TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
7 2008
Số 373

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 45
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04)5121607; ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)5144272, (04)5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Toàn cảnh trường Đại học dân lập Thăng Long

Giới thiệu sách giáo khoa
HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO

HOẠT ĐỘNG CỦA TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THTT với ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam

Sáng 20.6.2008 tại Hội trường B Nhà xuất bản Giáo dục tại Hà Nội, Tòa soạn Tạp chí THTT đã tổ chức kỉ niệm 83 năm ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam kết hợp với họp Hội đồng biên tập năm 2008. Đến dự có GS. TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, nguyên Tổng biên tập Tạp chí THTT; GS. TSKH Ngô Việt Trung, Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam; GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; TS Trần Đình Châu, Giám đốc Dự án THCS, Bộ Giáo dục và Đào tạo. Về phía Nhà xuất bản Giáo dục có PGS. TS Phan Doãn Thoại, Phó Tổng biên tập NXBGD kiêm Tổng biên tập Tạp chí THTT; Ông Lê Trí Tú, Chánh Văn phòng NXBGD; Th.S Vũ Kim Thủy, Phó Tổng biên tập Tạp chí Toán Tuổi thơ; Bà Phan Thị Thuận, Phó Trưởng phòng QLXB-TTTT NXBGD; Ban Giám đốc Công ti Cổ phần In Diên Hồng; Đại diện Công ti Phát hành Báo chí Trung ương; Các ủy viên Hội đồng biên tập, các cộng tác viên thân thiết của Tạp chí và toàn thể cán bộ Tòa soạn. TS Phạm Thị Bạch Ngọc, Phó Tổng biên tập đã báo cáo tổng kết hoạt động của Tạp chí trong năm vừa qua và sáu tháng đầu năm 2008. Tiếp đó là các ý kiến phát biểu của GS. TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, GS. TSKH. Ngô Việt Trung, PGS. TSKH Vũ Đình Hòa, Th.S Nguyễn Anh Dũng... xoay quanh việc cải tiến về nội dung và hình thức tạp chí sao cho phù hợp tình hình mới.

Buổi tọa đàm kết thúc trong không khí vui vẻ, đầm ấm của những thế hệ viết báo, đọc báo và xây dựng tờ Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ.

Nhân dịp này THTT xin chân thành cảm ơn các đơn vị Nhà xuất bản Giáo dục, Công ti phát hành Báo chí Trung ương, Công ti cổ phần in Diên Hồng, Công ti Cổ phần in SGK tại TP. Hà Nội, NXB Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh, Tạp chí Toán Tuổi Thơ đã gửi lẵng hoa và thiếp chúc mừng đến tạp chí.

THTT với Hội nghị Tập huấn giáo viên cốt cán tại Hải Phòng

Trong các ngày từ 3 đến 9.7.2008 tại Thị xã Đồ Sơn, Hải Phòng, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức Hội nghị Tập huấn giáo viên cốt cán thực hiện chương trình SGK lớp 12 THPT năm học 2008 - 2009 cho môn Toán và môn Tiếng Anh của 32 tỉnh, thành phố phía Bắc. Nhân dịp này, đoàn cán bộ Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ đã tặng tạp chí số 372-tháng 6 năm 2008 (có bài giới thiệu SGK Giải Tích 12 mới) cho các giáo viên Toán tham dự tập huấn, đồng thời tổ chức buổi trao đổi với các tác giả viết SGK, các cán bộ của Sở Giáo dục-Đào tạo và các giáo viên cốt cán môn Toán về nội dung và phương hướng hoạt động của tạp chí trong tình hình mới. Các giáo viên Toán rất vui mừng đón nhận các ấn phẩm của Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ đã xuất bản trong thời gian qua và mong rằng trong thời gian tới tạp chí sẽ có nhiều đổi mới, có nhiều ấn phẩm hay phục vụ rộng rãi hơn cho các bạn đọc trong cả nước.

Cùng lượng giác HÀNH HƯƠNG VỀ CỘI NGUỒN "Thánh địa Hình học phẳng Euclide"

LÊ QUỐC HÂN
(GV ĐH Vinh, Nghệ An)

Lượng giác có nguồn gốc từ Hình học, điều này ai cũng biết. Nhưng càng học lên, đặc biệt là khi thiết lập được các công thức liên hệ giữa các hàm số lượng giác, người học cảm thấy Lượng giác như một bộ phận của Đại số (và Giải tích). Các dạng toán cơ bản của Lượng giác hoàn toàn mất đi hình ảnh đặc trưng của Hình học phẳng, vốn là cội nguồn của chúng. Hơn nữa, chúng ta dường như chỉ thấy vai trò quan trọng của việc sử dụng công cụ lượng giác để giải các bài toán hình học, mà ít thấy vai trò của hình học trong việc giải các bài toán lượng giác. Dưới đây, chúng ta với hành trang là các bài toán lượng giác sẽ trở về "Thánh địa Hình học phẳng Euclide". Một cuộc trở về nguồn khá thú vị, vì các bạn sẽ thấy một loạt bài toán lượng giác không đơn giản được giải bằng công cụ chính là các kiến thức hình học phẳng với một kiến thức lượng giác duy nhất: *Định nghĩa hàm số lượng giác của các góc nhọn.*

1. Tính giá trị hàm số lượng giác của một số góc gần đặc biệt

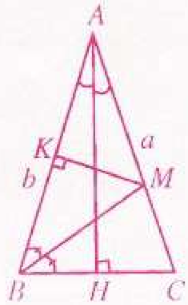
Khi mới tiếp xúc với môn Lượng giác, các bạn đã biết cách tính hàm số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt như 30°, 45°, 60°, ... Với những góc có mối liên quan với các góc đó (chẳng hạn: 15° = 45° – 30°; 18° = 90° : 5 ; ...), ta tạm gọi là góc *gần đặc biệt*.

✪**Bài toán 1.** a) *Tính* sin 18°.

b) *Chứng minh đẳng thức* $\cos 36^\circ . \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$.

Lời giải. a) *Nhận xét.* $18^\circ = \frac{36^\circ}{2}$ và $36^\circ = \frac{180^\circ}{5}$.

Dựng tam giác ABC có $AB = AC = b$ và $\widehat{BAC} = 36^\circ$. Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72^\circ$. Dựng đường phân giác BM của tam giác ABC. Khi đó ΔBCM cân tại B (do $\widehat{BMC} = \widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ = \widehat{BCA}$, từ đó $BM = BC = a$ (h. 1).



Hình 1

Hơn nữa ΔABM cân tại M, vì có $\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 36^\circ$ nên $AM = BM = a$.

Vì BM là phân giác trong của ΔABC nên

$$\frac{AM}{MC} = \frac{BA}{BC} \text{ hay } \frac{a}{b-a} = \frac{b}{a},$$

suy ra $a^2 + ab - b^2 = 0$, từ đó $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kẻ $AH \perp BC$, khi đó $BH = HC = \frac{a}{2}$ và $\widehat{BAH} = \widehat{HAC} = 18^\circ$ nên $\sin 18^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2b} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

b) Kẻ $MK \perp AB$, khi đó $AK = KB = \frac{b}{2}$ nên

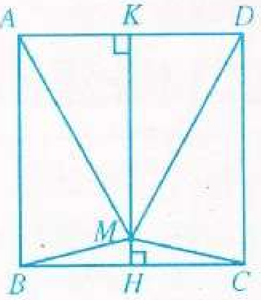
$$\cos 36^\circ = \cos \widehat{KAM} = \frac{MK}{AM} = \frac{b}{2a}.$$

Mặt khác $\cos 72^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{a}{2b}$

nên $\cos 36^\circ . \cos 72^\circ = \frac{b}{2a} . \frac{a}{2b} = \frac{1}{4}$. ❐

Chú ý rằng nếu chỉ sử dụng kiến thức lượng giác thì lời giải của bài toán trên cũng không đơn giản chút nào.

Bài toán 2. *Tính* $\tan 15°$.



Hình 2

Lời giải. Ta sử dụng bài toán quen thuộc sau đây: *"Trong hình vuông ABCD cạnh bằng a lấy điểm M sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 15°$. Khi đó tam giác ADM là tam giác đều".*

Gọi H và K thứ tự là trung điểm AD và BC (h. 2). Khi đó HK đi qua M, $HK = AB = a$ và $MH \perp BC$ nên

$$\tan 15° = \tan\widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} \quad (1)$$

Vì ΔAMD là tam giác đều cạnh a và MK là đường cao nên $MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$MH = KH - MK = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Ta lại có $BH = HC = \dfrac{a}{2}$ nên thay vào (1) ta có

$\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$. □

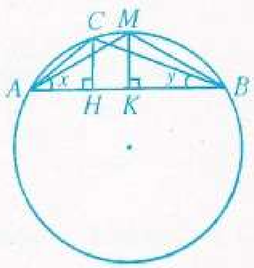
2. Chứng minh bất đẳng thức và đẳng thức lượng giác

Bài toán 3. *Cho x và y là hai góc nhọn thoả mãn điều kiện $x + y = 30°$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\cot x + \cot y \geq 2\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Lời giải. Dựng tam giác ABC có $\widehat{CAB} = x$, $\widehat{CBA} = y$ và $AB = a$ tuỳ ý.

Gọi M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{ACB}$. Khi đó $\overset{\frown}{ACB} = 150°$ (vì $x + y = 30°$) và $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 150°$, suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$ (h. 3).



Hình 3

Gọi H và K thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ C và M xuống AB. Khi đó

$CH \leq MK = AK.\tan 15° = \dfrac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ (xem kết quả bài toán 2).

Lại có $AH = CH.\cot x$, $HB = CH.\cot y$ nên

$AH + HB = CH.(\cot x + \cot y)$

$\leq MK(\cot x + \cot y)$

$\Rightarrow a \leq \dfrac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}(\cot x + \cot y)$. Suy ra

$\cot x + \cot y \geq 2(2+\sqrt{3})$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 15°$. □

Chú ý 1) Từ bài toán 3 có thể suy ra kết quả như sau:

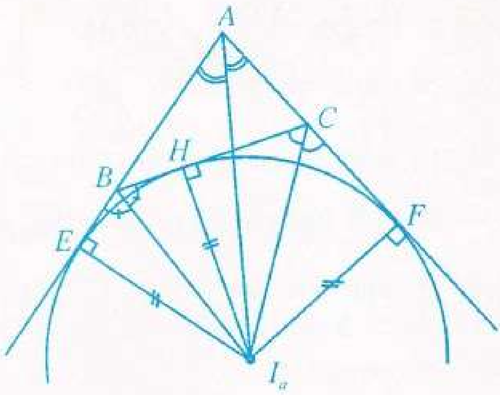
Nếu x và y là hai góc nhọn thay đổi nhưng luôn thoả mãn điều kiện $x + y = 30°$ thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\cot x + \cot y$ bằng $2\left(2+\sqrt{3}\right)$ khi $x = y = 15°$.

2) *Tổng quát.* Nếu x, y là hai góc nhọn thay đổi nhưng luôn luôn thoả mãn điều kiện $x + y = \alpha$, trong đó α là góc nhọn cho trước thì $\cot x + \cot y$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2\cot\dfrac{\alpha}{2}$ khi $x = y = \dfrac{\alpha}{2}$.

3. Chứng minh một số hệ thức trong tam giác

Trước hết, ta đưa vào một khái niệm mới so với sách giáo khoa toán THCS hiện hành.

Cho tam giác ABC. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và hai cạnh kia kéo dài được gọi là đường tròn bàng tiếp của tam giác. Như vậy, một tam giác ABC có ba đường tròn bàng tiếp ứng với ba góc A, B, C của tam giác đó. Xét đường tròn bàng tiếp góc A. Tâm I_a của đường tròn này là giao điểm của đường phân giác trong của góc BAC và hai đường phân giác ngoài của các góc ABC và ACB của tam giác ABC. Gọi H, E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ I_a xuống BC, AB, AC. Khi đó $I_aH = I_aE = I_aF = r_a$ là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A (h. 4).



Hình 4

Đặt $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$ và $2p = a + b + c$.

Ta có $AE + AF = AB + BE + AC + CF$

$= BC + AC + AB = a + b + c$.

Do đó $AE = AF = p$.

Trong tam giác vuông AEI_a có

$\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{I_aE}{AE} = \dfrac{r_a}{p}$ nên $r_a = p\tan\dfrac{A}{2}$.

Tương tự có $r_b = p\tan\dfrac{B}{2}$, $r_c = p\tan\dfrac{C}{2}$.

Gọi S là diện tích tam giác ABC. Theo công thức Heron có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Mặt khác $S = S_{\Delta AI_aE} + S_{\Delta AI_aF} - S_{\Delta BI_aC}$ nên

$2S = b.r_a + c.r_a - a.r_a = (b + c - a).r_a$

$=(a + b + c - 2a).r_a = (2p - 2a).r_a$.

Vậy $S = (p - a)r_a$, hay $r_a = \dfrac{S}{p-a}$.

Tương tự có $r_b = \dfrac{S}{p-b}$, $r_c = \dfrac{S}{p-c}$,

từ đó $r_a.r_b = \dfrac{S^2}{(p-a)(p-b)} = p(p-c)$.

Tương tự

$r_b.r_c = p(p-a)$; $r_c.r_a = p(p-b)$.

Do đó

$r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a = p((p-a) + (p-b) + (p-c))$.

$= p(3p - (a + b + c)) = p^2$ (1)

Lại có

$r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a$

$= p.\tan\dfrac{A}{2}.p.\tan\dfrac{B}{2} + p.\tan\dfrac{B}{2}.p.\tan\dfrac{C}{2} + p.\tan\dfrac{C}{2}.p.\tan\dfrac{A}{2}$

$= p^2\left(\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}.\tan\dfrac{A}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta đã giải được bài toán sau.

✪Bài toán 4. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có hệ thức*

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. a) Tính $\sin 15°$ và $\cos 15°$.

b) Chứng minh rằng $\tan 36°.\tan 72° = \sqrt{5}$.

2. Cho α và β là hai góc nhọn thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta = 45°$.

a) Chứng minh hệ thức

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha.\tan\beta = 1$.

b) Chứng minh bất đẳng thức

$\tan\alpha + \tan\beta \geq \sqrt{2} - 1$.

3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có các hệ thức:

a) $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}$

$= \cot\dfrac{A}{2}\,.\,\cot\dfrac{B}{2}\,.\,\cot\dfrac{C}{2}$.

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG ĐHSP TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2007 - 2008

Đề chung cho các lớp chuyên Toán, Văn, Pháp

(Đề thi đã đăng trên THTT số 372, tháng 6 năm 2008)

Câu 1. 1) Ta có

$$A=\frac{\sqrt{x}\left(16-\sqrt{x}\right)-\left(3+2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$-\frac{\left(2-3\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

2) Ta có $a.c = -2.13 = -26 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2.

Theo hệ thức Viète ta có

$$x_1+x_2=-\frac{17}{2};\ x_1x_2=-\frac{13}{2}.$$

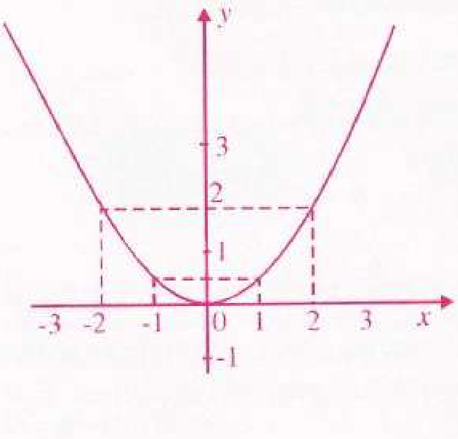
Từ đó

$$S=\frac{4x_1^2+7x_1x_2+4x_2^2}{3x_1^2x_2+3x_1x_2^2}=\frac{4(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{3x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{394}{221}.$$

Câu 2. 1) TXĐ: $\mathbb{R}$

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y=\frac{x^2}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



2) Ta có PT hoành độ giao điểm của (D) và (P) là $\frac{x^2}{2}=m(x+1)$ hay $x^2-2mx-2m=0$ $(*)$

Ta có (D) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow m(m+2)=0$

$\Leftrightarrow m=-2$ (do $m\neq 0$).

Với $m=-2$ thì PT $(*)$ có nghiệm kép $x=-2$, suy ra $y=2$. Toạ độ tiếp điểm là $(-2\ ;\ 2)$.

Câu 3. 1) Đặt $x^2-x+1=y$ $(y>0)$. PT đã cho trở thành

$y-\frac{13}{y}-12=0 \Leftrightarrow y^2-12y-13=0$

$\Leftrightarrow y=-1<0$ (loại) hoặc $y=13$.

Với $y=13$ ta có $x^2-x-12=0$

$\Leftrightarrow x=4$ hoặc $x=-3$.

Vậy tập nghiệm của PT là $\{-3;4\}$.

2) ĐK: $x\neq -1$; $y\neq 3$. Đặt $\frac{x}{x+1}=X$; $\frac{y}{y-3}=Y$.

Khi đó hệ PT đã cho trở thành $\begin{cases}5X+Y=27\\2X-3Y=4.\end{cases}$

Giải hệ trên ta được nghiệm $(X;Y)=(5\ ;\ 2)$.

- Từ $X=5$, ta có $\frac{x}{x+1}=5$, tìm được $x=-\frac{5}{4}$.
- Từ $Y=2$, ta có $\frac{y}{y-3}=2$, tìm được $y=6$.

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm $(x\ ;\ y)=\left(-\frac{5}{4};6\right)$.

Câu 4. Gọi số cần tìm là n. Theo giả thiết ta có $n=2005x+23=2007y+32$ $(x,y\in\mathbb{N})$.

Từ đó suy ra $2y+9=2005(x-y)$.

(Xem tiếp trang 7)

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Bình luận ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A năm 2008

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Đề thi Tuyển sinh đại học môn Toán Khối A năm nay sát với chương trình phổ thông. Đề thi gồm 5 câu, mỗi câu có hai ý nhỏ: ý 1) trong các câu đều rất cơ bản, ý 2) khó hơn nhằm phân loại trình độ học sinh. Câu khó nhất trong đề là câu IV 2. Sau đây là lời giải một số câu trong đề thi và một số lưu ý về các lời giải đó.

CÂU I. *Cho hàm số*

$$y=\frac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m} \qquad (1)$$

với m là tham số thực.

1) *Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số* (1) *khi* $m=1$.

2) *Tìm các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số* (1) *bằng* 45°.

Hướng dẫn giải. 2) $y=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$.

Khi $m\neq\dfrac{1}{3}$ và $m\neq 0$, đồ thị có tiệm cận đứng $x=-3m$ và tiệm cận xiên $y=mx-2$. Hai đường tiệm cận này hợp với nhau một góc 45° khi và chỉ khi đường tiệm cận xiên tạo với trục hoành một góc 45° hoặc 135°.

Ta được $m=\tan 45^\circ=1$ hoặc $m=\tan 135^\circ=-1$.

LƯU Ý. Hai đường tiệm cận đứng và xiên tạo với nhau một góc α thì tiệm cận xiên tạo với trục hoành góc $90^\circ-\alpha$ hoặc $90^\circ+\alpha$. Khi đó hệ số góc của tiệm cận xiên là $k=\cot\alpha$ hoặc $k=-\cot\alpha$.

Ta cũng có thể giải cách khác xác định vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ của hai tiệm cận, rồi tính $\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BÀI LUYỆN TẬP. *Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số* $y=\dfrac{(m+1)x^2+(4m-3)x+m-2}{x-m}$ *bằng* 30°.

CÂU II. 1) *Giải phương trình*

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right).$$

Hướng dẫn giải. PT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

ĐK $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$ hay $\sin 2x\neq 0$.

Biến đổi PT thành

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\sin 2x\right)=0.$$

Đáp số: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi$;

$$x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

LƯU Ý. Khi biến đổi PT lượng giác về dạng tích nên lưu ý các công thức sau để nhận biết thừa số chung

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

CÂU II. 2) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4}\\[2mm] x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

Hướng dẫn giải. Hệ PT tương đương với

$$\begin{cases}(x^2+y)+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4}\\[2mm] (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = xy \end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases} u + uv + v = -\dfrac{5}{4} \\ u^2 + v = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Trừ theo vế của PT thứ hai cho PT thứ nhất, ta được $u(u-v-1)=0$, hay $u=0$ hoặc $u-v-1=0$.

• Với $u = 0$, ta được

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$$

• Với $u - v - 1 = 0$, tìm được $u = -\dfrac{1}{2}$, $v = -\dfrac{3}{2}$

$$\begin{cases} x^2 + y = -\dfrac{1}{2} \\ xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x - 3 = 0 \\ y = -\dfrac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{-3}{2}. \end{cases}$$

Đáp số: Hệ có hai nghiệm $(x\,;y)$ là

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}};-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right), \left(1;-\frac{3}{2}\right).$$

CÂU IV. 1) *Tính tích phân* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$

Hướng dẫn giải. Ta có

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x(1-\tan^2 x)}\mathrm{d}x$$

Đặt $t = \tan x$ thì $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^4}{1-t^2}\mathrm{d}t$. Từ đó

$$I = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (t^2+1)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{10}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

LƯU Ý. Khi tìm tích phân dạng $\displaystyle\int \frac{f(\tan x)}{\cos 2x}\mathrm{d}x$ hoặc $\displaystyle\int \frac{f(\tan x)}{\sin 2x}\mathrm{d}x$, ta viết $\cos 2x = \cos^2 x\left(1-\tan^2 x\right)$; $\sin 2x = 2\cos^2 x.\tan x$.

Rồi đặt $t = \tan x$, lúc đó $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Sau đó đưa chúng về các tích phân cơ bản.

CÂU IV. 2) *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt*

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Hướng dẫn giải. Đặt vế trái của PT là $f(x)$, $x \in [0\,;6]$. Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{2.\sqrt[4]{(6-x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}$$
$$= \frac{\left(\sqrt[4]{6-x}\right)^3 - \left(\sqrt[4]{2x}\right)^3}{2\sqrt[4]{(2x)^3.(6-x)^3}} + \frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}.\sqrt{6-x}}$$

Nhận thấy hai số hạng của $f'(x)$ luôn cùng dấu với nhau nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Lập bảng biến thiên

x	0		2		6
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	↗	$3\sqrt{2}+6$	↘	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

ta thấy PT $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt khi $2\sqrt[4]{6} + 2\sqrt{6} \le m < 3\sqrt{2} + 6$.

LƯU Ý. Đây là bài toán khó về ứng dụng khảo sát hàm số để biện luận nghiệm của PT. Việc tính đạo hàm và xét dấu của đạo hàm là không đơn giản. Đòi hỏi học sinh có kĩ năng tính toán vững mới giải được.

BÀI LUYỆN TẬP. *Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $3x + 2 - m\sqrt{x^2+3} = 0$.

CÂU Va. 2) *Cho khai triển*

$$(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ *và các hệ số* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *thoả mãn hệ thức* $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. *Tìm số lớn nhất trong các số* $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $f(x) = (1+2x)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ thì

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} = 4096,$$

suy ra $2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.

Từ $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k$ suy ra

$a_k = 2^k.C_{12}^k$; $a_{k+1} = 2^{k+1}.C_{12}^{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, ..., 11)$

Ta có

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{2^k C_{12}^k}{2^{k+1} C_{12}^{k+1}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2(12-k)} \le 1$$

$\Leftrightarrow k \le \dfrac{23}{3}$.

Mà $k \in \mathbb{N}$ nên $k \le 7$.

Tương tự $\dfrac{a_k}{a_{k+1}} \ge 1 \Leftrightarrow k > 7$.

Do đó $a_0 < a_1 < ... < a_8$, $a_8 > a_9 > ... > a_{12}$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = 2^8.C_{12}^8 = 126720$.

LƯU Ý. Khi tìm hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $(ax+b)^n$, ta làm như sau :

Tìm hệ số a_k, a_{k+1} ; xét BĐT $a_k \le a_{k+1}$; hệ số có giá trị lớn nhất tương ứng với chỉ số k lớn nhất thoả mãn BĐT trên.

BÀI LUYỆN TẬP. *Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển* $(1+\sqrt{2})^n$ *biết rằng* $C_n^3 = 3C_{n+1}^2 + n$.

CÂU Vb. 1) *Giải phương trình*

$$\log_{2x-1}(2x^2+x-1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4.$$

Hướng dẫn giải. ĐK $x > \dfrac{1}{2}, x \ne 1$. PT được biến đổi thành

$$\log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) - 3 = 0.$$

Đặt $t = \log_{2x-1}(x+1)$, ta được

$$t + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2. \end{array}\right.$$

PT có hai nghiệm $x = 2$ và $x = \dfrac{5}{4}$.

LƯU Ý. Nếu trong PT có số hạng $\log_{u(x)} v(x)$ thì ta có điều kiện tương ứng là $u(x) > 0$, $u(x) \ne 1$, $v(x) > 0$ và đặt $t = \log_{u(x)} v(x)$ lúc đó $\log_{v(x)} u(x) = \dfrac{1}{t}$.

BÀI LUYỆN TẬP. *Giải bất phương trình*

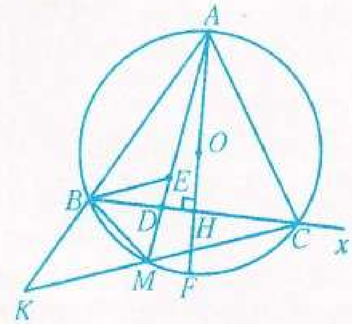
$$\log_{2x}\frac{8}{x} + \log_{\frac{8}{x}} 32x > 4.$$

LỜI GIẢI... *(Tiếp trang 4)*

Dễ thấy $y = 998$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn $2y + 9 \,\vdots\, 2005$. Vậy số n nhỏ nhất cần tìm là $n = 2007.998 + 32 = 2003018$.

Câu 5.

1) Trên đoạn MA lấy điểm E sao cho $ME = BM$. Dễ thấy tam giác MBE đều. Suy ra $MB = EB$.



Lại có

$\widehat{MBC} + \widehat{CBE} = \widehat{CBE} + \widehat{EBA} = 60°$

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{EBA}$; $AB = CB$.

Từ đó suy ra $\Delta BAE = \Delta BCM$ (c.g.c), dẫn đến $EA = MC$.

Vậy $AM = ME + EA = MB + MC$.

2) Ta có $\Delta AMB \backsim \Delta ABD$ (g.g) (vì có góc BAM chung và $\widehat{AMB} = \widehat{ABD} = 60°$), do đó $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AB}{AD}$. Vậy $AM.AD = AB^2$ (không đổi).

3) Kẻ đường kính AF của đường tròn (O) cắt BC tại H. Dễ thấy $AH \perp BC$. Ta có AM là dây cung của đường tròn (O) nên $AM \le AF$ (1)

Lại có $AH \perp BC$ nên $AH \le AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MD \le HF$. Vậy MD lớn nhất bằng HF khi và chỉ khi M trùng F. Khi đó $DM = HF = \dfrac{R}{2}$.

4) Ta có $\widehat{BKM} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BM}}{2} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BM}}{2}$

$= \widehat{MAC} = \widehat{MBC}$.

Vậy góc tạo bởi tia BC với dây cung BM của đường tròn qua ba điểm K, B, M bằng số đo góc chắn cung $\overset{\frown}{BM}$ của đường tròn đó. Suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKM.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh) giới thiệu.

PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN

Sử dụng tính chất của các phần tử THUỘC ĐOẠN [0 ; 1], [-1 ; 1] để giải toán

NGUYỄN LƯU
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải khác nhau, nếu chúng ta biết khai thác giả thiết một cách tường tận thì có thể tìm ra những lời giải hay. Tuy nhiên với các bài toán khó thì việc tìm ra được một lời giải hay một phương pháp giải chung cho cả lớp bài toán đó lại càng phức tạp. Đối với một số bài toán với giả thiết đã cho nếu ta chuẩn hóa các biến số, đưa các biến số này về các biến số mới, lấy giá trị trong [0 ; 1] hoặc [−1 ; 1] thì ta nhận được các bài toán đơn giản hơn rất nhiều. Để làm được điều đó chúng ta cần một số tính chất cơ bản sau đây.

a) Nếu $0 \le x \le 1$ *thì* $x \ge x^2 \ge x^3 \ge \dots \ge x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

b) Nếu $-1 \le x \le 1$ *thì* $|x| \ge x^2 \ge x^4 \ge x^6 \ge .. \ge x^{2k},\ k \in \mathbb{N}^*$.

c) Nếu $x_1^{2k} + x_2^{2k} + \dots + x_n^{2n} = 1,\ k \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^*$ *thì* $|x_i| \le 1$, *với mọi* $i = 1, 2, \dots, n$.

d) Nếu $x_1^{2k} + x_2^{2k} + \dots + x_n^{2k} = t^{2k}$ $(k, n \in \mathbb{N}^*, t \ne 0)$ *thì* $\left|\dfrac{x_i}{t}\right| \le 1$, *với mọi* $i = 1, 2, \dots, n$.

e) Nếu $-1 \le x, y \le 1$ *thì có thể đặt* $x = \sin\alpha,\ y = \cos\alpha$.

Sau đây là một số thí dụ minh họa.

★Thí dụ 1. *Cho* $x^2+y^2+z^2 = k$, $k > 0$ *cho trước. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức*

$$A=k(xy+yz+zx)+\frac{1}{2}\left(x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2\right).$$

Lời giải. Đặt $\dfrac{x}{\sqrt{k}}=a$, $\dfrac{y}{\sqrt{k}}=b$; $\dfrac{z}{\sqrt{k}}=c$ ta đưa bài toán về dạng

Cho $a^2+b^2+c^2=1$. *Tìm GTLN của biểu thức*

$$A = k^2\left(ab+bc+ca+\frac{1}{2}(a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2)\right).$$

Từ giả thiết, liên hệ tới tính chất c) suy ra $a^2 \le 1$; $b^2 \le 1$; $c^2 \le 1$. Do đó

$$A \le k^2\left(ab+bc+ca+\frac{1}{2}((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)\right)=k^2.$$

Vậy A đạt GTLN là k^2 khi $x = y = z = \pm\dfrac{k}{3}$. □

★Thí dụ 2. *Cho* $a, b, c \in [0 ; 2]$ *và* $a + b + c = 3$. *Chứng minh rằng* $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

Lời giải. Đây là bài toán có thể giải bằng nhiều cách như biến đổi tương đương sử dụng các hằng đẳng thức, sau đó sử dụng các bất đẳng thức cơ bản để đánh giá, hoặc sử dụng phương pháp quy về một biến rồi dùng đạo hàm. Sau đây ta sẽ sử dụng phương pháp đã nêu để giải.

Rõ ràng với giả thiết như trên thì ba biến a, b, c đều thuộc đoạn [0 ; 2]. Ta có thể đưa bài toán về bài toán mới với ba biến thuộc đoạn [−1 ; 1] như sau:

Đặt $a = 1 + x$, $b = 1 + y$, $c = 1 + z$, thế thì $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $|z| \le 1$ và $x + y + z = 0$ (*)

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = (1 + x)^2 + (1 + y)^2 + (1 + z)^2$

$= 3 + 2(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = 3 + x^2 + y^2 + z^2$.

Bài toán trên trở thành:

Chứng minh rằng với các điều kiện (*) thì

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2.$$

Vai trò các số x, y, z như nhau nên có thể giả thiết $-1 \le x \le y \le z \le 1$.

Vì $x^2 + y^2 + z^2 \le |x| + |y| + |z|$ (1) nên khi xét dấu của x, y, z chỉ có thể xảy ra các trường hợp sau:

1) $-1 \le x \le y \le z \le 0$. Thế thì
$|x| + |y| + |z| = -(x + y + z) = 0$.

2) $-1 \le x \le y \le 0 < z \le 1$. Thế thì
$|x| + |y| + |z| = -x - y + z = -(x + y + z) + 2z$
$= 2z \le 2$.

3) $-1 \le x \le 0 < y \le z \le 1$. Thế thì
$|x| + |y| + |z| = -x + y + z = -2x + (x + y + z)$
$= -2x \le 2$.

4) $0 < x \le y \le z \le 1$. Trường hợp này không thể xảy ra, vì $x + y + z = 0$. Như vậy ta luôn có $|x| + |y| + |z| \le 2$, kết hợp với (1) ta có bất đẳng thức cần chứng minh. ❐

Qua việc giải bài toán trên ta thấy với điều kiện của các biến đã cho thuộc các đoạn rộng hơn và chứa các đoạn [0 ; 1] hoặc [−1 ; 1] ta có thể chuẩn hóa để đưa bài toán về xét các biến trên các đoạn [0 ; 1] hoặc [−1 ; 1].

★Thí dụ 3. *Tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn hệ thức $a^{2008} = b^{2008} + c^{2008}$. Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.*

Lời giải. *Cách 1.* Từ đẳng thức đã cho và để ý đến tính chất d) ta có ngay cách giải:

Từ $a^{2008} = b^{2008} + c^{2008}$ suy ra $a > b$ và $a > c$.

Suy ra $0 < \dfrac{b}{a} < 1$; $0 < \dfrac{c}{a} < 1$.

Hệ thức đã cho ở đề bài tương đương với

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{2008} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2008} < \left(\frac{b}{a}\right)^{2} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2}.$$

Từ đó có $b^2 + c^2 < a^2$. Từ định lí côsin cho ΔABC ta thấy $\cos A > 0$ nên góc A nhọn.

Vì a là cạnh lớn nhất nên A là góc lớn nhất, suy ra đpcm.

Cách 2. Sử dụng nhị thức Newton. Biến đổi
$a^{2008} = b^{2008} + c^{2008} \Leftrightarrow$
$(a^2)^{1004} = (b^2 + c^2)^{1004} - M$ với $M > 0$.

Từ đó suy ra $a^2 < b^2 + c^2$. ❐

Sử dụng các phương pháp giải trên ta có thể giải bài toán tổng quát hơn:

Tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn hệ thức $a^n = b^n + c^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$. Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

★Thí dụ 4. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt[2009]{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}} \le \sqrt[2008]{a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}}$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đây là một bài toán hay về chứng minh bất đẳng thức. Nếu để ý tới tổng các lũy thừa đồng bậc dưới dấu căn làm ta liên tưởng ngay đến tính chất c), d) đã nêu ở trên. Từ đó ta có cách giải sau:

Đặt $\sqrt[2008]{a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}} = t \ge 0$ (1)

• Nếu $t = 0$ thì $a = b = c = 0$, xảy ra đẳng thức đúng.

• Nếu $t > 0$ thì từ (1) ta có

$$\left(\frac{a}{t}\right)^{2008} + \left(\frac{b}{t}\right)^{2008} + \left(\frac{c}{t}\right)^{2008} = 1.$$

Suy ra $\left|\dfrac{a}{t}\right| \le 1$; $\left|\dfrac{b}{t}\right| \le 1$; $\left|\dfrac{c}{t}\right| \le 1$ và có

$$\left(\frac{a}{t}\right)^{2009} + \left(\frac{b}{t}\right)^{2009} + \left(\frac{c}{t}\right)^{2009} \le \left(\frac{a}{t}\right)^{2008} + \left(\frac{b}{t}\right)^{2008} + \left(\frac{c}{t}\right)^{2008} = 1.$$

Hay $a^{2009} + b^{2009} + c^{2009} \le t^{2009}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[2009]{a^{2009} + b^{2009} + c^{2009}} \le \sqrt[2008]{a^{2008} + b^{2008} + c^{2008}}.$$ ❐

Ta có thể đưa ra bài toán tổng quát hơn:

Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[2k+1]{a_1^{2k+1} + a_2^{2k+1} + \ldots + a_3^{2k+1}} \le \sqrt[2k]{a_1^{2k} + a_2^{2k} + \ldots + a_n^{2k}}$$

với mọi $k, n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

★Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 27 \\ x^4 + y^4 = 81. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x = 3x_1$; $y = 3y_1$, hệ trên có dạng

$$\begin{cases} x_1^3 + y_1^3 = 1 \\ x_1^4 + y_1^4 = 1. \end{cases}$$

Từ PT thứ hai của hệ suy ra

$x_1^4 \le 1,\ y_1^4 \le 1 \Rightarrow |x_1| \le 1;\ |y_1| \le 1 \qquad (*)$

Mặt khác từ PT thứ nhất của hệ ta có:

$x_1^3 = 1 - y_1^3$. Kết hợp với (*) suy ra $0 \le x_1 \le 1$, tương tự $0 \le y_1 \le 1$. Tiếp tục trừ theo vế của hai PT cho nhau ta có $x_1^3(1-x_1)+y_1^3(1-y_1)=0$. Suy ra $x_1 = 0$; $y_1 = 1$ hoặc $x_1 = 1$; $y_1 = 0$.

Từ đó hệ đã cho có các nghiệm $(x\,;\,y)$ là $(0\,;\,3)$ và $(3\,;\,0)$. ❒

Rõ ràng đây là hệ đối xứng loại I, nếu giải bằng phương pháp thông thường, sử dụng định lí Viète thì khá phức tạp.

Với các giải trên ta có thể đưa ra *bài toán tổng quát* hơn:

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2k-1}+y^{2k-1}=a^{2k-1} \\ x^{2k}+y^{2k}=a^{2k} \end{cases},\ k \in \mathbb{N}^*,\ a \neq 0 \text{ cho trước.}$$

★Thí dụ 6. *Trong các nghiệm của hệ*

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z^2+t^2=16 \\ xt+yz \ge 12 \end{cases}$$

tìm nghiệm sao cho tổng $x + z$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Từ hai PT đầu của hệ, vì có tổng các bình phương làm cho ta nghĩ đến việc chuẩn hóa đưa bài toán về xét các biến trên đoạn $[0\,;\,1]$; $[-1\,;\,1]$. Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=1 \\ \left(\dfrac{z}{4}\right)^2+\left(\dfrac{t}{4}\right)^2=1 \\ \dfrac{x}{3}.\dfrac{t}{4}+\dfrac{y}{3}.\dfrac{z}{4}\ge 1. \end{cases}$$

Từ đó $\left|\dfrac{x}{3}\right| \le 1$; $\left|\dfrac{y}{3}\right| \le 1$; $\left|\dfrac{z}{4}\right| \le 1$; $\left|\dfrac{t}{4}\right| \le 1$.

Đặt $\dfrac{x}{3}=\sin\alpha$; $\dfrac{y}{3}=\cos\alpha$; $\dfrac{z}{4}=\sin\beta$; $\dfrac{t}{4}=\cos\beta$.

Thay vào bất phương trình thứ ba của hệ ta có

$\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta \ge 1$, hay $\sin(\alpha+\beta) \ge 1$.

Từ đó suy ra

$$\sin(\alpha+\beta)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác $x + z = 3\sin\alpha + 4\sin\beta$

$$= 3\sin\alpha+4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi\right)$$

$$= 3\sin\alpha+4\cos\alpha \le \sqrt{3^2+4^2}\sin(\alpha+\varphi) \le 5.$$

Vậy $x + z$ đạt GTLN bằng 5 khi $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, khi đó $\cos\alpha=\pm\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\pm\dfrac{3}{5}$.

Từ đó ta nhận được

$(x;y;z;t)=\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{12}{5};\dfrac{16}{5};\dfrac{12}{5}\right)$ hoặc

$(x;y;z;t)=\left(-\dfrac{9}{5};-\dfrac{12}{5};-\dfrac{16}{5};-\dfrac{12}{5}\right)$. ❒

Bài toán trên có thể giải trực tiếp bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y \\ x^{2008}+y^{2008}=1. \end{cases}$$

2. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức

$Q = 6(ab + bc + ca) + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2$.

3. Cho $a + b + c = 0$ và $a, b, c \in [-1\,;\,1]$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = a^{2004} + b^{2006} + c^{2008}.$$

4. Cho x và y là hai số thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$. Tìm GTNN của biểu thức

$$R = x\sqrt{2+y}+y\sqrt{2+x}.$$

5. Cho $x, y, z \in [0\,;\,1]$ và $x + y + z \ge 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$S = (1 + x)(1 + y)(1 + z).$$

TÍNH KHOẢNG CÁCH giữa hai hình

BÙI TUẤN NGỌC – ĐẶNG XUÂN SƠN
(GV THPT NK Trần Phú, Hải Phòng)

Trong hình học giải tích chúng ta đã xây dựng được công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc một mặt phẳng... Trong bài viết này chúng tôi đưa ra định nghĩa về khoảng cách tổng quát hơn – đó là khoảng cách giữa hai tập hợp điểm (gọi là hình), đồng thời nêu ra một cách tính khoảng cách giữa chúng.

I. Khoảng cách từ một điểm đến một hình

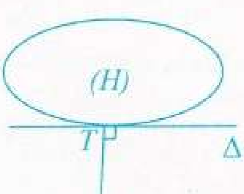
Trên mặt phẳng ta nói độ dài AT là khoảng cách từ điểm A đến hình (H) (hình (H) được xét ở bài báo này là các hình hình học dạng quen thuộc như elip, parabol, hyperbol) nếu $T \in (H)$ và $AT \le AM$ với mọi $M \in (H)$. Kí hiệu là $d_A(H) = AT$.

***Nhận xét* 1.**

* Nếu điểm A thuộc hình (H) thì $d_A(H) = 0$.

* Nếu có đường thẳng Δ thoả mãn hai tính chất:
i) A và (H) nằm khác phía so với Δ ;
ii) Δ tiếp xúc với (H) tại điểm T mà $AT \perp \Delta$
thì $d_A(H) = AT$.

★**Thí dụ 1.** *Cho hình* $(H) = \left\{(x;y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\right\}$ *và điểm* $A(0\ ;\ -2)$. *Hãy tính khoảng cách từ điểm A đến hình* (H).

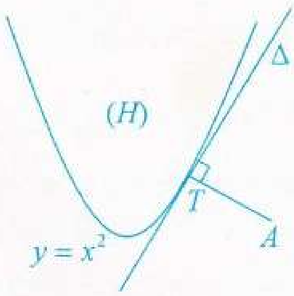


Hình 1

Lời giải. (h. 1). Dễ thấy, A không thuộc (H), biên của (H) là elip (E) có PT: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (E) nhận đường $y = -1$ làm tiếp tuyến Δ, tại tiếp điểm $T(0\ ;\ -1)$, A và (H) nằm khác phía so với Δ và $\Delta \perp AT$. Vậy $d_A(H) = AT = 1$. □

★**Thí dụ 2.** *Cho hình* $(H) = \{(x;y) \mid y \ge x^2\}$ *và điểm* $A(3\ ;\ 0)$. *Tính khoảng cách từ điểm A đến hình* (H).

Lời giải. (h. 2). Dễ thấy, A không thuộc hình (H), biên của (H) là parabol (P) có PT: $y = x^2$.



Hình 2

Tiếp tuyến Δ với (P) tại $T(a;a^2)$ có hệ số góc là $2a$. Vectơ pháp tuyến của (P) tại T là $\vec{n} = (2a;-1)$, $\vec{n}$ cùng phương với $\overrightarrow{AT} = (a-3\ ;\ a^2)$ nếu:

$$\frac{2a}{a-3} = \frac{-1}{a^2} \Leftrightarrow 2a^3 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ nên } T(1\ ;1).$$

Do đó, $d_A(H) = AT = \sqrt{5}$. □

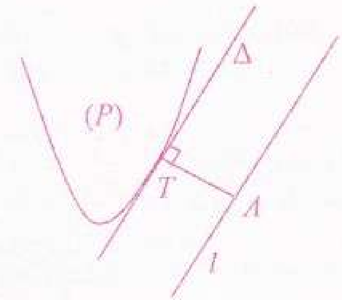
II. Khoảng cách giữa hai hình

Cho hai hình (H) và (H'), ta nói độ dài AT ($A \in (H)$, $T \in (H')$) là khoảng cách giữa hai hình (H) và (H') nếu $MN \le AT$, với mọi $M \in (H)$, $N \in (H')$. Kí hiệu là $d((H), (H')) = AT$.

***Nhận xét* 2.** Để tìm khoảng cách giữa hai hình (H) và (H') (trong đó (H) hoặc (H') là các đường cong bậc hai quen thuộc, ta tìm tiếp tuyến với hình này sao cho nó gần hình kia nhất. Tiếp tuyến ấy phân chia mặt phẳng thành hai phần mà mỗi hình đang xét nằm về hai phần khác nhau của tiếp tuyến đó.

★**Thí dụ 3.** *Cho (P): $y=x^2$ và đường thẳng (l): $y=4x-1$. Tính khoảng cách từ (l) tới (P).*

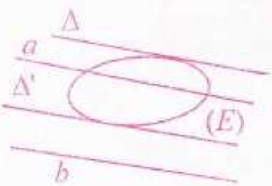
Lời giải. (h. 3). Dễ thấy, (l) không cắt (P). Gọi Δ là đường thẳng song song với (l) và tiếp xúc với (P). Khi đó hệ số góc của Δ là $k = 4$ và tiếp điểm T có hoành độ thoả mãn: $2x = 4$, suy ra $T(2; 4)$. Khoảng cách cần tìm là $d((l),(P))=d_T(l)=\frac{3}{\sqrt{17}}$. ❐



Hình 3

★**Thí dụ 4.** *Cho đường elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ và hai đường thẳng (a): $2x+y-1=0$ và (b): $2x+y+6=0$.*

Tính khoảng cách giữa đường thẳng (a) và (E); giữa đường thẳng (b) và (E).



Hình 4

Lời giải. (h. 4). Tiếp tuyến với (E) và song song với (a) là đường thẳng Δ có dạng: $2x + y + c = 0$. Điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với (E) là $4.4 + 9 = c^2$ $\Leftrightarrow c=\pm 5$, ta được hai đường thẳng: $\Delta: 2x+y-5=0$ và $\Delta': 2x+y+5=0$, cùng tiếp xúc với (E). Dễ thấy, (a) nằm giữa Δ và Δ' nên $d((a),(E))=0$, còn Δ' nằm giữa b và Δ nên $d((b),(E))=d_b(\Delta')=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

★**Thí dụ 5.** *Tìm khoảng cách từ đường cong (C) có phương trình $y=x^4+x^2$ tới đường (l) có phương trình $y = 6x - 5$.*

Lời giải. Tiếp tuyến với (C) song song với (l) là đường thẳng Δ có hệ số góc $k = 6$, do đó tiếp điểm có hoành độ là nghiệm của PT:

$4x^3+2x-6=0 \Leftrightarrow 2(x-1)(2x^2+2x+3)=0$

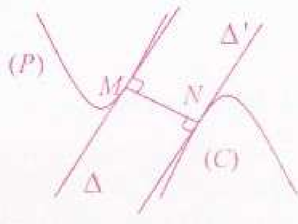
$\Leftrightarrow x=1$. Do đó Δ có PT dạng:

$$y=6(x-1)+2=6x-4.$$

Ta chứng minh được $x^4+x^2\ge 6x-4>6x-5$ với mọi x, do đó Δ chia mặt phẳng thành hai phần mà (C) và (l) nằm về hai nửa mặt phẳng bờ là Δ. Như vậy, $d((l),(C)) = d((l),(\Delta))=\frac{1}{\sqrt{37}}$. ❐

★**Thí dụ 6.** *Tìm khoảng cách giữa hai parabol (P): $y=x^2$ và (C): $y=-x^2+12x-36$.*

Lời giải. (h. 5). Ta thấy (P) và (C) không cắt nhau, tiếp tuyến với (P) tại $M(a;a^2)$ là Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1}=(2a;-1)$, tiếp tuyến với (C) tại $N(b;-b^2+12b-36)$ là Δ' có vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2}=(-2b+12;-1)$. Đoạn MN là ngắn nhất nếu $\Delta//\Delta'$ và vuông góc với MN.



Hình 5

* Δ và Δ' song song với nhau khi và chỉ khi $2a=-2b+12$.

* $\overrightarrow{MN}$ và $\vec{n_2}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{2b-6}{-2b+12}=\frac{-2(b-6)^2}{-1} \quad (*)$$

Với $\overrightarrow{MN}=(b-a;-(b-6)^2-a^2)$, giải PT (*) được nghiệm $b = 5$, suy ra $MN=5\sqrt{2}$. ❐

★**Thí dụ 7.** *Tìm hai điểm trên mỗi nhánh đồ thị (C) có phương trình $y=x+\frac{1}{x}$ sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó là nhỏ nhất.*

Lời giải. Lấy $M\left(a;a+\frac{1}{a}\right); N\left(b;b+\frac{1}{b}\right)$ với $ab<0$ thì chúng không cùng thuộc một nhánh của (C). Tiếp tuyến với (C) tại M, N tương ứng là Δ, Δ' lần lượt có vectơ pháp

GIẢI ĐÁP THẮC MẮC

CÂU HỎI. (của bạn *Hà Văn Toàn*, 12G, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn, **Thanh Hoá**)

Bài toán. *Tìm hai điểm A và B thứ tự nằm trên hai đồ thị hàm số* $y = x^2 + 8x + 13$ (C_1) *và* $y = -3x^2 + 8x - 9$ (C_2) *sao cho khoảng cách AB là ngắn nhất.*

Dạng toán này trong SGK chưa đề cập đến, em loay hoay mãi chưa biết cách giải như thế nào ? Em mong toà soạn giải đáp giúp.

TRẢ LỜI.

Do $A \in (C_1)$, $B \in (C_2)$ nên chúng có toạ độ $A(a\,;\,a^2 + 8a + 13)$, $B(b\,;\,-3b^2 + 8b - 9)$. Tiếp tuyến với (C_1) tại A là d có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2a+8;\,-1)$. Tiếp tuyến với (C_2) tại B là d' có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (-6b+8\,;\,-1)$. Đoạn thẳng AB là ngắn nhất khi và chỉ khi $d // d'$ và $AB \perp d'$, dẫn đến HPT

$$\begin{cases} 2a+8=-6b+8 \\ \dfrac{-6b+8}{b-a}=\dfrac{-1}{-3b^2-a^2+8b-8a-22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1. \end{cases}$$

Tìm được $A(-3;\,-2)$ và $B(1;\,-4)$. Khoảng cách AB là $2\sqrt{5}$.

Bạn có thể tham khảo thêm bài viết *Tính khoảng cách giữa hai hình* trong mục "khoảng cách giữa hai parabol" ở cùng số báo này.

TRẢ LỜI CÂU HỎI 2. (Đề bài toán đăng ở số 372)

Chọn 2 bánh xếp vào hộp thứ nhất, có C_{12}^2 cách. Với mỗi cách chọn bánh vào hộp thứ nhất, có C_{10}^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ hai. Trừ 4 bánh đã chọn, có C_8^2 cách chọn 2 bánh vào hộp thứ ba. Trừ 6 bánh đã chọn, có C_6^2 cách chọn bánh vào hộp thứ tư. Trừ 8 bánh đã chọn, có C_4^2 cách chọn bánh vào hộp thứ năm. Trừ 10 bánh đã chọn, có C_2^2 cách chọn bánh vào hộp thứ sáu. Vì các hộp bánh giống nhau nên không cần phân biệt thứ tự giữa các hộp, do đó mỗi cách xếp như lập luận trên đã được lặp lại 6! lần. Vì vậy sẽ có $\frac{1}{6!}C_{12}^2C_{10}^2C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2 = 10395$ cách xếp 12 bánh khác nhau vào 6 hộp giống nhau.

Hai cách giải của bài toán bạn Yến nêu ra đều sai. Tuyên dương bạn *Phan Bá Lộc*, khoá 2006-2009, THPT Hermann Gmeiner, Vinh, **Nghệ An** đã có đáp án đúng.

THTT

---

tuyến là $\overrightarrow{n_1} = \left(1-\dfrac{1}{a^2};-1\right)$; $\overrightarrow{n_2} = \left(1-\dfrac{1}{b^2};-1\right)$.

Đoạn MN ngắn nhất nếu Δ, Δ' song song với nhau và $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{n_1}$ cùng phương.

*) Δ, Δ' song song khi $1-\dfrac{1}{a^2} = 1-\dfrac{1}{b^2} \Rightarrow a=-b$ (vì $ab<0$), $N\left(-a;-a-\dfrac{1}{a}\right)$, $\overrightarrow{NM} = \left(2a;2a+\dfrac{2}{a}\right)$.

*) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{n_1}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{2a}{1-\dfrac{1}{a^2}} = \frac{2(a+\dfrac{1}{a})}{-1} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Vậy M, N cần tìm có hoành độ là $\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$. □

Nhân đây chúng tôi xin đưa ra một số bài tập cùng câu hỏi mở để bạn đọc tham khảo thêm.

BÀI TẬP

1. Tìm khoảng cách từ hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ tới đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x - 1$.

2. Tìm khoảng cách giữa hai nhánh của đồ thị có PT: $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

3. Đưa thí dụ tính khoảng cách từ một điểm nằm trong elip (E) tới (E).

4. Đưa thí dụ tính khoảng cách từ một điểm nằm trong parabol (P) tới (P).

5. Đưa thí dụ tính khoảng cách từ một điểm đến đồ thị hàm đa thức bậc ba.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA *Hình học 12 Nâng cao*

VĂN NHƯ CƯƠNG
(*Chủ biên Hình học 12 nâng cao*)

I. GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO

Căn cứ vào Chương trình cuốn SGK Hình học 12 nâng cao bao gồm 3 chương sau đây.

Chương I. Khối đa diện và thể tích của chúng

§1. Khái niệm về khối đa diện

§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện

§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của khối đa diện

§4. Thể tích của khối đa diện

Chương II. Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón

§1. Mặt cầu, khối cầu

§2. Khái niệm về mặt tròn xoay

§3. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ

§4. Mặt nón, hình nón và khối nón

Chương III . Phương pháp tọa độ trong không gian

§1. Hệ tọa độ trong không gian

§2. Phương trình mặt phẳng

§3. Phương trình đường thẳng

II. YÊU CẦU VÀ MỨC ĐỘ

1. Yêu cầu và mức độ kiến thức

Các kiến thức đưa vào chương trình Hình học 12 Nâng cao khá nhiều và một số vấn đề khá phức tạp về mặt lí thuyết. Nhưng tinh thần của chương trình chỉ nhằm giới thiệu các khái niệm là chủ yếu, bỏ qua các chứng minh tế nhị và phức tạp. Sau đây xin nêu một số ví dụ:

★ *Về khối đa diện* : Trong đời sống hàng ngày học sinh thường gặp các khối đa diện, với muôn hình muôn vẻ khác nhau. Có thể mô tả một cách dễ hiểu: "*Khối đa diện là một phần không gian được giới hạn bởi một số đa giác phẳng*". Tuy nhiên đó không phải là một định nghiã, bởi vì khái niệm "*giới hạn bởi …*" chưa được định nghĩa. SGK không thể đưa ra một định nghĩa chính xác khái niệm hình đa diện và nhất là khối đa diện, vì quá phức tạp. Bởi vậy, khi học xong chương này chúng ta không thể đòi hỏi học sinh phải trả lời câu hỏi kiểu như: "*Thế nào là hình đa diện*?" hay "*Thế nào là khối đa diện*?" Yêu cầu đối với học sinh chỉ là nhận biết, chẳng hạn trong một số các hình khối đưa ra thì cái nào là khối đa diện, cái nào không phải là khối đa diện.

★ *Về thể tích các khối đa diện*: SGK có đưa ra định nghĩa chính xác thể tích các khối đa diện: "*Thể tích của mỗi khối đa diện là một số dương thỏa mãn ba điều kiện: i) Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau. ii) Một khối đa diện được phân chia thành các khối đa diện nhỏ thì thể tích của nó bằng tổng thể tích các khối đa diện nhỏ. iii) Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1*". Định nghĩa đó không có gì khó hiểu nhưng đối với câu hỏi "*Thể tích có tồn tại và duy nhất hay không ?*" thì SGK không thể đề cập đến vì quá khó đối với học sinh. Mục tiêu của chúng ta là học sinh biết được cách tính thể tích của các khối lăng trụ, khối chóp và một số khối phức tạp hơn. Ví dụ khi chia một khối chóp thành hai phần bởi một mặt phẳng nào đó, thì họ có thể hình dung ra cách tính thể tích của mỗi phần.

★ *Về sự bằng nhau của các khối đa diện*: Khi nói về thể tích khối đa diện ta phải đưa ra tiên đề : "*Hai khối đa diện bằng nhau thì có thể tích bằng nhau*". Như vậy phải định nghĩa khái niệm *bằng nhau của hai khối đa diện* và để làm điều đó phải đưa ra khái niệm về *phép dời hình*. Qua ví dụ về phép đối xứng qua mặt phẳng ta có thể định nghĩa phép dời hình như là một phép biến hình bảo tồn khoảng cách, và cuối cùng ta chỉ yêu cầu làm cho học sinh hiểu rằng: *Hình H bằng hình H' nếu có thể thực hiện liên tiếp một số phép đối xứng qua các mặt phẳng để biến hình H thành hình H'.*

Liên quan đến sự bằng nhau của các khối đa diện ta chú ý đến mệnh đề : "*Cho hai khối đa diện H và H'. Nếu có một phép dời hình f biến tập hợp các đỉnh của H thành tập hợp các đỉnh của H' thì f biến H thành H', và do đó H bằng H'*" Mệnh đề đó không đúng trong trường hợp tổng quát mà chỉ đúng nếu H và H' là những khối đa diện lồi.

2. Yêu cầu về khả năng thực hành

Như vậy, về mặt lí thuyết yêu cầu đối với học sinh là khá nhẹ nhàng. Đối với khả năng thực hành, yêu cầu có phần cao hơn. Trước một bài toán đặt ra, học sinh phải biết được các phương pháp có thể tiến hành để giải quyết, biết lựa chọn một trong các phương pháp và lập ra một chương trình các công việc phải làm. Sau đó yêu cầu học sinh phải có kĩ năng thực hiện các công việc cụ thể đã đề ra.

Lấy ví dụ bài toán "*Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d' khi cho biết phương trình của hai đường thẳng đó*". Cố nhiên để làm được bài toán này, học sinh phải biết khái niệm về khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau cùng các tính chất liên quan đã biết ở lớp 11. Sau đó thầy giáo có thể hướng dẫn họ để đi đến một số cách làm sau đây:

Cách 1. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua d và song song với d', thì khoảng cách h cần tìm bằng khoảng cách từ một điểm thuộc d' tới mp(P). Vậy chương trình làm việc là như sau:

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua d và song song với d'.

b) Lấy một điểm M nào đó trên d' và tìm khoảng cánh h từ M tới (P).

Cách 2. Tìm một điểm P trên d và điểm P' trên d' sao cho đường thẳng PP' vuông góc với cả d và d' rồi tính độ dài đoạn thẳng PP'. Vậy chương trình làm việc là như sau:

a) Tìm toạ độ điểm P trên d, phụ thuộc tham số t, và toạ độ điểm P' trên d' phụ thuộc tham số t'.

b) Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{PP'}$ phụ thuộc hai tham số t và t'. Viết điều kiện $\overrightarrow{PP'}.\vec{u}=0$ và $\overrightarrow{PP'}.\vec{u'}=0$ để đi đến hệ phương trình bậc nhất với hai ẩn là t và t' ($\vec{u},\vec{u'}$ thứ tự là vectơ chỉ phương của d và d')

c) Giải hệ phương trình để tìm nghiệm t và t', tức là tìm được toạ độ điểm P và P'.

d) Tính độ dài h của đoạn thẳng PP'.

Cách 3. Dùng cách tính thể tích hình hộp. Việc làm cụ thể như sau:

a) Tìm toạ độ các vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và $\vec{u'}$ của hai đường thẳng d và d'.

b) Tìm toạ độ điểm M trên d, toạ độ điểm M' trên d', rồi tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{MM'}$.

c) Tính tích có hướng $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{u'}\right]$ và độ dài $\left|\vec{n}\right|$ của nó. Độ dài đó chính là diện tích hình bình hành dựng trên hai cạnh OA, OA' mà $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ và $\overrightarrow{OA'}=\vec{u'}$.

d) Tính tích vô hướng $\alpha=\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}$. Khi đó $|\alpha|$ là thể tích hình hộp dựng trên ba cạnh OA, OA', OB với $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OA'}=\vec{u'}$ và $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MM'}$.

e) Tính khoảng cách h theo công thức: $h=\dfrac{|\alpha|}{\left|\vec{n}\right|}$.

3. Đối với học sinh các lớp chuyên, lớp chọn

Đối với một số học sinh khá giỏi, chương trình có thể là nhẹ và SGK chưa đi sâu vào một số vấn đề. Theo chúng tôi, đối với các học sinh đó, có thể cho các em tìm hiểu thêm một số vấn đề sau đây:

1) Các phép dời hình và các phép đồng dạng trong không gian.
2) Thể tích và diện tích xung quanh của các khối tròn xoay.
3) Phương trình đường tròn trong hệ tọa độ $Oxyz$, Chùm mặt cầu. Chùm mặt phẳng.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/373. (Lớp 6) Viết các số 1, 2, 3, ..., 2007 thành dãy theo thứ tự tuỳ ý ta được số A. Hỏi số $A + 2008^{2007} + 2009$ có phải là số chính phương không ?

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Bắc Bình, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T2/373. (Lớp 7) Cho hai đa thức

$$f(x) = (x-2)^{2008} + (2x-3)^{2007} + 2006x$$

và $g(y) = y^{2009} - 2007y^{2008} + 2005y^{2007}$.

Giả sử $f(x)$ sau khi khai triển và thu gọn ta tìm được tổng tất cả các hệ số của nó là s. Hãy tính s và tính giá trị của $g(s)$.

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/373. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x^3+y^3+z^3=495. \end{cases}$$

NGUYỄN THỊ HIỀN
(SV lớp Y5C, ĐH Y Khoa, Hà Nội)

Bài T4/373. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(a+b+c)^3+a(2bc-1)+b(2ac-1)+c(2ab-1).$$

NGUYỄN TIẾN LÂM
(GV THCS Nguyễn Huệ, Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T5/373. Cho tam giác ABC có góc BAC khác 90°, đường cao AH và trung tuyến AM. Trên các tia AB và AC theo thứ tự lấy các điểm E và F sao cho $ME = MF = MA$. Gọi K là điểm đối xứng của H qua M. Chứng minh rằng E, M, K, F cùng thuộc một đường tròn.

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hoà)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/373. Giải phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}(x-1)\sqrt{x-1}.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Bài T7/373. Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan B}{\tan C}+\frac{\tan C}{\tan A}\ge\frac{\sin 2A}{\sin 2B}+\frac{\sin 2B}{\sin 2C}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

TRẦN QUỐC HOÀN
(SV K50CA, ĐH Công Nghệ, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/373. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Gọi p, S, R theo thứ tự là nửa chu vi, diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$p_1^2 \le \frac{pS}{2R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

NGUYỄN TIẾN LÂM
(SV K50A1S, khoa Sư phạm, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/373. Cho tập hợp khác rỗng A ($A \subset \mathbb{N}$) thỏa mãn điều kiện: Nếu $a \in A$ thì $4a$ và $[\sqrt{a}]$ cũng thuộc A (kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng $A = \mathbb{N}$.

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T10/373. Cho a là số tự nhiên không nhỏ hơn 3. Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ có tính chất $u_1 = a$ và $u_{n+1} = u_n - \left[\frac{u_n}{2}\right] + 1$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Chứng minh rằng tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_n = u_k$ với mọi $n \ge k$.

NGUYỄN HOÀNG NAM
(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

Bài T11/373. Xác định tất cả các đa thức với hệ số thực $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = R(x)$ với mọi số thực x.

NGUYỄN DUY THÁI SƠN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

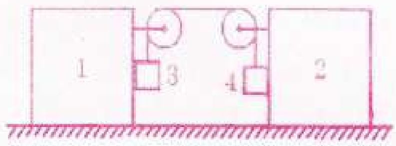
Bài T12/373. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G, bán kính mặt cầu ngoại tiếp R. Chứng minh rằng

$$GA+GB+GC+GD+4R \geq \frac{2}{\sqrt{6}}(AB+AC+AD+BC+CD+DB).$$

TRẦN QUANG HÙNG
(SV K49A1T ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội)

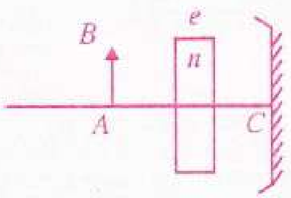
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/373. Cho hệ cơ học như hình vẽ. Các vật 1 và vật 2 có cùng khối lượng M, các vật 3 và vật 4 có cùng khối lượng m. Bỏ qua mọi ma sát. Khối lượng các ròng rọc không đáng kể. Tìm gia tốc của mỗi vật.



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/373. Một gương cầu lõm có tiêu cự $f = 12$ cm, ảnh của vật AB hứng được trên màn ảnh là $A_1B_1 = 9$mm. Nếu đặt giữa vật và gương một bản mặt song song trong suốt có độ dày $e = 2$cm và có chiết suất n thì phải dịch chuyển màn ảnh đi một đoạn 13 cm mới hứng được ảnh của vật là $A_2B_2 = 12$mm. Hãy tính chiết suất n.



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/373. (For 6th grade)
Write the numbers 1, 2, 3, ..., 2007 in an arbitrary order and let A be the resulting number. Can $A + 2008^{2007} + 2009$ be a perfect square ?

T2/373. (For 7th grade)
Consider the following two polynomials:

$$f(x) = (x-2)^{2008} + (2x-3)^{2007} + 2006x$$

and $g(y) = y^{2009} - 2007y^{2008} + 2005y^{2007}$.

Let s be denote the sum of all the coefficients of $f(x)$ (after expansion). Find s, and the value of $g(s)$.

T3/373. Find all positive integer solutions of the following system of two equations

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x^3+y^3+z^3=495. \end{cases}$$

T4/373. Let a, b, c be non-negative real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Find the maximum value of the expression

$$(a+b+c)^3 + a(2bc-1) + b(2ac-1) + c(2ab-1).$$

T5/373. Given a triangle ABC where $\widehat{ABC}$ is not a right angle. Let AH and AM denote, respectively, the altitude and the median throught vertex A. Choose a point E on the ray AB and F on the ray AC such that $ME = MF = MA$. Let K be reflection point of H over M. Prove that the four points E, M, K, and F lie on a single circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/373. Solve for x

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}(x-1)\sqrt{x-1}.$$

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/369. *Với mỗi số tự nhiên n lớn hơn 6, gọi A_n là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn n và không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Hãy tìm n sao cho trong A_n không có số chính phương nào.*

Lời giải. Giả sử A_n là tập hợp các số thỏa mãn đề bài. Gọi số chính phương lớn nhất mà nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ là m^2 thì theo giả thiết có

$$m^2 < \frac{n}{2} < n \le (m+1)^2 \qquad (1)$$

Vì $n > 6$ nên từ (1) có $m \ge 2$ (2)

Lại từ (1) có $2m^2 < n \le (m+1)^2$,

do đó $2m^2 < m^2 + 2m + 1$

hay $m^2 < 2m + 1$

suy ra $m^2 \le 2m$

hay $m(2-m) \ge 0$.

Vì $m \ge 2$ theo (2) nên bất đẳng thức trên chỉ xảy ra khi $m = 2$. Thay $m = 2$ vào (1) có $4 < \frac{n}{2} < n \le 9$ suy ra $8 < n \le 9$.

Vậy chỉ có thể $n = 9$. Thử lại thấy $A_9 = \{5, 6, 7, 8\}$ thỏa mãn điều kiện đề bài. □

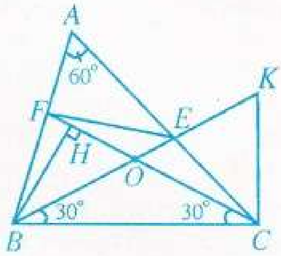
Nhận xét. 1) Một số bạn lập luận không chặt chẽ, có bạn xét quá nhiều trường hợp hoặc không thử lại để thấy tồn tại tập A_n như thế. Có bạn viết không chuẩn xác như sau: $\frac{n}{2} \le A_n < n$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Thu Đương, Nguyễn Ngân Giang, Phạm Thị Khánh Linh, Hoàng Minh Phương,* 6A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Mai Thu Phương,* 6A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung; **Hà Tĩnh:** *Phan Thị Cẩm Linh, Đặng Thị Mỹ Linh, Ngô Kiều Ngân, Đào Thị Phương Thảo,* 6A, THCS BC Xuân Diệu, TTr. Nghèn, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★Bài T2/369. *Cho tam giác nhọn ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Trên các cạnh AC và AB theo thứ tự lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{FCB} = 30^\circ$. Chứng minh rằng $BF = FE = EC \ge \frac{BC}{2}$.*



Lời giải. Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABE} + \widehat{ACF} = 60^\circ$

$= \widehat{FEB} + \widehat{EFC}$ (1)

Từ C dựng tia vuông góc với BC, cắt BE tại K, ta có ΔOCK đều (vì $\widehat{KOC} = \widehat{KCO} = 60^\circ$), do đó $BO = OC = CK$. Mặt khác, $\widehat{FBO} = \widehat{ECK}$ ($= 60^\circ - \widehat{ACF}$) nên $\Delta FBO = \Delta ECK$ (g.c.g) $\Rightarrow BF = CE$.

Bây giờ giả sử $BF = CE > FE$ (trường hợp ngược lại chứng minh tương tự). Khi đó $\widehat{FEB} > \widehat{FBE}$ và $\widehat{EFC} > \widehat{ECF}$, nên $\widehat{FEB} + \widehat{EFC} > \widehat{FBE} + \widehat{ECF} = 60^\circ$, trái với (1).

Vậy ta có $BE = CF = FE$ (2)

Hạ $BH \perp CF$ (H thuộc FC). Trong tam giác vuông BCH có $\widehat{BCH} = 30^\circ$, nên $BH = \frac{1}{2}BC$.

Vì $BF \ge BH$ nên $BF \ge \frac{1}{2}BC$ (3)

Đẳng thức xảy ra khi $F \equiv H \Leftrightarrow ABC$ là tam giác đều. Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. 1) Đây là bài toán hay và tương đối khó. Ngoài cách giải trên đây, một số bạn dựng thêm tam giác đều BCM (nằm trong nửa mặt phẳng bờ BC, chứa A) và chứng minh ΔMEF đều, cũng dẫn đến kết quả cần chứng minh . Ta còn có kết quả: điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Lê Minh Phúc*, 7A5, THCS Giảng Võ, Q. Ba Đình; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thu Hường, Nguyễn Thành Công, Đào Thị Thanh Hoa, Đỗ Thị Thu Uyên, Nguyễn Ngân Giang, Phạm Thị Khánh Linh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Như Ngọc*, 6A, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; **Nghệ An:** *Hồ Khánh Duy*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Đường*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, 7[1], THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh, Nguyễn Công Dũng, Trần Đức Tín*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, Tx. Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/369. *Tìm bốn số nguyên a, b, c, d phân biệt trong tập hợp {10 ; 21 ; 37 ; 51} sao cho ab + bc – ad = 637* (1)

Lời giải. Trong bốn số a, b, c, d có ba số lẻ và một số chẵn. Xét các trường hợp:

• $d = 10$ thì a, b, c lẻ $\Rightarrow ab + bc - 10a$ là số chẵn, mâu thuẫn với (1). Trường hợp này bị loại.

• $c = 10$ thì a, b, d lẻ $\Rightarrow ab + 10b - ad$ là số chẵn, mâu thuẫn với (1). Trường hợp này bị loại.

• $b = 10$ thì $10(a + c) - ad = 637$ suy ra ad có tận cùng là 3. Trường hợp này cũng bị loại vì trong ba số: 21; 37; 51 không có hai số nào mà tích có tận cùng là 3.

• $a = 10$ thì $10(b - d) = 637 - bc \Rightarrow bc$ có tận cùng là $7 \Rightarrow b, c \in \{21; 37; 51\}$.

Do $bc \geq 21.37 = 777 > 637$ nên $637 - bc < 0$. Vậy $b < d$. Suy ra $b \in \{21; 37\}$.

– Với $b = 21$ thì $c = 37$; $d = 51$: không thỏa mãn (1).

– Với $b = 37$ thì $c = 21, d = 51$ thỏa mãn (1).

Vậy $a = 10$, $b = 37$, $c = 21$, $d = 51$ là bốn số cần tìm. □

Nhận xét. 1) Có rất nhiều cách khác nhau để giải bài này. Tất các bạn đều tìm đúng kết quả, tuy nhiên một số bạn lập luận còn dài và không chặt chẽ.

2) Các bạn có lời giải ngắn gọn là:

Phú Thọ: *Nguyễn Trường Giang*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Phùng Ngọc Quý, Nguyễn Thị Kim Tuyến*, 9A1, *Nguyễn Trọng Hiệp*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Quang Rực*, 9A, THCS Yên Phong; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 9E, THCS TTr. Đông Hưng; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 9D, *Nguyễn Văn Thắng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Mạc Thị Mai Mai*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Bạc Liêu:** *Trần Quang Minh*, 7/1, THCS Trần Huỳnh, Tx. Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/369. *Giải phương trình*

$$(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x \quad (1)$$

Lời giải. *Cách 1.* (Theo đa số các bạn).

Điều kiện để PT (1) có nghiệm là

$$\begin{cases}(4-x)(12+x)\geq 0\\(x+3)(28-x)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12\leq x\leq 4\\-3\leq x\leq 28\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -3\leq x\leq 4 \quad (*)$$

Với điều kiện (*)

$(1) \Leftrightarrow (x+3)^2(4-x)(12-x)=(28-x)^2$

$\Leftrightarrow x^4+14x^3+10x^2-272x+352=0$

$\Leftrightarrow (x^2+6x-22)(x^2+8x-16)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+6x-22=0\\x^2+8x-16=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-3+\sqrt{31},\ x_2=-3-\sqrt{31},\\x_3=-4+4\sqrt{2},\ x_4=-4-4\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện (*) chỉ có x_1 và x_3 thỏa mãn.

Cách 2. Đặt $u = x + 3$; $v = \sqrt{(4-x)(12+x)}$ (với $v \geq 0$). Khi đó PT (1) trở thành

$$2uv = u^2 + v^2 - 1 \Leftrightarrow (u-v)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=u-1\\v=u+1.\end{array}\right.$$

• Với $v = u - 1 \geq 0$ ta có

$$\begin{cases}x+3\geq 1\\(4-x)(12+x)=(x+2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\x^2+6x-22=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = -3+\sqrt{31}$.

• Với $v = u + 1 \geq 0$ ta có

$$\begin{cases}x+3\geq -1\\(4-x)(12+x)=(x+4)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -4\\x^2+8x-16=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=-4+4\sqrt{2}$.

Vậy PT (1) có tập nghiệm là $\{\sqrt{31}-3; 4\sqrt{2}-4\}$. □

Nhận xét. 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên, không ít bạn đặt điều kiện là $-12 \le x \le 4$ rồi đi đến kết luận PT (1) có 4 nghiệm là -3 ± 31; $-4 \pm 4\sqrt{2}$ (?).

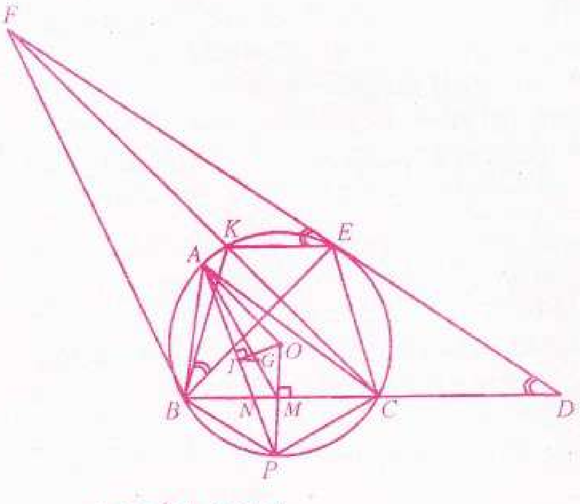
2) Các bạn sau đây có lời giải gọn và chính xác:

Hà Nội: *Nguyễn Thị Diệu Linh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Hà Tây:** *Nguyễn Thanh Tùng*, 9B, THCS Sơn Tây; **Bắc Ninh:** *Đỗ Vũ Thạch, Nguyễn Quang Rực*, 9A, THCS Yên Phong, *Đàm Thị Thanh Hương*, 8B, THCS Từ Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Công Huân, Nguyễn Thế Bảo*, 8A1, THCS Yên Lạc; *Đinh Tiến Dũng*, 9C, THCS Tam Dương; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trường Giang*, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Triệu Thị Quỳnh Mai*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Hà Nam:** *Nguyễn Tiến Hòa*, 9B, THCS Đinh Công Tráng; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân, Lê Anh Tuấn*, 9B, THCS Nguyễn Chích, *Trịnh Xuân Sơn*, 9A, THCS TTr. Quán Lào, *Lê Văn Kiên*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Vũ Hồng Ái, Cao Xuân Thiên Bang, Hoàng Trọng Đường*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, *Trương Đình Đức*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Hữu Ánh*, 8I, THCS Thành Cổ; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh, Nguyễn Phước Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/369. *Cho tam giác ABC với $\widehat{BAC} \ne 45^o$, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) sao cho $\widehat{AIO} = 90^o$. Trên tia BC lấy điểm D sao cho BD = AB + AC. Qua D kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại E. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng DE ở F; CF cắt đường tròn (O) lần nữa tại K. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng IG song song với EK.*

Lời giải. Giả sử tia AI cắt đường tròn (O) tại P. Khi đó $PB = PC = PI$ (1)



Sử dụng *định lí Ptolemy* cho tứ giác nội tiếp $ABPC$, ta thu được

$$AB.PC + AC.PB = BC.PA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC = 2BC$ (3)

Gọi N là giao điểm của AP và BC. Theo tính chất đường phân giác, ta thấy

$$\frac{IA}{IN} = \frac{BA}{BN} = \frac{CA}{CN} = \frac{BA + CA}{BN + CN} = \frac{BA + CA}{BC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\dfrac{IA}{IN} = 2$ (5)

Nếu gọi M là trung điểm của BC thì $\dfrac{GA}{GM} = 2$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $IG // BC$ (7)

Từ (3) và giả thiết $BD = AB + AC \Rightarrow BC = CD$.

Lại vì $\Delta FBK \backsim \Delta FCB$ và $\Delta FEK \backsim \Delta FCE$ nên $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{FB}{FC}$; $\dfrac{FE}{FC} = \dfrac{EK}{CE}$, kết hợp với $BC = CD$, $FB = FE$, suy ra $\dfrac{BK}{CD} = \dfrac{EK}{CE}$. Ngoài ra $\widehat{BKE} = \widehat{ECD} \Rightarrow \Delta BKE \backsim \Delta DCE$. Dẫn đến $\widehat{CDE} = \widehat{KBE} = \widehat{KEF}$. Do đó $KE // CD$, hay $KE // BC$ (8)

Từ (7) và (8) ta thấy $IG // EK$ (đpcm). □

Nhận xét. 1) Để giải bài toán này chúng ta đi qua hai công đoạn:

*) Dùng *định lí Ptolemy* cho tứ giác nội tiếp $ABPC$ và tính chất đường phân giác trong các tam giác ABN và ACN để chứng minh $IG//BC$.

*) Sử dụng kết quả $BKEC$ là *tứ giác điều hòa* (*tứ giác nội tiếp có tích các cặp cạnh đối bằng nhau*) suy ra $\Delta BKE \backsim \Delta DCE$. Từ đó đi đến kết quả $KE//BC$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả:

Vĩnh Phúc: *Đinh Tiến Dũng*, 9C, THCS Tam Dương; **Bắc Ninh:** *Đỗ Vũ Thạch, Nguyễn Hữu Trưởng*, 9A, THCS Yên Phong; **Hải Phòng:** *Bùi Đức Anh*, 9A1, THCS Trần Phú, Q. Lê Chân; **Hà Nam:** *Nguyễn Tiến Hóa*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm ; **Thái Bình:** *Tạ Minh Tùng, Vũ Hoàng Giang*, 9A2, *Tạ Bá Trung*, 9A4, Phân hiệu chất lượng cao, THCS TTr. Diêm Điền, Thái Thụy; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Quý*, 9A, THCS Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Lê Văn Kiên*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Yên:** *Phạm Quang Thịnh, Nguyễn Phước Thịnh*, 9I, THCS Hùng Vương, *Phạm Đức Huy*, 9H, THCS Lương Thế Vinh, TP. Tuy Hòa.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T6/369.** *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương tuỳ ý thoả mãn hai điều kiện sau:*

i) $a_i < 2008$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

ii) Bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn 2008.

Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} < 2$.

Lời giải. Giả sử k_i là số các số nguyên dương, là bội của a_i và không vượt quá 2008. Các số này là $a_i, 2a_i, ..., k_ia_i$. Do đó $k_ia_i \le 2008 < (k_i + 1)a_i$. Suy ra $k_i = \left[\frac{2008}{a_i}\right]$, ở đây $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Nếu trong các số 1, 2, 3, ..., 2008 có một số nào đó chia hết cho đồng thời hai trong các số $a_1, a_2, ..., a_n$ thì từ giả thiết ii) suy ra số đó phải lớn hơn 2008, vô lí. Từ đó $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2008}{a_i}\right] \le 2008$.

Mặt khác

$\left[\frac{2008}{a_i}\right] > \frac{2008}{a_i} - 1$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2008}{a_i} - 1\right) \le 2008$.

Suy ra $\sum_{i=1}^{n}\frac{2008}{a_i} < 2008 + n < 2.2008$.

Vậy $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} < 2$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. 1) Một số bạn đã chứng minh bài toán tổng quát hơn, khi thay giả thiết của bài toán ban đầu như sau:

i) $a_i < m$, $i = 1, 2, ..., n$.

ii) *Bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn m.*

Cách giải tương tự như trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:
Nghệ An: *Nguyễn Đức Công*, 11A1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; *Đặng Cảnh Viện*, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tây:** *Nguyễn Sơn Tùng*, 11A2, THPT Ngô Quyền, Châu Sơn, Ba Vì; **Hà Nội:** *Nguyễn Khánh Việt*, 10A2 Toán, *Trần Thế Khải*, 10A1 Toán, *Trần Nhật Tân*, 11A1 Toán, Khối PTCTT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang; **TP. Hồ Chí Minh:** *Võ Đức Huy*, 11A, THPT Năng Khiếu.

THANH HỒNG

★ **Bài T7/369.** *Chứng minh bất đẳng thức*

$$(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{45}{2}$$

trong đó các số a, b, c thuộc đoạn [1 ; 2]. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng:
Nếu các số a, b, c thuộc đoạn [1;2] thì có :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10 \quad (1)$$

$$3a+2b+c \le \frac{9}{4}(a+b+c) \quad (2)$$

• *Chứng minh bất đẳng thức* (1):
Ta có (1) tương đương với

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \le 7 \quad (3)$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát, có thể giả thiết $a \ge b \ge c$. Khi đó, ta có

$$\frac{b}{a} \le 1,\ \frac{c}{b} \le 1 \Rightarrow \left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{b} \le 1+\frac{c}{a} \quad (4)$$

và $\frac{a}{b} \ge 1,\ \frac{b}{c} \ge 1 \Rightarrow \left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right) \ge 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c} \le 1+\frac{a}{c} \quad (5)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (4), (5), ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \le 2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$, do đó

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \le 2+2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad (6)$$

Mặt khác, có

$$1 \le a \le 2,\ 1 \le c \le 2 \Rightarrow (a-2c)(c-2a) \ge 0$$

$$\Rightarrow 2a^2+2c^2 \le 5ac \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \le \frac{5}{2} \quad (7)$$

Từ (6), (7), suy ra

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \le 2+2.\frac{5}{2} = 7.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2$, $c = 1$ hoặc $b = c = 1$, $a = 2$ và các hoán vị của a, b, c.

• *Chứng minh bất đẳng thức* (2):

Ta có

$$\frac{9}{4}(a+b+c)-(3a+2b+c)=\frac{1}{4}(b+5c-3a)\geq 0$$

(vì $b+5c\geq 6\geq 3a$), suy ra (2) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = 2, b = c = 1$.

Từ các bất đẳng thức (1), (2) suy ra

$$(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\leq\frac{9}{4}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{9}{4}.10=\frac{45}{2}.$$

Bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2, b = c = 1$. ❒

Nhận xét. 1) Có thể giải bài toán bằng cách đặt $f(a,b,c)=(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ rồi lần lượt chứng minh rằng $f(a,b,c)\leq f(2,b,c)$ và $f(2,b,c)\leq\frac{45}{2}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : *Lưu Văn Đan*, 10A1 Toán, Khối PTCTT ĐHKHTN – ĐHQG ; *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Cầu Giấy; **Thái Nguyên** : *Trần Mạnh Tuấn*, 10 Toán, THPT Chuyên Thái Nguyên; **Bắc Ninh** : *Trần Anh Tuấn*, 10A1, THPT Thuận Thành 1 ; *Nguyễn Hữu Trường, Đỗ Vũ Thạch*, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hoá** : *Hà Văn Toàn*, 12G, THPT Mai Anh Tuấn, Nga Sơn; **Nghệ An** : *Đoàn Văn Tùng*, 11A, THPT Quỳnh Lưu 3; **Thừa Thiên - Huế** : *Lê Thanh Phúc*, 10 Toán, THPT Quốc Học Huế, *Võ Thành Văn*, 11 Toán, Khối Chuyên, ĐHKH Huế; **Phú Yên** : *Nguyễn Đình Thi*, 10T1, THPT Chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hoà; **Đăk Lăk** : *Lê Quang Hiếu*, 10 Chuyên Toán, THPT Chuyên Nguyễn Du.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T8/369.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có độ dài các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Gọi* A_1, B_1, C_1 *theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB;* A_2, B_2, C_2 *theo thứ tự là điểm chính giữa các cung* $\overset{\frown}{BC}$ *(không chứa A),* $\overset{\frown}{CA}$ *(không chứa B),* $\overset{\frown}{AB}$ *(không chứa C). Vẽ các đường tròn* (O_1), (O_2), (O_3) *theo thứ tự có đường kính là* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\mathcal{P}_{A/(O_1)}+\mathcal{P}_{B/(O_2)}+\mathcal{P}_{C/(O_3)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. (Theo bạn *Hoàng Minh Lập*, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương, **Thái Bình**).

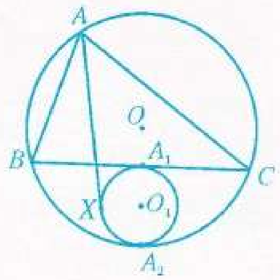
Trước hết, xin phát biểu không chứng minh bổ đề quen thuộc sau:

• **Bổ đề.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại điểm M thuộc cung* $\overset{\frown}{BC}$ *không chứa A. Các điểm A', B', C' thuộc (O') sao cho AA', BB', CC' tiếp xúc với (O'). Khi đó*

$$BC.AA' = CA.BB' + AB.CC'.$$

Có thể tìm thấy phép chứng minh bổ đề trên ở bài T11/359, THTT số 363, tháng 9 năm 2007.

• *Trở lại việc giải bài toán.* Lấy điểm X thuộc đường tròn (O_1) sao cho AX tiếp xúc với đường tròn (O_1). Áp dụng bổ đề ta có



$BC.AX = CA.BA_1 + AB.CA_1$

$= (CA + CB)\frac{BC}{2}$ suy ra $AX=\frac{b+c}{2}$. Do đó $\mathcal{P}_{A/(O_1)}=AX^2=\frac{(b+c)^2}{4}$. Tương tự như trên ta có $\mathcal{P}_{B/(O_2)}=\frac{(c+a)^2}{4}$; $\mathcal{P}_{C/(O_3)}=\frac{(a+b)^2}{4}$.

Suy ra $\mathcal{P}_{A/(O_1)}+\mathcal{P}_{B/(O_2)}+\mathcal{P}_{C/(O_3)}$

$$=\frac{1}{4}((b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2)$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{1}{12}((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)$$

$\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❒

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng, tuy nhiên một số bạn cho lời giải hơi dài (vì không biết sử dụng bổ đề nêu trên).

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:
Thái Nguyên: *Trần Mạnh Tuấn*, 10T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nghệ An:** *Nguyễn Cảnh Thiện*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Hữu Hồng Quân*, 11A1, khối THPT chuyên Đại học Vinh, TP. Vinh; **Thừa Thiên – Huế:** *Võ Thành Văn*, 11T, Khối THPT chuyên, ĐHKH Huế; **Vĩnh Long:** *Phan Thị Mĩ Lợi*, 10T1, *Châu Tuấn Kiệt*, 11T1, *Huỳnh Minh Tuấn*, 11T2, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TX. Vĩnh Long.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T9/369. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z, n thoả mãn điều kiện*

$$x! + y! + z! = 5.\,n!$$

trong đó kí hiệu $k! = 1.\,2.\,\ldots\,.\,k$.

Lời giải. (Theo bạn *Vũ Minh Thắng*, 10T, Khối THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội).**

Không giảm tổng quát giả sử $x \ge y \ge z$. Khi đó $5.n! \le 3.x! < 5.x!$ dẫn đến $n < x \Rightarrow n + 1 \le x$. Lại có $5.n! > x! \ge (n + 1)!$ nên $5 > n + 1 \Rightarrow n \in \{1, 2, 3\}$.

• Với $n = 1$ thì $x! + y! + z! = 5$ suy ra $x \le 2$.

– Nếu $x = 1$ thì $y = 1$, $z = 1$ (loại).

– Nếu $x = 2$ thì $y! + z! = 3$ mà $2 \ge y \ge z$ nên $y = 2$, $z = 1$.
Vậy $(x\,;\,y\,;\,z) = (2\,;\,2\,;\,1)$.

• Với $n = 2$ thì $x! + y! + z! = 10$ suy ra $x \le 3$.

Tương tự thử với $x = 1, 2, 3$ với chú ý là $x \ge y \ge z$ ta thu được $(x\,;\,y\,;\,z) = (3\,;\,2\,;\,2)$.

• Với $n = 3$ thì $x! + y! + z! = 30$ suy ra $x \le 4$. Tương tự thử với $x = 1, 2, 3, 4$ (chú ý $x \ge y \ge z$) ta không tìm được bộ $(x\,;\,y\,;\,z)$ nào thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy ta có $(x\,;\,y\,;\,z\,;\,n) = (2\,;\,2\,;\,1\,;\,1), (2\,;\,1\,;\,2; 1), (1\,;\,2\,;\,2\,;\,1), (3\,;\,2\,;\,2\,;\,2), (2\,;\,3\,;\,2\,;\,2), (2\,;\,2\,;\,3\,;\,2)$. ❒

Nhận xét. 1) Một số bạn khi giả thiết $x \ge y \ge z$ và tìm được hai nghiệm $(2\,;\,2\,;\,1\,;\,1)$ và $(3\,;\,2\,;\,2\,;\,2)$ đã kết luận đó là tất cả các nghiệm của bài toán (!).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hải Quân*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Lê Văn Tú*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Phạm Duy Long*, 10T1, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Khánh Việt*, 10A2 Toán, THPT chuyên ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 11A, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Doãn Thế Hà*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Hà Văn Toàn*, 12G, THCS Mai Anh Tuấn, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Vũ Đình Long*, 9E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bình Định:** *Nguyễn Đăng Hưng*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Tấn Quyền*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/369. *Cho hai số thực a, b thuộc khoảng (0 ; 4). Dãy số* (a_n), $(n = 0, 1, \ldots)$ *được xác định bởi:*

$$a_0 = a\,;\, a_1 = b\,;\, a_{n+2} = \frac{2(a_{n+1} + a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}.$$

Chứng minh rằng dãy số (a_n), $(n = 0, 1, \ldots)$ *có giới hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Đặt $x_n = \min\{a_n, a_{n+1}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
Chú ý rằng với mọi số thực x, y mà $0 < x \le y < 4$ ta có

$$x < 2\sqrt{x} \le \frac{2(x+y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le 2\sqrt{y} < 4 \qquad (1)$$

Do đó chứng minh bằng quy nạp theo n ta có $0 < a_n < 4$, với mọi $n \ge 0$. Cũng từ (1) ta suy ra

$$a_{n+2} = \frac{2(a_{n+1} + a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} \ge 2\sqrt{x_n} > x_n \qquad (2)$$

Hệ quả là $x_{n+1} \ge x_n$.

Như vậy $0 < x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots < 4$. Từ đó suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ và giới hạn này thuộc khoảng $(0\,;\,4]$.

Từ (2) có $a_{n+3} \ge 2\sqrt{x_{n+1}} \ge 2\sqrt{x_n}$.

Bởi vậy $x_{n+2} = \min\{a_{n+2}, a_{n+3}\} \ge 2\sqrt{x_n}$ (3)

Đặt $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Từ (3), cho $n \to +\infty$, ta nhận được $x \ge 2\sqrt{x}$. Suy ra $x \ge 4$, do đó $x = 4$, vì $0 < x \le 4$.

Tóm lại $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 4$. Trong khi đó $x_n \le a_n < 4$ với mọi $n = 0, 1, \ldots$

Theo định lí kẹp ta có kết luận $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$. ❒

Nhận xét. Một số bạn học sinh đã nhận xét: đây là bài toán 1, trang 166 trong quyển sách "Tuyển tập đề thi Olympic 30-4 lần XII – 2006" của NXBGD. Lời giải trên gọn gàng hơn lời giải trong quyển sách đó.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T11/369.** *Xác định hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ sao cho*

$$f(f(x))+f(x)=\left(26^{3^{2008}}+\left(26^{3^{2008}}\right)^2\right)x \quad (1)$$

Lời giải. (*Dựa theo ý của nhiều bạn*)

Đặt $26^{3^{2008}}=a$ thì $a>0$ và (1) có dạng

$$f(f(x))+f(x)=(a^2+a)x\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^+ \quad (2)$$

Kí hiệu $f_n(x)=\underbrace{f(f(...f}_{n\text{ lần}}(x)...))\,,f_0(x)=x$.

Thay x bởi $f_n(x)$, từ (2) ta thu được

$f_{n+2}(x)+f_{n+1}(x)=(a^2+a)f_n(x),\forall x\in\mathbb{R}^+$ hay

$(f_{n+2}(x)-af_{+1}(x))+(a+1)(f_{n+1}(x)-af_n(x))=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^+$.

Với mỗi $x=x_0>0$ cố định cho trước, xét dãy $u_0=x_0$, $u_{n+1}=f(u_n)$, $n=0,1,...$ ta thu được

$$u_n>0\,,\ u_{n+2}+u_{n+1}-(a^2+a)u_n=0\,,\ n=0,1,2,3,... \quad (3)$$

Đây là dãy sai phân bậc hai với phương trình đặc trưng tương ứng $\lambda^2+\lambda-(a^2+a)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda_1=a$, $\lambda_2=-(a+1)$ nên dãy (3) có nghiệm dạng

$$u_n=c_1a^n+c_2(-1)^n(a+1)^n\,,\ n=0,1,2,...$$

Vì $u_n>0$, $n=0,1,2,...$ nên với $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, ta thu được $c_2>-c_1\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2k}$ và với $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, ta thu được $c_2<c_1\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2k+1}$.

Suy ra $-c_1\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2k}<c_2<c_1\left(\frac{a}{a+1}\right)^{2k+1}$, $k\in\mathbb{N}$.

Cho $n\to+\infty$, ta thu được $c_2=0$. Khi đó $u_n=c_1a^n$, $n=0,1,2,...$ Do đó $u_0=c_1$ và $u_1=au_0$ hay $f(x_0)=ax_0$ với mọi $x_0>0$. Ta thu được hàm số $f(x)=ax$, hàm số này thỏa mãn điều kiện bài ra. ☐

Nhận xét. Đây là một bài toán chứa đựng kiến thức nâng cao về giải tích gắn với phương trình sai phân bậc hai, dáng điệu tiệm cận và hàm hợp. Dựa vào cách giải, một số bạn còn cho các mở rộng của bài toán (thay số $26^{3^{2008}}$ bởi các số dương tùy ý). Các bạn có lời giải tốt:

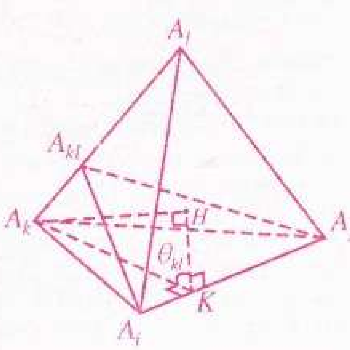
Hà Nội: *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, *Đào Trọng Anh*, 10A4, THPT Nguyễn Gia Thiều, *Lưu Văn Đan*, *Nguyễn Ngọc Trung*, *Trần Thế Khải*, *Trần Nhật Tân*, 10A1T, Khối PTCTT ĐHKHTN, *Vũ Minh Thắng*, 10T1, Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Quách Đăng Hưng*, *Nguyễn Việt Tiệp*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Hải*, *Vũ Thị Thu Hà*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nam:** *Lại Văn An*, 11T, THPT chuyên Hà Nam; **Thái Bình:** *Hoàng Minh Lập*, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Mạnh*, *Đặng Thu Hương*, 12T, THPT chuyên Hạ Long; **Hải Dương:** *Đỗ Thị Thu Thảo*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang, *Vũ Thanh Tú*, 11A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Cao Tuấn*, 11T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn An*, 10A1K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Hữu Hồng Quân*, *Nguyễn Tiến Dũng*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Đà Nẵng:** *Lê Văn Tấn Quyền*, *Nguyễn Đức Tâm*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước:** *Trần Phương Nam*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Phú Yên:** *Lê Văn Thảo*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Đắk Lắk:** *Trương Công Thành*, THPT chuyên Ngô Gia Tự.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/369.** *Gọi S là diện tích toàn phần của một tứ diện. Chứng minh rằng tổng diện tích tất cả các thiết diện tạo bởi các mặt phẳng phân giác các góc nhị diện của tứ diện đó không lớn hơn $\frac{\sqrt{6}}{2}S$.*

Lời giải. (Dựa theo *Lê Xuân Thăng*, 11A1, THPT Triệu Sơn 3, **Thanh Hóa**).

Gọi s_i là diện tích mặt α_i (cũng là mặt tam giác $A_jA_kA_l$) đối diện đỉnh A_i ($i=1,2,3,4$) của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$; $\widehat{A_iA_j}\,(A_k,A_l)=(\alpha_l,\alpha_k)$ là góc nhị diện cạnh A_iA_j tạo bởi hai mặt α_k,α_l và θ_{kl} là độ lớn của góc nhị diện này, $\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$. Gọi A_{ij} là giao điểm của mặt phân giác $(A_iA_jA_{kl})$ của nhị diện $\widehat{A_iA_j}$ và cạnh A_kA_l, $s_{ij}=s(\Delta A_iA_jA_{kl})$ là diện tích thiết diện của tứ diện được xét, xác định bởi mặt phân giác đó (hình vẽ).



Trước hết, dễ dàng chứng minh hai bổ đề sau đây.

Bổ đề 1. Trong một tứ diện, tổng cosin các nhị diện không lớn hơn 2: $\sum\cos\theta_{ij} \le 2$ (1)

Bổ đề 2. Thể tích V của một tứ diện được tính theo các diện tích s_1, s_2 của hai mặt có cạnh chung với độ dài là a và độ lớn nhị diện cạnh đó là α bởi công thức sau:

$$V = \frac{2s_1s_2\sin\alpha}{3a} \quad (2)$$

Trở lại bài toán:

Dựng $A_kH \perp (A_iA_jA_l) = H$ và $A_kK \perp A_iA_j = K$, ta được $HK \perp A_iA_j$ và do đó, $\widehat{HKA_k} = \theta_{kl}$ là độ lớn nhị diện $\widehat{A_iA_j}$. Mặt khác, $\Delta A_iA_jA_{kl}$ là thiết diện phân giác của nhị diện cạnh $\widehat{A_iA_j}$ nên A_{kl} thuộc cạnh A_kA_l, vì vậy: $v(A_1A_2A_3A_4) = V =$ $v_1(A_kA_iA_jA_{kl}) + v_2(A_lA_iA_jA_{kl}) = v_1 + v_2$, đồng thời độ lớn của hai nhị diện $\widehat{A_iA_j}$ (A_k, A_{kl}) và $\widehat{A_iA_j}$ (A_{kl}, A_l) bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}\theta_{kl}$. Từ đó, theo (2) ta được

$$V = \frac{2s_ks_l\sin\theta_{kl}}{3A_iA_j} = \frac{2(s_l+s_k)s_{ij}\sin\frac{\theta_{kl}}{2}}{3A_iA_j}.$$ Từ đó

$$s_{ij} = \frac{2s_ks_l\cos\frac{\theta_{kl}}{2}}{s_k+s_l} \quad (3)$$

trong đó $s_i = s(\Delta A_jA_kA_l)$. Từ (3) thu được

$$s_{ij} \le \sqrt{s_ks_l}\cos\frac{\theta_{kl}}{2} \quad (4)$$

Ngoài ra, để ý rằng ta còn có BĐT:

$$\sum s_ks_l \le \frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{4}s_i\right)^2 \quad (5)$$

Từ các BĐT (1), (4), (5) và áp dụng BĐT Bunyakovski cho hai bộ 6 số dương ta được:

$$\sum s_{ij} \le \sum\left(\sqrt{s_ks_l}\cos\frac{\theta_{kl}}{2}\right)$$

$$\le \sqrt{\left(\sum s_ks_l\right)\left(\sum\cos^2\frac{\theta_{kl}}{2}\right)}$$

$$\le \sqrt{\frac{3}{8}\left(\sum_{i=1}^{4}s_i\right)^2\cdot\left(\frac{\sum\cos\theta_{kl}}{2}+3\right)} \le \frac{S\sqrt{6}}{2} \text{ (đpcm).}$$

Chú thích: $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Để dễ theo dõi hơn, trong hình vẽ trên cũng như trong lập luận ta có thể gán cho l, k, i và j lần lượt lấy giá trị 1, 2, 3 và 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\theta_{12} = \theta_{34}$, $\theta_{13} = \theta_{24}$, $\theta_{14} = \theta_{23}$; $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$ và $\theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{14} = \theta_{34} = \theta_{24} = \theta_{23}$, tức là $A_1A_2A_3A_4$ là một *tứ diện đều*. ❐

Nhận xét. 1) Một số bạn không sử dụng bổ đề 1, mà thay vào đó sử dụng công thức hình chiếu:

$$s_4 = s_1\cos\theta_{14} + s_2\cos\theta_{24} + s_3\cos\theta_{34}$$

hoặc sử dụng BĐT lượng giác:

$$\cos\frac{x}{2} \le \frac{\sqrt{6}}{8}\cos x + \frac{7\sqrt{6}}{24} \text{ (với } x \in [0, \pi])$$

cũng thu được BĐT cần tìm.

2) Ngoài bạn *Lê Xuân Thăng*, các bạn sau đây có lời giải đúng: *Phạm Đức Nam*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, **Hà Nội;** *Vũ Thanh Tú*, 11A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, **Hải Dương**.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

★Bài L1/369. *Một đồng xu có bề dày d và đường kính D chưa được tích điện. Tại một điểm trên trục qua tâm vuông góc với mặt đồng xu và cách tâm một khoảng L có đặt một điện tích điểm Q. Cho biết d << D << L và ε = 1.*

a) Tính điện tích hưởng ứng trên các mặt đồng xu.

b) Tính lực tương tác điện giữa đồng xu với điện tích điểm Q.

Lời giải. a) Giả sử $Q > 0$, do $d \ll D \ll L$ nên điện trường do điện tích Q gây ra trong đồng xu coi là đều và có cường độ $E = \frac{kQ}{L^2}$. Đồng xu là vật dẫn cân bằng nên ở hai mặt xuất hiện các điện tích hưởng ứng với điện tích $-q$ và q sao cho điện trường gây bởi các điện tích hưởng ứng triệt tiêu với điện trường gây bởi điện tích Q trong đồng xu. Do vậy $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \varepsilon_0 E = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{L^2} \Rightarrow q = \frac{QD^2}{16L^2}.$$

Mặt đồng xu gần điện tích Q hơn sẽ mang điện tích $-q$, mặt xa mang điện tích $-q$.

b) Do đồng xu ở khá xa điện tích Q nên xem tương tác giữa đồng xu và điện tích Q như các điện tích điểm với nhau, đương nhiên lực tổng hợp sẽ là lực hút.

$$F = \frac{kqQ}{\left(\frac{L-d}{2}\right)^2} - \frac{kqQ}{\left(\frac{L+d}{2}\right)^2} \approx \frac{2kqQd}{L^3}$$

$$F = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0}.\frac{QD^2d}{L^5}. \square$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Hà Tây: *Nguyễn Mạnh Quân*, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Mạc Thế Trường*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Phòng:** *Trần Hoàng Bá*, 12 Toán, THPT chuyên Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thanh Tùng*, 12A11, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Nguyễn Duy Hùng*, 12F, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Ngọc Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/369. *Một vật khối lượng $m = 1$ kg được ném thẳng đứng lên từ mặt đất. Hiệu độ lớn vận tốc lúc ném lên và lúc rơi trở lại mặt đất là $\Delta v = 1$ m/s. Tính công suất trung bình của lực cản không khí trong thời gian chuyển động, nếu lực cản tỉ lệ thuận với vận tốc chuyển động của vật.*

Lời giải. Chọn trục tọa độ Ox thẳng đứng, gốc O tại mặt đất, chiều dương theo chiều chuyển động.

a) *Xét trường hợp vật được ném lên*

Theo định luật II Newton, phương trình chuyển động của vật có dạng:

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - mg \qquad (1)$$

trong đó α là hệ số tỉ lệ.

Suy ra $mdv = -\alpha v dt - mgdt = -\alpha dx - mgdt$.

Gọi t_1 là khoảng thời gian từ khi bắt đầu ném đến khi vật lên đến độ cao cực đại H, ta có:

$$\int_{v_1}^{0} mdv = -\int_0^H \alpha dx - \int_0^{t_1} mgdt;$$

ở đây v_1 là độ lớn vận tốc của vật khi vừa bị ném. Tích phân ta được:

$$-mv_1 = -\alpha H - mgt_1 \qquad (2)$$

b) *Xét trường hợp vật rơi xuống*

Khi vật rơi xuống, phương trình chuyển động của vật có dạng:

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v + mg \qquad (3)$$

Suy ra $mdv = -\alpha v dt + mgdt = -\alpha dx + mgdt$.

Gọi t_2 là khoảng thời gian khi vật rơi từ độ cao cực đại H tới mặt đất, ta có

$$\int_0^{v_2} mdv = -\int_H^0 \alpha dx + \int_0^{t_2} mgdt$$

ở đây v_2 là độ lớn vận tốc của vật khi rơi tới mặt đất. Tích phân ta được:

$$mv_2 = \alpha H + mgt_2 \qquad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$m(v_1 + v_2) = mg(t_1 + t_2) = mgt \qquad (5)$$

hay $t = \frac{v_1 + v_2}{g}$

trong đó t là thời gian từ khi bắt đầu ném vật đến khi vật rơi trở lại tới mặt đất.

Công của lực cản bằng độ biến thiên động năng của vật:

$$A_c = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)}{2}.$$

Công suất trung bình của lực cản là:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{mg(v_1 - v_2)}{2} = \frac{1.10.1}{2} = 5\text{ (W)}. \square$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Văn Khánh*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc**: *Phạm Ngọc Xuyên*, Trần Minh Thu, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Ngọc Duy*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hải Phòng**: *Trần Hoàng Bá*, 12 Toán, THPT chuyên Trần Phú.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Hội thảo khoa học GIẢI TÍCH HIỆN ĐẠI TRONG NGHIÊN CỨU và ứng dụng

Trong hai ngày 14 và 15 tháng 6 năm 2008, Hội Toán học Hà Nội, trường Đại học Khoa học Tự nhiên và Sở Giáo dục - Đào tạo Hải Dương đồng tổ chức Hội thảo khoa học «Giải tích hiện đại trong nghiên cứu và ứng dụng" tại thành phố Hải Dương. Đây là hội thảo khoa học nhằm khởi động cho chương trình trọng điểm Đại học Quốc gia Hà Nội về xây dựng nhóm nghiên cứu khoa học QGTĐ 0809 về Giải tích hiện đại và ứng dụng trong khoa học môi trường và tính toán vật liệu. Nhiều nhà khoa học, chuyên gia của các trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, Đại học Sư phạm Hà Nội, Đại học Thuỷ Lợi, Viện Toán học, Vụ Giáo dục Trung học, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục và các giáo viên của các tỉnh Hải Dương, Thái Bình, Quảng Ninh, Lạng Sơn, Hưng Yên tham gia hội thảo và báo cáo tại các phiên toàn thể. Hội nghị hân hạnh được đón tiếp TS. Nguyễn Vinh Hiển, Thứ Trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bà Đặng Thị Bích Liên, Phó Chủ Tịch UBND Tỉnh Hải Dương, đến chúc mừng, bày tỏ những tự hào về truyền thống hiếu học của tỉnh Hải Dương và tin tưởng rằng sau hội nghị này phong trào giáo dục Hải Dương càng phát triển hơn nữa.

PV

PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

T7/373. Prove that in any acute triangle ABC, the following inequality holds.

$$\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan B}{\tan C}+\frac{\tan C}{\tan A}\ge\frac{\sin 2A}{\sin 2B}+\frac{\sin 2B}{\sin 2C}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

T8/373. The incircle of a triangle ABC meets BC, CA, and AB respectively at A_1, B_1, C_1. Let p, S, R be respectively, half of the perimeter, the area and the circumradius of ABC; Let p_1 be half of the perimeter of $A_1B_1C_1$. Prove the inequality

$$p_1^2\le\frac{pS}{2R}.$$

When does equality occur?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/373. Let A ($A\subset\mathbb{N}$) be a non-empty set satisfying the condition: If $a\in A$ then $4a$ and $[\sqrt{a}]$ are also in A ($[x]$ is the integer part of x). Prove that $A=\mathbb{N}$.

T10/373. Let a be a natural number which is greater than 3 and consider the sequence $(u_n)(n=1, 2, \ldots)$ defined inductively by

$$u_1=a \text{ and } u_{n+1}=u_n-\left[\frac{u_n}{2}\right]+1 \text{ for all}$$

$n=1, 2, \ldots$. Prove that there exists $k\in\mathbb{N}^*$ such that $u_n=u_k$ for all $n\ge k$.

T11/373. Find all polynomials with real coefficients $P(x)$, $Q(x)$ and $R(x)$ such that

$$\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}=R(x) \text{ for all } x.$$

T12/373. Let $ABCD$ be a tetrahedron with the centroid G and the circumradius R. Prove that

$$GA+GB+GC+GD+4R\ge$$
$$\frac{2}{\sqrt{6}}(AB+AC+AD+BC+CD+DB).$$

Translated by LE MINH HA

Điều bí mật của những chuỗi số 9

Không chỉ say mê tìm hiểu nhiều hơn nữa những chữ số thập phân của những số vô tỉ như số π, người ta còn tìm hiểu về các tính chất của những chữ số nằm sau dấu phẩy của các số hữu tỉ. Các chữ số thập phân đó đôi khi có những tính chất khá kì lạ. Trong nhiều trường hợp, khi tách đôi rồi cộng các phần những chữ số thập phân của các số hữu tỉ, ta thấy những chuỗi số 9 xuất hiện. Trong một công trình của mình, nhà toán học Pháp *E. Midy* đã xác định những điều kiện xuất hiện hiện tượng này.

Đối với các số hữu tỉ (số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn), người ta luôn thấy một "yếu tố" nhắc đi nhắc lại vô hạn. Chẳng hạn, với $\frac{1}{3}$ (0,3333...) "yếu tố" vô hạn đó là "3"; với $\frac{22}{7}$ (3,142857142857...) "yếu tố" vô hạn đó là "142857"; với $\frac{2}{11}$ (0,181818...), "yếu tố" đó là "18"; với $\frac{3}{4}$ (0,750000...), yếu tố đó là "0".

Năm 1802, *Henry Goodwyn* có ý tưởng lạ lùng là tách các yếu tố vô hạn làm hai phần có số chữ số bằng nhau, rồi cộng hai phần đó lại. Chẳng hạn, với $\frac{22}{7}$, hai số có từ yếu tố vô hạn 142847 là 142 và 857 và tổng của chúng là 999; với $\frac{2}{11}$, ta có 1 và 8 với tổng là 9.

Không phải chỉ có hai thí dụ làm xuất hiện bất ngờ chuỗi chữ số "9". Nhưng hiện tượng này không phải lúc nào cũng xảy ra. Do đó câu hỏi *"Trong những trường hợp nào xuất hiện những chuỗi số 9?"* được đặt ra!

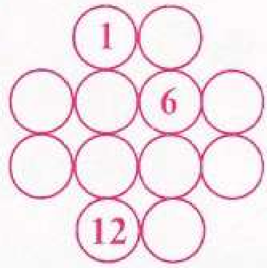
Trong một công trình công bố năm 1836 tại một nhà xuất bản ở Nantes, *E. Midy* đã cung cấp một kết quả khái quát đầu tiên, được gọi là "Định lí Midy". Định lí này cho những điều kiện đủ về tử số p và mẫu số q của một phân số để cho phép cộng hai nửa của yếu tố vô hạn của $\frac{p}{q}$ là có một chuỗi số 9. Thí dụ, nếu p là một số nguyên tố (p chỉ chia hết cho chính nó và cho 1) thì tính chất nói trên luôn đúng, tất nhiên với điều kiện là yếu tố vô hạn gồm có một số chẵn các chữ số.

Định lí Midy, sau khi được công bố lần đầu tiên, đã bị lãng quên. Nội dung của định lí được khám phá và được chứng minh lại nhiều lần, trong một số tài liệu xuất bản. Gần đây, *Joseph Lewittes* ở trường Đại học New York, đã tìm lại được định lí đó ở tài liệu xuất bản gốc. Không ngờ có nhiều điều ngạc nhiên vì các ý tưởng mà *Midy* nói trong định lí của mình có rất nhiều hệ quả, còn manh nha nhiều sự khái quát hoá mà một số tác giả sau đó đã tìm ra được. Tuy nhiên trong công trình của mình, *Lewittes* đã tìm ra một số kết quả hoàn toàn mới và khá tổng quát (*http://fr.arxiv.org/abs/math.* NT/0605182, 2006), trong đó phải kể đến như các điều kiện đủ để tách yếu tố vô hạn thành ba phần bằng nhau rồi cộng lại, cũng tạo ra những chuỗi số 9. Thí dụ với $\frac{1}{7}$, có yếu tố vô hạn là "142857", cho $14 + 28 + 57 = 99$. Hay tổng quát hơn nữa cho việc tách yếu tố vô hạn thành n phần bằng nhau. Đó là các kết quả rất sâu sắc về mặt bản chất số học.

NGUYỄN VĂN THIÊM (*Hà Nội*)
(Theo *La Recherche* tháng 10. 2006)

SẮP XẾP 12 SỐ

Hãy điền 12 số từ 1 đến 12 vào các hình tròn ở hình bên sao cho:



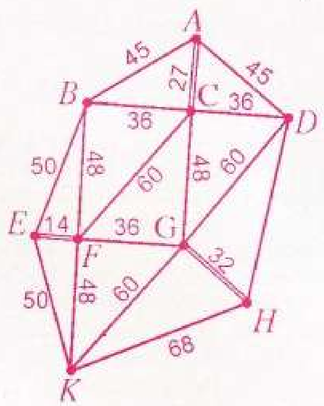
– Tổng bốn số trong bốn hình tròn xếp theo hàng ngang hoặc theo cột dọc đều bằng nhau;

– Tổng bốn số trong bốn hình tròn sao cho mỗi hình tiếp xúc với hai hình trong số đó đều bằng nhau.

Giải đáp bài: Đường đi ngắn nhất

(Đề đăng trên THTT số 369, tháng 3.2008)

Với mỗi điểm là đầu mút của một số chẵn ($2n$) đoạn đường (các điểm B, D, K) thì số đoạn đường đi vào bằng số đoạn đường đi ra (bằng n) nên chỉ cần đi qua một lần các đoạn đường nối với đỉnh đó .



Với mỗi điểm là đầu mút của một số lẻ ($2n - 1$) đoạn đường (các điểm A, C, E, F, G, H) thì sau n lần đi vào và n lần đi ra phải đi lặp lại một đoạn đường nào đó. Các cặp điểm có đoạn đường nối liền nhau như thế là (E, F), (G, H), (A, C), do đó ta chọn các đường đi lặp lại là EF và GH, còn đoạn AC không cần lặp lại khi xuất phát từ A và kết thúc ở C.

Một cách đi là

$$ABCFBEFEKFGKHGHDGCADC$$

Tổng số độ dài đường đi của cách đi đó là

$$45.2 + 50.2 + 68.2 + 36.3 + 60.3 + 48.3 + 14.2 + 32.2 + 27$$

$$= 209.2 + 144.3 + 27 = 877 \text{ (km)}.$$

Chú ý: Có nhiều cách chọn đường đi với tổng số độ dài là 877km.

Các bạn có lập luận đúng là

1) *Nguyễn Trường Giang*, 9A2, THPT Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.
2) *Nguyễn Hữu Thanh*, 10A1 Toán, khối THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**.
3) *Vũ Hồng Thái*, 11 Toán, THPT chuyên **Bắc Ninh**.
4) *Nguyễn Văn Thiệu*, 10A4, K62, THPT Ngô Sĩ Liên, TP. **Bắc Giang**.
5) *Phạm Minh Khoa*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, Diễn Châu, **Nghệ An**.
6) *Nguyễn Văn Dụng*, L10, Thôn Tân Trại 1, Vĩnh Giang, Vĩnh Linh, **Quảng Trị**.

ĐAN QUỲNH

PHƯƠNG TRÌNH có nghiệm duy nhất?

Một bài toán có nội dung:

Giải phương trình

$$\lg(x+10)+\frac{1}{2}\lg x^2 = 2\lg 4 \qquad (1)$$

Lời giải bài toán này được một học sinh đề xuất như sau.

Điều kiện $x > -10$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow \lg(x+10) + \lg x = 2 - \lg 4$

$\Leftrightarrow \lg x(x+10) = \lg\dfrac{10^2}{4}$

$\Leftrightarrow x(x+10) = 25$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 25 = 0.$

Suy ra $x = -5 \pm 5\sqrt{2}$.

Do $x > -10$ chọn được $x = -5+5\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -5+5\sqrt{2}$.

Bạn hãy cho biết ý kiến của mình về lời giải của bạn học sinh trên. Còn cách giải của bạn như thế nào?

PHẠM THỊ THÀNH
(Hà Nội)

Giải đáp bài: Sao không có điểm?

(Đề đăng trên THTT số 369, tháng 3.2008)

Chúng ta đều thấy rằng lời giải của *Nam* không đúng vì bạn ấy đã sử dụng công thức sai sau: $a^{b^c} = (a^b)^c$ (!)

Rõ ràng trong hầu hết các trường hợp thì $a^{b^c} \neq (a^b)^c$. Khi đặt $t = 2^{\sqrt[12]{\sin x}}$ thì $t^3 \neq 2^{\sqrt[4]{\sin x}}$ và $t^2 \neq 2^{\sqrt[6]{\sin x}}$. Vì thế các phép biến đổi tiếp theo là hoàn toàn sai lầm.

Có thể giải lại bài toán đó như sau:

Điều kiện $0 \le \sin x \le 1$. Đặt $t = \sqrt[12]{\sin x}$ $(t \ge 0)$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$2^t + 2^{t^3} \le 2.2^{t^2} \qquad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta thấy

$$2^t + 2^{t^3} \ge 2.\sqrt{2^{t+t^3}} \ge 2\sqrt{2^{2t^2}} = 2.2^{t^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$(1) \Leftrightarrow t = t^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1. \end{array}\right.$$

Kết luận. Bất phương trình đã cho có các họ nghiệm là $x = k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi$ $(k, m \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét. Hầu hết các bài gửi về Tòa soạn đều chỉ đúng chỗ sai trong lời giải của Nam, đồng thời đưa ra được lời giải đúng cho bài toán này. Sau đây là những bạn có đáp án tốt: *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**; *Phan Thanh Hải*, 11A1, THPT B Kim Bảng, **Hà Nam;** *Đinh Xuân Lộc*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 11T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Thị Thủy An*, 12G, THPT Nghĩa Đàn, **Nghệ An**; *Trần Quốc Luật*, 11A1, THPT Cao Thắng, Hương Sơn, **Hà Tĩnh**.

NGỌC HIỂN

THÔNG BÁO
về sách giáo khoa phục vụ năm học 2008 - 2009

Nhà xuất bản Giáo dục trân trọng thông báo đến các Quý thầy cô giáo và các em học sinh trong cả nước về việc xuất bản và cung ứng sách giáo khoa (SGK) phục vụ năm học 2008-2009 :

1. SGK từ lớp 1 đến lớp 12, trong đó SGK từ lớp 1 đến lớp 11 là sách tái bản, nội dung không thay đổi so với sách đã xuất bản từ năm 2007 trở về trước. Riêng SGK lớp 12 được in mới, thay cho sách cũ đã xuất bản từ năm 2007 trở về trước.

Bộ SGK	*Số cuốn*	*Giá bìa (đồng)*
Lớp 1	6	40.800
Lớp 2	6	38.900
Lớp 3	6	42.300
Lớp 4	9	66.100
Lớp 5	9	67.200
Lớp 6	12	83.500
Lớp 7	13	97.000
Lớp 8	13	105.500
Lớp 9	13	102.700
Lớp 10 (chuẩn)	13	112.800
Lớp 11 (chuẩn)	13	114.200
Lớp 12 (chuẩn)	13	124.000

(Ghi chú: Giá bộ SGK chỉ tính sách ngoại ngữ là Tiếng Anh. Bản danh mục giá bán lẻ được niêm yết ở tất cả các cửa hàng sách, nhà sách và đại lí có bán SGK tại các tỉnh, thành phố trong cả nước.)

Ngoài ra, Nhà xuất bản Giáo dục tổ chức cung ứng các sản phẩm phục vụ học sinh, giáo viên năm học 2008-2009 :

2. Các sách tham khảo bổ trợ SGK từ lớp 1 đến lớp 12 (gồm các sách bài tập và vở bài tập của các môn học do các nhóm tác giả SGK biên soạn).

3. Các sách tham khảo - Nâng cao kiến thức ở các lĩnh vực khoa học tự nhiên, khoa học xã hội,... phục vụ các đối tượng là thầy cô giáo, các cán bộ quản lí giáo dục, các em học sinh, sinh viên và các bậc phụ huynh học sinh,...

4. Các loại tranh ảnh, bản đồ giáo dục, các băng hình, băng tiếng, đĩa CD-Rom giáo khoa và các loại thiết bị đồ dùng dạy học phục vụ chương trình, SGK hiện hành, đặc biệt là tranh ảnh, bản đồ, băng đĩa, thiết bị phục vụ chương trình và SGK mới lớp 12.

5. Các loại sách mẫu giáo, truyện tranh, truyện lịch sử phục vụ ngành học Mầm non do các nhóm tác giả chuyên ngành trong nước biên soạn và một số loại sách được hợp tác với các nhà xuất bản nước ngoài (Úc, Mĩ, Nhật, Canada, v.v...).

6. Các loại tập vở học sinh phục vụ theo yêu cầu, các loại sổ ghi tên, ghi điểm, học bạ, bài soạn giáo án theo mẫu quy định, phục vụ học sinh và giáo viên thuận lợi trong học tập và giảng dạy.

Để cung ứng các sản phẩm trên đến các thầy cô giáo, các em học sinh và các trường học, Nhà xuất bản Giáo dục cùng với các Công ti (CP) Sách - TBTH ở các tỉnh, thành phố tổ chức hai Tháng phát hành cao điểm để phục vụ năm học mới 2008-2009 :

* Tháng phát hành phục vụ Hè 2008:
  Từ 15 – 5 đến 15 – 6.
* Tháng phát hành phục vụ Khai giảng :
  Từ 10 – 8 đến 10 – 9.

Đồng thời với việc phát hành và cung ứng các sản phẩm mới nói trên, Nhà xuất bản Giáo dục phối hợp với các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Công ti (CP) Sách - TBTH, các tổ chức xã hội triển khai cuộc vận động dùng lại SGK cũ theo sự chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Mọi liên hệ việc mua - bán, trao tặng SGK cũ, xin liên hệ với Nhà xuất bản Giáo dục ở từng khu vực :

❖ TP. Hà Nội : Số 187B Giảng Võ,
ĐT: 04 8562496.

❖ TP. Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh,
ĐT : 0511 3827373.

❖ TP. Hồ Chí Minh : Số 231 Nguyễn Văn Cừ,
ĐT : 08 8358423.

Và các Công ti (CP) Sách – TBTH tại các tỉnh, thành phố trong cả nước.

Trân trọng thông báo.

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 373(7.2008)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.5121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.5144272, 04.5121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

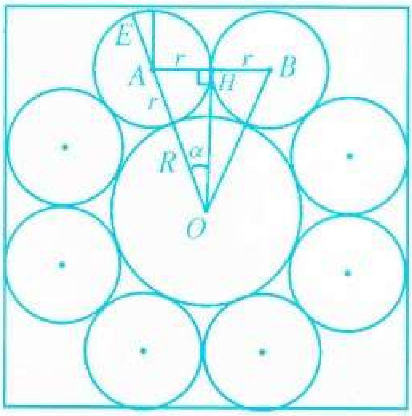
Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG, HỒ QUANG VINH.
Trị sự, phát hành : HOÀNG THÀNH ĐỨC, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

Giải đáp bài: Hình hoa tám cánh

(Đề đăng trên THTT số 368 tháng 2.2008)

Gọi tâm hình tròn trung tâm là O; hai hình tròn nhỏ tâm A và tâm B tiếp xúc ngoài với nhau tại H thì ta có $OA = OB = R + r$ và $OH \perp AB$, $AH = HB = r$ (hình vẽ).



Ta có $\alpha = \frac{360^\circ}{16} = 22^\circ 30'$ và $s = \sin\alpha \approx 0{,}3827$, $\tan\alpha \approx 0{,}1142$.

1) $\frac{AH}{AO} = \frac{r}{r+R} = \sin\alpha = s$

hay $\frac{R}{r} = \frac{1}{s} - 1 \approx 1{,}613$.

2) Các hình tròn có bán kính r, R lớn nhất khi cạnh mảnh giấy hình vuông là tiếp tuyến ngoài của hai đường tròn nhỏ tiếp xúc nhau như ở hình vẽ. Lúc đó cạnh hình vuông bằng

$$a = 2(OH+r) = 2\left(\frac{r}{\tan\alpha} + r\right) = 2r\left(\frac{1}{\tan\alpha} + 1\right) \approx 6{,}828r.$$

Với $a = 290$ (mm) thì $r \approx \frac{290}{6{,}828} \approx 42{,}4$(mm) và $R \approx 1{,}613r \approx 68{,}4$(mm).

Nhận xét. Một số bạn chọn cạnh hình vuông song song (hoặc vuông góc) với đường nối tâm O và tâm một hình tròn nhỏ thì chưa phải tốt nhất, vì lúc đó cạnh hình vuông bằng $2OE = 2(R + 2r) > 2(OH + r)$.

Các bạn có lời giải đúng là:

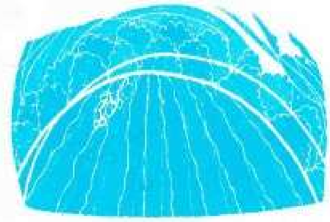
1) *Nguyễn Đình Thi*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.

2) *Trần Văn Hạnh*, 11A5, THPT Ninh Giang, **Hải Dương**.

PHÂN CHIA TỨ GIÁC thành bốn tứ giác có diện tích bằng nhau

Người chủ một mảnh vườn tứ giác lồi $ABCD$ muốn phân chia mảnh vườn đó thành bốn mảnh vườn nhỏ hình tứ giác có diện tích bằng nhau để trồng bốn loại hoa bằng cách tìm một điểm K bên trong $ABCD$ rồi phân chia mảnh vườn $ABCD$ theo các đoạn thẳng KM, KN, KP, KQ, trong đó M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi E là giao điểm của AC và BD.

Dành cho bạn đọc



Bạn hãy xác định điểm K có tính chất trên trong mỗi trường hợp sau:

1) Điểm E là trung điểm của AC.

2) Điểm E khác các trung điểm của AC và BD.

PHI PHI

20 NĂM ĐẠI HỌC DÂN LẬP THĂNG LONG xây dựng và phát triển

Đại học dân lập Thăng Long là trường dân lập đào tạo bậc đại học đầu tiên của Việt Nam. Trường được thành lập theo quyết định số 1687/KH-TV ngày 15/12/1988 của Bộ Đại học, Trung học chuyên nghiệp và Dạy nghề với tên ban đầu là Trung tâm đại học dân lập Thăng Long. Sau đó, theo quyết định số 441/Tg của Thủ tướng Chính phủ ngày 9/8/1994, Trung tâm đại học dân lập Thăng Long chuyển thành Đại học dân lập Thăng Long. Hiện nay, Hội đồng quản trị gồm 9 thành viên, đứng đầu là GS. TSKH Hoàng Xuân Sính (Chủ tịch). Ban giám hiệu điều hành các hoạt động của Nhà trường, đứng đầu là TS. Phan Huy Phú (Hiệu trưởng). Tất cả các văn bằng của trường đều do Bộ Giáo dục và Đào tạo cấp.

Từ năm đầu thành lập, trường chỉ có 74 học sinh chuyên ngành Toán Tin và lớp học thuê tại Trường Quản lí Y tế, 138 Giảng Võ. Đến nay,được sự quan tâm của Uỷ ban Nhân dân thành phố Hà Nội, sự nỗ lực của Hội đồng Quản trị, ban Giám hiệu, giáo viên và học sinh, Nhà trường đã có khuôn viên khang trang theo tiêu chuẩn Quốc tế rộng hơn 2 ha với hệ thống liên hoàn gồm: toà nhà dành cho sinh viên học, toà nhà dành cho giáo viên và chuyên gia làm việc, nhà Thể chất, toà nhà làm Hội trường và hai giảng đường, toà nhà làm Thư viện.

Nguyên tắc hoạt động:

- Giáo dục bậc đại học chất lượng cao.
- Phương pháp cá nhân hoá.
- Quản lí và giám sát hiệu quả.
- Ban Giám hiệu biết lắng nghe.
- Tất cả cho trí thức hội nhập Quốc tế, khuyến khích tài năng cá nhân và đáp ứng với thị trường lao động.

Các ngành đào tạo của trường:

- Khoa Toán và Tin học: Toán Tin ứng dụng, Công nghệ thông tin, Mạng máy tính và Viễn thông, Hệ thống thông tin quản lí.
- Khoa Quản lí: Kế toán, Tài chính Ngân hàng, Quản trị kinh doanh, Marketting, Quản lí bệnh viện.
- Khoa Ngoại ngữ: Tiếng Anh, Tiếng Pháp, Tiếng Nhật, Tiếng Trung.
- Khoa Khoa học Xã hội và Nhân văn: Công tác xã hội, Việt Nam học.
- Khoa Khoa học Sức khoẻ: Điều dưỡng, Y tế công cộng.
- Khoa Công nghệ: Công nghệ tự động.

Hệ thống tín chỉ:

Tuỳ theo khả năng và điều kiện, mỗi sinh viên có thể tự chọn các môn học và chủ động sắp xếp kế hoạch học tập cho bản thân. Sinh viên học giỏi có thể ra trường sớm.

Sinh viên ở tất cả các khoa phải học 2 ngoại ngữ : Anh và Pháp hoặc Anh và Nhật.

Thời gian đào tạo : 4 năm học.

Kết quả học sinh tốt nghiệp:

Theo điều tra của Ngân hàng Thế giới năm 1996 và Dự án phát triển Đại học năm 2001, tỉ lệ sinh viên của trường có việc làm ngay sau khi tốt nghiệp lần lượt là 95% và 85%. Nhiều sinh viên đã tiếp tục học chương trình sau đại học ở trong nước và du học ở các nước như Mỹ, Pháp, Đức và Nhật Bản.

Trung thành với hiến chương của trường là "*Tất cả cho trí thức hội nhập Quốc tế, khuyến khích tài năng cá nhân và đáp ứng với thị trường lao động.*". 20 năm xây dựng và phát triển, Đại học dân lập Thăng Long đã vượt lên mọi khó khăn để giữ vững mục tiêu đề ra từ ngày thành lập, đóng góp tích cực cho nền giáo dục của đất nước, cho sự phồn vinh của dân tộc. Đại học dân lập Thăng Long - một địa chỉ đáng tin cậy cho các học sinh cuối cấp THPT lựa chọn.

Địa chỉ của trường:
Khương Trung- Thanh Xuân Hà Nội - Việt Nam
Tel: (84-4)8587346; fax: (84-4)5636775
Website:http//www.thanglong.edu.vn

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT07M8
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2008
Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng