VĂN NHƯ CƯƠNG

Lịch sử HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT


Ô TOÁN HỌC

VĂN NHƯ CƯƠNG

Lịch sử HÌNH HỌC

LỜI NÓI ĐẦU

Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật có ý định cho ra mắt độc giả một bộ sách về lịch sử toán học, theo từng bộ môn: hình học, đại số, số học, giải tích toán học,...

Đó là một ý định rất phù hợp với thực tế, vì hiện nay những tài liệu về lịch sử toán học bằng tiếng Việt hầu như chưa có (nói đúng hơn mới chỉ có một cuốn dịch « Lịch sử toán học » của Nhà xuất bản Giáo dục, dịch từ nguyên bản tiếng Nga của tác giả Rưpnhicôp). Sự ít ỏi đó là một thiếu sót, mà ta nên nhanh chóng khắc phục, bởi vì nó sẽ ảnh hưởng không ít đến việc học tập, tìm hiểu và nghiên cứu toán học của các tầng lớp thanh niên

Tác giả nhận viết cuốn « Lịch sử hình học » với một nỗi lo lắng băn khoăn xuất phát từ sự hiểu biết còn ít ỏi của mình cả về mặt hình học lẫn về mặt lịch sử toán học.

Bởi vậy, viết cuốn sách nhỏ này, tác giả không có tham vọng lớn, mà chỉ tự đặt cho mình một mục tiêu khiêm tốn. Đó là, nêu lên một cách khái quát, trên những phương hướng chính, lịch sử phát triển hình học, từ khi mới hình thành cho đến những năm đầu tiên của thế kỷ chúng ta.

Do đó, tác giả không thể đề cập đến mọi sự kiện của hình học (chẳng hạn như lịch sử phát triển của môn lượng giác được nói tới rất ít trong cuốn sách này). Tác giả cố gắng tập trung vào những môn chủ yếu như : hình học giải tích, hình học vi phân, hình học xạ ảnh, hình học hypecbôlic, hình học Riman, một ít về hình học họa hình và tôpô học. Trong những vấn đề được nói đến, tác giả cũng không thể nêu lên hết các nhà hình học và những tác phẩm của họ. Tác giả chỉ có thể nói chi tiết về một số nhà hình học lớn (như Ơclit, Acsimet, Apôlôni, Ođôcx, Đêcac, Pecma, Niutơn, Ơle, Đedac, