BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

6
2001

SỐ 288 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Sáu chàng trai chuẩn bị bay đến Hoa Kì dự thi IMO lần thứ 42

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

HÌNH CHỮ NHẬT VÀNG trong không gian

Hình chữ nhật $ABCD$ có tỉ số các cạnh là tỉ số vàng (xem THTT số 287 tháng 5/2001) gọi là hình chữ nhật vàng, trông rất cân đối. Quốc kì của nước ta là hình chữ nhật có tỉ số các cạnh bằng $2 : 3 \approx 0,66$, cờ của một số nước có tỉ số $3 : 5 = 0,6$, gần bằng tỉ số vàng.

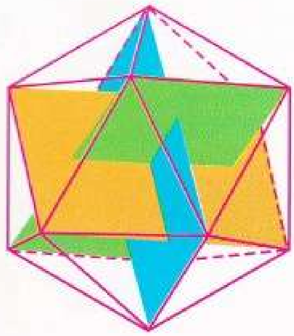
Các cạnh của ngôi sao 5 cánh đều, được chia theo tỉ số vàng (h.1) $\frac{AD}{AB} = \frac{EF}{EG} = \frac{EG}{EH} = \frac{EK}{EH} = t = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,61803$

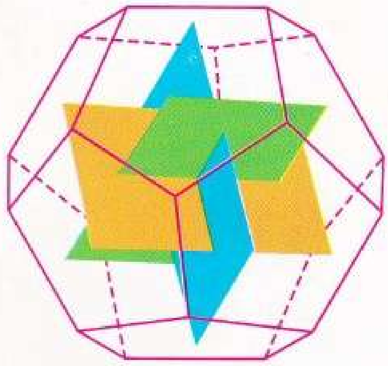
Có thể tính gần đúng $\frac{1}{t}$ theo công thức

$$\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \approx 1,61803$$

Khi xếp 3 hình chữ nhật vàng đồng tâm, vuông góc với nhau từng đôi một thì 12 đỉnh của chúng chính là 12 đỉnh của khối đa diện đều (N) có 20 mặt, 12 đỉnh, 30 cạnh (h.2), và cũng là tâm các mặt hình ngũ giác đều của khối đa diện đều (T) có 12 mặt, 20 đỉnh, 30 cạnh (h.3).

Hình 1


Hình 2


Hình 3

Dành cho bạn đọc

Gọi R và R_0 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện (N) và (T). Gọi r và R lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp khối đa diện (N) và (T).

Gọi k và k_0 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp một mặt của (N) và (T). Gọi c và c_0 lần lượt là cạnh của (N) và (T).

1) Tính c, k, r theo R của khối đa diện (N).

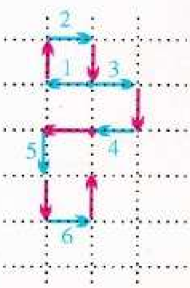
2) Chứng minh rằng $rR_0 = R^2$. Tính R, r, k_0, c_0 theo R_0 của khối đa diện (T).

Giải đáp TRÒ CHƠI ĐI NỐI TIẾP NHAU

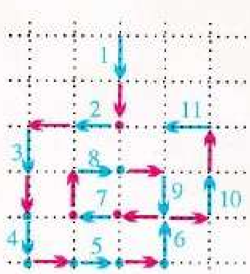
Ta gọi *số bậc* của đỉnh các hình vuông là số cạnh hình vuông *chưa kẻ* có đầu mút là đỉnh đó, dễ thấy $0 \le$ số bậc ≤ 4. Cạnh cuối cùng phải kết thúc ở đỉnh bậc 1

Ta gọi *đỉnh xấu* (màu xanh lam) là đỉnh bậc 1, hoặc đỉnh bậc 2 kề với đỉnh tốt, còn *đỉnh tốt* (màu đỏ) là đỉnh bậc 2 kề với đỉnh xấu. Trong cuộc chơi sẽ xuất hiện đỉnh xấu bậc 1, từ đó tìm được đỉnh tốt kề với nó, sau đó tìm được đỉnh xấu bậc 2 kề với đỉnh tốt này v.v...

Có 2 trường hợp kẻ lần cuối cùng ứng với : (1) đỉnh không nằm trên biên, đó là điểm đầu mũi tên 1 ở hình 4, (2) đỉnh nằm trên biên, đó là điểm cuối mũi tên 4, 5 và đầu mũi tên 6 ở hình 5.



Hình 4



Hình 5

Nếu kết thúc cuộc chơi ở đỉnh không nằm trên biên thì người A đi trước thắng cuộc vì có một số chẵn cạnh được kẻ (số cạnh đi bằng số cạnh về). Chiến thuật chơi để thắng là : nhẩm đánh dấu các đỉnh xấu và đỉnh tốt xuất hiện khi chơi, nếu kẻ tới đỉnh tốt thì sẽ thắng, còn kẻ tới đỉnh xấu sẽ thua.

Xin gửi tặng phẩm cho bạn có lời giải tốt :

Nguyễn Tôn Phong, 12C1, THPT Ngô Gia Tự, huyện Eakar, **Đắc Lắc.**

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 288 (6-2001)
Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 - 04.5142650. FAX : 04.5142648
E-mail : toantt@hotmail.com

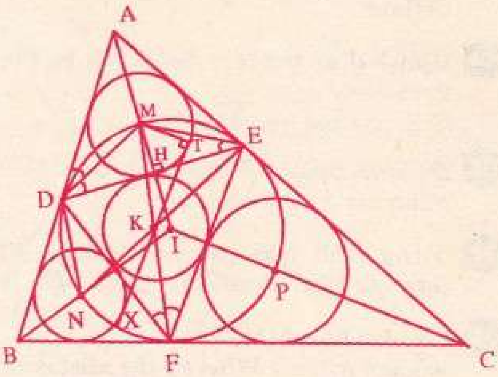
TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM HIỂU THÊM VỀ CÁC ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

NGUYỄN ĐỄ
(Sở GD–ĐT Hải Phòng)

Cho đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm D, E, F thuộc các cạnh AB, AC, BC tương ứng. Lúc đó đường tròn này ngoại tiếp tam giác DEF. Vẽ các đường tròn nội tiếp các tam giác DEF, ADE, BDF, CEF (h.1). Ta thử xét xem có mối liên hệ gì giữa các đường tròn nói trên.



Hình 1

Gọi M là giao điểm của đường tròn tâm I ngoại tiếp ΔDEF với AI, lúc đó M là điểm chính giữa cung nhỏ DE. Tia phân giác FM của góc DFE đi qua tâm K của đường tròn nội tiếp ΔDEF.

Từ tính chất của tiếp tuyến và góc nội tiếp của đường tròn tâm I ta có : $\angle ADM = \angle DEM = \angle EDM \Rightarrow DM$ là tia phân giác của góc ADE, do đó M chính là tâm của đường tròn nội tiếp ΔADE.

Tương tự như thế, các tâm N và P của các đường tròn nội tiếp ΔBDF, ΔCEF là điểm chính giữa của cung nhỏ DF và EF. (1)

Dễ thấy EN, DP đều đi qua điểm K.

Ta có : số đo góc $MKE = \frac{1}{2}$ số đo cung nhỏ ME $+ \frac{1}{2}$ số đo cung nhỏ $NF = \frac{1}{2}$ số đo cung nhỏ MD $+ \frac{1}{2}$ số đo cung nhỏ $ND =$ số đo góc MEN.

Suy ra $ME = MK$ (2)

Gọi H là giao điểm của MI và DE. Từ điểm K kẻ KT (nằm trong góc MKE) tiếp xúc với đường tròn tâm M tại T.

Từ (2), $MH = MT$ và $\angle MHE = \angle MTK = 90^o$ suy ra $\Delta MHE = \Delta MTK \Rightarrow \angle MEH = \angle MKT$

Mặt khác $\angle MED = \angle MFE$ nên $\angle MKT = \angle MFE$, suy ra $KT // FE$ (3)

Tương tự từ điểm K kẻ KX (nằm trong góc NKF) tiếp xúc với đường tròn tâm N tại X, suy ra $KX // FE$ (4)

Từ (3), (4) rút ra : Tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tâm M và tâm N tiếp xúc với cạnh DE và DF mà cắt ΔMNP thì đi qua điểm K và song song với cạnh EF. (5)

Ta có kết luận tương tự với các tiếp tuyến chung ngoài của các cặp đường tròn tâm M và P, tâm N và P.

Như vậy ta đã chứng minh được :

Định lí 1. Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC với các tiếp điểm D, E, F thuộc các cạnh AB, AC, BC tương ứng. Thế thì :

a) Tâm M, N, P của các đường tròn nội tiếp ΔADE, ΔBDF, ΔCEF là điểm chính giữa các cung nhỏ DE, DF, EF tương ứng.

b) Các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M, tâm N, tâm P mà chúng cắt ΔMNP thì tương ứng song song với các cạnh của ΔDEF và đồng quy tại tâm K của đường tròn nội tiếp ΔDEF.

Đảo lại ta có :

Định lí 2. Cho đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác DEF. Gọi M, N, P lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ DE, DF, EF. Vẽ các đường tròn tâm M, tâm N, tâm P theo thứ tự tiếp xúc với DE, DF, EF. Thế thì :

a) Các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M, tâm N, tâm P mà chúng cắt ΔMNP thì tương ứng song song với các cạnh của ΔDEF và đồng quy tại tâm K của đường tròn nội tiếp ΔDEF.

b) Các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M, tâm N, tâm P mà chúng không cắt ΔMNP thì cắt nhau tại 3 điểm A, B, C là 3 đỉnh của tam giác ngoại tiếp đường tròn tâm I với các tiếp điểm D, E, F.

Chứng minh. Câu (a) trong ĐL2 chỉ là cách phát biểu khác của câu (b) trong ĐL 1.

b) Xem hình 1. Từ điểm D kẻ tiếp tuyến DA với đường tròn tâm M và tiếp tuyến DB với đường tròn tâm N. Do tính chất của tiếp tuyến và góc nội tiếp ta có :

$\angle ADM = \angle MDE = \angle MED$ (6)

$\angle BDF = 2(\angle NDF) = 2(\angle NEF) = \angle DEF$ (7)

Từ (6) (7) có $\angle MDF + \angle ADM + \angle BDF = \angle MDF + \angle MED + \angle DEF = \angle MDF + \angle MEF = 180^\circ$ nên A, D, B thẳng hàng. Từ (6) cũng suy ra DA là tiếp tuyến của đường tròn tâm I ngoại tiếp ΔDEF nên ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn tâm I với các tiếp điểm D, E, F.

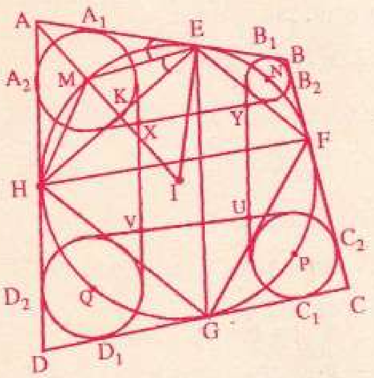
Xét vấn đề tương tự đối với tứ giác, ta có :

Định lí 3. Cho đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ với các tiếp điểm E, F, G, H thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA tương ứng. Thế thì :

a) Tâm M, N, P, Q của các đường tròn nội tiếp $\Delta AHE, \Delta BEF, \Delta CFG, \Delta DGH$ là điểm chính giữa các cung nhỏ HE, EF, FG, GH tương ứng.

b) Các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M và tâm N, tâm N và tâm P, tâm P và tâm Q, tâm Q và tâm M mà chúng cắt tứ giác $MNPQ$ thì cắt nhau tại 4 điểm X, Y, U, V là 4 đỉnh của một hình thoi.

Chứng minh. Xem hình 2.



Hình 2

a) Đường tròn tâm I nội tiếp tứ giác $ABCD$ cắt AI tại M và AI cắt HE tại K. Lúc đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ HE. Từ tính chất của tiếp tuyến và góc nội tiếp ta có : $\angle AEM = \angle MHE = \angle MEH$ suy ra EM là tia phân giác của góc AEH, do đó M chính là tâm đường tròn nội tiếp ΔAHE. Tương tự tâm N, P, Q của các đường tròn nội tiếp $\Delta BEF, \Delta CFG, \Delta DGH$ là điểm chính giữa các cung nhỏ EF, FG, GH tương ứng.

b) Gọi giao điểm của 4 tiếp tuyến chung ngoài nói trong định lí 3 là X, Y, U, V như ở hình 2. Theo chứng minh (5) của ĐL 2 thì $XY // HF // UV$ và $XV // EG // YU$ nên tứ giác $XYUV$ là hình bình hành.

Giả sử đường thẳng AB tiếp xúc với các đường tròn tâm M, tâm N ở A_1, B_1 tương ứng. Tương tự như thế xác định được các tiếp điểm $B_2, C_2, C_1, D_1, D_2, A_2$ như trên hình vẽ. Vì $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$.

Từ đó $A_1B_1 + C_1D_1 = A_2D_2 + B_2C_2$, suy ra $XY + UV = XV + YU$, nhưng $XYUV$ là hình bình hành nên $XY = UV$. Vậy $XYUV$ là hình thoi.

Đảo lại, ta có :

Định lí 4. Cho đường tròn tâm I ngoại tiếp tứ giác $EFGH$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là điểm chính giữa các cung nhỏ HE, EF, FG, GH. Vẽ các đường tròn tâm M, tâm N, tâm P, tâm Q tiếp xúc với HE, EF, FG, GH tương ứng. Thế thì :

a) Các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M và tâm N mà chúng cắt tứ giác $MNPQ$, tâm N và tâm P, tâm P và tâm Q, tâm Q và tâm M thì cắt nhau tại 4 điểm X, Y, U, V *(mỗi điểm có 2 tiếp tuyến đến cùng một đường tròn) và chúng là 4 đỉnh của* một hình thoi.

b) Các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M và tâm N, tâm N và tâm P, tâm P và tâm Q, tâm Q và tâm M mà chúng không cắt tứ giác $MNPQ$ thì cắt nhau tại 4 điểm A, B, C, D (mỗi điểm có 2 tiếp tuyến đến cùng một đường tròn) và chúng là 4 đỉnh của tứ giác ngoại tiếp đường tròn tâm I với các tiếp điểm E, F, G, H.

Chứng minh : Câu (a) ĐL4 chính là cách phát biểu khác của câu (b) trong ĐL 3.

b) Xem hình 2. Từ điểm E kẻ tiếp tuyến EA với đường tròn tâm M và tiếp tuyến EB với đường tròn tâm N. Do tính chất của tiếp tuyến và góc nội tiếp ta có :

$\angle AEM = \angle MEH = \angle EHM$ (8)

$\angle BEF = 2(\angle NEF) = 2(\angle NHF) = \angle EHF$ (9)

Từ (8) (9) có $\angle MEF + \angle AEM + \angle BEF$

$= \angle MEF + \angle EHM + \angle EHF$

$= \angle MEF + \angle MHF = 180^\circ$

nên A, E, B thẳng hàng.

Từ (8) cũng suy ra EA là tiếp tuyến của đường tròn tâm I ngoại tiếp tứ giác $HEFG$ nên $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp đường tròn tâm I với các tiếp điểm H, E, F, G. Một trường hợp tổng quát hơn ĐL3, ĐL4 có thể phát biểu như sau :

Định lí 5. Cho tứ giác lồi $MNPQ$. Dựng các đường tròn tâm M, tâm N, tâm P, tâm Q từng cặp rời nhau và dựng các tiếp tuyến chung ngoài của từng cặp đường tròn tâm M và tâm N, tâm N và tâm P, tâm P và tâm Q, tâm Q và tâm M. Các tiếp tuyến chung ngoài nói trên mà không cắt tứ giác $MNPQ$ thì cắt nhau tại 4 điểm A, B, C, D sao cho mỗi giao điểm này thuộc 2 tiếp tuyến của cùng một đường tròn.

Các tiếp tuyến chung ngoài nói trên mà cắt tứ giác $MNPQ$ thì cắt nhau tại 4 điểm X, Y, U, V sao cho mỗi giao điểm này thuộc 2 tiếp tuyến của cùng một đường tròn.

Chứng minh rằng tứ giác có 4 đỉnh A, B, C, D ngoại tiếp được khi và chỉ khi tứ giác có 4 đỉnh X, Y, U, V ngoại tiếp được.

Các bạn hãy chứng minh ĐL này tương tự như cách chứng minh ĐL3.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TOÁN - TIN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM VINH NĂM 2000

NGÀY THỨ NHẤT

(Thời gian : 150 phút)

Câu I. 1) Cho tam giác ABC, có $AC > AB$. Hai điểm M, N chuyển động trên hai cạnh AB và AC tương ứng sao cho $BM = CN$.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định S;

b) Chứng minh rằng với mỗi vị trí của M, N bốn điểm A, M, N, S thuộc một đường tròn.

2) Cho tứ giác lồi $ABCD$, có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau và bằng nhau. Giả sử $AB = \sqrt{3}$; $BC = \sqrt{6}$; $CD = 3$. Trên nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng AC không chứa điểm B, dựng hình vuông $ACMN$. Trên nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng MD không chứa điểm N, dựng tia Mx vuông góc với MD và lấy điểm E thuộc tia Mx sao cho $ME = MD$.

a) Chứng minh rằng 4 điểm C, D, M, E thuộc một đường tròn.

b) Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

Câu II. 1) Tính trị số biểu thức :

$$a.\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}$$

trong đó a, b, c là ba số dương thỏa mãn :

$$ab + bc + ca = 1$$

2) Tính tổng :

$$S = 2 + 2.3 + 3.4 + ... + 2000.2001$$

Câu III. 1) Giả sử a, b, c là ba số thực và $a.b.c = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \le 1$$

2) Giải phương trình sau :

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{10x}$$

NGÀY THỨ HAI

(Thời gian : 150 phút)

Câu IV.

1) Tìm tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình :

$$x^4 - 3x^3y + 5x^2y^2 - xy(3y^2+2) + y^4 + 1 = 0$$

2) Tìm 32 nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + y^2 = 3485$$

3) Cho biểu thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện :

$|P(x)| \le 1$ khi $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$. Chứng minh rằng :

$$|a| + |b| + |c| \le 3$$

Câu V.

1) Giả sử $A = \{1, 2, 3, ..., 2000\}$. Chứng minh rằng tồn tại một cách phân chia tập hợp A thành 4 tập con rời nhau A_1, A_2, A_3, A_4 và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

a) Số các số của tập A_k bằng k lần số các số của tập A_1.

b) Tổng tất cả các số của tập A_k bằng k lần tổng tất cả các số của tập A_1 trong đó $k = 2; 3; 4$.

2) Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $D = R \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ và thỏa mãn điều kiện :

$$f(x-1) - 3f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x \quad \forall x \in D$$

3) Xác định các số nguyên a, b, c khác không và đôi một phân biệt sao cho :

$$P(x) = x(x-a)(x-b)(x-c) + 1$$

phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên và bậc của chúng nhỏ hơn 4.

Câu VI.

1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và ngoại tiếp đường tròn tâm I, bán kính r. Chứng minh rằng : $IA.IB.IC = 4Rr^2$.

2) Trên mặt phẳng cho 2000 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và 1000 điểm được đánh dấu màu đỏ, 1000 điểm còn lại được đánh dấu màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại một cách nối 1000 điểm màu đỏ với 1000 điểm màu xanh mà không có hai đoạn thẳng nào trong chúng cắt nhau tại một điểm khác với các điểm đã cho.

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ TỔNG CÁC LŨY THỪA

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà – Thái Bình)

"Tìm được lời giải cho một bài toán là một phát minh" (Pôlya). Sẽ thông minh hơn nếu ta biết vận dụng nó để sáng tạo, tìm lời giải cho các bài toán mới. Bài T7/282 là một thí dụ minh họa ý tưởng trên (xem lời giải ở THTT số 286 (4/2001)). Từ kết quả của bài toán này ta có bài toán sau :

Bài toán: Cho các số nguyên dương k, n và các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_k$ thỏa mãn :

$$a_1 + a_2 + ... + a_k \geq k$$

Chứng minh rằng :

$$a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_k^{n+1} \geq a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n \quad (*)$$

(*) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_k = 1$

Vận dụng BĐT (*) giúp ta giải được nhiều bài toán khác.

Bài toán 1. (ĐHQG Hà Nội Khối A - 2000). Với a, b, c là ba số thực bất kì thỏa mãn điều kiện : $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

$$8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c \quad (1)$$

Bài toán trên có nhiều cách giải (THTT số 278 (8/2000) và số 281 (11/2000) hoặc Giới thiệu các đề thi môn toán - 2000) Sau đây là một cách giải có áp dụng BĐT (*).

Cố nhiên : $2^a, 2^b, 2^c > 0 \ \forall a, b, c$ và $2^a + 2^b + 2^c \geq 3\sqrt[3]{2^{a+b+c}} = 3$ (BĐT Cauchy)

Từ đó áp dụng BĐT (*) ta có :

$$8^a + 8^b + 8^c = (2^a)^3 + (2^b)^3 + (2^c)^3$$
$$\geq (2^a)^2 + (2^b)^2 + (2^c)^2 \geq 2^a + 2^b + 2^c$$

Suy ra : $8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2^a = 2^b = 2^c = 1$
$\Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Bài toán 2. Cho các số nguyên dương k, n và các số thực khác không $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2k} + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{2k} + ... + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{2k} \geq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} \quad (2)$$

Giải. Áp dụng liên tiếp BĐT (*) ta có :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2k} + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{2k} + ... + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{2k}$$
$$= \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^{2k} + \left|\frac{x_2}{x_3}\right|^{2k} + ... + \left|\frac{x_n}{x_1}\right|^{2k} \geq$$
$$\geq \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^{2k-1} + \left|\frac{x_2}{x_3}\right|^{2k-1} + ... + \left|\frac{x_n}{x_1}\right|^{2k-1} \geq ... \geq$$
$$\geq \left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \left|\frac{x_2}{x_3}\right| + ... + \left|\frac{x_n}{x_1}\right| \geq \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1}$$

Từ đó ta thu được BĐT (2)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{x_n}{x_1}\right| = 1$$

và $\dfrac{x_1}{x_2}, \dfrac{x_2}{x_3}, ..., \dfrac{x_n}{x_1} > 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n > 0$

Bài toán 3. Xác định tất cả các ΔABC sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất :

$$\frac{\cos^{2002}A + \cos^{2002}B + \cos^{2002}C}{\cos^{2000}A + \cos^{2000}B + \cos^{2000}C}$$

Giải: Áp dụng BĐT quen thuộc :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ BĐT có: $(2\cos A)^2 + (2\cos B)^2 + (2\cos C)^2 \geq 3$

Áp dụng BĐT (*) cho : $a_1 = (2\cos A)^2$; $a_2 = (2\cos B)^2$; $a_3 = (2\cos C)^2$ và $n = 1000$ ta có :

$$(2\cos A)^{2002} + (2\cos B)^{2002} + (2\cos C)^{2002}$$
$$\geq (2\cos A)^{2000} + (2\cos B)^{2000} + (2\cos C)^{2000}$$

Suy ra :

$$\frac{\cos^{2002}A + \cos^{2002}B + \cos^{2002}C}{\cos^{2000}A + \cos^{2000}B + \cos^{2000}C} \geq \frac{1}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy biểu thức trên đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1/4 $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài toán 4. Cho các số nguyên dương k, n. Tìm các số thực $x_1, x_2, ..., x_k$ thỏa mãn :

$$\begin{cases} |x_1| + |x_2| + ... + |x_k| \geq k & (3) \\ x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_k^{2n} \leq k & (4) \end{cases}$$

Giải. Từ (3) và áp dụng liên tiếp BĐT (*) ta có :

$$x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_k^{2n} \geq |x_1|^{2n-1} + |x_2|^{2n-1} | + ... + |x_k|^{2n-1} \geq ... \geq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k| \geq k$$

Suy ra : $x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_k^{2n} \geq k$ cùng với (4) ta đi đến :

(Xem tiếp trang 7)

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN VÀO ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG NĂM 2000

PHẦN I. *Chung cho mọi thí sinh*

Câu 1. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + mx - m - 1}{x + 1} \qquad (C_m)$$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị $m = -1$

2. Chứng minh rằng họ (C_m) luôn đi qua một điểm cố định.

3. Tìm m để hàm số (C_m) có cực trị. Xác định tập hợp các điểm cực trị.

Câu II. 1. Giải phương trình

$$\sin^{2000}x + \cos^{2000}x = 1$$

2. Giải bất phương trình $|1 + \log_x 2000| < 2$

3. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2000}}} \le \frac{\pi}{4}$$

Câu III. Trong không gian, cho bốn điểm $A(-4, 4, 0)$, $B(2, 0, 4)$, $C(1, 2 -1)$ và $D(7, -2, 3)$

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D nằm trên cùng một mặt phẳng.

2. Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng (AB).

3. Tìm trên đường thẳng (AB) điểm M sao cho tổng $MC + MD$ là nhỏ nhất

PHẦN II.

Câu IVa. *Dành cho thí sinh đăng kí thi chương trình chưa phân ban*

Tính tích phân $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right) dx$$

Câu IVb. *Dành cho thí sinh đăng kí thi chương trình chuyên ban*

Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc.

1. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau ?

2. Có bao nhiêu cách xếp sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau ?

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Điểm cố định $(1 ; 0)$

3) Ta có : $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m + 1}{(x + 1)^2}$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ y' có nghiệm và đổi dấu qua nghiệm $\Leftrightarrow$ $t(x) = x^2+2x+2m+1$ đổi dấu tại nghiệm $x \ne -1 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó, hàm số có cực đại tại x_1 và cực tiểu tại x_2 với x_1, x_2 là các nghiệm của $t(x)$ thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

Giả sử $D(x_1 ; y_1)$ là điểm cực đại, ta có :

$y_1 = 2x_1 + m$ với $x_1 = -1 - \sqrt{-2m}$

$\Leftrightarrow \sqrt{-2m} = -1 - x_1 \Leftrightarrow -2m = x_1^2 + 2x_1 + 1$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1 + 1)$

Do đó : $y_1 = -\dfrac{1}{2}x_1^2 + x_1 - \dfrac{1}{2}$. Quỹ tích D là phần parabol $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{2}$ với $x < -1$. Bạn đọc tự tìm quỹ tích điểm cực tiểu.

Câu II. 1) Ta có $\sin^2x(1 - \sin^{1998}x) \ge 0$ và $\cos^2(1 - \cos^{1998}x) \ge 0$, nên $\sin^2x \ge \sin^{2000}x$ và $\cos^2x \ge \cos^{2000}x \Rightarrow \sin^{2000}x + \cos^{2000}x \le 1$. Do đó x là nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} \sin^2x(1 - \sin^{1998}x) = 0 \\ \cos^2x(1 - \cos^{1998}x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in Z).$$

2) $|1 + \log_x 2000| < 2 \Leftrightarrow -2 < 1 + \log_x 2000 < 2$

$\Leftrightarrow -3 < \log_x 2000 < 1$.

Trường hợp 1 :

$$\begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{1}{x^3} < 2000 < x \end{cases} \Leftrightarrow x > 2000$$

Trường hợp 2 :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x^3} > 2000 > x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2000}}$$

Nghiệm của bất phương trình là :

$$x \in \left(0 ; \frac{1}{\sqrt[3]{2000}}\right) \cup (2000 ; +\infty)$$

3) Với $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ thì $0 \le x^{2000} \le x^2 \le \dfrac{1}{2}$ nên

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^{2000}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \le \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2000}}} \le \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}$$

Câu III. 1) $\begin{cases} A(-4, 4, 0) \\ B(2, 0, 4) \\ C(1, 2, -1) \\ D(7, -2, 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6, -4, 4) \\ \overrightarrow{CD} = (6, -4, 4) \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow A, B, C, D$ nằm trên cùng một mặt phẳng.

2) Phương trình đường thẳng (AB) :

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -2t \\ z = 2t+4 \end{cases}$$

Gọi $H(3t+2, -2t, 2t+4) \in (AB)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = (3t+1, -2t-2, 2t+5)$

Ta có $CH \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{13}$

3) Gọi C' là điểm đối xứng với C qua $AB \Rightarrow C'(-3, 2, 5) \Rightarrow \overrightarrow{C'D} = (5, -2, -1)$.

Phương trình của đường thẳng $(C'D)$ là :

$$\begin{cases} x = 5k-3 \\ y = -2k+2 \\ z = -k+5 \end{cases}$$

Xét hệ phương trình của (AB) với $(C'D')$

$$\begin{cases} x = 3t+2\ ;\ y = -2t\ ;\ z = 2t+4 \\ x = 5k-3\ ;\ y = -2k+2\ ;\ z = -k+5 \end{cases}$$

$\Rightarrow (C'D) \cap (AB) = M_0(2, 0, 4)$

Với M bất kì $\in (AB)$. Ta có $MC + MD = MC' + MD \ge C'D$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0(2, 0, 4) \equiv B = (C'D) \cap (AB)$

Câu IVa.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})} \right] dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})\right]}{\cos(x-\frac{\pi}{4})} = -\ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Câu IVb.

số cách xếp là 10 !.

xen kẽ nhau.

Trường hợp 1. Các bạn nam đứng ở vị trí thứ lẻ

cách.

Trường hợp 2: Các bạn nam ở vị trí thứ chẵn,

1, cũng có 5!5! cách xếp.

Tóm lại: Số cách xếp là 2.5!5! = 288800.

Hướng dẫn giải
HỒ SỸ THÁI

MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC... *(Tiếp trang 5)*

Hệ (3), (4) $\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = ... = |x_k| = 1$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_k = \pm 1$

Bài toán 5. *ABC* là tam giác bất kì. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \ge 2$ ta có :

$$\frac{\mathrm{tg}^n A/2 + \mathrm{tg}^n B/2 + \mathrm{tg}^n C/2}{\mathrm{tg}A/2 + \mathrm{tg}B/2 + \mathrm{tg}C/2} \ge 3^{(1-n)/2} \quad (5)$$

Giải : Áp dụng BĐT quen thuộc :

$$\mathrm{tg}A/2 + \mathrm{tg}B/2 + \mathrm{tg}C/2 \ge \sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ BĐT có :

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}A/2 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}B/2 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}C/2 \ge 3$

Rõ ràng :

$\mathrm{tg}A/2, \mathrm{tg}B/2, \mathrm{tg}C/2 > 0\ \forall A, B, C \in (0; \pi)$

Áp dụng BĐT (*) cho :

$a_1 = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}A/2,\ a_2 = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}B/2,\ a_3 = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}C/2$

Ta có : $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}A/2)^n + (\sqrt{3}\,\mathrm{tg}B/2)^n + (\sqrt{3}\,\mathrm{tg}C/2)^n \ge (\sqrt{3}\,\mathrm{tg}A/2)^{n-1} + (\sqrt{3}\,\mathrm{tg}B/2)^{n-1} + (\sqrt{3}\,\mathrm{tg}C/2)^{n-1} \ge ... \ge \sqrt{3}\,(\mathrm{tg}A/2 + \mathrm{tg}B/2 + \mathrm{tg}C/2)$

Từ đó ta thu được BĐT (5)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Tiếp tục khai thác BĐT (*) còn giúp ta sáng tạo và giải được nhiều bài toán nữa. Rất mong nhận được ý kiến trao đổi từ phía bạn đọc.

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

THUẬT TOÁN CHIA ĐA THỨC NHIỀU BIẾN

NGÔ VIỆT TRUNG
(*Viện Toán học*)

Chúng ta ai cũng biết tầm quan trọng của thuật toán Euclid trong môn đại số. Thuật toán chia đa thức là thuật toán mở rộng thuật toán Euclid sang trường hợp nhiều biến. Nó ra đời trong những năm 70 nhằm giải quyết bài toán thử phần tử. Sau hơn 20 năm thuật toán này đã có những ứng dụng to lớn trong nhiều chuyên ngành toán học khác nhau. Bài báo này giới thiệu khái niệm thuật toán chia đa thức và ý nghĩa của nó đối với việc lập trình để giải quyết các bài toán có nhiều biến.

Trong toán học ta thường phải xét tập nghiệm của một hệ phương trình với $g_1, ..., g_m$ đều là đa thức :

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) = 0, \\ .... \\ g_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Nếu ta thêm vào hệ này một phương trình mới với f là đa thức

$$f(x_1, ..., x_n) = 0$$

thì sẽ nảy sinh một vấn đề là liệu hệ phương trình mới có tương đương với hệ phương trình ban đầu không. Biến đổi hệ phương trình đầu ta có thể quy vấn đề này thành bài toán sau đây.

Bài toán thử phần tử. Cho f và $g_1, ..., g_m$ là những đa thức nhiều biến. Khi nào ta có thể tìm được các đa thức $h_1, ..., h_m$ sao cho

$$f = h_1g_1 + ... + h_mg_m.$$

Lúc đó ta gọi f là một *tổ hợp tuyến tính đa thức* của $g_1, ..., g_m$. Tất nhiên là nghiệm của một đa thức f như vậy phải nằm trong tập nghiệm của hệ phương trình trên.

Trong *trường hợp một biến* có thể dễ dàng quy bài toán trên về trường hợp $m = 1$. Khi đó bài toán phát biểu lại dưới dạng : khi nào thì một đa thức $f(x)$ chia hết cho một đa thức $g(x)$ cho trước. Bài toán này được giải quyết bởi thuật toán Euclid. Thuật toán này cho phép ta xác định (sau một số hữu hạn phép tính chia đa thức) một đa thức $r(x)$ có bậc nhỏ hơn bậc của $g(x)$ sao cho $f(x)$ có thể viết dưới dạng : $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$. Ta có thể coi $r(x)$ như là phần dư của phép chia $f(x)$ cho $h(x)$. Do bậc của $r(x)$ nhỏ hơn bậc của $g(x)$ nên $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ khi và chỉ khi $r(x) = 0$.

Tiếc rằng thuật toán Euclid không thể áp dụng trong trường hợp nhiều biến. Để thấy điều này ta hãy nhớ lại xem thuật toán Euclid làm việc như thế nào.

Thuật toán Euclid : Giả sử

$$f = a_ox^s + a_1x^{s-1} + ... + a_s$$
$$g = b_ox^t + b_1x^{t-1} + ... + b_t$$

với s là bậc của f và t là bậc của g tức là $a_o \neq 0$ và $b_o \neq 0$

(1) Nếu $s < t$ thì ta đặt $r = f$.

(2 Nếu $s \geq t$ thì ta có thể viết $f = (a_o/b_o)x^{s-t}g + f_1$ với bậc của f_1 nhỏ hơn bậc của f. Khi đó ta thay f bằng f_1 và quay lại các bước (1), (2) như trên.

(3) Thuật toán phải dừng sau một số hữu hạn bước vì bậc của f giảm dần.

Trường hợp nhiều biến có một khó khăn cơ bản là ta không thể quy về trường hợp $m = 1$ được. Ngay cả khi $m = 1$ thì ta cũng không thể áp dụng thuật toán Euclid vì nếu coi $f(x_1, ..., x_n)$ và $g(x_1, ..., x_n)$ là những đa thức một biến theo $x = x_n$ thì a_o/b_o không còn là một đa thức nữa và ta không thể tiếp tục các bước đi tiếp theo của thuật toán. Tuy thuật toán Euclid không giải quyết được bài toán thử phần tử nhưng nó đã chứa đựng mầm mống lời giải cho trường hợp nhiều biến. Đó là việc xét các hạng tử có bậc cao nhất và việc hạ bậc sau từng bước. Điểm mấu chốt ở đây là khái niệm bậc cho ta một quy tắc xác định thứ tự các hạng tử trong các đa thức một biến. Trong trường hợp nhiều biến thì khái niệm bậc thông thường không còn phù hợp nữa vì có thể có nhiều hạng tử có cùng bậc. Vì vậy người ta phải sắp xếp thứ tự các hạng tử theo một quy tắc nào đó và tìm cách giảm thứ tự sau mỗi bước.

Do mỗi hạng tử ứng với một đơn thức $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ nên người ta phải đưa ra một sự sắp xếp theo thứ tự thích hợp cho các đơn thức. Thứ tự hay được dùng đến nhất là *thứ tự từ điển*. Thứ tự này coi $x_1, ..., x_n$ như là một bộ chữ cái và đơn thức $x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ như một từ có a_1 chữ x_1 ở đầu, ..., a_n chữ x_n ở đuôi.

$$x_1^a > x_1^{a-1}x_2 > ... > x_1^{a-1}x_n > x_1^{a-2}x_2^2 > ...$$

Tiếp theo ta sẽ thay hệ đa thức $g_1, ..., g_m$ cho trước bởi một hệ các tổ hợp tuyến tính đa thức $e_1, ..., e_p$ của $g_1, ..., g_m$ sao cho nếu f là một tổ hợp tuyến tính đa thức khác không của $g_1, ..., g_m$ thì hạng tử cao nhất của f sẽ chia hết cho hạng tử lớn nhất của một trong các đa thức $e_1, ..., e_p$. Một hệ đa thức như vậy được gọi là một *cơ sở*

Groebner của hệ $g_1, ..., g_m$. Cơ sở Groebner luôn tồn tại.

Ví dụ. Xét hệ hai đa thức $g_1 = x_1^2 + 3x_1x_2$, $g_2 = 2x_1^2 + x_2^2$. Nếu ta sắp xếp các đơn thức theo thứ tự từ điển thì $x_1^2 > x_1x_2 > x_2^2$. Đơn thức lớn nhất của hai đa thức trên đều là x_1^2. Tuy nhiên chúng có một cơ sở Groebner là hệ các đa thức

$e_1 = x_1^2 + 3x_1x_2 = g_1$,

$e_2 = x_1x_2 - \frac{1}{16}x_2^2 = \frac{1}{16}(2g_1 - g_2)$

$e_3 = x_2^3 = \frac{1}{19}[(6x_1+19x_2)g_2 - (12x_1+2x_2)g_1]$ với các hạng tử lớn nhất là x_1^2, x_1x_2, x_2^3.

Thật vậy có thể thấy ngay hạng tử lớn nhất của bất kì một tổ hợp tuyến tính đa thức bậc 2 của g_1, g_2 chỉ có thể là x_1^2, x_1x_2. Còn hạng tử lớn nhất của bất kì một tổ hợp tuyến tính đa thức bậc > 2 của g_1, g_2 phải chia hết cho một trong các đơn thức x_1^2, x_1x_2, x_2^3 vì mọi đơn thức bậc > 2 đều chia hết cho một trong các đơn thức này.

Một khi ta đã có một cơ sở Groebner thì ta cũng có một thuật toán chia tương tự như thuật toán Euclid. Thuật toán này xác định cho mỗi đa thức f một đa thức r có hạng tử lớn nhất không chia hết cho mọi hạng tử lớn nhất của $e_1, ..., e_p$ sao cho f có thể viết dưới dạng

$f = h_1e_1 + ... + h_pe_p + r$

Do $e_1, ..., e_p$ là những tổ hợp tuyến tính đa thức của $g_1, ..., g_m$ nên f là một tổ hợp tuyến tính của $g_1, ..., g_m$ khi và chỉ khi r là một tổ hợp tuyến tính đa thức của $g_1, ..., g_m$ Theo định nghĩa của cơ sở Groebner thì điều này xảy ra khi và chỉ khi $r = 0$.

Thuật toán chia. Giả sử $e_1, ..., e_p$ là một cơ sở Groebner của hệ $g_1, ..., g_m$.

(1) Nếu hạng tử lớn nhất của f không chia hết cho hạng tử lớn nhất của mọi đa thức $e_1, ..., e_p$ thì ta đặt $r = f$.

(2) Nếu hạng tử lớn nhất của f chia hết cho hạng tử lớn nhất của một đa thức e_i. thì ta có thể viết $f = he_i + f_1$.
với h là thương của các hạng tử lớn nhất của f và e_i, còn f_1 là một đa thức có hạng tử lớn nhất < hạng tử lớn nhất của f (điều này phụ thuộc vào sự lựa chọn thứ tự các đơn thức). Khi đó ta thay f bằng f_1 và lại tiến hành các bước (1), (2) như trên.

(3) Thuật toán phải dừng sau một số hữu hạn bước vì hạng tử lớn nhất của f có thứ tự giảm dần.

Sử dụng thuật toán chia ta có thể dễ dàng giải bài toán thử phần tử với mọi đa thức $f, g_1, ..., g_m$ cho trước.

Ví dụ. Giả sử $f = x_1^3$ và e_1, e_2, e_3 là cơ sở Groebner trong ví dụ trên. Ta có

$x_1^3 = x_1e_1 - 3x_1^2x_2$, $\quad 3x_1^2x_2 = 3x_2e_2 - \frac{1}{2}x_1x_2^2$

$\frac{1}{2}x_1x_2^2 = \frac{1}{2}x_2e_2 - \frac{1}{12}x_2^3$, $\frac{1}{12}x_2^3 = \frac{1}{12}e_3$.

Vì vậy x_1^3 là một tổ hợp tuyến tính đa thức của hai đa thức $g_1 = x_1^2 + 3x_1x_2$, $g_2 = 2x_1^2 + x_2^2$. Từ các bước trên ta cũng nhận được

$$\begin{aligned}x_1^3 &= x_1e_1 - 3x_1e_2 + \frac{1}{2}x_2e_2 - \frac{1}{2}e_3\\ &= x_1g_1 - \frac{1}{12}(6x_1-x_2)(2g_1-g_2) -\\ &\quad - \frac{1}{38}[(6x_1+19x_2)g_2 - (12x_1+2x_2)g_1]\\ &= \frac{1}{228}[(72x_1+50x_2)g_1 - (140x_1+95x_2)g_2]\end{aligned}$$

Việc sử dụng các hệ đa thức giống như cơ sở Groebner đã xuất hiện từ đầu thế kỉ này trong các công trình của Gordan, Macaulay, Hilbert. Người đầu tiên thấy được tầm quan trọng thực tiễn của thuật toán chia là nhà toán học người Áo Groebner. Ông đã đặt vấn đề tính cơ sở Groebner làm đề tài luận án phó tiến sĩ cho học trò của ông là Buchberger. Năm 1970 Buchberger tìm thấy một thuận toán hữu hiệu để tính cơ sở Groebner. Sau này Buchberger mới phát hiện ra rằng Groebner đã biết những nét cơ bản của thuật toán này từ những năm 50.

Cơ sở Groebner được nghiên cứu đúng thời kì máy tính cá nhân ra đời và bắt đầu trở nên phổ cập. Ngay lập tức người ta thấy rằng có thể lập trình thuật toán chia để giải quyết các bài toán có nhiều biến mà ngày nay được gọi là *tính toán hình thức*. Thuật toán này đã chứa đựng những thuận lợi cơ bản cho việc lập trình như :

- Việc sắp xếp thứ tự các hạng tử của một đa thức cho phép ta biểu diễn một đa thức như một vectơ các hệ số và do đó ta có thể đưa dữ liệu về các đa thức vào trong máy tính một cách dễ dàng.
- Việc xét hạng tử lớn nhất của các đa thức cho phép máy tính chỉ cần thử tọa độ đầu tiên của các vectơ tương ứng.

Hiện nay các chương trình máy tính toán học lớn như MATHEMATICA, MAPLE, v. v.. đều có cài đặt các thuật toán làm việc với cơ sở Groebner. Ngoài ra còn có những chương trình máy tính chuyên dụng khác được xây dựng chủ yếu dựa vào khái niệm cơ sở Groebner nhằm giải quyết các tính toán hình thức trong các chuyên ngành toán học khác nhau./.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

HAI BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ TRONG MỘT BÀI TOÁN

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Đa số các bài toán trong kì thi Toán Quốc tế (IMO) là các bài toán hay chứa đựng những ý tứ toán học khá sâu sắc, thách thức khả năng sáng tạo của thí sinh. Các bài toán này đã trải qua một quá trình sàng lọc cẩn thận gắt gao trước khi được lựa chọn. Từ các bài toán đó nếu chịu khó đào sâu suy nghĩ ta có thể phát hiện ra các vấn đề mới, các bài toán mới lí thú. Các bài toán IMO thực sự là một mỏ vàng quý giá để các bạn đào bới khai thác, tập dượt sáng tạo đấy. Trên tạp chí THTT của ta và trên một số tạp chí quốc tế khác đã đăng một số kết quả nghiên cứu, nảy sinh từ việc phát triển và đào sâu các bài toán IMO. Trong bài viết này tôi muốn trình bày một bài toán mới, được hình thành trên cơ sở hai bài toán IMO và rồi lại bao lấy cả hai bài toán IMO này.

Trong kì thi IMO lần thứ 31 (năm 1990) tại Bắc Kinh có bài toán số học như sau :

Bài toán A (Rumani đề nghị) *Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$ có tính chất*

$$2^n + 1 \text{ chia hết cho } n^2 \qquad (1)$$

Đội tuyển Việt Nam năm ấy bị hạ gục bởi bài toán này, điểm trung bình của đội chỉ có 1,33/7.

Đến kì thi IMO lần thứ 40 (năm 1999) tại Rumani có bài toán số học sau

Bài toán B (Đài Loan đề nghị). *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, p) trong đó $n > 1$, p là số nguyên tố sao cho*

$$n \le 2p \qquad (2)$$

và $\quad (p-1)^n + 1$ *chia hết cho* n^{p-1} $\qquad (3)$

Đội tuyển Việt Nam có điểm trung bình ở bài này là 5,33/7.

Các bạn có thể thấy ngay rằng (1) là trường hợp riêng của (3) ứng với $p = 3$. Nhưng bài toán B không phải là bài toán tổng quát của bài toán A vì nó có thêm điều kiện (2). Điều kiện (2) là khá giả tạo làm bài toán kém hay đi. Vậy thì tại sao ta không bỏ điều kiện (2) đi để được bài toán sau đây.

Bài toán C. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, p) trong đó $n > 1$, p là số nguyên tố sao cho $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1}.*

Rõ ràng bài toán C này khá đẹp và chứa đựng cả hai bài toán A và bài toán B như một trường hợp riêng. Nhưng liệu có giải được nó không ? Phải chăng tác giả của bài toán B lúc đầu đã đặt ra bài toán C nhưng không giải được nên phải thêm vào điều kiện (2) để giải được nó ? Rất tiếc là tôi không biết được ai là tác giả bài toán này để viết thư trao đổi. Sau một vài giờ suy nghĩ, tôi có được lời giải của bài toán C như sau :

Lời giải bài toán C.

Bước 1. Nếu $p = 2$ thì hiển nhiên $n = 2$. Xét $p>2$. Ta chứng minh n chia hết cho p. Gọi q là ước nguyên tố bé nhất của n. Ta có $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q \Rightarrow (1-p)^n \equiv 1 \pmod q$ vì n lẻ. Gọi h là số mũ nhỏ nhất của $1-p$ trong đồng dư thức trên. Khi đó dễ chứng minh rằng $h|(q-1)$ và $h|n$. Vì q là ước nguyên tố bé nhất của n nên suy ra $h = 1$. Vậy $1 - p \equiv 1 \pmod q \Rightarrow p \equiv 0 \pmod q \Rightarrow p = q$. Vậy $p|n$.

Đến đây ta dễ dàng suy ra lời giải bài toán B. Thật vậy vì $p|n$ và $n \le 2p$, n lẻ nên $n = p$. Ta có

$$(p-1)^p + 1 = p^p + \dots + \frac{p(p-1)}{2}p^2 + p^2$$ *chỉ chia hết cho p^2 mà không chia hết cho p^3. Do đó ta có $p-1 = 2$ hay $n = p = 3$.*

Bước 2. Ta chứng minh $p=3$, $n = 3q$, $(q, 3) = 1$. Theo bước 1 ta có $n = p^kq$, $(p, q) = 1$, $k \ge 1$. Ta chỉ ra $(p-1)^{p^kq} + 1 = p^{k+1}m$ với $(m, p) = 1$

Chứng minh quy nạp theo k.

Với $k = 1$ khẳng định đúng. Thật vậy đặt $A = (p-1)^p$, ta có

$$A + 1 = p^p + \dots + \frac{p(p-1)}{2}p^2 + p^2$$

chia hết cho p^2 và không chia hết cho p^3. Khi đó

$$(p-1)^{pq} + 1 = A^q + 1 =$$
$$= (A+1)(A^{q-1} - \dots - A + 1) = (A+1)B.$$

Vì $A \equiv -1 \pmod p \Rightarrow B \equiv q \not\equiv 0 \pmod p$.

Vậy $A^q + 1$ chia hết cho p^2 và không chia hết cho p^3.

Giả sử khẳng định đúng với k tức là $(p-1)^{p^kq} + 1 = p^{k+1}m$, với $(m, p) = 1$.

Đặt $a = (p-1)^{p^kq}$. Ta có

$$(p-1)^{p^{k+1}q} + 1 = a^p + 1 = (a+1)C = p^{k+1}mC \quad (4)$$

trong đó $C = a^{p-1} - \dots + 1$. Theo trên $a \equiv -1 \pmod{p^{k+1}} \Rightarrow a \equiv -1 \pmod{p^2}$.

Vậy $C \equiv p \pmod{p^2}$ hay C chia hết cho p mà không chia hết cho p^2. Kết hợp điều này với (4) ta có điều phải chứng minh.

Vậy $k + 1 \ge (p-1)k \Rightarrow 1 \ge (p-2)k \Rightarrow p=3, k=1$.

Bước cuối. Ta chứng minh $n = 3$. Theo bước 3 ta có $n = 3q$, $(q, 3) = 1$. Ta chứng minh $q = 1$. Giả sử trái lại $q > 1$. Gọi s là ước nguyên tố bé nhất của q. Ta có $2^{3q} = 8^q \equiv -1 \pmod s \Rightarrow (-8)^q \equiv 1 \pmod s$. Gọi h là số mũ nhỏ nhất của đồng dư thức trên, khi đó dễ chứng minh rằng $h|q$ và $h|(s-1)$. Vì s là ước nguyên tố bé nhất của q ta suy ra $h = 1$. Vậy $-8 \equiv 1 \pmod s \Rightarrow s|9 \Rightarrow s = 3$. Vậy $3|q$. Mâu thuẫn. Thành thử $q = 1 \Rightarrow n = 3$. Bài toán được giải xong.

Đáp số : $n = p = 2$ và $n = p = 3$.

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO NĂM 2001

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Kì thi chọn học sinh vào đội tuyển quốc gia dự thi Olympic Toán học quốc tế (IMO) lần thứ 42 đã diễn ra tại Hà Nội, trong hai ngày 08/5 và 09/5/2001. Tham dự kì thi có 42 thí sinh, gồm 41 thí sinh đạt từ 24 điểm trở lên ở Bảng A và 01 thí sinh đạt 39 điểm ở Bảng B.

Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 03 bài toán thi trong thời gian 240 phút. Đề thi như sau:

Ngày thi thứ nhất (08/5/2001).

Bài 1: Cho dãy số nguyên $\{a_n\}$, $n \in N$, xác định bởi:

$a_0 = 1$ và $a_n = a_{n-1} + a_{[n/3]}$ với mọi $n \in N^*$

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố $p \leq 13$, tồn tại vô số số tự nhiên k sao cho a_k chia hết cho p.

($[x]$ kí hiệu phần nguyên của số thực x).

Bài 2: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A và B; PT là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó (P, T là các tiếp điểm). Các tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của điểm B qua PT.

Hãy chứng minh ba điểm A, S, H thẳng hàng.

Bài 3: Một câu lạc bộ có 42 thành viên. Biết rằng trong 31 thành viên bất kì của câu lạc bộ luôn có một đôi nam - nữ quen nhau.

Chứng minh rằng từ các thành viên của câu lạc bộ ta có thể chọn ra 12 đôi nam - nữ quen nhau.

Ngày thi thứ hai (09/5/2001).

Bài 4: Xét các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện:

$21ab + 2bc + 8ca \leq 12.$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Bài 5: Cho số nguyên $n > 1$. Trong không gian cho hệ trục toạ độ Oxyz. Kí hiệu T là tập hợp gồm tất cả các điểm $P(x, y, z)$ mà x, y, z là các số nguyên thoả mãn điều kiện: $1 \leq x, y, z \leq n$. Tô màu các điểm thuộc T sao cho: nếu điểm $A(x_0, y_0, z_0)$ được tô màu thì điểm $B(x_1, y_1, z_1)$, mà $x_1 \leq x_0$, $y_1 \leq y_0$ và $z_1 \leq z_0$, không được tô màu.

Hỏi, theo cách trên, ta có thể tô màu tối đa bao nhiêu điểm ?

Bài 6: Cho dãy số nguyên dương $\{a_n\}$, $n \in N^*$, thoả mãn điều kiện sau:

$0 < a_{n+1} - a_n \leq 2001$ với mọi $n \in N^*$.

Chứng minh rằng có vô số cặp số nguyên dương (p, q) mà $p < q$ và a_p là ước số của a_q.

Căn cứ kết quả thi, sáu học sinh có tên dưới đây đạt điểm số cao nhất trong kì thi được tuyển chọn vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO lần thứ 42 năm 2001:

STT	*Họ và Tên*	*H/s lớp*	*Trường - Tỉnh*	*Điểm thi*
01	Nguyễn Anh Quân	12	THPT NK Trần Phú, Hải Phòng	29,0
02	Lê Anh Vinh	12	Khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội	26,0
03	Nguyễn Hoàng Dũng	12	THPT Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội	25,5
04	Vũ Ngọc Minh	11	Khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội	22,0
05	Trần Khánh Toàn	11	Khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội	20,0
06	Lê Đình Hùng	12	THPT Lam Sơn, Thanh Hoá	19,0

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/288. Tìm tất cả các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ sao cho

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 + p_7^2 = p_8^2$$

VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

Bài T2/288. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T3/288. Tìm điều kiện cần và đủ đối với các số a, b, c để phương trình sau vô nghiệm :

$$a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$$

VŨ ĐỨC CẢNH
(Ninh Bình)

Bài T4/288. Gọi M là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ B tới AC và F là chân đường vuông góc kẻ từ C tới AB. Biết ΔMEF là tam giác đều, tính tỉ số $\frac{IK}{R}$, trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC và K là giao điểm (khác A) của tia AI với đường tròn bán kính R ngoại tiếp ΔABC.

PHẠM NGỌC QUANG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài T5/288. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn. Điểm P chạy trên cung BC không chứa A. Gọi M và N lần lượt là giao điểm của BC với PA và PD. Tính độ dài lớn nhất của MN.

NGUYỄN HỮU PHƯỚC
(SV ĐH Bách Khoa, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/288. Cho số nguyên tố $p > 2$ mà $p-2$ chia hết cho 3. Chứng minh rằng trong tập hợp các số dạng $y^2 - x^3 - 1$, trong đó x, y là các số nguyên không âm và nhỏ hơn p, có nhiều nhất là $p-1$ phần tử chia hết cho p.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T7/288. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$$

TRIỆU VĂN HƯNG
(GV THPT Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T8/288. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2b^2c^2$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ĐÀO MẠNH THẮNG
(SV K48 CLC khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/288. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì :

$$\sin A^{\sin B} + \sin B^{\sin C} + \sin C^{\sin A} \geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{3}/2}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

CAO HOÀNG ANH
(SV K42 Khoa Thủy Điện, ĐH Thủy Lợi, Hà Nội)

Bài T10/288. Cho tứ diện $SABC$ với $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Một mặt phẳng thay đổi luôn đi qua trọng tâm của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm D, E, F tương ứng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{1}{SD^2} + \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{SF^2}$$

TRƯƠNG XUÂN HUY
(GV THPT Phan Bội Châu, Phan Thiết)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/288. Một vật nhỏ khối lượng m đặt ở đỉnh của một bán cầu nhẵn, bán kính R. Người ta tác dụng vào vật một lực không đổi $\vec{F}$ theo phương ngang và nó trượt xuống. Hãy xác định :

a) Vận tốc của vật lúc nó rời mặt cầu.

b) Góc θ giữa phương thẳng đứng và bán kính vectơ từ tâm O của quả cầu đến vị trí mà vật rời khỏi mặt cầu. Tính θ khi $F = mg$

TÔ GIANG
(Hà Nội)

Bài L2/288. Một xilanh kín đặt thẳng đứng có 2 pittông chia thành 3 ngăn. Mỗi phần chứa một mol khí lí tưởng. Khi nhiệt độ các ngăn khí là T_1 thì tỉ số thể tích các phần là $V_1 : V_2 : V_3 = 5 : 3 : 1$. Khi nhiệt độ các phần là T_2 thì tỉ số thể tích các phần là $V'_1 : V'_2 : V'_3 = x : 2 : 1$. Tìm x và $\frac{T_2}{T_1}$. Bỏ qua ma sát giữa các pittông và xilanh.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/288. Find all prime numbers $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ such that

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2+p_6^2+p_7^2=p_8^2$$

T2/288. Let a, b, c be positive numbers satisfying $abc=1$. Prove that :

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}$$

T3/288. Find a necessary and sufficient condition on the numbers a, b, c so that the following equation has no solution

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c=x$$

T4/288. Let M be the midpoint of the side BC of a triangle ABC, E and F be respectively the orthogonal projection of B on AC and C on AB. Supposing that the triangle MEF is equilateral, calculate the ratio $\frac{IK}{R}$, where I is the incenter of ABC, K is the point of intersection ($K\neq A$) of the ray AI with the circumcircle of ABC and R is the circumradius of ABC.

T5/288. Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a circle. A point P moves on the arc BC not containing A. Let M and N be respectively the points of intersection of BC with PA and PD. Calculate the greatest value of the measure of MN.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/288. Let p be a prime number, $p>2$, such that $p-2$ is divisible by 3. Prove that in the set of numbers which can be written in the form y^2-x^3-1, where x, y are non negative integers less than p, there exits at most $p-1$ numbers divisible by p.

T7/288. Solve the equation

$$\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$$

T8/288. The positive numbers a, b, c satisfy the condition : $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2b^2c^2$. Prove that :

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

T9/288. Prove that for any triangle ABC :

$$\sin A^{\sin B}+\sin B^{\sin C}+\sin C^{\sin A}\geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{3}/2}$$

When does equality occur ?

T10/288. Let be given a tetrahedron $SABC$ with $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$. A moving plane, passing through the centroid of the tetrahedron, cuts the edges SA, SB, SC respectively at D, E, F. Find the least value of the expression

$$\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{SF^2}$$

BẠN CÓ BIẾT

Giả thuyết về DÃY SỐ COLLATZ

PHẠM THÀNH LUÂN
(Tp Hồ Chí Minh)

Dãy số Collatz được xác định như sau :
Số hạng đầu u_0 là số tự nhiên $\neq 0$ bất kì

$$u_{n+1}=\begin{cases}3u_n+1 \text{ nếu } u_n \text{ là số lẻ}\\ \dfrac{u_n}{2} \text{ nếu } u_n \text{ là số chẵn.}\end{cases}$$

Ví dụ : Cho $u_0=1$, ta có dãy số
1, **4, 2, 1**, ...

Cho u_0 một giá trị khác, ta có các dãy số tương ứng như sau :

$u_0=2$ có dãy 2, 1, **4, 2, 1**, ...

$u_3=3$ có dãy 3, 10, 5, 16, 8, **4, 2, 1**, ...

$u_0=4$ có dãy **4, 2, 1**, ...

$u_5=5$ có dãy 5, 16, 8, **4, 2, 1**, ...

$u_0=9$ có dãy 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, **4, 2, 1**, ...

Điều đáng chú ý là với một giá trị u_0 cho trước, đến một lúc nào đó *trong dãy Collatz sẽ xuất hiện một số hạng bằng 4, và lúc đó ta có chu kì gồm 3 số* **4, 2, 1**.

Bạn hãy thử kiểm tra lại xem sao ! Ví dụ với $u_0=123$, ta có $u_{45}=4$, còn với $u_0=10635$, ta có $u_{215}=4$.

Nếu biết lập trình, bạn dễ dàng viết được một chương trình để tìm dãy số Collatz theo u_0 cho trước và tìm ra nhanh chóng các kết quả đó. Dùng máy tính, người ta đã thấy rằng tính chất lí thú nói trên của dãy Collatz đúng với mọi $u_0<3.10^{12}$. Nhưng chứng minh điều đó với mọi số tự nhiên $u_0\neq 0$ là một bài toán chưa có lời giải.

Bài T1/284. *Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p lớn hơn n+1. Hỏi phương trình sau có nghiệm nguyên không :*

$$1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{2n+1}+\ldots+\frac{x^p}{pn+1}=0$$

Lời giải. Ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình sau :

$a_p x^p + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_o = 0$ (1) trong đó

$a_i = \dfrac{(n+1)(2n+1)\ldots(pn+1)}{in+1} \in Z$; $i = 0, 1, \ldots, p$

Từ giả thiết suy ra $(p, n) = 1$, do đó dễ thấy khi chia p số $in + 1$ ($i = 0, 1, \ldots, p$) cho p ta được p số dư phân biệt. Vì vậy có đúng một số $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ thỏa mãn $(kn + 1) \vdots p$.

Hơn nữa, dễ thấy $k \neq 1$ và $0 < kn + 1 < p^2 \Rightarrow kn + 1 \not\vdots\ p^2$

Vậy với số k đó ta có $a_k \not\vdots\ p$, đồng thời p hệ số còn lại (trong đó có a_1, a_o) của phương trình (1) đều chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 (*).

