội tụ.

- Với $p = 1$, ta có $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$. Tích phân hội tụ với $q > 1$, phân kì với $q \leqslant 1$.

- Với $p < 1$, ta có $f(t) \to +\infty$ khi $t \to +\infty$. Tích phân phân kì.

Vậy I hội tụ với $p > 1$ và $q < 1$.

16. $$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx = I_1 + I_2 .$$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \quad (x \to 0^+).$$

I_1 hội tụ với $\alpha - 1 < 1$, tức là $\alpha < 2$, phân kì với $\alpha \geqslant 2$.

Với I_2, ta xét các trường hợp sau :

a) $\alpha > 1$.

Lấy một số thực $r \in (1, \alpha)$. Khi đó

$$\lim_{x \to +\infty} x^r f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha - r}} = 0.$$

Do đó $f(x) < \dfrac{1}{x^r}$ với x đủ lớn. Vậy I_2 hội tụ.

b) $\alpha \leqslant 1$.

Vì $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$ với x đủ lớn $(x \geqslant e - 1)$ nên I_2 phân kì.

Vậy I hội tụ với $1 < \alpha < 2$.

17. Ta xét các trường hợp

a) $\beta \leqslant 0$

- Nếu $\beta < 0$ thì

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(1 + x^{\beta})} \sim \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad (x \to +\infty)$$

- Nếu $\beta = 0$ thì

$$f(x) \sim \frac{1}{2x^{\alpha}} \ (x \to +\infty)$$

Vậy với $\beta \leqslant 0$, tích phân hội tụ với $\alpha > 1$, phân kì với $\alpha \leqslant 1$.

b) $\beta > 0$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha + \beta}} \ (x \to +\infty)$$

Tích phân hội tụ với $\alpha + \beta > 1$, phân kì với $\alpha + \beta \leqslant 1$.

Từ đó suy ra tích phân $I(1, \beta)$ hội tụ khi và chỉ khi $\beta > 0$.

Khi đó, đổi biến số $t = x^{\beta}$, ta có

$$I(1, \beta) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + x^{\beta})} = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta - 1}dx}{x^{\beta}(1 + x^{\beta})} = \frac{1}{\beta}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + t)} = \frac{1}{\beta}\ln 2.$$

18. a) Với mọi $b \geqslant 1$, ta có

$$\left| \int_1^b \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos b| \leqslant 2.$$

Ngoài ra, hàm số $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ giảm trên $[1, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$. Theo dấu hiệu Điriclê, tích phân đã cho hội tụ.

Tích phân đã cho không hội tụ tuyệt đối. Thật vậy, nếu tích phân $\int_1^{+\infty} |\sin x| \sin\frac{1}{x}dx$ hội tụ thì từ bất đẳng thức $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ với mọi $x \geqslant 1$ suy ra tích phân

$$\int_1^{+\infty} \sin^2 x \sin\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(1 - \cos 2x)\sin\frac{1}{x}dx \qquad (1)$$

hội tụ. Mặt khác $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}dx$ phân kì (vì $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ khi $x \to +\infty$) và tích phân $\int_1^{+\infty} \cos 2x \sin\frac{1}{x}dx$ hội tụ (theo dấu hiệu Đirichlê). Do đó tích phân ở vế phải của (1) phân kì. Ta đi đến mâu thuẫn. Vậy tích phân $\int_1^{+\infty} \sin x \sin\frac{1}{x}dx$ là bán hội tụ.

b) Với mọi $b \geqslant 0$, $\left|\int_0^b \sin x dx\right| \leqslant 2$. Ngoài ra hàm số $x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ giảm trên $[a, +\infty)$ với a đủ lớn và $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$. Theo dấu hiệu Đirichlê, tích phân đã cho hội tụ. Tương tự như trong b), dễ dàng chứng minh được rằng tích phân đã cho là bán hội tụ.

c) Đổi biến số $t = e^x$, ta được

$$I = \int_0^{+\infty} x^2\cos(e^x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos t dt.$$

Theo dấu hiệu Đirichlê, tích phân đã cho hội tụ. Dễ chứng minh được I là bán hội tụ.

d) $$I = \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha \sin x}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha \sin x}{1+x}dx + \int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha \sin x}{1+x}dx = I_1 + I_2.$$

Vì $f(x) = \dfrac{x^{\alpha}\sin x}{1+x} \sim \dfrac{1}{x^{-\alpha-1}}$ khi $x \to 0^+$ nên I_1 hội tụ (tuyệt đối) với $-(\alpha+1) < 1$, tức là $\alpha > -2$, phân kì với $a \leqslant -2$.

• Nếu $\alpha < 1$ thì hàm số $x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha}}{1+x}$ giảm trên $[a, +\infty)$ với a đủ lớn và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{1+x} = 0$. Ngoài ra $\left| \int_1^b \sin x dx \right| \leqslant 2$ với mọi $b \geqslant 1$. Theo dấu hiệu Điricklê, I_2 hội tụ.

• Nếu $\alpha \geqslant 1$ thì I_2 phân kì. Thật vậy, nếu I_2 hội tụ thì $\int_1^{+\infty} \sin x dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{1+x}{x^{\alpha}} f(x)dx$ hội tụ theo dấu hiệu Aben. Điều này vô lí !

• $|f(x)| \leqslant \dfrac{x^{\alpha}}{1+x}$ với mọi $x \geqslant 1$.

Vì $\dfrac{x^{\alpha}}{1+x} \sim \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ khi $x \to +\infty$ nên, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, I_2 hội tụ tuyệt đối với $1-\alpha > 1$ tức là $\alpha < 0$. Dễ dàng chứng minh được rằng I_2 không hội tụ tuyệt đối với $\alpha \geqslant 0$.

Tóm lại, I hội tụ tuyệt đối với $-2 < \alpha < 0$, bán hội tụ với $0 \leqslant \alpha < 1$.

19. a) Nếu tích phân $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} f(x)dx$ hội tụ thì theo dấu hiệu Aben, tích phân

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} (x^{\alpha} f(x))\, dx$$

hội tụ.

b) Phản chứng : Giả sử tích phân $\int\limits_0^{+\infty} P_n(x)\sin x dx$ hội tụ. Vì $P_n(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$ nên hàm số $x \mapsto \dfrac{1}{P_n(x)}$ giảm trên $[a, +\infty)$ với a đủ lớn và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{P_n(x)} = 0$. Theo dấu hiệu Điriclê, tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{P_n(x)} (P_n(x)\sin x)\, dx$$

hội tụ. Vô lí !

20. a) Hàm số dưới dấu tích phân $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^2} > 0$ với mọi $t \in (0, 1]$.

$$f(t) \sim \frac{1}{t^2} \ (t \to 0^+)$$

Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{\cos t}{t^2} dt$ phân kì ; $\lim\limits_{x\to 0^+} \int\limits_x^1 \dfrac{\cos t}{t^2} dt = +\infty$. Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x \int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \int\limits_0^x \sqrt{1 + t^4}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{1 + t^4}\, dt = +\infty.$

Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

c) Ta có $\int_0^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt=I_1+I_2$

Dễ thấy $I_1=+\infty$ và I_2 hội tụ ; $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt=+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^1 t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}+\lim_{x\to0^+}\frac{I_2}{\ln\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^1 t^{-1}e^{-t}dt}{-\ln x}$$

(vì $\lim\limits_{x\to0^+}(-\ln x)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{I_2}{-\ln x}=0$). Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta có

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt}{-\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^{-1}e^{-x}}{-x^{-1}}=\lim_{x\to0^+}e^{-x}=1.$$

d) Vì $f(0)\neq0$ nên $\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\sim\frac{f(0)}{t^{\alpha+1}}$ $(t\to0^+)$. Do đó

$\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\pm\infty$. Áp dụng quy tắc Lôpitan, ta được

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha}\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{f(x)}{x^{\alpha+1}}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

21. b) Với mọi số thực x_1, x_2 sao cho $a \leqslant x_1 < x_2$, ta có

$$f^2(x_2) - f^2(x_1) = 2\int_{x_1}^{x_2} f'(x)f(x)dx.$$

Vì tích phân I hội tụ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $b \geqslant a$ sao cho

$$x_2 > x_1 \geqslant b \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do đó

$$x_2 \geqslant b,\ x_1 \geqslant b \Rightarrow |f^2(x_2) - f^2(x_1)| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)$ tồn tại và hữu hạn (theo tiêu chuẩn Côsi).

c) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = l \geqslant 0$. Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)| = \sqrt{l} \geqslant 0$. Nếu $l > 0$ thì tồn tại $b \geqslant a$ sao cho $|f(x)| > \dfrac{\sqrt{l}}{2} > 0$ với mọi $x \geqslant b$.

Từ đó suy ra tích phân $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kì.

Điều này trái với giả thiết. Vậy phải có $l = 0$.

22. a) Đổi biến $t = ax$, với mọi $\beta \geqslant \alpha$, ta có

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(ax)}{x}dx = \int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Do đó

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx = \int_{a\alpha}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt = I(a\alpha)$$

Tương tự,

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\, dx = I(b\alpha).$$

Do đó

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = I(a\alpha) - I(b\alpha) = \int_{a\alpha}^{b\beta} \frac{f(t)}{t}\, dt. \qquad (1)$$

b) Đổi biến số $t = ax$ và $t = bx$, với mọi $\xi \in (0, \alpha)$, ta có

$$\int_{\xi}^{\alpha} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \int_{a\xi}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int_{b\xi}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

$$= \int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t}\, dt + \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{f(t)}{t}\, dt. \qquad (2)$$

Trong vế phải của (2), tích phân đầu không phụ thuộc vào ξ. Áp dụng định lí về giá trị trung bình mở rộng của tích phân cho tích phân thứ hai, ta được

$$\int_{a\xi}^{b\xi} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(\theta) \ln \frac{b}{a}, \text{ với } a\xi < 0 < b\xi.$$

Khi $\xi \to 0$, ta có $\theta \to 0$ và $\displaystyle\int_{a\xi}^{b\xi} \frac{f(t)}{t}\, dt \to f(0) \ln \frac{b}{a}$. Do đó

$$\int_{0}^{\alpha} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t}\, dt + f(0) \ln \frac{b}{a}. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra

$$\int^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

23. a) Hàm số $x \longmapsto \ln(\sin x)$ liên tục và lấy các giá trị âm trên khoảng $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Sự hội tụ của I suy ra từ

$$\lim_{x \to 0^+} [\sqrt{x}\,\ln(\sin x)] = 0.$$

Đổi biến số $t = \frac{\pi}{2} - x$, ta được $I = J$.

b) $$2I = I + J = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx \qquad (1)$$

Đổi biến số $t = 2x$ trong tích phân vừa nhận được, ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)dt. \qquad (2)$$

Đổi biến số $t = \frac{\pi}{2} + u$ trong tích phân cuối cùng, ta được

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)du = J = I. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I,$$

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

24. a) Ta có

$$0 < e^{-x}\sin^{2n}x \leqslant e^{-x} \text{ với mọi } x \geqslant 0.$$

Vì tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh suy ra tích phân I_n hội tụ.

b) Áp dụng công thức tích phân từng phần hai lần, dễ dàng tìm được hệ thức $(4n^2 + 1)I_n = 2n(2n - 1)I_{n-1}$.

Do $I_o = 1$, từ đó dễ dàng tính được

$$I_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} \cdot \frac{2(n-1)(2n-3)}{4(n-1)^2+1} \cdots \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 1^2 + 1}$$

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - \frac{1}{2k}\right)}{1 + \frac{1}{4k^2}}$$

Do đó

$$I_n < \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) = u_n.$$

Ta có

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ có các số hạng âm. Vì

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sim -\frac{1}{2n} \ (n \to \infty)$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ phân kì và có tổng bằng $-\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \ln u_n = -\infty$, và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Từ bất đẳng thức $0 < I_n < u_n$ với mọi n suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

25. Ta có

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = I_1 + I_2$$

Đổi biến số $x = \frac{1}{t}$ trong tích phân I_1, ta được

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$$

Do đó

$$I = I_1 + I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

B. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

1. Giả sử a, b là hai số thực bất kì sao cho $0 < a < b$. Hàm số

$$(x, t) \mapsto \frac{tf(x)}{t^2 + x^2}$$

liên tục trên các hình chữ nhật

$R_1 = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant t \leqslant b\}$ và $R_2 = [0, 1] \times [-b, -a]$. Do đó hàm số F liên tục trên $[a, b]$ và trên $[-b, -a]$. Vì có thể lấy $a > 0$ nhỏ tùy ý và $b > 0$ lớn tùy ý nên F liên tục trên $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

- F gián đoạn tại điểm $t = 0$.

Ta có $F(0) = 0$. Áp dụng định lí về giá trị trung bình mở rộng của tích phân, tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho

$$F(t) = f(c) \int_0^1 \frac{t}{t^2 + x^2} dx = f(c) \operatorname{arctg} \frac{1}{t}.$$

Theo giả thiết, $m = \inf\limits_{x \in [0,1]} f(x) > 0$. Do đó

$|F(t)| \geq m \left| \operatorname{arc tg} \frac{1}{t} \right|$, $t \neq 0$. Vì $\lim\limits_{t \to 0} \left(m \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{t} \right| \right) = m. \frac{\pi}{2}$ nên

$F(t) \nrightarrow 0 = F(0)$ khi $t \to 0$. Vậy F gián đoạn tại điểm $t = 0$.

2. a) Dễ dàng thấy rằng hàm số $t \mapsto I(t) = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + t^2}\, dx$

liên tục trên **R**, do đó $\lim\limits_{t \to 0} I(t) = I(0) = \int\limits_{-1}^{1} |x|\, dx = 1$.

b) Theo định lí B.2.2, hàm số $t \mapsto I(t) = \int\limits_{t}^{1+t} \frac{dx}{1 + x^2 + t^2}$ liên

tục trên **R**. Do đó $\lim\limits_{t \to 0} I(t) = I(0) = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}$.

3. a) $I(a) = \frac{1}{a^2 - 1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{1}{a} \right)$ $(a > 0)$.

b) $I(1) = \lim\limits_{a \to 1} I(a) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

4. $I(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{t^2}} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{t^2}} \right)$, $t \neq 0$.

$$\lim_{t \to 0} I(t) = \frac{1}{2}.$$

$\int\limits_{0}^{1} \lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{x}{t^2} e^{-\frac{x^2}{t^2}} \right) dx = 0$. Không chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân được vì hàm số dưới dấu tích phân gián đoạn tại điểm $(0, 0)$.

5. a) Các hàm số

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{t + x^2}.$$

và

$$(x, t) \longmapsto \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t + x^2}\right) = -\frac{1}{(t + x^2)^2}$$

đều liên tục trên hình chữ nhật $[0, a] \times [\alpha, \beta]$, trong đó α, β là hai số thực bất kì sao cho $0 < \alpha < \beta$. Do đó hàm số J có đạo hàm trên $[\alpha, \beta]$ và

$$(1)\quad J'(t) = -\int_0^a \frac{dx}{(t + x^2)^2}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Vì có thể lấy $\alpha > 0$ nhỏ tùy ý và $\beta > 0$ lớn tùy ý nên J có đạo hàm trên $(0, +\infty)$ và (1) đúng với mọi $t > 0$. Tương tự, ta có

$$J''(t) = 2\int_0^a \frac{dx}{(t + x^2)^3}, \ \ldots$$

$$J^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1}(n-1)!\int_0^a \frac{dx}{(t + x^2)^n}.$$

Do đó

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} J^{(n-1)}(1)$$

$$J(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{t}}, \quad J'(t) = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{t}} + \frac{a\sqrt{t}}{t + a^2}\right).$$

Với $t = 1$, ta được

$$I_2 = \int_0^a \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} a + \frac{a}{a^2 + 1}\right).$$

6. $I'(t) = \int_a^t f(x)dx$; $I''(t) = f(t)$, $t \in [a, b]$.

7. a) Các hàm số

$$(\theta, x) \longmapsto \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$$

và

$$(\theta, x) \longmapsto \frac{\partial}{\partial x}[\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)] = \frac{2(x - \cos\theta)}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

đều liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(\theta, x) \in \mathbf{R}^2 : -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi, -1 < x < 1\}.$$

$(1 - 2x\cos\theta + x^2 > 0$ với mọi $(\theta, x) \in R)$.

Do đó hàm số I có đạo hàm trên (-1, 1) và

$$I'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(x - \cos\theta)}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\, d\theta.$$

b) Đổi biến số $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, ta được $I'(x) = 0$ với mọi $x \in (-1, 1)$.

Vì $I(0) = 0$ nên $I(x) = 0$ trên $(-1, 1)$.

8. Áp dụng công thức Laibnit (định lí 2.3), ta có

$$I'(\alpha) = f(2\alpha, 0) + \int_0^{\alpha} [f'_u(x+\alpha, x-\alpha) - f'_v(x+\alpha, x-\alpha)]dx \qquad (1)$$

Chú ý rằng

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

Do đó

$$\int_0^{\alpha} (f_u' - f_v')dx = 2\int_0^{\alpha} f_u' dx - \int_0^{\alpha} f_x' dx$$

$$= 2\int_0^{\alpha} f_u' dx - f(x+\alpha, x-\alpha)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}$$

$$= 2\int_0^{\alpha} f_u' dx - f(2\alpha, 0) + f(\alpha, -\alpha).$$

Thay vào (1), ta được đẳng thức cần chứng minh.

9. b) Theo a), ta có

$$F(x) = \int_0^{h} d\xi \int_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta)d\eta$$

Các hàm số

$$(\xi,\ x) \mapsto \int_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta)d\eta$$

và

$$(\xi,\ x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta)d\eta\right) = f(h+x+\xi) - f(x+\xi)$$

đều liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Do đó hàm số F có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ (vì F có đạo hàm trên một đoạn [a, b] bất kì) và

$$F'(x) = \int_0^h [f(h+x+\xi) - f(x,\ \xi)]d\xi$$

$$F'(x) = \int_{h+x}^{2h+x} f(\xi)d\xi - \int_x^{h+x} f(\xi)d\xi.$$

Do đó

$$F''(x) = f(2h+x) - 2f(h+x) + f(x)$$

10. $\dfrac{\partial I}{\partial a} = 2\displaystyle\int_1^3 (a + bx - x^2)\,dx$; $\dfrac{\partial I}{\partial b} = 2\displaystyle\int_1^3 (a + bx - x^2)\,xdx.$

$\dfrac{\partial I}{\partial a} = 2\left(2a + 4b - \dfrac{26}{3}\right)$; $\dfrac{\partial I}{\partial b} = 2\left(4a + \dfrac{26}{3}b - 20\right).$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{11}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

Hàm số I có một điểm dừng $M_o\left(-\dfrac{11}{3},\ 4\right)$

$$I''_{a^2}(M_o) = 4,\quad I''_{b^2}(M_o) = \frac{52}{3},\quad I''_{ab}(M_o) = 8,$$

$\Delta(M_0) = I''_{a^2} I''_{b^2} - (I_{ab})^2 > 0$. Vậy I có cực tiểu tại điểm $M_0\left(-\frac{11}{3}, 4\right)$.

11. a) $I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\alpha\beta}$.

b) Dễ dàng thấy rằng có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân.

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = -2\alpha \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x\, dx}{(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^2},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = -2\beta \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(\alpha^2\cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^2}.$$

Từ đó suy ra

$$J(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial I}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) - \frac{1}{2\beta}\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

12. a) $f'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2} dx$,

$$g'(t) = -2t \int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)} dx = -2te^{-t^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} dx.$$

Đổi biến số $u = tx$ trong tích phân cuối cùng, ta được

$$g'(t) = -2e^{-t^2} \int_0^1 e^{-u^2} du = -f'(t).$$

Do đó

$$f'(t) + g'(t) = 0 \Rightarrow f(t) + g(t) = C = \text{const}.$$

Từ các đẳng thức $g(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ và $f(0) = 0$ suy ra $C = \frac{\pi}{4}$. Do đó $f(t) + g(t) = \frac{\pi}{4}$ với mọi $t \in \mathbf{R}$.

b) Với mọi $x \in [0, 1]$, ta có

$$\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \leqslant e^{-t^2},\ t \in \mathbf{R}.$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant g(t) \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}dx = e^{-t^2} \Rightarrow \lim_{t\to\infty^+} g(t) = 0.$$

Do đó $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

13. $\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\times\frac{1}{\cos x} = [\ln(1+a\cos x) - \ln(1-a\cos x)]\cdot\frac{1}{\cos x}$

$$\sim \frac{2a\cos x}{\cos x} = 2a \quad \left(x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right)$$

Đặt $f(x, a) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos x} & \text{với } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 2a \text{ với } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Hàm số f liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (-1, 1)$, do đó liên tục trên hình chữ nhật $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\alpha, \alpha]$, trong đó α là một số thực bất kì sao cho $0 < \alpha < 1$. Đạo hàm riêng của f

$$(x, a) \mapsto \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$$

cũng liên tục trên R. Vậy I có đạo hàm trên $[-\alpha, \alpha]$, do đó trên $(-1, 1)$ và $I'(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}$

Đổi biến số $t = \operatorname{tg}x$, ta được

$$I'(a) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 - a^2 + t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}},\ |a| < 1.$$

Do đó $I(a) = \pi\arcsin a + C$. Vì $I(0) = 0$ nên từ đó suy ra $C = 0$. Vậy $I(a) = \pi\arcsin a$, $-1 < a < 1$.

14. Với mọi $x \geqslant 0$ và mọi $t \in [0, \beta]$, ta có

$$0 \leqslant e^{-x}x^t \leqslant e^{-x}x^{\beta}.$$

Vì tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\beta}dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân đã cho hội tụ đều (theo t) trên $[0, \beta]$.

Tuy nhiên tích phân đã cho không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

Thật vậy, với $b > 1$, ta có

$$\int_b^{+\infty} e^{-x}x^t dx \geqslant \int_b^{+\infty} e^{-x}b^t dx = b^t\int_b^{+\infty} e^{-x}dx.$$

Vì $\lim\limits_{t \to +\infty} b^t = +\infty$ nên với t đủ lớn,

$$\int_b^{+\infty} e^{-x}x^t dx > 1.$$

15. a) Vì

$0 < \dfrac{1}{x^t} \leqslant \dfrac{1}{x^a}$ với mọi $x \geqslant 1$ và mọi $t \geqslant a$ và tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^a}$ hội tụ nên, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân đã cho hội tụ đều (theo t) trên $[a, +\infty)$ với $a > 1$.

b) Với mọi $b \geqslant 1$, ta có

$$\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^t} = \frac{1}{(t-1)b^{t-1}}.$$

Vì $\lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{1}{(t-1)b^{t-1}} = +\infty$ nên tích phân đã cho không hội tụ đều trên $[1, +\infty)$.

16. Với mọi $a \in (0, 1)$ và $t \in (0, 1)$, ta có

$$\int\limits_a^1 \frac{dx}{x^t} = \frac{1}{1-t}(1 - a^{1-t}).$$

Vì $\lim\limits_{t \to 1^-} \left(-\dfrac{a^{1-t}-1}{1-t}\right) = -\ln a > 0$ nên tích phân đã cho không hội tụ đều trên $(0, 1)$.

17. a) Đổi biến số $t = \sqrt{\alpha}\, x$ trong tích phân $I(\alpha, b) = \int\limits_b^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2} dx$ $(b > 0)$, ta có

$$I(\alpha, b) = \int\limits_{b\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Với $\alpha = \dfrac{1}{b^2}$, ta có $I(\alpha, b) = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0$. Vậy tích phân đã cho không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

b) Đổi biến số $t = x - \alpha$ trong tích phân

$J(\alpha, b) = \int\limits_b^{+\infty} \dfrac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}$, ta được

$$J(\alpha, b) = \int\limits_{b-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}, \ b > 0.$$

Với $\alpha = b$, ta có $J(\alpha, b) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1 + t^2} = \dfrac{\pi}{2}$. Vậy tích phân $J(\alpha)$ không hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

18. a) Áp dụng dấu hiệu Diriclê.

• Hàm số $(t, \alpha) \longmapsto F(t, \alpha) = \int\limits_0^t \sin\alpha x dx$ bị chặn trên $[0, +\infty) \times [a, b]$:

$$F(t, \alpha) = \int\limits_0^t \sin\alpha x dx = \left(-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\right)\Big|_0^t = \frac{1}{\alpha}(1 - \cos\alpha t).$$

$$|F(\alpha, t)| \leqslant \frac{2}{|\alpha|} \leqslant \frac{2}{\min(|a|, |b|)} \text{ với mọi } t \geqslant 0, \alpha \in [a, b].$$

• Hàm số $x \longmapsto \frac{1}{x}$ giảm trên $[1, +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Do đó tích phân đã cho hội tụ đều trên [a, b] không chứa điểm 0.

b) Tích phân đã cho không hội tụ đều trên [0, b] với $b > 0$. Thật vậy, đổi biến số $u = \alpha x$, với $c > \frac{1}{b}$, ta có

$$\int\limits_c^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \int\limits_{c\alpha}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du.$$

Với $\alpha = \frac{1}{c}$, ta có

$$\left|\int\limits_c^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right| = \left|\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}dx\right| > 0.$$

Vậy tích phân đã cho không hội tụ đều trên [0, b] với $b > 0$.

Từ đó suy ra rằng tích phân đã cho không hội tụ đều trên [a, 0] với $a < 0$.

19. a) Áp dụng dấu hiệu Aben :

• Tích phân $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ theo dấu hiệu Diriclê.

- Hàm số $(x, \alpha) \mapsto e^{-\alpha x}$ bị chặn trên $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$:

$$0 < e^{-\alpha x} \leqslant 1 \text{ với mọi } x \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0.$$

Với mỗi $\alpha \geqslant 0$ hàm số $x \longmapsto e^{-\alpha x}$ giảm trên $[0, +\infty)$.

Do đó tích phân đã cho hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

b) Đổi biến số $t = x^2$, ta được

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}\left(1 + t^{\frac{p}{2}}\right)}\, dt .$$

- Tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ hội tụ theo dấu hiệu Diriclê.

- Với mỗi $p \geqslant 0$, hàm số $t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^{\frac{p}{2}}}$ giảm trên $[0, +\infty)$.

Ngoài ra, hàm số $(t, p) \mapsto \dfrac{1}{1 + t^{\frac{p}{2}}}$ bị chặn trên $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$:

$$0 < \frac{1}{1 + t^{\frac{p}{2}}} \leqslant 1 \text{ với mọi } t \geqslant 0,\ p \geqslant 0.$$

Theo dấu hiệu Aben, tích phân $I(p)$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

20. $0 \leqslant \dfrac{x^{\alpha}}{\sqrt{1 - x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ với mọi $x \in [0, 1)$, $\alpha \geqslant 0$.

Vì tích phân $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ hội tụ nên, theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân $I(\alpha)$ hội tụ đều trên $[0, +\infty)$.

21. $I(0) = 0$. Đổi biến số $u = tx$, ta được

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du > 0 \text{ với mọi } t > 0.$$

Hàm số I gián đoạn tại điểm $t = 0$. Từ đó suy ra rằng tích phân $I(t)$ không hội tụ đều trên $[0, 1]$.

22. a) $I(0) = 0$; $I(t) = e^{-t^2}\sin t \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dx$.

Đổi biến số $u = tx$, ta được

$$I(t) = \frac{e^{-t^2}\sin t}{t}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\ ,\ t > 0.$$

$\lim\limits_{t\to 0^+} I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du > 0$. Vậy hàm số I gián đoạn tại điểm $t = 0$.

b) Từ đó suy ra rằng tích phân $I(t)$ không hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

23. Đổi biến số $u = tx$, ta được

$$I(t) = \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \text{ với } t > 0.$$

$$I(0) = 0\ ;\ \text{I gián đoạn tại điểm } t = 0.$$

Từ đó suy ra tích phân $I(t)$ không hội tụ đều trên một đoạn chứa điểm 0.

24. Đổi biến số $u = tx$, ta được

$$I(t) = \frac{\pi}{2}|t|,\ t \in \mathbf{R}.$$

Hàm số I liên tục trên $\mathbf{R}$. Vì

$0 \leqslant \dfrac{t^2}{1+t^2x^2} < \dfrac{t^2}{t^2x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ với mọi $x \geqslant 1$ và mọi $t \in \mathbf{R}$, và

tích phân $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ hội tụ nên tích phân $I(t)$ hội tụ đều trên $\mathbf{R}$. Vì hàm số dưới dấu tích phân liên tục trên $[0, +\infty) \times \mathbf{R}$ nên từ đó suy ra hàm số I liên tục trên $\mathbf{R}$.

Chú ý rằng I không có đạo hàm tại điểm $t = 0$.

25. Đổi biến số $u = x - t$, ta được

$$I(t) = \int_{-t}^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-t}^{0} e^{-u^2} du + \int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Hiển nhiên hàm số $t \mapsto \int_{-t}^{0} e^{-u^2} du$ liên tục trên $\mathbf{R}$. Do đó hàm số I liên tục trên $\mathbf{R}$.

26. a) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{xdx}{2 + x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^\alpha} = I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$.

Dễ dàng thấy rằng hàm số I_1 liên tục trên $(2, +\infty)$.

Giả sử a, b là hai số thực sao cho $2 < a < b$.

$0 < \frac{x}{2 + x^\alpha} \leqslant \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - 1}}$ với mọi $x \geqslant 1$ và $\alpha \in [a, b]$ và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-1}}$ hội tụ với $a > 2$ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân $I_2(\alpha)$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Do đó hàm số I_2 liên tục trên $[a, b]$. Vì có thể lấy $a > 2$ và gần 2 tùy ý và lấy b lớn tùy ý nên I_2 liên tục trên $(2, +\infty)$. Do đó I liên tục trên $(2, +\infty)$.

b) Giả sử a, b là hai số thực bất kì sao cho $0 < a < b$. Theo dấu hiệu Điriclê, tích phân $J(\alpha)$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Từ đó dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

27. Ta có

$$0 < \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1 + x^2} < \frac{1}{x^{3/2}} \text{ với mọi } x > 0,\ t \in \mathbf{R}.$$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, từ đó suy ra tích phân đã cho hội tụ đều trên $\mathbf{R}$. Dễ dàng chứng minh tính liên tục của hàm số I trên $\mathbf{R}$.

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Gọi a, b là hai số thực bất kì sao cho $0 < a < b$. Ta có

$$I(t) = \int_0^a \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx + \int_a^b \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx + \int_b^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$$
$$= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t).$$

Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Ta có

$$0 < \int_b^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

Vì $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = 0$ nên b đủ lớn, ta có

$$I_3(t) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

$$I_1(t) = \int_0^a \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}a^{3/2} \to 0 \text{ khi } a \to 0^+.$$

Do đó với a đủ nhỏ, ta có

$$I_1(t) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Chọn a và b sao cho $I_3(t)$ và $I_1(t)$ thỏa mãn hai bất đẳng thức (1) và(2). Khi đó

$$I_2(t) = \int_a^b \frac{e^{-t^2x}\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \leqslant e^{-at^2}\int_a^b \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx.$$

Đẳng thức $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-at^2} = 0$ kéo theo $\lim\limits_{t\to+\infty} I_2(t) = 0$. Do đó tồn tại $t_0 \geqslant 0$ sao cho

$$t \geqslant t_0 \Rightarrow I_2(t) < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$t \geqslant t_0 \Rightarrow I(t) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t) = 0$.

28. Ta có

$$I = \int_0^{+\infty} dt \int_1^2 e^{-tx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$$

Dễ dàng thấy rằng tích phân

$$J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$$

hội tụ đều (theo x) trên đoạn [1, 2]. Ngoài ra hàm số $(t, x) \longmapsto e^{-tx}$ liên tục trên $[0, +\infty) \times [1, 2]$. Do đó có thể đổi thứ tự phép lấy tích phân :

$$I = \int_1^2 dx \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 .$$

29. a) Với $t = 0$, ta có $I(0) = 0$. Với $t > 0$, ta có

$$I(t) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b (2tx - t^2x^2) e^{-tx} dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (tx^2 e^{-tx}) \Big|_{x=0}^{x=b} = \lim_{b \to +\infty} (tb^2 e^{-tb}) = 0.$$

Vậy $I(t) = 0$ với mọi $t \geqslant 0$. Do đó $\int_0^1 I(t)dt = 0$.

b) Mặt khác, ta có

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^1 (2tx - t^2x^2)e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1.$$

Hai tích phân nêu trong b) lấy các giá trị khác nhau. Từ đó suy ra tích phân I(t) không hội tụ đều trên [0, 1].

30. a) Tích phân I(t) hội tụ trên $(0, +\infty)$. Thật vậy, với $t > 0$, ta có

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{e^{-tx}}{t}\right)\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{t} \qquad (1)$$

Hàm số I xác định trên $(0, +\infty)$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{d^n I}{dt^n}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{-tx})\,dx = \int_0^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-tx}\,dx \qquad (2)$$

với mọi $t > 0$.

Thật vậy, giả sử a và b là hai số thực bất kì sao cho $0 < a < b$. Các hàm số

$$(x, t) \mapsto e^{-tx}$$

và

$$(x, t) \mapsto \frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{-tx}) = (-1)^n x^n e^{-tx}$$

đều liên tục trên $[0, +\infty) \times [a, b]$.

Ngoài ra, vì

$|(-1)^n x^n e^{-tx}| = x^n e^{-tx} \leq x^n e^{-ax}$ với mọi $x \geq 0$, $t \in [a, b]$

và tích phân $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{-tx})\,dx$ hội tụ đều trên [a, b], n là một số nguyên dương bất kì. Vì vậy có thể nhận được đạo hàm cấp n của I bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp n lần hàm số dưới dấu tích phân tức là ta có (2) với mọi $t \in [a, b]$ do đó với mọi $t > 0$.

b) Từ (1) suy ra

$$\frac{d^nI}{dt^n}(t) = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}, \ t > 0 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra đẳng thức cần chứng minh.

31. Dễ dàng thấy rằng tích phân đã cho hội tụ trên $(0, +\infty)$. Giả sử a và b là hai số thực bất kì, $0 < a < b$. Ta chứng minh hàm số I_n có đạo hàm với mọi $t \in [a, b]$ và

$$I_n'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x\sin x}{(x^2+t^2)^n}\right] dx \qquad (1)$$

Thật vậy, các hàm số

$$(x, t) \mapsto \frac{x\sin x}{(x^2+t^2)^n}$$

và

$$(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x\sin x}{(x^2+t^2)^n}\right] = \frac{-2ntx\sin x}{(x^2+t^2)^{n+1}}$$

đều liên tục trên $[0, +\infty) \times [a, b]$. Ngoài ra, vì

$$\left|\frac{-2ntx\sin x}{(x^2+t^2)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{2n}{(x^2+t^2)^n} \cdot \frac{tx}{x^2+t^2} \leqslant \frac{n}{x^2}$$

với mọi $x > 0$, $t \in [a, b]$ và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{-2ntx\sin x}{(x^2+t^2)^{n+1}} dx$ hội tụ đều trên $[a, b]$. Do đó I_n có đạo hàm trên $[a, b]$ và ta có (1) với mọi $t \in [a, b]$. Do đó I_n có đạo hàm trên $(0, +\infty)$ và (1) đúng với mọi $t > 0$:

$$I_n'(t) = -2nt \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+t^2)^{n+1}} dx = -2ntI_{n+1}(t), \ t > 0$$

Vì I_{n+1} có đạo hàm trên $(0, +\infty)$ nên từ đó suy ra I_n có đạo hàm cấp hai,...

32. a) Dễ dàng thấy rằng tích phân đã cho hội tụ trên **R**. Các hàm số

$$(x,\ t) \longmapsto e^{-x^2}\cos tx$$

và

$$(x,\ t) \longmapsto \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2}\cos tx\right) = -\,xe^{-x^2}\sin tx$$

đều liên tục trên $[0, +\infty) \times \mathbf{R}$. Ngoài ra tích phân $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin txdx$ hội tụ đều trên **R**. Do đó hàm số I có đạo hàm trên **R** và

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2}\cos tx\right)dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin txdx\ ,\ t \in \mathbf{R}.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta được

$$I'(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin tx\, d(e^{-x^2})$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{-x^2}\sin tx\,\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-x^2}\cos txdx$$

$$I'(t) = -\frac{1}{2}\, tI(t)\ ,\ t \in \mathbf{R}.$$

b) Từ đó suy ra

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = -\frac{t}{2}\ ;\ \ln I(t) = -\frac{t^2}{4} + C\ ;\ I(t) = e^{-\frac{t^2}{4}+C}\ ,\ C = \text{const}$$

Với $t = 0$, ta có $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Do đó

$$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-t^2/4}\ ,\ t \in \mathbf{R}.$$

Đổi biến số $u = \sqrt{c}\,x$, ta được

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx^2}\cos txdx = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\cos\left(\frac{tu}{\sqrt{c}}\right)du = \frac{1}{\sqrt{c}}\, I\left(\frac{t}{\sqrt{c}}\right).$$

Từ đó có công thức cần chứng minh.

33. a) Dễ dàng thấy rằng tích phân đã cho hội tụ với mọi $t \in \mathbf{R}$. Giả sử a, b là hai số thực bất kì, $0 < a < b$. Ta chứng minh hàm số I có đạo hàm trên [a, b] và

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}\right)dx = \int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2}\, e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx \qquad (1)$$

với mọi $t \in [a, b]$.

Thật vậy, các hàm số

$$(x, t) \mapsto \varphi(x, t) = e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}} \text{ với } x \neq 0 \text{ (ta đặt } \varphi(0, t) = 0)$$

và

$$(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}\right)$$

đều liên tục trên $[0, +\infty) \times [a, b]$. Ngoài ra, do

$$0 < \frac{t}{x^2}\, e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}} \leqslant \frac{b}{x^2}\, e^{-x^2} \text{ với mọi } x > 0,\ t \in [a, b]$$

và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân $\int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2}\, e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx$ hội tụ đều trên [a, b]. Vì vậy hàm số I có đạo hàm trên [a, b] và

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2}\, e^{-x^2-\frac{t^2}{x^2}}dx$$

với mọi $t \in [a, b]$, do đó với mọi $t > 0$.

Đổi biến số $u = \frac{t}{x}$, ta được

$$I'(t) = -2\int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{t^2}{u^2}}du = -2I(t),\ t > 0.$$

b) Từ đó suy ra

$\ln I(t) = -2t + C$; $I(t) = e^{-2t}.e^C$, $C = \text{const}$.

Dễ thấy hàm số I liên tục trên $[0, +\infty)$. Do đó $e^C = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

và

$$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2t},\ t \geq 0.$$

Vì I là một hàm số chẵn nên

$I(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|t|}$ với mọi $t \in \mathbf{R}$.

34. Giả sử a, b là hai số thực bất kì, $0 < a < b$. Với $\alpha, \beta \in [a, b]$, đặt $f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$

Khi đó, các hàm số f và

$$(x, \alpha) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = -xe^{-\alpha x^2}$$

đều liên tục trên $[0, +\infty) \times [a, b]$. Dễ dàng thấy rằng tích phân

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx$$

hội tụ trên [a, b]. Vì

$$0 < xe^{-\alpha x^2} \leq xe^{-ax^2} \text{ với mọi } \alpha \in [a, b]$$

và tích phân $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân $\int_0^{+\infty} -xe^{-\alpha x^2}dx$ hội tụ đều trên [a, b]. Do đó hàm số I có đạo hàm trên [a, b] và

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha} \text{ với mọi } \alpha \in [a, b].$$

Do đó $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C$. Vì $I(\beta) = 0$ nên $C = \frac{1}{2}\ln\beta$, và $I(\alpha) = \frac{1}{2}(\ln\beta - \ln\alpha) = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$ với mọi $\alpha, \beta \in [a, b]$, do đó với mọi α, β dương.

BÀI TẬP CHƯƠNG XI

TÍCH PHÂN BỘI

A. Tích phân hai lớp

1. Áp dụng định nghĩa tích phân, hãy tính

$$I = \iint_R f(x, y)dxdy,$$

$R = [a, b] \times [c, d]$ là một hình chữ nhật đóng, $f(x, y) = \lambda$, trong đó λ là một số thực không đổi.

2. Chứng minh rằng

a) Tập hợp con của một tập hợp có diện tích không là một tập hợp có diện tích không ;

b) Hợp của một họ hữu hạn tập hợp có diện tích không là một tập hợp có diện tích không.

3. Giả sử A, B là hai tập hợp đo được (J) (đo được theo nghĩa Gioocđan) trong $\mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng

a) Các tập hợp $A \cap B$ và $A \cup B$ là đo được (J) và

$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$.

($\mu(A)$ chỉ diện tích của tập hợp A),

b) Các tập hợp $A \setminus B$ và $B \setminus A$ là đo được (J) và

$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$.

c) Nếu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ thì tập hợp $\mathbf{x} + A = \{\mathbf{x} + a : a \in A\}$ là đo được (J) và

$$\mu(\mathbf{x} + A) = \mu(A).$$

4. Giả sử A và B là hai tập hợp đo được (J) trong $\mathbf{R}^2$. Chứng minh rằng

a) Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

b) Nếu $A \subset B$ thì $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

5.* Gọi $J(\mathbf{R}^2)$ là họ các tập hợp đo được (J) trong $\mathbf{R}^2$, C_o là hình vuông nửa mở $[0, 1) \times [0, 1)$. Chứng minh rằng

Nếu $\gamma : J(\mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các tính chất sau :

a) $\gamma(A) \geqslant 0$ với mọi $A \in J(\mathbf{R}^2)$,

b) Nếu $A, B \in J(\mathbf{R}^2)$ và $A \cap B = \varnothing$ thì $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$,

c) Nếu $A \in J(\mathbf{R}^2)$ và $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ thì $\gamma(\mathbf{x} + A) = \gamma(A)$,

d) $\gamma(C_o) = 1$

thì $\gamma(A) = \mu(A)$ với mọi $A \in J(\mathbf{R}^2)$ ($\mu(A)$ là diện tích của A).

6.* Giả sử $\nu : J(\mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}$ là một hàm số có các tính chất a), b), c) trong bài tập 5. Chứng minh rằng tồn tại một hằng số $m \geqslant 0$ sao cho $\nu(A) = m\mu(A)$ với mọi $A \in J(\mathbf{R}^2)$.

7. Chứng minh rằng nếu $A \in J(\mathbf{R}^2)$ thì phần trong $\mathring{A}$ là bao đóng $\overline{A}$ của A đều thuộc $J(\mathbf{R}^2)$ và $\mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A}) = \mu(A)$.

và tích phân $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu Vâyơxtrat, tích phân $\int_0^{+\infty} - xe^{-\alpha x^2} dx$ hội tụ đều trên [a, b]. Do đó hàm số I có đạo hàm trên [a, b] và

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} dx = - \frac{1}{2\alpha} \text{ với mọi } \alpha \in [a, b].$$

Do đó $I(\alpha) = - \frac{1}{2} \ln \alpha + C$. Vì $I(\beta) = 0$ nên $C = \frac{1}{2} \ln \beta$, và $I(\alpha) = \frac{1}{2} (\ln \beta - \ln \alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$ với mọi $\alpha, \beta \in [a, b]$, do đó với mọi α, β dương.

BÀI TẬP CHƯƠNG XI

TÍCH PHÂN BỘI

A. Tích phân hai lớp

1. Áp dụng định nghĩa tích phân, hãy tính

$$I = \iint_R f(x, y) dxdy,$$

$R = [a, b] \times [c, d]$ là một hình chữ nhật đóng, $f(x, y) = \lambda$, trong đó λ là một số thực không đổi.

2. Chứng minh rằng

a) Tập hợp con của một tập hợp có diện tích không là một tập hợp có diện tích không ;

b) Hợp của một họ hữu hạn tập hợp có diện tích không là một tập hợp có diện tích không.

8. Chứng minh rằng nếu $A \in J(\mathbf{R}^2)$ và $\mu(A) > 0$ thì tồn tại một hình vuông đóng $C \subset A$ sao cho $\mu(C) > 0$.

9. Giả sử $f : R \to \mathbf{R}$ là một hàm số khả tích trên hình chữ nhật đóng R và A là một tập hợp con đo được (J) của R. Chứng minh rằng hàm số $f\big|_A : A \to \mathbf{R}$ là khả tích trên A.

10. Giả sử $A, B \in J(\mathbf{R}^2)$, $B \subset A$. Chứng minh rằng nếu hàm số $f : A \to \mathbf{R}$ khả tích trên A thì hàm số $f\big|_B$ khả tích trên B.

11.* Định lí về giá trị trung bình của tích phân.

Giả sử $D \in J(\mathbf{R}^2)$ là một tập hợp liên thông và $f : D \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên D. Chứng minh rằng tồn tại một điểm $P \in D$ sao cho $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = f(P)\,|D|$.

12. Chứng minh rằng nếu $f, g : D \to \mathbf{R}$ là hai hàm số khả tích trên tập hợp bị chặn $D \subset \mathbf{R}^2$ thì hàm số fg khả tích trên D.

13. Giả sử $D \in J(\mathbf{R}^2)$, f, g là hai hàm số khả tích trên D và $g(x, y) \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D$. Chứng minh rằng nếu $m = \inf f(D)$, $M = \sup f(D)$ thì tồn tại một số thực $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)\, g(x, y)\,dxdy = \mu \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy.$$

14. Chứng minh rằng nếu ngoài các giả thiết của bài tập 13, D là một tập hợp liên thông và f liên tục trên D thì tồn tại một điểm $P \in D$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x, y)\, g(x, y)dxdy = f(P) \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy.$$

15. Giả sử D là một tập hợp đo được (J) trong $\mathbf{R}^2$, $f, f_1, f_2, \ldots$ là những hàm số khả tích trên D. Chứng minh rằng nếu dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều đến f trên D thì

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_D f_n(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

16. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iint\limits_R (4 - x^2 - y^2)dxdy$, $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{3}{2}\}$,

b) $J = \iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y)^2}$. $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}$,

c) $K = \iint\limits_R \frac{x^2}{1+y^2}\, dxdy$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

17. Cho hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$ và hai hàm số liên tục $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $g : [c, d] \to \mathbf{R}$. Chứng minh rằng

$$\iint\limits_R f(x)\, g(y)\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy.$$

18. Giả sử hàm số $f : R \to \mathbf{R}$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$. Tính

$$I = \iint\limits_R f''_{xy}(x, y)\, dxdy$$

19. Cho hàm số f liên tục trên [a, b]. Chứng minh rằng

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

20. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iint\limits_D xydxdy$, $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

b) $I = \iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, D là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

c) $I = \iint\limits_D (x - y)\, dxdy$, D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.

d) $I = \iint\limits_D (x + y)dxdy$, D là miền tam giác với các đỉnh O(0, 0), A(1, 1), B(2, 0).

21. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, D là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = x$.

b) $I = \iint\limits_D (1 + x + y)\,dxdy$, D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x + y = 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = 2$.

c) $I = \iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ y^2 \leqslant 2x\}$

d) $I = \iint\limits_D (x - y)\,dxdy$, D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x + 1$, $x = y^2$, $y = \pm 1$.

22. Cho tập hợp

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 1,\ \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - y} \geqslant 1\}$

a) Chứng minh rằng

$D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x - 2\sqrt{x} + 1 \leqslant y \leqslant x + 2\sqrt{1 - x} - 1\}$.

b) Tính $I = \iint\limits_D (x + y)\,dxdy$.

23. Tính $I = \iint\limits_{\substack{|x| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2}} \sqrt{|y - x^2|}\ dxdy$

24. Tính $I = \iint\limits_D [x + y]\,dxdy$,

$D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, $[x + y]$ là phần nguyên của $x + y$.

25. Tính $I = \iint\limits_D \operatorname{sign}(x^2 - y^2 + 2)\,dxdy$, D là $\frac{1}{4}$ hình tròn

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

26. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iint\limits_D (x + y)^3(x - y)^2 dxdy$, D là hình vuông giới hạn bởi các đường thẳng $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + y = 3$, $x - y = -1$,

b) $I = \iint\limits_D (y - x)dxdy$, D là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{9}$, $y = -\frac{x}{3} + 5$.

27. Sử dụng phép đổi biến số thích hợp, tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

28. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant 1} \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2 + 2}\,dxdy$.

b) $I = \iint\limits_D xy\sqrt{x^2 + 4y^2}\,dxdy$, D là một $\frac{1}{4}$ hình tròn.

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

c) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, $D = \{(x, y) : x^2 - ax + y^2 \leqslant 0\}$.

d) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$.

e) $\iint\limits_D xydxdy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 3 \leqslant 4x,\ y \geqslant 0\}$.

f) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, $D = \{(x, y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,$ $Rx \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4R^2\}$.

g) $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant x + y,\ y \leqslant x\}$.

h) $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, D là phần của nửa hình tròn $\{(x, y) :$
$x^2 + y^2 \leqslant y,\ x \geqslant 0\}$ nằm ngoài hình tròn $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant x\}$.

i) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$,

$D = \left\{(x, y) : x \geqslant 0,\ a \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant a\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right\}$, $a > 0$.

j) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$, $D = \left\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right\}$,
$a, b > 0$.

29. Tính diện tích phần của hình tròn $x^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}x + y^2 \leqslant 0$
nằm ngoài hình tròn $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

30. Cho $D = \left\{(x, y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$

a) Tính diện tích của D.

b) Tính các tích phân sau :

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy\ ;\ J = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy.$$

31. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k},\ a, b, h, k > 0.$$

32. Cho $a > 0$, $b > 0$

$$D = \left\{(x, y) : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \leqslant 0\right\} \qquad (1)$$

$D' = \{(x, y) \in D : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

a) Chứng minh rằng $|D| = 4|D'|$.

b) Tính diện tích của D.

33. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường Lemnixcat $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ và đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, với $x^2 + y^2 \geqslant a^2$.

34. Tìm diện tích hình phẳng trong góc phần tư thứ nhất giới hạn bởi lá Đêcác $x^3 + y^3 = axy$ (xem hình 29 trang 282 Giải tích tập I).

35. a) Chứng minh rằng

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

trong đó $D_a = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$, $a > 0$.

b) Chứng minh rằng

$$\iint_{R_b} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \left(\int_0^b e^{-x^2}dx\right)^2,$$

trong đó $R_b = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant b\}$, $b > 0$.

c) Từ bao hàm thức $D_a \subset R_a \subset D_{a\sqrt{2}}$, hãy tính $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

36. Giả sử hàm số $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ liên tục trên một lân cận của điểm (0, 0). Chứng minh rằng

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x, y)\,dxdy = f(0, 0).$$

37.* Cho hàm số $F(t) = \iint_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, $t \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng

$$F'(t) = \iint_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy.$$

38.* Cho hàm số $f(t) = \iint\limits_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dxdy$, $t > 0$.

Chứng minh rằng

$$f'(t) = \frac{2f(t)}{t}, \ t > 0.$$

39.* Giả sử f là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^2$ và $F : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$F(t) = \iint\limits_{x^2 + y^2 \leq t^2} f(x, y)\, dxdy.$$

Chứng minh rằng

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} tf(t\cos\theta, \ t\sin\theta)\, d\theta.$$

40. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt :

a) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$,

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$,

c) $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$,

d) $x^2 + 4y^2 + z = 1$, $z = 0$, $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

e) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ $(z \geq 0)$,

f) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$,

g) $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$,

h) $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ $(x, y, z \geq 0)$,

i) $y = x^2 + 1$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$, $(x, y, z \geq 0)$,

j) $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

41. Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ giới hạn bởi hai kinh tuyến $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ và hai vĩ tuyến $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$.

42. Tính diện tích

a) Phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

b) Phần của mặt trụ $z = x^2$ giới hạn bởi các mặt phẳng $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

c) Phần mặt trụ $x^2 = 2z$ giới hạn bởi các mặt phẳng $x - 2y = 0$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

d) Phần mặt trụ $x^2 + z^2 = 4$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$.

e) Phần của mặt parabôlôit $y = x^2 + z^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$.

f) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.

g) Phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trong mặt trụ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

h) Phần của mặt $az = xy$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$.

i) Phần của mặt $z^2 = 2xy$ giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 1$, $y = 4$.

B. Tích phân ba lớp

1. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iiint\limits_B z\,dxdydz$, $B = \{(x, y, z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$

$$x + y + z \leq a\},\ a > 0.$$

b) $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, V là khối tứ diện ABCD với A(a, b, 0), B(a, −b, 0), C(0, 0, c), D(0, 0, −c), a, b, c > 0.

c) $I = \iiint\limits_B (2x + 3y - z)dxdydz$, B là lăng trụ tam giác giới hạn bởi các mặt phẳng $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$, $(a, b > 0)$.

2. Tính $I = \iiint\limits_B (x + y + z)^3 dxdydz$, B là vật thể giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$ và hai mặt phẳng $y = 0$, $y = 1$.

3. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iiint\limits_B z^2 dxdydz$, $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

b) $I = \iiint\limits_B z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, trong đó

$B = \{(x, y, z) : x^2 - 2ax + y^2 \leq 0, 0 \leq z \leq b\}$.

4. Tính các tích phân sau :

a) $I = \iiint\limits_B x^2 dxdydz$, b) $J = \iiint\limits_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$,

B là hình cầu tâm O(0, 0, 0), bán kính a.

5. Tính tích phân $I = \iiint\limits_B \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$B = \{(x, y, z) : 0 < b^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$.

6. Tính tích phân $I = \iiint\limits_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$,

$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

7. Tính tích phân $I = \iiint\limits_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$,

$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z\}$.

8. Tính tích phân $I = \iiint\limits_B zdxdydz$

$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$.

9. Cho $B = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Tính

$$I = \iiint_B xyzdxdydz \text{ và } J = \iiint_B zdxdydz$$

10. Cho B là một tập hợp đo được (J) trong $\mathbf{R}^3$ có thể tích dương. Chứng minh rằng tồn tại một hình lập phương đóng có thể tích dương chứa trong B.

11. Giả sử $B \in J(\mathbf{R}^3)$, tức là B là một tập hợp đo được (J) trong $\mathbf{R}^3$, $f, g : B \to \mathbf{R}$ là hai hàm số khả tích trên B và $g(x, y, z) \geq 0$ với mọi $(x, y, z) \in B$.

a) Chứng minh rằng nếu $m = \inf f(B)$, $M = \sup f(B)$ thì tồn tại một số thực $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\iiint_B f(x, y, z)\, g(x, y, z)\, dxdydz = \mu \iiint_B g(x, y, z)\, dxdydz$$

b) Chứng minh rằng nếu ngoài ra, B là một tập hợp liên thông đóng thì tồn tại một điểm $Q \in B$ sao cho

$$\iiint_B fgdxdydz = f(Q) \iiint_B gdxdydz .$$

12.* Định lí về giá trị trung bình của tích phân.

Giả sử B là một tập hợp liên thông đo được trong $\mathbf{R}^3$, $f : B \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục và bị chặn trên B. Chứng minh rằng tồn tại một điểm $Q \in B$ sao cho

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dxdydz = f(Q)\, |B|.$$

13.* Giả sử E là một tập hợp đóng đo được (J) trong $\mathbf{R}^3$ và $f : E \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục trên B sao cho

$\iiint_B f(x, y, z)\, dxdydz = 0$ với mọi hình cầu $B \subset E$. Chứng minh rằng

$$\iiint\limits_{E} f(x, y, z)\,dxdydz = 0.$$

14. Cho hàm số liên tục $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ và hàm số $F : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$$

Chứng minh rằng

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2) \text{ với mọi } t \geq 0.$$

15. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

a) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

b) $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

c) $hz = x^2 + y^2$, $z = h$, $h > 0$.

d) $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

f) $x^2 + y^2 = az$, $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$.

g) $x = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (vật thể nằm phía trong mặt trụ)

h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(x^2 + y^2 \leq z^2)$, $a > 0$.

i) $x^2 + z^2 = a^2$, $|x + y| = a$, $|x - y| = a$, $a > 0$.

16. Tính thể tích vật thể A giới hạn bởi mặt

$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = R^2$, biết rằng

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

C. ỨNG DỤNG VẬT LÍ CỦA TÍCH PHÂN BỘI

17. Tính khối lượng của một bản hình tròn bán kính R, biết rằng khối lượng riêng của bản tại mỗi điểm của nó tỉ lệ nghịch với khoảng cách từ điểm đó đến tâm hình tròn và bằng δ tại mỗi điểm biên của bản.

18. Tìm tọa độ trọng tâm của các bản đồng chất giới hạn bởi các đường sau :

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$, $a > 0$.

b) $ay = x^2$, $x + y = 2a$, $a > 0$.

19. Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể đồng chất trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi các mặt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ ,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$$

20. Tính mômen quán tính đối với các mặt phẳng tọa độ của các vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt sau :

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$,

b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$, $a, b, c > 0$,

biết rằng hàm khối lượng riêng của vật thể $M \mapsto \rho(M) = 1$ tại mọi điểm của vật thể.

BÀI GIẢI, HƯỚNG DẪN, ĐÁP SỐ CHƯƠNG XI

A. Tích phân hai lớp

1. $I = \lambda|R| = \lambda(b - a)(d - c)$

3. Các tập hợp ∂A và ∂B, biên của A và B đều có diện tích không. Dễ dàng chứng minh được rằng các biên

$$\partial(A \cap B),\ \partial(A \cup B),\ \partial(A \setminus B),\ \partial(B \setminus A)$$

đều là những tập hợp con của $\partial A \cup \partial B$. Do đó chúng có diện tích không. Vậy $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$ đều đo được (J).

Lấy một hình chữ nhật đóng R chứa $A \cup B$. Gọi $\chi_A : R \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ với } x \in A, \\ 0 \text{ với } x \in R \setminus A. \end{cases}$$

Các hàm số χ_B, $\chi_{A \cup B}$, $\chi_{A \cap B}$ được định nghĩa tương tự. Vì các tập hợp được xét đều đo được (J) nên các hàm số này đều khả tích trên R. Dễ dàng thấy rằng

$$\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cap B} + \chi_{A \cup B}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \iint_R \chi_A \, dxdy + \iint_R \chi_B \, dxdy \\ &= \iint_R (\chi_A + \chi_B) dxdy = \iint_R (\chi_{A \cap B} + \chi_{A \cup B}) \, dxdy \\ &= \iint_R \chi_{A \cap B} \, dxdy + \iint_R \chi_{A \cup B} \, dxdy \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) \end{aligned}$$

Đẳng thức trong b) được chứng minh tương tự.

c) Nếu R là hình chữ nhật đóng chứa A thì $x + R$ là hình chữ nhật đóng chứa $x + A$. Nếu $\pi = \{\Delta R_1, ..., \Delta R_m\}$ là một phép phân hoạch hình chữ nhật R thì $\pi_x = \{x + \Delta R_1, ..., x + \Delta R_m\}$ là một phép phân hoạch hình chữ nhật $x + R$. Gọi $\Delta R_{i_1}, ..., \Delta R_{i_n}$ là các hình chữ nhật của π có điểm chung với a Khi đó $x + \Delta R_{i_1}, ..., x + \Delta R_{i_n}$ là các hình chữ nhật của π_x có điểm chung với $x + A$ và tổng diện tích của chúng bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật $\Delta R_{i_1}, ..., \Delta R_{i_n}$. Từ đó suy ra rằng độ đo ngoài của tập hợp x + A bằng độ đo ngoài của A. Chứng minh tương tự, độ đo trong của x + A bằng độ đo trong của A. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

4. Suy ra từ bài tập 3.

5. Gọi C_n là hình vuông nửa mở $C_n = [0,2^{-n}) \times [0,2^{-n})$, n là một số nguyên dương. Vì C_o là hợp của 2^{2n} hình vuông nửa mở, các ảnh tịnh tiến của hình vuông C_n, đôi một không giao nhau nên

$$1 = \gamma(C_o) = 2^{2n}\gamma(C_n). \text{ Do đó } \gamma(C_n) = 2^{-2n} = \mu(C_n).$$

Nếu A, B $\in J(\mathbf{R}^2)$ và $A \subset B$ thì $\gamma(A) \leq \gamma(B)$. Thật vậy, ta có $B = A \cup (B \setminus A)$ và $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Do đó từ a) và b) suy ra

$$\gamma(B) = \gamma(A) + \gamma(B \setminus A) \geq \gamma(A).$$

Giả sử $A \in J(\mathbf{R}^2)$. Khi đó, vì A là một tập hợp bị chặn nên A chứa trong phần trong của hình vuông đóng $R = [-2^m, 2^m] \times [-2^m, 2^m]$ với m nguyên dương đủ lớn. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Tồn tại một phép phân hoạch hình vuông R thành các hình vuông có cạnh dài 2^{-n} sao cho tổng diện tích các hình vuông $\Delta R_1, \ldots, \Delta R_p$ chứa trong A lớn hơn $\mu(A) - \varepsilon$ và tổng diện tích các hình vuông $\Delta R_1, \ldots, \Delta R_q$ có điểm chung với A nhỏ hơn $\mu(A) + \varepsilon$ ($p \leq q$). Mỗi hình vuông ΔR_i khác ảnh tịnh tiến $x_i + C_n$ của C_n một tập hợp có diện tích không. Do đó

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{p} (x_i + C_n)\Big) \leq \mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{q} (x_i + C_n)\Big) < \mu(A) + \varepsilon \quad (1)$$

Vì μ và γ đều bất biến qua phép tịnh tiến các tập hợp và bằng nhau tại mỗi C_n và vì các tập hợp $x_i + C_n$ đôi một rời nhau nên

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{p} (x_i + C_n)\Big) = \sum_{i=1}^{p} \mu(x_i + C_n) = \sum_{i=1}^{p} \gamma(x_i + C_n) = \gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{p} (x_i + C_n)\Big).$$

Do đó

$$\mu(A) - \varepsilon < \gamma\Big(\bigcup_{i=1}^{p} (x_i + C_n)\Big) \leqslant \gamma(A) \leqslant \gamma\big(\bigcup_{i=1}^{q} (x_i + C_n)\big) <$$
$$< \mu(A) + \varepsilon. \ (2)$$

Từ (2) suy ra $|\gamma(A) - \mu(A)| < \varepsilon$. Vì $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý nên từ đó suy ra $\gamma(A) = \mu(A)$.

6. Từ các tính chất a), b) của ν, dễ dàng thấy rằng ν là một hàm số tăng, tức là

$$(\forall A, B \in J(\mathbf{R}^2))\ A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leqslant \nu(B).$$

Đặt $C_0 = [0, 1) \times [0, 1)$.

Nếu $\nu(C_0) = 0$ thì dễ dàng thấy rằng với mọi tập hợp bị chặn A, ta đều có $\nu(A) = 0$. Do đó $\nu(A) = 0$ với mọi $A \in J(\mathbf{R}^2)$. Điều khẳng định đúng nếu lấy $m = 0$. Nếu $\nu(C_0) > 0$, ta đặt

$$\alpha(A) = \frac{1}{\nu(C_0)}\,\nu(A),\ A \in J(\mathbf{R}^2).$$

Khi đó α có các tính chất a), b), c), d) của bài tập 5. Do đó $\alpha = \mu$. Ta lấy $m = \nu(C_0)$.

8. Lấy một hình chữ nhật đóng R chứa A. Theo định nghĩa độ đo trong của một tập hợp, tồn tại một phép phân hoạch $\pi = \{\Delta R_1, ..., \Delta R_n\}$ của R sao cho tổng diện tích của các hình chữ nhật ΔR_i chứa trong A lớn hơn $\dfrac{\mu(A)}{2} > 0$. Lấy một hình chữ nhật $\Delta R_{i_0} \subset A$ và một hình vuông $C \subset \Delta R_{i_0}$. Hình vuông C thỏa mãn điều kiện đòi hỏi.

9. Cho $\varepsilon > 0$ tùy ý. Vì $A \in J(\mathbf{R}^2)$ nên biên ∂A có diện tích không. Do đó tồn tại một phép phân hoạch π_1 hình chữ nhật R sao cho tổng diện tích các hình chữ nhật nhỏ có điểm chung với ∂A nhỏ hơn ε. Vì f khả tích trên R nên tồn tại một phép phân hoạch $\pi = \{\Delta R_1, ..., \Delta R_n\}$ của R sao cho

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon,$$

$S(f, \pi)$ và $s(f, \pi)$ là các tổng Đácbu của hàm số f ứng với π. Ta lấy π mịn hơn π_1. Đặt $M = \sup_{x \in R} |f(x)|$ và gọi $g : R \to \mathbf{R}$ là hàm số xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ với } x \in A, \\ 0 \text{ với } x \in R \setminus A. \end{cases}$$

Ta viết hiệu các tổng Đácbu của g dưới dạng

$$S(g, \pi) - s(g, \pi) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta R_i = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 ,$$

trong đó $\sum_1$ là tổng của các số hạng mà $\Delta R_i \subset A$, $\sum_2$ là tổng của các số hạng mà $\Delta R_i \cap \partial A \neq \varnothing$ và $\Delta R_i \not\subset A$, $\sum_3$ là tổng các số hạng mà $\Delta R_i \cap \overline{A} = \varnothing$. Khi đó $\sum_3 = 0$,

$\sum_1 \leqslant S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon$ vì $g(x) = f(x)$ với mọi $x \in \Delta R_i$ với các ΔR_i có mặt trong tổng $\sum_1$,

$$\sum\nolimits_2 \leqslant 2M \sum\nolimits_2 \Delta R_i < 2M\varepsilon.$$

Do đó $S(g, \pi) - s(g, \pi) < (2M + 1)\varepsilon$.

Vậy g khả tích trên R, tức là f khả tích trên A.

10. Suy ra từ bài tập 9.

11. Chú ý rằng định lí 4.11 là một trường hợp đặc biệt của bài tập này.

Nếu $|D| = 0$ thì hiển nhiên điều khẳng định đúng. Giả sử $|D| > 0$. Đặt $m = \inf_{(x, y) \in D} f(x, y)$, $M = \sup_{(x, y) \in D} f(x, y)$. Ta có

$$m \leqslant \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)\,dxdy \leqslant M \qquad (1).$$

Nếu cả hai bất đẳng thức trong (1) đều là nghiêm ngặt thì tồn tại hai điểm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) của D sao cho

$$m < f(x_1, y_1) < \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y)\,dxdy < f(x_2, y_2) < M.$$

Điều khẳng định suy ra từ định lí Bônzanô–Côsi (định lí V.11.13, Giải tích tập I).

Giả sử $\iint_D f(x, y)\,dxdy = M|D|$. Nếu hàm số f đạt được giá trị M tại điểm $P \in D$ thì điều khẳng định đã được chứng minh. Giả sử $f(x, y) < M$ với mọi $(x, y) \in D$. Vì $|D| > 0$ nên tồn tại một hình chữ nhật đóng $R \subset D$ sao cho $|R| > 0$ (xem bài tập 8). Vì R là một tập hợp compắc và f liên tục trên R nên $\max\limits_{(x,y)\in R} f(x, y) = \alpha < M$. Do đó

$$\begin{aligned} M|D| &= \iint_D f(x, y)dxdy = \iint_R f(x, y)\,dxdy + \iint_{D\setminus R} f(x, y)dxdy \\ &\leq \alpha|R| + M|D \setminus R| \\ &< M(|R| + |D \setminus R|) = M|D| \end{aligned}$$

Vô lí ! Trường hợp $\iint_D f(x, y)dxdy = m|D|$ được xét tương tự.

12. Tương tự như đối với tích phân một lớp, ta chứng minh được nếu f và g là hai hàm số khả tích trên hình chữ nhật $R \subset \mathbf{R}^2$ thì hàm số fg khả tích trên R. Từ định nghĩa của tích phân hai lớp trên một tập hợp bị chặn $D \subset \mathbf{R}^2$ suy ra điều cần chứng minh.

16. a) $I = \dfrac{35}{8}$; b) $J = \ln\dfrac{25}{24}$; c) $K = \dfrac{\pi}{12}$

18. $I = f(b, d) - f(a, d) - f(b, c) + f(a, c).$

19. Hàm số $(x, y) \mapsto [f(x) - f(y)]^2$ liên tục và không âm trên hình vuông $R = [a, b] \times [a, b]$. Do đó

$$\iint\limits_R [f(x) - f(y)]^2 dxdy \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \geq 0.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

20. a) $I = \frac{1}{24}$; b) $I = 25\frac{1}{3}$.

c) $D = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 1,\ 2x - 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$.

$$I = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x - y)dy = 4\frac{4}{15}.$$

d) $I = \int_0^1 dx \int_0^x (x + y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x + y)dy = \frac{4}{3}$,

hoặc

$$I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x + y)dx = \frac{4}{3}.$$

21. a) $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq y\}$.

$$I = \int_1^2 dy \int_0^y (x^2 + y^2)dx = 5.$$

b) $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2,\ -y \leq x \leq \sqrt{y}\}$.

$$I = \int_0^2 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)dx = \frac{13}{3} + \frac{44\sqrt{2}}{15}.$$

c) Có thể viết D dưới dạng

$$D = \{(x, y) : -2 \leq y \leq 2,\ \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}.$$

$$I = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} =$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{5 + y^2}\, dy - \int_{-2}^{2} \left(\frac{y^2}{2} + 1 \right) dy = \frac{5}{2} \ln 5 - \frac{2}{3}.$$

22. a) Hiển nhiên : $(x, y) \in D \Rightarrow 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} + x \leq y$,

$\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 - y} \geq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - x} \leq \sqrt{1 - y}$

$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{1 - x})^2 \leq 1 - y \Leftrightarrow y \leq x + 2\sqrt{1 - x} - 1.$

Dễ dàng thấy rằng

$1 - 2\sqrt{x} + x \leq x + 2\sqrt{1 - x} - 1$ với mọi $x \in [0, 1]$.

Từ đó ta có a).

b) Tập hợp D đối xứng qua đường phân giác thứ nhất $y = x$. Do đó

$$\iint_D xdxdy = \iint_D ydxdy, \text{ và}$$

$$I = 2\iint_D xdxdy = 2\int_0^1 dx \int_{x - 2\sqrt{x} + 1}^{x + 2\sqrt{1 - x} - 1} xdy = \frac{2}{3}.$$

23. Bạn đọc tự vẽ hình. Ta có

$y - x^2 \leq 0$ với mọi $(x, y) \in D_1$,

$D_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$,

$y - x^2 \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D_2$,

$D_2 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2\}$

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\, dxdy + \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2}\, dxdy,$$

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 - y}\ dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\ dy = \frac{1}{3}$$

$$\iint\limits_{D_2} \sqrt{y - x^2}\ dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\, dy = \frac{4}{3} \int_{0}^{1} (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Đổi biến số $x = \sqrt{2}\sin t$, ta tính được

$$\iint\limits_{D_2} \sqrt{y - x^2}\ dxdy = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.$$

$$I = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}.$$

24. Chia D thành 4 miền D_1, D_2, D_3, D_4 bởi các đường thẳng $x + y = k$, $k = 1, 2, 3$. Ta có

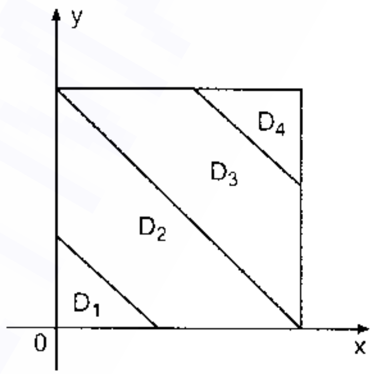
$[x + y] = k - 1$ với $(x, y) \in \mathrm{Int}D_k$.

Từ đó suy ra

$I = 0|D_1| + |D_2| + 2|D_3| + 3|D_4|$,

$|D_4| = \frac{1}{2}$, $|D_2| = |D_3| = \frac{3}{2}$;

$I = 6$.



Hình 37

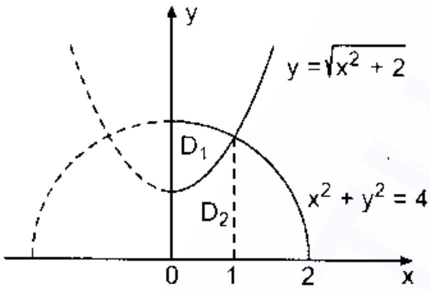
25. Hipebôn $x^2 - y^2 + 2 = 0$ chia $\frac{1}{4}$ hình tròn D thành hai hình phẳng D_1 và D_2,

$D_1 = \{(x, y) \in D : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x^2 + 2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$,

$D_2 = D \setminus D_1$. Ta có

$x^2 - y^2 + 2 \leq 0$ với mọi $(x, y) \in D_1$,

$x^2 - y^2 + 2 \geq 0$ với mọi $(x, y) \in D_2$.



Hình 38

Do đó

$$\text{sign}(x^2 - y^2 + 2) = \begin{cases} -1 \text{ với } (x, y) \in \text{Int}\, D_1, \\ 1 \text{ với } (x, y) \in \text{Int}\, D_2. \end{cases}$$

$$I = \iint_{D_2} dxdy - \iint_{D_1} dxdy = |D_2| - |D_1| = |D| - 2|D_1|$$

Diện tích của D_1 là :

$$|D_1| = \iint_{D_1} dxdy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2})\, dx$$

$$|D_1| = \frac{\pi}{3} - \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$I = \pi - 2\left(\frac{\pi}{3} - \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

26. a) Bạn đọc tự vẽ hình.

Đổi biến số $u = x + y$, $v = x - y$, ta được

$$x = \frac{u+v}{2},\ y = \frac{u-v}{2},$$

$$J(u,\ v) = \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\ ;\ |J(u,\ v)| = \frac{1}{2}.$$

$\Delta = \{(u,\ v) : 1 \leqslant u \leqslant 3,\ -1 \leqslant v \leqslant 1\}$. Gọi $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ là ánh xạ $(u,\ v) \mapsto (x,\ y) = \left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)$. Ta có $D = \varphi(\Delta)$ và

$$I = \iint_{\Delta} u^3v^2\ |J(u,\ v)|\ dudv = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3du \int_{-1}^1 v^2dv = \frac{20}{3}.$$

b) $I = -8$.

27. Hình phẳng D giới hạn bởi hai parabôn và hai hipebôn. Bạn đọc hãy vẽ hình. Diện tích hình phẳng D là

$$|D| = \iint_D dxdy.$$

Đổi biến số $u = xy,\ v = \frac{y}{x^2}$. Ánh xạ $\varphi : (u,\ v) \mapsto (x,\ y)$ biến hình vuông $\Delta = \{(u,\ v) : 1 \leqslant u \leqslant 2,\ 1 \leqslant v \leqslant 2\}$ thành $D : \varphi(\Delta) = D$.

$$J(x,\ y) = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{3y}{x^2} = 3v \Rightarrow |J(u,\ v)| = \frac{1}{3v},$$

$(u,\ v) \in \Delta$.

$$D = \iint_{\Delta} \frac{1}{3v}\ dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{\ln 2}{3}.$$

28. a) Chuyển sang tọa độ cực, $I = \pi\left(1 + 2\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

b) Chuyển sang tọa độ cực

$$I = \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{7}{45}.$$

c) Biên ∂D của D là đường tròn $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ta được

$$I = \iint_\Delta \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr,$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant a\cos\theta\},$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr = (3\pi - 4)\frac{a^3}{9}.$$

d) $I = \dfrac{3\pi}{2}$.

e) Biên ∂D của D là nửa đường tròn $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$.

Chuyển sang tọa độ cực

$$x = 2 + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

$$I = \iint_\Delta (2 + r\cos\theta) r\sin\theta\, r dr d\theta\ ;$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1\}$$

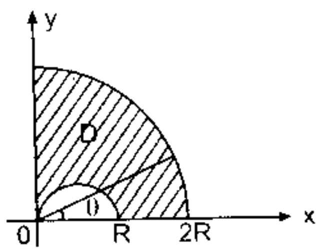
$$I = \frac{4}{3}.$$

f) Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$I = \iint_\Delta r^2 dr d\theta,\ \Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ R\cos\theta \leqslant r \leqslant 2R\}.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R\cos\theta}^{2R} r^2 dr$$

$$I = \frac{2}{3} R^3 \left(2\pi - \frac{1}{3}\right).$$



g) $D = \{(x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}, y \leqslant x\}$

Hình 39

Chuyển sang tọa độ cực

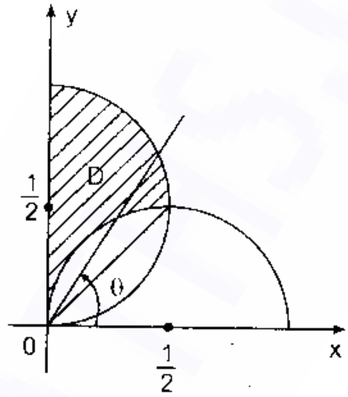
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$

$$I = \iint\limits_{\Delta} r(\cos\theta + \sin\theta) r\,dr,$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta \int_0^{\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} r^2 dr = \frac{\pi}{4}.$$



Hình 40

h) Chuyển sang tọa độ cực

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

$$I = \iint\limits_{\Delta} r^2 . r d\theta dr,\ \Delta = \{(\theta, r) : \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \cos\theta \leqslant r \leqslant \sin\theta\}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^{\sin\theta} r^3 dr = \frac{1}{8}.$$

i) Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$

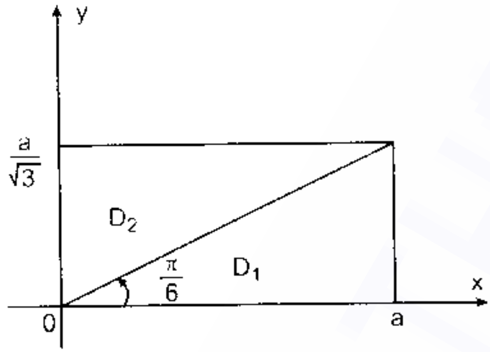
$$I = \iint\limits_{\Delta} r^2 d\theta dr,\ \Delta = \{(\theta, r) : -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, a \leqslant r \leqslant a(1 + \cos\theta)\}.$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} r^2 dr = a^3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{22}{9}\right).$$

j) Ta có $D = D_1 \cup D_2$ (xem hình vẽ)

Chuyển sang tọa độ cực

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$



Hình 41

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} + \iint\limits_{D_2} \frac{dxdy}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$= \iint\limits_{\Delta_1} \frac{rd\theta dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} + \iint\limits_{\Delta_2} \frac{rd\theta dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

$$\Delta_1 = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\cos\theta}\},$$

$$\Delta_2 = \{(\theta, r) : \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}\sin\theta}\}.$$

$$I_1 = \iint\limits_{\Delta_1} \frac{rd\theta dr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \frac{rdr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{6b} - \frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (2)$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Delta_2} \frac{rdr\,d\theta}{(b^2 + r^2)^{3/2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{3}\sin\theta}} \frac{rdr}{(b^2 + r^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\pi}{3b} - \frac{1}{b}\arcsin\frac{3b}{2\sqrt{a^2 + 3b^2}} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2b} - \frac{1}{b}\left(\arcsin\frac{b}{2\sqrt{a^2+b^2}} + \arcsin\frac{3b}{2\sqrt{a^2+3b^2}}\right)$$

29. Gọi D là hình phẳng cần tính diện tích. Diện tích của D là :

$S = \iint\limits_D dxdy$. Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$S = \iint\limits_\Delta rd\theta dr$, $\Delta = \{(\theta, r) : -\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}, 1 \leqslant r \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\}$.

(Chú ý rằng hai đường tròn biên cắt nhau tại hai điểm có hoành độ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$).

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} rdr = \frac{1}{18}(3\sqrt{3} - \pi).$$

30. a) Diện tích của đĩa elip là : $S = \iint\limits_D dxdy$.

Chuyển sang tọa độ cực mở rộng : $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$; $|J(\theta, r)| = abr$, $S = \iint\limits_\Delta abrd\theta dr$, $\Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$ $0 \leqslant r \leqslant 1\}$.

$$S = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr = \pi ab.$$

b) $I = \frac{2}{3}\pi ab$; $J = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

31. Ta viết phương trình của đường cong đã cho dưới dạng

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{b}{2k}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}$$

Diện tích của hình phẳng D giới hạn bởi đường cong đã cho là $S = \iint\limits_D dxdy$. Chuyển sang tọa độ cực : $\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} = r\cos\theta$, $\frac{y}{b} - \frac{b}{2k} = r\sin\theta$, ta có

$$|J(\theta, r)| = abr,$$

$$S = ab\iint\limits_\Delta rd\theta dr,$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\}.$$

$$S = \frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

32. a) Tập hợp D đối xứng qua hai trục tọa độ. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

b) Chuyển sang tọa độ cực : $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$. Ta có $|J(\theta, r)| = abr$. Từ bất phương trình trong (1) suy ra

$$r^4 - r^2\cos 2\theta \leqslant 0 \Leftrightarrow r \leqslant \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant 2\theta \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

Diện tích hình phẳng D là :

$$|D| = 4\iint\limits_{D'} dxdy = 4\iint\limits_{\Delta'} abrd\theta dr,$$

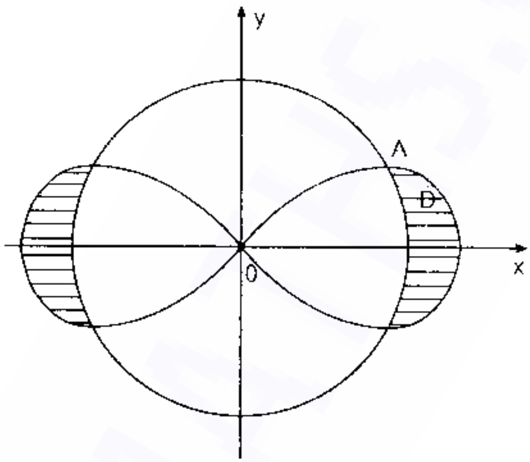
$$\Delta' = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\cos 2\theta}\}$$

$$|D| = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} rdr = ab.$$

33. Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Phương trình của đường lemnixcat là : $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$.

Đường lemnixcat cắt đường tròn tại 4 điểm. Giao điểm A trong góc phần tư thứ nhất có tọa độ cực là $\left(\frac{\pi}{6} ; a\right)$. Hình phẳng đối xứng qua hai trục tọa độ. Gọi D là phần của hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất. Diện tích của hình phẳng là :



Hình 42

$$S = 4 \iint_D dxdy = 4 \int_\Delta rd\theta dr,$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}, a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\cos 2\theta}\}.$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr = a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

34. Hình phẳng đối xứng qua đường phân giác thứ nhất. Gọi D là phần hình phẳng nằm giữa trục hoành và đường phân giác thứ nhất. Diện tích của hình phẳng là : $S = 2 \iint_D dxdy$. Chuyển sang tọa độ cực, phương trình của lá Đêcác là : $r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = a\sin\theta\cos\theta$.

$$S = 2 \iint_\Delta rd\theta dr, \Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}\}$$

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\cos^3\theta - \sin^3\theta}} r dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2\theta}{(1 + tg^3\theta)^2} d(tg\theta) = \frac{a^2}{6}.$$

35. c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

36. Gọi D_r là hình tròn : $D_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $r > 0$. Theo định lí về giá trị trung bình của tích phân, tồn tại một điểm $(\xi, \eta) \in D_r$ sao cho

$$\iint_{D_r} f(x, y)dxdy = |D_r| f(\xi, \eta) = \pi r^2 f(\xi, \eta).$$

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} f(x, y)dxdy = f(\xi, \eta).$$

Vì f liên tục tại điểm (0, 0) nên $\lim\limits_{r \to 0} f(\xi, \eta) = f(0, 0)$.

37. Chuyển sang tọa độ cực : $x - t = r\cos\theta$, $y - t = r\sin\theta$.

$$F(t) = \iint_\Delta \sqrt{(t + r\cos\theta)^2 + (t + r\sin\theta)^2}\, rd\theta dr,$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}.$$

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{(1 + r\cos\theta)^2 + (t + r\sin\theta)^2}\, rdr,$$

$$F(t) = \int_0^{2\pi} f(\theta, t)\, d\theta \text{ với } f(\theta, t) = \int_0^1 \sqrt{(t + r\cos\theta)^2 + (t + r\sin\theta)^2}\, rdr.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm số f liên tục và có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial t}$ liên tục trên $\mathbf{R}^2$. Do đó

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, t)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{t + r\cos\theta + t + r\sin\theta}{\sqrt{(t + r\cos\theta)^2 + (t + r\sin\theta)^2}} rdr.$$

$$= \iint\limits_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leqslant 1} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy.$$

38. Đổi biến số $x = tu$, $y = tv$, ta có

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2,$$

$$f(t) = t^2 \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{\frac{u}{v^2}} dudv = ct^2 \text{ với } c = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1}} e^{\frac{u}{v^2}} dudv,$$

$$f'(t) = 2ct = \frac{2ct^2}{t} = \frac{2f(t)}{t}, \ t > 0.$$

39. Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ta được

$$F(t) = \iint\limits_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rd\theta dr,$$

$$\Delta = \{(\theta, r) : 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant r \leqslant t\}.$$

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta, t)\, d\theta,$$

với $\varphi(\theta, t) = \int_0^t f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr$. Dễ thấy φ là hàm số liên tục và có đạo hàm riêng φ_t' liên tục trên $[0, 2\pi] \times (0, +\infty)$,

$$\varphi_t'(\theta, t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)t.$$

Do đó F có đạo hàm trên $(0, +\infty)$ và

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} tf(t\cos\theta, t\sin\theta)\, d\theta.$$

40. a) Vật thể giới hạn phía trên bởi mặt parabôlôit tròn xoay $z = x^2 + y^2$, phía dưới bởi mặt phẳng Oxy, xung quanh bởi mặt trụ $y = x^2$ và mặt phẳng $y = 1$. Vật thể được biểu diễn dưới dạng

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

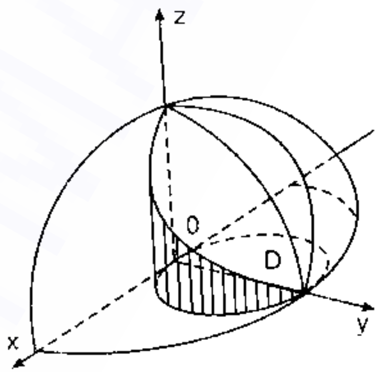
trong đó D là hình phẳng trong mặt phẳng Oxy :

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Thể tích vật thể là :

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\,dy = \frac{88}{105}.$$

b) Vật thể cần tính thể tích là phần hình cầu tâm O bán kính 2a nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. Vật thể đối xứng qua Oxy và Oyz. Phần vật thể nằm về phía trên của mặt phẳng Oxy được biểu diễn dưới dạng



Hình 43

$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,$ $0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\}$, trong đó D là hình tròn trong mặt phẳng Oxy :

$$D = \{(x, y) : x^2 + (y - a)^2 \leq a^2\}.$$

Thể tích vật thể là :

$$V = 2\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ta được

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r\,dr = \frac{16a^3}{9}(3\pi - 4).$$

c) Bạn đọc hãy vẽ hình, vật thể được cho bởi

$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant 4 - x - y\}$,

D là một phần tư hình tròn trong mặt phẳng Oxy,

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 8, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

$V = \iint\limits_D (4 - x - y)\,dxdy$. Chuyển sang tọa độ cực, ta tính được

$$V = 8\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

d) Mặt phẳng $z = 0$ cắt mặt $z = 1 - x^2 - 4y^2$ theo elip

$x^2 + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$.

Thể tích vật thể là :

$V = \iint\limits_D (1 - x^2 - 4y^2)\,dxdy$, D là đĩa elip trong mặt phẳng Oxy,

$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$. Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\theta$,

$y = \dfrac{1}{2} r\sin\theta$, ta tính được $V = \dfrac{\pi}{4}$.

e) Mặt nón $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ $(z \geqslant 0)$ cắt mặt elipxôit theo elip

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{1}{2}$ trong mặt phẳng $z = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$. Gọi D là đĩa elip trong mặt

phẳng Oxy, $D = \left\{(x, y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$. Thể tích của vật thể là :

$$V = \iint\limits_D \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dxdy.$$

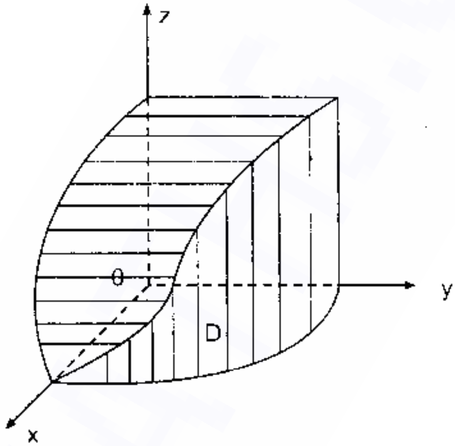
Chuyển sang tọa độ cực $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$,

$$V = abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\sqrt{1 - r^2} - r)\,rdr = \frac{\pi abc}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

f) Vật thể đối xứng qua ba mặt phẳng tọa độ. Phần của vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất được cho bởi $B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}\}$, trong đó D là $\frac{1}{4}$ hình tròn trong mặt phẳng Oxy :

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

$$V = 8 \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}\, dxdy$$



Hình 44

$$V = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = \frac{16}{3} a^3.$$

g) Mặt phẳng $z = 1 - x - y$ cắt mặt $z = xy$ theo giao tuyến mà hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là hipebôn

$$xy = 1 - x - y \Leftrightarrow y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Gọi D là miền tam giác OAB (A(1, 0), B(0, 1)) trong mặt phẳng Oxy. Hipebôn chia D thành hai miền

$$D_1 = \{(x, y) , 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1 - x}{1 + x}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \frac{1 - x}{1 + x} \leqslant y \leqslant 1 - x\}.$$

Vật thể B được xác định bởi

$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_1, 0 \leqslant z \leqslant xy\} \cup \{(x, y, z) : (x, y) \in D_2, 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$. Thể tích của vật thể là :

$$V = \iint\limits_{D_1} xydxdy + \iint\limits_{D_2} (1 - x - y)dxdy = \frac{17}{12} - 2\ln 2.$$

h) $V = \dfrac{\pi}{48}$.

i) $V = 12$.

j) Vật thể giới hạn phía trên bởi mặt phẳng $z = 4 - x - 2y$, phía dưới bởi mặt phẳng $z = 0$, xung quanh bởi mặt phẳng $y = 0$ và mặt trụ $x = 2y^2$. Gọi D là hình phẳng trong mặt phẳng Oxy giới hạn các đường thẳng $y = 0$, $x + 2y = 4$ và parabôn $x = 2y^2$. Vật thể được xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 4 - x - 2y\},$$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 2y^2 \leq x \leq 4 - 2y\}.$$

$$V = \iint\limits_{D} (4 - x - 2y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{2y^2}^{4-2y} (4 - x - 2y)dx = 3\frac{2}{5}.$$

41. Biểu diễn tham số của phần mặt cầu đã cho là

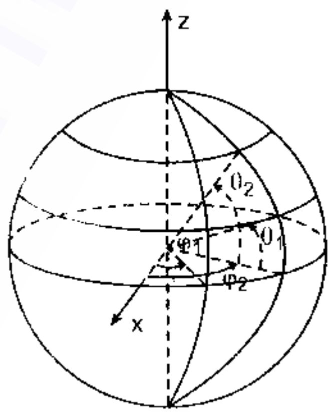
$$x = R\cos\theta\cos\varphi,$$

$$y = R\cos\theta\sin\varphi,$$

$$z = R\sin\theta,$$

$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Véctơ pháp tuyến của mặt tại điểm $M(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ là :



Hình 45

$$\vec{N}(\varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\cos\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= (R^2\cos^2\theta\cos\varphi,\ R^2\cos^2\theta\sin\varphi,\ R^2\sin\theta\cos\theta)$$

$||\vec{N}(\varphi, \theta)||^2 = R^4\cos^2\theta$. Diện tích phần mặt cầu đó là :

$$S = \iint_D ||\vec{N}(\varphi, \theta)||\ d\varphi d\theta,$$ D là hình chữ nhật :

$$D = [\varphi_1, \varphi_2] \times [\theta_1, \theta_2].$$

$$S = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

42. a) Mặt trụ cắt mặt phẳng Oxy theo đường tròn $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Gọi D là hình tròn tâm (1, 0) bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy. Diện tích của phần mặt nón nằm trong mặt trụ là :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\ dxdy,$$

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ 1 + z'^2_x + z'^2_y = 2.$$

$$S = \sqrt{2} \iint_D dxdy = \pi\sqrt{2}.$$

b) Phần mặt trụ cần tính diện tích có hình chiếu trên mặt phẳng Oxy là D, miền tam giác OAB với $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$.

Ta có $1 + z'^2_x + z'^2_y = 1 + 4x^2$.

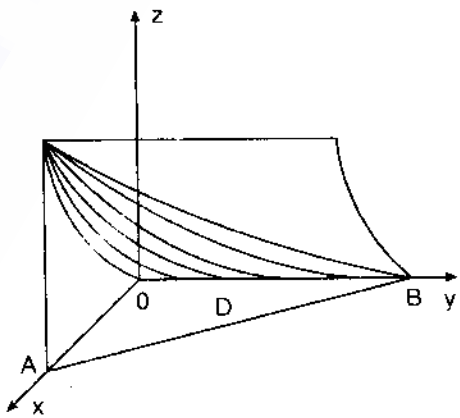
Diện tích phần mặt trụ đó là :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2}\ dxdy$$

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2} - x} \sqrt{1 + 4x^2}\ dy$$

$$S = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(2\sqrt{2} + 3).$$

c) S = 13.



Hình 46

d) Xem hình 44 trong bài tập 40f). Phần mặt trụ cần tính diện tích đối xứng qua ba mặt phẳng tọa độ. Phần mặt nằm trong góc phần tám thứ nhất có phương trình là : $z = \sqrt{4 - x^2}$.

Gọi D là $\frac{1}{4}$ hình tròn trong mặt phẳng Oxy :

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Ta có

$$z_x' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}},\ z_y' = 0\ ;\ 1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{4}{4 - x^2}.$$

Diện tích phần mặt trụ đó là :

$$S = 8\iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dxdy = 16\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\,dy = 32.$$

e) $S = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

f) Phần mặt cầu nằm trong mặt trụ đối xứng qua hai mặt phẳng Oxy và Oyz. Phương trình phần mặt cầu nằm về phía trên mặt phẳng Oxy là : $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Gọi D là nửa hình tròn trong mặt phẳng Oxy xác định bởi

$$D = \left\{(x, y) : x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4},\ x \geq 0\right\}. \text{ Ta có}$$

$$z_x' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},\ z_y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\ ;$$

$$1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Diện tích phần mặt cầu nằm trong mặt trụ là :

$$S = 4\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sin\theta} \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2a^2(\pi - 2).$$

g) Phần mặt cầu nằm trong mặt trụ đối xứng qua ba mặt phẳng tọa độ. Phương trình của nửa mặt cầu nằm về phía trên của mặt phẳng Oxy là : $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Ta có $1 + z'^2_x + z'^2_y = \dfrac{4}{4 - x^2 - y^2}$. Gọi D là $\dfrac{1}{4}$ đĩa elip nằm trong mặt phẳng Oxy : $D = \{(x, y) : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$. Diện tích cần tính là :

$$S = 8\iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy =$$

$$= 16\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \frac{dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{16}{3}\pi.$$

h) $S = \dfrac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1)$.

i) Phần mặt được xét đối xứng qua mặt phẳng Oxy. Phương trình phần mặt nằm về phía trên của mặt Oxy là : $z = \sqrt{2xy}$. Ta có

$$z_x' = \frac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}},\ z_y' = \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}},\ 1 + z'^2_x + z'^2_y = 1 + \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}.$$

Gọi D là hình chữ nhật trong mặt phẳng Oxy : $D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 4\}$.

Diện tích phần mặt đã nêu là :

$$S = 2\iint_D \sqrt{1 + \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}}\,dxdy = 2\int_0^1 dx \int_0^4 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy,$$

$$S = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)dy = \frac{40\sqrt{2}}{3}.$$

B. TÍCH PHÂN BA LỚP

1. a) $I = \dfrac{a^4}{24}$.

b) Bạn đọc hãy vẽ hình. Vật thể V đối xứng qua hai mặt phẳng Oxy và Oxz. Gọi V_1 là phần của vật thể V nằm trong góc phần tám thứ nhất. V_1 là khối tứ diện COEA với E(a, 0, 0). Phương trình của mặt phẳng CEA là : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$.

$V_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta,\ 0 \le z \le c\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)\}$, Δ là miền tam giác OEA. Vì hàm số $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2$ lấy cùng giá trị tại các điểm đối xứng qua hai mặt phẳng Oxy và Oxz nên

$$I = 4\iiint_{V_1} (x^2 + y^2)dxdydz = 4\iint_\Delta dxdy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}\right)} (x^2 + y^2)dz.$$

$$I = \frac{1}{15}abc(3a^2 + b^2).$$

c) $I = \dfrac{1}{12}ab^2(10b - 3a)$.

2. Ta có

$$(x + y + z)^3 = (x + z)^3 + 3(x + z)^2y + 3(x + z)y^2 + y^3,$$

$$I = \int_0^1 dy \iint_D (x+z)^3 dxdz + 3\int_0^1 ydy \iint_D (x+z)^2 dxdz$$

$$+ 3\int_0^1 y^2 dy \iint_D (x+z)dxdz + \int_0^1 y^3 dy \iint_D dxdz,$$

trong đó D là hình tròn đơn vị trong mặt phẳng Oxz : $D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 1\}$. Vì D đối xứng qua gốc O và hàm số $(x, z) \mapsto x + z$ lấy các giá trị đối nhau tại hai điểm (x, z) và $(-x, -z)$ nên $\iint_D (x+z)dxdz = 0$. Tương tự $\iint_D (x+z)^3 dxdz = 0$. Do đó

$$I = \frac{3}{2}\iint_D (x+z)^2 dxdz + \frac{1}{4}|D| = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

3. a) $I = \frac{1}{3}\pi R^2 h^3$.

b) B là hình trụ tròn xoay có đáy là hình tròn $(x-a)^2 + y^2 \leq a^2$, chiều cao b trong mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ trụ

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 dr \int_0^b zdz = \frac{16}{9}a^3b^2.$$

4. Chuyển sang tọa độ cầu.

a) $I = \frac{4}{15}\pi a^5$; b) $J = \pi a^4$.

5. Chuyển sang tọa độ cầu.

$$I = 2\pi(a^2 - b^2).$$

6. B là hình cầu tâm $I\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$, bán kính $\frac{1}{2}$.

Chuyển sang tọa độ cầu

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{10}.$$

7. B là hình cầu tâm $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, bán kính $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Chuyển sang tọa độ cầu

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi\sin\theta,\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi\sin\theta,\ z = \frac{1}{2} + r\cos\theta,$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + r^2 + r(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta)\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\pi\, r^2\left(\frac{3}{4} + r^2 + r\cos\theta\right) dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3r^2}{4} + r^4\right) dr + \pi\int_0^{\pi} \sin 2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^3 dr$$

$$= 2\pi \cdot 2\left(\frac{r^3}{4} + \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 0$$

$$I = \frac{3\sqrt{3}}{5}\pi.$$

8. B là phần của hình cầu tâm O, bán kính a nằm trong nửa trên của mặt nón tròn xoay $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ có trục là Oz, đường sinh tạo với trục góc $\frac{\pi}{4}$. Chuyển sang tọa độ cầu

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta \,.\, r^2\sin\theta d\theta$$

$$= \pi \int_0^{a} r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.$$

9. Chuyển sang tọa độ cực mở rộng

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi,\ z = cr\cos\theta,$$

ta có $J(r, \varphi, \theta) = abcr^2\sin\theta$,

$$I = abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1} abcr^3\sin^2\theta\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi r^2\sin\theta dr$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d(\sin\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi.$$

$$I = \frac{a^2b^2c^2}{48};$$

$$J = \frac{\pi abc^2}{16}.$$

12. Chứng minh tương tự như trong bài tập 11* phần A.

13. E là một tập hợp đóng và bị chặn trong $\mathbf{R}^3$ nên E là một tập hợp compắc. Do đó hàm số liên tục $f : E \to \mathbf{R}$ bị chặn trên E. Giả sử Q_0 là một điểm trong của E. Khi đó tồn tại một hình cầu $B_r = B[Q_0, r] \subset E$ $(r > 0)$. Theo giả thiết, $\iiint\limits_{B_r} f dxdydz = 0$. Theo định lí về giá trị trung bình của tích phân (xem bài tập 12) tồn tại một điểm $Q \in B_r$ sao cho

$$\iiint\limits_{B_r} f dxdydz = f(Q)\cdot\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Do đó $f(Q) = 0$. Khi $r \to 0$ thì $Q \to Q_0$. Vì f liên tục trên E, từ đó suy ra $f(Q_0) = 0$. Vậy f lấy giá trị không trên IntE. Do E đo được nên biên ∂E của nó có thể tích không. Từ đó

$$\iiint\limits_{E} f dxdydz = \iiint\limits_{\mathrm{int}\,E} f dxdydz + \iiint\limits_{\partial E} f dxdydz = 0.$$

14. Chuyển sang tọa độ cực, ta được

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^t f(r^2)r^2dr = 4\pi \int_0^t f(r^2)r^2dr.$$

Do đó

$$F'(t) = 4\pi f(t^2)t^2,\ t \geqslant 0.$$

15. a) Vật thể B được xác định bởi

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2(x^2 + y^2)\},$$

trong đó D là hình phẳng trong mặt phẳng Oxy xác định bởi

$$D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}.$$

Thể tích của vật thể B là : $2(x^2 + y^2)$

$$V = \iiint\limits_{B_1} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz$$

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \frac{3}{35}$$

b) $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \frac{7}{24}$.

c) $V = \frac{\pi h^3}{2}$.

d) Vật thể B giới hạn phía dưới bởi mặt nón tròn xoay $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, phía trên bởi mặt parabôlôit tròn xoay $z = 6 - x^2 - y^2$. Mặt nón cắt mặt parabôlôit theo đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trong mặt phẳng $z = 2$.

$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$,

D là hình tròn tâm O bán kính 2 trong mặt phẳng Oxy. Chuyển sang tọa độ trụ, ta được

$$V = \iiint_B dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_r^{6-r^2} dz = \frac{32\pi}{3}.$$

e) $V = \frac{\pi}{6}$.

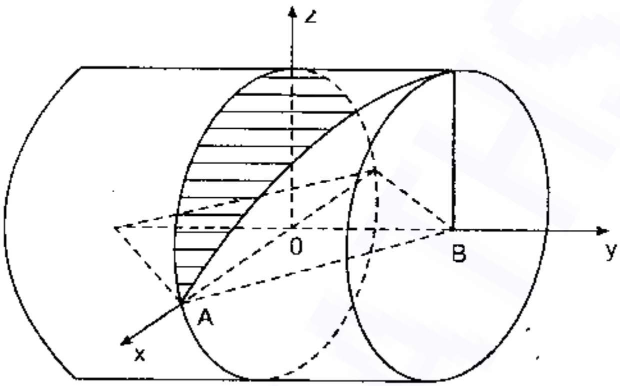
f) $V = \frac{5\pi a^3}{6}$.

g) $V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)$.

h) Vật thể B là phần hình cầu $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$ nằm trong mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$. Chuyển sang tọa độ cầu, ta được

$$V = \iiint_B dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^2 dr = \pi a^3.$$

i) Vật thể đối xứng qua ba mặt phẳng tọa độ. Gọi B là phần của vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất. Thể tích vật thể là :



Hình 47

$$V = 8 \iiint_B dxdydz = 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dz$$

$$V = 8 \int_0^a (a - x) \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 8a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, d(a^2 - x^2)$$

$$V = \frac{2a^3}{3} (3\pi - 4).$$

16. Thực hiện phép đổi biến số

$u = a_1x + b_1y + c_1z,\ v = a_2x + b_2y + c_2z,\ w = a_3x + b_3y + c_3z.$

Tập hợp A biến thành hình cầu

$$B = \{(u, v, w) : u^2 + v^2 + w^2 \leq R^2\}.$$

$$J(x, y, z) = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta \neq 0.$$

Thể tích vật thể A là : $V = \iiint\limits_{A} dxdydz$

Áp dụng công thức đổi biến số, ta được

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \iiint\limits_{B} dudvdw = \iiint\limits_{A} |\Delta|\, dxdydz =$$

$$= |\Delta| \iiint\limits_{A} dxdydz = |\Delta| V.$$

Do đó

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

C. Ứng dụng vật lí của tích phân bội

17. $m = 2\pi R^2 \delta$.

18. a) Diện tích của bản phẳng D là :

$$|D| = \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{a^2}{6}.$$

Trọng tâm G của bản phẳng có các tọa độ là

$$x_G = \frac{1}{|D|} \iint\limits_{D} xdxdy = \frac{6}{a^2} \int_0^a xdx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{a}{5}.$$

$$y_G = \frac{1}{|D|} \iint\limits_{D} ydxdy = \frac{a}{5}.$$

b) Trọng tâm G của bản phẳng có các tọa độ là :

$$x_G = -\frac{a}{2}\ ;\ y_G = \frac{8}{5}a.$$

19. Thể tích của vật thể B bằng $\frac{1}{8}$ thể tích của khối elipxôit :

$$V = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi abc = \frac{1}{6} \pi abc.$$

Trọng tâm G của vật thể có các tọa độ

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint_B x dxdydz \ ; \ y_G = \frac{1}{V} \iiint_B y dxdydz \ ;$$

$$z_G = \frac{1}{V} \iiint_B z dxdydz$$

Chuyển sang tọa độ cầu mở rộng $x = ar\sin\theta\cos\varphi$, $y = br\sin\theta\sin\varphi$, $z = cr\cos\theta$, ta được

$$x_G = \frac{6}{\pi abc} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 ar\sin\theta\cos\varphi \, . \, abcr^2\sin\theta dr = \frac{3}{8} a \ ;$$

$$y_G = \frac{3}{8} b \ ; \ z_G = \frac{3}{8} c.$$

20. a) Mômen quán tính của vật thể B đối với mặt phẳng Oxy là :

$$I_{xy} = \iiint_B z^2 dxdydz$$

Chuyển qua tọa độ cầu mở rộng, chú ý rằng vật thể đối xứng qua mặt phẳng Oxy và hàm số $(x, y, z) \mapsto z^2$ là chẵn đối với biến z, ta được

$$I_{xy} = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 c^2r^2\cos^2\theta \, . \, abc \, r^2\sin\theta dr$$

$$= -\frac{4\pi}{5}abc^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d(\cos\theta)$$

$$I_{xy} = \frac{4\pi}{15}abc^3\cos^3\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Mômen quán tính của vật thể đối với các mặt phẳng Oyz và Ozx là :

$$I_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc \; ; \; I_{zx} = \frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

b) Mặt nón $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ cắt mặt phẳng $z = c$ theo elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi D là đĩa elip trong mặt phẳng Oxy :

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Mômen quán tính của vật thể V đối với mặt phẳng Oxy là :

$$I_{xy} = \iiint_B z^2 dxdydz$$

Chuyển sang tọa độ trụ mở rộng

$x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, $z = z$, ta được

$$I_{xy} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{cr}^{c} z^2 abrdz$$

$$= \frac{2}{3}\pi abc^3 \int_0^1 r(1 - r^3)dr ,$$

$$I_{xy} = \frac{1}{5}\pi abc^3.$$

Tương tự, ta tính được

$$I_{yz} = \iiint\limits_{B} x^2 dxdydz = \frac{1}{20}\pi a^3 bc.$$

và

$$I_{zx} = \iiint\limits_{B} y^2 dxdydz = \frac{1}{20}\pi ab^3 c.$$

MỤC LỤC

Trang

Chương X. TÍCH PHÂN SUY RỘNG. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Chương XI. TÍCH PHÂN BỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu:
VŨ MAI HƯƠNG

Biên tập tái bản:
TRẦN PHƯƠNG DUNG

Trình bày bìa:
TẠ TRỌNG TRÍ

Sửa bản in:
ĐẶNG THỊ MINH THU

Sắp chữ:
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

GIẢI TÍCH – TẬP HAI

Mã số : 7K280T7 – DAI

In 1.000 bản (QĐ88), khổ 14,5 x 20,5cm. Tại Nhà in Hà Nam
Số 29 - Đường Lê Hoàn - TX. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 474. Số ĐKKH xuất bản: 11-2007/CXB/218-2119/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2007.

GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH
LÝ THUYẾT
VÀ
BÀI TẬP
CÓ HƯỚNG DẪN

TẬP 2