NGÔ HOÀNG TOÀN

Luyện thi đại học

TUYỂN TẬP

BẤT ĐẲNG THỨC

Tài liệu toán phổ thông

CHUYÊN ĐỀ:

BẤT ĐẲNG THỨC

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

TÀI LIỆU TOÁN PHỔ THÔNG

CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

DÒNG TÂM SỰ

Giọt nước bên thềm khẽ lặng thầm rơi đều đều và nhanh dần theo những giai điệu vu vi phát ra từ cây đàn ghi-ta đã cũ, những nốt nhạc du dương như hòa vào tâm sự của người đang chìm vào nỗi cô đơn khi nhớ về một ngày đã xa....

Tháng 9, mùa khai trường của bao cô cậu học trò sau những tháng hè rộn rã, vui tươi. Đứa thì gặp bạn cũ miệng cứ ríu ra ríu rít những câu chuyện trong những tháng ngày không gặp, đứa thì gặp lại thầy cô tay bắt mặt mừng như vừa tìm thấy thứ gì đó thân quen sau bao ngày xa cách. Có những cô cậu lại khăn gói chuẩn bị hành trang, xa con đường làng quen thuộc vẫn thường đạp xe cùng nhau đi học, xa cái thôn quê nơi chứa đầy kỉ niệm để bắt đầu hành trình mới chinh phục ước mơ và hoài bão.

Lớp học trò ra đi, lại có lớp học trò mới lại vào, những nhịp cầu cứ nối tiếp nhau cho bến bờ tri thức. Chỉ còn đọng lại nơi đây, một tình yêu nồng ấm, một sự gắn kết vô hình trong cuộc sống này đây.

Tôi bắt đầu học Toán từ thở nhỏ, lúc í a đếm $1, 2$. Quyển sổ tôi ghi về những gì tôi học, cứ mỗi ngày lại thêm dầy hơn, mỗi một trang là một chặng đường, là hành trình tôi đi tìm tình yêu đích thực của đời mình. Nếu hỏi tôi "Vì sao tôi còn yêu Toán thế ?", tôi cũng chỉ biết rằng đó cứ như thói quen sau những giờ cẳng thẳng, là sự "mua vui" tưởng thưởng cho bản thân mình một góc tối bình yên.

Từ những gì còn đọng lại sau những tháng ngày học tập trên ghế nhà trường, tôi đã cố gắng chọn lọc và tổng hợp lại những bài toán, những cách chứng minh đặc sắc nhất để hoàn thành chuyên đề

TUYỂN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC LUYỆN THI ĐẠI HỌC

Bài viết này, tác giả đã chọn lọc những bài toán trong các kì thi thử đại học từ các trường THPT, các diễn đàn online và các trung tâm dạy thêm chất lượng để biên soạn lại thành một chuyên đề dành cho những người đam mê bất đẳng thức nói chung và các bạn ôn thi đại học nói riêng. Đồng thời, đây cũng là món quà nhỏ, xin được dành tặng cho diễn đàn www.k2pi.net như là một hồi ức đẹp sau hơn một năm dài gắn bó cùng các anh, các chị, dù không gặp nhau nhưng chúng ta luôn có sự gắn kết vô hình lại, bởi lẽ, chúng ta đã lỡ yêu toán mất rồi!

Bài viết được tác giả viết vội trong những ngày hè để hoàn thành kịp mừng sinh nhật lần thứ nhất của diễn đàn www.k2pi.net nên chắc hẳn còn nhiều sai xót, mong nhận được sự góp ý của bạn đọc gần xa qua địa chỉ:ngohoangtoan1994@gmail.com hoặc www.k2pi.net.

TUYỂN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

Ngô Hoàng Toàn
Trường Đại học Y Dược Cần Thơ

Mục lục

1 MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

1.1 Bất đẳng thức AM-GM

Phát biểu 1.1: Bất đẳng thức AM-GM

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thì ta có:

$$\boxed{a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.} \tag{1.1}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Tuy nhiên, khi giải toán ta hay quan tâm nhiều đến trường hợp $n = 2$và $n = 3$. Mà ta thường được biết đến dưới phát biểu:

1. Cho $a, b \geq 0$. Khi đó ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b$.
Bất đẳng thức này còn được viết dưới dạng khác tương đương là:

- $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$
- $(a+b)^2 \geq 4ab$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$

2. Cho $a, b, c \geq 0$, khi đó ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Bất đẳng thức này còn có một số ứng dụng khác khá phổ biến như sau:
Với mọi số thực a, b, cta luôn có:

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$
- $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$
- $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

1.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Phát biểu 1.2: Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Với hai bộ số thực tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *ta có :*

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)} \tag{1.2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực bất kì và $b_1, b_2, ..., b_n$là các số thực dương .

Khi đó ta luôn có :$\dfrac{{a_1}^2}{b_1} + \dfrac{{a_2}^2}{b_2} + ... + \dfrac{{a_n}^2}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

Tuy nhiên,khi giải toán ta hay quan tâm nhiều đến trường hợp $n = 2$và $n = 3$. Khi đó ta gặp một số đánh giá quen thuộc sau:

Cho $a, b, c > 0$ ta có:

- $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$
- $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$

1.3 Bất đẳng thức Minkowski

Phát biểu 1.3: Bất đẳng thức Minkowski

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $1 < p \in \mathbb{Q}^+$ *thì ta có :*

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}} \tag{1.3}$$

Nhưng ta quan tâm nhiều nhất là các bất đẳng thức quen thuộc sau:

- $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$
- $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \geq \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2 + (c+p)^2}$
- $\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} + \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2} + ... + \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2}$

2 BẤT ĐẲNG THỨC QUA CÁC KÌ THI ĐẠI HỌC 2007-2013

Đề thi đại học khối A-2007

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $xyz = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Lời giải:
Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

$$x^2(y+z) \geq 2x^2\sqrt{yz} = 2x\sqrt{x}$$

Tương tự ta có:

$$\begin{cases} y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y} \\ z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z} \end{cases}$$

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đặt $a = x\sqrt{x}+2y\sqrt{y};\ b = y\sqrt{y}+2z\sqrt{z};\ c = z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}$
Suy ra: $x\sqrt{x} = \dfrac{4c+a-2b}{9};\ y\sqrt{y} = \dfrac{4a+b-2c}{9};\ z\sqrt{z} = \dfrac{4b+c-2a}{9}$
Do đó : $P \geq \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4c+a-b}{b} + \dfrac{4a+b-2c}{c} + \dfrac{4b+c-2a}{a}\right) = \dfrac{2}{9}\left[4\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\right) + \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}\right) - 6\right]$
$\Rightarrow P \geq \dfrac{2}{9}(4.3+3-6) = 2$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z = 1$. □

Đề thi đại học khối B-2007

Cho x, y, zlà các số thực thay đổi .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

Lời giải:
Ta có:

$$P = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$$

Mà ta có:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

nên

$$P \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z}\right)$$

Xét hàm số:$f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$ với $t > 0$.

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ ta suy ra:$f(t) \geq \frac{3}{2}, \forall t > 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. □

Đề thi đại học khối D-2007

Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$(1+4^a)^b \leq \left(1+4^b\right)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln\left(1+4^b\right)}{b}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(1+4^x)}{x}$với $x > 0$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x)\ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ .và $a \geq b > 0$ nên $f(a) \leq f(b)$.

Phép chứng minh hoàn tất. □

Đề thi đại học khối B-2008

Cho x, y là hai số thực thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$$

Lời giải:

Ta có: $P = \frac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2} = \frac{2(x^2+6xy)}{x^2+y^2+2xy+2y^2}$

Nếu $y = 0$ ta có $x^2 = 1$. Suy ra $P = 2$

Nếu $y \neq 0$ đặt $x = ty$, khi đó: $P = \frac{2t^2+12t}{t^2+2t+3} \Leftrightarrow (P-2)t^2 + 2(P-6)t + 3P = 0\,(1)$

Với $P = 2$,phương trình (1)có nghiệm $t = \frac{3}{4}$.

Với $P \neq 2$,phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta' = -2P^2 - 6P + 36 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3$

Giá trị lớn nhất $P = 3$ khi $x = \frac{3}{\sqrt{10}}; y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}; y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

Giá trị nhỏ nhất $P=-6$khi $x=\frac{3}{\sqrt{13}};y=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x=-\frac{3}{\sqrt{13}};y=\frac{2}{\sqrt{13}}$ □

Đề thi đại học khối D-2008

Cho x,y là các số thực không âm .Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

Lời giải:

Ta có: $|P|=\left|\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right|\le\frac{(x+y)(1+xy)}{|(x+y)+(1+xy)|^2}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le P\le\frac{1}{4}$

Khi $x=0,y=1$ thì giá trị lớn nhất của $P=-\frac{1}{4}$.

Khi $x=1,y=0$ thì giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{4}$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Đề thi Cao đẳng-2008

Cho hai số thực thay đổi x,ythỏa mãn $x^2+y^2=2$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2\left(x^3+y^3\right)-3xy$$

Lời giải:

Ta có:

$$P=2(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)-3xy=2(x+y)(2-xy)-3xy$$

Đặt $t=x+y$. Do $x^2+y^2=2$ nên $xy=\frac{t^2-2}{2}$.

Suy ra:

$$P=2t\left(2-\frac{t^2-2}{2}\right)-3\frac{t^2-2}{2}=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+3$$

Do $(x+y)^2\ge4xy$ nên $t^2\ge2\left(t^2-2\right)\Rightarrow-2\le t\le2$

Xét hàm số: $f(t)=-t^3-\frac{3}{2}t^2+6t+3$ với $-2\le t\le2$

Lập bảng biến thiên từ đó suy ra giá trị lớn nhất $P=\frac{13}{2}$ và giá trị nhỏ nhất $P=-7$. □

Đề thi đại học khối A-2009

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x,y,zthỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$,ta có:

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le5(y+z)^3$$

Lời giải:

Đặt $a=x+y,\ b=y+z,\ c=z+x$

Điều kiện bài toán trở thành: $c^2=a^2+b^2-ab$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $a^3+b^3+3abc\le5c^3\quad a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện trên.

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 \Rightarrow a+b \leq 2c$$

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)\left(a^2+b^2-ab\right) + 3abc \leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)\,c^2 + 3abc \leq 5c^3 \\ \Leftrightarrow\ & (a+b)\,c + 3ab \leq 5c^2 \end{aligned}$$

Mà $a+b \leq 2c$ nên $(a+b)\,c \leq 2c^2$ và $3abc \leq 3.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.c \leq 3c^2$.

Suy ra điều phải chứng minh. □

Đề thi đại học khối B-2009

Cho các số thực thay đổi x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right) + 1$$

Lời giải:

Kết hợp $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$ và $(x+y)^2 \geq 4xy$. Suy ra:

$$(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Rightarrow x+y \geq 1$$

$$\begin{aligned} A = 3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right) + 1 &= \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x^4+y^4\right) - 2\left(x^2+y^2\right) + 1 \\ &\geq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right) + 1 \\ \Rightarrow A &\geq \frac{9}{4}\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right) + 1 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + y^2$ta có $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2}$;do đó $A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$; $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0$ với mọi $t \geq \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. □

Đề thi cao đẳng-2009

Cho a và b là hai số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 \ln b - b^2 \ln a > \ln a - \ln b$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{\ln a}{a^2+1} < \frac{\ln b}{b^2+1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t^2+1}, t \in (0;1)$.Ta có: $f'(t) = \frac{\frac{1}{t}\left(t^2+1\right) - 2t\ln t}{\left(t^2+1\right)^2} > 0, \forall t \in (0;1)$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;1)$.

Mà $0 < a < b < 1$, nên $f(a) < f(b)$. Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Đề thi đại học khối D-2009

Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x + y = 1$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(4x^2 + 3y\right)\left(4y^2 + 3x\right) + 25xy$$

Lời giải:

Do $x + y = 1$, nên

$S = 16x^2y^2 + 12\left(x^3 + y^3\right) + 9xy + 25xy = 16x^2y^2 + 12\left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12$

.

Đặt $t = xy$, ta được $S = 16t^2 - 2t + 12$ta có $0 \leq xy = t \leq \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$ Ta tiến hành khảo sát hàm số trên và tìm được giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{191}{16}$.

Giá trị lớn nhất của $S = \dfrac{25}{2}$ khi $(x; y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ $\square$

Đề thi cao đẳng-2010

CCho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $3x + y \leq 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Lời giải:

Ta có: $A = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+y} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{2}{x+y}} = \dfrac{4}{\sqrt{2x(x+y)}} \geq \dfrac{8}{3x+y} \geq 8$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = \dfrac{1}{4}$. $\square$

Đề thi đại học khối B-2010

Cho các sô thực không âma, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = 3\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải:

Ta có: $M \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}$

Đặt $t = ab + bc + ca$ ta có $0 \leq t \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Đến đây ta khảo sát hàm số :

$f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$ trên $\left[0; \dfrac{1}{2}\right)$, ta có :$f'(t) = 2t + 3 - \dfrac{2}{\sqrt{1-2t}}$

$f''(t) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{(1-2t)^3}} \leq 0$ suy ra $f'(t)$ nghịch biến nên $f(t) \geq f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến nên $f(t) \geq f(0) = 2$
Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2 xảy ra khi $(a;b;c) = (1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$ □

Đề thi đại học khối D-2010

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} + \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$$

Lời giải:
Điều kiện $-2 \leq x \leq 5$
Ta có $(-x^2 + 4x + 21) - (-x^2 + 3x + 10) = x + 11 > 0$ suy ra $y > 0$ $y^2 = (x+3)(7-x) + (x+2)(5-x) - 2\sqrt{(x+3)(7-x)(x+2)(5-x)}$
$= \left(\sqrt{(x+3)(5-x)} - \sqrt{(x+2)(7-x)}\right)^2 + 2 \geq 2$
Suy ra $y \geq \sqrt{2}$ đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$. □

Đề thi đại học khối A-2011

Cho x, y, zlà ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$và $x \geq y; x \geq z$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

Lời giải:
Trước hết ta chứng minh: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ trong đó a và b dương, $ab \geq 1$
Thật vậy: bổ đề trên tương đương với $\left(\sqrt{ab} - 1\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ đúng với a và b dương, $ab \geq 1$.
Trở lại bài toán áp dụng bổ đề trên với mọi x, y thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y$, ta có:

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{1}{2+\frac{3y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{z}{y} = \frac{x}{z}$ hoặc $x = y$ (1) Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}, t \in [1;2]$. Khi đó

$$P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}, t \in [1;2]; f'(t) = \frac{-2\left[t^3(4t-3) + 3t(2t-) + 9\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0$
Từ đó suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 4, y = 1, z = 2$. □

Đề thi đại học khối B-2011

Cho a, blà các số thực dương thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)\left(ab+2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

Lời giải:

Với a, b dương, ta có: $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)\left(ab+2\right)\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)+ab=a^2b+ab^2+2\left(a+b\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

Theo AM-GM ta có: $(a+b)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{\left(2\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$

Suy ra: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq\frac{5}{2}$.

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}, t\geq\frac{5}{2}$. Suy ra: $P=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18$

Xét hàm số $f\left(t\right)=4t^3-9t^2-12t+18,\ t\geq\frac{5}{2}$

Ta có: $f'\left(t\right)=6\left(2t^2-3t-2\right)>0$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{23}{4}$khi $(a;b)=(2;1)$ hoặc $(a;b)=(1;2)$. □

Đề thi đại học khối A-2012

Cho các số thực x, y, zthỏa mãn điều kiện$x+y+z=0$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :
$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}$$

Lời giải:

Ta chứng minh: $3^t\geq t+1, \forall t\geq 0$

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t-t-1$,ta có $f'\left(t\right)=3^t\ln 3-1>0, \forall t\geq 0$ và $f\left(0\right)=0$.Suy ra $3^t\geq t+1, \forall t\geq 0$ đúng.

Áp dụng nhận xét trên ta có:

$3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}\geq 3+|x-y|+|y-z|+|z-x|$

Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|\geq|a+b|$, ta có:

$\left(|x-y|+|y-z|+|z-x|\right)^2$

$=|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2+|x-y|\left(|y-z|+|z-x|\right)+|y-z|\left(|z-x|+|x-y|\right)+|z-x|\left(|x-y|+|y-\right.$

$\geq 2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)$

Do đó $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)}=\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2-2(x+y+z)^2}$.

Mà $x+y+z=0$, suy ra $|x-y|+|y-z|+|z-x|\geq\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}$.

Suy ra: $P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6x^2+6y^2+6z^2}\geq 3$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=0$. □

Đề thi đại học khối B-2012

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^5 + y^5 + z^5$$

Lời giải:

Với $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$ ta có: $0=(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2x(y+z)+2yz = 1-2x^2+2yz$ nên $yz = x^2 - \dfrac{1}{2}$

Mặt khác, $yz \le \dfrac{y^2+z^2}{2} = \dfrac{1-x^2}{2}$, suy ra $x^2 - \dfrac{1}{2} \le \dfrac{1-x^2}{2}$ do đó $-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $(*)$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
P &= x^5 + \left(y^2+z^2\right)\left(y^3+z^3\right) - y^2z^2(y+z)\\
&= x^5 + \left(1-x^2\right)\left[\left(y^2+z^2\right)(y+z) - yz(y+z)\right] + \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 x\\
&= x^5 + \left(1-x^2\right)\left[-x\left(1-x^2\right) + x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\right] + \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 x \qquad = \frac{5}{4}\left(2x^3-x\right)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x$ với $-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \le x \le \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $f'(x) = 6x^2-1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

Ta có: $f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{9}, f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) = f\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$

Do đó $f(x) \le \dfrac{\sqrt{6}}{9}$.Suy ra $P \le \dfrac{5\sqrt{6}}{36}$ khi $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $y=z=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ thì đẳng thức xảy ra. □

Đề thi đại học khối D-2012

CCho các số thực x, ythỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \le 32$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2).$$

Lời giải:

Ta có: $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \le 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x+y \le 8$.

$A = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6 \ge (x+y)^3 - \dfrac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên đoạn $[0;8]$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Ta có: $f(0) = 6, f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}, f(8) = 398$

Suy ra $A \ge \dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$. Khi $x = y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì đẳng thức xảy ra.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{17-5\sqrt{5}}{4}$. □

Đề thi đại học khối A-2013

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Lời giải:

Đặt $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c}$.Ta được $x, y > 0$.Điều kiện bài toán trở thành $xy + x + y = 3$.Khi đó

$$P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2+y^2}$$

Với mọi $u, v > 0$ ta có $u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) \geq \frac{1}{4}(u+v)^3$.

Do đó

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8\left(\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3}\right)^3 = 8\left(\frac{(x+y)^2 - 2xy + 3x + 3y}{xy + 3x + 3y + 9}\right)^3$$

Thay $xy = 3 - x - y$ vào biểu thức trên ta được

$$\frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8\left(\frac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3 = (x+y-1)^3$$

Đặt $t = x + y$ suy ra $t > 0$ và $P \geq (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6}$

Ta có $3 = x + y + xy \leq x + y + \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow t \geq 2$

Xét hàm số $f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2+2t-6}$ với $t \geq 2$.

Ta có $f'(t) = 3(t-1)^2 - \frac{t+1}{t^2+2t-6}$.

Với mọi $t \geq 2$ ta có $3(t-1)^2 \geq 3$; $\frac{t+1}{t^2+2t-6} = \sqrt{1 + \frac{7}{(t+1)^2 - 7}} \leq \sqrt{1 + \frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ nên $f'(t) > 0$.

Suy ra $f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}$.Do đó $P \geq 1 - \sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1 - \sqrt{2}$ khi $x = y = 1$ hay $a = b = c$. □

Đề thi đại học khối B-2013

Cho a, b, c là các số thực dương .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (a+b)\frac{a+b+4c}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2} \leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

Đặt $t = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow t > 2$ và $P \leq \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$

Khảo sát hàm số trên ta tìm được giá trị lớn nhất là $\frac{5}{8}$ khi $a = b = c = 2$. □

Đề thi đại học khối D-2013

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \leq y - 1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$$

Lời giải:

Do $x, y > 0$ nên $0 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{y-1}{y^2} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ suy ra $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$.Khi đó $P = \frac{t+1}{t^2 - t + 3} - \frac{t-2}{6(t+1)}$.

Khảo sát hàm số trên ta được giá trị lớn nhất của $P = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{7}{30}$. □

3 TUYỂN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

3.1 Bất đẳng thức trong kì thi thử các trường

Bài toán

1 Cho a, b, c, d, e là các số thực dương thoả mãn $a+b+c+d+e=1$,trong đó e là số nhỏ nhất.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = abc + bcd + cde + eda + eab$$

Đề thi thử lần 1 chuyên ĐHSP Hà Nội

Lời giải:

Giả sử $e = \min\{a, b, c, d, e\}$ áp dụng AM-GM ta có

$$P = bc(a+d-e)+e(a+c)(b+d) \leq \left(\frac{b+c+d+a-e}{3}\right)^3 + e\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-2e}{3}\right)^3 + e\left(\frac{1-e}{2}\right)^2$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{1-2e}{3}\right)^3 + e\left(\frac{1-e}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{5}$$

Bất đẳng thức này đúng do $\frac{1}{5} - \left(\frac{1-2e}{3}\right)^3 + e\left(\frac{1-e}{2}\right)^2 = \frac{(5e-1)^2(8+5e)}{2700} \geq 0$

Dấu $"="$xảy ra khi $a = b = c = d = e = \frac{1}{5}$ □

Bài toán

2 Cho các số thực dương a, b, c, d.Chứng minh bất đẳng thức.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+d} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Đề thi thử lần 4 chuyên ĐHSP Hà Nội

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta được :

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+d} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$
$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+d} + \frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} = \frac{a^2+ad+bc+c^2}{(c+b)(a+d)} + \frac{ab+b^2+d^2+cd}{(a+b)(c+d)}$$
$$A \geq \frac{4(a^2+ad+bc+c^2)+4(ab+b^2+d^2+cd)}{(a+b+c+d)^2} \geq 2$$
$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-4ac-4bd \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = c; b = d$. □

Bài toán

3 Cho các số thực dương x, y thay đổi thoả mãn $x + 2y = 1$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{25}{1 + 48xy^2}$$

Đề thi thử lần 5 chuyên ĐHSP Hà Nội

Lời giải:

Nhìn chung bất đẳng thức này chẳng qua chỉ là việc thế biến x theo y và biến đổi quy đồng đưa về chứng minh.

$$\frac{1}{1-2y} + \frac{1}{y} \geq \frac{25}{1 + 48y^2(1-2y)}$$

Quy đồng lên ta đưa bất đẳng thức về $(12y^2 - 7y + 1)^2 \geq 0$. □

Bài toán

4 Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $x \geq y; x \geq z$.Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

Đề thi thử lần 6 chuyên ĐHSP Hà Nội

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$(x-z)(x-y)\frac{x+y+1}{xy(x+1)(y+1)} + (y-z)^2.\frac{y+z+1}{yz(y+1)(z+1)} \geq 0$$

Do $x \geq y$ và $x \geq z$.

Nên ta có điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. □

Bài toán

5 Cho các số $a, b, c, d \in [0; 2]$ .Chứng minh bất đẳng thức:

$$a + b + c + d \leq \sqrt{ab+1} + \sqrt{bc+1} + \sqrt{cd+1} + \sqrt{da+1}$$

Đề thi thử lần 7 chuyên ĐHSP Hà Nội

Lời giải:

Từ giải thiết suy ra $|a-b| \leq 2 \Rightarrow (a-b)^2 \leq 4 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4 + 4ab \Rightarrow a + b \leq 2\sqrt{ab+1}$

Tương tự cho các bất đẳng thức còn lại,cộng vế theo vế ta được điều phải chứng minh. □

Bài toán

6 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Đề thi thử lần 1 chuyên KHTN Hà Nội

textbf*Lời giải 1* Với giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Điều này khiến chúng ta liên tưởng đến một đẳng thức trong lượng giác, đó là

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

với A, B, C là ba đỉnh một tam giác(riêng bài toán này là tam giác nhọn).
Do đó, với giả thiết bài toán như vậy sẽ luôn tồn tại một tam giác nhọn ABC sao cho $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$ và BĐT được viết lại

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 4\sum_{cyc} \cos^2 B \cos^2 C$$

Đây là một BĐT khá mạnh. Đến đây, một suy nghĩ có lẽ gần nhất là sử dụng các BĐT quen thuộc sau đây của lượng giác

$$\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \dfrac{3}{4} \\ \cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Nhưng không may, BĐT đã bị đổi chiều. Vì thế, chúng ta phải nghĩ tới một hướng suy nghĩ khác (thêm bớt gì đó, hay tìm cách đặt ẩn mới, ...). Một điều thú vị, ta có đẳng thức $\cos^2 A = \cot^2 A.\sin^2 A = \dfrac{\cot^2 A}{\cot^2 A + 1}$. Cho nên, tiếp tục đặt $x = \cot A, y = \cot B, z = \cot C$, BĐT trên trở thành

$$\sum_{cyc}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) \geq 4\sum_{cyc}\left(\frac{x^2y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}\right) \quad (1)$$

với giả thiết mới x, y, z dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Khi ấy, ta lại có

$$x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$$

BĐT (1) được viết lại dưới dạng

$$\sum_{cyc} \frac{x^2}{(x+y)(z+x)} \geq 4\sum_{cyc} \frac{x^2y^2}{(x+y)^2(y+z)(z+x)} \iff \sum_{cyc} x^2(y+z) \geq 4\sum_{cyc} \frac{x^2y^2}{x+y}$$

Đến đây thì nhẹ nhàng hơn nhiều rồi đúng không! Sử dụng BĐT $Cauchy - Schwarz$ ta có $\dfrac{4x^2y^2}{x+y} \leq \dfrac{x^2y^2}{x} + \dfrac{x^2y^2}{y}$, và tương tự rồi cộng lại theo vế ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{2}$. □

Như vậy, phép đặt mà ta quan tâm đó chính là xuất phát từ đẳng thức lượng giác sau:

$$\cos^2 A = \frac{\cot^2 A}{\cot^2 A + 1} = \frac{\cot^2 A}{(\cot A + \cot B)(\cot A + \cot C)}$$

Lời giải 2

Chúng ta viết lại bất đẳng thức như sau :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 2abc)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2abc(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Sử dụng bất đẳng thức Shur ta có :

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Bây giờ,chúng ta chứng minh:

$$2abc(a^2+b^2+c^2) \geq abc(a+b+c) \Leftrightarrow a+b+c+4abc \leq 2 \ (1)$$

Tuy nhiên, (1) đúng, bởi vì ta có : $abc \leq \frac{1}{8}$, $a+b+c \leq \frac{3}{2}$
Vì vậy,bất đẳng thức được chứng minh. □

Lời giải 3 Sử dụng bất đẳng thức USAMO ta có : $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \leq \frac{3}{2}$ Sử dụng bất đẳng thức trên,ta có :

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\iff \sum a^4 + \sum ab(a^2+b^2) + abc\sum a \geq 4\sum a^2b^2$$

$$\iff \frac{1}{2}\sum(a^2-b^2)^2 + \sum ab(a-b)^2 - \frac{1}{2}\sum c^2(a-b)^2 \geq 0$$

$$\iff \sum (a-b)^2(a^2+b^2+4ab-c^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên đúng khi sử dụng SOS chứng minh. □
Nhận xét:bất đẳng thức này khó,nếu rơi vào một kì thi đại học thì hẳn mười mươi thí sinh sẽ bỏ,nhưng nhìn chung ở đây là cách đặt đại số quen thuộc $a = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$, $b = \sqrt{\frac{xz}{(x+y)(y+z)}}$ và$c = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}}$. Đề này không mấy thiết thực khi thi đại học,nên cho vào một kì thi học sinh giỏi ■ □

Bài toán

7 Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn $x+y+z = 4xyz$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x(y+z)} + \frac{1}{y(x+z)} + \frac{1}{z(x+y)} > \frac{5}{x+y+z}$$

Đề thi thử lần 2 chuyên KHTN Hà Nội

Lời giải 1

Ta viết lại giả thiết thành:$\frac{1}{4xy} + \frac{1}{4yz} + \frac{1}{4zx} = 1$. Đặt $x = \frac{1}{2x}$; $y = \frac{1}{2y}$, $z = \frac{1}{2z}$. Ta có $a,b,c > 0$ và $ab+bc+ca = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{5}{2} \ (1)$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử: $a \geq b \geq c$.
Ta thấy rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{b+c}{(a+b)(b+c)} + \frac{b+c}{(a+c)(b+c)} = (b+c)\left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2}\right)$$

Nhưng ta có bổ đề sau:

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq 1 + \frac{1}{(b+c)^2+1} \ (\star)$$

Thật vậy quy đồng và thu gọn ta được $(\star) \Leftrightarrow \dfrac{bc[2-2bc-bc(b+c)^2]}{(b^2+1)(c^2+1)[(b+c)^2+1]} \geq 0$

Nhưng $2-2bc-bc(b+c)^2 = 2a(b+c)-bc(b+c)^2 = (b+c)[2a-bc(b+c)] \geq (b+c)[2a-a^2(b+c)] = a(b+c)[2-ab-ac] \geq 0$

Áp dụng bổ đề trên ta thu được $VT(1) \geq (b+c) + \dfrac{b+c}{(b+c)^2+1} + \dfrac{1}{b+c} = (b+c) + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{b+c+\dfrac{1}{b+c}}$ (2)

Đặt $t = b+c+\dfrac{1}{b+c} \Rightarrow t \geq 2$. Khi đó $VT(2) = t + \dfrac{1}{t}$

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$ với $t \geq 2$ ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} \geq 0$ với mọi $t \geq 2$. Từ đó suy ra $f(t) \geq f(2) = \dfrac{5}{2}$

Với giả sử $a \geq b \geq c$ thì khi $a = b = 1, c = 0$ thì $VT(1) = \dfrac{5}{2}$. Nhưng do giả thiết $a, b, c > 0$ nên dấu bằng không thể xảy ra. □

Lời giải 2

Giả thiết viết lại thành $\dfrac{1}{4xy} + \dfrac{1}{4xz} + \dfrac{1}{4yz} = 1$.

Đặt $a = \dfrac{1}{2x}; b = \dfrac{1}{2y}; c = \dfrac{1}{2z}$

Ta có $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ac = 1$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{2}{(a+b)(a+c)} + \frac{2}{(b+c)(b+a)} + \frac{2}{(c+b)(c+a)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Iran 1996.

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa $xy + yz + zx > 0$. Chứng minh rằng: $(xy + xz + yz)[\dfrac{1}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{(y+z)^2} + \dfrac{1}{(z+x)^2}] \geq \dfrac{9}{4}$.

Chứng minh:

Không mất tính tổng quát giả sử $xy + xz + yz = 1$. Đặt $(x; y; z) = (\tan\dfrac{\alpha}{2}; \tan\dfrac{\beta}{2}; \tan\dfrac{\gamma}{2})$ với

$\alpha;\beta;\gamma$ là ba góc của một tam giác.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)^2}\geq\frac{9}{4}$$

Hay

$$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}.\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\geq\frac{9}{4}\quad(1)$$

Đặt $cyc(A=\frac{\pi-\alpha}{2})$ với A,B,C là ba góc của một tam giác. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\left(\frac{\sin A\sin B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin A\sin C}{sinB}\right)^2+\left(\frac{\sin C\sin B}{\sin A}\right)^2\geq\frac{9}{4}$$

với $\frac{\pi}{2}>A\geq\frac{\pi}{3}$

Đặt

$$f^2\left(A,B,C\right)\geq\frac{9}{4}+2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C).$$

Với

$$f(A,B,C)=\frac{\sin A\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A\sin C}{\sin B}$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

$$\sin^2B+\sin^2C\leq 2\sin^2\frac{B+C}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}(2)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có $\sin B\sin C\leq\cos^2\frac{A}{2}(3)$

Mặt khác:

$$d=f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2};\frac{B+C}{2}\right)=\frac{\sin^2\frac{B-C}{2}}{\sin A}\left(\frac{4\sin^2A\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B\sin C}-\frac{1}{2}\right)$$

Do $\frac{\pi}{2}>A\geq\frac{\pi}{3}$ nên (3) trở thành

$$\frac{4\sin^2A\sin^2\frac{a}{2}}{\sin B\sin C}\geq 16\sin^4\frac{A}{2}\geq 1$$

Do $d\geq 0$ nên ta cần chứng minh

$$f^2\left(A;\frac{B+C}{2};\frac{B+C}{2}\right)\geq\frac{9}{4}+2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)$$

Từ (2) ta có

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leq\sin^2A+2\cos^2\frac{A}{2}$$

Ta cần chứng minh

$$f^2\left(A;\frac{B+C}{2};\frac{B+C}{2}\right)\geq\frac{9}{4}+2(\sin^2A+2\cos^2\frac{A}{2})$$

Hay $\cos A\left(\cos A+1\right)\left(2\cos A-1\right)^2\geq 0$ nên bất đẳng thức ban đầu đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)^2\geq\frac{9}{4(ab+bc+ac)}+\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lại có $\dfrac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{(a+b)(b+c)(a+c)}=1+\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 1$

Nên hiển nhiên $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}>\dfrac{5}{2}$ □

Lời giải 3

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{x+y+z}{x(y+z)}+\frac{x+y+z}{y(z+x)}+\frac{x+y+z}{z(x+y)}>5$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}>\frac{5}{4}$$

Từ đây đặt $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y},b=\dfrac{1}{z}$ ta đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{5}{4}\text{với ab+bc+ca=4}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c>0$. Lấy $t>0$ sao cho $t^2+2ct=4\Rightarrow c=\dfrac{4-t^2}{2t},t<2$

$$(t+c)^2=ab+bc+ca+c^2=(a+c)(b+c)$$

. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{2t}+\frac{2}{t+c}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}-\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)^2\geq\frac{\left(\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}\right)^2}{2t(a+b)}$$

$$\Rightarrow(b+c)(a+c)\leq 2t(a+b)\text{điều này luôn đúng}$$

Ta có

$$\frac{1}{2t}+\frac{2}{t+c}=\frac{9t^2+4}{2t(t^2+4)}\geq\frac{5}{4}\Leftrightarrow(t-2)(5t^2-8t+4)<0\text{đúng với t }<2\blacksquare$$

Nhận xét:

Đề thi này bản chất che giấu đi bất đẳng thức nổi tiếng của tác giả Phạm Kim Hùng là cho $a,b,c\geq 0;ab+bc+ca=1$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$$

Đề thi này chẳng qua chỉ là sử dụng phương pháp dồn biến để giải.Một kiểu quen thuộc của đề thi đại học khối A năm 2011 của bộ. □

Bài toán

8 Cho x, y, z là các số thực dương.Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3} \geq 2\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right)$$

Đề thi thử lần 3 chuyên KHTN Hà Nội

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có :

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^3}{z^3}+1 \geq 3\frac{x^2}{yz}$$

$$\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}+1 \geq 3\frac{y^2}{xz}$$

$$\frac{z^3}{x^3}+\frac{z^3}{y^3}+1 \geq 3\frac{z^2}{xy}$$

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy} \geq 3$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên rồi rút gọn ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$. □

Bài toán

9 Cho ba số dương x, y, z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Đề thi thử lần 4 chuyên KHTN Hà Nội

Lời giải:

Ta có

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=x^3+xy^2+y^3+yz^2+z^3+zx^2 \geq 2(x^2y+y^2z+z^2x) \Rightarrow x+y+z \geq x^2y+y^2z+z^2x$$

Suy ra

$$P \geq \frac{(x+y+z-1)^2}{x+y+z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{(t-1)^2}{t}+\frac{9}{t}=f\left(t\right)\ t=x+y+z, \sqrt{3} \leq t \leq 3$$

Khảo sát hàm số trên được giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{13}{3}$ khi $x=y=z=1$. □

Bài toán

10 Giả sử $-\frac{1}{2} \leq a, b, c \leq 1$ thoả mãn $2(a+b+c)=ab+bc+ca$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}$$

Đề thi thử lần 5 chuyên KHTN Hà Nội

Lời giải:
Điều kiện: $\frac{-1}{2} \leq a; b; c \leq 1$ khá rắc rối, vì vậy ta có ý tưởng đơn giản điều kiện này. Do đó ta có thể đặt: $x = a + \frac{1}{2}; y = b + \frac{1}{2}; z = c + \frac{1}{2}$. Lúc này ta biến đổi lại giả thiết thành hệ:

$$\begin{cases} 0 \leq x, y, z \leq \frac{3}{2} \\ 3(x+y+z) - \frac{9}{4} = xy + yz + zx \end{cases}$$

Và bài toán trở thành tìm min:

$$P = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

Theo Cauchy Schwarz ta có ngay:

$$P \geq \frac{9}{2(x+y+z)}$$

Mà:

$$3(x+y+z) - \frac{9}{4} = xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

$$\iff x + y + z \leq \frac{9 - 3\sqrt{6}}{2}$$

(Chú ý rằng: $x + y + z \leq \frac{9}{2}$ nên loại trường hợp: $x + y + z \geq \frac{9 + 3\sqrt{6}}{2}$) Do vậy:

$$P \geq \frac{9}{9 - 3\sqrt{6}}$$

Bài toán đã được giải quyết! □

Bài toán

11 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \left|\log_{x^2+1}\left(4 - x^2\right) + \log_{4-x^2}\left(x^2 + 1\right)\right|$$

Đề thi THPT Cẩm Bình-Hà Tĩnh

Lời giải:
Hàm số xác định khi $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ x^2 + 1 \neq 1 \\ 4 - x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$ do $\log_{x^2+1}(4 - x^2), \log_{4-x^2}(x^2 + 1)$ cùng dấu nên

$$y = \left|\log_{x^2+1}\left(4 - x^2\right)\right| + \left|\log_{4-x^2}\left(x^2 + 1\right)\right| \geq 2\sqrt{\left|\log_{x^2+1}(4 - x^2)\right| \left|\log_{4-x^2}(x^2 + 1)\right|} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left|\log_{x^2+1}(4 - x^2)\right| = \left|\log_{4-x^2}(x^2 + 1)\right|$.
Hay $\left|\log_{x^2+1}(4 - x^2)\right| = \pm 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 2 khi $\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}} \end{array}\right.$ □

Bài toán

12 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y=x+\frac{11}{2x}+2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$$

với mọi $x>0$

Đề thi thử chuyên Hà Nội-Amsterdam lần 1

Lời giải:

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\left(1+\frac{7}{x^2}\right)(9+7)\geq\left(3+\frac{7}{x}\right)^2\Rightarrow 4\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}\geq 3+\frac{7}{x}\Rightarrow 2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}\geq\frac{3}{2}+\frac{7}{2x}$$

Do đó

$$y\geq x+\frac{11}{2x}+\frac{3}{2}+\frac{7}{2x}=x+\frac{9}{x}+\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{x\frac{9}{x}}+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\dfrac{15}{2}$ khi $x=3$ □

Bài toán

13 Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$.Chứng minh rằng

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq\frac{4}{27}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Chuyên Bạc Liêu

Lời giải:

Không giảm tính tổng quát giả sử

$$(b-a)(b-c)\leq 0\Rightarrow c(b-a)(b-c)\leq 0\Rightarrow b^2c-bc^2-abc+ac^2\leq 0\Rightarrow b^2c+c^2a\leq abc+bc^2$$

Suy ra

$$a^2b+b^2c+c^2a\leq abc+bc^2+a^2b=b(a^2+c^2+ac)\leq b(a+c)^2=\frac{1}{2}2b.(a+c)(a+c)\leq\frac{1}{2}\frac{2(a+b+c)}{27}=\frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $c=0;a=b=\dfrac{1}{2}$ □

Bài toán

14 Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $abc=1$ và số thực $n\leq 3$.Chứng minh rằng

$$a^2c+b^2a+c^2b+\frac{3n}{a+b+c}\geq 3+n$$

Đề thi thử THPT Chuyên Hạ Long Lần 2

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a^2c + a^2c + b^2a \geq 3\sqrt[3]{a^5b^2c^2} = 3a$$

Tương tự,

$$b^2a + b^2a + c^2b \geq 3\sqrt[3]{c^2a^2b^5} = 3b$$

$$c^2b + c^2b + a^2c \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^5} = 3c$$

Suy ra

$$a^2c + b^2a + c^2b \geq a + b + c$$

Ta chứng minh

$$a + b + c + \frac{3n}{a+b+c} \geq 3 + n$$

Hay

$$(a + b + c - 3)(a + b + c - n) \geq 0$$

Để ý rằng $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \geq n$.Suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ □

Bài toán

15 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Chuyên Hà Tĩnh

Lời giải:

Từ giả thiết ,đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ cho ta $0 < x + y + z \leq 3$

Ta có

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \geq \frac{3abc}{a + b + c} = \frac{3}{xy + yz + zx}$$

Mặt khác ta có

$$xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} \leq 3$$

Suy ra $P \geq 1$.Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $a = b = c = 1$ □

Bài toán

16 Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $(0; 1]$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy + 1} + \frac{1}{yz + 1} + \frac{1}{zx + 1} \leq \frac{5}{x + y + z}$$

Đề thi thử THPT Chuyên Lê Qúi Đôn Đà Nẵng

Lời giải:

Để ý rằng $xy+1-x-y=(1-x)(1-y)\geq 0$.Từ đó ta có

$$\begin{cases} xy+1\geq x+y \\ yz+1\geq y+z \\ zx+1\geq x+z \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}(x+y+z)\left(\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}\right) &\leq \frac{x}{xy+1}+\frac{y}{yz+1}+\frac{z}{zx+1}+1+1+1 \\ &\leq \frac{x}{xy+1}+\frac{y}{yz+y}+\frac{z}{zx+z}+3 \\ &= x\left(\frac{1}{1+yz}-\frac{z}{zx+y}-\frac{y}{xy+z}\right)+5 \\ &\leq x\left(1-\frac{z}{z+y}-\frac{y}{z+y}\right)+5 \\ &= 5\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh □

Bài toán

17 Cho a,b,c là ba cạnh tam giác .Chứng minh rằng

$$a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{2}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b}<2$$

Đề thi thử THPT Chuyên Lê Qúi Đôn Đà Nẵng

Lời giải:

Vì a,b,c là ba cạnh của tam giác ta có $\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$.

Đặt $x=\dfrac{a+b}{2};y=\dfrac{c+a}{2},z=a,\ (x,y,z>0)\Rightarrow x+y>z,y+z>x,z+x>y.$

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}<2$$

Mà $\dfrac{x}{y+z}<\dfrac{2x}{x+y+z}$,tương tự ta có

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}<2\frac{x+y+z}{x+y+z}=2$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh □

Bài toán

18 Xét các số thực a, b, c tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

Đề thi thử lần 2 THPT Nguyễn Huệ

Lời giải:

Ta có

$$P + 11 = 2 + \frac{3(b+c)}{2a} + 1 + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c} = (4a+3b+3c)\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} + \frac{4}{2a+3c}\right)$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$P + 11 \geq (4a+3b+3c)\frac{16}{4a+3b+3c} = 16 \Rightarrow P \geq 5$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = c = \frac{2}{3}a$ □

Bài toán

19 Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = xy + yz + zx + \frac{5}{x+y+z}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Nguyễn Tất Thành

Lời giải:

Đặt $t = x + y + z$ từ giả thiết suy ra $\begin{cases} xy + yz + zx = \dfrac{t^2-3}{2} \\ \sqrt{3} \leq t \leq 3 \end{cases}$.

Khi đó

$$A = \frac{t^2-3}{2} + \frac{5}{t}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{t} - \frac{3}{2}$ với $\sqrt{3} \leq t \leq 3$.

Ta có

$$f'(t) = t - \frac{5}{t^2} = \frac{t^3-5}{t^2} > 0 \quad \text{với mọi t} \in [\sqrt{3}; 3]$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[\sqrt{3}; 3]$.Do đó $f(t) \leq f(3) = \frac{14}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

Bài toán

20 Cho a, b, c là các số thực dương tuỳ ý thoả mãn $abc = 8$.Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2a+b+6} + \frac{1}{2b+c+6} + \frac{1}{2c+a+6}$$

Đề thi thử lần 2 THPT Nguyễn Tất Thành

Lời giải:

$$P = \frac{1}{2a+b+6} + \frac{1}{2b+c+6} + \frac{1}{2c+a+6} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+\frac{b}{2}+3} + \frac{1}{b+\frac{c}{2}+3} + \frac{1}{c+\frac{a}{2}+3}\right]$$

Đặt $x = \frac{a}{2}; y = \frac{b}{2}; z = \frac{c}{2}$ thì $xyz = 1; x, y, z > 0$.Khi đó

$$P = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x+y+3} + \frac{1}{2y+z+3} + \frac{1}{2z+x+3}\right]$$

Ta có

$x+y \geq 2\sqrt{xy}; x+1 \geq 2\sqrt{x} \Rightarrow 2x+y+3 \geq 2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1\right) \Rightarrow \frac{1}{2x+y+3} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}$

Tương tự ta có ,

$$\frac{1}{2y+z+3} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1}$$
$$\frac{1}{2z+x+3} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
P &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1} + \frac{1}{\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1}\right] \\
\Rightarrow P &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{yz}+\sqrt{y}+1\right)} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{zx}+\sqrt{z}+1\right)}\right] \\
\Leftrightarrow P &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+1}\right] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$ □

Bài toán

21 Cho x, y là các số thực không âm thay đổi và thoả mãn điều kiện $4\left(x^2+y^2+xy\right) \leq 1 + 2(x+y)$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + \sqrt{x+y} - x^2 - y^2$$

Đề thi thử lần 4 THPT Nguyễn Tất Thành

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra

$$3(x+y)^2+(x-y)^2 \le 1+2(x+y) \Rightarrow 3(x+y)^2 \le 1+2(x+y) \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x+y \le 1$$

vì x, y không âm nên $0 \le x+y \le 1$

$$P \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\sqrt{x+y}-\frac{1}{2}(x+y)^2=\sqrt{x+y}-\frac{1}{4}(x+y)^2$$

Đặt $t=x+y \Rightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow f(t)=\sqrt{t}-\dfrac{t^2}{4}$.

Nhận thấy $f(t)$ là hàm đồng biến nên ta có $f(t) \le f(1)=\dfrac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$ □

Bài toán 22 Cho x, y dương thoả mãn $x^2y+y^2x=x+y+3xy$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+\frac{(1+2xy)^2-3}{2xy}$$

Đề thi thử lần 5 THPT Nguyễn Tất Thành

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $x+y \ge 4$ và $P=(x+y)^2+\dfrac{3}{x+y}+1$

Nhận thấy hàm số trên đồng biến trên $[4;+\infty)$ nên $P \ge f(4)=\dfrac{71}{4}$ khi $x=y=2$ □

Bài toán 23 Chứng minh rằng

$$(\tan\alpha)^{\sin\alpha}+(\cot\alpha)^{\cos\alpha} \ge 2 \;\; \forall\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Đề thi thử THPT Quốc Học Huế

Lời giải:

- $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow VT \ge (\tan\alpha)^{\sin\alpha}+(\cot\alpha)^{\sin\alpha} \ge_{AM-GM} 2;$
- $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow VT \ge (\tan\alpha)^{\cos\alpha}+(\cot\alpha)^{\cos\alpha} \ge_{AM-GM} 2.$ □

Bài toán 24 Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2.Chứng minh rằng

$$\frac{52}{27} \le a^2+b^2+c^2+2abc<2$$

Đề thi thử lần 2 THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $p = \dfrac{a+b+c}{2} = 1$ nên $p-a; p-b; p-c$ là các số dương.
Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$0 < (1-a)(1-b)(1-c) \le \left[\frac{3-(a+b+c)}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow 1 < ab + bc + ca - abc \le \frac{28}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{52}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

Điều phải chứng minh □

Bài toán 25 Cho các số thực x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \sqrt{3x^2 + 7y} + \sqrt{5y + 5z} + \sqrt{7z + 3x^2}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$F^2 \le 3\left[6x^2 + 12(y+z)\right] \le 18\left[x^2 + 2\sqrt{2(y^2+z^2)}\right] = 18\left[x^2 + 2\sqrt{2(3-x^2)}\right] = f(x)$$

Khảo sát hàm số trên trên đoạn từ $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 90 khi $x = 1$.
Vậy giá trị lớn nhất của F là $3\sqrt{10}$ khi $x = y = z = 1$ □

Bài toán 26 Cho x, y, z là ba số thực dương có tổng bằng 3.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4xyz - 9x + 2024$$

Đề thi thử lần 1 THPT Diễn Châu 3

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$P \ge 2x^2+(y+z)^2-x(y+z)^2-9x+2024 = 2x^2+(3-x)^2-x(3-x)^2-9x+2024 = -x^3+9x^2-24x+2033 = f(x)$$

Khảo sát hàm số trên trên khoảng $(0; 3)$ ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $x = 2$ khi đó $f(x) = 2013$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 2013$ khi $x = 2; y = z = \dfrac{1}{2}$ □

Bài toán

27 Cho a, b, c dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Đông Sơn 1 Thanh Hoá

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^6}{64}}=\frac{3a^2}{4}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^6}{64}}=\frac{3b^2}{4}$$

$$\frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}}+\frac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}}+\frac{a^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^6}{64}}=\frac{3c^2}{4}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$P+\frac{a^2+b^2+c^2+9}{16}\geq\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

Do $a^2+b^2+c^2=3$ nên $P\geq\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ □

Bài toán

28 Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thoả mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng

$$P=a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq 4$$

Đề thi thử lần 2 THPT Đức Thọ Hà Tĩnh

Lời giải:

Ta có

$$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq a^2b+b^2c+c^2a$$

Suy ra

$$P\geq a^2+b^2+c^2+\frac{9-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}=a^2+b^2+c^2+\frac{9}{a^2+b^2+c^2}-1$$

Với $a^2+b^2+c^2\geq 3$ ta dễ suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ □

Bài toán

29 Cho $a, b, c \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2+1}}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Hàm Nghi Hà Tĩnh

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{a^3}{2\sqrt{1+b^2}} + \frac{a^3}{2\sqrt{1+b^2}} + \frac{1+b^2}{4\sqrt{2}} \geq 3\frac{a^2}{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}.$$

Tương tự ta cũng có ,

$$\frac{b^3}{2\sqrt{1+c^2}} + \frac{b^3}{2\sqrt{1+c^2}} + \frac{1+c^2}{4\sqrt{2}} \geq 3\frac{b^2}{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}.$$

$$\frac{c^3}{2\sqrt{1+a^2}} + \frac{c^3}{2\sqrt{1+a^2}} + \frac{1+a^2}{4\sqrt{2}} \geq 3\frac{c^2}{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P + \frac{6}{4\sqrt{2}} \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{9}{2\sqrt[6]{8}}$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ □

Bài toán

30 Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$.Chứng minh rằng :

$$\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 24$$

Đề thi thử lần 1 THPT Hoàng Lê Kha -Thanh Hoá

Lời giải:

Đặt

$$P = \frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2}$$

Ta có

$$[(1+a)(1+b)]^2 = [a+b+1+ab]^2 \geq 4(1+ab)(a+b)$$

Suy ra

$$\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} \geq 4\frac{(1+ab)(a+b)}{1+c^2} = \frac{4a(1+b^2)+4b(1+a^2)}{1+c^2} = 4a\frac{1+b^2}{1+c^2} + 4b\frac{1+a^2}{1+c^2}$$

Chứng minh tương tự ta có,

$$\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} \geq 4b\frac{1+c^2}{1+a^2} + 4c\frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

$$\frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 4c\frac{1+a^2}{1+b^2} + 4a\frac{1+c^2}{1+b^2}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên lại ta được

$$\begin{aligned} P &\geq 4a\left(\frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+b^2}\right) + 4b\left(\frac{1+a^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2}\right) + 4c\left(\frac{1+b^2}{1+a^2} + \frac{1+a^2}{1+b^2}\right) \\ &\geq 4.2\left(a+b+c\right) = 8(a+b+c) = 24 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán

31 Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 6.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Đề thi thử lần 2 THPT Kon Tum

Lời giải:

Theo bất đẳng $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ M &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \\ M &\geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \\ M &\geq \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{21}{(a+b+c)^2} = \frac{30}{(a+b+c)^2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$. □

Bài toán

32 Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $2ab + 5bc + 6ca = 6abc$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab}{b+2a} + \frac{4bc}{b+4c} + \frac{9ca}{a+4c}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Lê Hữu Trác I Hà Tĩnh

Lời giải:

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ ta có $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ 5x + 6y + 2z = 6 \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}P+6&=\frac{1}{x+2y}+\frac{4}{4y+z}+\frac{9}{z+4x}+6\\&=\frac{1}{x+2y}+\frac{4}{4y+z}+\frac{9}{z+4x}+x+2y+4z+z+z+4x\\&=\frac{1}{x+2y}+x+2y+\frac{4}{4y+z}+4y+z+\frac{9}{z+4x}+z+4x\\&\geq 2+4+6=12\end{aligned}$$

Vậy $P \geq 12$ khi $a=2; b=4; c=1$. □

Bài toán

33 Cho x, y, z là các số thực dương chứng minh rằng :

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1$$

Đề thi thử trường THPT Lê Hữu Trác II Hà Tĩnh

Lời giải:

Đặt $P=\dfrac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\dfrac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\dfrac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$(y+\sqrt{zx}+z)^2=\left(\sqrt{y}\sqrt{y}+\sqrt{z}\sqrt{x}+\sqrt{z}\sqrt{z}\right)\leq(y+x+z)(y+z+z)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}\geq\frac{2x^2+xy}{(x+y+z)(y+2z)}=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{2x^2+xy}{y+2z}+x-x\right)=\frac{2x}{y+z}-\frac{x}{x+y+z}$$

Tương tự ta có ,

$$\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}\geq\frac{2y}{x+z}-\frac{y}{x+y+z}$$

$$\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq\frac{2z}{x+y}-\frac{z}{x+y+z}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên lại ta được

$$P\geq 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)-1$$

Mà ta có

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{2}$$

Suy ra

$$P\geq 2-1=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. □

Bài toán

$\boxed{34}$ Cho x, y là hai số thực thoả mãn $x^2 - xy + y^2 = 2$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = x^2 + 2xy - 7y^2$$

Đề thi thử THPT Lí Tự Trọng Bình Định

Lời giải 1:

Nếu $y = 0$ thì $M = x^2 = 2$.
Nếu $y \neq 0$ thì đặt $t = \dfrac{x}{y}$.Từ giả thiết suy ra $t^2 - t + 1 = \dfrac{2}{y^2} > 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$
Và ta có

$$2M = 2\frac{x^2 + 2xy - 7y^2}{x^2 - xy + y^2} = 2\frac{t^2 + 2t - 7}{t^2 - t + 1},\ y \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số $f\,(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 7}{t^2 - t + 1},\ y \in \mathbb{R}$

$$f'\,(t) = \frac{-3t^2 + 16t - 5}{(t^2 - t + 1)^2}, f'\,(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = 5 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$f'\,(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f\,(t)$	1	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của $M = \dfrac{8}{3}$,giá trị nhỏ nhất của $M = -16$
Lời giải 2 :
Xét phương trình

$$\frac{t^2 + 2t - 7}{t^2 - t + 1} = m\ , t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)t^2 - (m + 2)t + m + 7 = 0\ , t \in \mathbb{R}$$

Để phương trình có nghiệm suy ra

$$\Delta = (m - 2)^2 - 4(m + 7)(m - 1) \geq 0 \Rightarrow -8 \leq m \leq \frac{4}{3}$$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $M = \dfrac{8}{3}$,giá trị nhỏ nhất của $M = -16$. $\square$

Bài toán

35 Cho ba số thực a, b, c không âm thoả mãn $a+b+c=\dfrac{3}{2}$.Chứng minh rằng :

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq \frac{125}{64}$$

Đề thi thử lần I THPT Mai Anh Tuấn Thanh Hoá

Lời giải:

Ta có

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq \frac{125}{64} \Rightarrow \ln(1+a^2)+\ln(1+b^2)+\ln(1+c^2) \geq 3\ln\frac{5}{4}$$

Xét hàm số $f(t) = \ln 1+t^2 - \dfrac{4}{5}t$ với $t \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$;$f'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{4}{5} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Từ đó suy ra

$$f(t) \geq \ln\frac{5}{4} - \frac{2}{5}\ \forall t \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$$

Do đó

$$\ln(1+a^2)+\ln(1+b^2)+\ln(1+c^2) - \frac{4}{5}(a+b+c) \geq 3\ln\frac{5}{4} - \frac{6}{5}$$

Từ đó suy ra

$$\ln(1+a^2)+\ln(1+b^2)+\ln(1+c^2) \geq 3\ln\frac{5}{4}$$

hay

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq \frac{125}{64}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$. □

Bài toán

36 Cho ba số thực dương a, b, c có tổng bằng 3.Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

Đề thi thử lần 1 THPT Nguyễn Thị Minh Khai Hà Tĩnh

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a+b^3+b^3} &\geq a - \frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2}\\ &\geq a - \frac{2}{9}b(a+a+1)\\ &= a - \frac{2}{9}b(2a+1)\\ &= a - \frac{2}{9}b - \frac{4}{9}ab\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có ,

$$\frac{b^2}{b+2c^3} \geq b - \frac{2}{9}c - \frac{4}{9}bc$$

$$\frac{c^2}{c+2a^3} \geq c - \frac{2}{9}a - \frac{4}{9}ca$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq \frac{7}{9}(a+b+c) - \frac{4}{9}(ab+bc+ca) \geq \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán

37 Cho ba số thực x, y, z thoả mãn $xyz = x + y + z$ và $x, y, z >$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x-1}{y^2} + \frac{y-1}{z^2} + \frac{z-1}{x^2}$$

Đề thi thử lần 2 THPT Nam Đông Quan Thái Bình

Lời giải:

Ta có

$$P = \frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \quad (1)$$

Mà

$$\frac{x-1+y-1}{y^2} + \frac{y-1+z-1}{z^2} + \frac{z-1+x-1}{x^2} = \sum (x-1)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \sum (x-1)\frac{2}{xy} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$P \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$ và dùng các đánh giá cơ bản ta có

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{3}$$

Từ đó suy ra

$$P \geq \sqrt{3} + 1 - 2 = \sqrt{3} - 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \sqrt{3}$ □

Bài toán

38 Cho các số dương a, b, c.Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}>4$$

Đề thi thử lần 1 THPT Ngô Gia Tự Bắc Ninh

Lời giải:

Đặt $x=b+c; y=c+a; z=a+b$ từ đó suy ra $a=\frac{-x+y+z}{2}; b=\frac{-y+z+x}{2}; c=\frac{-z+x+y}{2}$
Do $a, b, c>0$ nên $x, y, z>0$ từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}&=\frac{-x+y+z}{2x}+\frac{2(-y+z+x)}{y}+\frac{9(-z+x+y)}{2z}\\&=\left(-\frac{1}{2}-2-\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{y}{2x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{z}{2x}+\frac{9x}{2z}\right)+\left(\frac{2z}{y}+\frac{9y}{2z}\right)\\&\geq-7+2+3+6=4\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=2b; c=0$ vô lí nên suy ra dấu đẳng thức không xảy ra. □

Bài toán

39 Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $4(x+y+z)=3xyz$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{1}{2+x+yz}+\frac{1}{2+y+zx}+\frac{1}{2+z+xy}$$

Đề thi thử lần 3 THPT Ngô Gia Tự Bắc Ninh

Lời giải:

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $3xyz=4(x+y+z)\geq 4.3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\geq 8$
Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta được

$$2+x+yz\geq 2\sqrt{2x}+yz\geq 2\sqrt{2\sqrt{2x}yz}=2\sqrt{2\sqrt{2xyz}\sqrt{yz}}\geq 4\sqrt{2}\sqrt[4]{yz}$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\frac{1}{2+x+yz}\leq\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{yz}}\leq\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{yz}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{yz}\right)$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{1}{2+y+zx}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{zx}\right)$$
$$\frac{1}{2+z+xy}\leq\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{xy}\right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P\leq\frac{3}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$. □

Bài toán

40 Cho x, y, z dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{x}{1-yz}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-zx}\right)^2 + \left(\frac{z}{1-xy}\right)^2 \le \frac{9}{4}$$

Đề thi thử số 11 THPT Nguyễn Trãi

Lời giải 1 Ta có

$$\frac{x^2}{(1-yz)^2} \le \frac{x^2}{\left(1-\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$\frac{y^2}{(1-xz)^2} \le \frac{y^2}{\left(1-\frac{x^2+z^2}{2}\right)^2} = \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}$$
$$\frac{z^2}{(1-yx)^2} \le \frac{z^2}{\left(1-\frac{y^2+x^2}{2}\right)^2} = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$$

Vậy

$$P \le \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{4y^2}{(1+y^2)^2} + \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$$

Đặt $\begin{cases} a = x^2+1, b = y^2+1, c = z^2+1 \\ a+b+c = 4 \end{cases}$ khi đó

$$P \le \frac{4a-4}{a^2} + \frac{4b-4}{b^2} + \frac{4c-4}{c^2} = 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$
$$\le 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - 4\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}$$

Mà $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{4}$ nên ta xét hàm số $f(t) = 4t - \frac{4t^2}{3}, \quad t \ge \frac{9}{4} \Rightarrow f(t) \le \frac{9}{4}$

Lời giải 2

Ta có

$$\frac{x^2}{(1-yz)^2} \le \frac{x^2}{\left(1-\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2} = \frac{4x^2}{(2x^2+y^2+z^2)^2} \le \frac{x^2}{(x^2+z^2)(x^2+y^2)}$$

Suy ra

$$VT \le \sum \frac{x^2}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow (x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2) \ge \frac{8}{9}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x^2+y^2+z^2$$

□

Bài toán

41 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leq 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{x^2-xy+y^2} + \frac{1}{y^2-yz+z^2} + \frac{1}{z^2-zx+x^2}$$

Đề thi thử THPT Nguyễn Văn Cừ Hà Nội

Lời giải:

Ta có :

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 1 \geq \frac{3}{xy}$$

$$\frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 1 \geq \frac{3}{yz}$$

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} + 1 \geq \frac{3}{zx}$$

Suy ra

$$\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} + \frac{2}{z^3} + 3 \geq \frac{3}{xy} + \frac{3}{yz} + \frac{3}{zx}$$

Suy ra

$$P + 3 \geq \frac{3}{xy} + \frac{3}{yz} + \frac{3}{zx} + \frac{1}{x^2-xy+y^2} + \frac{1}{y^2-yz+z^2} + \frac{1}{z^2-zx+x^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có :

$$P + 3 \geq \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} + \sum \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2-xy+y^2} \right)$$

$$P + 3 \geq \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} + \sum \left(\frac{4}{x^2+y^2} \right)$$

$$P + 3 \geq \sum 4 \left(\frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2-xy+y^2} \right)$$

$$P + 3 \geq \frac{16}{(x+y)^2} + \frac{16}{(y+z)^2} + \frac{16}{(z+x)^2}$$

$$P + 3 \geq \frac{48}{\sqrt[3]{[(x+y)(y+z)(z+x)]}}$$

$$P + 3 \geq \frac{48.9}{(2x+2y+2z)^2} \geq \frac{48.9}{4.9} = 12$$

$$\Rightarrow P \geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

Bài toán

42 Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=\frac{1}{xy+2}+\frac{1}{yz+2}+\frac{1}{zx+2}$$

Đề thi thử lần 3 THPT Quế Võ 1

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$A\geq\frac{9}{xy+yz+zx+6}\geq\frac{9}{x^2+y^2+z^2+6}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. □

Bài toán

43 Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{4}{a^2+7}+\frac{4}{b^2+7}+\frac{4}{c^2+7}$$

Đề thi thử lần 3-1 THPT Quế Võ Số 1

Lời giải:

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geq\frac{4}{a+2b+c}\geq\frac{8}{a^2+2b^2+c^2+4}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{c+a}{\geq}\sum\frac{2}{a+2b+c}\geq\sum\frac{4}{a^2+2b^2+c^2+4}=\sum\frac{4}{a^2+7}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Bài toán

44 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn$28\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=4\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2013$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+a^2}}$$

Đề thi thử lần 4 THPT Quế Võ Số 1

Lời giải:

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ và sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có :

$$28(x^2 + y^2 + z^2) = 4(xy + yz + zx) + 2013 \leq 4(x^2 + y^2 + z^2) + 2013 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{2013}{24}$$

Mặt khác

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \leq \frac{2013}{8}$$

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 + (a + b)^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{3a + 2} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}}(3x + y)$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + c^2}} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}}(3y + z)$$
$$\frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + a^2}} \leq \frac{1}{8\sqrt{2}}(3z + x)$$

Từ đó suy ra

$$P \leq \frac{4}{8\sqrt{2}}(x + y + z) \leq \frac{\sqrt{2013}}{8}$$

Bài toán

$\boxed{\textbf{45}}$ Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x - 1) + y(y - 1) + z(z - 1) \leq 6$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{1}{x + y + 1} + \frac{1}{y + z + 1} + \frac{1}{z + x + 1}$$

Đề thi thử lần 1 Vĩnh Phúc

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) \leq 6$ ta có $18 \geq (x + y + z)^2 - 3(x + y + z) \Rightarrow 0 < x + y + z \leq 6$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có :

$$\frac{1}{x + y + 1} + \frac{x + y + 1}{25} \geq \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{x + y + 1} \geq \frac{2}{5} - \frac{x + y + 1}{25}$$

Tương tự cho các bất đẳng thức còn lại,ta có

$$A \geq \frac{6}{5} - \frac{2(x + y + z) + 3}{25} \geq \frac{6}{5} - \frac{2.6 + 3}{25} = \frac{3}{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$. □

Cách khác

Đặt $t = x + y + z$ $t \in (0; 6]$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$A \geq \frac{9}{2t + 3} \geq \frac{9}{2.6 + 3} = \frac{3}{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$. □

Bài toán

46 Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y - 1 = \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1}$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = (x+y)^2 - \sqrt{9-x-y} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thái Phiên Hải Phòng

Lời giải:

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$x + y - 1 = \sqrt{2x-4} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{3(x+y-1)} \Rightarrow 1 \leq x + y \leq 4$$

Đặt $t = x + y \;\; t \in [1; 4]$ ta có

$$P = t^2 - \sqrt{9-t} + \frac{1}{t} \Rightarrow P' = 2t + \frac{1}{2\sqrt{9-t}} - \frac{1}{t2t\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{9-t}(4t^2\sqrt{t}-1) + t\sqrt{t}}{2t\sqrt{9t-t^2}} > 0 \; \forall t \in [1; 4]$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{33}{2} - \sqrt{5}$ khi $t = 4$ hay $x = 4; y = 0$.Gía trị nhỏ nhất của P là $2 - 2\sqrt{2}$ khi $t = 1$ hay $x = 2; y = -1$ □

Bài toán

47 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thái Phúc Thái Bình

Lời giải:

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$P = \frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} = \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + 2\left(\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}\right) + 3\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \geq 2z + 4y + 6x = 4(x+y) + 2(x+z)$$

$$\geq 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{xz} = 4$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

Bài toán

48 Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = c^3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Trần Phú-Hà Tĩnh

Lời giải:

Do $a, b, c > 0$ nên đặt $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c}$ $x, y > 0$ khi đó $x^3 + y^3 = 1$.Ta được:

$$M = \frac{(x+y)^2 - 2xy - 1}{-(x+y) + xy + 1}$$

Đặt $t = x + y \Rightarrow xy = \frac{t^3 - 1}{3t}$

Vì $x, y > 0$ nên $t > 1$ và $t^2 \geq 4\frac{t^3-1}{3t} \Rightarrow 1 < t \leq \sqrt[3]{4}$

Ta viết lại biểu thức

$$M = 1 + \frac{3}{t-1} \Rightarrow M \geq \frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b; c = a\sqrt[3]{2}$. □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài toán

49 Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x+y-1=2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}$.Tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x(x-y)+y(y-x)}{2}+\frac{2(1+xy\sqrt{x+y})}{\sqrt{x+y}}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Xuân Trường

50 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x}}{y+z}+\frac{\sqrt{y}}{z+x}+\frac{\sqrt{z}}{x+y}$$

51 Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $ab+a+b=3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}-a^2-b^2$$

Đề thi thử THPT Đa Phúc

52 Cho bốn số thực a, b, c, d thoả mãn $-4\leq a, c\leq -2$,$2\leq b, d\leq 4$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}{(ac+bd)^2}$$

Đề thi thử lần 1 trường Quốc Học Quy Nhơn

53 Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x+y+z=1$ .Chứng minh rằng

$$\frac{3}{xy+yz+zx}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\geq 14$$

Đề thi thử THPT Chuyên Phan Đăng Lưu

54 Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $abc=1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+ab-a+5}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc-b+5}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca-c+5}}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An

55 Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c=6$.Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+1}}\geq 2$$

Đề thi thử lần 1 chuyên Lam Sơn Thanh Hoá

Bài toán

56 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $4ab + 2ac + 6b + 3c - 7a = 35$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab}{a+b} + \frac{2b}{2+b} + \frac{3c}{3+c}$$

Đề thi thử lần 6 chuyên KHTN Hà Nội

57 Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x, y > 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu

58 Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $x + y + z + 1 = 4xyz$.Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geq x + y + z$$

Đề thi thử lần 1 THPT Đặng Thúc Hứa Nghệ An

59 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = 1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b}}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thành Sen Hà Tĩnh

60 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} - 2\sqrt{xyz}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Nguyễn Xuân Ôn -Nghệ An

61 Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq e$.Chứng minh rằng :

$$\frac{x \ln x}{y+z} + \frac{y \ln y}{z+x} + \frac{z \ln z}{x+y}$$

Đề thi thử lần 2 THPT Nguyễn Xuân Ôn -Nghệ An

62 Cho $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ và $y \geq 1$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{[(4x-1)y - x]}$$

Đề thi thử THPT Như Thanh II-Thanh Hóa

Bài toán

63 Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thoả mãn $a + b + c = 1$.Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2+b}{b+c} + \frac{b^2+c}{c+a} + \frac{c^2+a}{a+b} \geq 2$$

Đề thi thử lần 1 THPT Nam Duyên Hà Thái Bình

64 Cho a, b, c dương thay đổi thoả mãn $a+b+c = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{22a^3+12ab^2+2012b^3}{22a^2+12ab+1944b^2} + \frac{22b^3+12bc^2+2012c^3}{22b^2+12bc+1944c^2} + \frac{22c^3+12ca^2+2012a^3}{22c^2+12ca+1944a^2}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Nam Khoái Châu Hưng Yên

65 Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \left(\sqrt{a^2+1}+a\right)^b \left(\sqrt{b^2+1}+b\right)^c \left(\sqrt{c^2+1}+c\right)^a$$

Đề thi thử lần 2 THPT Nam Khoái Châu Hưng Yên

66 Cho $x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = x + y$.Tìm giá trị lớn nhất ,giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = x^3 + y^3$$

Đề thi thử lần 1 THPT Nam Khoái Châu Hưng Yên

67 Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leq 1$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 6(x + y + z)$$

Đề thi thử THPT Ngô Trí Hoà Nghệ An

68 Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$.Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 5xy - 3y^2$$

Đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng -Đắk Lắk

69 Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $x \geq 3; x + z \leq 5$ và $x + y + z = 11$.Chứng minh rằng

$$xyz \leq 36$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thanh Thủy Phú Thọ

Bài toán

70 Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$.Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{2z+x+y}+\frac{1}{2y+z+x}\le 1$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

71 Cho $a, b > 0$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{a+3b}\ge\frac{1}{a+b}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

72 Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a, b, c \ge -\frac{3}{4} \\ a+b+c=1 \end{cases}$ .Chhuwngs minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{9}{10}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

73 Cho $a, b, c > 1$.Chứng minh rằng :

$$\frac{\log_b^2 a}{a+b}+\frac{\log_c^2 b}{b+c}+\frac{\log_a^2 c}{a+c}\ge\frac{9}{a+b+c}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

74Cho a là số thực dương.Chứng minh rằng

$$a^2+8\sqrt{a+1}>4a+8$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

75 Cho a, b, c là ba số thực dương.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+c+a}+\frac{1}{2c+a+b}\le\frac{ab+bc+ca}{4abc}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

76 Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2=1$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{x+2y}{2x-y+4}$$

Đề thi thử lần 1 THPT Thu Xà Quãng Ngãi

3.2 Bất đẳng thức trong đề thi thử các diễn đàn

Bài toán

1 Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn : $x(2x+2y-5)+y(y-3)+3=0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=(xy-x+1)^2+(xy-y+1)^2$$

Đề thi thử lần 1 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Giả thiết có thể viết lại thành:

$$(x+y-1)(x+y-2)=-(x-1)^2$$

Từ đó ta có được: $1\le x+y\le 2$

Mặt khác giả thiết cũng viết lại được dưới dạng:

$$2(x-1)^2+(y-1)^2=x+y-2xy\Rightarrow x+y\ge 2xy\Rightarrow 1\ge xy$$

Tìm giá trị nhỏ nhất.

Ta lại có biểu thức P có thể viết thành:

$$a^2-2ab+2b^2-2a+2b+2=P$$

Hay

$$a^2-2a(b+1)+2b^2+2b+2-P=0\ (1)$$

Trong đó $a=x+y(1\le a\le 2); b=xy(2\ge a\ge 2b)$

Coi (1) như một phương trình bậc 2 theo a khi đó để tồn tại $a;b$ ta phải có:

$$\Delta'\ge 0\Leftrightarrow P\ge b^2+1\Rightarrow P\ge 1$$

Vậy $minP=1$đạt được khi $a=1;b=0\Rightarrow x=1;y=0$

Tìm giá trị lớn nhất.

Xét hàm số

$$f(a)=a^2-2a(b+1)+2b^2+2b+2$$

Ta chi làm 2 trường hợp nhỏ sau:

- Nếu $b\ge\dfrac{1}{2}$ ta xét hàm số trên $[2b;2]$
  Dễ thấy hàm số đặt max tại $f(2)$ hoặc $f(2b)$ (mà $f(2)=f(2b)=2(b^2-b+1)$)
  Do đó:
  $$f(a)\le 2(b^2-b+1)=2[b(b-1)+1]\le 2$$
  Vậy trong trường hợp này $MaxP=2$ khi $x=y=1$.

- Nếu $b\le\frac{1}{2}$ ta xét hàm số trên $[1;2]$
  Hàm số đạt max tại $f(2)$ (vì $f(2)\ge f(1)$) nên ta cũng có giá trị Max như trường hợp trên.
  Kết luận: $MaxP=2$ khi $x=y=1$. □

Bài toán

$\boxed{2}$ Cho các số thực x, y, z không âm và không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = (xy + yz + zx)\left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2+z^2} + \frac{1}{z^2+x^2}\right)$$

Đề thi thử lần 2 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Lời giải 1

Giải sử $z = min(x; y; z)$ khi đó ta có:

$$x + y \geq 2z \Leftrightarrow xy + yz + xz \geq (x + \frac{z}{2})(y + \frac{z}{2})$$

Mà ta lại có:

$$\frac{1}{x^2+y^2} \geq \frac{1}{(x+\frac{z}{2})^2 + (y+\frac{z}{2})^2}$$
$$\frac{1}{y^2+z^2} \geq \frac{1}{(y+\frac{z}{2})^2}$$
$$\frac{1}{x^2+z^2} \geq \frac{1}{(x+\frac{z}{2})^2}$$

Từ những điều trên ta có:

$$P \geq (x+\frac{z}{2})(y+\frac{z}{2})\left(\frac{1}{(x+\frac{z}{2})^2+(y+\frac{z}{2})^2} + \frac{1}{(y+\frac{z}{2})^2} + \frac{1}{(x+\frac{z}{2})^2}\right)$$

Đặt: $x + \frac{z}{2} = a; y + \frac{z}{2} = b (a; b \geq 0)$ Ta có:

$$P \geq ab(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) = \frac{\frac{a}{b}}{(\frac{a}{b})^2+1} + \frac{a}{b} + \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

Đặt: $\frac{a}{b} = x (x \geq 0)$ ta khảo sát hàm $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + x + \frac{1}{x}$ với $x \geq 0$ để tìm được $minf(x) = \frac{5}{2}$

Do đó $MinP = \frac{5}{2}$ đạt được khi $a = b; c = 0$ hoặc các hoán vị. $\square$

Lời giải 2

Nhìn đề bài, ta nhớ đến BĐT quen thuộc của ngài Jack Garfunkel:

Với $a, b, c \geq 0$ và đôi một khác nhau thì:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Chứng minh:

Chuẩn hóa $ab + bc + ca = 1$

Chúng ta xét hai trường hợp

- TH1: $a+b+c \leq 2$

  Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}) \geq 5(a+b+c)$$

$$\iff 6+2(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}) \geq 5(a+b+c)$$

  Bất đẳng thức này luôn đúng theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$6+2(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}) \geq 6+2\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$=(a+b+c-2)(a+b+c-3)+5(a+b+c) \geq 5(a+b+c).$$

- $a+b+c \geq 2$ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^2+b^2+c^2+3) \geq 5(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\iff 2(a^2+b^2+c^2)+6 \geq 5(a+b+c)-5abc$$

  Bất đẳng thức này luôn đúng do

  $(a^2+b^2+c^2)+6 = 2(a+b+c)^2+2 = (2(a+b+c)-1)(a+b+c-2)+5(a+b+c) \geq 5(a+b+c)-5abc.$

  Vậy phép chứng minh hoàn tất ! Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c)$ là một trong các hoán vị của bộ $(0;1;1)$.

Lúc này thay a,b,c lần lượt bởi x^2,y^2,z^2 ta có

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2} \geq \frac{5}{2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên,chú ý rằng

$$xy+yz+zx = \sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)} \geq \sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

Ta có

$$(xy+yz+zx)(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}) \geq \frac{5(xy+yz+zx)}{2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}} \geq \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c)$ là một trong các hoán vị của bộ $(0;1;1)$.

Vậy $MinP = \frac{5}{2}$.Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c)$ là một trong các hoán vị của bộ $(0;1;1)$. □

Lời giải 3

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z = Min(x; y; z)$.
Đặt $\mathcal{P}_{(x;y;z)} = (xy+yz+zx).\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+z^2}\right)$ Ta sẽ chứng minh $\mathcal{P}_{(x;y;z)} \geq \mathcal{P}_{(x;y;0)}$
Hay là:

$$z(x+y).\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\right) \geq xy.\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+z^2}+\frac{1}{y^2+z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z(x+y).\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}\right) \geq xyz^2.\left(\frac{1}{y^2(y^2+z^2)}+\frac{1}{x^2(x^2+z^2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y).(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{y^2+z^2}+\frac{1}{z^2+x^2}) \geq xyz.(\frac{1}{y^2(y^2+z^2)}+\frac{1}{x^2(x^2+z^2)})$$

Và điều này đúng do

$$\frac{1}{x^2+y^2} > 0$$

$$\frac{x+y}{y^2+z^2} \geq \frac{xyz}{y^2(y^2+z^2)}$$

$$\frac{x+y}{x^2+z^2} \geq \frac{xyz}{x^2(x^2+z^2)}$$

Vậy ta có $\mathcal{P}_{(x;y;z)} \geq \mathcal{P}_{(x;y;0)}$ Cuối cùng ta sẽ chỉ ra

$$\mathcal{P}_{(x;y;0)} \geq \frac{5}{2}$$

Hay là :

$$\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy} \geq \frac{5}{2}$$

Điều này hiển nhiên đúng từ bất đẳng thức $AM-GM$: $\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{4xy} \geq 1+\frac{3(x^2+y^2)}{4xy} \geq \frac{3}{2}$

Vậy ta có $P_{Min} = \frac{5}{2}$.Đẳng thức xảy ra tại $x = y, z = 0$ và các hoán vị tương ứng □

Bài toán

3 Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{10a}{bc}+\frac{11b}{ac}+\frac{2012c}{ab}$$

Đề thi thử lần 3 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

$$P = f(c) = \frac{2012c}{ab}+\frac{1}{c}(\frac{10a}{b}+\frac{11b}{a})$$

Coi c là biến số;a,b là tham số; ta có:

$$f'(c) = \frac{2012}{ab}-\frac{1}{c^2}(\frac{10a}{b}+\frac{11b}{a})$$

$$= \frac{2012c^2-10a^2-11b^2}{ab} \geq \frac{2012-10.2^2-11.2^2}{ab} > 0$$

$$\Rightarrow f(c) \leq f(2) = \frac{4024}{ab} + \frac{5a}{b} + \frac{11b}{2a} = g(a)$$

Coi a là biến số;b là tham số; ta có:

$$g'(a) = \frac{-4024}{ba^2} + \frac{5}{b} - \frac{11b}{2a^2} \leq \frac{-4024}{2^3} + 5 - \frac{11}{4.2} < 0$$

$$\Rightarrow g(a) \leq g(1) = \frac{4029}{b} + \frac{11b}{2} = h(b)$$

$$h'(b) = \frac{-4029}{b^2} + \frac{11}{2} \leq 0 (b \in [1;2]) \Rightarrow h(b) \leq h(1) = 4029 + \frac{11}{2} = \frac{8069}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{8069}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ □

Bài toán

4 Cho các số thực x, y, z thỏa mãn : $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = (xy + yz + zx)\left[1 + \sqrt{4 - (x^2 + 2y^2 + 5z^2)^2}\right]$$

Đề thi thử lần 4 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 &= \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} + \frac{z^2}{\frac{1}{6}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \\ &= (x+y+z)^2 \end{aligned}$$

Vậy nên:

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geq 2(xy + yz + zx)$$
$$\Rightarrow 2P \leq t.(1 + \sqrt{4 - t^2})$$

Với $t = x^2 + 2y^2 + 5z^2 \leq 2$

Vậy ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của :

$$K = t.(1 + \sqrt{4 - t^2}) \ \ (t \leq 2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $2x = 3y = 6z$ □

Bài toán

5 Cho a, b, c các số dương thoả mãn : $2a^2 + 3b^2 + 5ab + 3bc + 2ac + c \leq 3 + 5a + 8b$ Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{8^a + 1}} + \frac{1}{\sqrt{8^b + 1}} + \frac{1}{\sqrt{8^c + 1}} \geq 1$$

Đề thi thử lần 5 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Thật vậy từ điều kiện ta biến đổi :

$$2a^2 + 3b^2 + 5ab + 3bc + 2ac + c \leq 3 + 5a + 8b$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2ab+2ac-6a+3ab+3b^2+3bc-9b+a+b+c-3\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a(a+b+c-3)+3b(a+b+c-3)+(a+b+c-3)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-3)(2a+3b+1)\leq 0 \quad (1)$$

Do $a,b,c>0$ nên từ (1) ta có : $a+b+c\leq 3$. .Lại có : $2^{a+b+c}=2^a\cdot 2^b\cdot 2^c\leq 8$. Đặt $m=2^a, n=2^b, p=2^c \Rightarrow mnp\leq 8$.
Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{1+m^3}=\sqrt{(1+m)(1-m+m^2)}\leq \frac{m^2+2}{2}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự, ta được

$$VT\geq \frac{2}{m^2+2}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{2}{p^2+2}$$

Vậy ta cần phải chứng minh

$$\frac{2}{m^2+2}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{2}{p^2+2}\geq 1$$

$$\text{hay } \frac{\frac{2}{m^2}}{1+\frac{2}{m^2}}+\frac{\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}+\frac{\frac{2}{p^2}}{1+\frac{2}{p^2}}\geq 1$$

Tiếp tục đặt :$t=\frac{1}{m^2}, u=\frac{1}{n^2}, v=\frac{1}{p^2}$. Với điều kiện $mnp\leq 8\Rightarrow tuv\geq \frac{1}{8}$. Khi đó ta cần chứng minh :

$$\frac{2t}{1+2t}+\frac{2u}{1+2u}+\frac{2v}{1+2v}\geq 1$$

Tới đây ta khai triển tòe loe ra và rút gọn ta thu được

$$4(ut+vt+uv)+16uvt\geq 1 \quad (*)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM Ta có : $4(ut+vt+ut)+16uvt\geq 12\sqrt[3]{t^2u^2v^2}+16uvt=12\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{64}=1$ Vậy $(*)$ được chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=u=v=\frac{1}{4}$ hay $m=n=p=2$ hay $a=b=c=1$. □

Bài toán

$\boxed{6}$ Cho các số thực dương x,y thỏa điều kiện :$x\left(1-\frac{1}{y}\right)+y\left(1-\frac{1}{x}\right)=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=xy+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}$$

Đề thi thử lần 8 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:
Xét bổ đề:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^+d^2)}\geq a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq ac+bd$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd$$

$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2\geq 0$$

Áp dụng bổ đề ta có:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\geq\sqrt{4+(x+y)^2}$$

Từ giả thiết ta có:
*) $\Rightarrow x+y=4+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 6\Rightarrow\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\geq 2\sqrt{10}$
*) $xy=\dfrac{(x+y)^2}{x+y-2}=9+\dfrac{(x+y-6)(x+y-3)}{x+y-2}\geq 9$
Vậy $P\geq 9+2\sqrt{10}$.Dấu $=$ xảy ra khi $x=y=3$. □

Lời giải 2
Ta có

$$x\left(1-\frac{1}{x}\right)+y\left(1-\frac{1}{y}\right)=4\Leftrightarrow x+y=4+\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}+2$$

$$\Rightarrow xy=\frac{(x+y)^2}{x+y-2}$$

Mặt khác ta có :

$$x+y=4+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 6$$

Ta có

$$\sqrt{(1^2+3^2)(1^2+x^2)}+\sqrt{(1^2+3^2)(1^2+y^2)}\geq 3x+1+3y+1$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\geq\frac{1}{\sqrt{10}}(3(x+y)+2)$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{(x+y)^2}{x+y-2}+\frac{1}{\sqrt{10}}(3(x+y)+2)$$

Đặt

$$t=x+y\Rightarrow t\geq 6$$

Xét hàm số

$$f(t)=\frac{t^2}{t-2}+\frac{1}{\sqrt{10}}(3t+2)\,;t\geq 6$$

Ta có

$$f'(t)=\frac{t^2-4t}{(t-2)^2}+\frac{3}{\sqrt{10}}>0$$

với mọi $t\geq 6\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[6;+\infty)$

$$\Rightarrow f(t)\geq f(6)=9+2\sqrt{10}$$

. Dấu " = " xảy ra$\Leftrightarrow t = 6$

$$\Rightarrow P \geq 9 + 2\sqrt{10}$$

. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 3$

Vậy $P_{min} = 9 + 2\sqrt{10}$ khi $x = y = 3$. □

Bài toán

7 Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$T = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012\,(xy + yz + zx)}.$$

Đề thi thử lần 09 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Lời giải 1

Ta xét $f(x) = \dfrac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012\,(xy + yz + zx)}$ thì

$$f'(x) = -\frac{25}{4}\frac{(y+z)^2\,(6\,x + 503\,y + 503\,z)}{(3\,x^2 + 503\,xy + 503\,yz + 503\,zx)^2} < 0$$

Suy ra

$$T = f(x) \geq f(3) = \frac{25}{4}\frac{(y+z)^2}{27 + 1509y + 1509z + 503yz} = g(y)$$

$$g'(y) = \frac{25}{4}\frac{(y+z)\,(54 + 1509\,y + 503\,yz + 1509\,z - 503\,z^2)}{(27 + 1509\,y + 503\,yz + 1509\,z)^2}$$

Dễ thấy: $54 + 1509\,y + 503\,yz + 1509\,z - 503\,z^2 = 54 + 1509\,y + 503\,yz + 503z(3 - z) > 0$ Suy ra

$$g(y) \geq g(1) = \frac{25}{16}\frac{(1+z)^2}{384 + 503z} = h(z)$$

$$h'(z) = \frac{25}{16}\frac{(1+z)(265 + 503z)}{(384 + 503z)^2} > 0$$

Suy ra $h(z) \geq h(1) = \dfrac{25}{3548}$

Vậy $T \geq \dfrac{25}{3548}$ □

Lời giải 2

Ta có

$$T \geq \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 2012\dfrac{(y+z)^2}{4}} \geq \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 503(y+z)^2}$$

Xét hàm $m(x) = 12x^2 + 2012x(y+z) + 503(y+z)^2, x \in [1; 3]$,

có $m'(x) = 24x + 2012(y+z) > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Do đó $m(x)$ đồng biến trên $[1; 3]$, suy ra $T(x)$ nghịch biến trên $[1; 3]$.

Suy ra $T(x) \geq T(3) = \dfrac{25t^2}{108 + 6036t + 503t^2} = f(t)$, với $t = y + z \in [2; 6]$.

Lại có $f(t) = \dfrac{150900t^2 + 540t}{(108 + 6036t + 503t^2)^2} > 0, \forall t \in [2; 6]$.

nên f đồng biến trên $[2; 6]$, và do đó $f(t) \geq f(2) = \dfrac{25}{3548}$.

Cuối cùng $\min T = \dfrac{25}{3548}$ khi $x = 3; y = z = 1$. □

Bài toán

$\boxed{8}$ Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực thỏa mãn $3 < ac,\ bc < 6; c \in [2; 3]; 2c(a^2 + b^2) + b(ab + c) + c(ac + b) > b(b^2 + c^2) + 2ac(1 + 2b)$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a - 2b}{b - 1} - \frac{2b - 2}{a - 3} - \frac{2a - 6}{a - b} + 9\sqrt[3]{(a - 3)(1 - b)(a - b)}$$

Đề thi thử lần 10 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Quan sát biểu thức P nhận thấy rằng biến c ở giả thiết có vẻ như thừa. Vậy, biến c được cho trong giả thiết có mục đích gì? Tạm thời như thế. Bằng phép đặt cơ bản ta sẽ đưa biểu thức P về dạng đối xứng với ba biến $x = a - b,\ y = b - 1,\ z = 3 - a \Rightarrow x + y + z = 2$. Khi đó

$$P = 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) + 9\sqrt[3]{abc}$$

Phải chăng giả thiết nhằm mục đích cho biết điều kiện các biến x, y, z? Từ hai giả thiết đầu suy ra $1 \leq \dfrac{3}{c} < a,\ b < \dfrac{6}{c} \leq 3$ hay $y,\ z > 0$. Đó cũng là cơ sở để ta có định hướng phân tích giả thiết thứ ba làm sao để có $x = a - b > 0$. Thật vậy

$$2c(a^2+b^2)+b(ab+c)+c(ac+b) > b(b^2+c^2)+2ac(1+2b) \iff (a-b)[(b-c)^2+c(a-1)] > 0 \iff a-b > 0$$

Qua những suy luận như trên, ta có một bài toán tương đương như sau: Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) + 9\sqrt[3]{xyz}$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có được

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 3\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\frac{y}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \geq 3\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Suy ra

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{2}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Tiếp tục sử dụng $AM - GM$ ta có $P \geq 12$.

Vậy $\boxed{\min P = 12 \iff x = y = z = \dfrac{2}{3} \iff a = \dfrac{7}{3},\ b = \dfrac{5}{3}.}$ □

Bài toán

9 Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $a, b \geq 1$ và $abc = 1$.Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2} \leq 3$$

Đề thi thử lần 11 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

- Đầu tiên, dễ dàng dự đoán điểm rơi $a = b = c = 1$.
- Phương pháp đầu tiên chúng ta có thể nghĩ đến ngay đó là $U.C.T$ nhưng nó đã bị bất lực trong bài toán này. Tiếp tục hãy thử một số kĩ năng đổi biến nếu có đủ sức thử nghiệm (bậc lớn và phức tạp quá).
- Câu hỏi đặt ra: Biểu thức đối xứng theo ba biến độc lập với nhau, tại sao giả thiết lại cho điều kiện $a, b \geq 1$. Điều này muốn gợi ý cho chúng ta biết rằng hai biến a, b có thể có một mối liên hệ nào đó. Chẳng hạn, $(a-1)(b-1) \geq 0,\ a+b-2 \geq 0,\ \ldots$ Biến c có vẻ như chỉ có mối liên hệ với hai biến kia qua đẳng thức $abc = 1$.
- Với đặc điểm mà ta phân tích ở trên, ta có thể tạm thời tách rời biến c như sau:

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2} \leq 3 \iff \frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2} \leq 3-\frac{1}{(c^2-c+1)^2}$$

- Nhận thấy

$$2-\frac{1}{(c^2-c+1)^2}=\frac{2c^4-4c^3+6c^2-4c+1}{(c^2-c+1)^2}=\frac{(c-1)^4+c^4}{(c^2-c+1)^2} \geq \frac{c^4}{(c^2-c+1)^2}=\frac{1}{(a^2b^2-ab+1)^2}$$

- Do đó, bài toán sẽ được chứng minh nếu chúng ta chứng minh được BĐT hai biến sau đây:

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2} \leq 1+\frac{1}{(a^2b^2-ab+1)^2} \quad (\star)$$

- Thật may mắn khi BĐT $(\star)$ là một BĐT đúng. Chúng ta có thể chứng minh nó bằng các phép biến đổi tương đương và nhớ tận dụng giả thiết $a,\ b \geq 1$. □

Lời giải 2

Thoạt nhìn vào bài toán, ta nghĩ ngay tới bổ đề quen thuộc: $(x^2-x+1)^2 \geq \dfrac{x^4+1}{2}$.
Sử dụng bổ đề này, dễ thấy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a^4+1}+\frac{1}{b^4+1}+\frac{1}{c^4+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Để cho gọn, ta đặt $a^4 = x, b^4 = y, c^4 = z$. Khi đó, bất đẳng thức sẽ trở thành

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} \leq \frac{3}{2}$$

Với $x, y \geq 1,\ z > 0,\ xyz = 1$. Tới đây thì đơn giản hơn nhiều rồi. Ý tưởng tiếp theo mà hẳn ai cũng nghĩ đến đó là chỉ việc thay $z = \dfrac{1}{xy}$ để quy bài toán ba biến về hai biến:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{xy}{xy+1} \leq \frac{3}{2}$$

Lại để ý rằng nếu cho $x = 1$ hoặc $y = 1$ thì bất đẳng thức trên sẽ trở thành đẳng thức. Điều này có nghĩa là nếu sử dụng biến đổi tương đương thì sẽ xuất hiện nhân tử chung là $(x-1)(y-1)$. Thật vậy, quy đồng mẫu số và thu gọn bất đẳng thức trên lại, ta dễ dàng thu được

$$(xy-1)(x-1)(y-1) \geq 0$$

Hiển nhiên đúng với $x, y \geq 1$. Chứng minh hoàn tất . □

Bài toán

$\boxed{10}$ Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $27abc + 9(ab + bc + ca) - 4 = 0$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+2}}$$

Đề thi thử lần 12 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Áp dụng AM-GM có

$$4 - 27abc = 9(ab + ac + bc) \geq 27\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{27} \Rightarrow ab + ac + bc \geq \frac{1}{3}$$

Áp dụng C-S có

$$T^2 \leq 3\left(\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2}\right) = \frac{3}{2}\left(3 - \sum \frac{a^2}{a^2+2}\right)$$

Mặt khác $\sum \frac{a^2}{a^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+18(ab+bc+ac)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2 + \frac{16(a+b+c)^2}{3}}$

$\frac{3}{19}$ Do đó T$\leq \frac{9}{\sqrt{19}}$ □

Bài toán

$\boxed{11}$ Cho các số thực dương $a; b; c$ thỏa mãn:$a^2 + b^2 + c^2 = 36$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = (a + \sqrt{a^2+2013})^{ab}.(b + \sqrt{b^2+2013})^{bc}.(c + \sqrt{c^2+2013})^{ca}$$

Đề thi thử lần 13 diễn đàn k2pi.net

Lời giải:

Bổ đề 1: Cho $a, b, c \in R$. Ta luôn có:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

Chứng minh:

Cách 1: BĐT

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a^2-b^2-ab+2bc-ac)^2 + (b^2-c^2-bc+2ca-ab)^2 + (c^2-a^2-ca+2ab-bc)^2] \geq 0$$

Cách 2: BĐT

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}[(a^2-2b^2+c^2+3bc-3ac)^2 + (b^2-2c^2+a^2+3ca-3ab)^2 + (c^2-2a^2+b^2+3ab-3bc)^2] \geq 0$$

Bổ đề 2:Với mọi $a > 0$ thì luôn có:

$$a\ln\left(a+\sqrt{a^2+2013}\right)-\left(\frac{\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)}{36}+\frac{\sqrt{3}}{810}\right)a^3-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)+\frac{4}{45}\le 0$$

Chứng minh:
Xét hàm $f(a) = VT$

$$f'(a)=-\frac{1}{12}a^2\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)-\frac{\sqrt{3}}{270}a^2+\frac{a}{\sqrt{a^2+2013}}+\ln\left(a+\sqrt{a^2+2013}\right)$$

Ta thấy rằng:

$$f''(a)=-\frac{a}{6}\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)-\frac{\sqrt{3}a}{135}+\frac{a^2+4026}{\left(a^2+2013\right)^{3/2}}$$

Và

$$f'''(a)=-\frac{\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)}{6}-\frac{\sqrt{3}}{135}-\frac{a\left(a^2+8052\right)}{\left(a^2+2013\right)^{5/2}}<0$$

Suy ra $f''(a)$ nghịch biến, suy ra $f''(a) < f''(0) < 0$, suy ra $f'(a)$ nghịch biến, suy ra $f'(a) = 0$ có tối đa 1 nghiệm
Dễ thấy $f'(2\sqrt{3}) = 0$ nên $f(a) \le f(2\sqrt{3}) = 0$
Kết thúc chứng minh bổ đề 2
Trở lại bài toán:

$$\ln M=\sum ab\ln\left(a+\sqrt{a^2+2013}\right)$$

Theo bổ đề 2 thì:

$$\ln M\le\left(\frac{\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)}{36}+\frac{\sqrt{3}}{810}\right)(a^3b+b^3c+c^3a)+\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left(2\sqrt{3}+45\right)-\frac{4}{45}\right)(a+b+c)$$

Theo Bổ đề 1 thì $a^3b + b^3c + c^3a \le 432$
Theo Cauchy thì $a + b + c \le 6\sqrt{3}$
Từ đó ta được $\ln M \le 36\ln(2\sqrt{3} + 45)$
Suy ra $M \le (2\sqrt{3} + 45)^{36}$ □

Bài toán

$\boxed{12}$ Cho $x; y; z$ là các số thực thuộc $[1; 2]$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz(x+y+z)}$

Đề thi thử lần 14 diễn đàn k2pi.net

Lời giải 1
Xét hàm

$$f(x)=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz(x+y+z)}$$

Ta có

$$f'(x)=\frac{(xy+yz+zx)(x(y^2+z^2)-yz(y+z)}{x^2yz(x+y+z)^2}$$

Do đó

$$f(x)\le\max\{f(1),f(2),f(\frac{yz(y+z)}{y^2+z^2})\}$$

Xét $f(\frac{yz(y+z)}{y^2+z^2}) = \frac{2(y^2+z^2)}{(y+z)^2} = \frac{2(t^2+1)}{(t+1)^2} = g(t)$ Với $t = \frac{y}{z}, t \in [\frac{1}{2}, 2]$ $g'(t) = \frac{4(t-1)}{(t+1)^3}$ Suy ra $g(t) \le \max\{g(\frac{1}{2}), g(2)\} = \frac{10}{9}$ Xét $f(1) = \frac{y^2z^2+y^2+z^2}{yz(1+y+z)} = h(y)$ Ta có

$$h'(y) = \frac{(yz+y+z)(yz^2-z^2+y-z)}{y^2z(1+y+z)^2}$$

Suy ra $h(y) \le \max\{h(1), h(2), h(\frac{z(z+1)}{z^2+1})\}$
TH1: $h(1) = \frac{2z^2+1}{z(2+z)} = \frac{(7z-4)(z-2)}{8z(z+2)} + \frac{9}{8} \le \frac{9}{8}$
TH2: $h(2) = \frac{(13z-10)(z-2)}{10z(z+3)} + \frac{6}{5} \le \frac{6}{5}$
TH3: $h(\frac{z(z+1)}{z^2+1}) = \frac{2(z^2+1)}{(z+1)^2} = \frac{4(2z-1)(z-2)}{9(z+1)^2} \le \frac{10}{9}$
Xét $f(2)$ thì tương tự...
Tóm lại $\max P = \frac{6}{5}$ khi $(x, y, z) = (2, 2, 1)$ và hoán vị.

Lời giải 2

Ta đưa P về 2 biến sau đó là 1 biến như sau Đặt y=hx và z=kx Giả sử $z \ge y \ge x \Rightarrow 2 \ge h \ge k \ge 1$ Khi đó

$$P = \frac{h^2+h^2k^2+k^2}{hk\,(1+h+k)} \le \frac{4+4k^2+k^2}{2k\,(1+2+k)}$$

Thật vậy bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{(h^2-4)\,(k^2+1)}{4+5k^2} \le \frac{(h-2)\,(h+3+k)}{2\,(3+k)} \Leftrightarrow (2-h)\left(\frac{(h+2)\,(k^2+1)}{4+5k^2} - \frac{h+3+k}{2\,(3+k)}\right) \ge 0$$

Thấy $(h+2)\,(k^2+1)\,(2k+6) - (4+5k^2)\,(h+k+3) = h\,(2k^3+k^2+2k+2) - k^3 - 3k^2 \ge k^3 - 2k^2 + 2k + 2 = k\,(k-1)^2 + k + 2 > 0$ Do đó $P \le \frac{4+5k^2}{2k\,(3+k)} \le \frac{6}{5} \Leftrightarrow 13k^2 - 36k + 20 \le 0 \Leftrightarrow (k-2)\,(13k-10) \le 0$ đúng với mọi $k \in [1, 2]$ Vậy $P_{max} = \frac{6}{5}$

Lời giải 3

Đặt $y = hx$ và $z = kx$.Giả sử $z \ge y \ge x \Rightarrow 2 \ge h \ge k \ge 1$.
Khi đó

$$P = \frac{h^2+h^2k^2+k^2}{hk\,(1+h+k)} = f(h)$$

Ta có

$$f'(h) = \frac{(hk+h+k)(k^2(h-1)+h-k)}{h^2k(1+h+k)^2} \ge 0$$

Suy ra

$$P \le f(2) = \frac{5k^2+4}{2k(k+3)} = \frac{(13k-10)(k-2)}{10k(k+3)} + \frac{6}{5} \le \frac{6}{5}$$

Bài toán

$\boxed{13}$ Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn $xy + yz + zx > 0$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{\sqrt{x(y+z)+2z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y(x+4z)}} + 4\sqrt{z+1} + 2\sqrt{x+2y+4}$$

Đề thi thử lần 15 diễn đàn k2pi.net

Lời giải 1

$$4\sqrt{z+1} + 2\sqrt{x+2y+4} = 4\left(\sqrt{z+1} + \sqrt{\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + 1}\right)$$

$$\geq 4\left(1 + \sqrt{\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + z + 1}\right) = 4 + 2\sqrt{x+2y+4z+4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y\left(x+4z\right)}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2y\left(x+4z\right)}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{x+2y+4z}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x\left(y+z\right)+2z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x\left(y+z\right)+2z^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{16z^2+8xy+8xz}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{x+2y+4z}$$

Đặt $t = x + 2y + 4z$, $t > 0$

$$P \geq f(t) = \frac{4\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{t+4} + 4$$

$$f'(t) = \frac{-4\sqrt{2}}{t^2} + \frac{1}{\sqrt{t+4}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}\sqrt{t+4} = t^2$$

$$\Rightarrow t^4 - 32t - 128 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

$$f(4) = 4 + 5\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(t) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(t) = +\infty$$

Từ đó suy ra: GTNN của hàm số $f(t)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là $f(4) = 4 + 5\sqrt{2}$

Giá trị nhỏ nhất của P là $4 + 5\sqrt{2}$ đạt với $(x; y; z) = (2; 1; 0)$ □

Lời giải 2

Ta có:

$$P = 2(\sqrt{4z+4} + \sqrt{x+2y+4}) + \frac{1}{\sqrt{x(y+z)+2z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y(x+4z)}} = 2Q + R$$

+)Xét:

$$Q = \sqrt{4z+4} + \sqrt{x+2y+4} \geq 2 + \sqrt{x+2y+4z+4} \geq 2 + \sqrt{4+x+2y+3z}$$

(Do $\sqrt{a+4} + \sqrt{b+4} \geq 2 + \sqrt{4+a+b}(\forall a; b \geq 0)$; dấu bằng xảy ra khi và chỉ $ab = 0$)

+)Xét $R = \dfrac{1}{\sqrt{x(y+z)+2z^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{y(x+4z)}}$

$\geq \dfrac{2}{\sqrt[4]{(xy+xz+2z^2)(\text{yx}+4zy)}} \geq \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2xy+xz+2z^2+4zy}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(x+2z)(z+2y)}} \geq \dfrac{4\sqrt{2}}{x+2y+3z}$

Đặt $t = x+2y+3z > 0$.Suy ra: $P = 2(2+\sqrt{4+t}) + \dfrac{4\sqrt{2}}{t}$

Xét hàm số $f(t) = 2(2+\sqrt{4+t}) + \dfrac{4\sqrt{2}}{t}$ trên $(0;+\infty)$ $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4+t}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 4$

$\Rightarrow f(t) \geq f(4) = 4+5\sqrt{2}$ Vậy $\min P = 4+5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2; y = 1; z = 0$ □

Bài toán

14 Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2 = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

Đề thi số 1 diễn đàn boxmath.vn

Lời giải 1

Đầu tiên ta chứng minh BĐT: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, $\forall\ a,\ b,\ c,\ d\ \in R$

Bằng cách bình phương 2 vế và thu gọn, ta đưa về BĐT tương đương là: $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd$

BĐT đúng theo BĐT *Bunhiacovsky*.

Vậy $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = kc$ và $b = kd$ $(k \in R)$.

Trở lại bài Toán. Sử dụng điều kiện và BĐT trên ta có:

$$\begin{aligned}
P &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \\
&= x\sqrt{(x+y)^2-y^2} + y\sqrt{(x+y)^2-x^2} \\
&= x\sqrt{x^2+2xy} + y\sqrt{y^2+2yx} \\
&= \sqrt{(x^2)^2+(x\sqrt{2xy})^2} + \sqrt{(y^2)^2+(y\sqrt{2xy})^2} \\
&\geq \sqrt{(x^2+y^2)^2+2xy(x+y)^2}
\end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)^2+2xy(x+y)^2 &= (x^2+y^2)^2+2xy \\
&= (x^2+y^2)^2+(x+y)^2-(x^2+y^2) \\
&= (x^2+y^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Nên ta suy ra

$$P \geq \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy GTNN của P là $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Nếu cho điều kiện là x,y không âm thì $P=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\le x.1+y.1=1$

Đẳng thức xảy ra khi (x,y) là một hoán vị của $(0;1)$. □

Lời giải 2

Ta có :

$$P^2=x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Hay

$$x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{(x^2y^2+2xy)}$$

Hay

$$P^2=1-2xy-2x^2y^2+2xy\sqrt{(x^2y^2+2xy)}$$

Đặt $t=xy$.Ta có $0<t\le\dfrac{1}{4}$

$$f(t)=1-2t+2t^2+2t\sqrt{t^2+2t}$$

$$f'(t)=-2+4t+2\sqrt{t^2+2t}+\frac{2t(t+1)}{\sqrt{t^2+2t}}<0$$

với mọi t thoả $0<t\le\dfrac{3}{4}$. Suy ra :f(t) là hàm nghịch biến.$f(t)\ge f(\dfrac{1}{4})=\dfrac{3}{4}$.Suy ra $P\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ □

Lời giải 3

Ta có : $x+y=1\Rightarrow x;y\in(0;1)$

Do đó ta có :

$P=x\sqrt{1-(1-x)^2}+(1-x)\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{2x-x^2}+(1-x)\sqrt{1-x^2}$ Ta sẽ khảo sát hàm số P(x) với

Có $\quad P‘(x)=\dfrac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}-\dfrac{(1-x)(1+2x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
&P'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}-\frac{(1-x)(1+2x)}{\sqrt{1-x^2}}=0\\
&\Leftrightarrow\frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{(1-x)(1+2x)}{\sqrt{1-x^2}}\\
&\Leftrightarrow(3x-2x^2)\sqrt{(1-x)(1+x)}=(1-x)(1+2x)\sqrt{x(2-x)}\\
&\Leftrightarrow(3-2x)\sqrt{x(1+x)}=(1+2x)\sqrt{(1-x)(2-x)}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $P_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$ □

Bài toán

$\boxed{15}$ Cho các số thực thay đổi x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{16}{25}xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{5}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}$$

Đề thi số 2 diễn đàn boxmath.vn

Lời giải:

Áp dụng BĐT: $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$

Ta có: $P \geq \dfrac{3}{10}(x+y)^2 + \dfrac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)} \geq |(x+y)z| + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}$

$\geq (xy + yz + zx) - \sqrt{10(xy + yz + zx)}$

Đặt $t = \sqrt{xy + yz + zx} \Rightarrow t \geq 0$

$\Rightarrow P \geq t^2 - \sqrt{10}t$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \sqrt{10}t$ với $t \geq 0$

Ta có $f'(t) = 2t - \sqrt{10}, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có $Minf(t) = f(\dfrac{\sqrt{10}}{2}) = -\dfrac{5}{2}$

Vậy $MinP = -\dfrac{5}{2}$

Dấu " = " xảy ra khi $x = y$ và $z^2 = \dfrac{9}{25}(x+y)^2$ và $xy + yz + zx = \dfrac{5}{2}$

Hay $x = y = \dfrac{5}{\sqrt{34}}, z = \dfrac{6}{\sqrt{34}}$ hoặc $x = y = -\dfrac{5}{\sqrt{34}}, z = -\dfrac{6}{\sqrt{34}}$ □

Bài toán

$\boxed{16}$ Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $2(a^4+b^4+c^4)-3(a^2+b^2+c^2)+12 = (a+b+c)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{3b+c} + \frac{b^2}{3c+a} + \frac{c^2}{3a+b}$$

Đề thi số 3 diễn đàn boxmath.vn

Lời giải:

Thu gọn giả thiết, ta được: $ab + bc + ca = (a^4 + b^4 + c^4) - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 6 = \sum(a^4 + 1) - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 3$ Suy ra $a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 3$

Ta có:

$$P \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum(3b+c)} = \frac{(\sum a)^2}{4(a+b+c)} \geq \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $a = b = c = 1$ □

Bài toán

17 Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $z + y + z \geq 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = 2^x x + 2^y y + 2^z z$$

Đề thi số 4 diễn đàn boxmath.vn

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử: $x \geq y \geq z \Rightarrow 2^x \geq 2^y \geq 2^z$.

Ta có:

$2^x x + 2^y y + 2^z z \geq 2^x y + 2^y x + 2^z z \geq 2^x y + 2^y z + 2^z x$

Tương tự ta cũng có:

$2^x x + 2^y y + 2^z z \geq 2^x z + 2^y x + 2^z y$

$\Rightarrow 3(2^x x + 2^y y + 2^z z) \geq (2^x x + 2^y y + 2^z z) + (2^x y + 2^y z + 2^z x) + (2^x z + 2^y x + 2^z y) \geq (2^x + 2^y + 2^z)(x + y + z) \geq 3(2^x + 2^y + 2^z)$

$\Rightarrow 2^x x + 2^y y + 2^z z \geq 2^x + 2^y + 2^z \geq 3\sqrt[3]{2^{x+y+z}} \geq 6$

$\Rightarrow Min(P) = 6$ Xảy ra khi: $x = y = z = 1$

Bài toán

18 Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = ab + bc + ca$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{6 + (a - b + 2)^2 + (b - c + 2)^2 + (c - a + 2)^2}{2} - \frac{9}{(ab^2 + bc^2 + ca^2)^2}$$

Đề thi số 5 diễn đàn boxmath.vn

Lời giải:

$a + b + c = ab + bc + ac \leq \dfrac{(a + b + c)^2}{3}$ suy ra $a + b + c \geq 3$

$-\dfrac{9(ab + bc + ac)^2}{[(a + b + c)(a^2b + b^2c + c^2a)]^2} \geq \dfrac{-9(ab + bc + ac)^2}{(ab + bc + ac)^4} = \dfrac{-9}{(ab + bc + ac)^2} = \dfrac{-9}{(a + b + c)^2} \geq -1$

$\dfrac{6 + \sum(a - b)^2 + 3.2^2}{2} = \dfrac{6 + 2\sum a^2 - 2\sum ab + 12}{2} = 9 + \sum a^2 - \sum ab = 9 + (\sum a)^2 - 3\sum ab = 9 + x^2 - 3x \geq 9 + 0 = 9$

Vậy giá trị bé nhất của $P = 8$ khi $a = b = c = 1$ □

Bài toán

19 Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+xy+yz = 3xz$ và $x^2+y^2+z^2 > 0$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{y + z} + \frac{16y}{z + x} + \frac{25z}{x + y}$$

Đề thi số 1 diễn đàn toanphongthong.vn

Lời giải 1 Dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x = 3z, y = 0$ Để ý nếu $z = 0$ thì $x = y = 0$ trái với giả thiết nên loại. Nếu $z \neq 0$ thì đặt $\frac{x}{z} = a, \frac{y}{z} = b$ từ giả thiết ta có:

$$a^2 + ab + b = 3a \Rightarrow b = \frac{3a - a^2}{a+1} \text{ và } a \leq 3$$

Và ta có:

$$P = \frac{a}{b+1} + \frac{16b}{a+1} + \frac{25}{a+b} = \frac{a}{\frac{3a-a^2}{a+1}+1} + \frac{16\frac{3a-a^2}{a+1}}{a+1} + \frac{25(a+1)}{4a} = \frac{a(a+1)}{4a+1-a^2} + \frac{16(3a-a^2)}{(a+1)^2} + \frac{25(a+1)}{4a}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a(a+1)}{4a+1-a^2} + \frac{16(3a-a^2)}{(a+1)^2} + \frac{25(a+1)}{4a} \geq \frac{34}{3}$$

$$\iff 43a^5 - 411a^4 + 966a^3 + 546a^2 + 175a + 25 \geq \frac{136}{3}.a(a+1)^2(4a+1-a^2)$$

$$\iff \frac{1}{3}(a-3)(265a^4 - 710a^3 - 320a^2 - 138a - 25) \geq 0$$

Nhưng do $0 < a \leq 3$ nên $\begin{cases} \frac{710}{3}a^4 \leq 710a^3 \\ \frac{85}{3}a^4 \leq 255a^2 \\ -65a^2 - 138a - 25 \leq 0 \end{cases}$ Suy ra: $a - 3 \leq 0;\ 265a^4 - 710a^3 - 320a^2 - 138a - 25 \leq 0$

Vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Ta có $P_{Min} = \frac{34}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = 3, b = 0$ hay $x = 3z, y = 0$

Lời giải2

Đặt $x = az, y = bz$ Từ giả thiết ta có: $(a+1)(a+b) = 4a \Rightarrow a \in [0;3], b \in [0;1]$

Từ $(a+1)(a+b) = 4a \Rightarrow a + b = \frac{4a}{a+1} \Rightarrow a + b \in [0;3]$.

Biểu thức P được viết lại: $P = \frac{a}{b+1} + \frac{16b}{a+1} + \frac{25}{a+b}$

$$P - 42 = (a+b+1)\left[\frac{1}{b+1} + \frac{16}{a+1} + \frac{25}{a+b}\right] \geq (a+b+1)\left[\frac{25}{a+b+2} + \frac{25}{a+b}\right] = 25(a+b+1)\left[\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{a+b}\right]$$

Đặt $t = a + b \Rightarrow t \in [0;3]$ Xét hàm số $F(t) = 2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}$ Ta có $F'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+2)^2}$ $F'(t) = 0 \Rightarrow t = -1$.

Lập bảng biến thiên ta có $MinF(t) = F(3) = \frac{32}{15}$ Vậy Min$P = \frac{34}{3}$ khi $t = 3$ hay $a = 3, b = 0$ hay $y = 0, x = 3z$ □

Bài toán

$\boxed{20}$ Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + 18b^2 = a^2 + 16b^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a + b + \frac{6}{ab}$$

Đề thi số 2 diễn đàn toanphongthong.vn

Lời giải: Từ giả thiết ta có:

$$a + 18b^2 = a^2 + 4 + 8b^3 + 8b^3 + 8 - 12 \geq 4a + 24b^2 - 12$$

$$\implies 3a + 6b^2 \leq 12 \iff 18 \geq 3a + 6(b^2+1) \geq 3a + 12b$$

Ta có $$3P = 3a + 3b + \frac{18}{ab} \geq 3a + 3b + \frac{3a+12b}{ab} = \left(3a + \frac{12}{a}\right) + \left(3b + \frac{3}{b}\right) \geq 18$$

$\Longrightarrow P \geq 6$. Vậy $MinP = 6$ khi $a = 2, b = 1$.

Bài toán

21 Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 3$ và $z = \min\{x, y, z\}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (x-z)(y-z)(x+y-z) + 2z(x^2+y^2)$

Đề thi số 3 diễn đàn toanphongthong.vn

Lời giải: Ta có

$$3 - P = 2z(z-x)(z-y) + (x+y-z)(x-y)^2$$

Vì $z = \min\{x, y, z\}$ nên $2z(z-x)(z-y) \geq 0\ \forall z \geq 0$ và $(x+y-z)(x-y)^2 \geq 0\ \forall z \geq 0$. Suy ra $P \leq 3$.

Do đó, $\max P = 3 \iff \begin{cases} 2z(z-x)(z-y) = 0 \\ (x+y-z)(x-y)^2 = 0 \\ x^3+y^3+z^3+xyz = 3 \end{cases} \iff x = y = z = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ hoặc $x = y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, $z = 0$. □

Bài toán

22 Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $ab + 2bc + 3ca = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + 4a + b + c$$

Đề thi số 4 diễn đàn toanphongthong.vn

Lời giải: Như tập trước bộ phim, một số khán giả đã dự đoán được Min $P = 12$ khi $(a, b, c) = (1, 0, 2)$

Nếu điểm rơi như vậy thì "tình cờ" $(a+b)(b+c)(c+a) = 4a+b+c = 6$. Anh "bậc ba" đi với cô "bậc nhất", mà đề bài lại là bậc hai. Một cách tự nhiên, hẳn ai cũng nghĩ tới việc tác thành cho cặp đôi hoàn hảo này.

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$P \geq 2\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)(4a+b+c)}$$

Dễ thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a+b)(b+c)(c+a)(4a+b+c) \geq 36$$

Hay

$$M = (a+b)(b+c)(c+a)(4a+b+c) \geq (ab+2bc+3ca)^2$$

Tới đây thì ý tưởng Cauchy Schwarz đã lộ rõ. Tất nhiên cảnh kết thúc bộ phim thì bao giờ cũng lãng mạn và đầy tinh tế. Để ý rằng

$$M = [a(b+c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2](4a+b+c) \geq [2a(b+c) + b(c-a) + c(a+b)]^2$$

Hay

$$M \geq (ab + 2bc + 3ca)^2$$

Từ đó có điều phải chứng minh. □

Bài toán

$\boxed{23}$ Cho ba số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}} + \frac{4bc}{(b+c)^2}$$

Đề thi số 5 diễn đàn toanphongthong.vn

Lời giải 1

Có thể xử lý thế này

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3 + \frac{b+c}{a} + \frac{a\,(b+c)}{bc} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}} + \frac{4bc}{(b+c)^2} \\ &\geq \sqrt{3 + 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{bc}} + \frac{c^2+b^2}{bc}} + \frac{4bc}{(b+c)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{bc}} + \frac{(b+c)^2}{bc}} + \frac{4bc}{(b+c)^2} \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{(b+c)^2}{bc}}\right) + \frac{4bc}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

Đặt $t = \dfrac{(b+c)^2}{bc}$, suy ra $t \geq 4$. Lúc này ta khảo sát hàm số hoặc dùng bất đẳng thức để xử lí hàm sau

$$f\,(t) = 1 + \sqrt{t} + \frac{4}{t}$$

Lời giải 2

Ta có:

$$\frac{4bc}{(b+c)^2} = \frac{abc}{a.\frac{b+c}{2}.\frac{b+c}{2}} \geq \frac{27abc}{(a+b+c)^3}$$

$$\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c)3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc}} = \sqrt{3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^3}{abc}}}$$

Đặt $t = \dfrac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$ Ta chỉ cần xét hàm : $f_{(t)} = \sqrt{3\sqrt[3]{t}} + \dfrac{27}{t}$.

Lời giải 3

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM được:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = a^2(b+c) + abc + a(b+c)^2 + (b+c)bc \geq 2a\sqrt{bc}(b+c) + abc + a(b+c)^2$$

Từ đó ta có:

$$P \geq \sqrt{2\frac{b+c}{\sqrt{bc}} + 1 + \frac{(b+c)^2}{bc}} + \frac{4bc}{(b+c)^2} = \frac{b+c}{\sqrt{bc}} + 1 + \frac{4bc}{(b+c)^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta lại có:

$$\frac{b+c}{\sqrt{bc}}+1+\frac{4bc}{(b+c)^2}=\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}+\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}+\frac{4bc}{(b+c)^2}+1\geq 3+1=4$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 đạt được khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài toán

$\boxed{24}$ Cho các số thực $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y + 1 = 3xy$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$$

Đề thi thử số 1 diễn đàn moon.vn

$\boxed{25}$ Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz$$

Đề thi số 2 diễn đàn moon.vn

$\boxed{26}$ Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $x + y + z = 3$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

Đề thi số 5 diễn đàn moon.vn

$\boxed{27}$ Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x + y^2} + \frac{y^2}{y + z^2} + \frac{z^2}{z + x^2}$$

Đề thi số 6 diễn đàn moon.vn

$\boxed{28}$ Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq 6$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1}$$

Đề thi số 7 diễn đàn moon.vn

$\boxed{29}$ Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $ab + a + b = 3$.Chứng minh rằng

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$$

Đề thi số 8 diễn đàn moon.vn

$\boxed{30}$ Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $ab + a + b = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{4a}{b+1} + \frac{4b}{a+1} + 2ab - \sqrt{7 - 3ab}$$

Đề thi số 9 diễn đàn moon.vn

Bài toán

$\boxed{31}$ Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4x}{y\left(2\sqrt{1+8y^3}+4x-2\right)} + \frac{4y}{z\left(2\sqrt{1+8z^3}+4y-2\right)} + \frac{4z}{x\left(2\sqrt{1+8x^3}+4z-2\right)}$$

Đề thi số 10 diễn đàn moon.vn

$\boxed{32}$Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z > 0$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3+y^3+16z^3}{(x+y+z)^3}$$

Đề thi số 11 diễn đàn moon.vn

$\boxed{33}$ Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{x^2-xy+y^2} + \frac{1}{y^2-yz+z^2} + \frac{1}{z^2-zx+x^2}$$

Đề thi số 12 diễn đàn moon.vn

$\boxed{34}$Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{60z^2-1}{4xy+5z} + \frac{60x^2-1}{4yz+5x} + \frac{60y^2-1}{4zx+5y}$$

Đề thi số 13 diễn đàn moon.vn

$\boxed{35}$Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Đề thi số 14 diễn đàn moon.vn

$\boxed{36}$Cho các số thực dương a, b, c và thỏa mãn $2ab + 5bc + 6ca = 6abc$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{b+2a} + \frac{4bc}{4c+b} + \frac{9ca}{a+4c}$$

Đề thi số 15 diễn đàn moon.vn

3.3 Bất đẳng thức trong đề thi thử các trung tâm

Bài toán

$\boxed{1}$ Cho x, y, z là các số thực dương.Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{9}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}}$$

Đề thi thử lần 1 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ và $Cauchy-Schwarz$ ta có :

$$x^2+y^2+z^2+4 \geq \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(z+2)^2}{2} \geq \frac{(x+y+z+2)^2}{4}$$

$$\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \leq \frac{x+y+4z}{2}$$

$$(3x+3y)(x+y+4z) \leq \frac{16(x+y+z)^2}{4}$$

Vậy ta có

$$P \leq \frac{8}{x+y+z+2} - \frac{27}{2(x+y+z)^2}$$

Đến đây,đặt $t = x+y+z; t > 0$ ta tìm được giá trị lớn nhất của P.Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$. □

Bài toán

$\boxed{2}$ Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x+y+1 = z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$$

Đề thi thử lần 2 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có :

$$z+xy = (x+1)(y+1) \leq \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$$

$$\frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+2xyz} \geq \frac{x^2+y^2}{z+1} \geq \frac{(x+y)^2}{2(z+1)} = \frac{(z-1)^2}{2(z+1)}$$

Do đó

$$P \geq \frac{(z-1)^2}{2(z+1)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2}$$

Khảo sát hàm số trên với $z > 0$ ta tìm được giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{53}{8}$ khi $x = y = \frac{1}{3}; z = \frac{5}{3}$

Bài toán

$\boxed{3}$ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+2}}$$

Đề thi thử lần 3 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải 1

Với giả thiết bài toán ta viết lại là $\sum \frac{1}{xy} + \frac{2}{xyz} = 1$. Đẳng thức này khiến chúng ta liên tưởng tới phép đặt $m = \frac{1}{\sqrt{xy}}, n = \frac{1}{\sqrt{yz}}, p = \frac{1}{\sqrt{zx}}$. Hiển nhiên, m, n, p dương. Khi đó giả thiết bài toán được viết lại là

$$\boxed{m^2 + n^2 + p^2 + 2mnp = 1}$$

Lúc này,

$$P = \frac{mp}{\sqrt{n^2+2mp}} + \frac{np}{\sqrt{m^2+2np}} + \frac{mn}{\sqrt{p^2+2mn}}$$

Giả thiết khiến chúng ta liên tưởng đến phép đặt $m = \cos A,\ n = \cos B,\ p = \cos C$ với A, B, C là ba góc một tam giác nhọn ABC nào đó. Khi ấy, biểu thức P có thể chuyển về biểu thức chứa các hàm lượng giác. Nhưng, trong lượng giác ta lại có một công thức khá thú vị và có nhiều ứng dụng đó là $\cos^2 A = \frac{\cot^2 A}{(\cot A + \cot B)(\cot A + \cot C)}$. Vì thế, nếu $\cot A = u, \cot B = v, \cot C = w$ thì ta có thể đặt luôn như sau

$$m = \frac{u}{\sqrt{(u+v)(u+w)}}, n = \frac{v}{\sqrt{(v+u)(v+w)}}, p = \frac{w}{\sqrt{(w+u)(w+v)}}$$

Do đó, với $uw + vw + uw = 1$ thì

$$P = \frac{uv}{\sqrt{(uw+vw)^2+2(uv)^2}} + \frac{vw}{\sqrt{(uw+uv)^2+2(vw)^2}} + \frac{uw}{\sqrt{(uv+vw)^2+2(uw)^2}}$$

Lại tiếp tục đặt $a = uv, b = vw, c = uw$ ta có $a + b + c = 1$ và

$$P = \frac{a}{\sqrt{(b+c)^2+2a^2}} + \frac{b}{\sqrt{(a+c)^2+2b^2}} + \frac{c}{\sqrt{(b+a)^2+2c^2}}$$

Áp dụng BĐT $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\frac{a}{\sqrt{(b+c)^2+2a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3\left[\frac{(b+c)^2}{2} + \frac{(b+c)^2}{2} + 2a^2\right]}} \le \frac{a\sqrt{6}}{2(a+b+c)}$$

Xét tương tự cho hai biểu thức còn lại ta suy ra

$$\boxed{P \le \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

Vậy,

$$\boxed{\max P = \frac{\sqrt{6}}{2} \iff x = y = z = 2.}$$

Lời giải 2
Biến đổi giả thiết về

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$$

Thì có thể sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có :

$$(x^2+2)(1+\frac{1}{2}) \geq (x+1)^2. \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{x+1}$$

Tương tự cho các bất đẳng thức còn lại .Cộng vế theo vế các bất đẳng thức ta có $P \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.□

Bài toán

$\boxed{4}$ Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} + \frac{2(x + y + z)}{9(xy + yz + zx)}$$

Đề thi thử lần 4 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải 1 Đặt $t = \dfrac{x + y + z}{xy + yz + zx}$. Từ điều kiện, ta được $t \geq 3$

Khi đó:

$$P = f(t) = \frac{1}{t} + \frac{2t}{9} \geq f(3) = 1$$

□

Lời giải 2

Từ điều kiện ta có :

$$\frac{1}{3} = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} \Leftrightarrow (x + y + z) \leq 1$$

Ta lại có :

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

Vậy :

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} + \frac{x + y + z}{9(xy + yz + zx)} + \frac{x + y + z}{9(xy + yz + zx)} \\ &= \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} + \frac{x + y + z}{9(xy + yz + zx)} + \frac{(x + y + z)^2}{9(x + y + z)(xy + yz + zx)} \\ &\geq \frac{2}{3} + \frac{1}{3(x + y + z)} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

□

Bài toán

5 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$5x^2 + y^2 + 2z^2 + \frac{5}{16x^2 + z^2 + 6xy + 12yz}$$

Đề thi thử lần 5 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Rất khó để đoán được điểm rơi trong bài này! Vì thế, với dạng của biểu thức P ta chỉ có thể dùng phương pháp hệ số bất định để tìm điểm rơi. Cụ thể, ta phải chọn số k lớn nhất để $x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geq 2k(xy + yz + zx) = 2k \quad (1)$ và phải đảm bảo dấu bằng xảy ra. Tôi chọn con số $2k$ để hệ số cho đẹp và có ý đồ ở biến đổi tiếp theo. Nếu dùng $Cauchy - Schwarz$ trực tiếp thì

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{5}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \geq \frac{3(xy + yz + zx)}{\frac{17}{10}} = \frac{30(xy + yz + zx)}{17}$$

Suy ra $k_{max} = \frac{30}{17}$. Nhưng khi ấy, kết hợp giả thiết thì dấu bằng không xảy ra. Do đó, chúng ta có thể điều chỉnh hệ số k để dấu bằng xảy ra khi áp dụng $Cauchy - Schwarz$. Ta có thể biến đổi (1) thành

$$(1 + k)x^2 + (2 + k)y^2 + (5 + k)z^2 \geq k(x + y + z)^2 \quad (2)$$

Lúc này, áp dụng $Cauchy - Schwarz$ ta được

$$VT_{(2)} = \frac{x^2}{\frac{1}{1+k}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2+k}} + \frac{z^2}{\frac{1}{5+k}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{1+k} + \frac{1}{2+k} + \frac{1}{5+k}}$$

Do đó, số k_{max} thỏa mãn bất đẳng thức (2) phải là nghiệm của phương trình sau:

$$\frac{1}{\frac{1}{1+k} + \frac{1}{2+k} + \frac{1}{5+k}} = k$$

Giải phương trình với điều kiện $k > 0$ ta được 3 nghiệm, tất nhiên ta chọn nghiệm $k = 1$.
Như vậy với phân tích trên chúng ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức phụ $x^2+2y^2+5z^2 \geq 2(xy + yz + zx) = 2$.
Từ đó chúng ta có thể dự đoán dấu bằng xảy ra khi $6x = 2y = 3z$.
Trước hết, chúng ta cần chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$5x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2(xy + yz + zx) = 2$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$6x^2 + 2y^2 + 3z^2 \geq (x + y + z)^2 \ (\star)$$

Mà bất đẳng thức $(\star)$ luôn đúng theo $Cauchy - Schwarz$. Mặt khác, ta lại có

$$16x^2 + z^2 + 6xy + 12yz \leq 16x^2 + z^2 + (9x^2 + y^2) + (4y^2 + 9z^2) = 5(5x^2 + y^2 + 2z^2)$$

Kết hợp sử dụng $AM - GM$ suy ra được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{3(5x^2+y^2+2z^2)}{4} + \frac{5x^2+y^2+2z^2}{4} + \frac{1}{5x^2+y^2+2z^2} \\ &\geq \frac{3(5x^2+y^2+2z^2)}{4} + 1 \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Do đó

$$\min P = \frac{5}{2} \iff \begin{cases} 6x = 2y = 3z \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \iff 6x = 2y = 3z = \frac{6}{\sqrt{11}}.$$

□

Bài toán

$\boxed{6}$ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x = y + z + xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{\left(z + z\sqrt{xy}\right)^2}{(x+y)(z^2+1)} + \dfrac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$.

Đề thi thử lần 6 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải 1

Đặt $c = \dfrac{1}{z} > 0,\ a = x + y > 0,\ b = x - y > 0$. Giả thiết trở thành $4bc = 4 + a^2 - b^2$.. Biểu thức P được viết lại như sau:

$$P = \frac{(1+\sqrt{bc-1})^2}{a(1+c^2)} + \frac{2c^2}{(1+c^2)\sqrt{1+c^2}}$$

Bài toán này không có cơ sở để dự đoán điểm rơi. Nhưng chắc chắn rằng ta nên đưa về hàm theo biến c. Ở đây, ta cần phải khử hết a, b. Chú ý rằng giả thiết luôn tồn tại giá trị b khi cho a, c là các giá trị dương bất kì. Từ giả thiết ta có $a = \sqrt{4(bc-1)+b^2}$. Khi đó

$$P = \frac{(1+\sqrt{bc-1})^2}{(1+c^2)\sqrt{4(bc-1)+b^2}} + \frac{2c^2}{(1+c^2)\sqrt{1+c^2}}$$

Bài toán bây giờ xem như không có giả thiết nữa ngoài điều kiện $bc > 1$. Công việc bây giờ là tìm đánh giá sau:

$$\frac{(1+\sqrt{bc-1})^2}{\sqrt{4(bc-1)+b^2}} \leq f(c)$$

Thật vậy ta có

$$(1+\sqrt{bc-1})^2 = bc + 2\sqrt{bc-1} \leq \sqrt{(c^2+1)(b^2+4(bc-1)} \iff \frac{(1+\sqrt{bc-1})^2}{\sqrt{4(bc-1)+b^2}} \leq \sqrt{c^2+1}$$

Cuối cùng ta có được

$$P \leq \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{2c^2}{(1+c^2)\sqrt{1+c^2}} = g(c)$$

Khảo sát $g(c)$ ta tìm được $\max P = \max g(c) = g(1) = \sqrt{2}$. □

Lời giải 2

$\left(z + z\sqrt{xy}\right)^2 = z(z + xyz) + 2z^2\sqrt{xy} = z(x-y) + 2z^2\sqrt{xy}$

$\Rightarrow \left(z + z\sqrt{xy}\right)^2 \leq \sqrt{z^2+z^4}\sqrt{(x-y)^2 + 4xy} = z\sqrt{z^2+1}\,(x+y)$

Suy ra :

$$P \leq \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

$\Rightarrow P \leq \dfrac{z^3+3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow (z^2+2)(z^2-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy $P_{min} = \sqrt{2}.Khi : \left(x = \sqrt{2}+1, y = \sqrt{2}-1, z = 1\right)$ □

Bài toán

7 Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2 = x+y$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = 3x + 2y + \frac{16}{\sqrt{x+3y}} + \frac{16}{\sqrt{3x+1}}$$

Đề thi thử lần 7 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

$$P = 3x+2y+\frac{16}{\sqrt{x+3y}}+\frac{16}{\sqrt{3x+1}} = \left(x+3y+\frac{16}{\sqrt{x+3y}}\right)+\left(3x+1+\frac{16}{3x+1}\right)-(x+y)-1$$

Từ giả thiết ta suy ra $0 < x+y \leq 2$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x+3y+\frac{16}{\sqrt{x+3y}} = x+3y+\frac{8}{\sqrt{x+3y}}+\frac{8}{\sqrt{x+3y}} \geq 12$$

$$3x+1+\frac{16}{3x+1} = 3x+1+\frac{8}{3x+1}+\frac{8}{3x+1} \geq 12$$

Suy ra

$$\left(x+3y+\frac{16}{\sqrt{x+3y}}\right)+\left(3x+1+\frac{16}{3x+1}\right)-(x+y)-1 \geq 24-2-1 = 21$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 21$ khi $x = y = 1$ □

Bài toán

8 Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2x^2+2y^2+\dfrac{1}{xy} = 5$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$\frac{3}{1+x^2}+\frac{3}{1+y^2}-\frac{4}{1+2xy}$$

Đề thi thử lần 8 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Từ điều kiện bài toán ta có

$$2x^2+2y^2+\frac{1}{xy} = 5 \Leftrightarrow 4xy+\frac{1}{xy} \leqslant 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant xy \leqslant 1$$

Ta có

$$\frac{3}{1+x^2}+\frac{3}{1+y^2}-\frac{6}{1+xy} = \frac{3(xy-1)(x-y)^2}{(x^2+1)(y^2+1)(xy+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3}{1+x^2}+\frac{3}{1+y^2} \leqslant \frac{6}{1+xy}$$

Do đó
$$P \leqslant \frac{6}{1+xy} - \frac{4}{1+2xy} = f(xy)_{\frac{1}{4}\leqslant xy\leqslant 1} \leqslant \max_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 1} f(t) = \frac{32}{15}$$

Dấu = khi $x = y = \dfrac{1}{2}$ □

Bài toán

$\boxed{9}$ Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+1}+z=3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :
$$P = x^4+y^4+z^4$$

Đề thi thử lần 9 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh
$$\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+1} \geq 1+\sqrt{x^2+y^2} \quad (\star)\text{với } x, y \geq 0$$

Thật vậy,bình phương hai vế và thu gọn ta được $xy \geq 0$.Điều này đúng theo giả thiết.

Từ điều kiện ta có
$$\sqrt{x^2+y^2} \leq 2-z \Rightarrow x^2+y^2 \leq (2-z)^2$$

Mặt khác ta có
$$P \leq (x^2+y^2)^2+z^4 \leq (2-z)^4+z^4$$

Xét hàm số $f(z) = (2-z)^4+z^4$ với $z \in [0;2]$.Khảo sát hàm số trên ta được giá trị lớn nhất của $P = 16$ khi $x = y = 0; z = 2$ và các hoán vị . □

Bài toán

$\boxed{10}$ Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+3y}+\sqrt{4+3z} = 8$.Tìm giá trị lớn nhất của
$$P = 2x^3+9(y^3+z^3)$$

Đề thi thử lần 10 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh
$$\sqrt{4+a}+\sqrt{4+b} \geq 2+\sqrt{4+a+b} \quad (\star)$$

Thật vậy,ta có $(\star)$ tương đương với $\sqrt{4+a}\sqrt{4+b} \geq 2\sqrt{4+a+b} \Rightarrow ab \geq 0$

Từ điều kiện ta có
$$8 = \sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+3y}+\sqrt{4+3z} \geq 2+\sqrt{4+x^2+3y}+\sqrt{4+3z} \geq 4+\sqrt{4+x^2+3(y+z)}$$
$$\Rightarrow y+z \leq 4-\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

Do $x, y, z \geq 0$ nên từ (1) ta có $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$

Ta lại có
$$P \leq 2x^3+9(y+z)^3 \leq 2x^3+9\left(4-\frac{x^2}{3}\right)^3$$

Khảo sát hàm số trên đoạn $[0; 2\sqrt{3}]$ ta được giá trị lớn nhất của $P = 576$ khi $x = y = 0; z = 4$ và các hoán vị. $\square$

Bài toán

$\boxed{11}$ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x+y+z)^2} + \frac{8}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+6)^2}$$

Đề thi thử lần 11 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Ta biến đổi giả thiết thành $x^2 + (y-3)^2 + z^2 \leq 9$.Và với dự đoán là tác giả sẽ cho dấu" = " xảy ra với những số đẹp nên ta sẽ thế $(x; |y-3|; z)$ ứng với bộ số $(2; 2; 1)$ và các tổ hợp của nó vào P.Ta thấy giá trị nhỏ nhất xảy xảy ra khi $x = 1; y = 5; z = 2$ Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$,ta được:

$$180y \geq (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 5^2 + 2^2) \geq (x + 5y + 2z)^2$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{5y} - 5y \geq 2z + x(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$:

$$P \geq \frac{2}{(x+y+z)(z+6)} + \frac{8}{(y+11)^2} \geq \frac{8}{(x+y+2z+6)^2} + \frac{8}{(y+11)^2}$$

Thay (1) vào,ta được:

$$P \geq \frac{8}{(6\sqrt{5y} - 4y + 6)^2} + \frac{8}{(y+11)^2} \geq \frac{64}{[6\sqrt{5y} - 3y + 17]^2} \geq \frac{1}{16}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{16}$ $\square$

Lời giải 2

Từ điều kiện, ta có:

$$\begin{aligned} 6 &\geq \frac{x^2}{y} + \frac{y}{25} + \frac{z^2}{y} + \frac{4y}{25} + \frac{4y}{5} \\ &\geq \frac{2x}{5} + \frac{4z}{5} + \frac{4y}{5} \end{aligned}$$

Suy ra: $2x + 4y + 4z \leq 30$ Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(x+y+z)^2} + \frac{4}{(y+11)^2} + \frac{4}{(y+11)^2} + \frac{1}{(z+6)^2} \\ &\geq \frac{16}{\sqrt{(2x+2y+2z)(y+11)(y+11)(2z+12)}} \\ &\geq \frac{256}{(2x+4y+4z+34)^2} \\ &\geq \frac{256}{(30+34)^2} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1, y = 5, z = 2$. □

Bài toán

$\boxed{12}$ Cho x, y là hai số thực dương phân biệt thỏa mãn $3x^2 + 8y^3 = 20$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

Đề thi thử lần 12 trung tâm nguoithay.vn

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$24 = 3x^2 + 4(y^3 + y^3 + 1) \geq 3x^2 + 12y^2 \geq 12xy \Rightarrow \frac{xy}{2} \leq 1$$

$$P = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \geq \frac{xy}{2}\left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2}\right) + \frac{xy}{2(x-y)^2} = 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)}$$

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ với $t > 2$ suy ra $P \geq 2t + \frac{1}{2t-4}$

Khảo sát hàm số trên được giá trị nhỏ nhất của $P = 6$ khi $t = \frac{5}{2}$ hay $x = 2; y = 1$. □

3.4 Bất đẳng thức trong Thử sức trước kì thi THTT

Bài toán

$\boxed{1}$ Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 3\sqrt{2}$$

Đề thi thử số 1 THTT

Lời giải:

$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq 3\sqrt{2}$

$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2}$

$A \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2}} \geq 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left[(a+b+c)^2 - 9\right]^2 \geq 0$

Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán

$\boxed{2}$ Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz + x + z = y$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{y^2+1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Đề thi thử số 2 THTT

Lời giải:

Bài toán

$\boxed{3}$ Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b^2 - 2b + 3} + \frac{2b^3}{c^3 + a^2 - 2a - 3c + 7} + \frac{3c^3}{a^4 + b^4 + a^2 - 2b^2 - 6a + 11} \leq \frac{3}{2}$$

Đề thi thử số 4 THTT

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta được :

$$VT = \frac{a^3}{(b-1)^2 + 2} + \frac{2b^3}{(c-1)^2(c+2) + (a-1)^2 + 4} + \frac{3c^3}{(a-1)^2(a^2+2a+4) + (b^2-1)^2 + 6} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{2} =$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ $\square$

Bài toán

$\boxed{4}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{2+4a} + \frac{1}{3+9b} + \frac{1}{6+36c}$$

, trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện : $a + b + c = 1$

Đề thi thử số 5 THTT

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta được :

$$P = \frac{9}{18+36a} + \frac{4}{12+36b} + \frac{1}{6+36c} \geq \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{3}{18+36a} = \frac{2}{12+36b} = \frac{1}{6+36c} = \frac{3+2+1}{72} = \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{6}$$

Bài toán

$\boxed{5}$ Cho $x, y, z > 0$ và gọi $P = \max\left\{x\,;y\,;z\,;\frac{7}{x} + \frac{3}{y^2} + \frac{9}{z^3}\right\}$, tìm giá trị nhỏ nhất của P

Đề thi thử số 6 THTT

□

Lời giải:

TH1: Nếu trong ba số x, y, z có một số > 3 thì $P > 3$.

TH2: Nếu $x, y, z \leq 3$, suy ra

$$\frac{7}{x} + \frac{3}{y^2} + \frac{9}{z^3} \geq \frac{7}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{9}{3^3} = 3.$$

Khi đó ta có

$$P \geq 3 \Rightarrow \min P = 3 \iff x = y = z = 3.$$

□

Bài toán

$\boxed{6}$ Gỉa sử x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} - \frac{1}{x+y+z}$$

Đề thi thử số 7 THTT

Lời giải:

Bài này tương đối dễ,áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có :

$$\frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} \geq \frac{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1})^2}{x+y+z} = \frac{6 + 2\left(\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + \sqrt{(y^2+1)(z^2 -}\right.}{x+y+z}$$

Suy ra

$$P \geq 4 + \frac{5}{x+y+z} \geq \frac{17}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. □

Bài toán

$\boxed{7}$ Xét các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3y$.Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$$

Đề thi thử số 8 THTT

Lời giải:

Ta có với mọi x, y, z thì

a) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{x^2-3}{8} \geq 0$

b) $\dfrac{4}{(y+2)^2} + \dfrac{y^2-3y}{8} \geq 0$

c) $\dfrac{8}{(z+3)^2} + \dfrac{z^2-5}{8} \geq 0$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên,suy ra giá trị nhỏ nhất cần tìm. □

Bài toán

$\boxed{8}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$F = \frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c+a}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}}$$

trong đó a, b, c dương và $a^2+b^2+c^2=3$.

Đề thi thử số 9 THTT

4 BẤT ĐẲNG THỨC LUYỆN THI 2014

Chuyên đề được tổng hợp và biên soạn lại từ topic BẤT ĐẲNG THỨC LUYỆN THI ĐẠI HỌC 2014 tại diễn đàn ; tác giả chân thành cám ơn sự giúp đỡ của anh **illovemath** đã hỗ trợ tác giả trong việc tổng hợp các bài toán từ topic trên.

Bài toán

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a>c>b$.
Ta có:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

Mà:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(c-b)(a-c)\leqslant(a+b).c.(a+b-c)$$

Đặt $a+b=x$ suy ra $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$.
Giờ ta chỉ việc xét hàm $f(x)=x(1-x)(2x-1)$ với $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$.
Khảo sát hàm số $f(x)$ ta có: $\max P=\frac{\sqrt{3}}{6}$ khi $(a;b;c)=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6};0;\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$. □

Bài toán

Bài 2. Cho x, y, z dương và $x^8+y^8+z^8=\frac{1}{27}$ Chứng minh:

$$\frac{x^7}{y^2+z^2}+\frac{y^7}{z^2+x^2}+\frac{z^7}{x^2+y^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Lời giải
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(x^2+y^2+z^2)^4\leq 9(x^4+y^4+z^4)^2\leq 27(x^8+y^8+z^8)=1\Rightarrow x^2+y^2+z^2\leq 1$$

$$\frac{x^7}{y^2+z^2}=\frac{x^8}{x(y^2+z^2)}=\frac{x^8}{2x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}}\geq\frac{\frac{x^8}{2}}{\sqrt{\frac{(x^2+y^2+z^2)}{27}}}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}x^8$$

Bài toán

Bài 2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca>0$ và $a+2b+3c=4$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức cơ bản:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq\frac{4}{m+n}\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Ta được

$$P\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(c+2b)}}\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a+2c)(c+2b)}}\geq\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+3c}=\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=2; b=1; c=0$.
Bài toán tương tự:
Cho các số thực thỏa mãn $a+b+c=1; ab+bc+ca>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\boldsymbol{P=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}}$$

□

Bài toán

Bài 3. Cho $a,b,c>0$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{1}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{2}{\sqrt{a+b+c}}$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a}{2}.2b}\leq\frac{a}{4}+b \text{ và } \sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{\frac{a}{4}.b.4c}\leq\frac{a}{12}+\frac{b}{3}+\frac{4}{3}c$$

Suy ra

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\leq\frac{4}{3}(a+b+c)$$

Khi đó

$$P\geq\frac{3}{4(a+b+c)}-\frac{2}{\sqrt{a+b+c}}$$

Đặt $x=\dfrac{1}{\sqrt{a+b+c}}$ ta có:

$$P=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\geq-\frac{4}{3}$$

Vậy $\min P=-\dfrac{4}{3}$ khi $x=\dfrac{4}{3}$ hay $a=4b=16c$.
Bài tập tương tự: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}-\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2012-2013

□

Bài toán

Bài 4. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + y\sqrt{(1-z^2)(1-x^2)} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Lời giải 1. Ta có $(1-x^2)(1-y^2) = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = z^2 + 2xyz + y^2x^2 = (z+xy)^2$.
Khi đó

$$P = z(z+xy) + y(y+xz) + x(x+yz) + \frac{1}{x^2+y^2+z^2} = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$
$$= 1 + xyz + \frac{1}{x^2+y^2+z^2} = 1 + xyz + \frac{1}{1-2xyz}$$

Theo giả thiết ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2xyz \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, suy ra $xyz \leq 1$.
Đặt $t = xyz \Rightarrow 0 < t \leq 1$. Và

$$P = 1 + t + \frac{1}{1-2t} = f(t)$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ với $0 < t \leq 1$ ta có $\max f(t) =$
Vậy $\max P = 2$ khi $x = y = z =$

Lời giải 2

Đặt $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$ Khi đó

$$D = \cos C \sin A \sin B + \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin A \sin C + \frac{1}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

Sử dụng $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ và $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ Khi đó

$$D = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2} + \frac{1}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

Đến đây xét $f(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{3-t}$ với $0 < t \leqslant \dfrac{9}{4}$ □

Bài toán

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^4 + \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^4 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^4$$

Lời giải. Sử dụng $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4 &= [(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2]^2 \\ &= (a+b-2\sqrt{ab})^2 = (a+b)^2 + 4ab - 4(a+b)\sqrt{ab} \\ &\leq (a+b)^2 + 4ab - 8ab = a^2 + b^2 - 2ab\end{aligned}$$

Do đó

$$P \leq 2(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca) \leq 2(a+b+c)^2 = 2$$

Vậy, $\max P = 2$ khi có một biến bằng 1, hai biến còn lại bằng 0. □

Bài toán

Bài 6. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} &= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ab} \geq \frac{(a+b)^2}{2ab+ac+bc} = \frac{2(a+b)^2}{4ab+2c(a+b)} \\ &\geq \frac{2(a+b)^2}{(a+b)^2+2c(a+b)} \ \left(\text{vì } 4ab \leq (a+b)^2\right) \\ &= \frac{2\dfrac{(a+b)^2}{c^2}}{\dfrac{(a+b)^2}{c^2} + 2\dfrac{a+b}{c}}\end{aligned}$$

Suy ra

$$P \geq \frac{2\dfrac{(a+b)^2}{c^2}}{\dfrac{(a+b)^2}{c^2} + 2\dfrac{a+b}{c}} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{(a+b)^2}$$

Đặt $\dfrac{a+b}{c} = t$ ta có

$$P = \frac{2t^2}{t^2+2t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = f(t)$$

Khảo sát hàm số $f(t)$... □

Bài toán

Bài 7. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}}$$

Lời giải

Ta có :

$$\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(b+c)^2}{2bc+a(b+c)} \geq \frac{(b+c)^2}{\dfrac{(b+c)^2}{2} + a(b+c)} = \frac{2}{1+\dfrac{2a}{b+c}}$$

Xét hàm số :

$$\begin{aligned}&f(t) = t + \sqrt{\frac{2}{2t+1}},\ t > 0 \\ &f'(t) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{(2t+1)\sqrt{(2t+1)}} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ &\Rightarrow MinP = f\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\end{aligned}$$

Bài toán

Bài 8. Cho các số thực dương x, y, z. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{2z}{x+y+z}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$P \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+xz+yz} + \frac{2z}{x+y+z}$$

$$P \geq \frac{\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2}{\dfrac{(x+y)^2}{2z^2} + \dfrac{x+y}{z}}$$

Đến đây khảo sát hàm số theo biến $t = \dfrac{x+y}{z}$. □

Bài toán

Bài 9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Lời giải. Đặt: $a = cx, b = cy$ với $x, y > 1$.
Từ giả thiết ta có: $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y = xy$.
Khi đó:

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{1+x} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x+y}{xy+x+y+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2}$$

Lại đặt: $x + y = xy = t$, $\big(\text{do } x, y > 1 \Rightarrow t \geq 4\big)$.
Khi đó:

$$P = f(t) = \frac{t^2-t}{2t+1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2-2t}, t \geq 4$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\,(2t+1)^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2\,(t-2)^2} \geq \frac{281}{864} > 0, \big(\text{với } t \geq 4\big)$$

Suy ra $\min f = f(4) = \dfrac{41}{24}$ khi $t = 4$ hay $x = y = 2 \Rightarrow a = b = 2c$.
Vậy $\min P = \dfrac{41}{24}$ khi $a = b = 2c$. □

Bài toán

Bài 10. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$T = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012\,(xy+yz+zx)}.$$

Lời giải. Ta có

$$T \geq \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 2012\frac{(y+z)^2}{4}} = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 503(y+z)^2}$$

Ngay tại điểm này có thể đặt $t = \dfrac{x}{y+z}$.

Cuối cùng $\min T = \dfrac{25}{3548}$ khi $x = 3; y = z = 1$. □

Bài toán

Bài 11. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} - \frac{1}{x+y+z}$$

Lời giải. Áp dụng AM-GM ta có

$$P \geq 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) - \frac{1}{x+y+z}$$

Ta có bổ đề sau:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+a^2)}}{\sqrt[3]{abc}}$$

Chứng minh:

Chuẩn hóa $abc = 1$, ta đưa về chứng minh

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

hay

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}} = 3a^2,\ \frac{b^2}{c^2} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \geq 3b^2,\ \frac{c^2}{a^2} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} \geq 3c^2$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra được

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}) \geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

hay

$$(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a})^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

Suy ra (1) luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Từ đó ta có

$$P \geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz}} - \frac{1}{x+y+z}$$

Mà

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{6}{\frac{x+y+z}{3}} - \frac{1}{x+y+z}$$

Ta có: $3 = \sqrt{(1+1+1)(x^2+y^2+z^2)} \geq x+y+z > 0$ Đặt $t = x+y+z$ $(0 < t \leq 3)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{18}{t} - \frac{1}{t} = \frac{17}{t}$; $0 < t \leq 3$. Ta có $f'(t) = -\frac{17}{t^2} < 0$; $\forall t < 3$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến và $f(3) = \frac{17}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{17}{3}$ khi $x = y = z = 1$.

Cách khác:
Điều đầu tiên, ta cần dự đoán giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{17}{3}$ khi $x = y = z = 1$. Điều đó quan trọng, bởi vì ta quan tâm đến hai biểu thức $\frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x}$ và $-\frac{1}{x+y+z}$, mà $x+y+z \leq 3$ nên $-\frac{1}{x+y+z} \leq -\frac{1}{3}$, nên ta cần loại đi giá trị $-\frac{1}{x+y+z}$. Đến đây, ta nghĩ đến việc tìm cách chứng minh sao cho $\frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} \geq \frac{m}{x+y+z}$. Dễ thấy giá trị $m = 18$ thỏa mãn yêu cầu. Ta chứng minh

$$\frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} \geq \frac{18}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Đây là bài toán khá hay của Vas, ta hoàn toàn có thể đưa về một biến để giải như sau Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Đặt $0 < t = x+y+z \leq 3$ ta được

$$2t^3 \geq 9t^2 - 27 \Leftrightarrow (2t+3)(t-3)^2 \geq 0$$

Đến đây, biểu thức bài toán trở thành

$$\frac{x^2+1}{y} + \frac{y^2+1}{z} + \frac{z^2+1}{x} - \frac{1}{x+y+z} \geq \frac{18}{x+y+z} - \frac{1}{x+y+z} = \frac{17}{x+y+z} \geq \frac{17}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Cách khác:
Ta có $x^2y + y^2z + z^2x \leq (x^2+y^2+z^2)\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = 3$.

Từ đó ta có

$$P \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y+y^2z+z^2x} + \frac{9}{x+y+z} - \frac{1}{x+y+z}$$
$$\geq 3 + \frac{8}{x+y+z} \geq 3 + \frac{8}{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{17}{3}$$

□

Bài toán

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực dương và $a+b+c=3$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{2}{3+ab+bc+ca} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có: $3 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow 1 \geq \sqrt[3]{abc}$.
Ta dễ dàng chứng minh được

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$$

Cái này có thể khai triển trực tiếp ra rồi dùng AM-GM hoặc dùng trực tiếp BĐT Holder

$$\Rightarrow P \leq \frac{2}{3+3\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Đặt $t = abc$ $(t \leq 1)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2}{3(1+t^2)} + \dfrac{t}{1+t}$ □

Bài toán

Bài 13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa

$$\frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$$

Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a+2bc}{3a+4bc}$$

Lời giải. Ta có

$$1 = \frac{a}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{a}{1+a} + \frac{2}{1+\sqrt{bc}}$$
$$\geq \frac{a}{1+a} + \frac{2}{1+\dfrac{bc+4}{4}}$$
$$\rightarrow bc \geq 8a \rightarrow P \geq \frac{17}{35}$$

Cách khác

$$a = \frac{bc-1}{b+c+2} \to bc > 1 \to (b+c)^2 > 4$$

$$P = \frac{(2b+2c+5)ab-1}{ab(4b+4c+11)-3} \geq \frac{(2b+2c+5)\dfrac{(b+c)^2}{4}-1}{\dfrac{(b+c)^2}{4}(4b+4c+11)-3} = \frac{2(b+c-4)^2}{35\left[4(b+c)^2+\dfrac{3(b+c)}{2}+\dfrac{3(b+c)}{2}-6\right]}+\frac{17}{35} \geq$$

□

Bài toán

Bài 14. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3\left(ab+bc+ca\right)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải. Ta có

$$3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \geq (ab+bc+ca)^2$$
$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = 1-2(ab+bc+ca)$$

Giả thiết suy ra: $0 \leq t = ab+bc+ca \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Do đó, ta có $P \geq f(t) = t^2+3t+2\sqrt{1-2t}, \ \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Ta có: $f'(t) = 2t+3-\dfrac{2}{\sqrt{1-2t}} > 0, \ \forall t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ nên $f(t) \geq f(0) = 2$.

Vậy $\min P = 2$ khi một biến bằng 1 và hai biến bằng 0. □

Bài toán

Bài 15. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x+y \leq 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4y^2+\frac{1}{y^2}}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{y}{y^2+1}$$

Lời giải. Ta có

$$\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4y^2+\frac{1}{y^2}} \geq \sqrt{4(x+y)^2+\frac{16}{(x+y)^2}} \geq \sqrt{8+\frac{12}{(x+y)^2}} \geq 2\sqrt{5}$$

Ta cũng chứng minh được rằng:

$$-\frac{x}{x^2+1}-\frac{y}{y^2+1} \geq -\frac{4x}{4x+3}-\frac{4y}{4y+3} \geq -\frac{4}{5}$$

Cuối cùng, ta có $\min P = 2\sqrt{5}-\dfrac{4}{5}$ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$. □

Bài toán

Bài 16. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a \le b + c$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{c}{a+b} + (b+c)\left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{a+c}\right)$$

Lời giải. Dễ dàng nhận thấy biểu thức P nghịch biến theo biến a nên ta có thể rút gọn số biến và đồng thời khử được điều kiện ràng buộc. Cụ thể:

$$P \ge \frac{c}{c+2b} + (b+c)\left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2c}\right) = 1 + \frac{c}{2b+c} + \frac{b}{2c+b}$$
$$\ge 1 + \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2 + 2bc} \ge 1 + \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2 + \dfrac{(b+c)^2}{2}} = \frac{5}{3}$$

Vậy $\min P = \dfrac{5}{3}$ khi $2b = 2c = a > 0$. □

Bài toán

Bài 17. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn: $\begin{cases} ab + bc + ca > 0 \\ a \ge c \end{cases}$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{(c+a)^2}{a(b+c) + c(b+a)}$$

Lời giải. Áp dụng Cauchy-Schwars ta có

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} \ge 3 - \frac{c+a}{a+b}$$

Và

$$\frac{(c+a)^2}{a(b+c) + c(b+a)} = \frac{(c+a)^2}{b(c+a) + 2ca} \ge \frac{(c+a)^2}{b(c+a) + \frac{1}{2}(c+a)^2} = \frac{2(c+a)}{2b+c+a}$$

Từ đó ta có

$$P \ge 3 + \frac{2(c+a)}{2b+c+a} - \frac{c+a}{a+b} = 3 + \frac{(a+c)(a-c)}{(a+b)(2b+c+a)} \ge 3$$

Vậy $\min P = 3$ khi $a = b = c$.

Cách khác.

Bài toán cho lạ ở điểm $a \ge c$ tức là ta chỉ xác định được rằng $a - c \ge 0$.

Điều đầu tiên ta dễ quan sát rằng, có thể loại $b + c$ bằng bất đẳng thức AM-GM hai biến, như thế, quan trọng là ta cần tìm đánh giá thích hợp, để các biểu thức đảm bảo dấu bằng $a = b = c$.

Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT \ge 2\sqrt{\frac{a+b}{c+a}} + \frac{(c+a)^2}{b(a+c)+2ac} \ge 2\sqrt{\frac{a+b}{c+a}} + \frac{(c+a)^2}{b(a+c) + \dfrac{(a+c)^2}{2}} = 2\sqrt{\frac{a+b}{c+a}} + \frac{2(a+c)}{2b+a+c}$$

Từ đây, ta cho $a = b = c$ thì dự đoán được $\dfrac{a+b}{c+a} = 1$; $\dfrac{2(a+c)}{2b+a+c} = 1$ lại cho ta một ý tưởng dùng bất đẳng thức AM-GM tiếp tục, như vậy ta có

$$\frac{2(a+c)}{2b+a+c} + 1 \ge 2\sqrt{\frac{2(a+c)}{2b+a+c}}$$

và

$$2\sqrt{\frac{2(a+c)}{2b+a+c}} + 2\sqrt{\frac{a+b}{c+a}} \ge 4\sqrt{\frac{2(a+b)}{2b+a+c}} \ge 4\sqrt{\frac{2(a+b)}{2b+a+a}} = 4$$

Từ đó suy ra

$$2\sqrt{\frac{a+b}{c+a}} + \frac{2(a+c)}{2b+a+c} \ge 4 - 1 = 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Cách khác.

Ta có đánh giá cơ bán sau

$$\frac{(c+a)^2}{a(b+c)+c(b+a)} = \frac{(c+a)^2}{ab+bc+2ca} \ge \frac{(c+a)^2}{ab+bc+2ca+(a^2-ca)} = \frac{(c+a)^2}{(a+c)(a+b)}$$

Do đó

$$P \ge \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \ge 3$$

Vậy $\min P = 3$ khi $a = b = c$. □

Bài toán

Bài 18. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a \le b + c$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{c}{a+b} + (b+c)\left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{a+c}\right)$$

Lời giải. Dễ dàng nhận thấy biểu thức P nghịch biến theo biến a nên ta có thể rút gọn số biến và đồng thời khử được điều kiện ràng buộc. Ta có

$$\begin{aligned} P &\ge \frac{c}{c+2b} + (b+c)\left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2c}\right) = 1 + \frac{c}{2b+c} + \frac{b}{2c+b} \\ &\ge 1 + \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2+2bc} \ge 1 + \frac{(b+c)^2}{(b+c)^2+\frac{(b+c)^2}{2}} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Vậy $\min P = \dfrac{5}{3}$ khi $2b = 2c = a > 0$. □

Bài toán

Bài 19. Cho ba số thực dương a, b, c nhỏ hơn 1, thỏa $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. Áp dụng Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c-(a^3+b^3+c^3)}$$

Mặt khác ta lại có

$$a+b+c\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}=\sqrt{3}\text{ và }a^3+b^3+c^3\geq\frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh. □

Bài toán

Bài 20. Cho các số thực $a,b,c\in[1;3]$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{c+a}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}P&=2-b\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{b}{a+c}\\&\leq 2-\frac{4b}{a+c+2b}+\frac{b}{a+c}=2-\frac{b(3a+3c-2b)}{(a+c)^2+2ab+2bc}\leq 2\end{aligned}$$

Do đó $\max P=2$ khi $b=3a=3c=3$.

Cách khác

$$P=2-\frac{b(3a+3c-2b)}{(a+c)^2+2ab+2bc}-\frac{b(a-c)^2}{(a+b)(b+c)(a+2b+c)}\leq 2$$

□

Bài tập luyện tập

1.Cho các số thực không âm a,b,c thoả $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$A=\frac{a(b-a)+b(c-b)+c(a-c)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2}+\frac{6}{3-a^2-b^2-c^2}-2(ab+bc+ca)^2$$

2.Cho các số thực không âm a,b,c thoả $a+b+c=1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$B=\frac{a^2(b-1)+b^2(c-1)+c^2(a-1)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2}+\frac{6}{3-a^2-b^2-c^2}$$

Hướng dẫn: dồn về biến $ab+bc+ca$ và khảo sát xem thử. Chú ý bài 2: $a^2b+b^2c+c^2a\leq ab+bc+ca$.

Bài toán

Bài 21. Cho $a,b\in\left[1;\frac{3}{2}\right];c\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$N=\frac{a\left(3+\dfrac{2}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)+b\left(3+\dfrac{2}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)+2\sqrt{c}(3\sqrt{c}+\sqrt{2})+5}{2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{2c}+1}.$$

$$N=\frac{3(a+b+2c)+\dfrac{2a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2b}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}}+2\sqrt{2c}+5}{2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{2c}+1}$$

$$a, b \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow \frac{2a}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}} \geq \sqrt{b}; \frac{2b}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}.$$

Đẳng thức xảy ra khi a=b. Hơn nữa:

$$3(a+b+2c) \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi a=b=2c.

$$2\sqrt[4]{ab} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Dấu bằng xảy ra khi a=b.

$$\Rightarrow N \geq \frac{t^2+2t+5}{t+1} = f(t).$$

$$t \in \left[3; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right]; t = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2c}.$$

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{(t+1)^2} > 0; t \in \left(3; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right).$$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(3) = 5.$$

Vạy GTNN của N là 5, khi và chỉ khi a=b=1;$c = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán

Bài 22. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{c^2}$. Tì

$$P = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right.$$

Lời giải. Giả thiết tương đương với

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1$$

Đặt $x = \dfrac{c}{a}, y = \dfrac{c}{b}$. Khi đó $x^2+y^2 = 1$, suy ra $0 < x+y \leq \sqrt{2}$ và biểu thức

$$P = (x+y+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1\right) \geq (x+y+1)\left(\frac{4}{x+y}+1\right) = (t+1)\left(\frac{4}{t}+1\right) = f(t)$$

Khảo sát $f(t)$ trên $(0;\sqrt{2}]$ ta được $\min f(t) = 5+3\sqrt{2}$ tại $t = \sqrt{2}$ hay $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra $a = b = \sqrt{2}c$. □

Bài toán

Bài 23. Cho a, b, c dương thoả mãn: $a^3+b^3 = 64c^3$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{c^2}{(a+c)(c+b)} + \frac{ab}{c(a+b)}$$

Lời giải. Đặt $a = cx, b = cy$. Ta có: $x^3+y^3 = 64 \Rightarrow 2xy\sqrt{xy} \leq x^3+y^3 = 64 \Rightarrow 0 < \sqrt{xy} \leq 2\sqrt[3]{4}$

Khi đó

$$P = \frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{xy+x+y+1} + \frac{xy}{x+y}$$
$$\leq \frac{1}{xy+2\sqrt{xy}+1} + \frac{xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{(\sqrt{xy}+1)^2} + \frac{\sqrt{xy}}{2}$$

Xét hàm số

$$f(t) = \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{t}{2}, (t = \sqrt{xy})$$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trên miền $t \in \left(0; 2\sqrt[3]{4}\right]$, suy ra $\max f = \sqrt[3]{4} + \dfrac{1}{\left(2\sqrt[3]{4}+1\right)^2}$.

Vậy $\max P = \sqrt[3]{4} + \dfrac{1}{\left(2\sqrt[3]{4}+1\right)^2}$ khi $a = b = 2c\sqrt[3]{4}$. □

Bài toán

Bài 24. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \sqrt{2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{2z(2y+z)}{(y+z)^2}} + \frac{3z}{z+x}$$

Với giải thiết đã cho không còn cách nào khác là quy về biến $t = \dfrac{z}{x} \geq 1$

- $$2 + \frac{2x^2}{(x+y)^2} - \frac{4zy+2z^2}{(y+z)^2} = 2 + \frac{2}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{\frac{2z^2}{y^2}+\frac{4z}{y}}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2} = \frac{2}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{2}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}$$

$$= (1+1)\left(\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}\right) \geq \left(\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)}\right)^2 \geq \frac{4}{\left(1+\sqrt{\frac{z}{x}}\right)^2}$$

Xét hàm số :

- $$f(t) = \frac{4}{\left(1+\sqrt{t}\right)^2} + \frac{3t}{t+1},\ t \geq 1$$

$$\frac{4}{\left(1+\sqrt{t}\right)^2} + \frac{3t}{t+1} \geq \frac{4}{2(1+t)} + \frac{3t}{t+1} = \frac{5}{2} + \frac{t-1}{2(t+1)}$$

Bài toán

Bài 25. Cho các số dương a, b, c không đồng thời bằng nhau thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{4a^2-27}{b^2+c^2} + \frac{4b^2-27}{c^2+a^2} + \frac{4c^2-27}{a^2+b^2}$$

Lời giải.

$$P+12 = \left(4a^2+4b^2+4c^2-27\right)\left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2}\right) \geq \frac{9(4a^2+4b^2+4c^2-27)}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9(4t-27)}{2t}$$

Từ giả thiết suy ra $t = a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3$ Khảo sát hàm $f(t) = \dfrac{9(4t-27)}{2t} - 12$ trên $[3, +\infty)$ ta được $min_P = -\dfrac{69}{2}$ tại $t = 3 \Rightarrow a = b = c = 1$ □

Bài toán

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + abc = 3c$. Tìm GTLN biểu thức

$$P = \frac{a}{a^2+3} + \frac{b}{b^2+3} + \frac{1}{9c^2+3}$$

Lời giải. Chú ý: $(a^2+3)(b^2+3) = 3(a+b)^2 + (3-ab)^2 = 3(a-b)^2 + (3+ab)^2 \geq (3+ab)^2$.
Giả thiết suy ra $c = \dfrac{a+b}{3-ab}, 0 < ab < 3$. Khi đó

$$\begin{aligned}
P &= \frac{3(a+b)(ab+3) + (3-ab)^2}{3(a^2+3)(b^2+3)} \\
&= \frac{3.4(a+b)(ab+3) + 4(3-ab)^2}{12(a^2+3)(b^2+3)} \\
&\leq \frac{12(a+b)^2 + 3(ab+3)^2 + 4(3-ab)^2}{12(a^2+3)(b^2+3)} \\
&= \frac{4(a^2+3)(b^2+3) + 3(ab+3)^2}{12(a^2+3)(b^2+3)} \\
&\leq \frac{4(a^2+3)(b^2+3) + 3(ab+3)^2 + 9(a-b)^2}{12(a^2+3)(b^2+3)} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

Vậy $MaxP = \dfrac{7}{12} \iff a = b = c = 1$. □

Bài toán

Bài 27. Cho a,b, c dương. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 8\left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

Lời giải. Chọn $b = 1$ khi đó bất đẳng thức viết lại

$$P := \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 2a^2 + \frac{8}{(a+1)^2} \geq \frac{2}{a} + 2a^2 + \frac{8}{(a+1)^2} = 6 + \frac{(a-1)^2(a^3+4a^2+5a+1)}{a(a+1)^2} \geq 6$$

□

Bài toán

Bài 28. Cho x, y là các số thực thỏa $(x^2+y^2+1)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2$. Tìm GTNN, GTLN của

$$P = \frac{x^2 + 2y^2 - 3x^2y^2}{x^2+y^2+1}$$

Lời giải. Ta có

$$\left(x^2+y^2+1\right)^2 + 1 \leq \left(x^2+y^2+1\right)^2 + 3x^2y^2 + 1 = 4x^2 + 5y^2 \leq 5x^2 + 5y^2$$

Hay
$$\left(x^2+y^2\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)+2\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x^2+y^2\leq 2$$
Ta có: $x^2+2y^2-3x^2y^2=\left(x^2+y^2+1\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)+1$. Suy ra
$$P=\frac{\left(x^2+y^2+1\right)^2-3\left(x^2+y^2\right)+1}{x^2+y^2+1}$$
Đặt $t=x^2+y^2+1,(2\leq t\leq 3)$. Khi đó
$$P=f(t)=t+\frac{4}{t}-3,(2\leq t\leq 3)$$
Khảo sát hàm số $f(t)$ ta được
$$\min P=1 \text{ khi } x=0,y=\pm 1 \text{ và } \max P=\frac{4}{3} \text{ khi } x=0,y=\pm\sqrt{2}$$

□

Bài toán

Bài 29. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+8y^2+9z^2\leq 4xyz$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{4x+2y^2+z^3}{\sqrt{6(36y-11\sqrt{2z})-11x}}$$

Lời giải. Đặt :$x=6a,y=3b,z=2c$ với $a,b,c>0$
Ta có : $a^2+2b^2+c^2\leq 4abc$
Cần tìm GTNN :
$$P=\frac{24a+18b^2+8c^3}{\sqrt{648b-66\left(a+2\sqrt{c}\right)}}$$
Từ gt
$$\Rightarrow 2ab+2bc\leq a^2+2b^2+c^2\leq 4abc$$
$$\Rightarrow a+c\leq 2ac\Rightarrow 2\sqrt{ac}\leq a+c\leq 2ac\Rightarrow ac\geq 1$$
$$\Rightarrow a+2\sqrt{c}=a+\sqrt{c}+\sqrt{c}\geq 3\sqrt[3]{ac}\geq 3,(1)$$
Lại có :
$$\begin{cases} b^2+1\geq 2b \\ c^3+5\geq 6\sqrt{c}\end{cases}(Cauchy)\Rightarrow\begin{cases}18b^2\geq 36b-18\\ 8c^3\geq 48\sqrt{c}-40\end{cases}$$
Suy ra :
$$P\geq\frac{24\left(a+2\sqrt{c}\right)+36b-58}{\sqrt{648b-66\left(a+2\sqrt{c}\right)}}\geq\frac{24.3+36b-58}{\sqrt{648b-66.3}},(do:(1))$$
$$\Rightarrow P\geq\frac{(36b-11)+25}{3\sqrt{2}.\sqrt{36b-11}}\geq\frac{10\sqrt{36b-11}}{3\sqrt{2}.\sqrt{36b-11}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

. Và : $P = \dfrac{5\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy : $P_{min} = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}.Khi : x = 6; y = 3; z = 2$. □

Bài tập luyện tập

1.Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 10^{|x-y|} + 10^{|y-z|} + 10^{|z-x|} - 4\sqrt{\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{3}} + \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

2.Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}$$

Đề thi đại học khối A 2012

3.Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |2x - y| + |2y - z| + |2z - x| - \ln\left(\sqrt{14\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} + 1\right)$$

4. Cho ba số thực x, y, z thoả mãn $x + y + z = 0$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \ln\left(\sqrt{14\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} + 1\right) - \left(x^6 + y^6 + z^6\right) - |2x - y| - |2y - z| - |2z - x| - 6\cos xyz$$

Bài toán

Bài 30. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b^2 + 7}{(a + b)^2} + \frac{b^2c^2 + 7}{(b + c)^2} + \frac{c^2a^2 + 7}{(c + a)^2} \geq 6$$

Lời giải. Ta có:

$$VT \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2} + 7.\frac{9}{(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2}$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{(ab + bc + ca)^2 + 63}{2\left(ab + bc + ca + 3\right)} \geq 6.\ \left(\text{do } ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán

Bài 31. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + yz}} + \frac{y}{\sqrt{3y^2 + zx}} + \frac{z}{\sqrt{3z^2 + xy}}$$

Lời giải. Ta có
$$P = \frac{1}{\sqrt{3+\dfrac{yz}{x^2}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\dfrac{zx}{y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\dfrac{xy}{z^2}}}$$
Đặt $a = \dfrac{\sqrt{yz}}{x}, b = \dfrac{\sqrt{zx}}{y}, c = \dfrac{\sqrt{xy}}{z}$ suy ra $a, b, c > 0, abc = 1$.
Ta cần tìm GTLN của
$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+3}}$$
Không mất tính tổng quát,ta giả sử: $c \geq 1 \Rightarrow ab \leq 1, \left(ab = \dfrac{1}{c}\right)$.

Ta có
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+3}} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2+3}, \ \frac{1}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{b^2+3}, \ \sqrt{c^2+3} \geq \frac{c+3}{2}$$
Suy ra
$$\begin{aligned}
P &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2+3} + \frac{1}{b^2+3} + \frac{2}{c+3} \leq \frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2+6}{a^2b^2+3a^2+3b^2+9} + \frac{2}{c+3} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left[1 + \frac{9-a^2b^2}{a^2b^2+3\left(a^2+b^2\right)+9}\right] + \frac{2}{c+3} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{9-a^2b^2}{a^2b^2+6ab+9}\right) + \frac{2}{c+3} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{2}{ab+3} + \frac{2}{c+3} = \frac{1}{2} + \frac{2c}{3c+1} + \frac{2}{c+3} \\
&\leq \frac{3}{2} - \frac{(c-1)^2}{(3c+1)(c+3)} \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$
Vậy $\max P = \dfrac{3}{2}$ khi $x = y = z$. □

Bài toán

Bài 32. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm GTLN của biểu thức
$$P = \frac{a}{b+c} . \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Lời giải. Ta có
$$P = \frac{ab}{(b+c)(a+c)} + \frac{c}{a+b} \leqslant \frac{ab}{(\sqrt{ab}+c)^2} + \frac{c}{2\sqrt{ab}}$$
Khảo sát hàm số $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} + \dfrac{t}{2}$ với $t = \dfrac{c}{\sqrt{ab}} > 0$.

Ta được $\max P = \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}} + \dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{2}$ khi $a = b = \dfrac{c}{\sqrt[3]{4}-1}$. □

Bài toán

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $(a+c)\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) = \dfrac{10}{b}, c \geq 4b$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức
$$P = \frac{a+c-b}{b}$$

Lời giải. Viết lại giả thiết như sau

$$\frac{c}{b} = \frac{10}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} - \frac{b}{a} \geq 4 \Rightarrow 1 \geq \frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{41} - 5}{8}$$

Đến đây dễ dàng suy ra:

$$\min P = \frac{\sqrt{41} + 27}{8}$$

Dấu đẳng thức khi $\begin{cases} c = 4b \\ a = \dfrac{\sqrt{41} - 5}{8}.b \end{cases}$

Còn về max.

Nếu ta đặt: $k = \frac{c}{b}$. Rõ ràng từ cách tính ở trên đã chỉ ra phương trình xác định $t = \frac{a}{b}$:

$$\frac{10}{t^2 + 1} - \frac{1}{t} = k$$

luôn cho nghiệm $t \in \left[1; \frac{\sqrt{41} - 5}{8}\right]$.

Điều đó có nghĩa là: $k = \frac{c}{b}$ có thể lớn tuỳ ý mà trong khi $t = \frac{a}{b}$ nhỏ có giới hạn.

Tóm lại là không thể tồn tại max.

$\square$

Bài toán

Bài 34. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 10x^2 + 10y^2 + z^2$$

Lời giải. Chúng ta luôn có :

$$2(5x - y - z)^2 + 3(4y - z)^2 \geq 0$$

$$\leftrightarrow 10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx)$$

Vậy $minP := 4$

$\square$

Bài toán

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a - 2c}{\sqrt{ab + bc + ca}}$$

Lời giải. Ta viết lại giả thiết như sau:

$$(a+b+c)^2 = \frac{7}{2}.(ab+bc+ca)$$

Từ đó nếu ta có thể thiết lập được mối quan hệ giữa $a+b+c$ và $a-2c$ thì bài toán xong. Dự đoán $c = 2b = 4a$. Vậy ta sẽ chứng minh:

$$(a+b+c)^2 \geq (a-2c)^2 \Leftrightarrow (2a+b-c)(b+3c) \geq 0$$

Nếu $c \leq 2a+b$ thì ta có: $P^2 \leq \frac{7}{2}$.
Nếu $c \geq 2a+b$ hay: $c-a \geq a+b$ thì ta viết lại giả thiết như sau:

$$\frac{3}{2}(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2 = 2ac+(a-c)^2+b^2 \geq 2ac+(a+b)^2+b^2 > 2(ab+bc+ca) \text{ (Vô lí)}$$

Vậy $\min P = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ khi $c = 2b = 4a$.

Cách khác

Chuẩn hóa $ab+bc+ca = 14 \to a^2+b^2+c^2 = 21 \to a+b+c = 7$

$$\to \sqrt{14}P := a-2c$$

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} a+c = 7-b \\ b(a+c)+ca = 14 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{7-b-\sqrt{-3b^2+14b-7}}{2} \\ X_2 = \dfrac{7-b+\sqrt{-3b^2+14b-7}}{2} \end{cases}$ Vì cần tìm giá trị nhỏ nhất nên ta chọn $c \geq a = X_1$. Do đó ta có

$$\to \sqrt{14}P := a-2c = \frac{b-7-3\sqrt{-3(b-2)^2+2b+5}}{2}$$

$$\geq \frac{b-7-3\sqrt{2b+5}}{2} \geq \frac{b-7-\dfrac{9+2b+5}{2}}{2} = -7$$

$$\to \min P := -\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ Đẳng thức xảy ra khi} (a,b,c) = (k,2k,4k) \text{ với } k > 0$$

□

Bài toán

Bài 36. Cho a, b, c là chiều dài ba cạnh của một tam giác. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = a^2 + 2b + \frac{1}{a+b-c}\left[\frac{1}{c} + \left(\frac{2}{c+1}\right)^2\right]$$

Lời giải. Ta có

$$P \geq 2a+2b-1+\frac{1}{(a+b-c)c}+\frac{4}{(a+b-c)4c} \geq 2a+2b-1+\frac{8}{(a+b)^2}$$

Đặt t=a+b Xét hàm

$$f(t) = 2t + \frac{8}{t^2} - 1; t > 0$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$
$$\Rightarrow f(t) \geq 5$$

Dấu "=" xảy ra a=b=c=1.

$$P \geq^{AM-GM} 2(a+b) - 1 + \frac{1}{a+b-c}.\frac{4}{\sqrt{c}.(c+1)}$$
$$\geq^{AM-GM} 2(a+b) - 1 + \frac{32}{(a+b-c)(\sqrt{c}+1)^4}$$

Do: $2\sqrt{c}.(c+1) \leq^{AM-GM} \dfrac{(\sqrt{c}+1)^4}{4}$

$$\geq^{AM-GM} 2.\left[a+b-c+\frac{16}{(a+b-c)(\sqrt{c}+1)^4}\right] + 2c - 1$$
$$\geq^{AM-GM} \frac{16}{(\sqrt{c}+1)^2} + 2c - 1$$
$$\geq^{AM-GM} \frac{16}{(\sqrt{c}+1)^2} + 4(\sqrt{c}+1) - 7$$
$$\geq^{AM-GM} 5$$

Dấu đẳng thức $\iff a = b = c = 1$ tức là Δ đều có cạnh là đơn vị.

□

Bài toán

Bài 37. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\sqrt{\dfrac{x}{yz}} + \sqrt{\dfrac{y}{zx}} + \sqrt{\dfrac{z}{xy}} = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = (x-2)(y-2)(z-2)$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra: $(x+y+z)^2 = xyz \leq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \Rightarrow x+y+z \geq 27$.

Ta có

$$P = xyz - 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) - 8$$

Suy ra

$$P \geq (x+y+z)^2 - \frac{2}{3}(x+y+z)^2 + 4(x+y+z) - 8$$
$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{3} + 4(x+y+z) - 8$$
$$\geq \frac{27^2}{3} + 4.27 - 8$$

Vậy $\min P = 343$ khi $x = y = z = 9$. □

Bài toán

Bài 38. Cho $a, b, c > 0$ với $a \geq b, a \geq c$. Tìm GTLN biểu thức

$$P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$$

Lời giải. Đặt: $\begin{cases} x = \dfrac{b}{a} \leq 1 \\ y = \dfrac{c}{a} \leq 1 \end{cases}$ Khi đó, BDT được viết lại như sau:

$$P = \frac{1}{5.(x+y+1)} + \frac{x}{5-2y} + \frac{y}{5-2x}$$

$$\Rightarrow 2P - 2 = \frac{2}{5(x+y+1)} + (2x+2y-5).\left(\frac{1}{5-2y} + \frac{1}{5-2x}\right)$$

$$\leq \frac{2}{5(x+y+1)} + \frac{2(2x+2\text{Æ}-5)}{5-x-y}$$

(Do 2x+2y-5 <0)

$$= \frac{2}{5(1+x+y)} + \frac{10}{5-x-y} - 4$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1 = f(t)$$

(Với $t = x + y \leq 2$) Xét:

$$f'(t) = \frac{25(t+1)^2 - (5-t)^2}{5(t+1)^2.(5-t)^2} \geq 0$$

Vậy f(t) đồng biến. Suy ra: $P \leq f(t) \leq f(2) = \dfrac{11}{15}$ Dấu = $\iff b = c = a$ □

Bài toán

Bài 39. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y}$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{2x-y} + \frac{z+y}{2z-y}$$

Lời giải. $Gt \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z} = 2$ Đặt $\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{y}\right) \to (a, b) \Rightarrow P = \dfrac{1+a}{2-a} + \dfrac{\frac{1}{b}+1}{\frac{2}{b}-1} = \dfrac{1+a}{2-a} + \dfrac{1+b}{2-b}$ Thay $b = 2 - a$ ta được: $P = \dfrac{2(a^2-2a+3)}{a^2-2a} = f(a) \Rightarrow min_P = 4$ tại $a = 1 \Rightarrow x = y = z$

Từ điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y}$

Suy ra $y = \dfrac{2xz}{x+z}$. Thay vào, ta được

$$P = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 4$$

. □

Bài toán

Bài 40. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn : $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{c^2}$. Tìm GTNN biểu thức :

$$P = \left(a + b + \frac{25c}{2}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=1,(x,y)\to\left(\frac{c}{a},\frac{c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow P=(x+y+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{25}{2}\right)$$

Từ giả thiết suy ra $xy=\dfrac{(x+y)^2-1}{2}$

$$\Rightarrow P=(x+y+1)\left(\frac{2(x+y)}{(x+y)^2-1}+\frac{25}{2}\right)=(t+1)\left(\frac{2t}{t^2-1}+\frac{25}{2}\right)=f(t)$$

Khảo sát $f(t)$ ta được $min_P=37$ tại $x+y=\dfrac{7}{5}\Rightarrow 3a=4b=5c$ hoặc $4a=3b=5c$

□

Bài toán

Bài 41. Cho hai số thực dương a,b thoả mãn $6(a^2+b^2)+20ab=5(a+b)(ab+3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=9\left(\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}\right)-16\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+25\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

Lời giải. Từ giải thiết, chia cả 2 vế cho ab ta có:

$$6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+20=(a+b)+15\frac{a+b}{ab}\geq 2\sqrt{\frac{75(a+b)^2}{ab}}(*).$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ thì (*):

$$6t+20\geq 10\sqrt{3(t+2)}.$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=t^2-2;\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=t^3-3t;\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}=(t^2-2)^2-2.$$

$$\Rightarrow P=9t^4-16t^3-11t^2+48t-32.$$

Xét hàm số $f(t)=9t^4-16t^3-11t^2+48t-32, t\geq\dfrac{10}{3}$

$$f'(t)=36t^3-48t^2-22t+48>0||t\geq\frac{10}{3}.$$

$$\Rightarrow P=f(t)\geq f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{14156}{27}.$$

Vậy GTNN của P là $\dfrac{14156}{27}$ Dấu bằng xảy ra khi a=1; b=3 hoặc a=3, b=1.

□

Bài toán

Bài 42. Cho các số thực x, y thay đổi trong [1;2]. Tìm tất cả các giá trị của số thực z để biểu thức $N=\dfrac{(x+yz)(x-y)+xyz}{x^2-xy+y^2}$ có giá trị lớn nhất là H thỏa mãn $H\geq 2$

Lời giải. Đặt : $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2};2\right]$

Ta có : $P = f(t) = \frac{t^2 + (2z-1)\,t - z}{t^2 - t + 1}, \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 2\right)$

•$TH1$: Giả sử $P_{max} = f(t_0)$.

Do : $H \geq 2 \Rightarrow \frac{t_0^2 + (2z-1)t_0 - z}{t_0^2 - t_0 + 1} \geq 2 \Rightarrow z \geq g(t_0) = \frac{t_0^2 - t_0 + 2}{2t_0 - 1}, \left(\frac{1}{2} < t_0 \leq 2\right)$

Khảo sát hàm số $g(t_0) \Rightarrow g(t_0) \geq \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow z \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$

•$TH2$: Với $z \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$. Ta có :

$f'(t) = \frac{-2zt^2 + 2(z+1)t + z - 1}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Rightarrow t = \frac{z + 1 + \sqrt{3z^2+1}}{2z} \in \left(\frac{1}{2};2\right)$

Suy ra : $P_{max} = \frac{2z^2 + 1 + \sqrt{3z^2+1}}{1 + \sqrt{3z^2+1}}$

Và $P_{max} \geq 2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow z^2(4z^2 - 7) \geq 0$,(đúng)

Vậy : $z \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$. □

Bài toán

Bài 43. Cho a,b,c dương thoả mãn: $Min\left\langle a,b,c\right\rangle \geq \frac{1}{4}Max\left\langle a,b,c\right\rangle$.Tìm GTLN,GTNN của biểu thức: $P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$

Lời giải. Trước tiên ta hãy viết lại P đã:

$$-P = Q = \left(1 - \frac{b}{a}\right).\left(1 - \frac{a}{c}\right).\left(1 - \frac{c}{b}\right)$$

Khi đó ta có thể đặt: $\begin{cases} x = \frac{b}{a} \\ y = \frac{a}{c} \\ z = \frac{c}{b} \end{cases}$ Thì abc=1. Vậy ta cần tìm min, max của: Q= (1-x)(1-y)(1-z)

Từ giả thiết ta có thể suy ra chỉ có 2TH. 1 TH cho min. 1TH cho max. Nhưng trước tiên ta chú ý đến đánh giá:

$$1 = xyz \leq z.\frac{(y+x)^2}{4} \Rightarrow y + x \geq \frac{2}{\sqrt{z}}$$

• TH1: $1 \geq z \geq \frac{1}{4}; 4 \geq x, y \geq 1$. Thì:

$$Q = (1-z)(1 + yx - y - x) \leq (1-z)\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{\sqrt{z}} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{z} - z + 2\sqrt{z} - \frac{2}{\sqrt{z}} = f(z)$$

Khảo sát f(z) thì được:

$$f'(z) = -\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{z}}.\left(\frac{1}{z} + 1\right) \le 0$$

Từ đó suy ra:

$$Q \le f(z) \le f\left(\frac{1}{4}\right)$$

- TH2: $z \ge 4 > 1 \ge x, y$. Khi đó:

$$Q = (1-z)(1+yx-y-x) \ge (1-z)\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{\sqrt{z}} + 1\right) = f(z)$$

Theo kết quả TH 1 thì: f(z) nghịch biến

$$Q \ge f(z) \ge f(4)$$

□

Bài toán

Bài 44. Cho a, b, c là 3 số thực không âm thỏa mãn : $ab + bc + ca = 1$. Tìm GTNN biểu thức :

$$P = a + b + c + abc$$

Lời giải. Dễ thấy $a + b > 0$. Ta có $c = \dfrac{1-ab}{a+b}$, thay vào biểu thức có được:

$$P = \frac{1-a^2b^2}{a+b} + a + b \ge_{AM-GM} \frac{1 - \dfrac{(a+b)^4}{16}}{a+b} + a + b = f(a+b)$$

Đặt $a + b = t > 0$. Khảo sát $f(t) = \dfrac{16 - t^4 + 16t^2}{16t}$ với $t > 0$. + Với $t \ge 2$ thì $P \ge 2$.
+ Xét $0 < t < 2$ thì $f(t) \ge \dfrac{t^2(4\sqrt{3} - 3t)^2 - t^4 + 16t^2}{16t} = \dfrac{-t^3 + 16t + t(4\sqrt{3} - 3t)^2}{16} \ge \dfrac{10}{3\sqrt{3}}$.
Kết luận, min $P = \dfrac{10}{3\sqrt{3}} \iff a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

□

Bài toán

Bài 45. Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 thoả mãn $(a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Tìm giá trị lớn nhất, và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(ab + bc + ca)(a + b + c)}$$

Lời giải. Ta để ý rằng $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

Từ đó ta viết lại biểu thức

$$P = 1 + \frac{3abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} = 1 + \frac{3c(x-c)^2}{(x-c)^3}$$

Với $x = a+b$. Ta có, nếu $c = 0 \to P = 1$. Nếu $c \neq 0$ từ giả thiết ta có $(x-c)^2 = 4ab \leq (a+b)^2 = x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{c} = t \geq \frac{1}{2}$
Từ đó ta có

$$f(t) = 1 + \frac{3(t-1)^2}{(t+1)^3} \leq \frac{11}{9}$$

□

Bài toán

Bài 46. Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn : $a+b+c = 5$. Tìm GTLN biểu thức :

$$P = \frac{1}{\sqrt{a+4}} + \frac{1}{\sqrt{b+4}} + \frac{1}{\sqrt{c+4}}$$

Lời giải. Để ý rằng :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+4}} + \frac{1}{\sqrt{b+4}}\right)^2 = \frac{1}{a+4} + \frac{1}{b+4} + \frac{2}{\sqrt{(a+4)(b+4)}}$$
$$= \frac{a+b+8}{ab+4a+4b+16} + \frac{1}{\sqrt{a+b+4}}$$
$$\leq \frac{a+b+8}{4a+4b+16} + \frac{1}{\sqrt{a+b+4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{a+b+4} + \frac{1}{\sqrt{a+b+4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a+b+4}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+4}} + \frac{1}{\sqrt{b+4}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a+b+4}}$$

Mà ta có $3 \geq \sqrt{a+b+4} \geq 2$ và $c = 5-a-b \leq 5$ ta được

$$P \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 0; c = 5$ và các hoán vị.
Cách khác
Dễ thấy rằng bằng trục căn thức (hoặc khảo sát) ta luôn có $\forall a, b, c \in [0; 5]$ ta có :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a+4}} \leq -\frac{a}{30} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{b+4}} \leq -\frac{b}{30} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{c+4}} \leq -\frac{c}{30} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\to P \leq \frac{4}{3}$$

Vậy $\min P := \frac{4}{3}$ □

Bài toán

Bài 47. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = a + b + c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}$$

Lời giải. Giả sử $c = min\left\{a, b, c\right\}$. Ta có : $1 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \le \frac{3}{c^2} \Rightarrow 0 < c \le \sqrt{3}$ và : $c = \frac{a+b}{ab-1}$

$$P = \frac{(a+b)(ab+1)}{(a^2+1)(b^2+1)} + \frac{c}{c^2+1} \le \frac{a+b}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} + \frac{c}{c^2+1} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c}{c^2+1}$$

$$\Rightarrow P \le c\left(\frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{4}\right) + \frac{c}{c^2+1} = \frac{c}{4} + \frac{2c}{c^2+1}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\left(c-\sqrt{3}\right)^3}{4\left(c^2+1\right)} \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vậy : $P_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.Khi : a = b = c = \sqrt{3}.$

Cách khác

Chuyển ẩn $(a, b, c) \to \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$. Giả thiết trở thành $xy + yz + zx = 1$. Lúc đó

$$P = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+x)(y+z)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} = \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Mặt khác, ta lại có bất đẳng thức phụ cơ bản:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \ge \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx) \ge \frac{8}{9}\sqrt{3(xy+yz+zx)}(xy+yz+zx) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Do đó $P \le \frac{9}{4\sqrt{3}}$. Vậy $MaxP = \frac{9}{4\sqrt{3}} \iff a = b = c = \sqrt{3}$.

□

Bài toán

Bài 48. Cho 3 số thực $a, b, c \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$ thoả mãn $a + b + c = 3$. Tìm max

$$P = (2a-1)^3 + (2b-1)^3 + (2c-1)^3 - 8abc$$

Lời giải. Chú ý $x \le y \iff x^3 \le y^3$. Tận dụng điều kiện giả thiết $(2b-3)(2c-3) \ge 0 \iff 8abc \ge 12a(b+c) - 18a$. Khi đó

$$P = (2a-1)^3 + (2b-3+2)^3 + (2c-3+2)^3 - 8abc \le (2a-1)^3 + 2^3 + 2^3 - 12a(3-a) + 18a$$
$$= 15 - 4a(3-2a^2) \le 15(*)$$

Mà $(*)$ luôn đúng khi $0 \le a \le 1$ tức là ta có thể giả sử $a = \min(a, b, c) \Rightarrow 3 = a + b + c \ge 3a \iff 0 \le a \le 1$.

Vậy $MaxP = 15 \iff a = 0, b = c = \frac{3}{2}$ hoặc tại các hoán vị của ba số (a, b, c). □

Bài toán

Bài 49. Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện $abc \neq 0; a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{27}{4\,|ab+bc+ca|}$$

Lời giải. Ta có

$$4|ab+bc+ca| = 2|-a^2-b^2-c^2| = 2(a^2+b^2+c^2)$$

Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geqslant \frac{27}{2}$$

Ta có

$$b^2+c^2 \geqslant \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{8}{(b+c)^2} \Leftrightarrow (b^2+c^2)(b+c)^2 \geqslant 8b^2c^2 (\text{đúng})$$

Vậy

$$P \geqslant \frac{3a^2}{2}.\frac{9}{a^2} = \frac{27}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a:b:c = -2:1:1$ và các hoán vị. □

□

Bài toán

Bài 50. Cho 3 số thực $x, y, z \in [-1; 1]$ thỏa mãn : $x+y+z = \frac{3}{2}$. Tìm GTLN biểu thức :

$$P = x^3 + y^3 + z^3$$

Lời giải. Giả sử $z \leq y \leq x$. Giả thiết suy ra $-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq x \leq 1$. Do đó

$$P \leq x+y+z^3 = \frac{3}{2} - z + z^3 = \frac{15}{8} - \frac{1}{8}(2z+1)\left[(1-2z)(1+2z)+2(1+z)\right] \leq \frac{15}{8}$$

Cách khác

Ta có: $x = \frac{3}{2} - x - y \geq \frac{-1}{2}$

Tương tự ta được $y \geq \frac{-1}{2}, z \geq \frac{-1}{2}$

Đặt $a = x + \frac{1}{2}, b = y + \frac{1}{2}, c = z + \frac{1}{2} \Rightarrow a+b+c = 3$ và $a, b, c \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$

Khi đó: $P = a^3+b^3+c^3 - \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) + \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{3}{8} = a^2\left(a-\frac{3}{2}\right) + b^2\left(b-\frac{3}{2}\right) + c^2\left(c-\frac{3}{2}\right) + \frac{15}{8} \leq \frac{15}{8}$

Vậy $P_{max} = \frac{15}{8}$ khi $x = y = 1, z = \frac{-1}{2}$ □

Bài toán

Bài 51. Cho ba số đương x, y, z thoả mãn: $x + y \leq z$. Chứng minh:

$$(x^4 + y^4 + z^4)\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}\right) \geq \frac{297}{8}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM ta có

$$(x^4 + y^4 + z^4)\left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}\right) \geq \left[\frac{(x+y)^4}{8} + z^4\right]\left[\frac{32}{(x+y)^4} + \frac{1}{z^4}\right]$$

$$= 5 + \left[\frac{(x+y)^4}{8z^4} + \frac{z^4}{8(x+y)^4}\right] + \frac{255z^4}{8(x+y)^4} \geq \frac{297}{8}$$

□

Bài toán

Bài 52. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3; a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{a}{b}$

Lời giải. Theo B.C.S ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} + 1) \geq (a + b + c)^2$$

Suy ra

$$\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} + 1 \geq \frac{9}{4} \leftrightarrow \frac{2ab}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{4}$$

Suy ra $\dfrac{2t}{t^2 + 1} \geq \dfrac{1}{4}$ với $t = \dfrac{a}{b}$

$\iff -t^2 + 8t - 1 \geq 0$ từ đây ta có

$$4 - \sqrt{15} \leq \frac{a}{b} \leq 4 + \sqrt{15}$$

Cách khác

Đặt $\dfrac{a}{b} = x, \dfrac{c}{b} = y$. Ta có:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{(x + y + 1)^2} = \frac{4}{9}$$

Suy ra:

$$5y^2 - 8y(x + 1) + 5x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$\Delta'_y = -9x^2 + 72x - 9 \geq 0$$

$$\Rightarrow 4 - \sqrt{15} \leq x = \frac{a}{b} \leq 4 + \sqrt{15}$$

□

Bài toán

Bài 53. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$$

Lời giải. Ta có

$$P^2=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Giả sử $a \leq b \leq c$. Ta có

$$P^2 \leq b^2c^2(b-c)^2(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2 \leq \frac{\left[2bc+(b-c)^2+2ab+2bc+2ca\right]^5(a+b+c)^2}{5^5}$$

$$\leq \frac{(a+b+c)^{12}}{5^5}=5$$

Vậy $P_{max}=\sqrt{5}$ khi $a=0, b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ □

Bài toán

Bài 54. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{b^3}{a\left(b^2+c^2\right)}+\frac{ca^2}{b\left(a^2+b^2\right)}+\frac{5ca}{(c+a)^2}-\frac{6\sqrt{ca}}{c+a}$$

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{a}{b}, y=\dfrac{c}{b}$

$$P=\frac{1}{xy^2+x}+\frac{x^2y^2}{x^2y+y}+\frac{5xy}{(x+y)^2}-\frac{6\sqrt{xy}}{x+y}$$

Đặt $t=\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$, $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$. Ta có:

$$\frac{1}{xy^2+x}+\frac{x^2y^2}{x^2y^2+y} \geq \frac{(xy+1)^2}{(x+y)(xy+1)} \geq 2t$$

Suy ra

$$P \geq 5t^2-4t \geq \frac{-4}{5}, t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

Vậy $P_{min}=\dfrac{-4}{5}$ khi $a=2b=4c$ □

Bài toán

Bài 55. Cho số thực x thay đổi thoả mãn $x \geq 1$. Chứng minh rằng

$$e^x+\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2}>\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh :

$$e^x + \frac{1}{e^x} - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + 1\right)^2 > 1$$

Xét hàm số

$$f(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + 1\right)^2 \text{trên}[1; +\infty)$$

Ta có :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{2}x$$

Tiếp tục xét hàm

$$g(x) = e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{2}x$$

Ta cũng có

$$g'(x) = e^x + \frac{1}{e^x} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^4} > 0$$

Vậy g(x) là hàm đồng biến trên $[1; +\infty)$

$$g(x) > g(1) = e - \frac{1}{e} - 2 > 0$$

Vậy f'(x)>0 với $x \in [1; +\infty)$. Nên f(x) là hàm đồng biến trên $[1; +\infty)$ suy ra f(x)>f(1)=$e\frac{1}{e} - 1 > 1$ Vậy $f(x) > 1$ với $[1; +\infty)$ hay: $e^x + \frac{1}{e^x} - (\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + 1)^2 > 1$ với $[1; +\infty)$ □

Bài toán

Bài 56. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $0 \le a \le b \le c; a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = 3abc - 2014a - b - c$$

Lời giải. Ta có : $P \ge 3a^3 - 2014a - \sqrt{2(b^2 + c^2)}$

Suy ra : $P \ge f(a) = 3a^3 - 2014a - \sqrt{6 - 2a^2}, a \in [0; 1]$

Do : $f'(a) = 9a^2 - 2014 + \dfrac{2a}{\sqrt{6 - 2a^2}} < 0, (do : 0 \le a \le 1)$

Suy ra : $P \ge f(1) = -2013$

$P_{min} = -2013.Khi : a = b = c = 1.$

□

Bài toán

Bài 57. Cho các số thực dương thoả mãn $x + y + z = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{zx + 9}$$

Lời giải.

$$P = \sum\left(\frac{x^3}{xy+9}+\frac{x^3}{zx+9}\right) \geq \sum\frac{4x^3}{x\left(y+z\right)+18} = \sum\frac{4x^3}{-x^2+9x+18}$$

• Ta có : $\dfrac{4x^3}{-x^2+9x+18} \geq \dfrac{11x-21}{4} \Leftrightarrow (x-3)^2\left(27x+42\right) \geq 0, (\varnothing ng)$

•$P \geq \dfrac{11\left(x+y+z\right)-63}{4} = 9$

Vậy : $P_{min} = 9.Khi : x = y = z = 3.$

Cách khác Chú ý: • $a^3+b^3 \geq ab(a+b) \iff a^3+b^3 \geq \dfrac{(a+b)^3}{4}$; • $(t-6)^2 \geq 0 \iff \dfrac{t^3}{t^2+36} \geq t-3$. Khi đó

$$\begin{aligned}P &= \frac{x^3+y^3}{xy+9}+\frac{y^3+z^3}{yz+9}+\frac{z^3+x^3}{zx+9}\\ &\geq \frac{(x+y)^3}{4xy+36}+\frac{(y+z)^3}{4yz+36}+\frac{(z+x)^3}{4zx+36}\\ &\geq \frac{(x+y)^3}{(x+y)^2+36}+\frac{(y+z)^3}{(y+z)^2+36}+\frac{(z+x)^3}{(z+x)^2+36}\\ &\geq x+y-3+y+z-3+z+x-3 = 9\end{aligned}$$

Do đó $MinP = 9 \iff x = y = z = 3.$ □

Bài toán

Bài 58. ho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z} = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2x^3+y^3+z^3$$

.

Lời giải. Bất đẳng thức phụ cần nhớ: Với a, b là hai số thỏa $a, b, a+b \geq -1, ab \geq 0$ ta luôn có:

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \geq 1+\sqrt{1+a+b}$$

Từ đó, giả thiết bài toán cho ta $5 \geq 1+1+\sqrt{1+x^2+2(y+z)} \iff 0 \leq y+z \leq \dfrac{8-x^2}{2}$. Mà

$$P \leq 2x^3+(x+y)^3 \leq 2x^3+\frac{(8-x^2)^3}{8} = f(x)$$

Để ý $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ thì $f(x) \leq f(2\sqrt{2}) = 32\sqrt{2}$. Vậy $MaxP = 32\sqrt{2} \iff x = 2\sqrt{2}, y = z = 0.$ □

Bài toán

Bài 59. Cho $a, b \geq 0$ sao cho $a+b = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a}+\sqrt{1+ab} \leq 3$$

Lời giải. Ta có:

$$\sqrt{a^2+b} \le \frac{a^2+b+1}{2}$$

$$\sqrt{b^2+a} \le \frac{b^2+a+1}{2}$$

$$\sqrt{1+ab} \le \frac{2+ab}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a}+\sqrt{1+ab} \le \frac{a^2+b^2+ab}{2}+\frac{5}{2} = \frac{a^2-a+1}{2}+\frac{5}{2} \le 3$$

Dấu "=" khi $a=0, b=1 haya=1, b=0$ □

Bài toán

Bài 60. Cho a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{a^2+1}{b+1}}+\sqrt{\frac{b^2+1}{c+1}}+\sqrt{\frac{c^2+1}{a+1}}$$

Lời giải. Với : $0 \le x \le 3$ ta luôn có : $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \le 1+\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)x \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \le 1-\dfrac{x}{6} \end{cases}$

Suy ra : $\sqrt{\dfrac{a^2+1}{b+1}} \le \left(1+\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}a\right)\left(1-\dfrac{b}{6}\right) = 1+\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}a-\dfrac{b}{6}-\dfrac{\sqrt{10}-1}{18}ab$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{a^2+1}{b+1}} \le 1+\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)a-\frac{b}{6}$

Lập 2 BĐT tương tự rồi cộng lại ta được :

$P \le 3+\left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)(a+b+c)-\dfrac{a+b+c}{6} = \dfrac{3}{2}+\sqrt{10}$

Vậy : $P_{max} = \dfrac{3}{2}+\sqrt{10}$. Khi a;b;c là các hoán vị của $0; 0; 3$ □

Bài toán

Bài 61. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{b+1}+\frac{b^2+1}{c+1}+\frac{c^2+1}{a+1} \le \frac{45}{4}$$

Lời giải. Với : $0 \le x \le 3$ ta luôn có : $\begin{cases} x^2+1 \le 3x+1 \\ \dfrac{1}{x+1} \le 1-\dfrac{x}{4} \end{cases}$

Suy ra : $\frac{a^2+1}{b+1} \le (3a+1)\left(1-\frac{b}{4}\right) = 3a+1-\frac{b}{4}-\frac{3ab}{4} \le 1+3a-\frac{b}{4}$

Lập 2 BĐT tương tự rồi cộng lại ta được :

$$VT \le 3+\frac{11}{4}(a+b+c) = \frac{45}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi : $a;b;c$ là các hoán vị của $0;0;3$. □

Bài toán

Bài 62. Cho 3 số thực x,y,z không âm thỏa mãn : $xy+yz+zx=1$. Tìm GTLN biểu thức :

$$P = 9\left(x^2+y^2+z^2\right) - 4\left(x^3+y^3+z^3\right)$$

Lời giải.

$$P \le 9(x+y+z)^2 - 4(x^3+y^3+z^3-3xyz) - 18 = 9(x+y+z)^2 - 4(x+y+z)^3 + 12(x+y+z) - 18$$

$$= 10 - (4y+4y+4z+7)(x+y+z-2)^2 \le 10$$

Vậy $P_{max} = 10$ khi $a=b=1, c=0$ cùng các hoán vị. □

Bài toán

Bài 63. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác.Tìm GTNN biểu thức :

$$P = \frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{1}{a+b-c}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{b+c-a} = x, \sqrt{c+a-b} = y, \sqrt{a+b-c} = z \Rightarrow a = \frac{y^2+z^2}{2}, b = \frac{z^2+x^2}{2}$
$P = \frac{y^2+z^2}{2x} + \frac{z^2+x^2}{2y} + \frac{1}{z^2} \ge z+z+\frac{1}{z^2} \ge 3$ Vậy $P_{min} = 3$ khi $x=y=z=1$ □

Bài toán

Bài 64. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm GTNN biểu thức :

$$P = \frac{a}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{b}{\sqrt{c+a-b}} + \frac{c}{\sqrt{a+b-c}}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{b+c-a} = x, \sqrt{c+a-b} = y, \sqrt{a+b-c} = z \Rightarrow a = \frac{y^2+z^2}{2}, b = \frac{z^2+x^2}{2}, c = \frac{x^2+y^2}{2}$

$$\Rightarrow 12 = (x^2+y^2)^2 + (y^2+z^2)^2 + (z^2+x^2)^2 \le 4(x^4+y^4+z^4)$$

$$P = \frac{y^2+z^2}{2x} + \frac{z^2+x^2}{2y} + \frac{x^2+y^2}{2z} \ge 3\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} \ge 3$$

Vậy $P_{max} = 3$ khi $a = b = c = 1$.

Chứng minh bổ đề: $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{z^2}{x} \geq 3\sqrt[4]{\dfrac{x^4 + y^4 + z^4}{3}}$

Chứng minh:

$\left(\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x}\right)^2 (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Ta chỉ cần chứng minh $(x = a^2, y = b^2, z = c^2)$

$\dfrac{(x+y+z)^2}{xy+yz+xz} \geq \dfrac{3\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{x+y+z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \dfrac{3\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right)}{(x+y+z)\left((x+y+z) + \sqrt{3(x^2+y^2+z^2}\right)}$

$\Leftrightarrow 6(xy+yz+xz) \leq (x+y+z)\left((x+y+z) + \sqrt{3(x^2+y^2+z^2}\right)$ (đúng theo $Cauchy-Schwarz$)

□

Bài toán

Bài 65. Cho a, b, c là 3 số thực không âm thỏa mãn : $a + b + c = 1$. Tìm GTLN biểu thức :

$$Q = 3ab + 4bc + 5ca$$

Lời giải. Ta có

$$Q = 3ab + c(4b + 5a) = 3ab + (1 - a - b)(4b + 5c)$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 2b(3a - 2) + 5a^2 - 5a + Q = 0$$

Phương trình có nghiệm ẩn b thì

$$\Delta' = (3a - 2)^2 - 4(5a^2 - 5a + Q) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow Q \leq \frac{-11a^2 + 8a + 4}{4} \leq \frac{15}{11}$$

Vậy $P_{max} = \dfrac{15}{11}$ khi $a = \dfrac{4}{11}, b = \dfrac{5}{22}, c = \dfrac{9}{22}$ □

Bài toán

Bài 66. Cho a, b, c là 3 số thực dương thoả mãn : $a + b + c = 1$. Tìm GTNN biểu thức :

$$P = \frac{3a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + ab + 2b^2}} + \frac{3b^2 + c^2}{\sqrt{b^2 + bc + 2c^2}} + \frac{3c^2 + a^2}{\sqrt{c^2 + ca + 2a^2}}$$

Lời giải. Cho a, b là 2 số thực dương. Tìm GTNN biểu thức:

$$Q = \frac{3a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + ab + 2b^2}} + \frac{3b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 + ab + 2a^2}} + \frac{1}{2\sqrt{a+b}}$$

Ta có

$$\frac{3a^2+b^2}{\sqrt{a^2+ab+2b^2}} \geq \frac{9a-b}{4}; \Leftrightarrow 7(a-b)^2(9a^2+9ab+2b^2) \geq 0$$

Lập các bất đẳng thức tương tự suy ra

$$P \geq 2(a+b+c) = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ □

Bài toán

Bài 67. Cho 3 số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $2a+2b+c^2=14$. Tìm $GTNN$ của biểu thức:

$$P = a^3+2b^2+2c^3$$

Lời giải. Dựa vào giả thiết chắc chắn tư tưởng $AM-GM$ đã hiện ra, vấn đề là chọn hằng số cho phù hợp. Ta có

$$a^3+8+8 \geq 12a; 2(b^2+9) \geq 12b; c^3+c^3+8 \geq 6c^2$$

Vậy $P+42 \geq 6(2a+2b+c^2)=84 \Leftrightarrow P42$ .P =42 khi $a=c=2, b=3$ □

Bài toán

Bài 68. Cho a, b, c>0 thỏa mãn: $(a+c)(b+c)=4c^2$ Tìm GTLN của

$$N = \frac{a}{b+3c}+\frac{b}{3c+a}+\frac{ab}{bc+ca}$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{a}{c}>0; y=\frac{b}{c}>0$ Từ điều kiện suy ra

$$x+y+xy=3 \Rightarrow x+y \leq 2$$

Vậy

$$\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}+\frac{xy}{x+y} \leq \frac{3(x+y)^2+16(x+y)-12}{4(x+y+6} \leq 1$$

. Dấu = khi $x=y=1$. Vậy Max N=1 khi $a=b=c$ □

Bài toán

Bài 69. Cho $a, b, c>0; a+b+c=3$. Tìm GTLN của

$$H = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc}$$

Lời giải. Ta có

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(a+c)(b+c) \leq 27-24abc.$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{\frac{27-24abc}{3}}+8\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{9-8abc}+8\sqrt[3]{abc}.$$

Đặt $t = abc$ ta có $0 < t \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ nên $0 \leq t \leq 1$ Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{9-8t} + 8\sqrt[3]{t}; 0 < t \leq 1$

$$f'(t) = \frac{8}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(9-8t)^2}}\right].$$

Nhận thấy $(9-8t)^2 - t^2 = 9(1-t)(9-7t) \geq 0 \to f'(t) > 0$

$$\Rightarrow f(t) \leq f(1) = 9.$$

Vậy GTLN của H là 9 khi a=b=c=1. □

Bài toán

Bài 70. Cho $a; b; c \geq 0; a+b+c = 3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$F = a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Lời giải. Ta có:

$$\sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{2(b+c)} = \sqrt{2(3-a)}.$$

$$\Rightarrow F \leq a + \sqrt{2(3-a)} = f(a); a \in [0;3].$$

Xét hàm ta có GTLN của F là $\frac{7}{2}$ khi và chỉ khi $a = \frac{5}{2}; b = c = \frac{1}{4}$ Xét hàm $g(a) = a + \sqrt{b} + \sqrt{c}; a \in [0;3]$

$$g'(a) = 1 > 0 \Rightarrow g(a) \geq g(0) = \sqrt{b} + \sqrt{3-b}.$$

Xét hàm số này với $b \in [0;3]$ta có GTNN của F là $\sqrt{3}$ khi $a = b = 0; c = 3$. □

Bài toán

Bài 71. Cho $a, b, c \in [0;1]$. Tìm GTLN của

$$H = \frac{a^3+2}{b^2+1} + \frac{b^3+2}{c^2+1} + \frac{c^3+2}{a^2+1}.$$

Lời giải. Ta có : $\begin{cases} a^3 + 2 \leq a^2 + 2 \\ \dfrac{1}{b^2+1} \leq 1 - \dfrac{b^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(a-1) \leq 0 \\ b^2(b^2-1) \leq 0 \end{cases}$ $\left(\text{đúng} : a, b \in [0;1]\right)$

Suy ra :

$$\frac{a^3+2}{b^2+1} \leq \left(a^2+2\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right) = 2 + a^2 - b^2 - \frac{a^2b^2}{2} \leq 2 + a^2 - b^2$$

Lập 2 BĐT tương tự rồi cộng lại ta được : $H \leq 6$

Vậy $H_{max} = 6.Khi : a = b = c = 0$. □

Bài toán

Bài 72. Cho a,b là 2 số thực dương.Tìm GTNN biểu thức:

$$P = \frac{a^4}{a^2+3b^2} + \frac{b^4}{b^2+3a^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{(a-b)^2[3(a^4+b^4)+9ab(a^2+b^2)+4a^2b^2]}{2(a^2+3b^2)(b^2+3a^2)} \geq 0 \iff \frac{a^4}{a^2+3b^2}+\frac{b^4}{b^2+3a^2} \geq \frac{a^2-ab+b^2}{2}$$

□

Bài toán

Bài 73. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ Tìm GTNN của biểu thức:

$$K = \frac{(b+c)^5+32}{a^2+1}+\frac{(c+a)^5+32}{b^2+1}+\frac{(a+b)^5+32}{c^2+1}.$$

Lời giải. Dự đoán điểm rơi tại $a=b=c=1$ thì $K=96$.
BĐT cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \sum \frac{\left(\frac{b+c}{2}\right)^5+1}{a^2+1} \geq 3.$$

Ta có điều hiển nhiên $t^5+1 \geq t^4+t; t=\frac{b+c}{2}$ và kết hợp với AM-GM:

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^5+1 \geq \left(\frac{b+c}{2}\right)^4+\frac{b+c}{2} \geq \frac{bc(b^2+c^2)+b+c}{2}(1).$$

$$\sum \frac{b(c^3+1)+c(b^3+1)}{a^3+1} = \sum a\left(\frac{b^3+1}{c^3+1}+\frac{c^3+1}{b^3+1}\right) \geq 2(a+b+c) \geq 6.(2)$$

Từ (1) và (2) ta có K nhỏ nhất là 6 khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách khác

Ta có đánh giá: $\frac{(b+c)^5+32}{a^2+1} \geq 104-72a \iff \frac{(a-1)^2(1461-a^3+23a^2+949a)}{16(a^2+1)} \geq 0$ (luôn đúng với $0<a<3$). Do đó $K \geq 3.104-72(a+b+c)=96$. Vậy $MinK=96 \iff a=b=c=1$. □

Bài toán

Bài 74. Cho a, b, c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$ Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{|a-b|}{\sqrt{2ab+c^2}}+\frac{|b-c|}{\sqrt{2bc+a^2}}+\frac{|c-a|}{\sqrt{2ac+b^2}}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$2ab+c^2=(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Dự đoán P nhỏ nhất là 2. BĐT $\Leftrightarrow \sum \sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq 2$ Với $x=(a-b)^2; y=(b-c)^2; z=(c-a)^2$
Theo AM-GM:

$$\sum \sqrt{\frac{x}{y+z}} = \sum \frac{x}{\sqrt{x(y+z)}} \geq \sum \frac{2x}{x+y+z} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b; c=0$ hoặc $a=4b=4c$ và các hoán vị.

Cách khác

Giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Đặt $x = a - b, y = b - c, z = a - c,\ (x, y, z \geq 0)$. Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2,\ x + y = z$. Khi đó

$$P = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Tiếp tục đặt $X = \frac{x}{z}, Y = \frac{y}{z}$. Ta có $X, Y \in [0; 1]$ và $X + Y = 1$. Lúc đó:

$$P = \frac{X}{\sqrt{Y^2 + 1}} + \frac{Y}{\sqrt{X^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Kết quả $MinP = 2 \iff (X; Y) = (0; 1), (1; 0)$ hay $c = 4a = 4b \neq 0$. □

Bài toán

Bài 75. Cho a, b, c > 0, ab+bc+ca = 1. Chứng minh:

$$(a + b + c)\left(\frac{a + b}{1 + c^2} + \frac{b + c}{1 + a^2} + \frac{c + a}{1 + b^2}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Lời giải. Theo giả thiết : $1 = ab + bc + ac$

$$\Rightarrow \frac{a + b}{1 + c^2} = \frac{a + b}{(a + c)(b + c)}$$

$$\frac{b + c}{1 + a^2} = \frac{b + c}{(a + c)(a + b)}$$

$$\frac{a + c}{1 + b^2} = \frac{a + c}{(b + c)(a + b)}$$

$$\Rightarrow P = (a + b + c) . \left[\frac{a + b}{(a + c)(b + c)} + \frac{b + c}{(a + b)(a + c)} + \frac{a + c}{(b + c)(a + b)}\right]$$

nên $2.P = [(a + b) + (a + c) + (b + c)] . \left[\frac{a + b}{(a + c)(b + c)} + \frac{b + c}{(a + b)(a + c)} + \frac{a + c}{(b + c)(a + b)}\right]$

Áp dụng bđt Co-si ta có :

$(a + b) + (b + c) + (a + c) \geq 3\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(a + c)}$

$\left[\frac{a + b}{(a + c)(b + c)} + \frac{b + c}{(a + b)(a + c)} + \frac{a + c}{(b + c)(a + b)}\right] \geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{(a + b)(a + c)(b + c)}}$

$\Rightarrow 2.P \geq 3.3 \Rightarrow P \geq \frac{9}{2}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Cách khác

$$2.VT = [(a + c) + (a + b) + (b + c)]\left[\frac{a + b}{(a + c)(b + c)} + \frac{b + c}{(a + c)(b + a)} + \frac{a + c}{(b + a)(b + c)}\right]$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz và AM-GM ta có

$$2VT \geq \left(\sqrt{\frac{a+b}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+c}}+\sqrt{\frac{a+c}{b+a}}\right)^2 \geq 9$$

Vậy ta có đpcm. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán

Bài 76. Cho a,b là 2 số thực dương.Tìm GTNN biểu thức:

$$P=\frac{a^4}{a^2+3b^2}+\frac{b^4}{b^2+3a^2}+\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}$$

Lời giải. Để ý rằng

$$P=\frac{a^4}{a^2+3b^2}+\frac{b^4}{b^2+3a^2}+\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \geq \frac{(a^3+b^3)^2(a+b)}{(a^4+b^4+6a^2b^2)(a+b)}+\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \geq \frac{a^3+b^3}{2(a+b)}+\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}=\frac{a^2-ab+b^2}{2}+\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \geq \frac{3}{2}$$ □

Bài toán

Bài 77. Cho $a,b,c \geq 0; a+b+c=3$. Tìm GTLN của :

$$N=(ab^3+bc^3+ca^3)(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Ta có:

$N^2=(ab^3+bc^3+ca^3)^2(ab+bc+ca)^2 \leq \frac{1}{2}[\frac{2(ab+bc+ca)^2+2(ab^3+bc^3+ca^3)}{3}]^3=\frac{4}{27}[(ab+bc+ca)^2+(ab^3+b$

Sau đó phân tích được:

$(ab+bc+ca)^2+(ab^3+bc^3+ca^3)=\sum a^2b^2+2abc(\sum a)+\sum ab^3=\sum(a^2b^2+ab^3)=\sum ab^2(a+b)=\sum ab^2($

Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-a)(b-c) \leq 0$ Suy ra :

$$ab^2+bc^2+ca^2+abc=b(c+a)^2+a(b-a)(b-c) \leq b(c+a)^2 \leq \frac{1}{2}[\frac{2b+2(a+c)}{3}]^3=\frac{4}{27}(a+b+c)^3=4$$

Vậy

$$N^2 \leq \frac{4}{27}.12^3=256 \to N \leq 16$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=0,b=1,c=2$ và các hoán vị . □

Bài toán

Bài 78. Cho $a,b,c>0$ Chứng minh rằng

$$3(a+b+c) \geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}+8\sqrt[3]{abc}.$$

Lời giải. Chia 2 vế cho : $\sqrt[3]{abc}$ rồi đặt : $x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}, y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}, z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow xyz = 1, (x, y, z > 0)$

Ta cần CM :

$$3(x+y+z) \geq \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}} + 8$$

Đặt :

$$P = 3(x+y+z) - 8 - \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}$$

Ta có :

$$x^3+y^3+z^3 = 3xyz + (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Suy ra :

$$x^3+y^3+z^3 = 3+(x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq 3+(x+y+z)^3-27$$

Khi đó :

$$P \geq 3(x+y+z) - 8 - \sqrt[3]{\frac{(x+y+z)^3}{3} - 8}$$

$$\Rightarrow P \geq f(t) = 3t - 8 - \sqrt[3]{\frac{t^3}{3} - 8}, (t \geq 3)$$

Hàm f tăng nên $f(t) \geq f(3) = 0 \Rightarrow$ đpcm. □

Bài toán

Bài 79. Cho a, b, c là 3 số thực dương . Tìm GTLN biểu thức :

$$P = \frac{ab}{a^2+3b^2} + \frac{bc}{b^2+3c^2} + \frac{ca}{c^2+3a^2}$$

Lời giải. Đặt $\left(\frac{b}{a}; \frac{c}{b}; \frac{a}{c}\right) \to (x; y; z) \Rightarrow xyz = 1$

Ta có: $3(t+1)(3t^2+1) - 8t(t^2+t+1) = (t-1)^2(t+3) \geq 0$, Suy ra:

$$P = \frac{x}{3x^2+1} + \frac{y}{3y^2+1} + \frac{z}{3z^2+1} \leq \frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{y+1}{y^2+y+1} + \frac{z+1}{z^2+z+1}\right) \leq \frac{3}{4}$$

Vậy $P_{max} = \frac{3}{4}$ khi $a = b = c$ □

Bài toán

Bài 80. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2+b^2+c^2 = 5$. Chứng minh rằng:

$$(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$$

Lời giải. Ta chỉ cần xét trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \leq 0$. Bình phương 2 vế ta đưa bài toán về chứng minh:

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(ab+bc+ca)^2 \leq 16$$

Ta có: $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(ab+bc+ca)^2 \leq \dfrac{16\left((a-b)^2+(a-c)(b-c)+ab+bc+ca\right)^5}{5^5} = \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^5}{5^5} = 16$ Kết thúc chứng minh, đẳng thức xảy ra khi $a=2, b=1, c=0$ □

Bài toán

Bài 81. Cho x,y,z, t là các số thực thỏa mãn $xy+yz+zt+tx=1$ Tìm GTNN của

$$H = 5x^2+4y^2+5z^2+t^2$$

Lời giải.

$$H \geq \frac{5(x+z)^2}{2}+4y^2+t^2 = \left(\frac{(x+z)^2}{2}+4y^2\right)+\left(2(x+z)^2+t^2\right) \geq 2\sqrt{2}(x+z)(y+t) = 2\sqrt{2}(xy+yz+zx+xt)$$

□

Bài toán

Bài 82. Cho $a,b,c \in [0;2]$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3 \leq 9$

Lời giải. Với hình thức như này đưa về 1 biến là nhanh gọn nhất
Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ thế thì $1 \leq a \leq 2$
Dự đoán dấu bằng xảy ra tại 2,1,0 nên ta đánh giá

$$b^3+c^2 \leq (b+c)^3 = (3-a)^3$$

Giờ phải chứng minh

$$a^3+(3-a)^3 \leq 9 \iff 9(a-1)(a-2) \leq 0(\text{Luôn đúng})$$

Vậy BĐT chứng minh xong, đẳng thức xảy ra khi $a=2, b=1, c=0$ và các hoán vị.
Giả sử $(1-a)(1-b) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1$

Do đó:

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3 \leq (a+b)^3-3(a+b-1)(a+b)+c^3$$
$$= (3-c)^3-3(2-c)(3-c)+c^3 = 6c^2-12c+9 = 6c(c-2)+9 \leq 9$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=1; c=0$ và các hoán vị. □

Bài toán

Bài 83. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y^2z}+\frac{y}{z^2x}+\frac{z}{x^2y}+\frac{x^5}{y}+\frac{y^5}{z}+\frac{z^5}{x}$$

trong đó x,y,z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z\le\frac{3}{2}$

Trích đề thi thử số 04 - tạp chí TH&TT.

Lời giải. Sử dụng $AM-GM$ ta có: $\dfrac{x}{64y^2z}+\dfrac{z^5}{x}\ge\dfrac{z^2}{4y}$. Tương tự cho các biểu thức còn lại ta có:

$$\begin{aligned}P&\ge\sum\frac{63x}{64y^2z}+\sum\frac{z^2}{4y}\\&\ge_{C-S}\frac{63(x+y+z)^2}{64xyz(x+y+z)}+\frac{(x+y+z)^2}{4(x+y+z)}\\&\ge_{AM-GM}\frac{63.27}{64(x+y+z)^2}+\frac{x+y+z}{4}\\&=\frac{837}{32(x+y+z)^2}+\frac{27}{64(x+y+z)^2}+\frac{x+y+z}{8}+\frac{x+y+z}{8}\\&\ge_{AM-GM}\frac{837}{32(x+y+z)^2}+\frac{9}{16}\\&\ge\frac{837}{32.\frac{9}{4}}+\frac{9}{16}=\frac{195}{16}\end{aligned}$$

Vậy $MinP=\dfrac{195}{16}\iff x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Cách khác

Ta thấy rằng :

$$\frac{x^5}{y}+\frac{x}{8}+\frac{y}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\ge\sqrt[6]{\frac{x^5}{y}.\frac{x}{8}.\frac{y}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}.\frac{1}{16}}=\frac{3x}{8}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{x^5}{y}+\frac{1}{4}(x+y+z)\ge\frac{3}{8}(x+y+z)$$

$$\Rightarrow\sum\frac{x^5}{y}\ge\frac{1}{8}(x+y+z)$$

Ta cũng có đánh giá sau :

$$\sum\frac{x}{y^2z}\ge\frac{(x+y+z)^2}{xyz(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\ge\frac{9}{xy+yz+zx}$$

Mặc khác :

$$xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{x}{y^2z}\ge\frac{27}{(x+y+z)^2}$$

Suy ra :

$$P\ge\frac{27}{(x+y+z)^2}+\frac{1}{8}(x+y+z)$$

Đến đây đơn giản rồi . □

Bài toán

Bài 84. Cho a,b,c thoả mãn $(a+b+c)^3 = 32abc$ Tìm GTLN và GTNN của :

$$M = \frac{a^4+b^4+c^4}{(a+b+c)^4}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát , giả sử $a+b+c=4$ thì ta có : $abc=2$

Khi đó

$$P = \frac{1}{256}\left(a^4+b^4+c^4\right).M = \frac{1}{256}.M$$

Đặt $t = ab+bc+ca$

Ta có

$$M = a^4+b^4+c^4 = \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)$$

Mà

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = \left[(a+b+c)^2 - 2\left(ab+bc+ac\right)\right]^2$$

Và

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = (ab+bc+ac)^2 - 2abc\left(a+b+c\right)$$

Nên

$$M = (6-2t)^2 - 2\left(t^2-16\right) = 2\left(t^2-32t+144\right)$$

Ta có

$$t = ab+bc+ac = a\left(b+c\right)+bc = a\left(4-a\right)+\frac{2}{a}$$

Mà $(b+c)^2 \geq 4bc$ nên $(4-a)^2 \geq \frac{8}{a}$ hay $(a-2)\left(a^2-6a+4\right) \geq 0$

$\Rightarrow 3-\sqrt{5} \leq a \leq 2$

Xét hàm $t = -a^2+4a+\frac{2}{a}, a\epsilon\left[3-\sqrt{5};2\right]$

Khảo sát tìm được $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$

Xét hàm số : $f\left(t\right) = 2\left(t^2-32t+144\right)$ với $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$

ta có $Maxf(t) = f(5) = 18$; $Minf(t) = f\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{2}\right) = 383-165\sqrt{5}$

Vậy $MaxP = \frac{9}{128}$ đạt được khi $a=2; b=c=1$

$MinP = \dfrac{383-165\sqrt{5}}{256}$ đạt được $\to a = 3-\sqrt{5}; b = c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ □

Bài toán

Bài 85. Cho các số thực thỏa mãn $a+b+c=1; ab+bc+ca>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Lời giải. Giả sử b nằm giữa a và c . Ta có: bất đẳng thức trị tuyệt đối:

$$|c-a| = |a-c| \leq |a-b| + |b-c| \to \frac{2}{|c-a|} \geq \frac{2}{|a-b|+|b-c|}$$

$$\to \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} \geq \frac{10}{|a-b|+|b-c|} = \frac{10}{a-c}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{10}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{40}{(a-c)+2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Có $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$

$$\Rightarrow (a+b) \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Hay

$$(a-c)+2\sqrt{ab+bc+ca} \leq \sqrt{2[(a-c)^2+4(ab+bc+ac)]}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{40}{\sqrt{2[(a-c)^2+4(ab+bc+ac)]}}$$

Hay:

$$P \geq \frac{20.\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2+4(ab+bc+ac)}}$$

Ta có:

$$\sqrt{(a-c)^2+4(ab+bc+ac)} = \sqrt{a^2+c^2+2ac+4ab+4bc} = \sqrt{(a+c)(a+c+4b)}$$

Có:

$$3(a+c)(a+c+4b) \leq \frac{(4a+4b+4c)^2}{4} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)(a+c+4b)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 10.\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow a-b = b-c \Leftrightarrow 1-3b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$

Và

$$(a-c)^2 = 4(ab+bc+ac) \Rightarrow (a+b)^2 - 4ac = 4(\frac{2}{9}+ac) \Rightarrow ac = \frac{-1}{18}$$

$$a+c = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{2+\sqrt{6}}{6}; c = \frac{2-\sqrt{6}}{6}$$

Cách khác

Không mất tính tổng quát , giả sử a > b > c khi đó bđt trở thành :

$$P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{ab+bc+ac}$$

Với mọi x ; y dương ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ta có :

$$P = 2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right) + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{ab+bc+ac}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{8}{a-b+b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ac}}$$

$$= 10\left(\frac{1}{a-c} + \frac{1}{2\sqrt{ab+bc+ac}}\right) \geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ac)}}$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}$$

Áp dụng bđt Cauchy ta có :

$$(1-b)(1+3b) = \frac{(3-3b)(1+3b)}{3} \leq \frac{(3-3b+1+3b)^2}{12} = \frac{4}{3}$$

nên

$$\sqrt{(1-b)(1+3b)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow P \geq 10\sqrt{6}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{2+\sqrt{6}}{6}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{2-\sqrt{6}}{6}$ hoặc các hoán vị. □

Bài toán

Bài 86. Cho 3 số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm $GTLN$ của biểu thức

$$P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Lời giải. Giả sử $c \geq b \geq a$

Ta có :

$$4P = 4.(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) = 4.(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a)$$

$$\Rightarrow P \leq [(a+b+c)(b-a)+(c-b)(c-a)]^2$$

$$= \left[b^2+c^2+a(b-2c)-a^2\right]^2 \leq \left(b^2+c^2\right)^2$$

nên P $\leq \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = 1$

Vậy P max $= \dfrac{1}{4}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a=0; b=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; c=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ □

Bài toán

Bài 87. Cho x, y, z là 3 số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm GTLN biểu thức :

$$P=\frac{x^3+1}{\sqrt{3y+1}}+\frac{y^3+1}{\sqrt{3z+1}}+\frac{z^3+1}{\sqrt{3x+1}}$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{cases} x^3+1 \leq x+1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3y+1}} \leq 1-\dfrac{y}{2} \end{cases}$$

Suy ra:

$$P \leq (x+1)\left(1-\frac{y}{2}\right)+(y+1)\left(1-\frac{z}{2}\right)+(z+1)\left(1-\frac{x}{2}\right)=3+\frac{x+y+z-xy-yz-zx}{2}$$

$$=3+\frac{(x-1)(y-1)(z-1)+1-xyz}{2} \leq \frac{7}{2}$$

Vậy $P_{max}=\dfrac{7}{2}$ khi $x=1, y=1, z=0$ hoặc $x=1, y=0, z=0$ cùng các hoán vị. □

Bài toán

Bài 88. Cho x, y là 2 số thực dương thỏa mãn : $x^4+y^4+4=\dfrac{6}{xy}$. Tìm GTNN biểu thức :

$$P=\frac{x+1}{2x+1}+\frac{y+1}{2y+1}-\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2-1}$$

Lời giải. Giả thiết của bài toán ta suy ra

$$\frac{6}{xy}=x^4+y^4+4 \geq \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}+4 \geq 2x^2y^2+4 \Leftrightarrow 2x^3y^3+4xy-6 \leq 0 \Leftrightarrow 0<xy \leq 1$$

Từ đây, biểu thức P được viết lại thành

$$P=1+\frac{x+y+1}{(2x+1)(2y+1)}-\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2-1} \geq 1+\frac{1}{x+y+1}-\frac{x+y}{2\left(x^2+y^2-1\right)}$$

Với $0 < xy \leq 1$ thì ta có

$$P = 1 + \frac{x+y+1}{(2x+1)(2y+1)} - \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2-2} \geq 1 + \frac{1}{x+y+1} - \frac{x+y}{2(x^2+y^2-1)} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+1} - $$

$$\geq 1 + \frac{2}{x^2+y^2+4} - \frac{x^2+y^2+2}{4(x^2+y^2-1)} = \frac{3}{4}\left[1 - \frac{1}{x^2+y^2-1}\right] + \frac{2}{x^2+y^2+4}$$

Mặt khác, từ giả thiết ta lại có

$$\left(x^2+y^2\right)^2 + 4 = \frac{6}{xy} + 2x^2y^2 = 2x^2y^2 + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xy} \geq 3\sqrt[3]{8x^2y^2\frac{1}{xy}\frac{1}{xy}} + 2 = 8 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2$$

Nếu $4 + 2\sqrt{6} \geq x^2+y^2 \geq 2$ thì ta có

$$f(t) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t+5} \geq f(1) = \frac{1}{3}, t = x^2+y^2-1 \left(t \in \left[1; 3+2\sqrt{6}\right]\right)$$

Nếu $x^2+y^2 \in (4+2\sqrt{6}; +\infty)$ thì ta có

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{t}\right) + \frac{2}{t+5}\right] = \frac{3}{4}, t = x^2+y^2-1, t \in \left(3+2\sqrt{6}; +\infty\right)$$

Mà $\frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ suy ra giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{1}{3}$ khi $x = y = 1$. □

Bài toán

Bài 89. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x+y+z=6$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{12} + \frac{z^4}{108} \geq \frac{23}{12}$$

Lời giải. Một cách dễ thấy đó là dùng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân, ta có :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2}} = x$$

$$\frac{y^3}{12} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^3}{12}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}} = y$$

$$\frac{z^4}{108} + \frac{z}{4} + \frac{z}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{z^4}{108}.\frac{z}{4}.\frac{z}{4}} = \frac{z^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{12} + \frac{z^4}{108} + \frac{11}{6} + \frac{z}{2} \geq x + y + \frac{z^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{12} + \frac{z^4}{108} \geq \frac{z^2}{4} + 6 - z - \frac{z}{2} - \frac{11}{6} = \frac{z^2}{4} - \frac{3}{2}z + \frac{25}{6} = \frac{1}{4}(x-x_0)^2 + \alpha \geq \alpha$$

tự tìm các số x_0 và α □

Bài toán

Bài 90. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \frac{b^2+1}{\sqrt{b^2-b+1}} + \frac{c^2+1}{\sqrt{c^2-c+1}} \geq 6$$

Lời giải.

$$LHS = \sum \frac{a + \frac{1}{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a + \frac{1}{a}} - 1)} \geq^{AM-GM} \sum \frac{2}{\frac{a}{a + \frac{1}{a}} + 1} \geq 6$$

Cách khác

Đổi biến $(a, b, c) \to \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$. Giả thiết sẽ là $a + b + c \leq 3$ và bất đẳng thức trở thành:

$$\sum \frac{a^2 + 1}{a\sqrt{a^2 - a + 1}} \geq 6 \ (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có $\dfrac{a^2 + 1}{a\sqrt{a^2 - a + 1}} \geq \dfrac{2\sqrt{a(a^2 - a + 1)}}{a\sqrt{a^2 - a + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{a}}$. Do đó

$$VT_{(*)} \geq \sum \frac{2}{\sqrt{a}} \geq_{C-S} \frac{18}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \geq \frac{18}{\sqrt{3(a + b + c)}} \geq 6$$

□

Bài toán

Bài 91. Cho a, b, c là các số thực dương thoả điều kiện: $4a + 3b + 4c = 22$ .Tìm GTNN của:

$$P = a + b + c + \frac{1}{3a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

Lời giải. Giả thiết suy ra $a + c = \dfrac{22 - 3b}{4}$, $0 < b < \frac{22}{3} < 8$. Sử dụng $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$P \geq a + b + c + \frac{2}{b} + \frac{(1 + 3)^2}{3a + 3c} = \frac{22 - 3b}{4} + b + \frac{2}{b} + \frac{64}{3(22 - 3b)}, 0 < b < \frac{22}{3} < 8$$

Khảo sát $f(b) = \dfrac{22 - 3b}{4} + b + \dfrac{2}{b} + \dfrac{64}{3(22 - 3b)}, 0 < b < \frac{22}{3} < 8$ ta được $MinP = Minf(b) = f(2) = \dfrac{25}{3}$. Từ đó tìm được $MinP = \dfrac{25}{3} \iff a = 1, b = 2, c = 3.$ □

Bài toán

Bài 92. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $abc = 1$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = (a + b)(b + c)(c + a) + \frac{72}{\sqrt{a + b + c + 1}}$$

Lời giải. Với chú ý:

$$\begin{aligned}(a + b)(b + c)(c + a) &= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \\ &\geq (a + b + c)(ab + bc + ca) - \frac{1}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)\end{aligned}$$

$$\iff (a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

và $ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a + b + c)}$. Ta có

$$P \geq \frac{8}{9}(a + b + c)\sqrt{3(a + b + c)} + \frac{72}{\sqrt{a + b + c + 1}} \geq 44$$

□

Bài toán

Bài 93. Cho x, y, z thỏa $x^2+y^2+z^2+2xy \leq 2(x+y+z)$ Tìm min

$$P = x^2+y^2+2z+\frac{40}{\sqrt{y+z+1}}+\frac{40}{\sqrt{x+3}}$$

Lời giải. Từ điều kiện ta có $(x+y)^2+z^2 \leq 2(x+y+z)$ mặt khác $(x+y)^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{2}$ suy ra $x+y+z \leq 4$

$$P+2 = x^2+1+y^2+1+2z+\frac{40}{\sqrt{y+z+1}}+\frac{40}{\sqrt{x+3}}$$

$\geq 2(x+y+z)+\frac{40}{\sqrt{y+z+1}}+\frac{40}{\sqrt{x+3}}$ Ta có $\frac{5(x+3)}{2}+\frac{20}{\sqrt{x+3}}+\frac{20}{\sqrt{x+3}} \geq 30$ $\frac{5(y+z+1)}{2}+\frac{20}{\sqrt{y+z+1}}+\frac{20}{\sqrt{y+z+1}} \geq 30$ Suy ra$P+2+\frac{x+y+z+20}{2} \geq 60$,suy ra $P \geq 60-2-\frac{x+y+z+20}{2} \geq 60-2-12=46$.Vậy MinP=46 khi $x=y=1, z=2$ □

Bài toán

Bài 94. Cho $a, b, c \geq 0$ Tìm GTLN của :

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

Lời giải. Ta có :

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (a+b)\frac{a+b+4c}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab+4ac+4bc}{2} \leq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4} \Rightarrow t>2$

Nên

$$P \leq \frac{4}{t}-\frac{9}{2\left(t^2-4\right)}$$

Xét hàm $f(t) = \frac{4}{t}-\frac{9}{2\left(t^2-4\right)}$ với $t>2$

có

$$f'(t) = \frac{(4-t)\left(4t^3+7t^2-4t-16\right)}{t^2\left(t^2-4\right)^2}$$

Do $t>2$ nên

$$4t^3+7t^2-4t-16 = 4\left(t^3-4\right)+t(7t-4) > 0$$

Nên $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow P \leq \frac{5}{8}$

Vậy GTLN của $P=\frac{5}{8} \Leftrightarrow a=b=c=2$ □

Bài toán

Bài 95. Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $(x+y-1)^2 = xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

Lời giải. Ta có: $\begin{aligned}&(x+y-1)^2 = xy \le \frac{(x+y)^2}{4}\\ &\Leftrightarrow x+y \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]\end{aligned}$ Đặt $x+y=S, xy=P, (S^2 \ge 4P, S \in \left[\frac{2}{3}; 2\right])$

Suy ra $P = (S-1)^2 \in \left[\frac{1}{9}; 1\right]$ Ta có:

$$\begin{aligned}
&Q = \frac{1}{P} + \frac{1}{S^2-2P} + \frac{\sqrt{P}}{S}\\
&\Leftrightarrow Q = \frac{1}{(S-1)^2} + \frac{1}{S^2-2(S-1)^2} + \frac{S-1}{S}\\
&\Leftrightarrow Q = \frac{1}{(S-1)^2} + \frac{1}{4S-S^2-2} + \frac{S-1}{S}\\
&\Leftrightarrow Q = \frac{-S^5+7S^4-17S^3+21S^2-11S+2}{(S-1)^2.(4S-S^2-2).S}\\
&\Leftrightarrow Q-2 = \frac{S^5-5S^4+5S^3+5S^2-7S+2}{(S-1)^2.(4S-S^2-2).S}\\
&\Leftrightarrow Q-2 = \frac{(S-2)(S^4-3S^3-S^2+3S-1)}{(S-1)^2.(4S-S^2-2).S} \ge 0
\end{aligned}$$

(Do $S^4-3S^3-S^2+3S-1 \le 0, \forall S \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$) Vậy $Q \ge 2$ .Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$ □

Bài toán

Bài 96. Cho $x, y, z \ge 0$ và $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x(y-z)^4 + y(z-x)^4 + z(x-y)^4$$

Lời giải. Do vai trò bình đẳng của x, y, z trong P nên ta có thể giả sử: $0 \le z \le y \le x$

Khi đó ta có: $P = x(y-z)^4 + y(x-z)^4 + z(x-y)^4 \le x(y+z)^4 + yx^4 + zx^4$

Đặt $d = y+z$ thì $P \le xd^4 + dx^4 = xd(x^3+d^3) = xd[(d+x)^3 - 3xd(d+x)] = xd(1-3xd)$ (vì $x+d=1$)

Khi đó: $P \le -3\left(xd - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \le \frac{1}{12}$

$P = \frac{1}{12}$ khi và chỉ khi $x = \frac{3+\sqrt{6}}{6}, y = \frac{3-\sqrt{6}}{6}, z = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{12}$ đạt được khi và chỉ khi (x, y, z) là một hoán vị của $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{6}, \frac{3-\sqrt{6}}{6}, 0\right)$ □

Bài toán

Bài 97. Cho ba số thực x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 25$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + 3y^2 + 9z^2$$

Lời giải. Làm bừa luôn đầu tiên ta thấy rằng điều kiện bài toán rất là đáng ghét bởi lẻ khó khai thác dữ kiện gì từ đó từ các cách đánh giá : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow$ những bất đẳng thức dạng $x + y + z \leq p$ hoặc $xy + yz + zx \leq q$ thành ra không đánh giá kiểu bình thường được ta sẽ đánh giá khác : $P = x^2 + 3y^2 + 9z^2 \geq k(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) =$ hằng số $\square$. Thành ra ta sẽ nhân hai vế của P cho $m \neq 0$ thích hợp để có đánh giá này:

$$mP = mx^2 + 3my^2 + 9mz^2$$

Lúc này ta sẽ tách ra dạng :

$$mP = n(x^2+y^2+z^2)+(m-n)x^2+(3m-n)x^2+(9m-n)z^2 = n(x^2+y^2+z^2)+\frac{x^2}{\frac{1}{m-n}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3m-n}}+\frac{z^2}{\frac{1}{9m-n}}$$

Để tìm đc giá trị $0 \leq m$ và $n \leq m$ thích hợp này ta mới bắt đầu thực hiện đánh giá thông qua bất đẳng thức CS và đánh giá tiếp tục sẽ là :

$$mP \geq n(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{(x + y + z)^2}{\frac{1}{m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{9m-n}}$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2)\left(n + \frac{1}{m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{9m-n}\right) + \frac{2(ab + bc + ca)}{\frac{1}{m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{9m-n}}$$

Ta mới bắt đầu $\Rightarrow \left(n + \frac{1}{m-n} + \frac{1}{3m-n} + \frac{1}{9m-n}\right) = \frac{2}{\frac{1}{m-n}+\frac{1}{3m-n}+\frac{1}{9m-n}}$ và tiếp theo ta sẽ thực hiện động tác tìm giá trị của m và n thích hợp động tác này sẽ không khó khi mà ta thử vài giá trị m thích hợp $\square$

Bài toán

Bài 98. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{4}{5}b \geq a - c \geq \frac{3}{5}b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{12(a-b)}{c} + \frac{12(b-c)}{a} + \frac{25(c-a)}{b}$$

Lời giải. Xét

$$A = 49 - P = \frac{12(b+c-a)}{c} + \frac{12(c+a-b)}{b} + \frac{25(a+b-c)}{c}.$$

Đặt $2x = b + c - a; 2y = c + a - b; 2z = a + b - c \to a = y + z; b = x + z; c = x + y$

$$\frac{4}{5}b \geq a - c \geq \frac{3}{5}b \to a \geq \frac{4}{5}(b + c) < b + c \to 0 < 4x \leq z \leq 9x.$$

$$A = \frac{24x}{x+y} + \frac{24z}{z+y} + \frac{50x}{z+x}.$$

Coi A là hàm của y:

$$A'(y) = \frac{24(z-x)(y^2-zx)}{(x+y)^2(y+z)^2}.$$

$$A'(y) \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{zx}.$$

$$y \to -\propto \to A > 64.$$

Bởi

$$\frac{24x}{x+y} > 0;$$

$$\frac{24z}{y+z} \to 24^+$$

$$\frac{50x}{x+z} = \frac{50}{1+\frac{z}{x}} \geq 50.$$

$$A(-\sqrt{zx}) = \frac{48\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}} + \frac{50z}{z+x}.$$

$$A(\sqrt{zx}) = \frac{48\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{z}} + \frac{50z}{z+x} = \frac{48t}{t+1} + \frac{50}{t^2+1} = f(t).$$

Với $t = \sqrt{\frac{x}{z}}; t \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

$$f'(t) = \frac{48t^4 - 100t^3 - 104t^2 - 100t + 48}{(t+1)^2(t^2+1)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 12\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 - 25\left(t+\frac{1}{t}\right) - 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{2}\right) = 56; f\left(\frac{1}{3}\right) = 57.$$

$$\Rightarrow A \geq A(\sqrt{zx}) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 56.$$

$$\Rightarrow 49 - P \geq 56 \Rightarrow P \leq -7.$$

Vậy GTLN của P là -7 khi và chỉ khi $a = 2c; 3b = 5c$. □

Bài toán

Bài 99. Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3ab+1}{a+b} + \frac{3bc+1}{b+c} + \frac{3ca+1}{c+a} \geq 4$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{3ab+ab+bc+ca}{a+b} + \frac{3bc+ab+bc+ca}{b+c} + \frac{3ca+ab+bc+ca}{c+a} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow a+b+c + \frac{4ab}{a+b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{4ca}{c+a} \geq 4$$

Mặt khác

$$ab\,(a+b)+bc\,(b+c)+ca\,(c+a)\le(a+b+c)\,(ab+bc+ca)=a+b+c$$

Từ đó suy ra

$$a+b+c+\frac{4ab}{a+b}+\frac{4bc}{b+c}+\frac{4ca}{c+a}\ge a+b+c+\frac{4(ab+bc+ca)^2}{ab\,(a+b)+bc\,(b+c)+ca\,(c+a)}=a+b+c+\frac{4}{a+b+c}\ge 4$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0;b=c=1$ và các hoán vị.

Cách khác

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sum(3ab+1)\,(b+c)\,(c+a)\ge 4\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)\\
&\Leftrightarrow\sum(3ab+1)\,(ab+bc+ca+c^2)\ge 4\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)\\
&\Leftrightarrow\sum(3ab+1)\,(1+c^2)\ge 4\,(a+b+c)-4abc\\
&\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)+3\,(ab+bc+ca)+3abc\,(a+b+c)+3\ge 4\,(a+b+c)-4abc\\
&\Leftrightarrow(a+b+c-2)^2+abc\,(3a+3b+3c+4)\ge 0
\end{aligned}$$

□

Bài toán

Bài 100. Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^3-c^2}{(c+a)^2}\ge 0$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3-a^2}{(a+b)^2}+1+\frac{b^3-b^2}{(b+c)^2}+1+\frac{c^3-c^2}{(c+a)^2}+1\ge 3\\
&\Leftrightarrow\frac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2}+\frac{b^3+2bc+c^2}{(b+c)^2}+\frac{c^3+2ca+a^2}{(c+a)^2}\ge 3
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned}
&(a^3+2ab+b^2)\,(a+2ab+b^2)\ge(a^2+2ab+b^2)^2=(a+b)^4\\
&\Rightarrow\frac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2}\ge\frac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}
\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{b^3+2bc+c^2}{(b+c)^2}\ge\frac{(b+c)^2}{b+2bc+c^2};\frac{c^3+2ca+a^2}{(c+a)^2}\ge\frac{(c+a)^2}{c+2ca+a^2}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a^3+2ab+b^2}{(a+b)^2}+\frac{b^3+2bc+c^2}{(b+c)^2}+\frac{c^3+2ca+a^2}{(c+a)^2}\ge\frac{(a+b)^2}{a+2ab+b^2}+\frac{(b+c)^2}{b+2bc+c^2}+\frac{(c+a)^2}{c+2ca+a^2}\ge\frac{4(a+b+}{a+b+c+(a}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

5 Một số bài tập luyện tập

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương,tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{b^3+c^3} + \frac{b^5}{c^3+a^3} + \frac{c^5}{a^3+b^3} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+1 = z \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$F = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}$$

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương thảo mãn $x^2+y^2+z^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{yz}{x^2+1} + \frac{zx}{y^2+1} + \frac{xy}{z^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 5. Cho các số thực $a, b, c \geq 1$ thỏa $a+b+c+2 = abc$. Chứng minh rằng:

$$bc\sqrt{a^2-1} + ca\sqrt{b^2-1} + ab\sqrt{c^2-1} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}abc$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{4-9bc} + \frac{b(c+a)}{4-9ca} + \frac{c(a+b)}{4-9ab} \geq 6abc$$

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=2$. Chứng minh rằng:

$$2\left(x^3+y^3+z^3\right) \leq 2 + x^4 + y^4 + z^4$$

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + 4c^2a - 5abc \geq -4$$

Bài 9. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+c^2}} \leq 2$$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$(a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Bài 11. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+1}\left(\sqrt{z^2+1}+z\right)} \geq \frac{1}{2}$$

Bài 12. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^2+3b^2}{2a^3+3b^3} + \frac{2b^2+3a^2}{2b^3+3a^3} \leq \frac{4}{a+b}$$

Bài 13. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz}$$

Bài 14. Cho các số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b = 2$.Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{1}{2+6a^2+9a^4} + \frac{1}{2+6b^2+9b^4}$$

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$thỏa $(\mathrm{a + 2b})(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 4$ và $3a \geq c$.Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức :$P = \dfrac{a^2+2b^2}{ac}$

Bài 16. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+7} + \sqrt[3]{b+7} + \sqrt[3]{c+7} \leq 2(a^4+b^4+c^4)$$

Bài 17. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\pi} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\pi} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\pi} \geq \frac{3}{2^{\pi}}$$

Bài 18. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$.Tìm giá trị lớn nhất,giá trị nhỏ nhất của:

$$F = x^6 + y^6 - 2x^2y^2 - 2xy$$

Bài 19. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - \dfrac{3}{(x+y+z)^2} \leq 9(1 - \dfrac{1}{81xyz})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2(x^3+z^3) + 2(y^3+z^3) + \frac{(z+3)(1-z)}{4}$$

Bài 20. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có:

$$\frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2b^2+ca} + \frac{1}{2c^2+ab} \leq \left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2$$

Bài 21. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{(b+2)(b^2-b+2)}} + \frac{b}{\sqrt{(c+2)(c^2-c+2)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+2)(a^2-a+2)}} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 22. Cho $a, b, c \in (0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{3}{3+abc}$$

Bài 23. Cho $a, b \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ và $c \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{a\left(3 + \frac{2}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right) + b\left(3 + \frac{2}{2\sqrt{b} - \sqrt{a}}\right) + 2\sqrt{c}\left(3\sqrt{c} + \sqrt{2}\right) + 5}{2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{2c} + 1}$$

Bài 24. Cho các số thực $x, y, z \geq 0$ không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{y}{z+x} + \frac{x}{y+z} + \frac{z}{x+y} + 4.\sqrt{2}.\sqrt{\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}} \geq 6$$

Bài 25. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:$a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Bài 26. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right) + 2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \leq \frac{9}{4}$$

Bài 27. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[36]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}.$$

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^8 + b^8 + c^8 \leq 3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b+c)^5} + \frac{b^2}{(c+a)^5} + \frac{c^2}{(a+b)^5} \geq \frac{3}{32}$$

Bài 29. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{2a^2}{(a+b)^2} + \frac{2b^2}{(b+c)^2} + \frac{3c^2}{(a+c)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a+c)^2(b+c)^2}$$

Bài 30. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x, y, z \in [0; 1]$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = (xy - y + 1)^2 + (yz - z + 1)^2 + (zx - x + 1)^2$$

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a\left(b^2 + c^2\right) = b + c$.Tìm giá trị nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{4}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Bài 32. Cho a, b, c các số thực dương thỏa mãn $\frac{4}{5}b \geq a - c \geq \frac{3}{5}b$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{12(a-b)}{c} + \frac{12(b-c)}{a} + \frac{25(c-a)}{b}$$

Bài 33. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca + 3 \geq a^2b + b^2c + c^2a + 3abc \ (1)$$

Bài 34. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} + 9 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{abc}$$

Bài 35. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$$

Bài 36. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{3}{4}$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Bài 37. Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y^2} + \frac{9y^2}{x+2y} \geq 4.$$

Bài 38. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện $c > 0$và $a^3 + b^3 = c(c-1)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}.$$

Bài 39. Cho $a, b, c \in [1; 2]$.Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$$

Bài 40. Cho $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $4a + 2b + c = 11$. Chứng minh rằng:

$$\frac{33}{10} \leq \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{11}{2}.$$

Bài 41. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(5a + b)(b^2 + 4ca) \leq 80.$$

Bài 42. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c sao cho không có hai số nào có tổng bằng 0,ta luôn có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\geq 2$$

Bài 43. Cho các số thực dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\begin{cases} ab+bc=2c^2 \\ 2a\leq c \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}$$

Bài 44. Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $4xy+2yz-zx=25$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^2+4y^2}{z^2+4xy}}+\frac{2}{5}\sqrt{z^2+4xy}$$

Bài 45. Cho các số thực a, b, cthỏa mãn : $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=6 \\ ab+bc+ca=-3 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=a^6+b^6+c^6.$$

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$8(2-a)(2-b)(2-c)\geq(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

Bài 47. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+1}}+\frac{b}{\sqrt{b+1}}+\frac{c}{\sqrt{c+1}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Bài 48. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c\leq\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{1}{a-a^2}+\frac{1}{b-b^2}+\frac{1}{c-c^2}\geq\frac{108}{5}$$

Bài 49. Cho các số thực dương x, y, z thỏa

$$x^2+y^2+z^2+2xy=3(x+y+z)$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=x+y+z+\frac{23}{\sqrt{x+z}}+\frac{23}{\sqrt{y+2}}$$

Bài 50. Cho ác số thực dương thỏa $3xy+3=x^4+y^4+\frac{2}{xy}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x^2y^2+\frac{16}{x^2+y^2+2}$$

Bài 51. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(x+1)^2(y+z)} + \frac{1}{(y+1)^2(z+x)} + \frac{1}{(z+1)^2(x+y)} \le \frac{3}{8}$$

Bài 52. Cho x, y, z là ba số thực không âm sao cho không có 2 số nào trong đó đồng thời bằng 0 và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{(x + y^2z + yz^2)(y + z^2x + xz^2)(z + x^2y + xy^2)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

Bài 53. Cho a, b, c dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{a+b+c+1} + \frac{1}{6}\left(\sqrt{1+\frac{1}{ab}} + \sqrt{1+\frac{1}{bc}} + \sqrt{1+\frac{1}{ca}}\right)$$

Bài 54. Cho a,b > 0, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2013$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P = a + b + \sqrt{ab}$

Bài 55. Cho số thực dương x, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + \dfrac{1}{(3x+1)^{2012}}$

Bài 56. Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa $(a+c)\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) = \dfrac{10}{b}$, $c \ge 4b$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{a+c-b}{b}$

Bài 57. Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 2b + \frac{1}{a+b-c}\left[\frac{1}{c} + \left(\frac{2}{c+1}\right)^2\right] \ge 5$$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực không âm . Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{3a^2+b^2+2ac} + \frac{2b}{3b^2+c^2+2ab} + \frac{2c}{3c^2+a^2+2bc} \le \frac{3}{a+b+c}$$

Bài 59. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a + b + c \le 3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{ab}{\sqrt{ab+3c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+3a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+3b}}$$

Bài 60. Chon $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x = y + z + xyz$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(z + z\sqrt{xy})^2}{(x+y)(z^2+1)} + \frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}}$$

Bài 61. Cho a,b,c dương .Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}$$

Bài 62. Cho các số dương a,b,c thoả $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\geq\frac{2}{3}(\frac{a^4+5a^2}{a^2+3}+\frac{b^4+5b^2}{b^2+3}+\frac{c^4+5c^2}{c^2+3})$$

Bài 63. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}+y}+\frac{y\sqrt{y}+z\sqrt{z}}{y+\sqrt{yz}+z}+\frac{z\sqrt{z}+x\sqrt{x}}{z+\sqrt{zx}+x}$$

Bài 64. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1+2a}{1+2a+6a^2}+\frac{1+2b}{1+2b+6b^2}+\frac{1+2c}{1+2c+6c^2}\geq\frac{15}{7}$$

Bài 65. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{3a+1}+\frac{b^2}{3b+1}+\frac{c^2}{3c+1}\leq\frac{1}{18(ab+bc+ca)}$$

Bài 66. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;3]$ và $x+y+2z=6$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=x^3+y^3+5z^3$$

Bài 67. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn : $x^3+2y^3=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=x^4+y^4$

Bài 68. Cho các số thực x,y thuộc đoạn $[1;\ 2]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$$T=\frac{x^2}{x^2+xy+y^2}$$

Bài 69. Cho các số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $2x+3y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=252x+28y+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}$$

Bài 70. Cho $x;y;z>1$ và $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{y-2}{x^2}+\frac{z-2}{y^2}+\frac{x-2}{z^2}$$

Bài 71. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $3\left(x^2+y^2\right)=2\left(x+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{x}\right)^2$$

Bài 72. Cho $x,y,z\in[0;1]$ thỏa mãn $x+y+z=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$x^2+y^2+z^2$$

Bài 73. Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của :

$$S = x^2y + y^2z + z^2x$$

Bài 74. Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm GTLN của :

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - abc$$

Bài 75. Cho $x, y > 0 : x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x^3 + y^3 + 2xy} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2y^2}$$

Bài 76. Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $(a+b+c)^3 = 32abc$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a+b+c)^4}$$

Bài 77. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 6(a+b+c)$$

Bài 78. Cho $x, y, z \geq 0; xyz = 1$, chứng minh

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 4(x+y+z-1)$$

Bài 79. Cho $x > y > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x-y} + 32\sqrt{2}.\frac{\sqrt{x}}{x+2y} + 4y \geq 24$$

Bài 80. Cho a,b,c > 0, $a + 2b^2 + c^5 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P = a^3bc$

Bài 81. Cho các số thự không âm a, b, c sao cho $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng: $b + c \geq 16abc$

Bài 82. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{a}{3a+b+c} + \frac{b}{3b+a+c} + \frac{c}{3c+b+a}$$

Bài 83. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c+ab+bc+ca = 6$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

Bài 84. Cho $x > 0; y > 0; x \geq y; z$. Tìm min của:

$$P = \frac{x}{y} + 2\sqrt{1 + \frac{y}{z}} + 3\sqrt[3]{1 + \frac{z}{x}}$$

Bài 85. Cho $x, y, z \geq 0 : xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+2x+y+z}+\frac{1}{y^2+x+2y+z}+\frac{1}{z^2+x+y+2z} \geq \frac{9}{(x+y+z)^3}$$

Bài 86. Cho các số thực x, y, z thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

$$P=(xy+yz+2xz)^2-\frac{8}{(x+y+z)^2-xy-yz+2}$$

Bài 87. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$

Bài 88. Cho x, y $>$ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

Bài 89. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{(x+y+z-1)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

Bài 90. Cho $x, y, z \geq 0$ thoả mãn: $xyz = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.CMR: $\frac{1}{\sqrt{1+(2x-y)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(2y-z)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(2z-x)^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 91. Cho $a, b, c \geq 0$ thoả mãn $ab+bc+ac=2abc$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a(2a-1)^2}+\frac{1}{b(2b-1)^2}+\frac{1}{c(2c-1)^2}$$

Bài 92. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(32x^5-40x^3+10x-1)^{12}+\left(16x^3-12x+\sqrt{5}-1\right)^{2012}$

Bài 93. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\left(\sqrt{a^2+1}+a\right)^b\left(\sqrt{b^2+1}+b\right)^c\left(\sqrt{c^2+1}+c\right)^a$$

Bài 94. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=xy+yz+zx$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M=\frac{2(x+y+z)^2-2(x+y+z)+3}{e^{3x}+e^{2y}+e^{2z}}$$

Bài 95. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ Tìm min :

$$P=\frac{1}{xy+yz+zx}\left(\frac{y^2+2x^2+z^2}{x+1}+\frac{x^2+2y^2+z^2}{y+1}+\frac{x^2+2z^2+y^2}{z+1}\right)$$

Bài 96. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4x+5}{x^3+xy^2+3xyz}+\frac{4y+5}{y^3+yz^2+3xyz}+\frac{4z+5}{z^3+zx^2+3xyz}\geq\frac{162}{x^2+y^2+z^2+27}$$

Bài 97. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{13}{x+y+z+1}\geq\frac{25}{4}$$

Bài 98. Cho x,y,z là các số thực thỏa: $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$|2x-y|+|2y-z|+|2z-x|-\ln\sqrt{14(x^2+y^2+z^2)}+1$$

Bài 99. Cho x, y, z là ba số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{10}{9};\frac{10}{9}\right)$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{4-x^4-2\cos yz}}+\frac{1}{\sqrt{4-y^4-2\cos zx}}+\frac{1}{\sqrt{4-z^4-2\cos xy}}$$

Bài 100. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn $x+y+z=0$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\ln\left(\sqrt{14\left(x^2+y^2+z^2\right)}+1\right)-\left(x^6+y^6+z^6\right)-|2x-y|-|2y-z|-|2z-x|-6\cos xyz$$

6 Phụ lục

6.1 Lời giải và nhận xét câu cực trị đề thi đại học khối A 2013

Lời giải bài bất đẳng thức đề thi đại học khối A năm 2013

Trong kì thi tuyển sinh đại học khối A,A1 diễn ra vào ngày 4-5 tháng 7 năm 2013 vừa qua,câu cực trị được xem là một trong những câu đánh đố và phân loại thí sinh nhất.Cho đến thời điểm này,có khá nhiều lời giải khác nhau được đưa ra,các lời giải đều có một sự tinh ý,khéo léo nhất định.Chính vì thế,hôm nay tôi xin được tổng hợp lại,trình bày dễ hiểu hơn và có đôi chút nhận xét về bài toán này.Những nhận xét đều chỉ là ý kiến cá nhân của tác giả,chính vì thế,có sai xót gì mong nhận được sự góp ý của các bạn.

Bài toán

Cho a, b, c là ba số thực dương thoả mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

Lời giải 1 (Ngô Hoàng Toàn)

Từ giả thiết ta có :$(\frac{a}{c}+1)(\frac{b}{c}+1) = 4$.Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ $x, y > 0 \Rightarrow (x+1)(y+1) = 4$.

Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{32x^3}{(3+y)^3} + \frac{32y^3}{(3+x)^3} - \sqrt{x^2+y^2}$$

Ta có đánh giá sau :

$$A^3 + B^3 \geq \frac{(A+B)^3}{4}$$

Thật vậy,bất đẳng thức trên tương đương với

$$A^3 + B^3 \geq AB(A+B)$$

Mà

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2+B^2-AB) \geq (A+B)(2AB-AB) = AB(A+B)$$

Vậy nên ta có

$$\frac{32x^3}{(3+y)^3} + \frac{32y^3}{(3+x)^3} \geq 8\left(\frac{x}{3+y} + \frac{y}{3+x}\right)^3 - \sqrt{(x+y)^2 - 2xy}$$

Mà $(x+1)(y+1) = 4 \Rightarrow xy + x + y = 3$.

Theo $AM - GM$ ta có $3 = xy + x + y \leq \frac{(x+y)^2}{4} + x + y \Rightarrow x + y \geq 2$.

Đặt $t = x + y, t \geq 2$.Vậy P viết lại thành

$$P = 8\left(\frac{t^2+5t-6}{2t+12}\right)^3 - \sqrt{t^2+2t-6}$$

$$\Leftrightarrow P = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^3 - \sqrt{t^2+2t-6}$$

Đặt $f(t) = (t-1)^3 - \sqrt{t^2+2t-6}$
Mà ta có

$(t-1)^3+1+1 \geq 3(t-1)$ *do* $t^3-3t^2+3t-1+1+1 \geq 3t-3 \Leftrightarrow t^3-3t^2+4 = (t+1)(t-2)^2 \geq 0$ đúng do $t \geq 2$

nên $P \geq 3t-5-\sqrt{t^2+2t-6}$
Khảo sát hàm số trên và lập bảng biến thiên trên đoạn $[2;+\infty)$.
Suy ra giá trị nhỏ nhất của $P = 1-\sqrt{2}$ khi $x = y = 1$ hay $a = b = c > 0$.

Lời giải 2 (Lê Đình Mẫn)
Ta đặt $x = \dfrac{a}{c} > 0,\ y = \dfrac{b}{c} > 0$. Khi đó, giả thiết trở thành

$$(x+1)(y+1) = 4 \iff xy+x+y = 3 \Rightarrow \begin{cases} xy = 3-x-y \\ x+y \geq 2 \end{cases}$$

Biểu thức được viết lại như sau:

$$P = 32\left[\frac{x^3}{(y+3)^3} + \frac{y^3}{(x+3)^3}\right] - \sqrt{x^2+y^2}$$

Để ý:

- $x^2+y^2 = (x+y)^2+2(x+y)-6$;
- $\dfrac{x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{64} \geq \dfrac{3x}{y+3}$;
- $\dfrac{y^3}{(x+3)^3} + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{64} \geq \dfrac{3y}{x+3}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} P &\geq 32\left(\frac{3x}{y+3} + \frac{3y}{x+3} - \frac{1}{16}\right) - \sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6} \\ &= 3(x+y)-5-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6} \end{aligned}$$

Đặt $t = x+y \geq 2$. Khảo sát hàm $f(t) = 3t-5-\sqrt{t^2+2t-6}$ trên $[2;+\infty)$ ta được $min_{[2;+\infty)} f(t) = 1-\sqrt{2}$.
Vậy $\min P = \min_{[2;+\infty)} f(t) = 1-\sqrt{2} \iff t = 2 \iff a = b = c > 0$.
Lời giải 3 (Võ Quốc Bá Cẩn)
Đặt $x = \dfrac{a}{c}; y = \dfrac{b}{c}$.Khi đó ta có ,$(x+1)(y+1) = 4$.Và biểu thức P có thể viết lại thành

$$P = \frac{32x^3}{(3+y)^3} + \frac{32y^3}{(3+x)^3} - \sqrt{x^2+y^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\frac{32x^3}{(3+y)^3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{6x}{y+3} \Rightarrow \frac{32x^3}{(3+y)^3} \geq \frac{6x}{y+3} - 1.$$

Tương tự ,

$$\frac{32y^3}{(3+x)^3} \geq \frac{6y}{x+3} - 1.$$

Do đó,

$$P \geq \frac{6x}{y+3} + \frac{6y}{x+3} - \sqrt{x^2+y^2} - 2.$$

Tới đây,tiếp tục sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta lại có

$$\frac{6x}{y+3} + \frac{3x(y+3)}{8} \geq 3x \Rightarrow \frac{6x}{y+3} \geq \frac{15x-3xy}{8}.$$

Đánh giá tương tự ta cũng có

$$\frac{6y}{x+3} \geq \frac{15y-3xy}{8}.$$

Do đó ta đánh giá được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{15x-3xy}{8} + \frac{15y-3xy}{8} - \sqrt{x^2+y^2} - 2 \\ &= \frac{15}{8}(x+y) - \frac{3}{4}xy - \sqrt{x^2+y^2} - 2. \end{aligned}$$

Bây giờ ta có chú ý rằng giả thiết $(x+1)(y+1) = 4$ có thể viết lại thành

$$xy + x + y = 3$$

Từ đó ta có $xy + 2\sqrt{xy} \leq xy + x + y = 3$, tức $xy \leq 1$.Đặt $t = xy$ $o < t \leq 1$ thì ta có $x+y = 3-t$ và

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (3-t)^2 - 2t = t^2 - 8t + 9.$$

Do đó,

$$P \leq \frac{15}{8}(3-t) - \frac{3}{4}t - \sqrt{t^2-8t+9} - 2 = \frac{29}{8} - \frac{21}{8}t - \sqrt{t^2-8t+9} = f(t).$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{21}{8} + \frac{4-t}{\sqrt{t^2-8t+9}} = -\frac{21}{8} + \frac{4-t}{\sqrt{(t-1)^2-6t+8}} \\ &\leq -\frac{21}{8} + \frac{4-t}{\sqrt{-6t+8}} = -\frac{21}{8} + \sqrt{\frac{4-t}{-6t+8}}\sqrt{4-t} \\ &\leq -\frac{21}{8} + \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{4-t} < -\frac{21}{8} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} < 0. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(0;1]$ và ta thu được

$$P \geq f(t) \geq f(1) = 1 - \sqrt{2}, \forall t \in (0;1]$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$,tức $a = b = c$.Vậy $min\ P = 1 - \sqrt{2}$.

Lời giải 4 (Tăng Hải Tuân)

Từ $xy + x + y = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq xy + 2\sqrt{xy} \\ 4.3 \leq (x+y)^2 + 4(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{xy}-1)(\sqrt{xy}+3) \leq 0 \\ (x+y-2)(x+y+6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} xy \le 1 \\ x+y \ge 2 \end{cases}$ Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương ta có ,

$$\begin{cases} \dfrac{16x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{16x^3}{(y+3)^3} + \dfrac{1}{4} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{16x^3}{(y+3)^3}.\dfrac{16x^3}{(y+3)^3}.\dfrac{1}{4}} = \dfrac{12x^2}{(y+3)^2} \\ \dfrac{16y^3}{(x+3)^3} + \frac{16y^3}{(x+3)^3} + \dfrac{1}{4} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{16y^3}{(x+3)^3}.\dfrac{16y^3}{(x+3)^3}.\dfrac{1}{4}} = \dfrac{12y^2}{(x+3)^2} \end{cases}$$

Do đó

$$P \ge 12\left[\frac{x^2}{(y+3)^2} + \frac{y^2}{(x+3)^2}\right] - \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+y^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} &12\left[\tfrac{x^2}{(y+3)^2} + \frac{y^2}{(x+3)^2}\right] \ge \frac{12(x^2+y^2)^2}{x^2(y+3)^2 + y^2(x+3)^2} \\ &= \frac{12(x^2+y^2)^2}{9\left(x^2+y^2\right) + 6xy\left(x+y\right) + 2x^2y^2} \\ &\ge \frac{12(x^2+y^2)^2}{9\left(x^2+y^2\right) + 6.1.\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} + 2.1^2} \\ &= \frac{3\left[2\left(x^2+y^2\right)\right]^2}{\frac{9}{2}.2\left(x^2+y^2\right) + 6\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} + 2} \end{aligned}$$

Do đó

$$P \ge \frac{3\left[2\left(x^2+y^2\right)\right]^2}{\frac{9}{2}.2\left(x^2+y^2\right) + 6\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} + 2} - \frac{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

Đặt $t = \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge x+y \ge 2$ ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f\left(t\right) = \frac{3t^4}{\frac{9}{2}t^2 + 6t + 2} - \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{6t^4}{(3t+2)^2} - \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, t \in [2;+\infty)$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{36t^4 + 28t^3}{(3t+2)^3} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \forall t \in (2;+\infty) \\ f''(t) &= \frac{12t^2\left(9t^2 + 24t + 14\right)}{(3t+2)^4} > 0, \forall t \in (2;+\infty) \end{aligned}$$

Do đó $f'(t)$ là hàm đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên

$$f'(t) \ge f'(2) = \frac{36.2^4 + 28.2^3}{(3.2+2)^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{25}{16} - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên $f\left(t\right) \ge f\left(2\right) = 1 - \sqrt{2}$.

Lời giải 5 (Diễn đàn mathscope)

Đặt $x = \dfrac{a+c}{c}$ và $y = \dfrac{b+c}{c} \to xy = 4$.. Suy ra

$P = \dfrac{32(x-1)^3}{(y+2)^3} + \dfrac{32(y-1)^3}{(x+2)^3} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

Đặt $t = x + y$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

- $\dfrac{32(x-1)^3}{(y+2)^3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{6(x-1)}{y+2}$,
- $\dfrac{32(y-1)^3}{(x+2)^3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{6(y-1)}{x+2}$.

Suy ra

$$P\geq 6\left(\frac{x-1}{y+2}+\frac{y-1}{x+2}\right)-2-\sqrt{t^2-2t-6}.$$

Có

$$\frac{x-1}{y+2}+\frac{y-1}{x+2}=\frac{x^2+x+y^2+y-4}{(x+2)(y+2)}=\frac{t^2+t-12}{2(t+4)}=\frac{t-3}{2},$$

nên là $P\geq 3(t-3)-2-\sqrt{t^2-2t-6}=3t-\sqrt{t^2-2t-6}-11$.
Lại dùng $AM-GM$ ta có

$$\sqrt{t^2-2t-6}\leq\frac{2\sqrt{2}}{t}\cdot\frac{\frac{t^2}{8}+t^2-2t-6}{2}=\frac{9t}{4\sqrt{2}}-2\sqrt{2}-\frac{6\sqrt{2}}{t}.$$

Suy ra

$$P\geq 3t-\frac{9t}{4\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{2}}{t}-11+2\sqrt{2}.$$

Vì $xy=4$ nên $t\geq 4$ suy ra

$$\begin{aligned}3t-\frac{9t}{4\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{2}}{t}&=\left(3-\frac{9}{4\sqrt{2}}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)t+\frac{3}{4\sqrt{2}}t+\frac{6\sqrt{2}}{t}\\&\geq\left(3-\frac{9}{4\sqrt{2}}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)\cdot 4+2\sqrt{\frac{3}{4\sqrt{2}}t\cdot\frac{6\sqrt{2}}{t}}=12-3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Suy ra $P\geq 1-\sqrt{2}$.. Dấu bằng có xảy ra khi $a=b=c$ nên là $\min P=1-\sqrt{2}$.

Lời giải 6 (Trung tâm luyện thi Thăng Long)

Từ giả thiết ta có :$(\frac{a}{c}+1)(\frac{b}{c}+1)=4$.Đặt $x=\frac{a}{c},y=\frac{b}{c}$ $x,y>0\Rightarrow(x+1)(y+1)=4$.
Ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{32x^3}{(3+y)^3}+\frac{32y^3}{(3+x)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ $4(u^3+v^3)\geq(u+v)^3$ với $u,v>0$.Đẳng thức xảy ra khi $u=v$.
Với $u=\dfrac{x}{y+3};v=\dfrac{y}{x+3}$ ta có

$$P\geq 8\left(\frac{x}{3+y}+\frac{y}{3+x}\right)^3-\sqrt{(x+y)^2-2xy}=8\left[\frac{x^2+y^2+3(x+y)+9}{xy+3(x+y)+9}\right]^3-\sqrt{x^2+y^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{y+3}=\dfrac{y}{x+3}\Rightarrow x=y$

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$,điều kiện $S^2\geq 4P$

Ta có

$$\begin{cases}S>0\\P=3-S\\S^2\geq 4P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S>0\\S^2\geq 12-4S\end{cases}\Rightarrow S\geq 2$$

Thay vào ta được

$$P \geq \left[\frac{S^2+5S-6}{2S+12}\right]^3 - \sqrt{S^2+2S-6} = (S-1)^3 - \sqrt{S^2+2S-6}$$

Đặt $t = S-1$ điều kiện $t \geq 1$.

$$P \geq t^3 - \sqrt{t^2+4t-3} = f(t)$$

Xét hàm số $f(t)$ trên khoảng $[1;+\infty)$.

$$f'(t) = 3t^2 - \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+3}} = 3t^2 - \frac{t+2}{\sqrt{(t+2)^2-7}}$$

Vì $t \geq 1$ nên $\sqrt{(t+2)^2-7} \geq 2 \Rightarrow 3t^2 - \dfrac{t+2}{\sqrt{(t+2)^2-7}} \geq 3t^2 - \dfrac{t+2}{\sqrt{2}}$

Suy ra

$$f'(t) \geq 3t^2 - \frac{t+2}{\sqrt{2}} = \frac{3t(\sqrt{2}t-1)+3(t-1)}{\sqrt{2}} > 0$$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$ nên

$$P \geq f(t) \geq f(1) = 1-\sqrt{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1-\sqrt{2}$ khi $x=y=1$ hay $a=b=c$.

Lời giải 7 (diễn đàn mathscope) Đặt $x = \dfrac{a}{c}$, $y = \dfrac{b}{c}$ suy ra $xy+x+y=3$, lại có $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$ nên $\dfrac{(x+y)^2}{4} + x + y \geq 3 \to x+y \geq 2$ và $xy \leq 1$. Xét biểu thức:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{y}{y+3} = \frac{2xy+3(x+y)}{xy+3(x+y)+9} = \frac{2xy+3(x+y)}{xy+3(x+y)+3(xy+x+y)} = \frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương:

$$\frac{16a^3}{(b+3c)^3} + \frac{16a^3}{(b+3c)^3} + \frac{1}{4} \geq \frac{12a^2}{(b+3c)^2}$$

Hoàn toàn tương tự:

$$\frac{16b^3}{(a+3c)^3} + \frac{16b^3}{(a+3c)^3} + \frac{1}{4} \geq \frac{12b^2}{(a+3c)^2}$$

Suy ra:

$$\frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} \geq 12[\frac{a^2}{(a+3c)^2} + \frac{b^2}{(b+3c)^2}] - \frac{1}{2}, (1)$$

Từ $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{y}{y+3} = \dfrac{1}{2}$ ta có

$$\frac{a}{a+3c} + \frac{b}{b+3c} = \frac{1}{2} \to \frac{a^2}{(a+3c)^2} + \frac{b^2}{(b+3c)^2} \geq \frac{1}{8}$$

Do đó

$$\frac{a^2}{(b+3c)^2} + \frac{b^2}{(a+3c)^2} - \frac{1}{8} \geq$$

$$\frac{a^2}{(b+3c)^2}+\frac{b^2}{(a+3c)^2}-\frac{a^2}{(a+3c)^2}-\frac{b^2}{(b+3c)^2}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)((a+3c)^2-(b+3c)^2)}{(b+3c)^2(a+3c)^2}=\frac{(a-b)^2(a+b)(a+b+6c)}{(b+3c)^2(a+3c)^2}$$

Do $x+y\geq 2$ nên $a+b\geq 2c$ do đó $(a+b)(a+b+6c)\geq 16c^2$. Mặt khác

$$(b+3c)(a+3c)=ab+3c(a+b)+9c^2\leq 3(ab+bc+ca)+9c^2=18c^2$$

nên

$$\frac{a^2}{(b+3c)^2}+\frac{b^2}{(a+3c)^2}-\frac{1}{8}\geq$$
$$\frac{(a-b)^2(a+b)(a+b+6c)}{(b+3c)^2(a+3c)^2}\geq\frac{16(a-b)^2}{18^2.c^2}=\frac{4(a-b)^2}{81c^2}$$

Do đó

$$12[\frac{a^2}{(b+3c)^2}+\frac{b^2}{(a+3c)^2}-\frac{1}{8}]\geq\frac{16(a-b)^2}{27c^2},(2)$$

Lại có $xy\leq 1$ nên $\frac{ab}{c^2}\leq 1$. Do đó:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{(a-b)^2+2ab}}{c}-\sqrt{2}$$

$$\leq\sqrt{\frac{(a-b)^2}{c^2}+2}-\sqrt{2}=\frac{\frac{(a-b)^2}{c^2}}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{c^2}+2}+\sqrt{2}}\leq\frac{(a-b)^2}{2\sqrt{2}.c^2},(3)$$

Từ (1),(2) và (3) suy ra

$$P\geq 1-\sqrt{2}+(\frac{16}{27}-\frac{1}{2\sqrt{2}})\frac{(a-b)^2}{c^2}\geq 1-\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Nhận xét: Bài toán này chẳng qua là sự đổi biến của các bất đẳng thức để đưa về bài toán ba biến a,b,c chứ thật ra bản chất bài toán chỉ là việc giải bài toán hai biến mà thôi.
Chúng ta có thể xét đến bài tập tương tự như sau:

Bài 1. Cho $x,y\in(0,1]$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của của biểu thức :

$$P=\frac{3x+1}{9y^2+1}+\frac{3y+1}{9x^2+1}+(3x+y)(3y+x)$$

Bài 2. Cho các số thực $x,y>0$ và thỏa mãn $x+y+1=3xy$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=\frac{3x}{y(x+1)}+\frac{3y}{x(y+1)}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

6.2 Một số kí hiệu dùng trong tuyển tập

MỘT SỐ KÍ HIỆU TRONG TUYỂN TẬP

1. BĐT

$$\text{Bất đẳng thức} \tag{6.1}$$

2 GTLN (max),GTNN(min)

$$\text{Giá trị lớn nhất,Giá trị nhỏ nhất} \tag{6.2}$$

3 Tổng hoán vị

$$\sum_{cyc}(a^2b) = a^2b + b^2c + c^2a \tag{6.3}$$