NĂM THỨ
HAI MƯƠI
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

6/9
192 + 193
NĂM HỌC 2018 - 2019

TRUNG HỌC CƠ SỞ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Một cách phát triển bài toán bất đẳng thức theo nhiều hướng

TIN TỨC - HOẠT ĐỘNG - GẶP GỠ

- Chiều ngày 05/01/2019, Trường Liên cấp Tiểu học và Trung học cơ sở Ngôi Sao Hà Nội đã tổ chức Lễ trao giải Kì thi Toán học Úc (AMC) 2018. Đến dự có TS. Đoàn Trung Cường, Phó Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam; ThS. Nguyễn Ngọc Hân, Phó Tổng biên tập phụ trách Tạp chí Toán Tuổi thơ, ... Kì thi Toán học Úc (AMC) bắt đầu được tổ chức năm 1978. Trường Liên cấp Tiểu học và Trung học cơ sở Ngôi Sao Hà Nội lần đầu tiên đăng cai tổ chức kì thi AMC năm 2016. Kì thi AMC năm 2018 có hơn 1000 thí sinh tham dự và kết quả có 8 thí sinh đạt chứng chỉ Hạng Prize (là những thí sinh có số điểm cao nhất của khối) và 55 thí sinh đạt được chứng chỉ Hạng High Distinction (là những thí sinh không được chứng chỉ Hạng Prize, nhưng có số điểm nằm trong top 3% những thí sinh có điểm cao nhất). Thí sinh Đồng Khôi Nguyên, lớp 8C1, trường THCS Archimedes Academy Hà Nội, với số điểm tuyệt đối 135 điểm, bạn đã cùng lúc đạt các giải Peter OHalloran Award for Excellence (dành cho thí sinh đạt số điểm tuyệt đối), giải MEDALS - Huy chương (trong 10 000 thí sinh ở cùng một khối lớp trên toàn thế giới chỉ có một thí sinh đoạt Huy chương) và chứng chỉ Hạng Prize.
- Chiều ngày 19/01/2019, tại trường Tiểu học Lý Thái Tổ, Q. Cầu Giấy, Hà Nội đã tổ chức Lễ vinh danh Kì thi tìm kiếm tài năng Toán học quốc tế ITMC 2019 vòng 1. Kì thi năm nay có hơn 3000 thí sinh từ lớp 2 đến lớp 11 tham dự, kết quả có 53 thí sinh xuất sắc nhất được lựa chọn tham gia vòng 2 kì thi Tìm kiếm tài năng Toán học quốc tế ITMC 2019 tổ chức tại Thái Lan từ ngày 8/2/2019 đến ngày 12/2/2019.

TTT

Toán tuổi thơ 2 — TRUNG HỌC CƠ SỞ

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TÒA SOẠN

Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, phường Cát Linh, quận Đống Đa, Hà Nội

Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702

Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com

Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com

Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐỐI TÁC ĐẠI DIỆN PHÍA NAM

Công ty cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam

231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. Hồ Chí Minh

ĐT: 028.73035556, Email: thitruong@phuongnam.edu.vn

Trị sự - Phát hành:

TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG,

NGUYỄN THỊ HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH

Biên tập - Chế bản: **VŨ THỊ MAI, ĐỖ TRUNG KIÊN**

Mĩ thuật: **TRẦN NGỌC TRƯỜNG**

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:

NGUYỄN ĐỨC THÁI

Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:

HOÀNG LÊ BÁCH

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:

PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY

GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

ThS. NGUYỄN THANH HÒA

GV. Trường THCS Tân Quới, Thanh Bình, Đồng Tháp

Trong chương trình toán cấp THCS, phương pháp sử dụng hệ số bất định ít khi được đề cập đến trong sách giáo khoa cũng như các sách tham khảo. Bài viết này xin giới thiệu tới bạn đọc một số dạng toán sử dụng phương pháp hệ số bất định.

Dạng 1. Tìm hệ số của đa thức

Bài toán 1. Không khai triển, hãy viết đa thức $P(x) = (x - 1)(x - 3)(3x + 4) + 5x - 2$ dưới dạng lũy thừa giảm dần của biến x.

Lời giải. Ta thấy P(x) là một đa thức bậc 3 và có hệ số cao nhất bằng 3. Do đó ta viết P(x) dưới dạng chính tắc như sau:

$P(x) = 3x^3 + Bx^2 + Cx + D$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 3)(3x + 4) + 5x - 2$

$= 3x^3 + Bx^2 + Cx + D$.

✻ Với $x = 0$ ta có $D = 10$.

✻ Với $x = 1$ ta có $3 = 3 + B + C + 10$

$\Rightarrow B + C = -10$. (1)

✻ Với $x = -1$ ta đó $1 = -3 + B - C + 10$

$\Rightarrow B - C = -6$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B = -8$, $C = -2$

Vậy $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 2x + 10$.

Bài toán 2. Viết đa thức $5x^3 + 7x - 13$ dưới dạng lũy thừa giảm dần của $x - 1$.

Lời giải. Ta viết đa thức đã cho dưới dạng

$5x^3 + 7x - 13$

$= 5(x - 1)^3 + a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$.

✻ Với $x = 1$ ta được $c = -1$.

✻ Với $x = 0$ ta được $-5 + a - b - 1 = -13$

$\Rightarrow a - b = -7$. (1)

✻ Với $x = 2$ ta được $5 + a + b - 1 = 41$

$\Rightarrow a + b = 37$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = 15$, $b = 22$.

Vậy $5x^3 + 7x - 13 = 5(x - 1)^3 + 15(x - 1)^2 + 22(x - 1) - 1$.

Dạng 2. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức

Bài toán 3. Tìm đa thức dư khi chia $x^{2019} + 1$ cho $x^2 - 1$.

Lời giải. Vì ta thực hiện phép chia cho đa thức bậc 2 nên đa thức dư là đa thức bậc không vượt quá 1. Đặt đa thức dư là $ax + b$.

Khi đó $x^{2019} + 1 = (x^2 - 1).g(x) + ax + b$ ở đó g(x) là đa thức thương của phép chia.

✻ Với $x = 1$ ta được $2 = a + b$. (1)

✻ Với $x = -1$ ta được $0 = -a + b$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $a = b = 1$.

Vậy ta tìm được đa thức dư của phép chia là $x + 1$.

Bài toán 4. Tìm đa thức dư khi chia $x^{2019} + x^2 + 1$ cho $x^3 - x$.

Lời giải. Ta thấy đa thức dư trong phép chia có dạng $ax^2 + bx + c$.

Đặt $x^{2019} + x^2 + 1 = (x^3 - x).g(x) + ax^2 + bx + c$.

✻ Với $x = 0$ ta được $1 = c$.

✻ Với $x = 1$ ta được $3 = a + b + 1$

$\Rightarrow a + b = 2$. (1)

✻ Với $x = -1$ ta được $1 = a - b + 1$

$\Rightarrow a - b = 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a = b = 1$.

Vậy đa thức dư là $x^2 + x + 1$.

Dạng 3. Phân tích đa thức thành nhân tử

Bài toán 5. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$;

b) $B = 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3$.

Lời giải. a) Ta nhận thấy rằng không thể nhẩm được nghiệm nguyên cũng như nghiệm hữu tỉ của đa thức A.

Ta thấy hệ số cao nhất của đa thức A bằng 1.

Do đó ta viết được A dưới dạng:

$A = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd.$

Đồng nhất hai vế ta có

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac + b + d = 12 \\ ad + bc = -14 \\ bd = 3. \end{cases}$$

Từ bd = 3, ta chọn b = 1 và d = 3

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = -6 \\ ac = 8 \\ 3a + c = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -2. \end{cases}$$

Như vậy $A = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3)$.

Từ đó ta tìm được cách phân tích đa thức A thành nhân tử.

Chú ý. *Khi giải bài toán trên bằng phương pháp hệ số bất định, ta chỉ cần tìm được một bộ số (a, b, c, d) bằng phương pháp thử chọn.*

b) Ta thấy các hạng tử có trong đa thức B có đầy đủ các biến x, y cùng bậc. Suy ra đa thức B viết được dưới dạng

$B = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$

$\Rightarrow 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy - 3.$

Đồng nhất hai vế ta có

$$\begin{cases} ac = 12 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \\ bc + ad = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = 3 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy $B = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$.

Từ đó ta tìm được cách phân tích đa thức B thành nhân tử.

Dạng 4. Chứng minh một số cho trước là số chính phương

Bài toán 6. Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 luôn là số chính phương.

Lời giải. Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là n, n + 1, n + 2, n + 3 ($n \in \mathbb{N}$).

Ta có $A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$.

Giả sử A là số chính phương.

Do A là đa thức bậc 4 với hệ số bậc cao nhất là 1 nên ta có

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + an + b)^2$

$\Rightarrow n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = n^4 + 2an^3 + (a^2 + 2b)n^2 + 2abn + b^2.$

Đồng nhất hai vế ta được

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a^2 + 2b = 11 \\ 2ab = 6 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$ với mọi n. Ta có điều phải chứng minh.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Không khai triển, viết đa thức sau dưới dạng lũy thừa giảm dần của x.

$(x - 2)(x - 3)(2x + 3) + 4x - 1$.

Bài 2. Tìm đa thức dư khi chia $x^{2018} - x + 2$ cho $x^2 - x$.

Bài 3. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$A = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$.

Bài 4. Chứng minh rằng $n^4 + 6n^3 + 7n^2 - 6n + 1$ là số chính phương với mọi số nguyên n.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ Y = AX (A ≠ 0)

NGUYỄN ĐỨC TẤN

TP. Hồ Chí Minh

Bài toán về đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) yêu cầu học sinh cần nắm vững các kiến thức sau:

1. Tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ

Cặp số (x_o; y_o) gọi là tọa độ của điểm M trên mặt phẳng tọa độ trong đó x_o là hoành độ, y_o là tung độ của điểm M.

2. Đồ thị hàm số y = ax (a ≠ 0)

✻ **Định nghĩa.** Đồ thị hàm số $y = ax$ là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ (x; ax) trên mặt phẳng tọa độ.

✻ Đồ thị hàm số $y = ax$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ O(0; 0).

Sau đây là một số dạng toán hay gặp:

Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số y = ax (a ≠ 0)

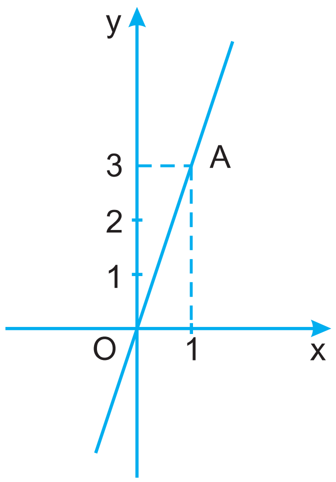
✻ **Bước 1.** Chọn $x = 1$ suy ra $y = a$ ta được điểm A(1; a) thuộc đồ thị hàm số $y = ax$.

✻ **Bước 2.** Vẽ đường thẳng OA.

Bài toán 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x$.

Lời giải. Cho $x = 1$ ta được $y = 3$. Suy ra A(1; 3) thuộc đồ thị hàm số $y = 3x$.

Đồ thị hàm số $y = 3x$ là đường thẳng OA.

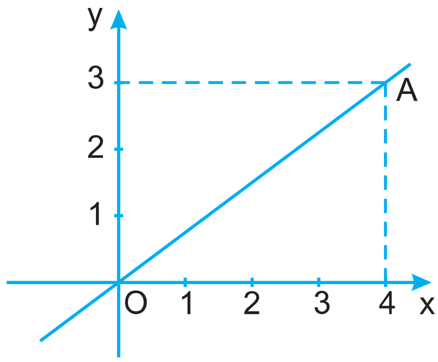


Bài toán 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{3}{4}x$.

Nhận xét. *Ta thấy nên chọn giá trị của x để giá trị của y là số nguyên sẽ thuận lợi hơn trong việc vẽ đồ thị.*

Lời giải. Chọn $x = 4$ ta được $y = 3$, suy ra điểm A(4; 3) thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{4}x$ là đường thẳng OA.



Dạng 2. Điểm thuộc đồ thị hàm số

Bài toán 3. Những điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$: A(–1; –2), B(–1; 2), C(2; –4)?

Lời giải. Thay $x = -1$; $y = -2$ vào phương trình $y = 2x$ ta có:

$-2 = 2.(-1)$ (đúng) nên A(–1; –2) thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$.

Thay $x = -1$; $y = 2$ vào phương trình $y = 2x$ ta có:

$2 = 2.(-1)$ (sai) nên B(–1; 2) không thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$.

Thay $x = 2$; $y = -4$ vào phương trình $y = 2x$ ta có:

$-4 = 2.2$ (sai) nên C(2; –4) không thuộc đồ thị hàm số $y = 2x$.

Bài toán 4. Cho điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x$. Biết hoành độ của M bằng 6, tìm tung độ điểm M.

Lời giải. Điểm M(6; y_M) thuộc đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{4}x$ nên ta có $y_M = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Vậy tung độ điểm M là $\frac{3}{2}$.

Dạng 3. Xác định hệ số a của hàm số y = ax biết đồ thị của hàm số đi qua một điểm cho trước

Bài toán 5. Tìm a biết đồ thị hàm số y = ax đi qua M(–2; 10).

Lời giải. Điểm M(–2; 10) thuộc đồ thị hàm số $y = ax$ nên $10 = -2.a$

$\Rightarrow a = -5$.

Vậy $a = -5$.

Bài toán 6. Tìm a biết đồ thị hàm số $y = (5 - a^2)x$ đi qua M(3; 3).

Lời giải. Điểm M(3; 3) thuộc đồ thị hàm số $y = (5 - a^2)x$ nên $3 = (5 - a^2).3$

$\Rightarrow 5 - a^2 = 1$

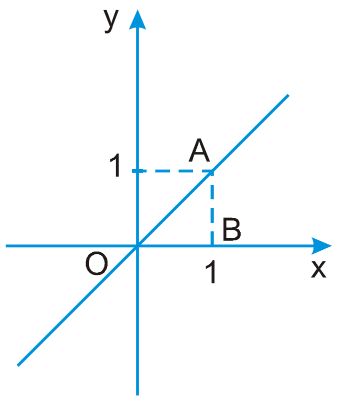
$\Rightarrow a = \pm 2$.

Vậy $a = \pm 2$.

Dạng 4. Tính góc giữa đồ thị hàm số y = ax với trục Ox

Bài toán 7. Tìm góc giữa đồ thị hàm số $y = x$ với trục Ox.

Lời giải. Ta thấy điểm A(1; 1) thuộc đồ thị hàm số $y = x$



Gọi B(1; 0) là hình chiếu vuông góc của A trên Ox. Xét tam giác vuông OAB có BO = BA = 1 do đó $\widehat{AOB} = 45^o$.

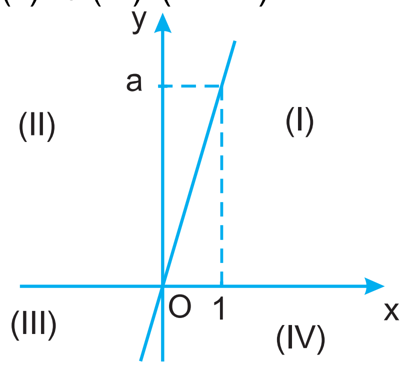
Vậy góc giữa OA và trục Ox bằng 45^o.

Nhận xét. *Tia OA là tia phân giác của góc xOy.*

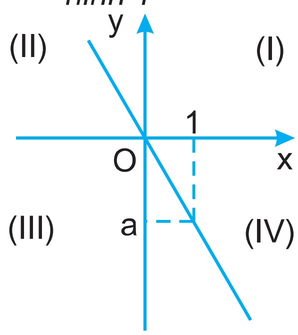
Dạng 5. Xác định đồ thị hàm số y = ax nằm ở góc phần tư nào

✻ Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số $y = ax$ nằm ở góc phần tư (I) và (III). (*hình 1*)

✻ Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số $y = ax$ nằm ở góc phần tư (II) và (IV). (*hình 2*)



hình 1



hình 2

Bài toán 8. Không vẽ hình, hãy cho biết các đồ thị hàm số sau nằm ở góc phần tư nào?

a) $y = -5x$; b) $y = 3x$.

Lời giải. a) Vì $-5 < 0$ nên đồ thị hàm số $y = -5x$ nằm ở góc phần tư (II) và (IV).

b) Vì $3 > 0$ nên đồ thị hàm số $y = 3x$ nằm ở góc phần tư (I) và (III).

Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho hàm số $y = -4x$.

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Trong các điểm A(1; 4), B(2; –8), C(–1; 4) có những điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên?

Bài 2. Tìm a, biết đồ thị hàm số $y = (2a^2 + 1)x$ đi qua A(–2; –6).

Bài 3. Tìm góc hợp bởi đường thẳng $y = \sqrt{3}x$ với trục Ox và cho biết đồ thị hàm số này nằm ở những góc phần tư nào.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ TỐI GIẢN

HÀ VĂN NHÂN

GV. THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa

Các bài toán về phân số tối giản thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi. Bài viết này giới thiệu tới bạn đọc một số dạng toán về phân số tối giản.

- **Định nghĩa.** Phân số tối giản là phân số có tử số và mẫu số là các số nguyên tố cùng nhau.

- Phân số $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ là phân số tối giản nếu $(a, b) = 1$.

Sau đây là các dạng bài tập thường gặp:

Dạng 1. Chứng minh một phân số là phân số tối giản

Các bước chứng minh:

* Bước 1. Đặt $(a, b) = d$.

* Bước 2. Tìm hai số tự nhiên m và n sao cho $am \pm nb = 1$.

* Bước 3. Lập luận để có $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Bài toán 1. Chứng minh các phân số sau là phân số tối giản với mọi số nguyên n làm phân số có nghĩa.

a) $\frac{n+3}{n+2} (n \neq -2)$; b) $\frac{3n+1}{5n+2}$;

c) $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$.

Lời giải. a) Đặt $d = (n + 3, n + 2)$ với $d \in \mathbb{N}$.

Suy ra $n + 3 \vdots d$ và $n + 2 \vdots d$

$\Rightarrow (n + 3) - (n + 2) = 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Vậy ước chung lớn nhất của n + 3 và n + 2 là 1, do đó $\frac{n+3}{n+2}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n khác 2.

b) Đặt $(3n + 1, 5n + 2) = d$.

Suy ra $3n + 1 \vdots d$, $5n + 2 \vdots d$.

Vì $3n + 1 \vdots d$ nên $5(3n + 1) = 15n + 5 \vdots d$. (1)

Vì $5n + 2 \vdots d$ nên $3(5n + 2) = 15n + 6 \vdots d$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $15n + 6 - (15n + 5) = 1 \vdots d$

$\Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

c) Đặt $(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = d$.

Suy ra $n^3 + 2n \vdots d$, $n^4 + 3n^2 + 1 \vdots d$. (1)

Bài toán này phức tạp hơn các bài trên vì ta không thể triệt tiêu được n theo phương pháp cũ. Để ý rằng bậc của mẫu số là 4 và bậc của tử số là 3 nên ta làm như sau:

$n^3 + 2n \vdots d \Rightarrow n(n^3 + 2n) = n^4 + 2n^2 \vdots d$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $n^2 + 1 \vdots d$.

Tới đây ta vẫn chưa triệt tiêu hết được n, lúc này cần tinh ý nhận ra:

$(n^2 + 1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1 \Rightarrow n^4 + 2n^2 + 1 \vdots d$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

Bài toán 2. Chứng minh các phân số sau là phân số tối giản.

a) $\frac{65}{54}$; b) $\frac{201787}{1535}$.

Lời giải. a) Phân số có tử số và mẫu số là các số không quá lớn, ta sẽ phân tích các số này ra thừa số nguyên tố:

$65 = 5.13$;

$54 = 2.3^3$.

Như vậy $(65, 54) = 1$. Do đó phân số đã cho là phân số tối giản.

b) Ta thấy tử số và mẫu số đều là các số khá lớn, nếu làm theo cách của câu a sẽ gặp khó khăn. Lúc này ta nghĩ tới thuật toán Euclid để tìm ra ước chung lớn nhất của hai số:

Thuật toán Euclid. Cho các số a; b; q; r thỏa mãn $a = b.q + r$ ($a; b; q; r \in \mathbb{N}, r < b$).

Khi đó $(a, b) = \begin{cases} b \text{ nếu } r = 0 \\ (b, r) \text{ nếu } r \neq 0. \end{cases}$

Từ đó ta có cách giải sau:

$201787 = 1535.131 + 702;$

$1535 = 702.2 + 131;$

$702 = 131.5 + 47;$

$131 = 47.2 + 37.$

Theo thuật toán Euclid ta có

$(201787, 1535) = (1535, 702) = (702, 131) = (131, 47) = (47, 37) = 1.$

Vậy phân số đã cho là phân số tối giản.

Dạng 2. Tìm điều kiện để phân số đã cho là phân số tối giản

Bài toán 3. Tìm các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a) $\dfrac{2n+3}{n+7}$; b) $\dfrac{4n^2+7n+3}{3n+1}$.

Lời giải. a) Đặt $d = (2n + 3, n + 7)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3 \,\vdots\, d \\ n+7 \,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow 2(n+7)-(2n+3) = 11 \,\vdots\, d$

$\Rightarrow d = 11$ hoặc $d = 1$.

✻ Nếu $d = 11 \Rightarrow n + 7 \,\vdots\, 11 \Rightarrow n = 11k - 7$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\Rightarrow 2n + 3 = 22k - 11 \,\vdots\, 11.$

Suy ra $\dfrac{2n+3}{n+7}$ không là phân số tối giản.

✻ Nếu $n \neq 11k - 7$ thì $n + 7 \not\vdots\, 11 \Rightarrow d = 1$. Khi đó phân số đã cho tối giản.

Vậy để $\dfrac{2n+3}{n+7}$ là phân số tối giản thì $n \neq 11k - 7 (k \in \mathbb{Z})$.

b) Nếu n là số lẻ thì $4n^2 + 7n + 3$ và $3n + 1$ cùng là số chẵn nên $\dfrac{4n^2+7n+3}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Suy ra n là số chẵn.

Đặt $(4n^2 + 7n + 3, 3n + 1) = d$ với $d \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \begin{cases} 4n^2+7n+3 \,\vdots\, d \\ 3n+1 \,\vdots\, d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12n^2+21n+9 \,\vdots\, d \\ 12n^2+4n \,\vdots\, d \end{cases}$

$\Rightarrow 17n + 9 \,\vdots\, d$

$\Rightarrow 3(17n + 9) - 17(3n + 1) = 10 \,\vdots\, d.$

Vì n là số chẵn nên 3n + 1 là số lẻ, do đó d chỉ nhận các giá trị 1; 5.

✻ Nếu $d = 5$ thì $3n + 1 \,\vdots\, 5$

$\Rightarrow 3n + 1 - 10 = 3(n - 3) \,\vdots\, 5$

$\Rightarrow n - 3 \,\vdots\, 5$ (Vì $(3, 5) = 1$)

$\Rightarrow n = 5k + 3$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Suy ra $4n^2 + 7n + 3 \,\vdots\, 5$. Do đó phân số đã cho không tối giản.

✻ Nếu $n \neq 5k + 3$ thì $3n + 1 \not\vdots\, 5 \Rightarrow d = 1$, khi đó phân số đã cho tối giản.

Vậy để $\dfrac{4n^2+7n+3}{3n+1}$ là phân số tối giản thì n là số chẵn và $n \neq 5k + 3$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Chứng minh rằng các phân số sau là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

a) $\dfrac{11n+4}{3n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$;

b) $\dfrac{163737}{11015}$;

c) $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Bài 2. Tìm các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản:

a) $\dfrac{n+9}{n+6}$;

b) $\dfrac{18n+3}{21n+7}$.

Bài 3. Tìm phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$ thỏa mãn điều kiện sau:

a) Cộng thêm a với 4, cộng thêm b với 10 ta được phân số mới bằng phân số ban đầu.

b) Cộng thêm a và b với một giá trị bằng b, ta được phân số mới bằng 2 lần phân số ban đầu.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ VÀ CHỮ SỐ

MAI VĂN NĂM
GV. THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình

Bài viết này trình bày một số bài toán về số và chữ số quen thuộc. Để làm tốt dạng toán này, chúng ta cần nắm vững một số kiến thức cơ bản sau:

✻ Các dấu hiệu chia hết cho 2; 3; 5; 9;...

✻ Phân tích cấu tạo số:

$\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 10\overline{ab} + c$.

✻ Tính chất chia hết của một tổng:

Nếu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$ và $a \,\vdots\, c$, $b \,\vdots\, c$ thì $a + b \,\vdots\, c$.

Sau đây là một số bài toán minh họa:

Bài toán 1. Tìm một số tự nhiên có 4 chữ số biết rằng chữ số hàng đơn vị gấp 6 lần chữ số hàng chục và tổng các chữ số của số đó bằng 9.

Lời giải. Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với a, b, c và d là các chữ số và a khác 0. Do chữ số hàng đơn vị gấp 6 lần chữ số hàng chục nên $d = 6$; $c = 1$.

Mặt khác tổng các chữ số bằng 9 suy ra $a + b = 2$. Ta chọn các cặp số sau:

✻ Nếu $a = 1$ thì $b = 1$. Ta tìm được số 1116.

✻ Nếu $a = 2$ thì $b = 0$. Ta tìm được số 2016.

Vậy có hai số thỏa mãn bài toán là 1116 và 2016.

Bài toán 2. Tổng của hai số tự nhiên bằng 183. Nếu xóa chữ số hàng đơn vị của số lớn thì được số bé. Tìm hai số đó.

Lời giải. Nếu số lớn là số có hai chữ số thì khi xóa đi một chữ số sẽ được số bé là số có một chữ số.

Khi đó tổng hai số nhỏ hơn 183.

Do đó số lớn là số có ba chữ số, số bé là số có hai chữ số.

Gọi hai số đó là $\overline{abc}$ và $\overline{ab}$ với a, b, c là các chữ số và a khác 0.

Từ $\overline{abc} + \overline{ab} = 183$ suy ra $a = 1$.

Ta có $\overline{1bc} + \overline{1b} = 183 \Rightarrow 11b + c = 73$.

Ta lại có 73 chia 11 dư 7 và 11b chia hết cho 11 suy ra c chia 11 dư 7.

Suy ra $c = 7 \Rightarrow b = 6$.

Vậy hai số cần tìm là 167 và 16.

Bài toán 3. Tổng của hai số tự nhiên bằng 440. Nếu xóa đi chữ số bên phải của số lớn thì ta được số bé. Tìm hai số đó.

Lời giải. Tổng hai số bằng 440 nên số lớn phải là số có 3 chữ số.

Gọi số lớn là $\overline{abc}$ với a, b, c là các chữ số và a khác 0.

Theo giả thiết ta có số bé là $\overline{ab}$.

Suy ra $\overline{abc} + \overline{ab} = 440 \Rightarrow 11\overline{ab} + c = 440$

$\Rightarrow c \,\vdots\, 11 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow \overline{ab} = 440 : 11 = 40$.

Vậy hai số cần tìm là 400 và 40.

Bài toán 4. Tìm các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 9 mà chữ số hàng đơn vị của nó là 4.

Lời giải. Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ với a, b và c chữ số và a khác 0.

Do chữ số hàng đơn vị là 4 nên số đó có dạng là $\overline{ab4}$. Số này chia hết cho 9 nên $a + b + 4$ chia hết cho 9.

Suy ra $a + b = 5$ hoặc $a + b = 14$.

✻ **TH1.** $a + b = 5$

• Nếu $a = 1$ thì $b = 4$ và ngược lại. Ta tìm được hai số: 144 và 414.

• Nếu $a = 2$ thì $b = 3$ và ngược lại. Ta tìm được hai số: 234 và 324.

• Nếu $a = 5$ thì $b = 0$. Ta tìm được số 504.

✻ **TH2.** $a + b = 14$

• Nếu $a = 5$ thì $b = 9$ và ngược lại. Ta tìm được hai số: 594 và 954.

• Nếu $a = 6$ thì $b = 8$ và ngược lại. Ta tìm được hai số 684 và 864.

• Nếu $a = 7$ thì $b = 7$. Ta tìm được số 774.

Bài toán 5. Từ các chữ số 1, 3, a, b (a, b khác nhau và khác 1; 3; 0) viết được 24 số có 4 chữ số khác nhau có tổng bằng 113322. Tìm a và b.

Lời giải. Ta chia 24 số lập được làm 4 nhóm, mỗi nhóm 6 số.

✻ Nhóm 1 gồm các số mà chữ số 1 đứng ở hàng nghìn.

✻ Nhóm 2 gồm các số mà chữ số 3 đứng ở hàng nghìn.

✻ Nhóm 3 gồm các số mà chữ số a đứng ở hàng nghìn.

✻ Nhóm 4 gồm các số mà chữ số b đứng ở hàng nghìn.

Như vậy ta thấy rằng các chữ số 1, 3, a, b đều xuất hiện ở các vị trí hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị mỗi vị trí 6 lần.

Suy ra tổng 24 số lập được bằng:

$6.(1000 + 100 + 10 + 1)(1 + 3 + a + b) = 113322$

$\Rightarrow a + b = 13.$

Không mất tổng quát giả sử $a > b$.

• Nếu $a = 9$ thì $b = 4$.

• Nếu $a = 8$ thì $b = 5$.

• Nếu $a = 7$ thì $b = 6$.

Vậy các cặp số (a, b) thỏa mãn bài toán là (9; 4), (8; 5), (7; 6).

Bài toán 6. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau mà tổng các chữ số của nó bằng 20?

Lời giải. Ta phân tích 20 thành tổng của các bộ ba số có một chữ số, trong đó các số đều khác nhau như sau:

$20 = 9 + 8 + 3 = 9 + 7 + 4 = 9 + 6 + 5 = 8 + 7 + 5 = 8 + 6 + 4.$

Ta thấy có 5 bộ số khác nhau thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ứng với mỗi bộ số này, ta lập được 6 số có ba chữ số khác nhau.

Vậy số các số lập được là $5.6 = 30$ (số).

Bài tập vận dụng

Bài 1. Một người nói năm sinh của người đó là tổng của các số có ba chữ số giống nhau và đều chia hết cho 9. Hỏi người đó sinh năm nào?

Bài 2. Tìm tất cả các số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 9 mà chữ số hàng chục là 5.

Bài 3. Cho 4 chữ số khác nhau và khác 0 là a, b, c, d. Biết tổng các số có 4 chữ số khác nhau tạo thành từ 4 chữ số trên là 133320. Tìm các chữ số a, b, c, d.

Bài 4. Tìm một số biết rằng bình phương của nó là số chính phương nhỏ nhất có 4 chữ số.

KÌ THI TOÁN VÀ KHOA HỌC QUỐC TẾ 2018 (IMSO)

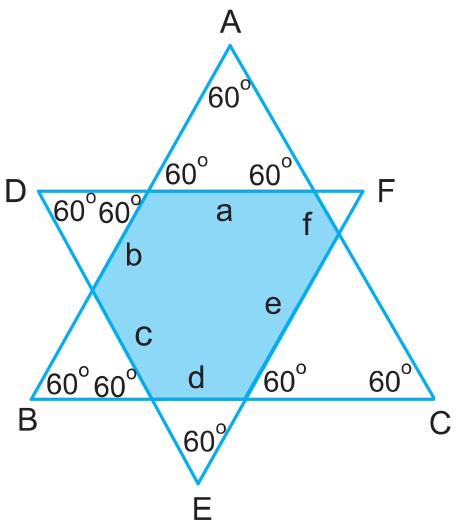
LỜI GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN

PHẦN THI TRẢ LỜI NGẮN

TS. ĐỖ ĐỨC THÀNH
GV. Trường liên cấp Tiểu học và THCS Ngôi Sao Hà Nội
(Sưu tầm và dịch)

(Tiếp theo TTT2 số 191)

Câu 11.



Vì có 3 cặp các đoạn thẳng song song nên ta có các góc bằng 60° như hình vẽ.

Từ hình vẽ ta có 6 tam giác đều và các hệ thức giữa các cạnh a, b, c, d, e, f như sau:

$a+b+c = AB = \frac{1}{3}P_{ABC}.$

$b+c+d = DE = \frac{1}{3}P_{DEF}.$

$c+d+e = BC = \frac{1}{3}P_{ABC}.$

$d+e+f = EF = \frac{1}{3}P_{DEF}.$

$e+f+a = AC = \frac{1}{3}P_{ABC}.$

$f+a+b = DF = \frac{1}{3}P_{DEF}.$

$\Rightarrow 3(a+b+c+d+e+f) = P_{ABC} + P_{DEF}$

$\Rightarrow (a+b+c+d+e+f) = \frac{P_{ABC}+P_{DEF}}{3}$

$= \frac{930+744}{3} = \frac{1674}{3} = 558$ (cm).

Câu 12. Gọi x, x + 1, x + 2 lần lượt là số bi trong 3 hộp với x chia hết cho 5, x + 1 chia hết cho 7 và x + 2 chia hết cho 9. Ta có

$$\begin{cases} x = 5a \\ x+1 = 7b \\ x+2 = 9c \end{cases} \Leftrightarrow x = 5a = -1+7b = -2+9c.$$

Từ đó ta có $5a = -1+7b$.

Áp dụng lí thuyết đồng dư ta có

$5a \equiv -1 \pmod 7 \Leftrightarrow 5a \equiv 20 \pmod 7$

$\Leftrightarrow a \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow a = 4+7m$. (1)

Với m là một số nguyên bất kì.

Ta có $5a = -2+9c$.

Áp dụng lí thuyết đồng dư ta có

$5a \equiv -2 \pmod 9 \Leftrightarrow 20+35m \equiv -2 \pmod 9$

$\Leftrightarrow 35m \equiv -22 \pmod 9$

$\Leftrightarrow m \equiv 22 \pmod 9$

$\Leftrightarrow m \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow m = 4+9k$. (2)

Với k là một số nguyên bất kì.

Thay m từ (2) vào (1) ta được

$a = 4+7(4+9k) \Leftrightarrow a = 32+63k$

$\Rightarrow x = 5a = 160+315k.$

Vì x là số tự nhiên nhỏ nhất nên $k = 0$.

Suy ra $x = 160$.

Do đó số bi trong 3 hộp lần lượt là 160, 161, 162.

Vậy tổng số viên bi nhỏ nhất trong 3 hộp là $160+161+162=483$.

Câu 13. Liệt kê một số số hạng đầu và số dư của chúng khi chia cho 8, ta có

Số hạng	1	1	1	3	5	9	17	31
Số dư	1	1	1	3	5	1	1	7
Số hạng	57	105	193	355	653	1201	2209	4063
Số dư	1	1	1	3	5	1	1	7

Ta thấy rằng số dư theo một quy luật đó là cứ sau 8 số hạng thì các số dư được lặp lại.

Ta có $2018=252\times 8+2$.

Vậy số dư khi lấy số hạng thứ 2018 chia cho 8 là 1.

Câu 14. Gọi a là số có 8 chữ số cần tìm.

Theo đề bài ta có a + 2 chia hết cho 7 và 11.

Mặt khác, BCNN $(7\,;\,11)=77$ nên $a+2=77\times k$.

Ta thấy rằng giá trị lớn nhất của số có 8 chữ số có tính chất trên mà chia hết cho 77 là: $262207\times 77=20189939$.

Giờ ta đi tìm số có 8 chữ số chia hết cho 77 mà gần số 20189939 nhất sao cho

$9939-77\times m=\overline{MN30}$, với m có giá trị nhỏ nhất có thể và số bên vế phải có hai chữ số tận cùng là 30.

Thử $m=17$ ta được $9939-77\times 17=8630$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\overline{MN}$ là 86.

Câu 15. Theo đề bài ta có thể kết luận rằng

$2204\times(I+O)+2240\times(M+S)=60012$.

Số 2240 kết thúc bằng một số 0 nên tích thứ hai của biểu thức trên có chữ số tận cùng là 0.

Do đó (I + O) khi nhân với 2204 phải cho một số có chữ số tận cùng là 2 do kết quả bên vế phải có chữ số tận cùng là 2.

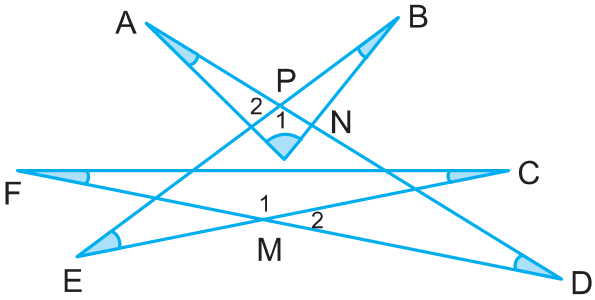
Vậy có 4 khả năng sau của (I + O):

$(I+O)\in\{3,\,8,\,13,\,18\}$. Ta có bảng giá trị sau

(I + O)	3	8	13	18
(M + S)	vô nghiệm	vô nghiệm	14	vô nghiệm

Vậy tổng cần tìm là: $I+M+S+O=27$.

Câu 16.



Từ hình vẽ, ta có các hệ thức sau:

$\hat{D}+\hat{E}=180^o-\widehat{P_1}-\widehat{M_2}$;

$\hat{C}+\hat{F}=180^o-\widehat{M_1}$;

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{N}=180^o-\widehat{P_2}$

$\Rightarrow \hat{D}+\hat{E}+\hat{C}+\hat{F}+\hat{A}+\hat{B}+\hat{N}$

$=3\times 180^o-(\widehat{P_1}+\widehat{P_2})-(\widehat{M_1}+\widehat{M_2})$

$=3\times 180^o-180^o-180^o=180^o$.

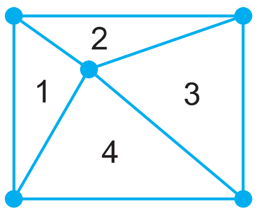
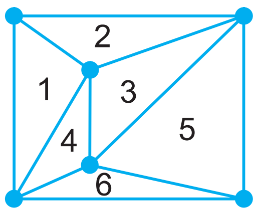
Vậy tổng số đo của các góc trên là 180^o.

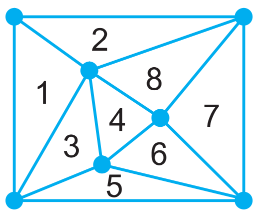
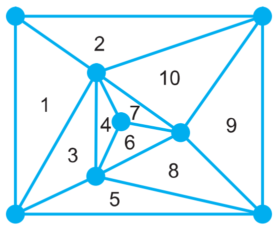
Câu 17. Ta điền các số như sau:

1	2	3	4	5
4	3	2	5	1
5	1	4	3	2
2	4	5	1	3
3	5	1	2	4

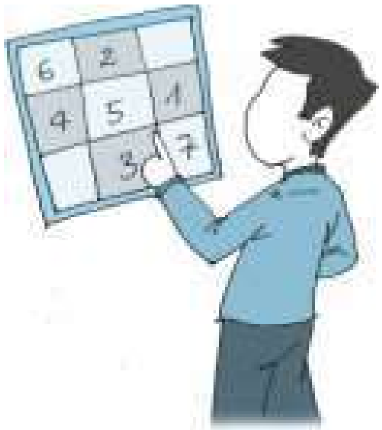
Vậy số được điền vào ô được tô đậm là số 1.

Câu 18. Gọi n là số điểm bên trong hình vuông. Bằng cách vẽ một số hình đầu tiên với $n = 1, 2, 3, 4$ ta được

$n = 1$	$n = 2$
	
Có 4 tam giác	Có 6 tam giác

$n = 3$	$n = 4$
	
Có 8 tam giác	Có 10 tam giác

Từ trên ta có quy luật: Tổng các tam giác trong hình thứ n tuân theo công thức $2 \times (n + 1)$. Do đó tổng số tam giác ở hình thứ 2018 là $2 \times (2018 + 1) = 4038$ (tam giác).



Câu 19. Đầu tiên ta kí hiệu các số ở một số vị trí trong bảng như trong hình dưới đây.

	−		=	a
				×
d	:	e	=	b
				=
			=	c

Để ý thấy rằng trong các số từ 1 đến 9, chỉ có hai khả năng cho tích của a, b và kết quả của phép tính trên c như sau: $2 \times 3 = 6$; $2 \times 4 = 8$.

Hàng ngang ở giữa và cột dọc ngoài cùng bên phải có chung số b nên b = 2. Giờ ta có hai khả năng như sau:

Khả năng 1

?	−	?	=	3
				×
8	:	4	=	2
				=
	+		=	6

Khả năng 2

9	−	5	=	4
				×
6	:	3	=	2
				=
7	+	1	=	8

Với khả năng thứ nhất, ta không thể tìm được hai số có hiệu bằng 3 để điền vào hai dấu hỏi chấm trong hàng ngang đầu tiên. Vậy đáp án là khả năng 2.

Câu 20. Tổng các số trên các hàng, các cột phải lớn hơn 7 do có số 7 xuất hiện trong một ô trống.

Để thỏa mãn điều kiện trên, mỗi nghiệm chỉ chứa hai tổng cùng tính chẵn lẻ và hơn nhau 2 đơn vị. Ví dụ: 8 và 10, 9 và 11, 10 và 12, …

- Với a = 1, a = 2 vô nghiệm.
- Với a = 3, ta có một nghiệm như sau

3	7	
5	1	4
	2	6

- Với a = 4, a = 5 vô nghiệm.
- Với a = 6, ta có một nghiệm như *Hình a*; a = 7, ta có nghiệm như *Hình b*.

6	2	
4	5	1
	3	7

Hình a

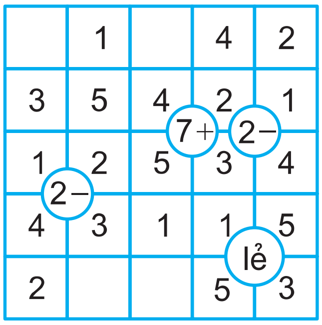
7	3	
1	5	4
	2	6

Hình b

Vậy tổng của các giá trị có thể của a là

$7 + 3 + 6 = 16$.

Câu 21. Ta có nghiệm như sau:



Vậy tổng $I + M + S + O = 3 + 4 + 3 + 3 = 13$.

Câu 22. Theo đầu bài, ta có phương trình sau

$$\frac{\overline{AMMM}}{\overline{MMMB}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1000A + 111M}{1110M + B} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5000A + 555M = 2220M + 2B$$

$$\Leftrightarrow 5000A = 1665M + 2B.$$

Giờ ta thử các giá trị của A để tìm giá trị của B và M (với $A, B, M \le 9$), ta có

A	**1**	**2**	**3**
M	X	6	X
B	X	5	X

Tổng $A + B + M = 2 + 5 + 6 = 13$.

Câu 23. Ta có

$-1 \times 2018 + 2 \times (2018 - 1) - 3 \times 2016 + 4 \times$

$(2016 - 1) + ... - 1003 \times 1016 + 1004 \times (1016 - 1)$

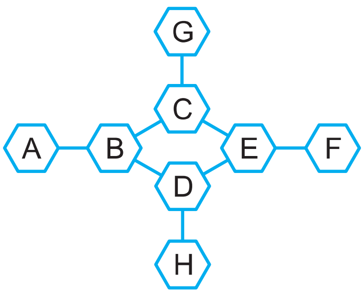
$= 2018 - 2 + 2016 - 4 + 2014 - 6 + ... + 1016 - 1004$

$= 2016 + 2012 + 2008 + ... + 12$

$$= \frac{2016 + 12}{2} \times 502 = 509028.$$

Vậy chữ số tận cùng của biểu thức trên là 8.

Câu 24.



Khả năng 1. Ô C và ô D có cùng màu.

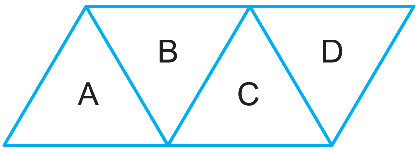
Ta có 3 cách tô C và D, các ô còn lại mỗi ô có 2 cách tô. Tổng cộng ta có $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 192$ cách.

Khả năng 2. Ô C và D khác màu.

Có 3 cách để tô C và D, 1 cách tô B và E, 4 ô còn lại mỗi ô có 2 cách tô.

Tổng cộng ta có $3 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$ cách tô. Vậy ta có tổng cộng 288 cách tô.

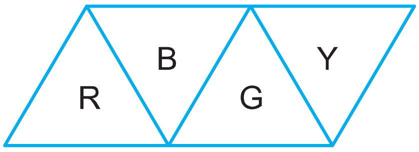
Câu 25. Kí hiệu tên của các hình tam giác như ở hình dưới



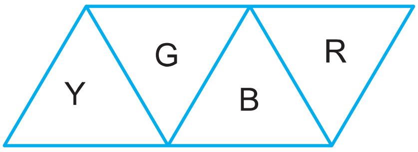
Có 4 cách tô tam giác A, 3 cách tô tam giác B, 2 cách tô tam giác C và 1 cách tô tam giác D. Vậy có tổng cộng 24 cách tô các tam giác A, B, C, D.

Tuy nhiên với mỗi cách tô như vậy ta luôn tìm được một cách trong số các cách còn lại một cách mà có thể thu được bằng cách quay toàn bộ hình lại 180°.

Ví dụ



có thể thu được bằng cách quay hình 180°.



Cuối cùng ta có tổng cộng 24 : 2 = 12 cách để tô 4 tam giác trên.

CÓ MẤY CÁCH KIỂM PHIẾU?

THÁI NHẬT PHƯỢNG

GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa

Giả sử có 5 ứng cử viên là A, B, C, D, E và có 50 người bầu, tương ứng có 50 phiếu. Mỗi phiếu ghi tên 5 ứng cử viên đó và người bầu chọn ra 3 người và gạch bỏ 2 người.

Giả sử 50 phiếu bầu đều hợp lệ. Để cho gọn mỗi phiếu chỉ ghi 3 ứng cử viên được chọn, ví dụ A, B, C viết gọn là ABC.

Kết quả 50 phiếu bầu được ghi lại như sau:

ABC; CDE; ABC; BDE; ACE; ABC; ADE; ACD; BCD; BCE; CDE; ABC; BCE; ABD; BDE; ADE; ABD; BCD; ABE; ACE; BCE; CDE; ADE; BCE; ABC; ACE; ACD; BDE; CDE; BCD; BDE; ACD; ABE; ACE; BCE; ABD; ABC; BCD; ACD; ADE; ABD; BDE; BCE; BDE; ACD; BCD; ADE; ABC; ABD; ABE.

Ta có 4 cách kiểm phấu bầu:

Cách 1. Đếm số lần được bầu của mỗi ứng cử viên (thường gạch một gạch mỗi lần tên người được bầu theo ô vuông, gạch mỗi ô đến 5 gạch ⧄).

Số lần được bầu của 5 ứng cử viên là:

A: 29; B: 32; C: 31; D: 30; E: 28.

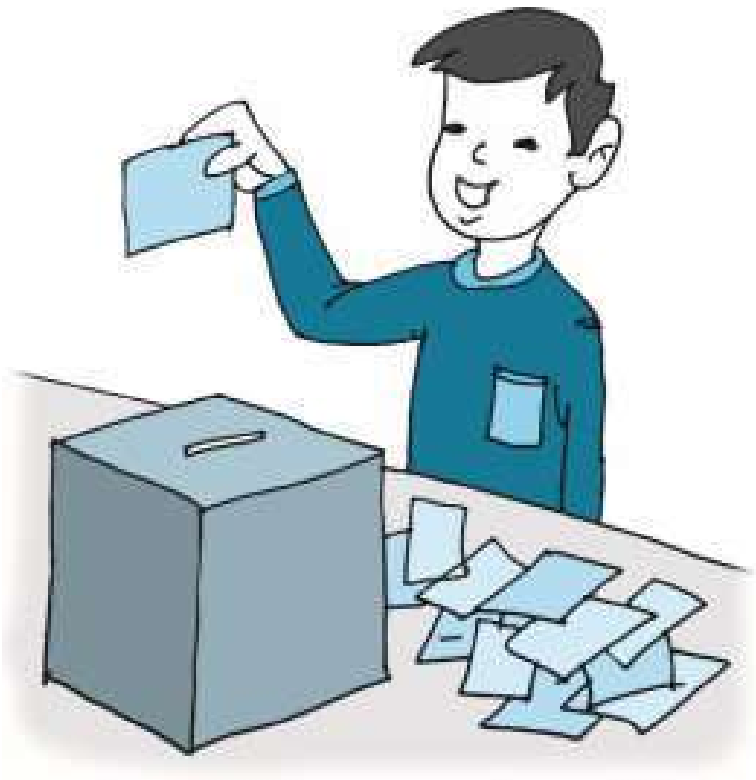
Ghi chú. Tổng số lần được bầu của 5 ứng cử viên là 50. 3 = 150, nên để kiểm tra đếm có nhầm hay không ta có thể tính tổng 29 + 32 + 31 + 30 + 28 có bằng 150 không.

Cách 2. Đếm số lần không được bầu của mỗi ứng cử viên (mỗi phiếu có 2 người không được bầu). Từ đó số lần được bầu của mỗi người bằng hiệu của 50 và số lần không được bầu.

Số lần không được bầu của mỗi ứng cử viên là: A : 21; B : 18; C: 19; D : 20; E : 22. Từ đó tính được số lần được bầu của mỗi ứng cử viên có kết quả như cách 1.

Ghi chú. ✻ Tổng số lần không được bầu của 5 ứng cử viên là 50. 2 = 100 nên để kiểm tra đếm có nhầm hay không ta có thể tính tổng 21 + 18 + 19 + 20 + 22 có bằng 100 không.

✻ Cách đếm này sẽ nhanh hơn khi số ứng cử viên bị gạch bỏ ít hơn nhiều so với ứng cử viên được chọn.



Cách 3. Đếm số phiếu được bầu theo nhóm 3 người gồm có 10 nhóm là ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.

Số phiếu của nhóm 3 người được bầu là

ABC : 7, ABD : 5, ABE : 3, ACD : 5, ACE : 4, ADE : 5, BCD: 5, BCE : 6, BDE : 6, CDE : 4.

Từ đó số lần được bầu của mỗi ứng cử viên là:

A: $7+5+3+5+4+5=29$.

B: $7+5+3+5+6+6=32$.

C: $7+5+4+5+6+4=31$.

D: $5+5+5+5+6+4=30$.

E: $3+4+5+6+6+4=28$.

Ghi chú. ✻ Tổng số phiếu là 50 nên để kiểm tra đếm có nhầm hay không ta có thể tính tổng $7+5+3+5+4+5+5+6+6+4$ có bằng 50 không.

✻ Kiểm tra số lần bầu của mỗi ứng cử viên như cách 1.

Cách 4. Đếm số phiếu không được bầu theo nhóm 2 người, gồm có 10 nhóm là AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Số phiếu của nhóm 2 người không được bầu là AB : 4, AC : 6, AD : 6, AE : 5, BC : 5, BD : 4, BE : 5, CD : 3, CE : 5, DE : 7.

Từ đó số lần không được bầu của mỗi ứng cử viên là

A: $4+6+6+5=21$.

B: $4+5+4+5=18$.

C: $6+5+3+5=19$.

D: $6+4+3+7=20$

E: $5+5+5+7=22$.

Từ đó tính được số lần được bầu của mỗi ứng cử viên có kết quả như cách 1.

Ghi chú. ✻ Tổng số phiếu là 50 nên để kiểm tra đếm có nhầm hay không ta có thể tính tổng $4+6+6+5+5+4+5+3+5+7$ có bằng 50 không.

✻ Cách đếm thứ tư nhanh hơn cách đếm thứ ba khi số ứng cử viên gạch bỏ ít hơn nhiều so với ứng cử viên được chọn.

Cuối cùng các bạn thử thực hành kiểm phiếu bầu của một hội đồng gồm 100 người, có 10 ứng cử viên, mỗi phiếu chọn 7 người và gạch bỏ 3 người.

PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC...

(Tiếp theo trang 48)

Nhận xét. *Với các lời giải tương tự như trên, các bạn có thể dẫn tới các bài toán sau:*

Bài toán 8. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}.$$

Bài toán 9. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^4}+\frac{b^5}{c^4}+\frac{c^5}{a^4}\ge\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}.$$

Bài toán 10. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^4}+\frac{b^6}{c^4}+\frac{c^6}{a^4}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Các bạn thử chứng minh ba bài toán trên nhé!

ĐỀ THI GIẢI HỌC BỔNG NGUYỄN ĐỨC CẢNH LỚP 6

TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ HOA LƯ, QUẬN 9, TP. HỒ CHÍ MINH

Môn học: Toán

Năm học 2018 - 2019

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. *(2 điểm)*

Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết

a) $(x - 7) : 25 = 1^{2018} + 2019^0$;

b) $6x + x = 7^{65} : (7^{28}.7^{34})$.

Bài 2. *(2 điểm)*

a) Tìm số tự nhiên n, biết rằng khi chia n cho 2 thì được thương là 2018.

b) Tìm số có năm chữ số $\overline{abcde}$, biết rằng $\overline{bcde} \times 9 = \overline{8022a}$.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

Để đánh số trang sách bằng các số tự nhiên từ 1 đến 116 cần viết tất cả bao nhiêu chữ số?

Bài 4. *(2,5 điểm)*

a) Ngày Nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11 năm 2018 rơi vào ngày thứ ba. Hỏi ngày 20 tháng 11 năm 2023 rơi vào thứ mấy?

b) Tìm số dư của phép chia $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{100}$ cho 7.

Bài 5. *(2 điểm)*

a) Cho năm điểm A, B, C, D, E trong đó ba điểm B, C, E thẳng hàng; A, B, E thẳng hàng; B, E, D thẳng hàng. Giải thích vì sao ba điểm A, C, D thẳng hàng?

b) Cho 31 điểm trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng, ngoài ra không còn 3 điểm nào thẳng hàng. Kẻ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Hỏi có tất cả bao nhiêu đường thẳng?

Thông báo

CÁCH GỬI BÀI ĐẾN TOÁN TUỔI THƠ

Thân gửi bạn đọc Toán Tuổi thơ 2!

Để thuận tiện cho bạn đọc gửi bài và Ban biên tập chọn bài và chấm bài, tòa soạn quy định cách gửi bài đến Toán Tuổi thơ như sau:

1. Bài gửi đăng

- Bài viết đã gửi đến Toán Tuổi thơ thì không gửi đến báo hay tạp chí khác.
- Nếu bài trích, hoặc sưu tầm ở tài liệu khác thì phải ghi rõ nguồn gốc tài liệu "Sưu tầm". Nếu bài dịch ở tài liệu nào thì cần gửi kèm bản gốc.
- Bài viết có đủ và chính xác các thông tin: Họ tên, địa chỉ, số điện thoại, số tài khoản ngân hàng để tòa soạn tiện liên lạc và gửi nhuận bút.

2. Bài giải của học sinh

- Mỗi chuyên mục hay mỗi bài Thi giải toán qua thư: giải vào một tờ giấy, phía trên cùng có ghi rõ họ tên, địa chỉ rõ ràng, chính xác (lớp, trường, huyện quận, tỉnh thành).
- Chuyên mục Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ: giải liền 5 bài, có thể giải bằng tiếng Anh hoặc tiếng Việt.
- Khuyến khích bài giải nhiều cách nếu có thể.

3. Hình thức gửi bài

- Bài gửi đăng nên đánh máy, gửi kèm file vào email: bbttoantuoitho@gmail.com, hoặc gửi bản gốc qua đường bưu điện.
- Bài giải của học sinh (viết tay) gửi về tòa soạn theo địa chỉ: **Tạp chí Toán Tuổi thơ, Tầng 2, nhà A, số 187B Giảng Võ, P. Cát Linh, Q. Đống Đa, Hà Nội**.

TTT

ĐỀ THI GIẢI HỌC BỔNG NGUYỄN ĐỨC CẢNH LỚP 7

TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ HOA LƯ, QUẬN 9, TP. HỒ CHÍ MINH

Môn học: Toán

Năm học 2018 - 2019

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. *(2 điểm)*

a) Tìm các số x, y biết $5x = 2y$ và $x + y = -14$.

b) So sánh $(-3)^{64}$ và $(-4)^{48}$.

Bài 2. *(2 điểm)*

Thực hiện các phép tính:

a) $(27^{23} - 81^{17} + 3^{66}) : 9^{33}$.

b) $\dfrac{1}{2.6} + \dfrac{1}{4.9} + \dfrac{1}{6.12} + \ldots + \dfrac{1}{198.300}$.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

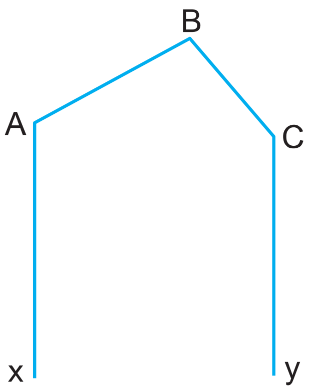
Ba đơn vị góp vốn kinh doanh theo tỉ lệ 3, 5, 7. Hỏi mỗi đơn vị góp bao nhiêu tiền? Biết rằng tổng số vốn góp được là 900 triệu đồng.

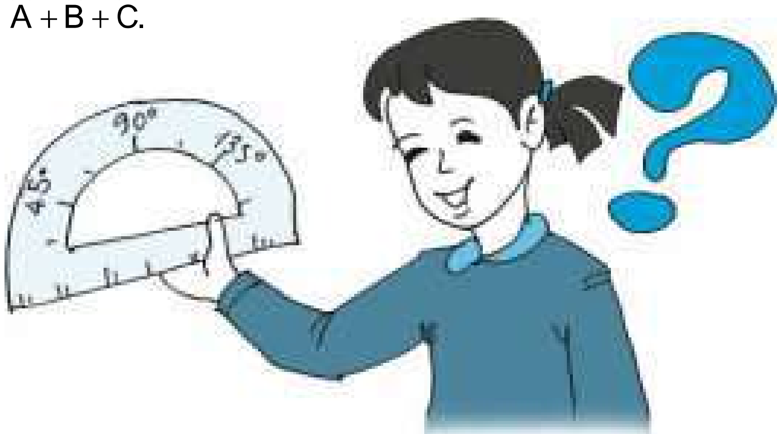
Bài 4. *(1,5 điểm)*

Có 48 tờ giấy bạc loại 20000 đồng, 50000 đồng, 100000 đồng. Số tiền của các loại tiền bằng nhau. Hỏi mỗi loại có bao nhiêu tờ?

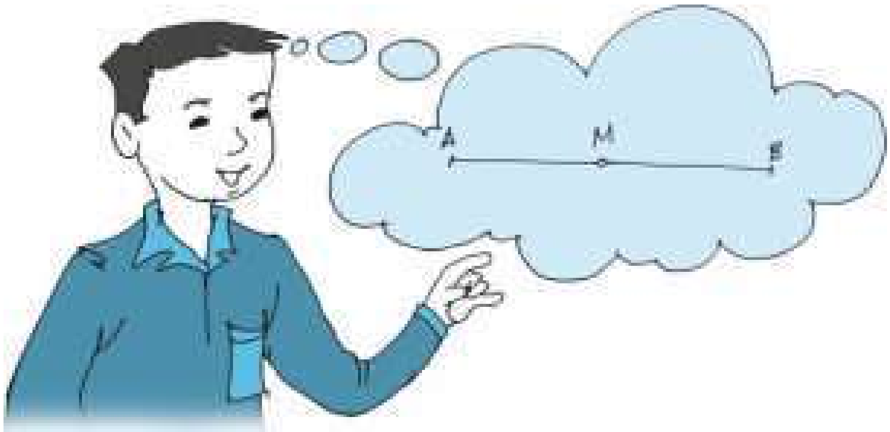
Bài 5. *(3 điểm)*

a) Cho hình vẽ. Biết Ax // Cy. Hãy tính $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.





b) Qua điểm M, vẽ 5 đường thẳng phân biệt. Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ rằng tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng 36°.



THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI THPT CHUYÊN

Môn học: Toán chuyên
Năm học 2019 - 2020
Thời gian làm bài: 150 phút

Người ra đề: Nguyễn Duy Liên *(GV. THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc)*

Bài 1. a) *(1 điểm).* Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+\sqrt{abc}=4$. Tính giá trị của biểu thức $A=\sqrt{a(4-b)(4-c)}+\sqrt{b(4-c)(4-a)}+\sqrt{c(4-a)(4-b)}$.

b) *(1 điểm).* Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2016}}$?

Bài 2. a) *(1 điểm).* Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho n; n^2+10; n^2-2; n^3+6 và n^5+36 đều là số nguyên tố.

b) *(1 điểm).* Cho hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\ mx+y=m+1\end{cases}$, trong đó m là tham số và x, y là ẩn. Chứng minh rằng với mọi m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn bất đẳng thức $2x+y\le 3$.

Bài 3. a) *(1 điểm).* Giải phương trình $(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x^2+4x-12})=8$.

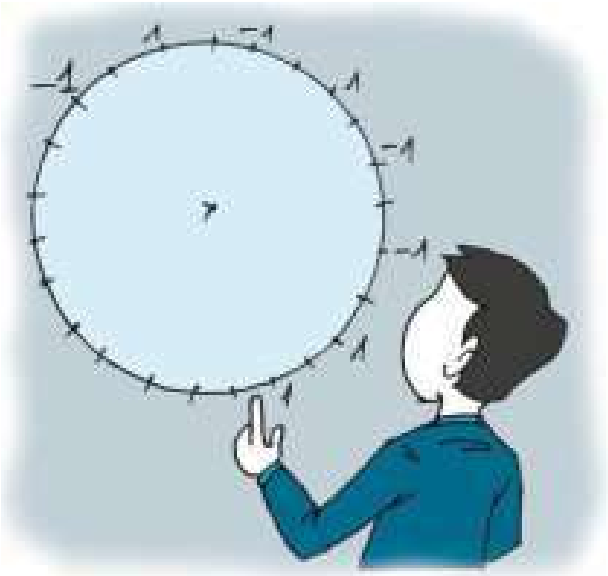
b) *(1 điểm).* Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là một điểm nằm trong tam giác thỏa mãn điều kiện $\frac{MA}{\sqrt{3}}=\frac{MB}{\sqrt{2}}=\frac{MC}{2\sqrt{2}}$. Tính các góc $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ và $\widehat{CMA}$.

Bài 4. a) *(1 điểm).* Cho ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BO và CD. Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và AMN đồng dạng thì ABCD là hình vuông.

b) *(1 điểm).* Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=90^o$ và AB = AC. Hai điểm M và N nằm trong đoạn BC sao cho N nằm giữa M và C và $BM^2-MN^2+NC^2=0$. Chứng minh rằng $\widehat{MAN}=45^o$.

Bài 5. a) *(1 điểm).* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

b) *(1 điểm).* Trên đường tròn có 25 vị trí được viết các số gồm 12 số 1 và 13 số –1. Mỗi bước ta thực hiện như sau: Với mỗi cặp hai số ở vị trí kề nhau trên đường tròn, ta tính tổng giá trị của chúng và viết số vừa tính vào giữa hai số kề nhau đó trên đường tròn. Sau đó xóa tất cả 25 số ban đầu ta thu được 25 số mới. Chứng minh rằng sau 100 bước, một trong các số trên đường tròn có giá trị nhỏ hơn -10^{28}.



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN LỚP 9 (VÒNG 2) QUẬN HOÀN KIẾM, HÀ NỘI

Năm học 2018-2019

(Đề đăng trên TTT2 số 191)

Bài 1. 1) Từ $(n^2-2)\vdots(mn+2)$, suy ra

$m(n^2-2)=mn^2-2m$

$=n(mn+2)-2(m+n)\vdots mn+2.$

Do đó $2(m+n)\vdots mn+2.$

Vì m, n nguyên dương nên $mn+2\le 2(m+n)$

$\Leftrightarrow (m-2)(n-2)\le 2.$

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình $(m;n)=(3;4).$

2) Phương trình đã cho tương đương với

$x^6+x^6+(-y)^3=2x^2-y$

$\Leftrightarrow (2x^2-y)(x^4+y^2+2x^2y-1)=3x^4y.$ (1)

$$\Rightarrow \begin{cases}(2x^2-y)\,|\,3x^4y\\(2x^2-y)\,|\,3x^4(2x^2-y)\end{cases}\Rightarrow (2x^2-y)\,|\,6x^6.$$

Mà $(2x^2-y,6x^3)=(2x^2-y,6)$

(do $(x,y)=1\Rightarrow(2x^2-y,x^2)=1\Rightarrow(2x^2-y,x^3)=1$).

$\Rightarrow(2x^2-y)\,|\,6$ nên $(2x^2-y)\in\{1;2;3;6\}.$

(Từ (1), $2x^2-y\in\mathbb{N}^*$.)

Giải 4 trường hợp tương ứng, ta được $(x;y)\in\{(1;1),(2;5)\}.$

Bài 2. 1) ĐKXĐ $x\ge-\frac{7}{3}.$

Đặt $t=\sqrt{3x+7}$ $(t\ge0).$ Khi đó, phương trình trở thành: $t^2+(2x-5)t-3x^2+x+4=0.$

$\Delta=(4x-3)^2\Rightarrow t=x+1$ hoặc $t=4-3x.$

Từ đó tìm được $x=3$ hoặc $x=\frac{3-\sqrt5}{2}.$

2) Theo đề bài ta có

$3abc=a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow\frac1a+\frac1b+\frac1c\le3.$

Đặt $x=\frac1a;\ y=\frac1b;\ z=\frac1c\Rightarrow x+y+z\le3.$

Khi đó, $P=\sqrt{\frac{x}{x^2+3}}+\sqrt{\frac{y}{y^2+3}}+\sqrt{\frac{z}{z^2+3}}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$2.\frac12.\sqrt{\frac{x}{x^2+3}}\le\frac14+\frac{x}{x^2+3}\le\frac14+\frac{x}{2x+2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{x}{x^2+3}}\le\frac14+\frac12.\frac{x}{x+1}.$$

Tương tự, $\sqrt{\frac{y}{y^2+3}}\le\frac14+\frac12.\frac{y}{y+1}$ và

$$\sqrt{\frac{z}{z^2+3}}\le\frac14+\frac12.\frac{z}{z+1}.$$

$$\Rightarrow P\le\frac34+\frac12\left(\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\right)$$

$$=\frac94-\frac12\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$$

$$\le\frac94-\frac12.\frac{9}{x+y+z+3}\le\frac94-\frac12.\frac96=\frac32.$$

Vậy $P_{max}=\frac32\Leftrightarrow a=b=c=1.$

Bài 3. 1) ĐKXĐ $x\ge-4,\ y\ge-1.$

Phương trình thứ nhất của hệ phương trình tương đương với

$(2x)^3+2.2x=(y-3)^3+2.(y-3)$

$\Leftrightarrow(2x-y+3)\left[4x^2+2x(y-3)+(y-3)^2+2\right]=0.$

Suy ra $y=2x+3,$ thay vào phương trình thứ hai của hệ phương trình ta được

$\sqrt{x+4}=x+2\Leftrightarrow x=0.$ Từ đó $y=3.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x;y)=(0;3).$

2) Đặt $a=mb+r$ $(0\le r<b).$ Khi đó ta viết:

$1218^a+1=1218^{mb+r}+1=1218^r.1218^{mb}+1.$

* TH1. m là số lẻ.

Ta có

$1218^a+1=\left[(1218^b)^m+1\right].1218^r+1-1218^r.$

Theo giả thiết $1218^a + 1 \vdots 1218^b + 1$ nên

$1218^r - 1 \vdots 1218^b + 1 \Rightarrow r = 0$.

Do đó a chia hết cho b.

✻ TH2. m là số chẵn. Ta có

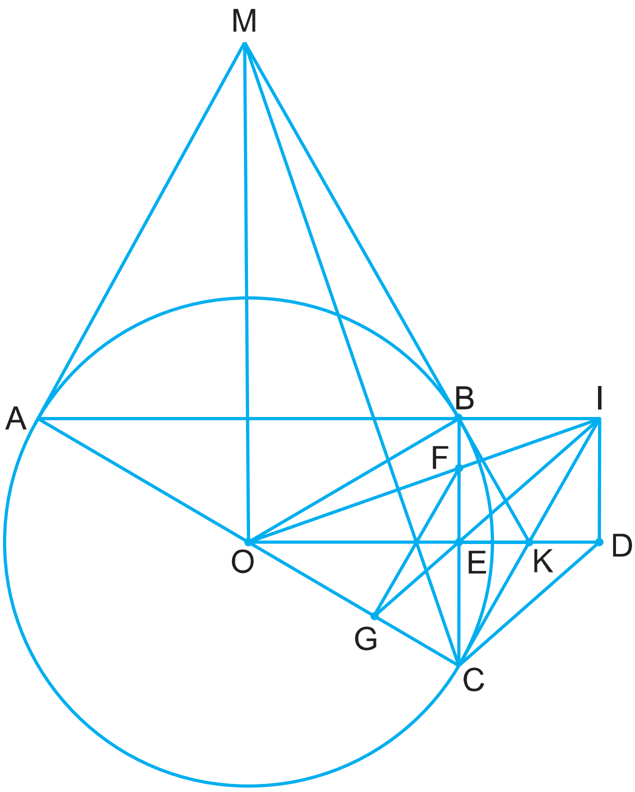
$1218^a + 1 = \left[(1218^b)^m - 1\right].1218^r + 1218^r + 1$

Theo giả thiết $1218^a + 1 \vdots 1218^b + 1$ và

$(1218^b)^2 - 1 \vdots 1218^b + 1$.

Suy ra $1218^r + 1 \vdots 1218^b + 1$ (vô lí vì $0 \le r < b$). Suy ra đpcm.

Bài 4.



1) Do OK // AB $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{COK} = \widehat{OAB} \\ \widehat{BOK} = \widehat{OBA}. \end{cases}$

Mà $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ (tam giác OBA cân).

$\Rightarrow \widehat{COK} = \widehat{BOK}$.

Từ đó suy ra $\Delta COK = \Delta BOK$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{KCO} = 90^\circ \Rightarrow$ đpcm.

2) Ta có $\Delta IBC \backsim \Delta OBM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IB}{OB} = \dfrac{BC}{BM}$.

Từ đó chứng minh được $\Delta IBO \backsim \Delta CBM$.

Suy ra điều phải chứng minh.

3) Dễ thấy $OK \perp BC$. Từ kết quả câu 2) ta chứng minh được $MC \perp OI$.

Lấy điểm D sao cho K là trung điểm của ED, suy ra tứ giác DCEI là hình bình hành.

Theo định lí Thales ta có

$\dfrac{OG}{GC} = \dfrac{OE}{ED}, \dfrac{OF}{FI} = \dfrac{OE}{ED}$ nên $\dfrac{OG}{OC} = \dfrac{OF}{FI}$.

$\Rightarrow GF$ // $CI \Rightarrow GF \perp OC$.

Từ tính chất trực tâm tam giác OFC, ta có đpcm.

Bài 5. Để đơn giản, gọi vòng tròn 1 là vòng tròn lúc đầu, vòng tròn 2 là vòng tròn lúc sau. Xét vòng tròn 1, ta chia các số trên vòng tròn thành các cụm gồm các số liên tiếp cùng dấu theo chiều kim đồng hồ: a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_k, b_k, trong đó a_i là cụm gồm toàn các số dương, còn b_i là cụm gồm toàn các số âm với $a_i, b_i \ge 1$ với mọi $i = 1, 2, ..., k$. Chú ý là số âm của vòng tròn 2 được tạo thành từ tích một số dương với một số âm, tức là tích số cuối cùng của cụm a_i với số đầu tiên của cụm b_i hoặc số cuối cùng của cụm b_j với số đầu tiên của cụm a_{j+1} với quy ước $a_{j+1} = a_1$ khi $j = k$. Như vậy, sau khi viết vòng tròn 2 thì số lượng số âm trên vòng tròn sẽ là 2k. Trong khi đó, số lượng số âm trên vòng tròn 1 là $b_1 + b_2 + ... + b_k$. Vì số lượng số dương trên vòng tròn 1 và vòng tròn 2 là bằng nhau nên số lượng số âm trên vòng tròn 1 và vòng tròn 2 cũng bằng nhau, suy ra $b_1 + b_2 + ... + b_k = 2k$. Do đó, số lượng số âm trên vòng tròn 1 luôn là số chẵn.

Mặt khác, ta lại có

$a_1 + a_2 + ... + a_k + b_1 + b_2 + ... + b_k = 100$

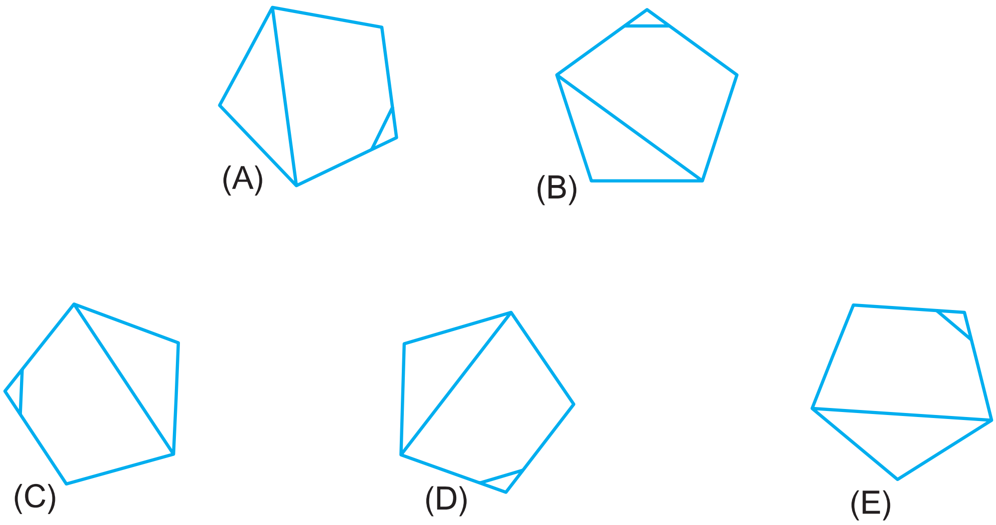
$\Rightarrow 2k = b_1 + b_2 + ... + b_k = 100 - (a_1 + a_2 + ... + a_k)$

$\le 100 - k \Rightarrow k \le 33$.

Suy ra số lượng số âm là số chẵn và không vượt quá 66, dẫn tới số lượng số dương là số chẵn và không nhỏ hơn 34, nghĩa là $n \ge 34$. Hơn thế nữa, với $n = 34$ ta có một cách viết các số trên vòng tròn sao cho số lượng số dương lúc đầu và lúc sau luôn bằng 34, cụ thể viết các số trên vòng tròn thành các cụm như sau a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{34}, b_{34} với $b_1 = b_2 = ... = b_{34} = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của n cần tìm là $n = 34$.

Kì này HÌNH NÀO KHÁC?

Bài 1. Trong các hình dưới đây, hình nào khác với các hình còn lại?



ĐỖ THỊ THÚY NGỌC
Phó Trưởng phòng Giáo dục Trung học, Sở GD&ĐT Ninh Bình
(Sưu tầm và giới thiệu)

Kết quả HÌNH NÀO LẠC LOÀI? (TTT2 số 190)

Quy luật.

Cách 1. Trong các hình A, B, D, E hình tròn đỏ được nối với 3 hình tròn trắng. Riêng ở hình C, hình tròn đỏ được nối với 2 hình tròn trắng. Vậy hình C khác với các hình còn lại.

Cách 2. Trong các hình A, B, C, D có 1 tam giác được tạo thành. Riêng hình E có 2 tam giác được tạo thành. Vậy hình E khác với các hình còn lại.

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều tìm ra kết quả đúng. Xin trao thưởng cho các bạn có nhiều cách giải: *Đào Quỳnh Hương*, 9A1, THCS Mộc Ly, Mộc Châu, **Sơn La**; *Phạm Vũ Hoàng*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Đoàn Hạnh Diên*, 7A, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc, **Hải Dương**; *Ngô Phương Linh*, 6C, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Ngọc Diệp*, 7A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Nguyễn Hồng Sơn*, 6A6, THCS Cầu Giấy; *Nguyễn Nhật Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Lê Huy Thành*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Đoàn Minh Đức, Phạm Ngọc Huỳnh*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION AMC 2018

Junior Division

Time allowed: 60 *minutes*

ĐỖ TRUNG KIÊN *(Sưu tầm và giới thiệu)*

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. What is $2 + 0 + 1 + 8$?

(A) 9 (B) 10 (C) 11
(D) 38 (E) 2018

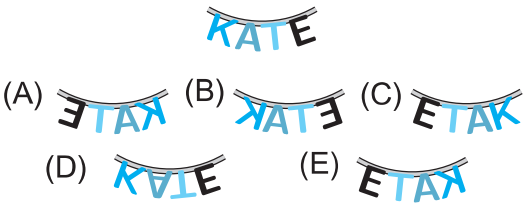
2. Callie has \$47 and then gets \$25 for her birthday. How much does she have now?

(A) \$52 (B) \$62 (C) \$65
(D) \$69 (E) \$72

3. The value of $4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 2 \times 10 + 4 \times 1$ is

(A) 4324 (B) 43024 (C) 43204
(D) 430204 (E) 430024

4. Kate made this necklace from alphabet beads. She put it on the wrong way around, showing the back of the beads. What does this look like?

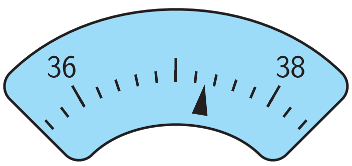


5. What is the time 58 minutes before 5.34 pm?

(A) 5.32pm (B) 5.36pm (C) 6.32pm
(D) 6.12pm (E) 4.36pm

6. What value is indicated on this charisma-meter?

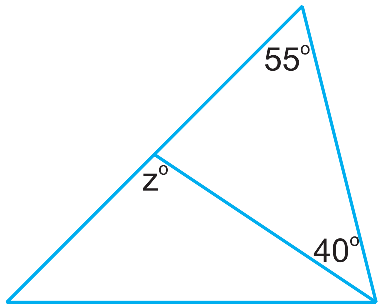
(A) 36.65 (B) 37.65 (C) 38.65
(D) 37.15 (E) 37.3



7. Starting at 1000, Ishrak counted backwards, taking 7 off each time. What was the last positive number he counted?

(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6

8. What is the value of z?



(A) 75 (B) 85 (C) 95
(D) 100 (E) 105

9. Five friends (Amelia, Billie, Charlie, David and Emily) are playing together and decide to line up from oldest to youngest.

- Amelia is older than Billie who is older than Emily.
- David is also older than Billie.
- Amelia is not the oldest.
- Emily is not the youngest.

Who is the second-youngest of the five friends?

(A)Amelia (B) Billie (C) Charlie
(D) David (E) Emily

10. A length of ribbon is cut into two equal pieces. After using one piece, one-third of he other piece is used, leaving 12 cm of ribbon. How long, in centimetres, was the ibbon initially?

(A) 24 (B) 32 (C) 36
(D) 48 (E) 50

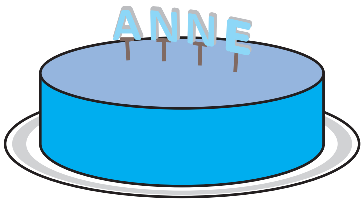
Questions 11 to 20, 4 marks each

11. 1000% of a number is 100. What is the number?

(A) 0.1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

12. Nora, Anne, Warren and Andrew bought plastic capital letters to spell each of their names on their birthday cakes. Their birthdays are on different dates, so they planned to reuse letters on different cakes.

What is the smallest number of letters they needed?

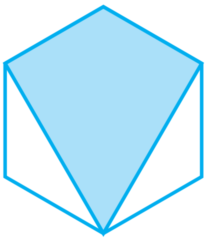


(A) 8 (B) 9 (C) 10
(D) 11 (E) 12

13. The cost of feeding four dogs for three days is \$60. Using the same food costs per dog per day, what would be the cost of feeding seven dogs for seven days?

(A) \$140 (B) \$200 (C) \$245
(D) \$350 (E) \$420

14. What fraction of this regular hexagon is shaded?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{4}{5}$

15. Leila has a number of identical square tiles that she puts together edge to edge in a single row, making a rectangle. The perimeter of this rectangle is three times that of a single tile. How many tiles does she have?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

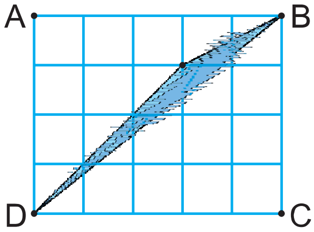
16. James is choosing his language electives for next year. He has to choose two different electives, one from Group A and one from Group B.

Group A	Group B
Mandarin	Mandarin
Japanese	German
Spanish	Arabic
Indonesian	Italian

How many different pairs of elective combinations are possible?

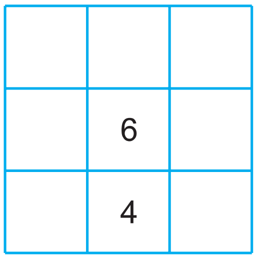
(A) 7 (B) 8 (C) 12
(D) 15 (E) 16

17. In the diagram, ABCD is a 5 cm × 4 cm rectangle and the grid has 1 cm × 1 cm squares. What is the shaded area, in square centimetres?



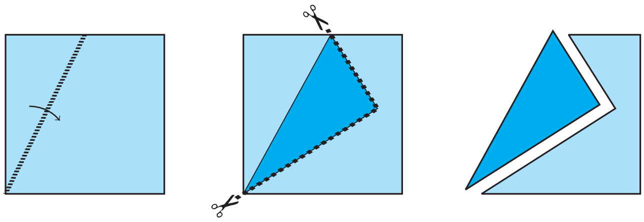
(A) 1 (B) 1.5 (C) 0.5 (D) 2 (E) 3

18. Fill in this diagram so that each of the rows, columns and diagonals adds to 18. What is the sum of all the corner numbers?



(A) 20 (B) 22 (C) 23 (D) 24 (E) 25

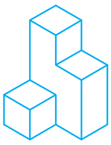
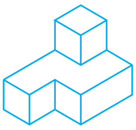
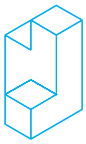
19. A square of paper is folded along a line that joins the midpoint of one side to a corner. The bottom layer of paper is then cut along the edges of the top layer as shown.

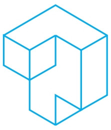
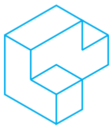


When the folded piece is unfolded, which of the following describes all the pieces of paper?

(A) a kite and a pentagon of equal area
(B) a rectangle and a pentagon of equal area
(C) an isosceles triangle and a pentagon, with the pentagon of larger area
(D) a kite and a pentagon, with the kite smaller in area
(E) a rectangle and a pentagon, with the rectangle larger in area

20. A 3-dimensional object is formed by gluing six identical cubes together. Four of the diagrams below show this object viewed from different angles, but one diagram shows a different object. Which diagram shows the different object?

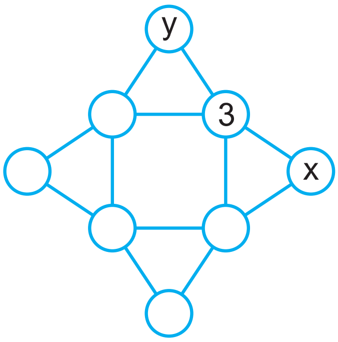
(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

Questions 21 to 25, 5 marks each

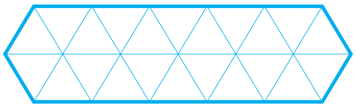
21. Approximately how long is a millimonth, defined to be one-thousandth of a month?
(A) 20 seconds (B) 70 seconds (C) 8 minutes (D) 40 minutes (E) 3 hours

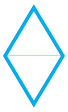
22. The numbers from 1 to 8 are entered into the eight circles in this diagram, with the number 3 placed as shown.
In each triangle, the sum of the three numbers is the same.



The sum of the four numbers which are at the corners of the central square is 20.
What is x + y?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

23. A long narrow hexagon is composed of 22 equilateral triangles of unit side length. In how many ways can this hexagon be tiled by 11 rhombuses of unit side length?

Hexagon 

Rhombus 

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 16

24. In this expression

$$\square\ \frac{1}{3}\ \square\ \frac{1}{4}\ \square\ \frac{1}{5}\ \square\ \frac{1}{6}\ \square\ \frac{1}{7}$$

we place either a plus sign or a minus sign in each box so that the result is the smallest positive number possible. The result is

(A) between 0 and $\frac{1}{100}$

(B) between $\frac{1}{100}$ and $\frac{1}{50}$

(C) between $\frac{1}{50}$ and $\frac{1}{20}$

(D) between $\frac{1}{20}$ and $\frac{1}{10}$

(E) between $\frac{1}{10}$ and 1

25. In this subtraction, the first number has 100 digits and the second number has 50 digits.

$$\underbrace{111...111}_{100\text{ digits}} - \underbrace{222...222}_{50\text{ digits}}$$

What is the sum of the digits in the result?
(A) 375 (B) 420 (C) 429
(D) 450 (E) 475

For questions 26 to 30, shade the answer as an integer from 0 to 999 in the space provided on the answer sheet.
Questions 26-30 are worth 6, 7, 8, 9 and 10 marks, respectively.

26. Using only digits 0, 1 and 2, this cube has a different number on each face. Numbers on each pair of opposite faces add to the same 3-digit total.
What is the largest that this total could be?

27. I have a three-digit number, and I add its digits to create its digit sum. When the digit sum of my number is subtracted from my number, the result is the square of the digit sum. What is my three-digit number?

28. A road from Tamworth to Broken Hill is 999km long. There are road signs each kilometre along the road that show the distances (in kilometres) to both towns as shown in the diagram.

0|999 1|998 2|997 3|996 ··· 998|1 999|0

How many road signs are there that use exactly two different digits?

29. In the multiplication shown, X, Y and Z are different non-zero digits.

$$\begin{array}{rcccc} & & X & Y & Z \\ \times & & & 1 & 8 \\ \hline & Z & X & Y & Y \end{array}$$

What is the three-digit number XYZ?

30. Let A be a 2018-digit number which is divisible by 9. Let B be the sum of all digits of A and C be the sum of all digits of B. Find the sum of all possible values of C.

THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM SÁU MƯƠI

Người thách đấu: *Nguyễn Khánh Nguyên*, Số 3/29E đường Đà Nẵng, **Hải Phòng**.

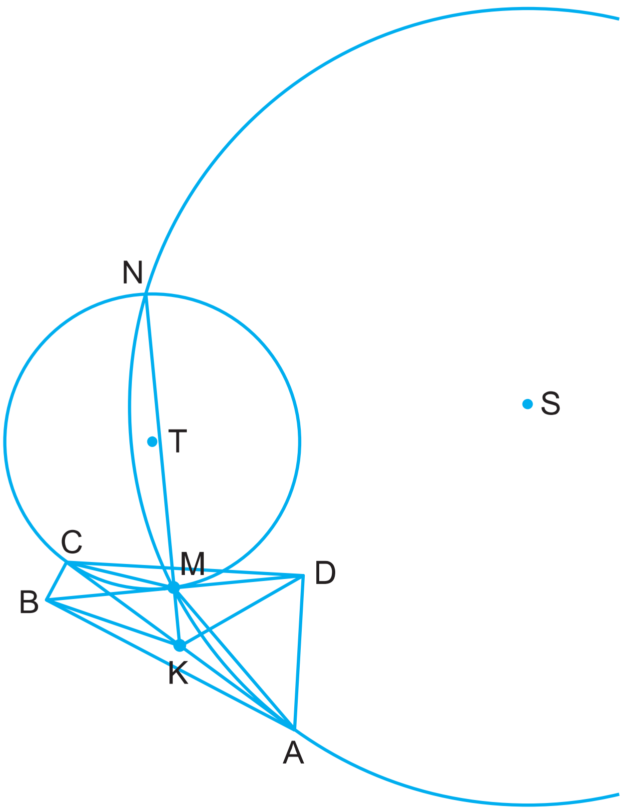
Bài toán thách đấu: Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF cắt nhau tại I. DF cắt BI tại M, DE cắt CI tại N. Biết rằng AM = AN. Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

Thời hạn: Trước ngày 08.3.2019 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI TÁM (TTT2 số 190)

Đề bài. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{CDA} = 90^{o}$. Gọi M là trung điểm của BD. Giả sử đường tròn (S) đi qua M và tiếp xúc với AC tại A. Đường tròn (T) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C (biết rằng hai đường tròn (S) và (T) không tiếp xúc với nhau). Chứng minh các giao điểm của (S) và (T) cùng nằm trên đường trung trực của BD.

Lời giải. *Để chứng minh cho bài toán này ta sử dụng bổ đề sau.*



• **Bổ đề.** Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác. K là giao điểm của BC và tiếp tuyến của (O) tại A. Khi đó $KA^2 = KB.KC$.

Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Trở lại giải bài toán thách đấu.

Gọi N là giao điểm thứ hai của (S) và (T); K là giao điểm của MN và AC.

Theo giả thiết $MB = MD$. (1)

Vì (S) và (T) theo thứ tự tiếp xúc với AC tại A và C nên theo bổ đề trên ta có

$KA = \sqrt{KM.KN} = KC.$

Suy ra K là trung điểm của AC.

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, nên suy ra $BK = \frac{1}{2}AC = KD.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MK là đường trung trực của đoạn thẳng BD.

Mà N thuộc MK, nên ta có M, N cùng nằm trên đường trung trực của BD.

Nhận xét. Không có võ sĩ nào đăng quang trong trận đấu này. Phần thưởng xin gác lại kì sau.

NGUYỄN MINH HÀ

Kì này KÌ 39

XUÂN KỶ HỢI CÓ GÌ LẠ?

Bạn hãy thay mỗi chữ cái bởi một chữ số khác 0 (chữ khác nhau thay bởi chữ số khác nhau) vào dòng chữ XUANKYHOI sao cho số có đúng 2019 chữ số gồm toàn chữ số 5 chia hết cho số này.

THẦY TOÁN *(Thanh Xuân, Hà Nội)*

Kết quả KÌ 37 (TTT2 số 190)

Ta có $K \neq 0$ vì nếu $K = 0$ thì $H = 0 = K$.

Vì $WEEK \times 4 = MONTH$, MONTH là số có 5 chữ số mà $E \times 4 \leq 9 \times 4 = 36$ nên nếu $W = 1$ thì $W \times 4 < 10$.

Khi đó $WEEK \times 4$ chỉ là số có 4 chữ số.

Vậy $W \neq 1$.

TH 1. $W = 2$. Nếu $E \leq 4$ thì $2EEK \times 4 \leq 2449 \times 4 = 9796 < 10000$ (loại).

Vì vậy $E \geq 5$.

Ta có $K \neq W = 2$.

Nếu $K = 3$ hoặc $K = 8$ thì $H = 2 = W$ (loại). Vậy K chỉ có thể bằng 1, 4, 5, 6, 7, 9.

TH 1.1. $W = 2; E = 5$.

Khi đó K chỉ có thể bằng 1, 4, 6, 7, 9.

Vì $2551 \times 4 = 10204 < 2559 \times 4 = 10236$ nên với K = 1, 4, 6, 7, 9 ta đều có $N = 2 = W$ (loại).

TH1.2. $W = 2; E = 6$:

Vì $2661 \times 4 = 10644 < 2669 \times 4 = 10676$ nên với K = 1, 4, 5, 7, 9 ta đều có $N = 6 = E$ (loại).

TH1.3. $W = 2; E = 7, 8, 9$.

Vì $2771 \times 4 = 11084 < 2999 \times 4 = 11996$ nên với mọi K = 1, 4, 5, 6, 7, 9 ta đều có $M = O = 1$ (loại).

Vậy trường hợp $W = 2$ không cho nghiệm.

TH2. $W = 3$.

Vì $3112 \times 4 = 12448 < 3119 \times 4 = 12476$ nên với mọi K = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta đều có $M = 1 = E$ (loại).

Vì $3221 \times 4 = 12884 < 3229 \times 4 = 12916$ nên với mọi K = 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ta đều có $O = 2 = E$ (loại).

Vì $3441 \times 4 = 13764 < 3449 \times 4 = 13796$ nên với mọi K = 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 ta đều có $O = 3 = W$ (loại).

Vì $3551 \times 4 = 14204$ nên loại do $K = 1 = M$, $O = 4 = H$.

Vì $3552 \times 4 = 14208$ nên loại do $K = 2 = N$.

Vì $3661 \times 4 = 14644 < 3669 \times 4 = 14676$ nên loại do $E = 6 = N$.

Vì $3771 \times 4 = 15084$ nên loại do $K = 1 = M$.

Vì $3772 \times 4 = 15088$ nên loại do $T = 8 = H$.

$3774 \times 4 = 15096$ là nghiệm vì tất cả các số ứng với các chữ số khác nhau là khác nhau.

Vì $3775 \times 4 = 15100 < 3779 \times 4 = 15116$ nên loại do $M = 1 = N$.

Vì $3881 \times 4 = 15524 < 3889 \times 4 = 15556$ nên loại do $O = 5 = N$.

Vì $3991 \times 4 = 15964 < 3998 \times 4 = 15992$ nên loại do $E = 9 = N$.

Kết luận. • Trường hợp $W = 3$ cho 1 nghiệm $3774 \times 4 = 15096$. Tương tự ta được

• Trường hợp $W = 4$ cho 2 nghiệm:
$4227 \times 4 = 16908$; $4559 \times 4 = 18236$

• Trường hợp $W = 5$ cho 5 nghiệm:
$5117 \times 4 = 20468$; $5119 \times 4 = 20476$;
$5771 \times 4 = 23084$; $5774 \times 4 = 23096$;
$5776 \times 4 = 23104$.

• Trường hợp $W = 6$ không cho nghiệm.

• Trường hợp $W = 7$ cho 2 nghiệm:
$7115 \times 4 = 28460$; $7554 \times 4 = 30216$;

• Trường hợp $W = 8$ cho 4 nghiệm:
$8115 \times 4 = 32460$; $8119 \times 4 = 32476$;
$8774 \times 4 = 35096$; $8776 \times 4 = 35104$.

• Trường hợp $W = 9$ cho 3 nghiệm:
$9118 \times 4 = 36472$; $9551 \times 4 = 38204$;
$9554 \times 4 = 38216$. Có tất cả 17 nghiệm.

Nhận xét. Rất tiếc kì này không có bạn nào được thưởng.

TTT

ĐỀ TỰ LUYỆN CUỘC THI
CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC

Thời gian làm bài: 30 phút

(Các bài từ 1 đến 15 chỉ viết đáp số, bài 16 trình bày lời giải)

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC *(Hải Dương)*

Bài 1. So sánh $2017 \times 2018 \times 2019$ và 2018^3.

Bài 2. Cho a, b, c là các số thỏa mãn $2018 \le a, b, c \le 2019$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a - b)^{2000} + (b - c)^{2000} + (c - a)^{2000}$.

Bài 3. Cho $f(x; y) = x^2 - 2y$. Tìm $f(2; f(2; 3))$.

Bài 4. Cho đa thức $P(x) = x^{2018} - 2019x^{2017} + 2019x^{2016} - 2019x^{2015} + \ldots - 2019x + 1$.
Tính P(2018).

Bài 5. Khai triển đa thức $g(x) = (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4)^{10}$ thành dạng $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{40}x^{40}$. Tính $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{40}$.

Bài 6. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho 48k là lập phương của một số tự nhiên.

Bài 7. Tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^3 - 2n^2 + 2n - 4$ là số nguyên tố.

Bài 8. Nếu một đa giác lồi có tổng số đo các góc trong bằng 1440^o thì số đường chéo của đa giác đó là bao nhiêu?

Bài 9. Cho $4x^2 + 9y^2 = 13xy$ với $3y < 2x < 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{2x - 3y}{2x + 3y}$.

Bài 10. Có 40 bạn trong một lớp đứng thành vòng tròn và quay mặt vào phía trong vòng tròn cùng chơi chuyền chung một quả bóng theo luật chơi như sau: Mỗi bạn có bóng trong tay sẽ chuyền qua mặt 5 bạn đứng ở phía bên tay trái của mình để đến bạn kế tiếp nhận được bóng. Bạn nhận được bóng lại chuyền bóng qua mặt 5 bạn đứng ở phía tay trái của mình để đến bạn kế tiếp nhận được bóng. Quá trình cứ tiếp tục như vậy nhiều lần và nhiều vòng. Hỏi có bao nhiêu bạn không thể nhận được bóng?

Bài 11. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Nếu ô tô tăng vận tốc lên 20% thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ. Nếu sau khi đi được 40 km đầu với vận tốc dự định, ô tô tăng vận tốc thêm 30% thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ 12 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 12. Diện tích của hai tam giác đồng dạng ABC, DEF thứ tự là 6 cm^2 và 24 cm^2. Biết cạnh BC = 8 cm, tính độ dài cạnh EF.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(–1; 1), B(0; 3), C(3; 1). Xác định tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^o$, AB = 4 cm và phân giác trong AD = 3 cm. Tính độ dài cạnh AC.

Bài 15. Cho tứ giác lồi ABCD có AB = CD, $\hat{A} = 70^o$, $\hat{D} = 50^o$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Tính số đo góc ANM.

Bài 16. Cho đoạn thẳng AB = 8 cm, Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB xác định hai điểm M, N sao cho AM vuông góc với AB, AM = 4 cm; BN vuông góc với AB, BN = 2 cm. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của IM + IN, với I thuộc đoạn thẳng AB.

ĐỀ TỰ LUYỆN CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC

Thời gian làm bài: 30 phút

(Các bài từ 1 đến 15 chỉ viết đáp số, bài 16 trình bày lời giải)

NGUYỄN KHÁNH CHUNG

Hiệu trưởng THCS - THPT Ban Mai, Q. Hà Đông, Hà Nội

Bài 1. Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Tính $\dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2017)}{f(2).f(4).f(6)...f(2018)}$.

Bài 2. Cho $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + z^2 = 12 \\ 2xy + 2yz + xz = 12 \end{cases}$, với x, y, z > 0. Tính $P = x - 2y + 3z$.

Bài 3. Cho $\dfrac{3a^2 + 2ab - 6b^2}{a^2 - ab + 2b^2} = \dfrac{5}{2}$, với $a > b > 0$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

Bài 4. Tính tổng tất cả các số nguyên n thỏa mãn n + 1 và 4n + 29 là các số chính phương.

Bài 5. Giải phương trình $x^6 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$.

Bài 6. Tìm tập nghiệm của phương trình $(3x - 2)|x + 4| = x^2 + 8x + 16$.

Bài 7. Tính tổng tất cả các số nguyên là nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 7x - 15 < 0$.

Bài 8. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 3xy$.

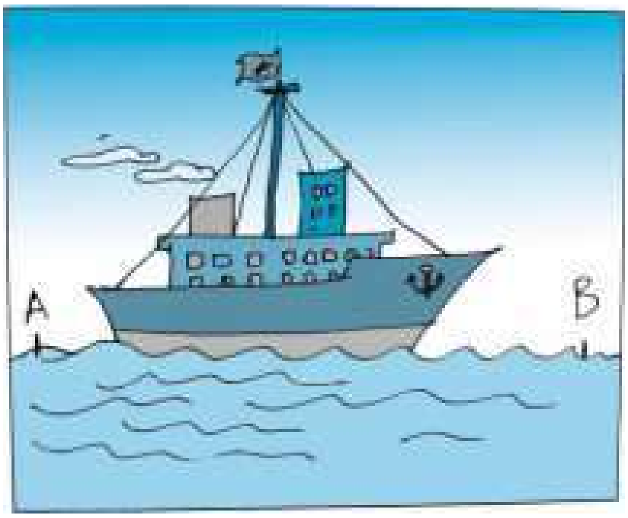
Bài 9. Có bao nhiêu tam giác cân mà các đỉnh của tam giác đồng thời là các đỉnh của một hình ngũ giác đều?

Bài 10. Cho tam giác ABC đều, cạnh AB = 6 cm. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = CN = \dfrac{1}{3}AB$. Tính độ dài đoạn MN.

Bài 11. Tính diện tích hình lục giác ABCDEF biết tất cả các góc của hình lục giác bằng nhau và AB = 7 cm, BC = 2 cm, CD = 3 cm, DE = 5 cm, EF = 6 cm.

Bài 12. Một đa giác lồi có số đường chéo gấp đôi số cạnh, tính tổng số đo các góc trong của đa giác đó.

Bài 13. Một tàu thủy đi từ A đến B mất 9 giờ, sau đó đi ngược từ B về A mất 11 giờ. Hỏi vận tốc dòng nước là bao nhiêu? (Giả sử vận tốc dòng nước, vận tốc tàu thủy khi xuôi dòng hoặc ngược dòng không đổi).



Bài 14. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x + 1|(x - 2) < (x - 5)(x^2 + 2x)$.

Bài 15. Tính tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (x^2 - 2x - 1)^{2018}$.

Bài 16. *(Tự luận)* Cho phương trình $4x - 3y = 5$. Tìm nghiệm nguyên (x, y) của phương trình sao cho $Q = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

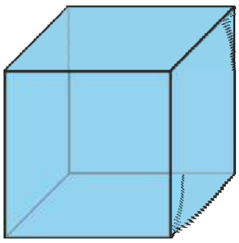
ĐỀ THI "TÌM KIẾM TÀI NĂNG TOÁN HỌC TRẺ 2018" (MYTS)

Đề thi khối lớp 7, gồm 24 câu hỏi. Thời gian làm bài: 120 phút

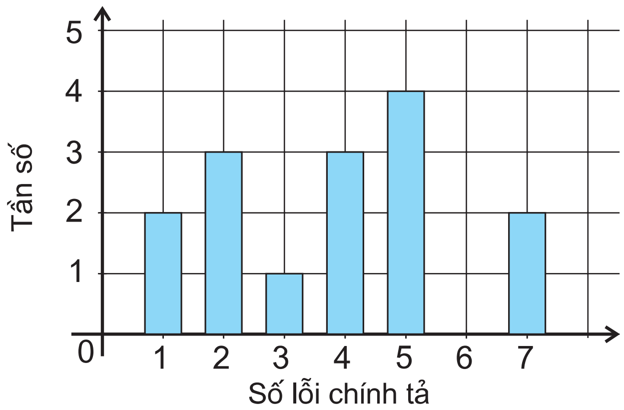
PHẠM VĂN THUẬN
(Trung tâm Toán và Khoa học Hexagon)
(Sưu tầm và Giới thiệu)

1. Một cửa hàng nhập một loại áo phông với giá 200 ngàn đồng mỗi chiếc, và niêm yết giá bán cao hơn 40% so với giá gốc. Sau một thời gian, vì không bán được chiếc áo nào nên cửa hàng quyết định giảm 25% giá niêm yết, và bán hết sạch ngay lập tức. Hỏi sau khi bán hết số áo đã nhập thì cửa hàng thu được lợi nhuận bao nhiêu từ mỗi chiếc áo?

2. Hỏi có bao nhiêu tam giác đều mà tất cả các đỉnh là đỉnh của một hình lập phương cho trước?



3. Dưới đây là biểu đồ số lỗi chính tả của một nhóm học sinh trong một kì thi viết tiếng Anh. Hỏi có bao nhiêu phần trăm học sinh của nhóm mắc ít hơn 4 lỗi?



4. Cho $A = 2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$. Tìm hai chữ số tận cùng của A.

5. Kỉ lục của kình ngư Ánh Viên tại Sea Game 28 trong cuộc thi 200 m bơi tự do là 1 phút 59 giây. Biết rằng sau khi nhảy xuất phát, vận tốc bơi của Ánh Viên giữ ổn định ở mức 1,6 m/giây, hỏi Ánh Viên nhảy xuất phát xa bao nhiêu mét (coi như không tính thời gian nhảy xuất phát)?

6. Có bao nhiêu số nguyên dương n mà khi chia n cho 45 thì có phần dư đúng bằng bình phương của thương?

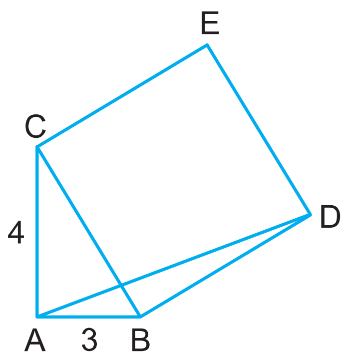
7. Các số lẻ được sắp xếp thành các hàng như sau:

1						
3	5					
7	9	11				
13	15	17	19			
21	23	25	27	29		
...	...	...	...	...	...	...

Hỏi tổng các số ở hàng thứ 20 bằng bao nhiêu?

8. Hai cầu thủ Xuân Trường và Văn Thanh cùng nhau tập sút phạt đền, mỗi người sút ít nhất một lần. Giả sử tỉ lệ sút thành công của Xuân Trường là 80% và của Văn Thanh là 95%. Hỏi tổng số lần sút thành công của cả hai cầu thủ nhiều nhất có thể là bao nhiêu, nếu họ sút tổng cộng 125 lần?

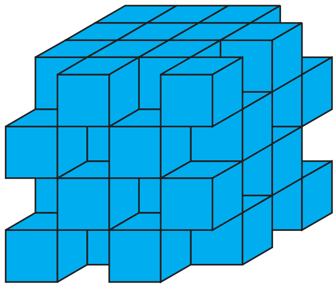
9. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 3 cm và AC = 4 cm. Dựng ra phía ngoài tam giác hình vuông BCED (xem hình vẽ). Tính độ dài đoạn thẳng AD.



10. Bạn An có 13 tấm thẻ được ghi các số từ 1 đến 13. Hỏi An có thể chọn ra nhiều nhất bao nhiêu thẻ để tích các số trên các tấm thẻ được chọn là một số chính phương?

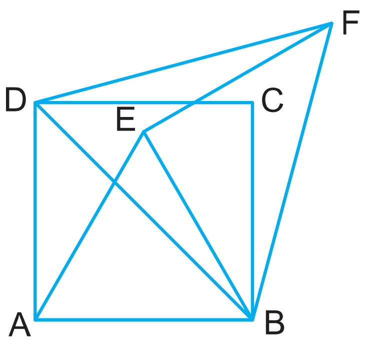
11. Một nhóm bạn đến từ ba trường rủ nhau đi câu cá, số bạn từ mỗi trường đều bằng nhau. Cuối buổi câu cá, bạn câu được ít cá nhất câu được $\frac{1}{15}$ tổng số cá, bạn câu được nhiều cá nhất câu được $\frac{1}{9}$ tổng số cá. Hỏi nhóm này có bao nhiêu bạn?

12. Bạn Châu ghép 64 khối lập phương cạnh 1, để tạo thành khối lập phương cạnh 4. Sau đó, Châu lại gỡ đi 14 khối lập phương nhỏ như trong hình bên. Tính diện tích bề mặt của khối được tạo thành?



13. Bốn bạn nhỏ An, Bình, Lan, Hoa, hát và đệm đàn cho nhau. Với mỗi bài, có một bạn đánh đàn và ba bạn kia hát. Biết rằng, An đã hát 9 bài, Bình đã hát 5 bài, Lan đã hát 6 bài và Hoa đã hát 7 bài. Hỏi Bình đã đệm đàn cho mấy bài hát?

14. Cho hình vuông ABCD. Dựng hai tam giác đều ABE và BDF như hình bên. Tính góc EFD.



15. Hỏi có bao nhiêu cách nhốt 5 con vật, gồm hổ, báo, sư tử, gấu và mèo rừng, vào 5 chuồng được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 sao cho mỗi con được nhốt vào một chuồng và hổ không ở chuồng 1, báo không ở chuồng 5?

16. Một vận động viên điền kinh luyện tập 9 ngày liên tục để chuẩn bị thi đấu. Biết rằng trong bất kì bốn ngày liên tiếp nào vận động viên cũng chạy được tổng cộng 87 km; trong ngày thứ 2 và ngày cuối cùng vận động viên chạy lần lượt là 22 km và 19 km. Hỏi trong hai ngày thứ 3 và thứ 8 vận động viên chạy tổng cộng bao nhiêu ki-lô-mét?

17. Có bốn trang trại nuôi bò A, B, C, D, theo thứ tự đó nằm trên một trục giao thông. Khoảng cách từ trang trại A tới các trang trại B, C, D lần lượt là 2 km, 5 km, 6 km. Người ta xây một nhà máy chế biến sữa nằm trên trục giao thông đó sao cho tổng các quãng đường từ nhà máy tới hai trang trại A, B bằng tổng các quãng đường từ nhà máy tới hai trang trại còn lại. Hỏi nhà máy xây cách trang trại A bao nhiêu ki-lô-mét? (Coi trục giao thông là một đường thẳng).

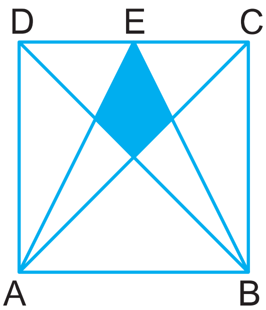
18. Một người đang đi xe máy trên đường quốc lộ thì thấy một xe ô tô vượt lên. Sau 10 phút, đến trạm nghỉ, người đi xe máy thấy xe ô tô đã dừng ở đó. Biết rằng vận tốc của xe máy là 40 km/h và của xe ô tô là 50 km/h. Hỏi xe ô tô đến trạm nghỉ trước xe máy bao nhiêu phút?

19. Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho N chia hết cho 99 và trong biểu diễn thập phân của N không chứa chữ số 9.

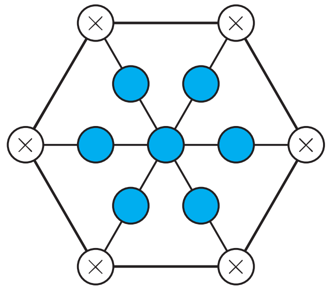
20. Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $|a| \le 5$, $|b+1| \le 7$ và $|c+2| \le 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất S và giá trị lớn nhất T của $|a+b-c|$.

21. Tìm số nguyên tố nhỏ nhất có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho cả sáu số a, $\overline{ab}$, $\overline{abc}$, c, $\overline{cb}$ và $\overline{cba}$ đều là các số nguyên tố.

22. Gọi E là trung điểm cạnh CD của hình vuông ABCD. Biết diện tích hình vuông bằng 144 cm^2. Tính diện tích phần tô đậm.



23. Cho 13 hình tròn được sắp xếp thành 3 hàng, mỗi hàng có 5 hình, như hình bên. Điền 13 số nguyên dương đầu tiên vào 13 hình tròn đó sao cho mỗi hình tròn chỉ chứa đúng một số và tổng của 5 số ở mỗi hàng bằng tổng của 7 số nằm ở 7 hình tròn tô đậm. Tìm giá trị lớn nhất có thể của tổng 6 số được điền ở 6 hình tròn có đánh dấu ×.



24. Trong một buổi tiệc, ngoại trừ Hà, hai người bất kì đều bắt tay nhau. Hà chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng mỗi cặp hai người chỉ bắt tay nhau không quá một lần và có tổng cộng 420 lần bắt tay. Hỏi Hà có bao nhiêu người quen trong buổi tiệc?

Kết quả

Giải toán qua thư

Bài 1(190). Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho $a^{c-b} + c$ và $c^a + b$ đều là số nguyên tố.

Lời giải. Ta có $a^{c-b} + c$ và c đều là các số tự nhiên nên a^{c-b} cũng là số tự nhiên.

Suy ra $c \geq b$.

✻ Nếu c = 2 thì $a^{c-b} = a^{2-b}$ là số lẻ vì nếu a^{2-b} là số chẵn thì $a^{2-b} + c$ là số chẵn lớn hơn 2, không là số nguyên tố.

Do đó $b \leq 2$, mà b là số nguyên tố nên b = 2. Suy ra $c^a + b = 2^a + 2$ là hợp số (loại).

✻ Nếu c > 2 thì c là số lẻ. Suy ra a, b là số chẵn, do đó a = b = 2.

• Nếu $c \not\vdots\, 3$ thì c^2 chia cho 3 dư 1 suy ra $c^2 + 2$ chia hết cho 3.

Vì $c^2 + 2 > 3$ nên $c^2 + 2$ là hợp số (loại).

• Nếu $c \,\vdots\, 3$ thì c = 3.

Suy ra $a^{c-b} + c = 5$ và $c^a + b = 11$ (thỏa mãn).

Vậy a = b = 2 và c = 3.

Nhận xét. Đây là bài toán hay thuộc chương trình số học lớp 6 nên có rất nhiều bạn tham gia và giải đúng. Các bạn sau có cách trình bày ngắn gọn: *Trần Gia Huy*, *Nguyễn Thái Phương Thảo,* 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Bảo Châu*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Sĩ Bách*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(190). Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho a < b < c và b – a, c – b và c – b + a cũng là số nguyên tố.

Lời giải. Ta có số nguyên tố nhỏ nhất là 2 và là số nguyên tố chẵn duy nhất.

Vì a < b < c nên b và c đều là số lẻ.

Suy ra c – b là số nguyên tố chẵn, do đó c – b = 2.

✻ Nếu a = 2 thì c – b + a = 4 (loại).

✻ Nếu a = 3 thì b – a là số nguyên tố chẵn nên b – a = 2, suy ra b = 5. Khi đó c – 5 là số nguyên tố chẵn nên c – 5 = 2, suy ra c = 7.

Ta được các số 3; 5; 7 thỏa mãn.

✻ Nếu $a = 3k + 1 > 3$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ thì b – a = 2

$\Rightarrow b = 3k + 3 \,\vdots\, 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 1$ (loại).

✻ Nếu $a = 3k + 2 > 3$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ thì b – a = 2

$\Rightarrow b = 3k + 4$.

Mà $c - b = 2 \Rightarrow c = 3k + 6 \,\vdots\, 3$

$\Rightarrow c = 3 \Rightarrow k = -1$ (loại).

Vậy chỉ có một bộ ba số (a; b; c) thỏa mãn bài toán là (3; 5; 7).

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Thị Lan Hương*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Võ Thị Phương Thảo*, 6A, *Trần Thảo Nguyên*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Đức Học*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Trương Trọng Tấn*, 6A4, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Phú Quang*, 6D, THCS Nhữ

Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.**

CAO VĂN DŨNG

Bài 3(190). Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho

a) $3^m - n! = 1$; b) $3^m - n! = 2$.

Lời giải. Nếu $n \geq 3$ thì $n! \vdots 3$.

Vì $3^m \vdots 3$ (do $m \in \mathbb{N}^*$) nên $3^m - n! \vdots 3$.

Mặt khác 1; 2 đều không chia hết cho 3.

Do đó $n < 3$.

Suy ra $n = 1$ hoặc $n = 2$.

a) ✻ Với $n = 1$ suy ra $3^m = 2$ (loại vì $m \in \mathbb{N}^*$).

✻ Với $n = 2$ suy ra $3^m = 3 \Rightarrow m = 1$.

Vậy $(m; n) = (1; 2)$.

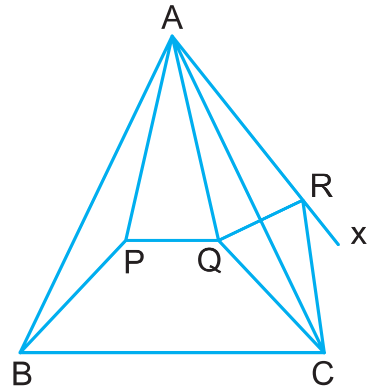
b) Tương tự như trên, ta thấy $(m; n) = (1; 1)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Điểm mấu chốt trong phương pháp giải bài này là chặn giá trị n thích hợp để xét tính chia hết. Đây là bài toán đơn giản và có rất nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Triết Khoa*, *Lê Đức Mạnh*, *Bùi Đàm Quân*, 6C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**; *Nguyễn Trần Ánh Dương*, *Đoàn Minh Đức*, *Võ Thị Minh Huyền*, *Phạm Ngọc Huỳnh*, *Phan Văn Phúc*, *Võ Thị Phương Thảo*, 6A, *Trần Đức Huy*, 7A, *Trần Gia Huy*, *Nguyễn Thị Kim Tuyến*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Minh Thái*, 6D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Sĩ Bách*, *Nguyễn Hằng Nga*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Thị Nguyệt Minh*, 7A, *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Xuân Thịnh*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Trương Ngọc Thu Trang*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Vũ Minh Nguyệt*, 7E, *Nguyễn Duy Khánh*, 7G, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Tập thể lớp 7B, 7C*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Tập thể lớp 6A3*, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

VÕ QUỐC BÁ CẨN

Bài 4(190). Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm P, Q nằm trong tam giác sao cho $\widehat{APB} = \widehat{AQC}$ và AP = AQ. Chứng minh rằng PQ // BC.

Lời giải.



Kẻ tia Ax về phía ngoài tam giác ABC sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAP}$. Trên tia Ax lấy điểm R sao cho $AR = AP$.

Khi đó $\Delta ARC = \Delta APB$ (c.g.c) $\Rightarrow CR = BP$. (1)

Và $\widehat{ARC} = \widehat{APB} = \widehat{AQC}$.

Vì $AR = AP = AQ$ nên ΔAQR cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AQR} = \widehat{ARQ} \Rightarrow \widehat{CRQ} = \widehat{CQR}$.

Suy ra ΔCQR cân tại C $\Rightarrow CR = CQ$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $BP = CQ$.

Suy ra $\Delta AQC = \Delta APB$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{ACQ}$, kết hợp với $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ta được $\widehat{PBC} = \widehat{QCB}$. (3)

Mặt khác tam giác APQ cân tại A nên $\widehat{APQ} = \widehat{AQP}$, kết hợp với $\widehat{APB} = \widehat{AQC}$ ta được $\widehat{BPQ} = \widehat{CQP}$. (4)

Ta lại có

$\widehat{PBC} + \widehat{QCB} + \widehat{CQP} + \widehat{BPQ} = 360^o$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra

$$\widehat{PBC} + \widehat{BPQ} = \frac{360^o}{2} = 180^o \Rightarrow PQ \,//\, BC.$$

Nhận xét. Nhiều bạn còn ngộ nhận trường hợp bằng nhau của hai tam giác APB và AQC. Các bạn sau có lời giải đúng: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Ngô Thị An Bình*, 7E, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

HỒ QUANG VINH

Bài 5(190). Cho tổng

$$A=\frac{1}{2^3+3}+\frac{1}{3^3+4}+\frac{1}{4^3+5}+\dots+\frac{1}{2018^3+2019}.$$

Hãy so sánh A với $\frac{1}{6}$.

Lời giải. Với $n\in\mathbb{N}^*, n>1$ ta có

$$\frac{1}{n^3+n+1}<\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{n(n^2-1)}=\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Do đó

$$A=\frac{1}{2^3+3}+\frac{1}{3^3+4}+\dots+\frac{1}{2018^3+2019}$$

$$<\frac{1}{11}+\frac{1}{31}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}-\dots-\frac{1}{2018.2019}\right)$$

$$=\frac{1}{11}+\frac{1}{31}+\frac{1}{24}-\frac{1}{2.2018.2019}$$

$$<\frac{1}{11}+\frac{1}{30}+\frac{1}{24}=\frac{73}{440}<\frac{1}{6}.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn gửi bài về tòa soạn và đều làm đúng. Các bạn sau có lời giải gọn gàng, chặt chẽ: *Vũ Minh Đức*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Ngân Giang*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội**; *Bạch Bùi Nguyệt Anh*, *Trần Trung Thành*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Lê Hải Phong*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Hoàng Bá Hữu*, 6/2, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài 6(190). Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x+2}=x^3+9x^2+26x+28.$$

Lời giải: Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{2x+2}=(x+3)^3-x+1.$$

Đặt $\sqrt[3]{2x+2}=y+3$ ta được:

$$\begin{cases}(y+3)^3=2x+2\\(x+3)^3-x+1=y+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y+3)^3=2x+2 \ (1)\\(x+3)^3=x+y+2 \ (2)\end{cases}$$

Trừ theo vế của (1) và (2) ta thu được

$$(y-x)\left[(y+3)^2+(y+3)(x+3)+(x+3)^2\right]=x-y$$

$$\Leftrightarrow(y-x)\left[(y+3)^2+(y+3)(x+3)+(x+3)^2+1\right]=0.$$

Vì $(y+3)^2+(y+3)(x+3)+(x+3)^2+1>0$ nên ta có $y=x$.

Thay $y=x$ vào (1) ta được $(x+3)^3=2x+2$

$\Leftrightarrow x^3+9x^2+27x+27-2x-2=0$

$\Leftrightarrow x^3+9x^2+25x+25=0$

$\Leftrightarrow (x+5)(x^2+4x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=-5$ (vì $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0\ \forall x$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-5$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Lê Ngọc Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Nội**; *Bạch Bùi Nguyệt Anh, Trần Trung Thành*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Đào*

Quỳnh Hương, 9A1, THCS Mộc Ly, Mộc Châu, **Sơn La**; *Trương Ngọc Tân*, 9D, *Lê Đức Chính*, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hoá, **Thanh Hoá**; *Nguyễn Hoàng Tùng*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong; *Nguyễn Tiến Tuân*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Trần Thị Yến Khanh*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Lương Minh Hiếu,* 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Cảnh Mạnh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phạm Ngọc Trinh*, 8B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Trần Anh Tuấn*, 9C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

BÙI MẠNH TÙNG

Bài 7(190). Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 3$ sao cho có thể điền các số thực vào các ô của bảng vuông $n \times n$ ô thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) Tổng các số trong một hình vuông 2×2 bất kì là một số dương;

2) Tổng các số trong một hình vuông 3×3 bất kì là một số âm.

Lời giải. ∗ Với $n = 3$ ta có hình vuông 3×3 và dễ thấy cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán, chẳng hạn như hình vẽ dưới đây:

1	2	0
–3	4	–5
–2	2	0

∗ Với $n \geq 4$, ta xét hình vuông 4×4 bất kì của bảng ô vuông đó và giả sử có cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán như hình vẽ sau:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

Tổng tất cả các số trong tất cả các hình vuông 2×2 của bảng 4×4 là:

$S = (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) + ... + (a_{33} + a_{34} + a_{43} + a_{44})$

$S = a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13} + a_{14} + 2a_{21} + 4a_{22} + 4a_{23} + 2a_{24} + 2a_{31} + 4a_{32} + 4a_{33} + 2a_{34} + a_{41} + 2a_{42} + 2a_{43} + a_{44}$.

Tổng tất cả các số trong tất cả các hình vuông 3×3 của bảng 4×4 là:

$T = (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}) + ... + (a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{42} + a_{43} + a_{44})$

$T = a_{11} + 2a_{12} + 2a_{13} + a_{14} + 2a_{21} + 4a_{22} + 4a_{23} + 2a_{24} + 2a_{31} + 4a_{32} + 4a_{33} + 2a_{34} + a_{41} + 2a_{42} + 2a_{43} + a_{44}$.

Ta thấy $S = T$ (vô lí vì theo đề bài S là số dương và T là số âm).

Do đó điều giả sử là sai.

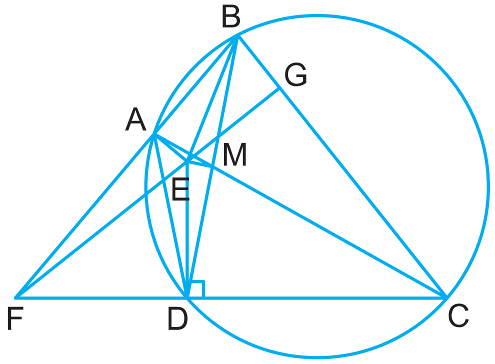
Vậy $n = 3$ là giá trị duy nhất thỏa mãn bài toán.

Nhận xét. Đây là bài toán khá thú vị, có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn, tuy nhiên có rất ít bạn giải đúng. Các bạn sau có lời giải chính xác, trình bày sạch đẹp: *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 8(190). Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và thỏa mãn $\overset{\frown}{BCD} < 90^o$, đường chéo AC đi qua trung điểm M của đường chéo BD. Qua D kẻ đường thẳng b vuông góc với DC, đường b cắt đường trung trực của BD tại E. Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại F. Chứng minh rằng hai đường thẳng BC và EF vuông góc với nhau.

Lời giải. Gọi G là giao điểm của EF với BC.



Ta có $\widehat{EDC} = 90^o$.

Vì E thuộc đường trung trực của BD nên tam giác EBD cân tại E.

Do đó

$\widehat{MEB} = \widehat{MED} = 90^o - \widehat{EDM} = \widehat{CDM} = \widehat{CAB}$.

Suy ra tứ giác ABME nội tiếp đường tròn.

Ta lại có $\widehat{BME} = 90^o$ nên tứ giác ABME nội tiếp đường tròn đường kính BE. (1)

Suy ra $\widehat{EAB} = 90^o \Rightarrow \widehat{EAF} = 90^o = \widehat{EDF}$.

Từ đó suy ra tứ giác AEDF nội tiếp đường tròn đường kính EF.

Kết hợp với tứ giác ABCD nội tiếp ta được $\widehat{AEF} = \widehat{ADF} = \widehat{ABC}$.

Suy ra tứ giác AEGB nội tiếp. (2)

Từ (1), (2) suy ra G nằm trên đường tròn đường kính BE.

Do đó $\widehat{EGB} = 90^o$.

Vậy EF vuông góc BC tại G.

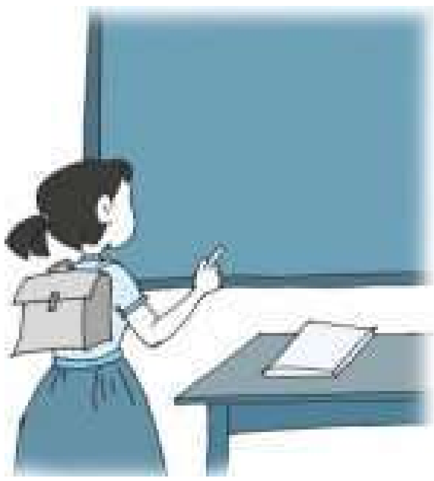
Nhận xét. Đây là một bài chứng minh tứ giác nội tiếp khá hay và vận dụng các kết quả tính góc mà không phải dùng đến các hệ thức lượng. Các bạn sau có lời giải tốt: *Trần Trung Thành*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Lê Văn Quang Trung*, *Nguyễn Mạnh Cảnh*, *Nguyễn Đức Bảo Hoàng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Ngọc Phước*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 9A1, THCS Yên Phong; *Nguyễn Tiến Tuân*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

TRẦN QUANG HÙNG

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Nguyễn Anh Thư, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 7/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Lê Ngọc Tùng, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai*, **Hà Nội**; *Nguyễn Tiến Tuân*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Ngô Thị An Bình*, 7E, *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Trung Thành*, 9E, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 7A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Trần Gia Huy*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trương Ngọc Thu Trang*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Lương Minh Hiếu*, 8C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.



Kì này QUA MẤY ĐIỂM CỐ ĐỊNH?

Bài toán. Hà vẽ đoạn thẳng AC và một điểm B chuyển động trên đoạn thẳng AB. Về một phía của đường thẳng AC, vẽ hai tam giác ABI cân tại I và tam giác BCK cân tại K sao cho hai góc I và K bù nhau. Hà băn khoăn không biết đường tròn qua B, I, K đi qua mấy điểm cố định.

Ý kiến của bạn thế nào?

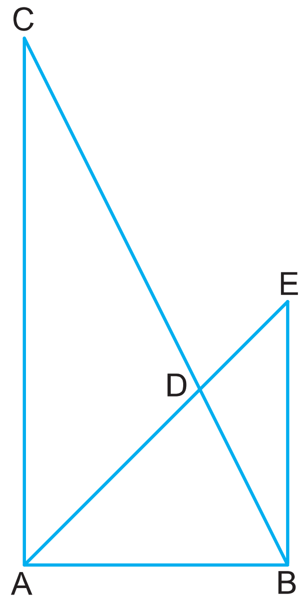
PHẠM TUẤN KHẢI

(Số 29, ngõ 67, đường Giáp Bát, Q. Hoàng Mai, Hà Nội)

Kết quả **(TTT2 số 190)**

CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Lời giải.



Từ B vẽ đường vuông góc với AB cắt tia AD tại E.

Tam giác vuông EBA cân tại B do góc $\widehat{EAB} = 45^o$.

Vì $BE = BA = \sqrt{2}$ nên $AE = 2$

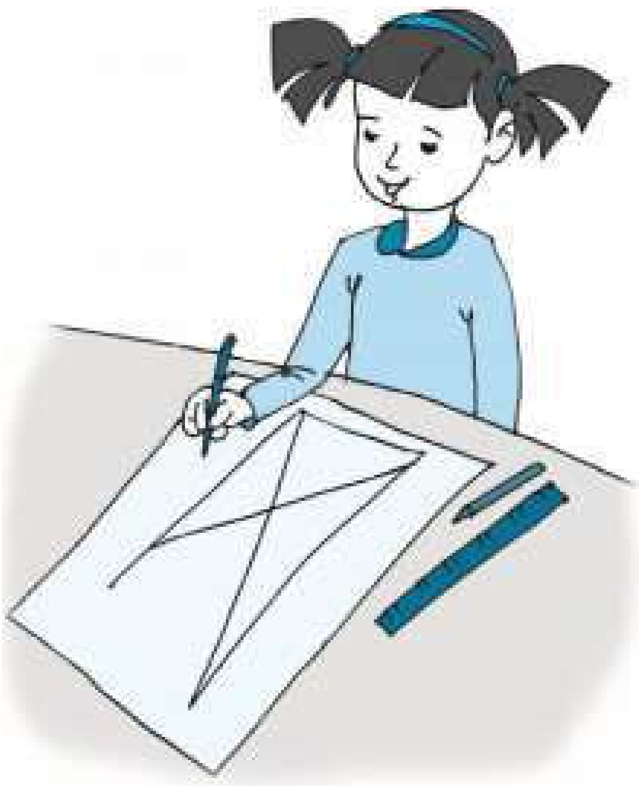
Mặt khác vì $BE = \frac{1}{2}AC$ và AC // BE (cùng vuông góc với AB) nên theo định lí Thales, ta có $AD = 2DE$.

Từ $AE = 2$, ta có $d = AD = \frac{2}{3}AE = \frac{4}{3}$ là số hữu tỉ.

Do $d = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$ nên Vui đã khẳng định sai.

Nhận xét. Các bạn sau làm đúng và được nhận quà: *Trần Công Hưng*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Nguyễn Kim Trung Đức*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Khoái Khê, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Võ Trần Ngọc Hữu*, 8/1, THCS Lý Tự Trọng, Tiên Kỳ, Tiên Phước, **Quảng Nam**; *Trần Anh Vũ*, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương**; *Nguyễn Nhật Minh*, 8A, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

VŨ ĐÌNH HÒA



ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

THÁI NHẬT PHƯỢNG

Kì 23

CLB1. Given that p, q are prime numbers both greater than 3 and p – q = 10. What is the remainder when (p + q) divided by 24?

CLB2. Find the positive values of a and b so that $a^3+b^3=\frac{1}{4}$ and (a + b) is an integer.

CLB3. Solve the equation $x^4 + 8x + 8 = 0$.

CLB4. Given that $a=\frac{xy}{1-y}$, $b=\frac{y}{xy-1}$, $c=\frac{1}{y(1-x)}$

(where $x \neq 1$, $y \neq 0$, $y \neq 1$, $xy \neq 1$).

Show that (ab + bc + ca) does not depend on x, y, z.

CLB5. Given a quadrilateral ABCD with E being on side CD and AE // BC, BE // AD.

Show that $2S_{ABE} \leq S_{ADE} + S_{BCE}$.

ĐỖ ĐỨC THÀNH *(dịch)*

Kết quả Kì 21 (TTT2 số 190)

CLB1. $M=\left(1+\frac{7}{9}\right)\left(1+\frac{7}{20}\right)\left(1+\frac{7}{33}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{7}{10800}\right)$

$=\frac{16}{9}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{40}{33}\cdot\ldots\cdot\frac{10807}{10800}=\frac{16.27.40.\ldots10807}{9.20.33.\ldots.10800}$

$=\frac{(2.8)(3.9)(4.10).\ldots.(101.107)}{(1.9)(2.10)(3.11).\ldots.(100.108)}=\frac{101.8}{1.108}=7\frac{13}{27}.$

CLB2. Ta có $(a^3-3ab^2)^2+(b^3-3a^2b)^2$

$=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=(a^2+b^2)^3.$

Do đó $(b^3-3a^2b)^2$

$=(a^2+b^2)^3-(a^3-3ab^2)^2=2197-81=2116.$

Vậy $|b^3-3a^2b|=\sqrt{2116}=46.$

CLB3. $38x^3=x^2+3x+3$

$\Leftrightarrow 342x^3=9x^2+27x+27$

$\Leftrightarrow 343x^3=x^3+9x^2+27x+27$

$\Leftrightarrow (7x)^3=(x+3)^3 \Leftrightarrow 7x=x+3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

CLB4. Gọi 3 số cần tìm là x, y, z

$(x,y,z\in\mathbb{N}^*,\ x\geq y\geq z).$

Theo đầu bài ta có $xyz=x+y+z+9$

Nếu $z\geq 3$ thì $xyz\geq x.3.3=6x+3x$

$\geq 18+3x\geq 18+x+y+z>x+y+z+9.$

Vậy $z\leq 2$. Mà $z\in\mathbb{N}^*$, nên $z=1$ hoặc $z=2$.

- Xét $z=1$ ta có

$xy=x+y+10 \Leftrightarrow xy-x-y+1=11$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=11.$

Do vậy $x=12$, $y=2$.

- Xét $z=2$ ta có

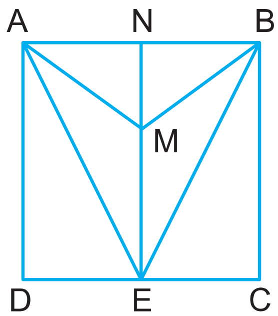
$2xy=x+y+11 \Leftrightarrow 4xy-2x-2y+1=23$

$\Leftrightarrow (2x-1)(2y-1)=23.$

Không có x, y $\in\mathbb{N}^*$ với $x\geq y\geq z$ thỏa mãn bài toán trong trường hợp này.

Vậy ba số nguyên dương cần tìm là 12; 2; 1.

CLB5.



Gọi N là giao điểm của EM và AB. Xét ΔDAE và ΔCBE có AD = BC, $\widehat{ADE}=\widehat{BCE}$ (= 90°), DE = CE.

Do đó $\Delta DAE=\Delta CBE$ (c.g.c) $\Rightarrow EA=EB$.

Mà MA = MB nên E, M cùng thuộc đường trung trực của AB. Suy ra $MN\perp AB$,

$AN=BN=\frac{AB}{2}=8$ (cm), $NE=AD=16$ (cm).

ΔNAM vuông tại N $\Rightarrow AN^2+MN^2=AM^2$.

Mà $MN=NE-ME=16-MA$.

Do đó $8^2+(16-MA)^2=MA^2 \Rightarrow MA=10$ (cm).

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt và được thưởng kì này là: *Nguyễn Hưng Phát, Trần Ngọc Khiêm*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Công Hưng, Lương Khánh Toàn*, 9A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**; *Trần Anh Vũ*, 8A, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, **Hải Dương.**

THIỀU QUANG TÙNG

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

HUỲNH THANH TÂM
Bưu điện An Nhơn, Bình Định

Bài toán. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 9y = 6 & (1) \\ x + my = 2 & (2) \end{cases}$ (với m là tham số).

Tìm các giá trị m để hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải. Từ phương trình (2) của hệ đã cho suy ra $x = 2 - my$, thay vào phương trình (1) ta được

$$m(2 - my) + 9y = 6 \Leftrightarrow y(9 - m^2) = 6 - 2m. \quad (3)$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi phương trình (3) vô nghiệm.

Suy ra $9 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Vậy $m = \pm 3$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Các bạn có ý kiến gì khác không?

Kết quả (TTT2 số 190)

LỜI GIẢI CÓ ĐÚNG KHÔNG?

Lời bàn. Ta thấy dấu đẳng thức ở (1), (2) trong lời giải số 190 đồng thời xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 1 \\ x = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{4}{x} = y. \end{cases} \quad \text{(Hệ này vô nghiệm).}$$

Vậy lời giải trong số 190 là lời giải sai.

Sau đây là lời giải đúng.

Dễ thấy $M > 0$, kết hợp với giả thiết $1 \geq x + \dfrac{1}{y}$, ta có

$$M \geq \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{4}{x} + y\right) = 5 + \left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

$$\geq 5 + 2\sqrt{xy.\frac{4}{xy}} = 9.$$

Từ đó $M \geq 9$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Vậy Min M = 9 khi và chỉ khi $\begin{cases} y = 3 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Nhận xét. Đây là bài toán hay. Học sinh có thể phát hiện ra chỗ sai nhưng không dễ đưa ra lời giải đúng. Khá nhiều bạn tham gia giải và có lời giải tốt, với các cách giải đa dạng. Các bạn sau có lời giải tốt, đầy đủ và chặt chẽ được thưởng kì này: *Dương Hồng Sơn*, 8C1, THCS Archimedes Academy, **Hà Nội**; *Nguyễn Tiến Tuân*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; *Nguyễn Trung Hoàng*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Hưng Phát*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Anh Thư*, 6A3, THCS Kế An, Kế Sách, **Sóc Trăng**.

Hai bạn sau được khen kì này: *Phạm Thị Khánh Huyền*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Nguyễn Nhật Minh*, 8A, THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam, Cầu Giấy, **Hà Nội**.

VI MẠNH TƯỜNG

VỤ ÁN LIÊN QUAN TỚI SỐ TÀI KHOẢN 2018+1

TRẦN PHƯƠNG NAM

(Ghi theo câu chuyện của thám tử Sê Lốc Cốc)

Đêm qua, thị trưởng thành phố bị một tên trộm không hiểu bằng cách nào lẻn vào nhà cuỗm đi một số tiền lớn. Quá tiếc số tiền đã mất ông bàn với vợ:

- Chúng ta không thể báo cảnh sát về vụ này vì ta không thể khai ra nguồn gốc của số tiền mà anh vừa nhận lúc chập tối.

Bà vợ vội vàng hỏi:

- Số tiền có nhiều không anh? Tại sao anh lại không nói với em?

Thị trưởng buồn bã:

- Khi đó em không ở nhà và anh cũng không hiểu vì sao tên trộm lại có thể biết được nơi anh cất số tiền. Em về lại mệt mỏi và đi ngủ ngay nên anh cũng chưa kịp nói với em. Anh cũng chưa kịp mở ra xem nữa…

Vợ thị trưởng thẫn thờ nghi hoặc:

- Thế thì chính là mấy người đưa tiền cho anh rồi… hoặc kẻ trộm có liên quan tới chúng!

Ngài thị trưởng lại tủ rượu, lấy một chai rót vào chiếc ly rồi uống cạn. Ông ta gật đầu nhìn vợ:

- Em dự đoán giống anh lắm! Nhưng quan trọng là bây giờ phải làm gì… Ta im lặng coi như “của thiên, trả địa” hoặc ta phải dùng thám tử tư thôi!

Bà vợ reo lên:

- Em sẽ nhờ thám tử Sê Lốc Cốc, chỉ cần chúng ta cho anh ta một khoản hậu hĩnh là ổn! Em sẽ gọi điện cho anh ta ngay.

Một lúc sau Sê Lốc Cốc đã có mặt. Ngài thị trưởng rót một ly rượu đưa cho thám tử rồi rót đầy ly của mình, thong thả nói:

- Biết danh tiếng thám tử từ lâu nhưng chưa bao giờ nhờ… Bây giờ là lúc thám tử hãy giúp tôi. Điều quan trọng là lấy lại được số tiền mà tên trộm đã lấy trong đêm qua.

Sê Lốc Cốc cười:

- Khi bà nhà chưa gọi thì tôi đã biết vụ này.

Cả hai vợ chồng ngài thị trưởng ngạc nhiên chưa kịp nói gì thì thám tử đã rút từ túi áo ra một tờ giấy và nói:

- Đây là lá thư mà tên trộm đã nhét vào hộp thư nhà tôi mà tôi nhận được nó lúc tôi mới ngủ dậy.

Vừa nói, thám tử vừa đưa tờ giấy cho ngài thị trưởng. Nội dung lá thư khá lạ lùng:

" Chào nhà thám tử lừng danh!

Ông đã khi nào nhận được lời tự thú của một kẻ trộm khi mà ông còn chưa biết đến vụ mất cắp? Chắc chắn đây là lần đầu tiên của đời thám tử của ông và khó có lần thứ hai.

Tôi chỉ là một kẻ trộm "bất đắc dĩ". Tôi đã phát hiện ra là công trình do công ty tôi trúng thầu có sự "bảo kê" của ngài thị trưởng và đổi lại ông chủ của tôi sẽ phải đưa cho thị trưởng một khoản tiền không nhỏ.

Tôi sẽ không nói cho ông bằng cách nào mà tôi phát hiện ra việc này và hơn nữa cũng không nói cho ông thủ phạm lấy số tiền của ông thị trưởng bằng cách nào. Tôi cũng không phải là người dựng chuyện để vu khống ngài thị trưởng vì đó là chuyện quá dại dột!

Tôi chỉ nhờ ông lấy lại số tiền này để nộp lại cho cảnh sát, còn chuyện điều tra toàn bộ sự việc cứ để cảnh sát thực hiện.

Qua đây tôi cũng muốn thử khả năng của thám tử, một khả năng mà thám tử có lẽ chưa được thể hiện bao giờ.

Tôi đã gửi toàn bộ số tiền vào ngân hàng lớn nhất của thành phố với số tài khoản là: 2018 + 1.

Để biết số tài khoản này ông hãy nhìn những phép tính mà cả đời ông chưa được học:

9 + 8 = 17172

7 + 5 = 12235

20 + 19 = 391380

Tôi đã làm giấy uỷ quyền tại ngân hàng cho ông đến nhận số tiền khi ông nói đúng số tài khoản.

Kính chào ông!

Đừng để số tiền đó nằm ở ngân hàng lâu quá nhé!

Tất nhiên cũng đừng phải khen gì tôi! Tôi chỉ là một công dân kỳ lạ thôi…"

Đọc xong lá thư, ngài thị trưởng đờ đẫn:

- Thì ra không phải là vụ trộm bình thường!

Quay lại nhìn thám tử, ngài từ tốn:

- Đây là lần đầu tiên tôi làm sai! Tôi sẽ tự thú!

Sê Lốc Cốc cười:

Tôi tin lời ông nói. Nhưng quan trọng là lấy lại số tiền cái đã nhé!

Bạn có thể giúp thám tử được không?

Kết quả (TTT2 số 190)

Vụ án chiếc dây chuyền vàng

Chị giúp việc có lời khai không trung thực vì ngày ông Mai mất dây chuyền vàng là Chủ Nhật, trong khi Chủ Nhật thì không có người đưa thư nào làm việc cả.

Từ đây suy ra người mà thám tử nghi ngờ chính là chị giúp việc cho nhà ông Mai.

Các "thám tử" nhí sau có lời giải chính xác, chữ viết sạch đẹp được thưởng kì này: *Bùi Quỳnh Hoa*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Kim Tùng Quân*, 8C5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Đào Ánh Nguyệt*, 6A, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thế Sơn*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.

Các "thám tử" sau được khen: *Nguyễn Chí Trung*, 8A2, *Nguyễn Phương Linh, Vũ Văn Lộc*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Hoàng Minh, Hoàng Thị Xuân Mai*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Trần Duy Thành Đạt*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Lê Đức Anh*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

Thám tử Sê Lốc Cốc

CONGRUENT TRIANGLES

TRỊNH HOÀI DƯƠNG - *GV. THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội*
HOÀNG ANH QUÂN - *Cử nhân tài năng toán, Đại học KHTN Hà Nội*

1. Key words

Congruent	*bằng nhau*
Included angle	*góc xen giữa*
Included side	*cạnh xen giữa*
Hypotenuse	*cạnh huyền*
Leg	*cạnh góc vuông*

2. Definition

Two triangles are congruent if they have: exactly the same three sides and exactly the same three angles.

3. Three cases of congruent triangles

Case 1. SSS (Side − Side − Side)

Two triangles with the same three side lengths must be congruent.

Corollary: (Hypotenuse − Leg)

If the hypotenuse and a leg of a right triangle are respectively equal to the hypotenuse and a leg of the second right triangle, then the two triangle are congruent.

Case 2. SAS (Side − Angle − Side)

If two sides and the included angle of one triangle are congruent to two sides and the included angle of a second triangle, then the two triangles are congruent.

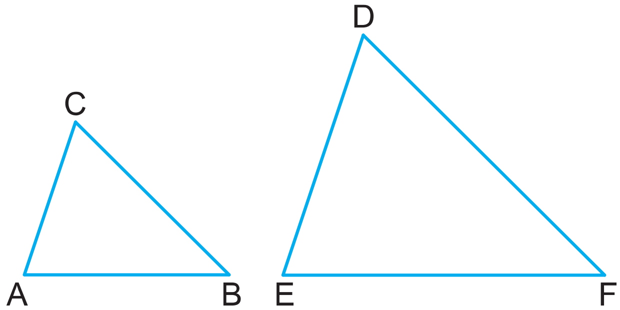
Case 3. ASA (Angle − Side − Angle)

If two anlges and an included side of one triangle are congruent to two angles and the included side of a second triangle, then the two triangles are congruent.

Corollary: Hypotenuse − Adjacent angle

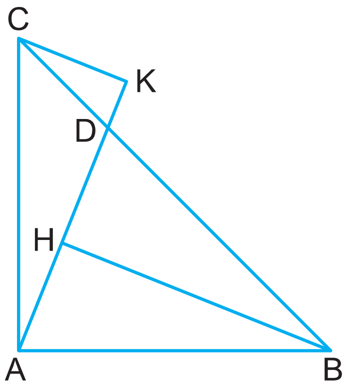
If the hypotenuse and an adjacent angle of a right triangle are respectively equal to the hypotenuse and an adjacent angle of the second right triangle, then the two triangles are congruent.

Remark. There is no AAA case (angle − angle − angle). Because the triangles can have the same angles but be different sizes.



4. Example

Given an isosceles right triangle ABC (with $\angle BAC = 90^o$). Let D be an arbitrary point on segment BC. Denote by H and K be the feet of the altitudes from B and C to AD. Prove that $\Delta ABH = \Delta CAK$.



Solution. We have:

$\angle ABH = 90^o - \angle BAH = \angle CAH$

(since $\angle AHB$ and $\angle CAB$ are right angles).

AB = AC (since ΔABC is an isosceles triangle with $\angle BAC = 90^o$).

They imply $\Delta ABH = \Delta CAK$ (Hypotenuse − Adjacent angle).

5. Homework

Problem 1. Given an isosceles triangle ABC (with AB = AC). Denote by D, E be the midpoints of AC, AB, respectively.

a) Prove that BD = CE.

b) Point I is the intersection of BD and CE. Prove that ray AI is the angle bisector of $\widehat{BAC}$.

c) Let M, N be the points such that D is the midpoint of BM, E is the midpoint of CN. Prove that A is the midpoint of MN.

Các bạn hãy viết lời giải bài toán trên bằng tiếng Anh và gửi về tòa soạn nhé!

Kết quả TRIANGLES

(TTT2 số 190)

Problem 1. Answer: C

Explanation. Triangle ABC has neither any pair of equal sides nor three sides of the same length and it does not have a Pythagorean triple.

Thus, it is a scalene triangle.

Problem 2. By setting $\frac{\angle A}{2} = \frac{\angle B}{3} = r$, we have: $\angle A = 2r; \angle B = 3r$.

Hence, $\angle C = 180^o - (\angle A + \angle B) = 180^o - 5r$.

Since,

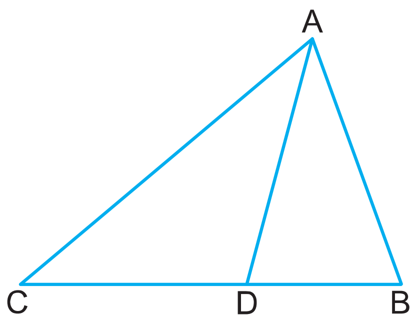
$\angle C - \angle B = 60^o \Leftrightarrow 180^o - 5r - 3r = 60^o$.

$\Leftrightarrow 180^o - 8r = 60^o \Leftrightarrow 8r = 180^o - 60^o = 120^o$

$\Leftrightarrow r = 15^o$.

Thus, $\angle A = 2r = 30^o$.

Problem 3.



In triangle ADC, we have:

$\angle ADC = 180^o - \angle ACD - \angle CAD.$ (1)

In triangle ABD, we have

$\angle ADB = 180^o - \angle ABD - \angle BAD.$ (2)

Since (1) and (2), we have

$\angle ADC - \angle ADB$

$= (\angle ABD - \angle ACD) + (\angle BAD - \angle CAD).$

As AD is the bisector of $\angle BAC$, thus $\angle BAD = \angle CAD \Rightarrow \angle BAD - \angle CAD = 0$.

It implies that

$\angle ADC - \angle ADB = (\angle ABD - \angle ACD) = 30^o$.

In addition, $\angle ADC + \angle ADB = 180^o$ (supplemental angles).

As a result, $\begin{cases} \angle ADC = \dfrac{180^o + 30^o}{2} = 105^o \\ \angle ADB = \dfrac{180^o - 30^o}{2} = 75^o. \end{cases}$

Nhận xét. Các bạn sau đã đưa ra đáp án và lời giải đúng cho cả 3 bài được thưởng kì này: *Nguyễn Phạm Thanh Nga*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Vũ Trần Ngọc Hữu*, 8/1, THCS Lý Tự Trọng, Tiên Kỳ, Tiên Phước, **Quảng Nam**; *Nguyễn Đăng Dương*, 7A4, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình, **Thái Bình**; *Nguyễn Thế Sơn*, 8A1, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**; *Vũ Huy Hiệu*, 8C, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**.

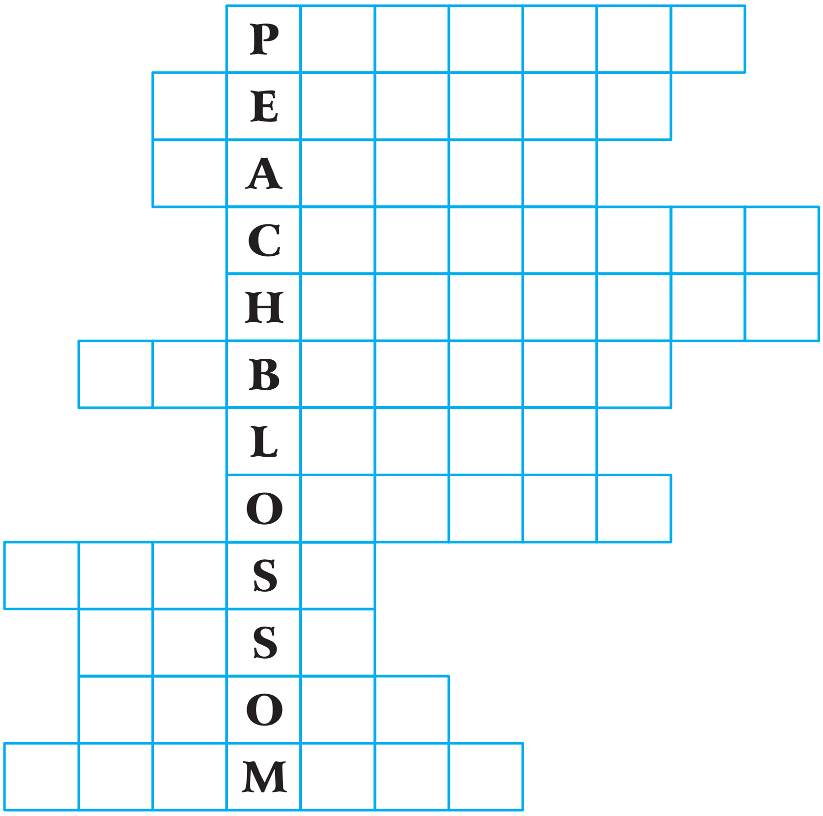
Các bạn sau được khen: *Phạm Vũ Hoàng*, 8A, THCS Lý Tự Trọng, Thị trấn Hương Canh, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Lê Thị Thanh Hằng*, 9A3, THCS Trưng Vương, Mê Linh, **Hà Nội**; *Phạm Hà My, Vũ Ngọc Hiếu*, *Phạm Thu Trang*, 7A4, THCS Lương Thế Vinh, TP. Thái Bình, **Thái Bình**; *Nguyễn Thị Hoài An*, 7B; *Nguyễn Thị Nguyệt Minh*, 7A; *Nguyễn Hoàng Thắng*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Diệu Hằng*, 9/2, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**; *Dương Thị Khánh Linh*, 9A4, THCS Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**.

ĐỖ ĐỨC THÀNH

Ô chữ HOA ĐÀO

NGUYỄN THỊ NHƯ QUỲNH
GV. TH Xuân An, Nghi Xuân, Hà Tĩnh

Tên các loài hoa được giấu bởi các ô chữ, mỗi một hàng ngang là tên của một loài hoa. Điều đặc biệt là một chữ cái trong tên của chúng cùng tạo nên ô chữ **HOA ĐÀO**, bây giờ các bạn cùng tìm xem chúng là những loài hoa gì nhé!



Kết quả Ô chữ LỄ GIÁNG SINH (TTT2 số 190)

Các ô chữ trong kì trước được điền như sau:

- ✻ SOCK: Bít tất
- ✻ CHURCH: Nhà thờ
- ✻ CAROL: Bài hát vào lễ Giáng sinh
- ✻ REINDEER: Con tuần lộc
- ✻ SNOW: Tuyết
- ✻ CHRISTMASTREE: Cây thông
- ✻ CHIMNEY: Ống khói
- ✻ SANTACLAUS: Ông già Noel
- ✻ SLEIGH: Xe kéo

Nhận xét. Năm bạn có bài làm tốt xứng đáng được nhận quà là: *Ngô Phương Linh*, 6C, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Duy Khánh*, 7G, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Công An*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Thị Duyên*, 7A2, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Bùi Thu Huyền*, 9B, THCS Quang Sơn, TP. Tam Điệp, **Ninh Bình**.

Các bạn sau được khen: *Lê Hoàng Sơn*, 6A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Thị trấn Văn Giang, Văn Giang, **Hưng Yên**; *Nguyễn Thị Cẩm Xuyên*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

NGUYỄN MINH THU

9 ĐẲNG THỨC THÚ VỊ TRONG TAM GIÁC VUÔNG

NGUYỄN ĐỨC HUẤN

GV. THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ, Hải Dương

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, (AC > AB). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Gọi K là trung điểm của BC, I là giao điểm của AK và MN. Khi đó ta có 9 đẳng thức sau:

1) $BM.AC + CN.AB = AH.BC$;

2) $AM.MB + AN.NC = BH.HC$;

3) $\sqrt[3]{\dfrac{MB}{NC}} = \dfrac{AB}{AC}$;

4) $BC^2 = 3AH^2 + BM^2 + CN^2$;

5) $BM^2 + CN^2 = BH^2 + CH^2 - AH^2$;

6) $\dfrac{KH}{BH} = 2\left(\dfrac{BK}{AB}\right)^2 - 1$;

7) $AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + \dfrac{BC^2}{2}$;

8) $CN\sqrt{BH} + BM\sqrt{CH} = AH\sqrt{BC}$;

9) $\dfrac{1}{AI} = \dfrac{1}{HB} + \dfrac{1}{HC}$.

Ta sẽ chứng minh các đẳng thức trên

1) Ta có $HM \perp AB$, $CA \perp AB$

$\Rightarrow HM \,//\, AC$.

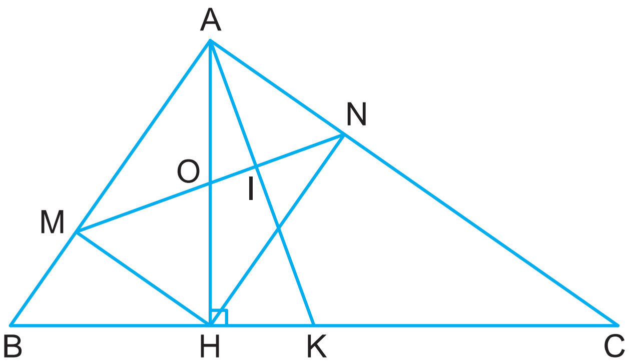
Tương tự $HN \,//\, AB$.

Áp dụng định lí Thales cho tam giác ABC ta có:

$\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BH}{BC}; \ \dfrac{CN}{CA} = \dfrac{CH}{CB}$.

Suy ra

$\dfrac{BM}{AB} + \dfrac{CN}{AC} = \dfrac{BH}{BC} + \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{BH + CH}{BC} = \dfrac{BC}{BC} = 1$



$\Rightarrow \dfrac{BM.AC + CN.AB}{AB.AC} = 1$

$\Rightarrow BM.AC + CN.AB = AB.AC = AH.BC$.

2) Ta có tứ giác AMHN là hình chữ nhật, suy ra $AH = MN$. (1)

Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong các tam giác vuông AHB, AHC ta có

$AM.MB = HM^2$, $AN.NC = HN^2$.

$\Rightarrow AM.MB + AN.NC = HM^2 + HN^2 = MN^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$AM.MB + AN.NC = AH^2 = BH.HC$.

3) Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong các tam giác vuông ABC, AHB, AHC ta có $AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.BC$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BH^2}{CH^2} = \frac{BM.AB}{CN.AC}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{MB}{NC}} = \frac{AB}{AC}.$$

4) Áp dụng định lí Pythagoras vào các tam giác vuông ABC, AMN, MHN ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (BM + AM)^2 + (AN + CN)^2$

$\Rightarrow BC^2 = BM^2 + CN^2 + MN^2 + 2(AM.BM + AN.CN) = BM^2 + CN^2 + MN^2 + 2(MH^2 + NH^2)$

$\Rightarrow BC^2 = BM^2 + CN^2 + 3MN^2$

$= BM^2 + CN^2 + 3AH^2$.

5) Theo phần 4 ta có

$BC^2 = BM^2 + CN^2 + 3AH^2$

$\Rightarrow (BH + CH)^2 = BM^2 + CN^2 + 3AH^2$

$\Rightarrow BM^2 + CN^2 = (BH + CH)^2 - 3AH^2$

$\Rightarrow BM^2 + CN^2 = BH^2 + CH^2 - AH^2$.

6) Trong tam giác vuông ABC có

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{AB^2}{2BK}.$$

Vì $AC > AB \Rightarrow BK = \frac{BC}{2} > \frac{AB^2}{BC} = BH.$

Suy ra

$$KH = BK - BH = BK - \frac{AB^2}{2BK} = \frac{2BK^2 - AB^2}{2BK}$$

$$\Rightarrow \frac{KH}{BH} = \frac{2BK^2 - AB^2}{2BK} \cdot \frac{2BK}{AB^2} = 2\left(\frac{BK}{AB}\right)^2 - 1.$$

7) Áp dụng định lí Pythagoras vào các tam giác vuông AHB, AHC ta có

$AB^2 = AH^2 + HB^2$, $AC^2 = AH^2 + HC^2$.

Suy ra $AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + HB^2 + HC^2$.(3)

Thay HB = BK – HK và HC = CK + HK vào (3) ta được

$AB^2 + AC^2 = 2AH^2 + BK^2 + CK^2 + 2HK^2 - 2HK.BK + 2CK.HK$.

Suy ra $AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + \frac{BC^2}{2}.$

8) Ta có $AB^2 = BH.BC \Rightarrow AB = \sqrt{BH.BC}.$

Tương tự ta có $AC = \sqrt{CH.BC}.$

Mặt khác $\frac{BM}{AB} + \frac{CN}{AC} = 1$ (theo phần 1)

$\Rightarrow CN.AB + BM.AC = AB.AC = AH.BC$

$\Rightarrow CN.\sqrt{BH.BC} + BM.\sqrt{CH.BC} = AH.BC$

$\Rightarrow CN\sqrt{BH} + BM\sqrt{CH} = AH\sqrt{BC}.$

9) Gọi O là giao điểm của AH và MN.

Vì tứ giác AMHN là hình chữ nhật nên tam giác OAM cân tại O.

Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{MAH}$. (4)

Vì AK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông ABC nên AK = KB = KC.

Suy ra $\widehat{KAB} = \widehat{KBA}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra

$\widehat{KAB} + \widehat{AMN} = \widehat{KBA} + \widehat{MAH}$

$\Rightarrow \widehat{IAM} + \widehat{AMN} = \widehat{HBA} + \widehat{MAH} = 90^\circ$

$\Rightarrow AK \perp MN \Rightarrow \Delta AIO \backsim \Delta AHK$ (g.g).

Suy ra $\frac{AO}{AK} = \frac{AI}{AH}.$

Mà $AO = \frac{1}{2}AH$, $AK = \frac{1}{2}BC$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AO}{AK} = \frac{AI}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AI} = \frac{BC}{AH^2} = \frac{BH + CH}{BH.HC} = \frac{1}{BH} + \frac{1}{HC}.$$

MỘT CÁCH PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC THEO NHIỀU HƯỚNG

ĐINH VĂN THƯ

GV. CĐSP Thái Bình, TP. Thái Bình, Thái Bình

Việc tìm tòi, phát triển một bài toán theo các hướng khác nhau sẽ giúp ta tìm ra các bài toán mới đầy thú vị. Bài viết này chúng tôi xin giới thiệu các hướng khai thác cho một bài toán bất đẳng thức.

Bài toán 1. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c.$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{a^3}{b^2}+b+b\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}.b.b}=3a.(1)$$

$$\frac{b^3}{c^2}+c+c\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}.c.c}=3b.(2)$$

$$\frac{c^3}{a^2}+a+a\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2}.a.a}=3c.(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. *Từ lời giải trên ta thấy khi lấy nghịch đảo các số hạng thì kết quả vẫn đúng:*

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^3}.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}}=\frac{3}{b}.(4)$$

$$\frac{b^2}{c^3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{c^3}.\frac{1}{b}.\frac{1}{b}}=\frac{3}{c}.(5)$$

$$\frac{c^2}{a^3}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{a^3}.\frac{1}{c}.\frac{1}{c}}=\frac{3}{a}.(6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 2. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Nhận xét. *Với cách giải tương tự như trên ta có thể đưa ra các dạng biểu thức khác nhau ở vế trái để có những bài toán mới.*

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM:

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b}.b}=2a.\ (1)$$

$$\frac{b^2}{c}+c\ge 2\sqrt{\frac{b^2}{c}.c}=2b.\ (2)$$

$$\frac{c^2}{a}+a\ge 2\sqrt{\frac{c^2}{a}.a}=2c.\ (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c.$$

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c.$$

Tương tự như phát triển từ bài toán 1 sang bài toán 2, từ bài toán 3 ta có:

Bài toán 4. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$

Một câu hỏi đặt ra là khi ta nâng bậc của tử số và mẫu số của bài toán 1 thêm một đơn vị thì sẽ có bất đẳng thức nào? Khi đó vế trái của bất đẳng thức sẽ là

$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}.$

Những cố gắng sử dụng bất đẳng thức AM - GM cho 2 số dương không cho chúng ta những kết quả đẹp nữa. Nghĩ tới bất đẳng thức AM - GM cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^4}{b^3}+a+a\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^3}.a.a}=3\frac{a^2}{b}.(1)$$

$$\frac{b^4}{c^3}+b+b\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^4}{c^3}.b.b}=3\frac{b^2}{c}.(2)$$

$$\frac{c^4}{a^3}+c+c\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^4}{a^3}.c.c}=3\frac{c^2}{a}.(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}+2(a+b+c)\ge 3\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right).(4)$$

Từ bài toán 3: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c.(5)$

Từ (4) và (5) suy ra

$$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\ge a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Do đó ta có bài toán sau

Bài toán 5. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\ge a+b+c.$$

Ta thấy các bài toán trên các phân số đều có bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu đúng 1 đơn vị. Điều gì xảy ra khi số bậc chênh lệch là 2?

Chẳng hạn xét vế trái là: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{b}+b^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3.a^3.b^2}{b^2}}=3a^2.\ (1)$$

$$\frac{b^3}{c}+\frac{b^3}{c}+c^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^3.b^3.c^2}{c^2}}=3b^2.\ (2)$$

$$\frac{c^3}{a}+\frac{c^3}{a}+a^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{c^3.c^3.a^2}{a^2}}=3c^2.\ (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 6. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Ta lại xét vế trái là: $\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^4}{b^2}+b^2\ge 2\sqrt{\frac{a^4}{b^2}.b^2}=2a^2.\ (1)$$

$$\frac{b^4}{c^2}+c^2\ge 2\sqrt{\frac{b^4}{c^2}.c^2}=2b^2.\ (2)$$

$$\frac{c^4}{a^2}+a^2\ge 2\sqrt{\frac{c^4}{a^2}.a^2}=2c^2.\ (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Từ đó ta có bài toán sau

Bài toán 7. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

(Xem tiếp trang 16)

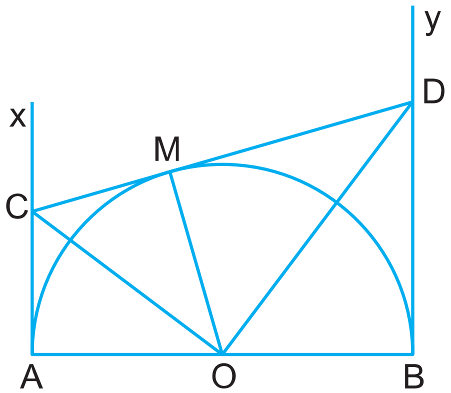
XÂY DỰNG BÀI TOÁN ĐẢO CỦA MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

TRƯƠNG QUANG AN
GV. Trường THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi

Sau khi giải xong một bài toán hình học, việc lật ngược vấn đề của bài toán đôi khi chưa được chú ý nhiều. Bài viết này giới thiệu tới bạn đọc bài toán đảo của hai bài toán hình học trong sách giáo khoa và sách bài tập toán lớp 9.

Bài toán 1. (Bài 30 trang 116 SGK lớp 9 tập một). Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ chứa AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D. Chứng minh rằng

a) $\widehat{COD} = 90^o$ b) $AC + BD = CD$.



Lời giải. a) Ta có CA và CM là hai tiếp tuyến của (O) nên CO là tia phân giác của $\widehat{ACM}$

$\Rightarrow \widehat{OCD} = \dfrac{\widehat{ACD}}{2}$. (1)

Ta có DB và DM là hai tiếp tuyến của (O) nên DO là tia phân giác của $\widehat{BDM}$

$\Rightarrow \widehat{ODC} = \dfrac{\widehat{BDC}}{2}$. (2)

Mà $AC \perp AB$; $BD \perp AB \Rightarrow AC // BD$

$\Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{BDC} = 180^o$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{OCD} + \widehat{ODC} = 90^o$.

Suy ra $\widehat{COD} = 90^o$.

b) Ta thấy AC và BD là hai tiếp tuyến của (O).

Ta có CA và CM là hai tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow$ AC = CM.

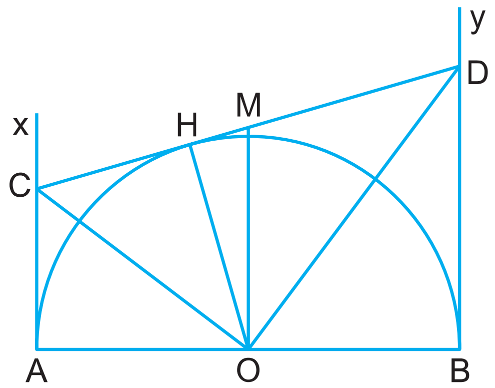
Ta có DB và DM là hai tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow$ BD = DM.

Suy ra CD = CM + DM = AC + BD = CD.

Nhận xét. *Nếu CD là tiếp tuyến của nửa đường tròn đường kính AB thì* $\widehat{COD} = 90^o$ và *CD = AC + BD. Ta đặt câu hỏi ngược lại nếu* $\widehat{COD} = 90^o$ *hoặc CD = AC + BD thì CD có phải là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O đường kính AB không? Ta có hai bài toán đảo sau:*

Bài toán 1.1. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn (O) thuộc nửa mặt phẳng có bờ chứa AB). Trên tia Ax lấy điểm C, trên tia By lấy điểm D sao cho $\widehat{COD} = 90^o$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (O).



Lời giải. Kẻ $OH \perp CD$ ($H \in CD$).

Gọi M là trung điểm của CD. Vì ΔCOD vuông tại O và có OM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên MO = MD.

Suy ra ΔDMO cân tại M $\Rightarrow \widehat{MDO} = \widehat{MOD}$. (1)

Mặt khác AC // BD (cùng vuông góc với AB). Ta lại có M là trung điểm của CD, O là trung điểm của AB nên OM là đường trung bình của hình thang ACDB.

Suy ra OM // DB $\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{BDO}$. (2)

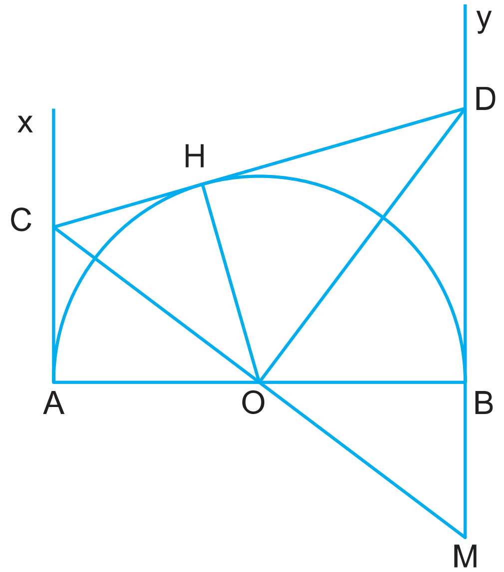
Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ODH} = \widehat{ODB}$.

Suy ra $\Delta OHD = \Delta OBD$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow OH = OB = R \Rightarrow H \in (O)$.

Ta có $OH \perp CD$ ($H \in CD$), $H \in (O)$ nên CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 1.2. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn (O) thuộc cùng nửa mặt phẳng có bờ chứa AB). Trên tia Ax lấy điểm C, trên tia By lấy điểm D, biết rằng AC + BD = CD. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (O).



Lời giải. Kẻ $OH \perp CD$ ($H \in CD$).

Gọi M là giao điểm của CO và DB.

Ta thấy $\Delta AOC = \Delta BOM$ (g.c.g)

$\Rightarrow OM = OC$, $AC = BM$

$\Rightarrow AC + BD = BM + BD = DM$.

$\Rightarrow \Delta DCM$ cân tại D có OM = OC

$\Rightarrow$ DO là tia phân giác của $\widehat{CDM}$.

Suy ra $\Delta HDO = \Delta BDO$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow HO = BO \Rightarrow H \in (O)$.

Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 2. (Bài 55 trang 135 sách bài tập lớp 9 tập 1). Cho đường tròn (O, R) và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm), biết rằng AB vuông góc với AC. Gọi M là điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC. Qua M kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E.

a) Tứ giác ABOC là hình gì?

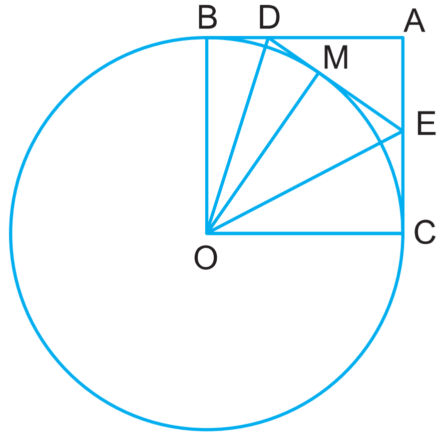
b) Chứng minh rằng chu vi $\Delta ADE = 2R$

c) Tính số đo góc DOE.

Lời giải. a) Ta có $\widehat{ABO} = \widehat{BOC} = \widehat{OCA} = 90^o$ và OB = OC nên tứ giác ABOC là hình vuông.

b) Ta có DE = MD + ME = DB + EC.

Do đó chu vi tam giác ADE bằng AD + AE + DE = AD + AE + DB + EC = AB + AC = 2R.

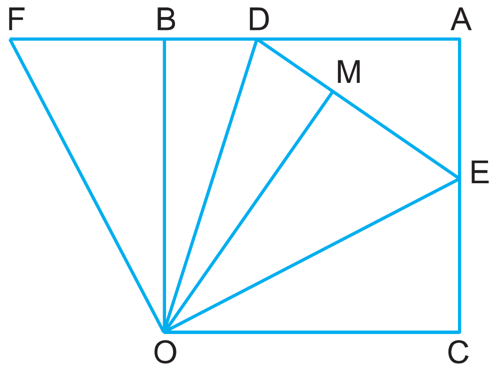


c) Ta có $\widehat{DOM} = \dfrac{\widehat{BOM}}{2}$, $\widehat{EOM} = \dfrac{\widehat{COM}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{DOE} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = \dfrac{90^o}{2} = 45^o$.

Nhận xét. *Từ bài toán trên, ta có bài toán đảo sau:*

Bài toán 2.1. Cho hình vuông OBAC, lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho chu vi tam giác ADE bằng 2AB. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính OB.



Lời giải. Kẻ $OM \perp DE$ ($M \in DE$).

Chu vi tam giác ADE bằng 2AB nên

$AD + AE + DE = 2(AD + DB)$

$\Rightarrow DE = BD + EC$.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho $BF = CE$

$\Rightarrow DE = BD + BF = DF$.

Ta có $\Delta OBF = \Delta OCE$ (c.g.c) $\Rightarrow OE = OF$.

Xét ΔODF và ΔODE có: $OF = OE$, $DF = DE$, OD chung

$\Rightarrow \Delta ODF = \Delta ODE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{FDO} = \widehat{EDO}$.

Suy ra $\Delta OBD = \Delta OMD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow OB = OM$.

Mà $OM \perp DE$ $\Rightarrow DE$ là tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính OB.

Các bài toán đảo từ bài toán 2 sau đây coi như bài tập vận dụng dành cho bạn đọc.

Bài 1. Cho hình vuông OBAC, lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $\widehat{DOE} = 45^o$. Chứng minh rằng DE là tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính OB.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trên cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm I và M sao cho chu vi tam giác IMB bằng 2a. Chứng minh rằng $\widehat{IDM} = 45^o$.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng a. Trên cạnh AB, BC lần lượt lấy các điểm I và M sao cho $\widehat{IDM} = 45^o$. Chứng minh rằng chu vi tam giác IMB bằng 2a.

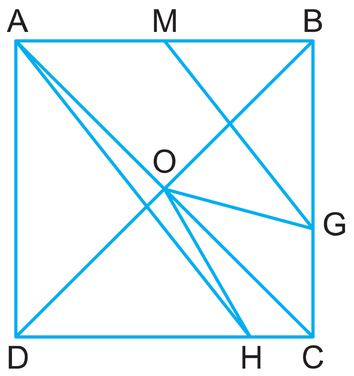
KHAI THÁC TỪ MỘT BÀI TOÁN VỀ HÌNH VUÔNG

VŨ CÔNG MINH

GV. THCS Hồng Bàng, Hải Phòng

Việc tìm tòi, phát triển một bài toán hình học là điều rất cần thiết với mỗi người học toán. Bài viết này giới thiệu một số bài toán khai thác từ một bài toán gốc.

Bài toán 1. Cho hình vuông ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trên các đoạn thẳng BC và CD lần lượt lấy các điểm G và H sao cho $\widehat{GOH} = 45^o$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng AH // GM.



Lời giải. Ta có

$\widehat{DOH} + \widehat{BOG} = 180^o - \widehat{GOH} = 135^o$. (1)

$\widehat{BGO} + \widehat{BOG} = 180^o - \widehat{OBG} = 135^o$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{DOH} = \widehat{BGO}$.

Suy ra $\Delta DOH \backsim \Delta BGO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DO}{BG} = \dfrac{DH}{BO} \Rightarrow DO.BO = DH.BG$. (3)

Ta lại có $AD.MB = 2MB^2 = BO.DO$. (4)

Từ (3), (4) suy ra $DH.BG = AD.MB$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BG} = \dfrac{DH}{BM} \Rightarrow \Delta ADH \backsim \Delta GBM$ (c.g.c)

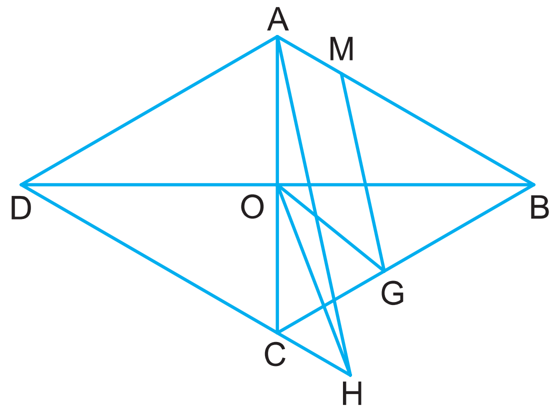
$\Rightarrow \widehat{DHA} = \widehat{BMG}$. (5)

Ta có $\widehat{DHA} = \widehat{BAH}$ (hai góc so le trong). (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{DHA} = \widehat{BMG} \Rightarrow AH // GM$.

Nhận xét. *Từ bài toán 1, thay hình vuông ABCD bằng hình thoi, ta được bài toán sau:*

Bài toán 2. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 120^o$. AC cắt BD tại O. Trên cạnh BC lấy điểm G (G khác B). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho MB = 3MA. Đường thẳng qua A song song với MG cắt DC tại H. Tính $\widehat{GOH}$.



Lời giải. Hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 120^o$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 30^o$

$\Rightarrow AO = \dfrac{AB}{2}$, $BO = DO = \dfrac{\sqrt{3}AB}{2}$

$\Rightarrow AD.MB = AB.\dfrac{3}{4}AB = \dfrac{3AB^2}{4} = DO.BO$. (1)

Vì AH // MG nên $\widehat{BMG} = \widehat{BAH} = \widehat{DHA}$.

Suy ra $\Delta ADH \backsim \Delta GBM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{GB} = \dfrac{DH}{MB} \Rightarrow AD.MB = GB.DH$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $BO.DO = GB.DH$

$\Rightarrow \dfrac{DO}{DH} = \dfrac{GB}{BO} \Rightarrow \Delta DOH \backsim \Delta BGO$ (c.g.c)

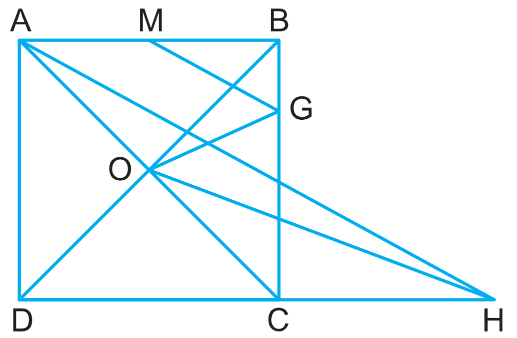
$\Rightarrow \widehat{DOH} = \widehat{BGO} \Rightarrow \widehat{GOH} = 180^o - \widehat{DOH} - \widehat{BOG}$

$= 180^o - \widehat{BGO} - \widehat{BOG} = \widehat{OBG} = 30^o$.

Vậy $\widehat{GOH} = 30^o$.

Nhận xét. *Bằng cách lật ngược vấn đề từ bài toán 1 ta có bài toán mới sau:*

Bài toán 3. Cho hình vuông ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của AB. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm G (G khác B). Đường thẳng qua A song song với MG cắt DC tại H. Tính $\widehat{GOH}$.



Lời giải. Vì M là trung điểm của AB nên ta có $AD.MB = BO.DO$. (1)

Vì AH // GM nên $\widehat{DHA} = \widehat{MAH} = \widehat{BMG}$.

Suy ra $\Delta ADH \backsim \Delta GBM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{GB} = \dfrac{DH}{BM} \Rightarrow AD.MB = GB.DH$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $BO.DO = GB.DH$

$\Rightarrow \dfrac{DO}{GB} = \dfrac{DH}{BO} \Rightarrow \Delta DOH \backsim \Delta BGO$ (c.g.c)

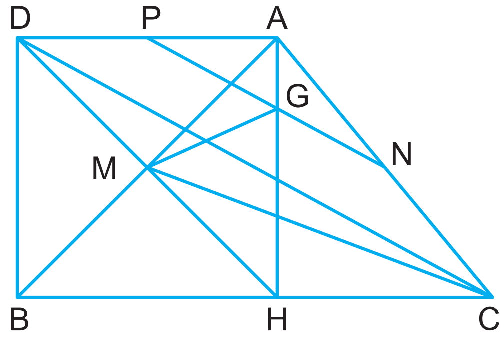
$\Rightarrow \widehat{DOH} = \widehat{BGO} \Rightarrow \widehat{GOH} = 180^o - \widehat{DOH} - \widehat{BOG}$

$= 180^o - \widehat{BGO} - \widehat{BOG} = \widehat{OBG} = 45^o$.

Vậy $\widehat{GOH} = 45^o$.

Nhận xét. *Bài toán 3 ta lấy điểm G sao cho $GB < GC$, G ở vị trí khác so với bài toán 1 dẫn tới điểm H nằm ngoài đoạn thẳng DC. Tuy nhiên các kết quả từ bài toán 1 vẫn không thay đổi. Từ bài toán 3, ta có bài toán sau:*

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{ABC} = 45^o$. Kẻ đường cao AH ($H \in BC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho MD = MH. Đường thẳng qua N và song song với CD cắt AH tại G. Tính $\widehat{GMC}$.



Lời giải. Nối DA, DB.

Tứ giác BDAH có AB và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên BDAH là hình bình hành.

Vì $AH \perp BH$ nên tứ giác BDAH là hình chữ nhật.

Ta lại có $\widehat{ABH} = 45^o$ nên tứ giác BDAH là hình vuông.

Đường thẳng GN cắt đoạn AD tại P.

GN // DC và N là trung điểm của AC nên P là trung điểm của AD.

Chứng minh tương tự bài toán 2 ta được $\widehat{GMC} = 45^o$.

Các bài toán sau được xây dựng từ một trong bốn bài toán nêu trên, xin dành cho bạn đọc tìm ra lời giải.

Bài toán 5. Cho hình vuông ABCD. AC cắt BD tại O. Trên các đoạn thẳng BC và CD lần lượt lấy các điểm G và H sao cho $\widehat{GOH} = 45^o$. Qua G kẻ đường thẳng song song với AH cắt AB tại M. Chứng minh rằng MA = MB.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC đều. Trên đường thẳng kẻ qua B song song với AC lấy điểm P (P và A khác phía so với BC). Gọi M là trung điểm của AB. Trên cạnh AC lấy điểm N sao cho CN = 3AN. Đường thẳng qua N song song với AP cắt BC ở Q. Tính $\widehat{PMQ}$.

Bài toán 7. Cho hình thang ABCD có AB = BD, $\widehat{ABD} = 90^o$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Đường thẳng qua M song song với AC cắt BD tại G. Tính $\widehat{GNC}$.

BÀI TOÁN THƠ "VỪA GÀ - VỪA CHÓ"

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học, Hà Nội)*
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

1. Bài toán - thơ Vừa gà vừa chó trong sinh hoạt dân gian Việt Nam

Bài toán "vừa gà vừa chó" đã đi vào trong sinh hoạt của người Việt dưới dạng toán - thơ, toán đố trong các buổi hát đối (giữa hai bên nam và nữ). Dưới đây là hai phiên bản của bài toán này.

Phiên bản 1. Theo [3], xưa ở vùng Bình Trị Thiên, trai gái thường tụ họp hát thách đố nhau, trong đó có một số bài toán đố dạng thơ. Dưới đây là bài toán đố dạng *vừa gà vừa thỏ*.

Người con gái hát đố:

Bấy lâu ni em mắc việc nhà
Tai nghe phảng phất anh học đà cố công.
"Gà kia thỏ nọ một lồng
Tám mươi ba con
Hai trăm mười tám cái cẳng."
Anh tính mấy gà mấy thỏ cho ra
Kẻo mà cơm mẹ áo cha học hành?

Người con trai hát đối lại:

Hai mươi sáu con thỏ, năm mươi bảy con gà
Khó khăn chi đó mà tính không ra
Để em kể tới cơm áo mẹ cha học hành!

Lời giải. (Theo ngôn ngữ phương trình)

Gọi số gà là x. Khi đó số thỏ là 83 – x.

Theo bài ra ta có $2x + 4(83 - x) = 218$

$\Rightarrow 2x = 114$.

Suy ra số gà là 57 con và số thỏ là 26 con.

Lời bình. Lời giải hiện đại (theo ngôn ngữ phương trình) khá gọn nhẹ, dễ hiểu và phổ quát (áp dụng được cho mọi số liệu đầu vào). Tuy nhiên, chắc các chàng trai xưa đã giải bài toán này theo *phương pháp giả thiết tạm*. Có lẽ đây là một bài toán được nhà nho Việt Nam cải biên từ sách toán Trung Hoa, nên vẫn có dạng *vừa gà vừa thỏ*. Vì vậy có thể suy đoán rằng bài toán đố này được lưu truyền trong dân gian từ trước thế kỉ XX. Con số 83 con (gà và thỏ) và 218 cẳng cũng có lẽ là một sáng tác mới của một nhà nho Việt Nam nào đó ở vùng Bình Trị Thiên, rất có thể đó là sáng tác của nhà toán học, nhà lập lịch, thượng thư Nguyễn Hữu Thận (xem [1]). Chúng tôi chưa biết sách toán Trung Hoa hoặc Việt Nam nào với số liệu này. Nếu tìm hiểu thêm, rất có thể phát hiện thêm nhiều phiên bản (số liệu) khác của bài toán này được thay đổi qua những lần hát đối đáp hoặc trong các sách.

Phiên bản 2. Theo [4], bài toán sau đây được phổ biến trong các buổi *hát đối* tại vùng ven biển Hải Phòng. Người con gái hát:

Gà chó một bó buộc nhau
Băm sáu cái đầu, cẳng được một trăm.
Xin anh tính thử kẻo lầm
Chó gà mỗi thứ, đặng nhầm mấy con?

Người con trai đáp:

Tính ra chó mười bốn con
Còn gà thì được chẵn tròn hăm hai.

Lời bình. Có lẽ câu *bó lại cho tròn* trong các sách hiện nay xuất phát từ *một bó buộc nhàu* trong bài *hát đối* này chăng?

2. Bài toán thơ Vừa gà vừa chó trong sách tiếng Việt

Bài *vừa gà vừa chó* dưới dạng toán - thơ hiện đại có lẽ lần đầu tiên xuất hiện trong *Ca dao Toán học* của Đào Trọng Đủ ([2], 1950, trang 89-93). Sau bài thơ là phần đề bài và lời giải được viết bằng tiếng Pháp và giải thích tỉ mỉ phương pháp giải bằng tiếng Việt nhờ lập hệ phương trình như sau.

Gọi t là số gà và u là số chó. Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} t+u=36 \\ 2t+4u=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+u=36 \\ t+2u=50. \end{cases}$$

Suy ra $u = 14$, $t = 22$.

Chúng tôi chưa tìm được sách báo tiếng Việt nào cũ hơn cuốn *Ca dao Toán học* của Đào Trọng Đủ (1950) có ghi bài toán - thơ này.

Nguyễn Vĩnh Tráng trong [5] có nói đến bài toán thơ *Vừa gà vừa chó* được bạn bè trao cho nhau lúc học Trung học tại Huế. Tuy nhiên, tác giả không nói rõ thời gian. Có lẽ cũng vào khoảng 1950, cùng thời với cuốn sách của Đào Trọng Đủ.

3. Vừa gà vừa chó trong các sách báo hiện nay

Bài toán *Vừa gà vừa chó* đã được định hình trong các sách báo hiện nay như ta biết. Lời giải của bài toán này thường được trình bày theo phương pháp đại số (lập phương trình) cho học sinh lớp 9. Có rất nhiều trang mạng bàn về dạy bài toán *Vừa gà vừa chó* cho học sinh tiểu học (xem [6]), trong đó đầu bài có thay đổi. Thí dụ:

Bài toán 1. (Bài 52 trong [7]) Cả gà và thỏ đếm được 24 cái chân. Số gà bằng số thỏ. Đố bạn biết có mấy con gà và mấy con thỏ.

Có thể lập trình trên Pascal để giải bài toán *Vừa gà vừa chó* (xem [8]). Tuy nhiên, theo chúng tôi, dạy lập trình giải bài toán này (lần lượt cho gà từ 0 đến 36) làm học sinh lười nghĩ, thiếu phân tích lôgic và mất đi sự sáng tạo.

Lời bình. Các tác giả bài viết này thích lời giải số học (phương pháp giả thiết tạm) hơn là lời giải đại số (phương pháp lập phương trình). Theo chúng tôi, *phương pháp giả thiết tạm* cho phép không chỉ dạy bài toán *vừa gà vừa chó* cho học sinh lớp 4, lớp 5 (chưa biết lập và giải phương trình), mà còn giúp học sinh suy luận lôgic và tính nhẩm nhanh. Chắc chắn ngày xưa trong các buổi hát đối, các chàng trai Việt đã phải tính nhẩm nhanh cho ra đáp số theo phương pháp giả thiết tạm, bởi các nhà nho sáng tác các bài toán - thơ này cũng chưa biết ngôn ngữ lập và giải phương trình để *"gà"* cho các chàng trai phe mình.

Thay lời kết. Trong quá trình giao lưu và chuyển dịch văn hóa, trong đó có giao lưu và chuyển dịch văn hóa toán học, người Việt Nam đã tiếp thu, biến đổi và đưa vào trong sinh hoạt bài toán *vừa gà vừa thỏ* có nguồn gốc Trung Hoa sang bài toán dưới dạng toán-thơ *vừa gà vừa chó*, gần gũi với đời sống của người Việt hơn. Bài toán này hiện nay vẫn được lưu truyền trong dân gian, được ghi chép trong nhiều cuốn sách, được giảng dạy từ lớp 5 đến lớp 9, và thường được ghi chú là *Một bài toán cổ* hay *Một bài toán dân gian*.

Tài liệu trích dẫn

[1] Lương An, Nguyễn Hữu Thận *(1757-1831)*, trong *Danh nhân Bình Trị Thiên*, Tập 1, Nhà xuất bản Thuận Hóa, Huế, trang 102-126.

[2] Đào Trọng Đủ, *Ca dao toán học*, Nhà sách Vĩnh Bảo, Sài Gòn, 1950.

[3] Triều Nguyên, *Một số bài toán dân gian được sử dụng trong hát đố xưa*, Huế Xưa & Nay, số 135, 5-6/2016, trang 59-67.

[4] Nguyễn Văn Trung, *Câu đố Việt Nam*, Nhà xuất bản *Tổng hợp* Thành phố Hồ Chí Minh, 2005.

[5] Nguyễn Vĩnh Tráng, *Toán thơ, thơ toán trong dân gian*, chimviet.free.fr/truyenky/nguyenvinhtrang/nvtrn055-thotoan.htm.

[6] Big School, Bàn về dạy và giải bài toán "Vừa gà, vừa chó" ở tiểu học.

[7] https://www.slideshare.net/iHocTiliuTonhc/71-bai-toan-luyen-thi-hoc-sinh-gioi-toan-3-cuc-hay

[8] https://tuanitpro.com/vua-ga-vua-cho-bo-lai-cho-tron-ba-muoi-sau-con-mot-tram-chan-chan-hoi-may-ga-may-cho

RỪNG CƯỜI

Kì này *Cầu gì?*

Cầu gì làm nhớ làng hoa
Cầu gì từ thuở trước qua sông Hồng
Cầu gì muốn có từ không
Cầu gì nhờ vả tây đông việc mình
Cầu gì giúp việc liên minh
Cầu gì ngắt điện gia đình được ngay
Cầu gì cáp tựa cổ tay
Cầu gì nối giữa tầng này, tầng kia
Cầu gì bảy sắc ngàn tia
Cầu gì hai họ cùng chia tin mừng
Cầu gì mong đẻ con cưng
Cầu gì phun lửa sáng trưng sông Hàn
Cầu gì nhận lỗi đã làm
Cầu gì để thấy rõ ràng mấy nơi
Đầu Xuân đến với Rừng cười
Vua Tếu đang đợi mọi người giải thông!

VUA TẾU

Kết quả *Hàng gì?*

Hàng cây tỏa bóng mát đường
Hàng không vận chuyển bốn phương trên trời
Hàng lậu truy bắt tận nơi
Hàng dọc đứng để lưng người sau xem
Hàng quán bán bún bán nem
Hàng Đẫy tên của nơi xem trận cầu
Hàng Cỏ ga đón đoàn tầu
Hàng tồn bán mãi đợi lâu vẫn còn
Hàng ươn đã mất tươi ngon
Hàng mỹ phẩm nước hoa, son, phấn nhiều
Hàng xóm gần biết bao nhiêu
Hàng binh cúi mặt biết điều giơ tay
Thần dân giải đáp tài thay
Không lệch một chữ không sai một dòng
Trẫm vui Trẫm mở tấm lòng
Khắp nơi ban thưởng Trẫm không tiếc gì
Năm cũ cũng đã qua đi
Mừng năm mới đến còn gì vui hơn
Thần dân hưởng ứng nhiều hơn
Gửi bài cho Trẫm trình làng giải ngay.

Nhận xét. Ngoài đáp án mà Vua Tếu nêu ở trên, có những đáp án khác cho một số câu cũng được chấp nhận, chẳng hạn: Thay **hàng lậu** bởi **hàng cấm**, thay **hàng quán** bởi **hàng ăn**, thay **hàng tồn** bởi **hàng ế**, thay **hàng ươn** bằng **hàng ôi**,... Thần dân lưu ý Trẫm hỏi "Hàng gì" nhiều bạn lại trả lời là "đầu hàng" hoặc "nhà hàng",... là chưa thật chuẩn đâu nhé. Vua Tếu sẽ ban thưởng cho năm bạn giỏi nhất trong kì này: *Nguyễn Ngọc Trâm*, 7C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Phương Linh*, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Huy Thành*, 6B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn An*, 7A4, *Nguyễn Hà Trang*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

VUA TẾU

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THẾ ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

ThS. NGUYỄN THANH GIANG
Phó Hiệu trưởng THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên, Hưng Yên

Phương pháp thế thường xuyên được sử dụng khi giải hệ phương trình. Tuy nhiên để sử dụng phương pháp này, ta cần khéo léo để tìm ra mối liên hệ giữa hai ẩn. Bài viết này giới thiệu một số cách để tìm ra mối liên hệ đó.

• Cách 1. Biến đổi một phương trình của hệ ban đầu

Bài toán 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=2. \ (1) \\ x^2-y^2+xy=1. \ (2) \end{cases}$$

Lời giải. Từ (1) suy ra $x = 2 - y$.

Thay $x = 2 - y$ vào (2) ta được:

$(2-y)^2 - y^2 + y(2-y) = 1$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=-3 \Rightarrow x=5. \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$, $(5; -3)$.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2+xy-2x^2=0 \\ 2x^2+y^2+x-y=3. \end{cases}$$

Lời giải. Từ hệ phương trình ban đầu ta có

$$\begin{cases} y^2-x^2+xy-x^2=0 \\ 2x^2+y^2+x-y=3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)(y+2x)=0 \ (1) \\ 2x^2+y^2+x-y=3. \ (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $\left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-2x. \end{array}\right.$

• Nếu $y = x$, thay vào (2) ta được

$\Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

• Nếu $y = -2x$, thay vào (2) ta được

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=2 \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=-1. \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(-1; 2)$, $(\frac{1}{2}; -1)$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy+x=2 \ (1) \\ 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0. \ (2) \end{cases}$$

Lời giải. Từ (2) ta có

$(2x^3 - 2xy) - (x^2y - y^2) + (x^2 - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=2x+1. \end{array}\right.$$

• Nếu $y = x^2$, thay vào (1) ta được

$x^3 + x = 2 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ (do $x^2 + x + 2 > 0$)

$\Leftrightarrow y = 1$.

• Nếu $y = 2x + 1$, thay vào (1) ta được

$x(2x+1) + x = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là

$$(1; 1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2+\sqrt{5}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 2-\sqrt{5}\right).$$

Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (5x+4)(4-x)=y^2 \ (1) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0. \ (2) \end{cases}$$

Lời giải. Từ (2) ta có

$y^2 - 4(x+2)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0$. (3)

Phương trình (3) là phương trình bậc hai của biến y có biệt thức

$\Delta' = 4(x+2)^2 + 5x^2 - 16x - 16 = 9x^2 \geq 0 \ \forall\ x$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2(x+2) + 3x = 5x + 4 \\ y = 2(x+2) - 3x = 4 - x. \end{array}\right.$

- Nếu $y = 5x + 4$, thay vào (1) ta được

$(5x+4)(4-x) = (5x+4)^2$

$\Leftrightarrow -6x(5x+4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = \dfrac{-4}{5} \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

- Nếu $y = 4 - x$, thay vào (1) ta được

$(5x+4)(4-x) = (4-x)^2$

$\Leftrightarrow 6x(4-x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0. \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là (0; 4), (4; 0), $\left(\dfrac{-4}{5}; 0\right)$.

• Cách 2. Từ hệ phương trình ban đầu, tạo ra một phương trình mới để tìm mối liên hệ giữa hai ẩn

Bài toán 5. Giải hệ phương trình

$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \ (1) \\ x + 2y + 4xy = 7 \ (2) \end{cases}$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta được

$(x^2 + 4y^2 + 4xy) + (x + 2y) = 12$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2 + (x+2y) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x + 2y = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = -4 - 2y. \end{array}\right.$

- Nếu $x = 3 - 2y$, thay vào (1) ta được

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2. \end{array}\right.$

- Nếu $x = -4 - 2y$, thay vào (1) ta được

$8y^2 + 16y + 11 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là (1; 1), $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Bài toán 6. Giải hệ phương trình

$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y \\ x^2 - 1 = 3(1 - y^2). \end{cases}$

Lời giải. Từ hệ phương trình ban đầu ta có

$\begin{cases} 4(x^3 - y^3) = 4(4x + 2y) \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^3 - y^3) = (x^2 + 3y^2)(4x + 2y) \ (1) \\ x^2 + 3y^2 = 4. \ (2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra

$4x^3 - 4y^3 = 4x^3 + 2x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

$\Leftrightarrow y(5y^2 + 6xy + x^2) = 0$

$\Leftrightarrow y(x + 5y)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -x \\ x = -5y. \end{array}\right.$

- Nếu $y = 0$, thay vào (2) ta được

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.

- Nếu $y = -x$, thay vào (2) ta được

$x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$

- Nếu $x = -5y$, thay vào (2) ta được

$y^2 = \dfrac{1}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \dfrac{-5\sqrt{7}}{7} \\ y = \dfrac{-\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \dfrac{5\sqrt{7}}{7}. \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là (1; –1), (–1; 1), (2; 0), (–2; 0), $\left(\dfrac{-5\sqrt{7}}{7}; \dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{7}; \dfrac{-\sqrt{7}}{7}\right)$.

• Cách 3. Đặt ẩn phụ để tìm mối liên hệ giữa hai ẩn

Bài toán 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2-1}+3y=-2x\\ x^2y+y^3=2x+4y.\end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x^2 + y^2 \neq 1$.

- Nếu $x = 0$ thì $y = 0$, ta có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$.
- Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$, từ hệ ban đầu ta có

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2-1}+3\dfrac{y}{x}=-2\\ x^2+y^2-2\dfrac{x}{y}=4.\end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + y^2$ $(u > 0)$ và $v = \dfrac{x}{y}$ ta được hệ

$$\begin{cases}\dfrac{1}{u-1}+\dfrac{3}{v}=-2\\ u-2v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4v^2+13v+9=0\\ u=4+2v\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=-1\Rightarrow u=2\\ v=\dfrac{-9}{4}\Rightarrow u=\dfrac{-1}{2}\ (\text{loại do } u>0).\end{array}\right.$$

Với $u = 2$ và $v = -1$ ta tìm được hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; -1)$ và $(-1; 1)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$.

Bài toán 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}xy+x+1=7y\\ x^2y^2+xy+1=13y^2.\end{cases}$$

Lời giải. • Nếu $y = 0$ thì không tồn tại x thỏa mãn.

- Nếu $y \neq 0$, từ hệ ban đầu ta có

$$\begin{cases}x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7\\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13.\end{cases}$$

Đặt $u = x + \dfrac{1}{y}$, $v = \dfrac{x}{y}$, ta được hệ

$$\begin{cases}u+v=7\\ u^2-v=13.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được các nghiệm $(u; v)$ là $(4; 3)$, $(-5; 12)$.

* Với $u = 4$, $v = 3$ ta được $(x; y) = (3; 1)$.
* Với $u = -5$, $v = 12$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(3; 1)$.

Bài toán 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x(x+y)+y^2=4x-1\\ x(x+y)^2-2y^2=7x+2.\end{cases}$$

Lời giải. • Nếu $x = 0$ thì không tồn tại y thỏa mãn.

- Nếu $x \neq 0$, từ hệ phương trình ban đầu ta có

$$\begin{cases}x(x+y)+y^2+1=4x\\ x(x+y)^2-2(y^2+1)=7x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)+\dfrac{y^2+1}{x}=4\\ (x+y)^2-\dfrac{2(y^2+1)}{x}=7.\end{cases}$$

Đặt $u = x + y$, $v = \dfrac{y^2+1}{x}$ ta được hệ sau

$$\begin{cases}u+v=4\\ u^2-2v=7\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=3\Rightarrow v=1\\ u=-5\Rightarrow v=9.\end{array}\right.$$

* TH1. $\begin{cases}u=3\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ \dfrac{y^2+1}{x}=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=2\\ y=-2\Rightarrow x=5.\end{array}\right.$$

* TH2. $\begin{cases}u=-5\\ v=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-5\\ \dfrac{y^2+1}{x}=9\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5-y\\ y^2+9y+46=0\end{cases}\ (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(2; 1)$, $(5; -2)$.

Nhận xét. *Để sử dụng phương pháp thế, ta có thể biến đổi trực tiếp từ một phương trình ban đầu của hệ, hoặc khéo léo sử dụng kết hợp các phương pháp như cộng đại số, đặt ẩn phụ,... để tạo ra mối liên hệ giữa hai ẩn, qua đó tìm ra lời giải bài toán. Mời bạn đọc tiếp tục tìm thêm các cách giải khác.*

HAI BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐẶC SẮC TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2018-2019

NGUYỄN DUY KHƯƠNG

SV. K63 Cử nhân tài năng toán Đại học KHTN Hà Nội

Các bài toán hình học luôn là thử thách và là bài phân loại trong kì thi vào lớp 10 THPT chuyên. Bài viết này xin giới thiệu hai bài hình học hay và khó của đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội và Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt các đường thẳng AB, AC thứ tự tại D và E. Trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC lấy điểm P sao cho AP vuông góc với PC. Đường thẳng qua B song song với OP cắt PC tại Q. Chứng minh rằng:

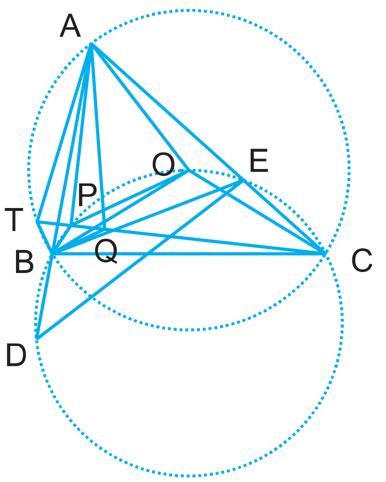
a) PB = PQ.

b) O là trực tâm tam giác ADE.

c) $\widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Lời giải.



Ta có $\widehat{BPQ} = \widehat{BOC}$, $\widehat{OBC} = \widehat{OPQ} = \widehat{PQB}$.

Suy ra $\Delta PBQ \backsim \Delta OCB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{PB}{OC} = \dfrac{PQ}{OB} \Rightarrow PB = PQ$ (vì $OB = OC$).

b) Ta có $\widehat{OBE} = \widehat{OCE} = \widehat{OAC}$. (1)

Mà $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{EAB} \Rightarrow EA = EB$.

Do đó O, E thuộc đường trung trực của AB.

Suy ra $OE \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta được $OD \perp AC$.

Vậy O là trực tâm của tam giác ADE.

c) Gọi T là giao điểm thứ hai của (O) và CP.

Ta có $\widehat{BPC} = \widehat{BOC} = 2\widehat{BTC}$. (3)

Mà $\widehat{BPC}$ là góc ngoài tại đỉnh P của tam giác BPT nên $\widehat{BPC} = \widehat{BTC} + \widehat{PBT}$. (4)

Từ (3), (4) suy ra

$\widehat{BTC} = \widehat{PBT} \Rightarrow PB = PT \Rightarrow PT = PQ$.

Ta lại có $\widehat{APQ} = 90^o$ nên

$\widehat{PAQ} = \widehat{PAT} = 90^o - \widehat{ATP} = 90^o - \widehat{ABC}$;

$\widehat{OAC} = 90^o - \dfrac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^o - \widehat{ABC}$.

Suy ra $\widehat{PAQ} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{PAO} = \widehat{QAC}$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn. Một đường tròn đi qua B, C cắt AB, AC thứ tự tại E, F. Gọi giao điểm của BF và CE là D. Vẽ hình bình hành DBKC.

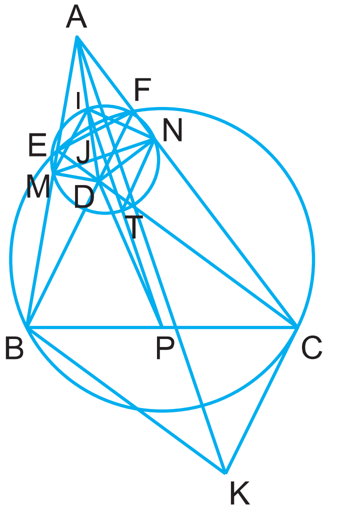
a) Chứng minh rằng $\Delta KBC \backsim \Delta DFE$ và $\Delta AKC \backsim \Delta ADE$.

b) Hạ DM $\perp$ AB (M $\in$ AB) và DN $\perp$ AC (N $\in$ AC). Chứng minh rằng MN $\perp$ AK.

c) Gọi I là trung điểm của AD và J là trung điểm của MN. Chứng minh rằng đường thẳng IJ đi qua trung điểm đoạn thẳng BC.

d) Gọi giao điểm khác I của IJ và đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN là T. Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán PTNK TP. Hồ Chí Minh)



a) Ta có KC // BF nên $\widehat{KCB} = \widehat{DBC} = \widehat{DEF}$ và $\widehat{KBC} = \widehat{DCB} = \widehat{DFE}$.

Suy ra $\Delta KBC \backsim \Delta DFE$ (g.g).

Tứ giác BEFC nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ABC}$.

Suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{EF}{CB}$. (1)

Ta lại có $\Delta DEF \backsim \Delta DBC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{DE}{KC}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{KC} \Rightarrow \dfrac{AC}{KC} = \dfrac{AE}{DE}$. (3)

Mặt khác $\widehat{AED} = \widehat{ABC} + \widehat{ECB} = \widehat{AFE} + \widehat{ECB}$

$= \widehat{ECF} + \widehat{FEC} + \widehat{ECB} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = \widehat{AFB}$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AFB} = \widehat{ACK}$. (4)

Từ (3), (4) suy ra $\Delta AKC \backsim \Delta ADE$ (c.g.c). (5)

b) Ta có $\widehat{DMA} = \widehat{DNA} = 90^o$.

Suy ra tứ giác DMAN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{ADM}$.

Từ (5) ta có $\widehat{KAC} = \widehat{DAE}$

$\Rightarrow \widehat{KAC} + \widehat{MNA} = \widehat{ADM} + \widehat{DAE} = 90^o$.

Vậy AK $\perp$ MN.

c) Gọi P là trung điểm của BC.

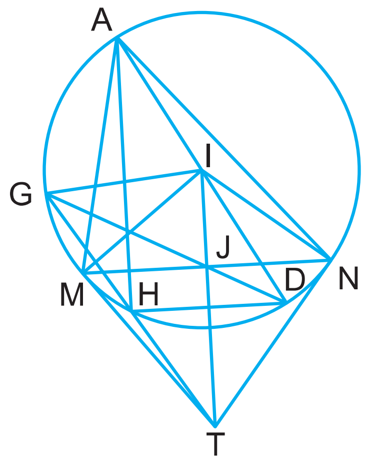
Ta có PI là đường trung bình của ΔDAK nên PI // AK. (6)

Tứ giác AMDN nội tiếp đường tròn đường kính AD nên IJ $\perp$ MN.

Mà AK $\perp$ MN nên IJ // AK. (7)

Từ (6), (7) suy ra P, I, J thẳng hàng, ta được điều phải chứng minh.

d) Ta có $\widehat{IMT} = \widehat{INT} = 90^o$ nên TM, TN là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Ta gọi đường tròn này là (AMN).



DJ cắt đường tròn (AMN) tại G. Đường cao kẻ từ A của tam giác AMN kéo dài cắt đường tròn (AMN) tại H.

Ta có $JG.JD = JM.JN = JM^2 = JI.JT$.

Do đó tứ giác GIDT nội tiếp $\Rightarrow \widehat{GTI} = \widehat{GDI}$.

$\Rightarrow \widehat{GHA} = \widehat{GDI} = \widehat{GTI}$. (9)

Mặt khác AH // IT (cùng vuông góc với MN). (10)

Từ (9), (10) suy ra GH $\equiv$ GT, do đó G, H, T thẳng hàng.

Ta lại có $\widehat{HAM} = \widehat{DAN} \Rightarrow MH = DN$

$\Rightarrow \widehat{TMH} = \widehat{TND} \Rightarrow \Delta THM = \Delta TDN$ (c.g.c)

$\Rightarrow TH = TD$.

Suy ra H, D đối xứng nhau qua IT

$\Rightarrow \widehat{HTJ} = \widehat{DTJ} = \widehat{ADJ}$.

Vậy AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ.

Thì thầm...Thì thầm thôi...

Tuổi hồng... xin cứ tuổi hồng
Chuyện gì quá sớm... xin không trả lời

Hỏi: Lớp em có một bạn chuyên khoe khoang mà cái gì của bạn ấy thì bạn ấy cũng “phóng đại” lên. Theo anh điều đó có phải là tính xấu không?

LÊ VIỆT X.
(THCS Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng)

Đáp:

Lươn “phóng đại” vẫn là lươn
Mặc dù “phóng đại” mong hơn mọi người
Tính này đáng để chê cười
Em nên khuyên bạn tức thời “cai” ngay.

Hỏi: Nhà thơ Nguyễn Trọng Tạo (1947 - 2019) có bài thơ “Chia một” đã được nhạc sĩ Phú Quang phổ thành bài hát rất hay. Nếu hiểu theo Toán học thì chia một là vẫn còn nguyên phải không anh?

HỒ TRỌNG Y.
(Lớp 9, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An)

Đáp:

Trong Toán chia một dễ thay
Số nào chia một bằng ngay chính mình
Trong thơ “chia một” tài tình
Chia xong người khác, sạch tinh chẳng còn.

Hỏi: Lớp em cãi nhau về 2 từ “to” và “lớn”. Một số bạn bảo là 2 từ nghĩa như nhau, thay đổi cho nhau không làm sai nghĩa. Em không nghĩ thế nhưng chẳng biết cãi lại thế nào... Anh giúp em với!

CHỬ P. L.
(THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Đáp:

“Người to” mà vẫn trẻ con
Khác với “người lớn” không non giữa đời
“Nhà hát to” có nhiều nơi
“Nhà hát lớn" chỉ dưới trời Thủ đô.

Hỏi: Trong bài thơ “Ông đồ” của nhà thơ Vũ Đình Liên thì “Ông đồ” có phải là người chuyên viết chữ nho, viết câu đối không anh?

NGUYỄN A. T.
(Lớp 9, THCS Kế An, Kế Sách, Sóc Trăng)

Đáp:

“Ông đồ” cũng giống “Thầy đồ”
Không phải để nói chuyện tô, viết gì
Mà gọi người dạy trò thi
Chữ Nho thầy dạy, trò ghi vào lòng.

Hỏi: Kì thi học kì vừa rồi, em bị điểm không giỏi như mọi khi. Em rất buồn và buồn hơn khi mẹ mắng em. Là anh thì anh nói sao?

TRẦN CAO Y.
(Lớp 7, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk)

Đáp:

Anh thì coi chuyện đã xong
Trên đời khác với chờ mong là thường
Chúc em chịu khó kiên cường
Khắc phục điểm yếu, tinh tường nhiều thêm.

ANH PHÓ GỠ XƯA

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(192+193). Kí hiệu S(n) là tổng các chữ số của một số nguyên dương n. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho S(n). S(n + 1) = 87.

TRƯƠNG QUANG AN

(GV. THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Bài 2(192+193). Tìm các cặp số tự nhiên (a; b) thỏa mãn $1000a^2 + b = 1001b^2 + a$.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 3(192+193). Trong hộp có 219 viên bi, hai bạn Hồng và Hà cùng chơi trò chơi bốc bi. Mỗi người đến lượt mình được bốc một số lượng viên bi là lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2 (2^0; 2^1; 2^2; ...). Ai bốc được viên bi cuối cùng là người thắng cuộc. Hồng là người bốc bi trước. Hãy chỉ ra cách chơi giúp Hồng thắng cuộc và với số lượt bốc bi là ít nhất.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài 4(192+193). Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác ABC tam giác APB đều và tam giác ACE cân tại E sao cho $\widehat{CEA} = 120^o$. Dựng tam giác BCD cân tại D sao cho $\widehat{BDC} = 120^o$ và A, D cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC. Dựng tam giác DEF cân tại D sao cho $\widehat{EDF} = 120^o$ và F, B cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng DE. Chứng minh rằng PF = CE.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV. THPT chuyên KHTN, Hà Nội)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

1(192+193). Let S(n) be the sum of the digits of positive integer n. Find the smallest value of positive integer n so that S(n). S(n + 1) = 87.

2(192+193). Find all possible doublets of natural numbers (a; b) satisfying $1000a^2 + b = 1001b^2 + a$.

3(192+193). A box contains 219 marbles, Hong and Ha take turns to pick up the marbles which are exponents of 2 (2^0; 2^1; 2^2; ...). The person to pick up the last marble is the winner. If Hong is the first one to pick, give a scenario in which Hong is the winner with the fewest number of turns.

4(192+193). Triangle ABC, we construct an equilateral triangle APB and an isosceles triangle ACE (EC = EA) outside ΔABC such that $\angle CEA = 120^o$. Then, we construct isosceles triangle BCD (DB = DC) with $\angle BDC = 120^o$ and A and D are on the same side of BC. Finally, we construct another isosceles triangle DEF (DE = DF) with $\angle EDF = 120^o$ and F and B are on the same side of DE. Show that PF = CE.

CÁC LỚP THCS

Bài 5(192+193). Tìm nghiệm (x, y) thỏa mãn $x < 0, y > 0$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - y^3 + 2xy + 2xy^2 = 3 \\ x^2 - y^3 + xy = 1. \end{cases}$$

LẠI QUANG THỌ
(Phòng GD - ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài 6(192+193). Cho các số thực a, b, c khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq 0.$$

VÕ QUỐC BÁ CẨN
(Trường THCS Archimedes Academy, Hà Nội)

Bài 7(192+193). Có bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số mà trong biểu diễn thập phân của nó không có mặt chữ số nào trong các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 và 6?

VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

Bài 8(192+193). Cho tam giác ABC cân tại C có $\hat{C} = 15^o$. Giả sử tồn tại điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{ADB} = 105^o$ và AD = 2BD.

Chứng minh rằng $\sqrt{5}AD.BC = 2CD.AB$.

VŨ CÔNG MINH
(GV. THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

SOLVE VIA MALL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Thanh Do Duc

5(192+193). Solve the following system of equations

$$\begin{cases} 2x^2 - y^3 + 2xy + 2xy^2 = 3 \\ x^2 - y^3 + xy = 1. \end{cases}$$

Where $x < 0, y > 0$.

6(192+193). Given three non-zero real numbers a, b and c. Show that

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2b^2 + 3c^2} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2c^2 + 3a^2} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2a^2 + 3b^2} \geq 0.$$

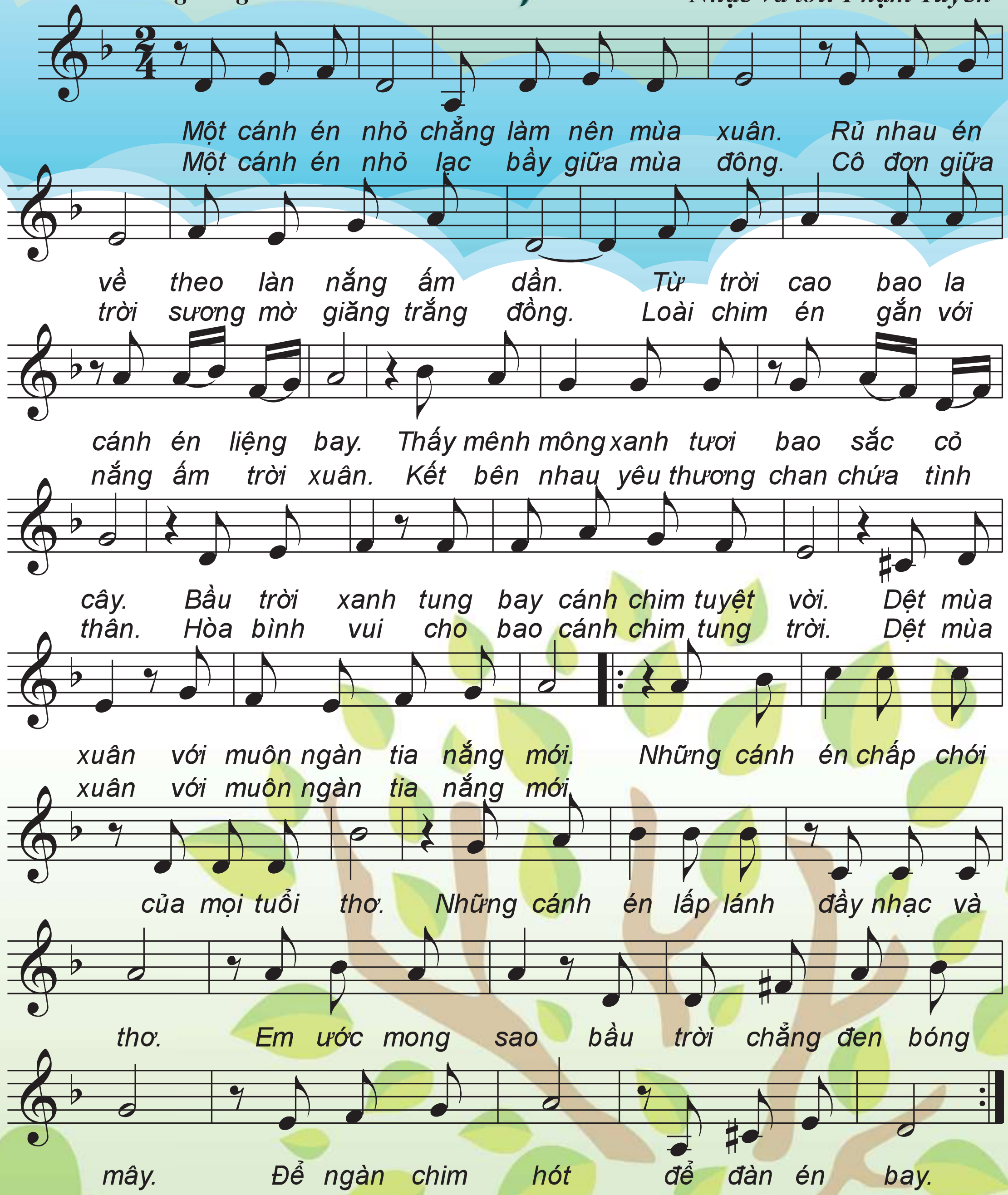
7(192+193). How many natural 9-digit numbers are there such that its decimal representation does not contain any of these digits 1, 2, 3, 4, 5 and 6?

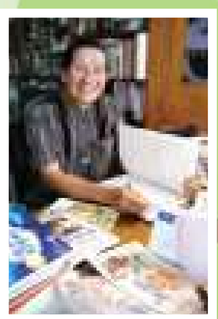
8(192+193). Isosceles triangle ABC (CA = CB) with $\angle C = 15^o$. Suppose that there exists point D inside ΔABC such that $\angle ADB = 105^o$ and AD = 2BD.

Show that $\sqrt{5}.AD.BC = 2CD.AB$.

CÁNH ÉN TUỔI THƠ

Trong sáng - Tha thiết *Nhạc và lời: Phạm Tuyên*





Nhạc sĩ Phạm Tuyên, tác giả của hàng trăm ca khúc nổi tiếng dành cho tuổi thơ như: *Cô và mẹ, Chú voi con ở Bản Đôn, Trường cháu là trường mầm non, Cả tuần đều ngoan, Chiếc đèn ông sao, Cùng nhau ta đi lên, ...* và đặc biệt *Như có Bác trong ngày đại thắng* - một bài hát được người dân Việt Nam yêu thích và luôn được hát trong những ngày lễ, ngày kỉ niệm lớn của đất nước. Những bài hát thiếu nhi do ông sáng tác với ca từ và giai điệu trong sáng, giản dị, tự nhiên trải qua bao năm tháng vẫn luôn gần gũi, gắn bó với thiếu nhi cả nước và được các em yêu thích. Xin giới thiệu với các em bài hát ***Cánh én tuổi thơ*** của nhạc sĩ Phạm Tuyên nhân dịp đầu xuân mới.

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT192M19. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2019.

Giá: 20 000 đồng