Giả sử phương trình (1) có nghiệm nguyên $x = c$, ta có :

$a_p c^p + \ldots + a_2c^2 + a_1c_1 + a_o = 0$

$a_i \vdots p\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, p\}, i \neq k, k \neq 0, 1.$

Suy ra $a_kc^k \vdots p$ (p nguyên tố) $\Rightarrow c^k \vdots p$

$\Rightarrow c \vdots p \Rightarrow a_ic^i \vdots p^2\ \forall i \in \{2, \ldots, p\}$ đồng thời $a_1c \vdots p^2$ (vì $a_1 \vdots p$ và $c \vdots p$)

Từ đó suy ra $a_o \vdots p^2$. Điều này mâu thuẫn với (*). Suy ra (1) không có nghiệm nguyên. Do đó phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/284. *Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện*

$$(x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2}) = 1.$$

Chứng minh rằng

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}) = 1$$

Lời giải. Ta có $(x-\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1+x^2})$

$= 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - (x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2})$

$= 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1$ (*)

Nhân từng vế của (*) với đẳng thức đã cho ta được :

$(x^2 - 1 - y^2)(y^2 - 1 - x^2)$

$= 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1$

$\Leftrightarrow 1 - (x^2 - y^2)^2$

$= 2xy + 2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1$

$\Leftrightarrow 2(1 - xy) =$

$= 2\sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2 + (x^2-y^2)^2}$

$\Rightarrow 1 - xy \geq \sqrt{(xy-1)^2 + (x+y)^2}$

$\geq |1 - xy| \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$

Từ đó sẽ có : $(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}) = (x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2}) = 1$

Nhận xét. 1) Khá nhiều bạn sử dụng phép biến đổi quá phức tạp để dẫn đến $x = -y$.

2) Một số bạn làm ngược lại nên "dễ dàng" :

Từ $(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}) = 1$ nhân với phần tử liên hợp của từng thừa số sẽ có :

$-(y+\sqrt{1+y^2}) = x - \sqrt{1+x^2}$ (1)

và $-(x+\sqrt{1+x^2}) = y - \sqrt{1+y^2}$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) dẫn đến $x = -y$ và từ đó suy ra $(x+1+y^2)(y+1+x^2) = 1$

Như vậy hai hệ thức đã cho ở bài toán là tương đương (ý kiến của bạn *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS NK Lê Lợi, Hà Đông, **Hà Tây**), *Trần Trung Kiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** và một số bạn khác.

3) Các bạn giải tốt và diễn đạt gọn là : *Bùi Quốc Trung*, 9B, THCS thị trấn Tiền Hải, **Thái Bình**; *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị, **Hòa Bình**; *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, *Nguyễn Khánh Hội*, 6E, THCS Yên Trị, Ý Yên, **Nam Định**; *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương, **Hà Nội**; *Phan Tuấn Thành* và *Phạm Huy Hoàng*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, **Hải Dương**; *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Thị Thùy Lan*, 7B1, THPT Phú Lâm, **Phú Yên**; *Ngô Thị Huyền Trang*, 7A1, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**; *Võ Thông Thái*, 8^3, trường cấp 2-3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**; *Nguyễn Lê Văn Tiến*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Đức Phương*, 8A, NK Trần Phú, **Hải Phòng**; *Lê Văn Bắc*, 8A, THCS Quảng Lĩnh, Quảng Xương, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Tiến Dũng*, 9^2, THCS Mỹ Hóa, Tx. Bến Tre, **Bến Tre**; *Đặng Đình Trung*, 9^2, THCS Hòa Bình, Long Thành, **Đồng Nai**, *Nguyễn Trung Nghĩa*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Tây**.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/284. *Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{(1+x)^8+16x^4}{(1+x^2)^4}$$

trong đó x là số thực.

Lời giải. (của nhiều bạn)

Sử dụng bất đẳng thức quen biết

$$A^4+B^4 \ge \frac{(A^2+B^2)^2}{2} \ge \frac{(A+B)^4}{8} \quad (*)$$

Cho $A=(1+x)^2$ và $B=-2x$, ta có

$$\frac{(1+x)^8+16x^4}{(1+x^2)^4} \ge \frac{(1+x^2)^4}{8(1+x^2)^4}=\frac{1}{8}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $A=B$, tức là khi $x=-2\pm\sqrt{3}$

Áp dụng (*) có

$$(1+x^2)^4 \ge \left(\frac{(1+x)^2}{2}\right)^4 \ge \frac{(1+x)^8}{16} \qquad (1)$$

$$(1+x^2)^4=(1+x^2-2|x|+2|x|)^4=$$
$$=((1-|x|)^2+2|x|)^4 \ge 16x^4 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) có $\dfrac{(1+x)^8+16x^4}{(1+x^2)^4} \le 16+1=17$, với đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=1$.

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là $\dfrac{1}{8}$ khi $x=-2\pm\sqrt{3}$ và giá trị lớn nhất là 17 khi $x=1$.

Nhận xét. Đa số các bạn giải đúng và ngắn gọn bài toán này, nhưng cũng có vài bạn giải sai không xác định đúng giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của biểu thức. Bạn *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THCS Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ có đưa ra và giải một bài toán tổng quát hơn.

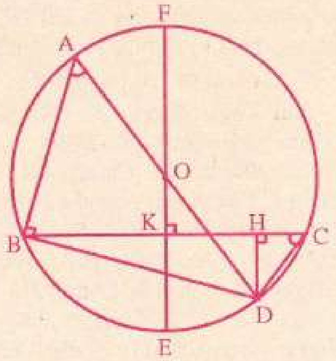
VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/284. *Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung BC<2R. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC, điểm D chuyển động trên cung nhỏ BC. Hãy xác định vị trí của điểm A và D để tổng* $\dfrac{1}{DA}+\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC}$ *đạt giá trị nhỏ nhất*

Lời giải. Với A, D bất kì thì $AD \le 2R$. Với mỗi điểm D trên cung nhỏ BC ta luôn chọn được điểm A trên cung lớn BC sao cho

$AD=2R$ để $\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{2R}$ là nhỏ nhất (1).

Kẻ $DH \perp BC$ tại H. Kẻ đường kính $EF \perp BC$ tại K (xem hình) thì E, F, K là các điểm cố định. Do



$\angle ABD=\angle CHD$ $=90^\circ$ và $\angle DAB=\angle DCB$ (cùng chắn cung BD) nên $\Delta ABD \backsim \Delta CHD$, suy ra

$\dfrac{DB}{DA}=\dfrac{DH}{DC}$ $\Leftrightarrow$ $DB.DC=2R.DH$ (2)

Ta có $DH+OK \le OD=OE=EK+OK \Rightarrow DH \le EK$ (3)

Sử dụng bất đẳng thức Côsi và (2) (3) ta được $\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{DB.DC}}=\dfrac{2}{\sqrt{2R.DH}}$

$$\ge \frac{2}{\sqrt{2R.EK}} \qquad (4)$$

Từ (1), (4) có $\dfrac{1}{DA}+\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC}$

$$\ge \frac{1}{2R}+\frac{2}{\sqrt{2R.EK}}=\frac{1}{2R}+\frac{2}{BE} \qquad (5)$$

(trong tam giác vuông EBF với đường cao BK có $EF.EK=BE^2$)

Vế phải của (5) là hằng số. Dấu đẳng thức ở (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu đẳng thức ở (3) và (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ DA trùng với đường kính EF ($EF \perp BC$).

Nhận xét. 1) Có nhiều cách tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC}$.

- Từ (3) có $DH \le EK \Leftrightarrow DH.BC \le EK.BC$ $\Leftrightarrow S_{DBC} \le S_{EBC} \Leftrightarrow DB.DC.\sin(180^\circ-\angle BDC)$ $\le EB.EC.\sin(180^\circ-\angle BEC) \Leftrightarrow DB.DC \le BE^2$.
- Kéo dài BD một đoạn $DG=DC$, suy ra $BD+DC$ $=BD+DG=BG \le BE+EG=BE+EC=2BE$ rồi dử dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC} \ge \dfrac{4}{DB+DC} \ge \dfrac{2}{BE}$
- Áp dụng định lí Ptôlêmê đối với tứ giác nội tiếp $BFCD$ được $DB.CF+DC.BF=BC.DF \Rightarrow (DB+DC)BF \le BC.2R \Rightarrow \dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC} \ge \dfrac{4}{DB+DC} \ge \dfrac{2BF}{R.BC}$

2) Không ít bạn biến đổi đến $\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC} \ge \dfrac{2}{\sqrt{DB.DC}}$ hoặc $\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC} \ge \dfrac{4}{DB+DC}$ đã vội kết luận ngay rằng vế trái đạt giá trị cực tiểu khi vế phải đạt giá trị cực

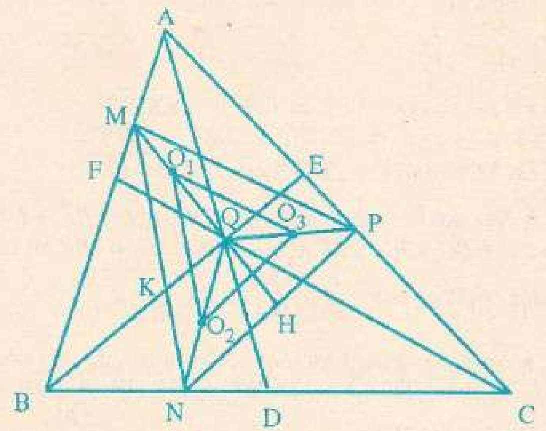
tiểu và dấu bằng xảy ra khi $DB = DC$. Lập luận này không đúng vì vế phải chưa là hằng số.

3) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Nguyễn Bá Gia*, 8A, THCS Tam Nông; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Anh Đông*, 9A, THCS DTNT Lập Thạch, *Phùng Văn Cường*, 8B, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Bình Minh*, 9B, THCS Yên Phong, *Phạm Thái Sơn*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx. Bắc Ninh; **Hà Tây:** *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, *Nguyễn Tuấn Dũng*, 9P, TH Marie Curie, Thanh Xuân; **Hải Dương:** *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Nam Định:** *Nguyễn Nhị Long*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, Tp. Nam Định, *Phạm Ngọc Lịch*, 8D, THCS Giao Hà, Giao Thủy, *Nguyễn Đăng Hợp*, *Ngô Huy Hoàng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Ninh Bình:** *Nguyễn Thành Luân*, 9A, THCS Đinh Tiên Hoàng, Tx. Ninh Bình, *Lê Hiền Vinh*, 9E, THCS TT Yên Ninh, Yên Khánh; **Hòa Bình:** *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị, *Nguyễn Lâm Tuyên*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Lạc Thủy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đình Dũng*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Phan Trung Kiên*, 8C, THCS TT. Nam Đàn; **Hà Tĩnh:** *Lê Minh Quang*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà, *Trần Việt Dũng*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân.

VIỆT HẢI

Bài T5/284. *Tam giác ABC có các đường phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AQF, BQD, CQE bằng nhau thì tam giác ABC là đều.*



Lời giải. Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác AQF, BQD và CQE tương ứng. Kéo dài QO_1, QO_2, QO_3 lần lượt cắt AB, BC, CA tại M, N, P. Theo giả thiết bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AQF, BQD, CQE bằng nhau nên suy ra $O_1O_2 // AD$, $O_1O_3 // CF$, $O_2O_3 // BE$ (1)

Mặt khác $\frac{MO_1}{MQ} = \frac{NO_2}{NQ} = \frac{PO_3}{PQ}$ (đều bằng $\frac{r_n}{r}$ ở đó r_n là bán kính các đường tròn nội tiếp nói trên còn r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC). Suy ra $O_1O_2 // MN$, $O_1O_3 // MP$, $O_2O_3 // NP$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $MN // AD$, $NP // BE$ và $MP // CF$.

Kéo dài MQ cắt NP tại H, BQ cắt MN tại K.

Ta có $\frac{MQ}{QH} = \frac{MK}{KN}$ (3)

Mặt khác $\frac{MK}{AQ} = \frac{KN}{QD} \left(= \frac{BK}{BQ}\right)$ nên $\frac{MK}{KN} = \frac{AQ}{QD}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{MQ}{QH} = \frac{AQ}{QD}$ (5)

Từ tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{BC} \quad (6)$$

Mặt khác $\angle MNQ = \angle NQD$, $\angle PNQ = \angle BQN$ mà $\angle BQN = \angle NQD$ nên $\angle MNQ = \angle PNQ$ tức NQ là phân giác ΔMNP. Tương tự MQ cũng là phân giác ΔMNP nên Q là tâm đường tròn nội tiếp ΔMNP. Cũng theo tính chất đường phân giác có

$$\frac{MQ}{QH} = \frac{MN}{NH} = \frac{MP}{HP} = \frac{MN+MP}{NP} \quad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) ta có :

$$\frac{AB+AC}{BC} = \frac{MN+MP}{NP}$$

Nên $\frac{AB+AC}{BC} + 1 = \frac{MN+MP}{NP} + 1$

Suy ra $\frac{NP}{BC} = \frac{MN+MP+NP}{AB+AC+BC}$

Tương tự $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{MN+MP+NP}{AB+BC+AC}$

nên $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC}$ tức $\Delta MNP \backsim \Delta ABC$.

Từ đó $\angle NMP = \angle BAC = \angle A$

Mặt khác $\angle NMP = \angle AQF = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$ Suy ra $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{C}}{2}$ tức $\hat{A} = \hat{C}$

Tương tự $\hat{B} = \hat{C}$.. Vậy ΔABC đều.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Hà Tây: *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương; **Hải Phòng:** *Trần Xuân Dũng*, 8A, THNK Trần Phú; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/284. *Chứng minh rằng không tồn tại đa thức P(x) bậc lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện : với mọi x nếu P(x) là số nguyên thì P(x+1) cũng là số nguyên.*

Lời giải. (của *Nguyễn Dư Thái*, 12CT, ĐHKH Huế, **Thừa Thiên Huế** và một số bạn khác)

Giả sử đa thức $P(x)$ có bậc $n \geq 2$ và hệ số cao nhất dương thỏa mãn điều kiện đã cho, ta gọi là có tính chất (*).

Đặt $\Delta^1 P(x) = P(x+1) - P(x)$

$\Delta^2 P(x) = \Delta^1 P(x+1) - \Delta^1 P(x)$

...

thì các đa thức $\Delta^1 P(x)$, $\Delta^2 P(x)$, ... cũng có tính chất (*).

Đặc biệt, đa thức bậc hai :

$$\Delta^{n-2} P(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a > 0$$

cũng có tính chất (*). Bằng cách đặt $x - \frac{b}{2} = t$; $\frac{4ac - b^2}{4a} = d$ ta có đa thức $f(t) = at^2 + d$ cũng có tính chất (*). Suy ra :

$$g(t) = f(t+1) - f(t) = 2at + a$$

cũng có tính chất (*).

Giả sử $g(t_o) \in \mathbf{Z} \Rightarrow g(t_o + 1) \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ $g(t_o + 1) - g(t_o) = 2a \in \mathbf{Z}$. Rõ ràng $\exists n \in \mathbf{N}$ sao cho $y = \sqrt{\frac{n-d}{a}}$ là số vô tỉ.

Khi đó :

$$f(y) = a \cdot \frac{n-d}{a} + d = n \in \mathbf{Z}$$

$f(y+1) = f(y) + 2ay + a$ là số vô tỉ, đpcm.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Lê Thị Hạnh Trang, 12A2, THPT Hai Bà Trưng, Mê Linh, Vĩnh Phúc, *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Thành Trung*, 10T, *Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương *Lê Minh Toàn*, 11T, chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**; *Phạm Đức Hiệp*, 11T, chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**; *Kim Đình Thái*, 11A1, chuyên Tin, ĐHSP **Hà Nội**; *Trần Anh Hoàng*, 11T chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/284. *Chứng minh rằng phương trình*

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 2 = 0 \qquad (1)$$

có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm đó

Lời giải. (của bạn *Trần Minh Mẫn*, 10T, THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình** và một số bạn khác).

Với $x \in [-1, 1]$, $x = \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ khi đó phương trình (1) tương đương $\cos 5\varphi + 2 = 0$.

Như vậy (1) không có nghiệm $x \in [-1, 1]$.

Trường hợp $|x| > 1$, tồn tại duy nhất $u \in R$, $|u| > 1$ mà $x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ ($u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ nếu $x > 1$, $u = x - \sqrt{x^2 - 1}$ nếu $x < -1$), khi đó

$$16x^5 = \frac{1}{2}\left[\left(u^5 + \frac{1}{u^5}\right) + 5\left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right) + 10\left(u + \frac{1}{u}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(u^5 + \frac{1}{u^5}\right) + 5\left(u + \frac{1}{u}\right)^3 - 5\left(u + \frac{1}{u}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(u^5 + \frac{1}{u^5}\right) + 20x^3 - 5x.$$

Do đó (1) tương đương với

$$\frac{1}{20}\left(u^5 + \frac{1}{u^5}\right) + 2 = 0.$$

Giải phương trình trên ta có $u^5 = -2 - \sqrt{3}$.

Vậy phương trình (1) có duy nhất một nghiệm thực $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-2 - \sqrt{3}} + \sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}}\right)$.

Nhận xét. 1) $T_n(x)$ là đa thức Trêbưsép loại 1 bậc n, tức là $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$, phương trình (1) có dạng $T_5(x) + 2 = 0$. Nếu $|x| > 1$, $x = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$, thì $T_n(x) = \frac{1}{2}\left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)$ (chứng minh bằng quy nạp theo n, dùng công thức $T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$).

2) Các bạn sau có lời giải tốt : **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, THPTNK Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** *Phạm Khắc Thanh*, 10B Toán, *Ngô Quốc Anh*, 12A Toán, PTCT, ĐHKHTN, *Nguyễn Thị Hồng Phượng*, 11T, PTCT, ĐHSP 1; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách*, *Nguyễn Anh Nguyên*, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Vũ Đình Đấu*, 11T, THPT NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Trần Viết Hưng*, 11T, THPT NK; **Thành Phố Hồ Chí Minh:** *Trần Anh Hoàng*, 11T, *Lương Thế Nhân*, 12T, PTNK, ĐHQG; **Tiền Giang:** *Nguyễn Thị Tuyết Nga*, 10A9, THPT Tân Hiệp, *Lư Minh Thái*, 10T, THPT chuyên; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Phan Thành Nam*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/284. *Cho dãy số (x_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi :*

$$x_o = a \text{ và } x_{n+1} = \frac{2^{x_n}(x_n\ln 2. - 1) + 1}{2^{x_n}.\ln 2 - 1} = 1.$$

Hãy tìm giới hạn (theo a) của dãy trên.

Lời giải. (của bạn *Lương Thế Nhân*, 12T, NK ĐHQG **Tp Hồ Chí Minh**).

Xét $f(x) = \dfrac{2^x(x\ln 2 - 1) + 1}{2^x \ln 2 - 1} = x + \dfrac{x + 1 - 2^x}{2^x\ln 2 - 1}$

Ta có : $f'(x) = - \dfrac{2^x (ln2)^2(x + 1 - 2^x)}{(ln2 \,.\, 2^x - 1)^2}$

Bảng biến thiên của $f(x)$ như sau :

x	$-\infty$		0		$\log_2\log_2 e$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	‖	↘	1	↗	

Như vậy :

- Nếu $a = \log_2\log_2 e$ thì dãy không xác định
- Nếu $a < \log_2\log_2 e$ thì $x_1 = f(x_o) = f(a) \le 0$ $\Rightarrow x_2 = f(x_1) \le f(0) = 0, ..., x_n = f(x_{n-1}) \le f(0) = 0$ $\forall n \in N^*$,

Lại có $x_n - x_{n-1} = \dfrac{x_{n-1} + 1 - 2^{x_{n-1}}}{2^{x_{n-1}}\ln 2 - 1}$ (2)

Vậy x_n là dãy tăng và bị chặn trên bởi 0.

Suy ra tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$. Dễ kiểm tra $\alpha + 1 = 2^\alpha \Rightarrow \alpha = 0$ (do $\alpha \le 0$)

- Nếu $a > \log_2\log_2 e$ thì $x_1 = f(x_o) = f(a) \ge 1$. Vậy $x_2 = f(x_1) \ge f(1) = 1$

Do đó $x_n = f(x_{n-1}) \ge f(1) = 1$, $\forall n \in N$ mà $x_n - x_{n-1} = \dfrac{x_{n-1} + 1 - 2^{x_{n-1}}}{2^{x_{n-1}}\ln 2 - 1} \le 0$ vì $x_{n-1} \ge 1$.

Do đó dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1. Vì vậy tồn tại $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \beta$. Suy ra $\beta + 1 = 2^\beta \Rightarrow$ $\beta = 1$ (do $\beta \ge 1$).

Kết luận :

- Nếu $a < \log_2(\log_2 e)$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.
- Nếu $a > \log_2(\log_2 e)$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$
- Nếu $a = \log_2(\log_2 e)$ dãy không xác định.

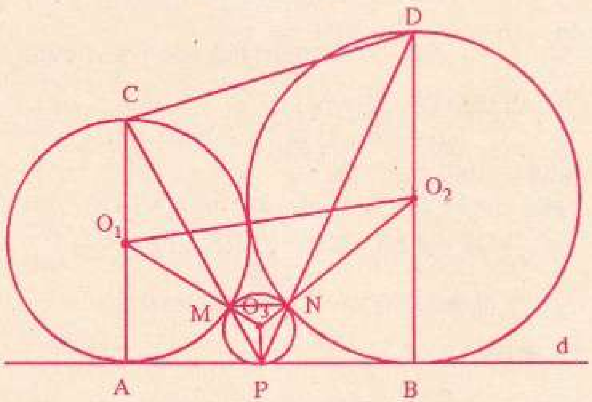
Nhận xét. Các bạn giải tốt : *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, Hà Nội, Amsterdam, **Hà Nội**; *Kim Đình Thái*, 11A1, ĐHSP **Hà Nội**, *Cao Tiến Đạt*, 11T, **Buôn Mê Thuột**, *Bùi Quang Nhã*, 10A1, Hùng Vương, **Phú Thọ**; *Vũ Đình Đấu*, 11T Trần Phú, **Hải Phòng**; *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Ngọc Đồng*, 11, Điện Bàn, **Quảng Nam**; *Trần Tiến Hoàng*, 11 Toán, Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**, *Lê Phương*, 10T1, Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/284. *Cho ba đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) và (O_3, R_3) với $R_3 < R_1 \le R_2$, cùng tiếp xúc với đường thẳng d và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Gọi M, N, P theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (O_3, R_3) với (O_1, R_1), (O_2, R_2) và d. Chứng minh rằng diện tích tam giác MNP bằng* $\dfrac{2R_3^2R_1R_2}{(R_3 + R_1)(R_3 + R_2)}$

Lời giải. (của bạn *Kim Đình Thái*, 11A1, PTCT-Tin, ĐHSP **Hà Nội**)

Giả sử d tiếp xúc với (O_1), (O_2) lần lượt tại A, B. Giả sử $PM \cap (O_1, R_1) = C \ne M$; $PN \cap (O_2, R_2) = D \ne N$. Dễ thấy CA, DB là đường kính của (O_1, R_1), (O_2, R_2) (xem hình vẽ).



Nhờ định lí Pitago dễ dàng chứng minh được các đẳng thức sau :

$AP = 2\sqrt{R_1R_3}$; $BP = 2\sqrt{R_2R_3}$; $AB = 2\sqrt{R_1R_2}$

Vì $AP + BP = AB$ nên :

$$\sqrt{R_3}\,(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) = \sqrt{R_1R_2} \qquad (1)$$

Mặt khác :

$$S(MNP) = \frac{PM}{PC} \cdot \frac{PN}{PD} \,.\, S(PCD)$$

Vì $PO_3 // AC // BD$ nên :

$$\frac{PM}{PC} \cdot \frac{PN}{PD} = \frac{R_3^2}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3)}$$

Vậy :

$$S(MNP) = \frac{R_3^2}{(R_1+R_3)(R_2+R_3)} \cdot S(PCD) \quad (2)$$

Ta có :

$$S(PCD) = S(ACDB) - S(ACP) - S(BDP)$$
$$= \frac{1}{2}(AC+BD)AB - \frac{1}{2}AC.AP - \frac{1}{2}BD.BP$$
$$= \frac{1}{2}AC(AB-AP) + \frac{1}{2}BD(AB-BP)$$
$$= \frac{1}{2}AC.BP + \frac{1}{2}BD.AP$$
$$= R_1.2\sqrt{R_2R_3} + R_2.2\sqrt{R_1R_3}$$
$$= 2\sqrt{R_3}(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})\sqrt{R_1R_2}$$
$$= 2\sqrt{R_1R_2}\,.\,\sqrt{R_1R_2} = 2R_1R_2 \text{ (theo (1))}$$

Từ (2) và (3) suy ra :

$$S(MNP) = \frac{2R_3^2 R_1R_2}{(R_1+R_3)(R_2+R_3)} \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách giải khác nhau. Tuy nhiên, còn nhiều bạn giải dài, một số bạn giải quá dài.

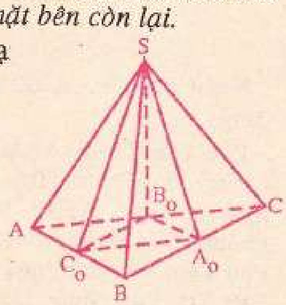
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thái Bình: *Lưu Hoài Nam*, 11A8, THPT Phụ Dực, Quỳnh Phụ; **Nam Định:** *Nguyễn Minh Đức*, 11B3, THPT A Hải Hậu; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Phan Đức Tuấn*, 10Q, THPT Hà Huy Tập; **Vĩnh Phúc:** *Lê Thiên Hạnh Trang*, 12A1, THPT Hai Bà Trưng, Mê Linh; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Hà Nội Amsterdam, *Đinh Ngọc Thắng*, 10AT, ĐHKHTN, *Đặng Đình Khánh*, 101, Khối PTCT-Tin, ĐHSP ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, PTNK, ĐHQG.

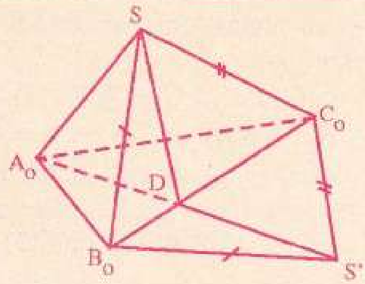
NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/284. *Cho hình chóp SABC. Chứng minh rằng nếu các trung tuyến của các tam giác SAB, SBC, SCA kẻ từ đỉnh S tạo với các cạnh đáy AB, BC, CA những góc không tù bằng nhau thì diện tích của mỗi mặt bên nhỏ hơn tổng diện tích các mặt bên còn lại.*

Lời giải. (của nhiều bạ



Gọi φ là góc tạo bởi các trung tuyến SA_o, SB_o, SC_o với các cạnh đáy BC, CA, AB. Để ý rằng $\varphi \le \frac{\pi}{2}$ (theo định nghĩa của góc giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng cũng như trong không gian).



Vì vai trò của các mặt bên là bình đẳng nên ta chỉ cần chứng minh, chẳng hạn :

$s(SBC) < s(SCA) + s(SAB)$; (1)

Dễ thấy rằng (từ công thức tính diện tích tam giác)

(1) $\Leftrightarrow B_oC_o.SA_o < C_oA_o.SB_o + A_oB_o.SC_o$ (2)

Nhưng (2) và hai BĐT tương tự chính là nội dung của BĐT Ptôlêmê tổng quát đối với một tứ điểm $\{S, A_o, B_o, C_o\}$ bất kì không đồng phẳng : "Trong một tứ điểm bất kì, tích độ dài các cạnh đối diện biểu thị số đo độ dài các cạnh của một tam giác **T** nào đó ; **T** suy biến thành đoạn thẳng khi và chỉ khi tứ điểm được xét đồng viên (cùng thuộc một đường tròn) hoặc thẳng hàng".

Có nhiều cách chứng minh BĐT Ptôlêmê tổng quát đối với một tứ điểm bất kì (đồng phẳng hay không đồng phẳng). Chẳng hạn, nhiều bạn đã sử dụng phép nghịch đảo cực S, phương tích $p > 0$ tùy ý mà để cho tiện, có thể lấy $p = 1$.

Sau đây là một cách chứng minh BĐT Ptôlêmê tổng quát đối với một tứ điểm $\{S, A_o, B_o, C_o\}$ không đồng phẳng dựa vào BĐT Ptôlêmê trong mặt phẳng và BĐT tam giác.

Trên mặt phẳng $(A_oB_oC_o)$ dựng điểm S' sao cho S' nằm khác phía với A_o đối với đường thẳng (B_oC_o) và $B_oS' = B_oS$, $C_oS' = C_oS$. Điều đó cũng có nghĩa là trải mặt SB_oC_o của tứ diện $SA_oB_oC_o$ lên mặt đáy $A_oB_oC_o$ đến vị trí $S'B_oC_o$ sao cho S nằm khác phía với A_o đối với đường thẳng B_oC_o (bằng cách thực hiện phép quay tam giác SB_oC_o xung quanh trục B_oC_o một góc bằng góc bù của góc nhị diện cạnh B_oC_o của tứ diện $SA_oB_oC_o$ để đến trùng với nửa mặt phẳng bù của nửa mặt phẳng $[B_oC_oA_o)$ có bờ là B_oC_o).

Gọi $D = (B_oC_o) \cap [A_oS']$, thế thì dễ thấy rằng $DS = DS'$, từ đó suy ra : $SA_o < A_oD + DS = A_oS'$ và do đó : $B_oC_o.SA_o < B_oC_o.S'A_o$

(3) Mặt khác, với tứ điểm phẳng $\{S', A_o, B_o, C_o\}$ ta có BĐT Ptôlêmê trong mặt phẳng

(xem chứng minh ở THTT số 263 (5/1999) trang 11) :

$$B_oC_o.S'A_o \le C_oA_o.S'B_o + A_oB_o.S'C_o \Rightarrow$$

$$B_oC_o \,.\, S'A_o \le C_oA_o \,.\, SB_o + A_oB_o \,.\, SC_o \quad (4)$$

Cuối cùng, từ (3) và (4) ta thu được BĐT Ptôlêmê tổng quát (2) cần tìm. Để ý rằng dấu đẳng thức không xảy ra ở (3) nên cũng thể xảy ra ở (2).

Nhận xét. 1) Bạn *Hoàng Xuân Quang*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc có nhận xét rằng bài toán trên đây đã được giới thiệu trong "Tuyển tập đề thi Olympic 30-4, năm 2000" và đã có lời giải trong cuốn sách đó rồi. Bạn Quang không trình bày lại lời giải đó. Tuy nhiên bạn Quang và một số bạn khác sau khi sử dụng định lí hàm số côsin và công thức đường trung tuyến (hoặc có bạn sử dụng công thức $a^2 = b^2+c^2 - 4S\text{cotg}A$, trong tam giác ABC) và giả sử rằng $SA \le SB \le SC$ đã thiết lập được các hệ thức :

$$\frac{SC^2 - SB^2}{s(SBC)} = \frac{SC^2 - SA^2}{s(SCA)} = \frac{SB^2 - SA^2}{s(SAB)} = 4\text{cotg}\varphi \ (*)$$

trong đó : $\varphi = \angle(BC, SA_o) = \angle(CA, SB_o) = \angle(AB, SC_o)$ theo giả thiết ($0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$). Từ các hệ thức (*) này suy ra :

Nếu $\varphi \ne \frac{\pi}{2}$ (tức là $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) thì $s(SAB) + s(SBC) = s(SCA)$!

Kết quả này mâu thuẫn với đpcm đưa ra trong bài toán. Như vậy phải chăng nhất thiết xảy ra $\varphi = \frac{\pi}{2}$?

Đây là một câu hỏi khá thú vị. Nhưng, trước hết bạn Quang cũng như các bạn hãy tự trả lời câu hỏi này. Việc trả lời câu hỏi này đưa các bạn đến một bài toán mới lí thú sau đây : Chứng minh rằng nếu các cạnh đối diện của một tứ diện tạo với nhau những góc bằng nhau thì góc đó phải là góc vuông và tứ diện là một tứ diện trực tâm (các đường cao đồng quy).

2) Kết hợp với bài toán "mới" vừa nêu ở trên, chúng ta có thể thấy rằng hai bài toán của tác giả Ngô Thế Phiệt chính là lời giải hình học của bài toán sau đây : Gọi x, y và z là độ lớn (đo bằng radian) các mặt của một góc tam diện bất kì. Chứng minh rằng $\sin x$, $\sin y$ và $\sin z$ biểu thị số đo các cạnh của một tam giác không suy biến T nào đó. Các bạn hãy thử tìm cách giải bài toán "mới" thứ hai vừa nêu bằng phương pháp thuần túy đại số và lượng giác.

3) Các bạn *Bùi Việt Dũng, Phạm Văn Hùng*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội, *Lưu Vũ Thanh Hương*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An đã chứng minh được $\varphi = \frac{\pi}{2}$, đồng thời đưa ra hai lời giải (hình học và lượng giác) bài toán trên của bốn bạn nói trên. Bạn Quang đã phát hiện được vấn đề để nghiên cứu tuy chưa giải đáp được triệt để. Đáng tiếc, có đến khoảng trên dưới 10 bạn cũng tính toán như bạn Quang hoặc đã gò để suy ra đpcm mà không thấy sai lầm ở đâu đã vội vàng sửa lại kết quả như sau : Diện tích mỗi mặt bên không lớn hơn tổng diện tích hai mặt bên còn lại (!!!). Thật là tai hại (chỉ vì tác phong suy nghĩ hời hợt, vội vàng, thiếu đào sâu vấn đề).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/284. *Một tấm ván có chiều dày h được giữ cố định trong mặt phẳng thẳng đứng. Một viên đạn bay theo phương ngang vuông góc với mặt tấm ván và xuyên qua tấm ván. Vận tốc của viên đạn giảm từ v_o đến v. Biết rằng lực cản của tấm ván tỉ lệ với bình phương vận tốc viên đạn. Tính thời gian chuyển động của viên đạn trong tấm ván (bỏ qua tác dụng của trọng lực đối với viên đạn).*

Hướng dẫn giải. Do bỏ qua tác dụng của trọng lực nên viên đạn chỉ chịu tác dụng của lực cản $F_c = -kv^2$, với k là hệ số tỉ lệ.

Chiếu phương trình của định luật II Niutơn lên phương chuyển động ta có :

$$-kv^2 = ma = m\frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Chọn gốc thời gian là lúc viên đạn bắt đầu xuyên vào tấm ván : lúc $t = 0$, $v = v_o$, từ (1) ta có : $\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$, rút ra $t = \frac{m}{k}\frac{(v_o - v)}{vv_o}$ (2)

Áp dụng định lí động năng :

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = +F_c dh \Rightarrow \frac{m}{k}\frac{dv}{v} = -dh$$

$$\Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{h}{\ln\frac{v_o}{v}} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được thời gian viên đạn chuyển động trong tấm ván : $t = \frac{h(v_o - v)}{v_o v \ln(\frac{v_o}{v})}$

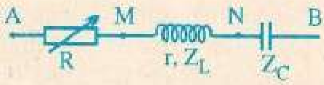
Nhận xét. Các em có lập luận chặt chẽ và lời giải đúng :

Phú Yên: *Lê Anh Nhân*, 11 chuyên lí, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa ; **Nghệ An:** *Lê Minh Nguyên*, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Phú Thọ:** *Vũ Quốc Huy*, 12 Lí, chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Đặng Thị Thanh Xuân*, 11A2, THPT Hàn Thuyên; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11 Lí, NK Hàn Thuyên; **Hải Dương:** *Hoàng Trung Trí*, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Hưng*, 11A3, *Trần Ngọc Thanh*, 10B3, *Dương Mạnh Cường*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 11 Lí 1, *Trần Hữu Hiếu*, 11 Lí 3, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Nam Định:** *Đỗ Thị Lan Hương*, 11A, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên.

MAI ANH

Bài L2/284. *Đặt một hiệu điện thế $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ với U, ω không đổi vào đoạn mạch AB (hình bên), người ta thấy khi điều chỉnh biến trở đến giá trị R = 75(Ω) thì đồng thời có:*

– Biến trở R tiêu thụ công suất lớn nhất.



– Thêm bất kì một tụ điện C' nào vào đoạn NB, dù nối tiếp hay song song với tụ điện C vẫn thấy U_{NB} giảm.

Hãy tính r, Z_L, Z_C, Z biết rằng chúng đều có trị số (Ω) nguyên.

Hướng dẫn giải. Công suất tiêu thụ trên R :

$$P = \frac{U^2R}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_c)^2} = \frac{U^2}{R + \dfrac{(Z_L - Z_C)^2 + r^2}{R} + 2r};$$

và
$$U_{NB} = \frac{UZ_c}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{(R+r)^2 + Z_L^2}{Z_C^2} - 2\dfrac{Z_L}{Z_C} + 1}}$$

Theo đề bài P và U_{NB} đạt giá trị cực đại. Muốn vậy phải có :

$$R^2 = (Z_C - Z_L)^2 + r^2 \quad (1),$$

và
$$Z_C Z_L = (R + r)^2 + Z_L^2 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $r < R = 75\Omega$, và

$$(Z_L - Z_C)^2 = R^2 - r^2$$

Từ đó tổng trở mạch

$$Z = \sqrt{(R + r^2)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{2R(R + r)}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{150(75+r)} = 5\sqrt{6(75+r)} \quad (3)$$

Để r và Z là số nguyên thì $75 + r = 6k^2$ (4), với k nguyên. Vì $0 < r < 75\Omega$ nên từ (4) rút ra

$$75 < 6k^2 < 150 \Rightarrow 3{,}53 < k < 5$$

$$\Rightarrow k = 4 \Rightarrow r = 21\Omega \Rightarrow Z = 120\Omega.$$

Ngoài ra, từ (2) ta có

$$Z_L(Z_C - Z_L) = (R+r)^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow Z_C > Z_L.$$

Vì vậy từ (1) ta có

$$Z_C - Z_L = \sqrt{R^2 - r^2} = 72 \quad (6)$$

và từ (5) và (6) tìm được $Z_L = 128\Omega$ và $Z_C = 200\Omega$.

Nhận xét. Các em có lời giải chặc chẽ và đúng :

Nghệ An: *Nguyễn Xuân Trung*, 12G, THPT Huỳnh Thúc Kháng, *Hồ Việt Hùng*, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Khoa*, 11 Lí - Hóa, THPT Lê Khiết; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11 Lí NK, THPT Hàn Thuyên; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT Trần Phú; **Phú Thọ:** *Vũ Quốc Huy*, 12 Lí, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Thanh Hà*, 11A, THPT Hà Trung; **Hải Dương:** *Trần Thị Bạch Dương*, 11B2, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hải*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** *Giang Sơn Đạt*, 11 Toán, THPT NK Hoàng Văn Thụ; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 12T, THPT Trần Cao Vân, Tam Kì; **Hà Nam:** *Trần Gia Phương*, 12 Lí, THPT chuyên Hà Nam.

MAI ANH

ĐÓN ĐỌC THTT số 289 (7-2001)

• Mùa hè đã đến, mời các bạn tham gia *Cuộc thi Vui hè 2001* của THTT và giải trí bằng các bài toán vui, ngụy biện.

• Trong hội họa có ẩn dấu đường xoắn ốc vàng ?

• Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia THPT năm 2000.

• Nhìn ra thế giới : Đề thi Olympic toán của Singapo.

Các bài đọc nâng cao kiến thức :

• Một dạng mở rộng của bất đẳng thức Nesbit

• Thiết lập bất đẳng thức mới từ bất đẳng thức Ptôlêmê.

Các bạn đừng quên... đặt mua THTT quý 3-2001 nhé !

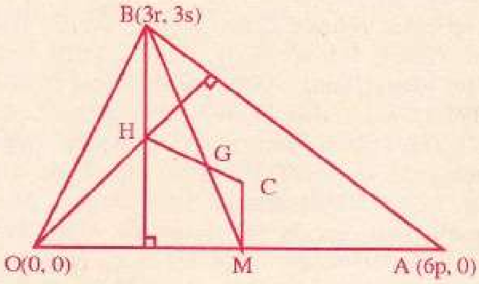
THTT

DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐỊNH LÍ HÌNH HỌC

ĐỖ ĐỨC BÌNH
(GV. THPT Lam Sơn - Thanh Hóa)

Chúng ta đã từng nghe nói : máy tính biết đánh cờ, biết soạn nhạc, v.v... Bài báo này sẽ giới thiệu với các bạn về máy tính biết chứng minh các định lí hình học.

Chúng ta hãy xét một định lí hình học cụ thể, chẳng hạn, định lí về đường thẳng Ơle: "*Trong một tam giác thì trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp là 3 điểm thẳng hàng*".



Để có thể chứng minh được định lí này bằng máy tính, trước hết ta cần biểu diễn giả thiết và kết luận của định lí thành các phương trình đa thức nhiều ẩn. Ta phải dùng các ẩn số để biểu diễn tọa độ một số điểm cho trước vì hình vẽ của ta biến thiên trên mặt phẳng.

Giả sử ΔOAB có H là trực tâm, G là trọng tâm và C là tâm đường tròn ngoại tiếp. Lấy hệ trục tọa độ Oxy có gốc tại O và tia OA chính là trục hoành. Để việc tính toán cho gọn, ta có thể đặt tọa độ các đỉnh của ΔOAB như sau : $O = (0, 0)$; $A = (6p, 0)$; $B = (3r, 3s)$.

Khi đó dễ dàng thấy rằng tọa độ các điểm còn lại có thể đặt là :

$C = (3p, q)$; $G = (2p + r, s)$ và $H = (3r, u)$.

ở đây các biến p, r, s có thể lấy tùy ý mà ta gọi là các biến *độc lập*, còn các biến q, u không thể tùy ý được mà nó phụ thuộc vào các biến p, r, s ta gọi nó là các biến *phụ thuộc*.

Bây giờ ta sẽ biểu diễn giả thiết và kết luận của định lí thành các phương trình đa thức như sau :

Với cách đặt tọa độ của C, ta có ngay $CO = CA$, vì vậy để C là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB cần và đủ là $CO = CB$, điều này tương đương với phương trình :

$(3p-3r)^2 + (q-3s)^2 - 9p^2 - q^2 = 0$ hay $h_1 = 0$ (1)

Với cách đặt tọa độ của H, ta lại có ngay $BH \perp OB$, do đó để H là trực tâm ΔOAB ta chỉ cần điều kiện $OH \perp AB$ nữa là đủ. Sử dụng tích vô hướng ta thấy ngay rằng điều này tương đương với phương trình :

$$3r(2p - r) - us = 0 \text{ hay } h_2 = 0 \quad (2)$$

Vậy giả thiết của định lí chỉ gói gọn trong 2 hệ phương trình (1), (2). Cuối cùng ta biểu diễn kết luận của định lí : H, G, C thẳng hàng và chỉ khi các véctơ $\vec{GC} = (p-r, q-s)$ và $\vec{GH} = (2r-2p, u-s)$ là véctơ cộng tuyến. Điều này tương đương với phương trình :

$(p-r)(u-s) - (2r-2p)(q-s) = 0$ hay $g = 0$ (3)

Chú ý các phương trình $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $g = 0$ là những phương trình đa thức nhiều ẩn (5 ẩn), nghiệm của mỗi phương trình là các bộ gồm 5 số, trong đó các ẩn p, r, s lấy giá trị tùy ý.

Định lí hình học của ta là đúng nếu từ hệ :

$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases} \text{ ta suy ra được } g = 0.$$

Điều này dẫn tới nhận xét sau : Nếu tồn tại các đa thức f_1, f_2 và số nguyên dương t sao cho :

$$g^t = f_1h_1 + f_2h_2 \quad (4)$$

thì định lí sẽ đúng. Thật vậy, rõ ràng từ $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ thì từ (4) ta suy ra $g^t = 0$ và do đó $g = 0$.

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng
ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?
Họ và tên :
. . . .
Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

Biểu thức (4) nói rằng đa thức g^t được biểu thị bằng tổ hợp tuyến tính của các đa thức h_1, h_2. Với hệ thức (4), ta lại có thể viết :

$1 = g^t . z^t + (1 - g^t z^t) =$

$= z^t(f_1h_1 + f_2h_2) + (1 - gz)(1 + gz + ... + g^{t-1} z^{t-1})$

hay $1 = z^t . g_1.h_1 + z^t f_2 h_2 + (1 - gz)(1 + gz + ... + g^{t-1} z^{t-1})$

Điều này lại chứng tỏ 1 được biểu thị bằng tổ hợp tuyến tính của các đa thức h_1, h_2, $1 - gz$. Trong lí thuyết chia đa thức, điều này có nghĩa là phần dư khi đem chia 1 cho hệ đa thức $(h_1, h_2, 1 - gz)$ là bằng 0. Để tìm phần dư này trên máy tính, ta phải có một phần mềm chuyên dụng, chẳng hạn phần mềm đại số CoCoA (phần mềm CoCoA do một nhóm các nhà toán học ở trường ĐHTH Giênoa - Italia xây dựng để giải các bài toán về đa thức. Phần mềm này được cung cấp miễn phí trên mạng Internet theo địa chỉ cocoa@dima.unige.it. Với phần mềm này, ta yêu cầu máy thực hiện lệnh sau :

NF (1, Ideal $(h_1, h_2, 1 - gz)$;

Máy cho ta kết quả là 1, điều này trái với mong muốn của ta là kết quả phải là 0. Tại sao vậy ? Hãy kiểm tra lại từ đầu, định lí của ta không phải là hoàn toàn đúng với mọi giá trị của các biến độc lập p, r, s. Chẳng hạn khi $r = s = 0$ thì đỉnh B trùng với đỉnh O, lúc này trọng tâm, trực tâm nằm trên đoạn OA còn tâm đường tròn ngoại tiếp có thể ở bất cứ đâu trên đường trung trực của OA, nghĩa là 3 điểm này không thẳng hàng. Những trường hợp mà định lí không còn đúng ta gọi là những trường hợp suy biến của định lí. Để tìm các giá trị của các biến *độc lập* p, r, s làm định lí suy biến, trong Hình học đại số người ta đã chứng minh được rằng giá trị của các biến số p, r, s đó là nghiệm của các đa thức thuộc tập hợp I là giao các tập hợp sau đây :

$I = (h_1, h_2, 1 - gz) \cap R[p, r, s]$.

Ở đây cần giải thích thêm là : Tập hợp $(h_1, h_2, 1 - gz)$ là gồm tất cả các tổ hợp tuyến tính của 3 đa thức h_1, h_2, $1 - gz$ còn $R[p, r, s]$ là vành đa thức 3 biến số p, r, s.

Để tìm tập hợp I, với phần mềm CoCoA ta chỉ cần yêu cầu máy thực hiện lệnh sau đây :

Elim(z..q, Ideal $(h_1, h_2, 1 - gz)$;

Máy cho ta kết quả I = Ideal $(s, 3pr - \frac{3}{2}r^2)$.

Như vậy định lí của ta chỉ sai khi :

$$\begin{cases} s = 0 \\ 3pr - \frac{3}{2}r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} s = 0 \\ r = 0 \end{cases} (*) \\ \\ \begin{cases} s = 0 \\ r = 2p \end{cases} (**) \end{array} \right.$$

(Xem tiếp trang 24)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 42

Problem. Two points on a sphere of radius 1 are joined by an arc of length less than 2, lying inside the sphere. Prove that the arc must lie in some hemisphere of the given sphere.

Solution. Let A and B denote the endpoints of the arc. Let A' be the intersection point of the line passing through B and the center O with the sphere. Consider the plane h which passes through O and which is perpendicular to AA'. Then A' is the image of A across of h. Note that if X is any point in h, then $AX = A'X$. It is impossible for any arc AB of length less than 2 to contain any point belonging to h because if the arc AB contains such a point X, then

$$\text{arc } AX + \text{arc } XB \geq AX + XB = A'X + XB,$$

and by the triangle inequality,

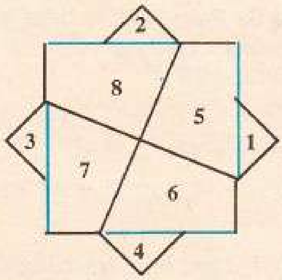
$$A'X + XB \geq A'B = 2.$$

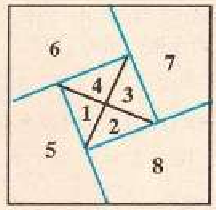
Therefore, A, B lie in the same hemisphere produced by the plane h.

Từ mới:

sphere	= mặt cầu
radius	= bán kính
join	= nối liền (động từ), nối
arc	= cung tròn
inside	= bên trong
length	= độ dài
lie	= nằm (động từ
hemisphere	= nửa mặt cầu
endpoint	= điểm mút
intersection point	= giao điểm
line	= đường thẳng
center	= tâm điểm, tâm
plane	= mặt phẳng
perpendicular	= vuông góc (tính từ)
image	= ảnh
across	= đối diện (giới từ)
note	= ghi nhớ, lưu ý (động từ)
impossible	= không thể xảy ra, không thể có (tính từ)
belong	= thuộc vào (động từ)
triangle inequality	= bất đẳng thức tam giác
roduce	= tạo ra (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG





Kết quả CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

(Số 286 - 4/2001)

Rất nhiều bạn đoán sai, thậm chí có bạn nhận ra người trong ảnh là ... Lương Thế Vinh (?). Chỉ có 5 bạn đoán đúng người trong ảnh là PGS. TS Nguyễn Đăng Phất, nhưng chẳng có ai đoán đúng tuổi.

Tấm ảnh này thầy Nguyễn Đăng Phất chụp khi mình mới... 24 tuổi.

Ban tổ chức vẫn quyết định trao tặng phẩm cho 5 bạn biết người và đoán gần đúng tuổi là :

1) *Phạm Thị Thanh*, lớp KT 26E, trường Trung học Thương mại Trung ương 5, Tp. Thanh Hóa, (đoán : 20 tuổi).

2) *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Tx. Hà Đông, Hà Tây (đoán : 28 tuổi).

3) *Đào Khả Tuấn*, 10B2, THPT Triệu Sơn II, Thanh Hóa (đoán : 36 tuổi).

4) *Bùi Cao Cường*, 11I1, THPT Long Châu Sa, Thị trấn Lâm Thao, Phú Thọ (đoán : 43 tuổi).

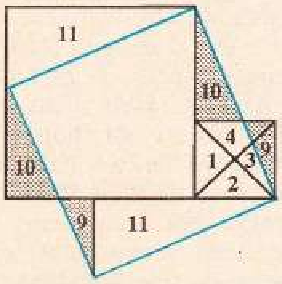
5) *Lê Thị Thu Trang*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương (đoán : 46 tuổi).

Xin mời các bạn tiếp tục tham dự cuộc thi.

CLB

CẮT VÀ GHÉP

Nhiều bạn từ hình đã cho cắt và ghép để được *2 hình vuông* hoặc *1 hình chữ thập* rồi từ đó mới cắt, ghép được *1 hình vuông*. Một số bạn cắt thành quá nhiều mảnh. Các bạn có cách cắt và ghép đơn giản là : *Nguyễn Văn Hữu*, 9A2, THCS thị trấn Tiên Lãng, Hải Phòng; *Nguyễn Ngọc Sáng*, 10C, THPT Phan Đình Phùng, Hà Tĩnh, *Lê Trọng Châu*, 8E1, THCS Bình Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh, *Nguyễn Tôn Phong*, 12C1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar, Đắc Lắc.



LTN

Kết quả HÀI LÒNG ... CHƯA ?

Một số lượng "bác sĩ" khổng lồ đã tham gia phát hiện và giải quyết tốt "ca bệnh này" này. Tất cả đều nhất trí có một "khối... u" ở vị trí sau đây :

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \Rightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 < (2bc)^2 .$$

Chỉ cần tam giác ABC có góc A tù hay $b^2+c^2-a^2<0$ và "khối ... u" này sẽ gây "nhức nhối" ... lời giải.

DÙNG MÁY TÍNH *(Tiếp trang 23)*

Ta hãy xem ý nghĩa của các điều kiện (*) và (**) là gì ?

Điều kiện (*) : $\begin{cases} s = 0 \\ r = 0 \end{cases}$ khi đó $B \equiv O$,

còn điều kiện (**) : $\begin{cases} s = 0 \\ r = 2p \end{cases}$ khi đó $B \equiv A$.

Tức là định lí về đường thẳng Ơle cho ΔOAB chỉ sai trong 2 trường hợp: khi $B \equiv O$ hay $B \equiv A$.

Như vậy bằng máy tính chúng ta hoàn toàn có thể kiểm tra được sự đúng đắn của một định lí hình học, máy tính đã giúp chúng ta chỉ rõ một định lí hình học đúng khi nào và sai trong những trường hợp nào.

Bài báo này chủ yếu có tính chất giới thiệu, bạn đọc nào muốn hiểu sâu sắc hơn hãy trang bị cho mình những kiến thức cơ bản về môn Hình học đại số và Đại số máy tính. Những chuyên gia hàng đầu về các lĩnh vực này ở Việt Nam là các nhà toán học đang làm việc tại Phòng Đại số và Lí thuyết số thuộc Viện Toán học Việt Nam.

Các "bác sĩ" đều quyết định giải lại và cho nhiều lời giải :

Cách 1. Vì $0 < A < \pi$ nên $|\cos A| < 1$

$\Rightarrow 2bc|\cos A| < 2bc \Rightarrow (2bc\cos A)^2 < (2bc)^2$

$\Rightarrow (b^2 + c^2 - a^2)^2 < (2bc)^2$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

Cách 2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2 < 0$

$\Leftrightarrow (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a) < 0$

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Tuy nhiên, đa số các "bác sĩ" chỉ tập trung giải quyết "bệnh" nặng mà chưa chăm sóc "kĩ" bệnh nhân, bỏ qua "bệnh ngoài ra" (lỗi in ấn) ở dòng cuối cùng.

Xin biểu dương các "y gia" : *Nguyễn Trọng Trường*, thôn Mai Trung, Mai Đình, Hiệp Hòa, **Bắc Giang**, *Nguyễn Xuân Khánh*, 11A1, THPT Ngọc Tảo, (?) ; *Hà Phương Thảo*, 9A, THCS Thanh Sơn, Thị trấn Thanh Sơn, Đỗ *Việt Cường*, 8D, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**, *Trương Xuân Kỳ*, xóm Yên Luốm, Đồng Nai, Châu Giang, Quỳ Hợp, **Nghệ An** ; *Phạm Kim Hoàng*, 10A1, THPT Trần Nguyên Hãn, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**, *Võ Thông Thái*, 8^3, trường cấp 2-3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.

KIHIVI

HAI CÁCH ĐÚNG CẢ HAY SAO ?

Trong một cuốn sách của NXB Trẻ có bài toán như sau : *Chứng minh rằng* $\forall n \in R$, $n \geq 2$ *thì*:

$$2 - \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n}$$

Tác giả cuốn sách đó đã giải 2 cách như sau :

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương gồm 1 số là n, và $n-1$ số là 1 ta có :

$$\frac{n + (n-1)}{n} \geq \sqrt[n]{n} \Rightarrow 2 - \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức không xảy ra vì $n \geq 2$.

Cách 2. Xét $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được xác định : $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ và $v_n = \sqrt[n]{n}$ Ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $(n-2)$ số bằng 1 và 2 số là $\sqrt{n}$ thì

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}$$

$$\leq \frac{(n-2) + 2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

Mặt khác $n \geq 2$ nên $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có :

Kết quả CHƠI CỜ

Hầu hết các bạn làm đúng như sau :

Bắt đầu từ ngày đầu tuần, kí hiệu a_i là tổng số các ván cờ mà người đó chơi tính hết ngày thứ i. Xét 21 số a_i với $i = 1; 2; ...; 21$. Từ giả thiết ta có : $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{21} \leq 39$. Theo nguyên tắc Đirichlê thì tồn tại a_k và a_j trong 21 số trên sao cho $k < j$ và $a_j - a_k$ chia hết cho 20. Nhưng $0 < a_j - a_k < 39$ nên $a_j - a_k = 20$. Vậy tổng số các ván cờ từ ngày thứ $k + 1$ đến hết ngày thứ j đúng bằng 20.

Nhận xét. Có bạn xét 20 số và dẫn đến thêm một trường hợp có số chia hết cho 20 nên số này đúng bằng 20. Nhiều bạn không nói rõ là "*tính từ ngày đầu tuần*" nên chưa chặt chẽ. Có bạn phải xét tới 154 ngày liên tiếp và xét tới 308 số (thêm các số $a_i + 20$). Các bạn có lời giải tốt là : *Nguyễn Minh Hải*, 11B, THPT Quảng Ninh, **Quảng Bình**; *Tạ Tiến Đạt*, 9C, THCS Lê Lợi, Tx.Hà Đông, **Hà Tây**, *Phan Thành Nam*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tx. Tuy Hòa, **Phú Yên**; *Tạ Thị Nhã Quyên*, 8A, THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.

NGỌC MAI

CÓ AI ĐƯỢC 10 TỈ ĐỒNG ?

Một người đã tuyên bố rằng sẽ tặng thưởng 10 tỉ đồng cho ai giúp ông ta tìm được một số có 7 chữ số sao cho số đó cộng với số được viết bởi các chữ số của số ấy nhưng theo thứ tự ngược lại mà cho tổng hai số này là số có 7 chữ số và các chữ số của tổng đều lẻ. Liệu có ai được thưởng ?

TẠ THẬP

$$1 < \sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Lại có : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ hay $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 > 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ nên $u_n \geq v_n$ với $n \geq 2 \Rightarrow$ đpcm.

Ta thấy rằng cách 1 rất ngắn gọn nhưng cách 2 lại dài và khó hiểu hơn. Vậy cách nào đã mắc sai lầm ? Mời các "bác sĩ bán chuyên nghiệp" cùng "bắt mạch, kê đơn".

NGUYỄN VĂN BẰNG

(Lớp 10B Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Cuộc thi VUI HÈ 2001

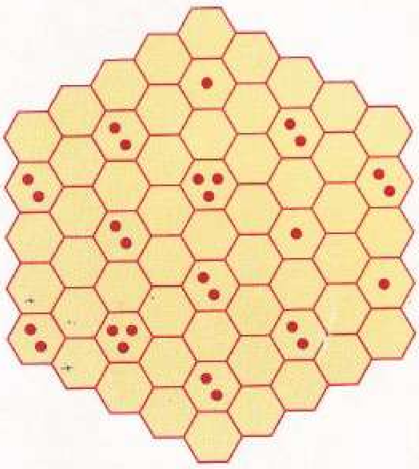
Cuộc thi Mini Vui hè 2001 sẽ giúp bạn giải trí và thư giãn để có thể học tốt hơn. Cuộc thi cũng dành cho mọi người không còn ngồi trên ghế nhà trường. Số báo này (288 /6.2001) đăng 3 bài toán. Bạn cần giải mỗi bài trên một tờ giấy và gửi về tòa soạn trước ngày 31.7.2001 trong một phong bì. Số báo sau (289 /7.2001) sẽ đăng 3 bài tiếp và hạn nhận bài là không chậm hơn ngày 31.8.2001 (căn cứ vào dấu bưu điện). Kết quả cuộc thi sẽ được công bố trên số báo 292 / 10.2001. Phía trên mỗi bài giải, bạn cần ghi chính xác địa chỉ nơi ở cùng địa chỉ lớp, trường, huyện tỉnh hoặc cơ quan mình. Ngoài phong bì cần ghi :

DỰ THI VUI HÈ
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
Ngõ 187 phố Giảng Võ
HÀ NỘI

ĐỀ THI VUI HÈ 2001
Vòng thứ nhất

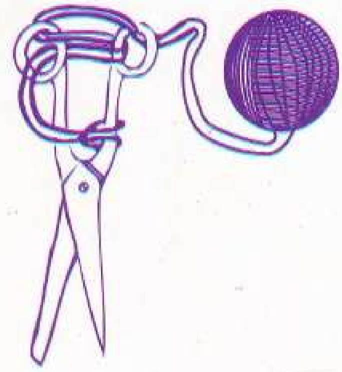
Bài 1. TÌM ONG

Mỗi con ong mang một viên phấn hoa (mỗi viên là một hình tròn nâu) về tổ, đặt ở một ô rồi chui vào ô kề bên. Bạn hãy tìm các con ong đó, biết rằng không có 2 con ong nào ở 2 ô kề nhau.



Bài 2. GỠ RỐI

Một cuộn len có sợi dây len bị quấn vào chiếc kéo. Bạn hãy nêu cách gỡ sợi dây len ra khỏi chiếc kéo mà không được làm đứt sợi dây và dĩ nhiên không gỡ hết cuộn len ra.



Bài 3. XẾP SỐ

10 tấm bìa có ghi chữ số, sắp xếp như trên hình được một phép cộng đúng. Bạn hãy đổi chỗ các tấm bìa để được các phép cộng đúng (với kết quả là số có bốn chữ số).

	6	2	3
+	4	7	5
1	0	9	8

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT90M1

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2001

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng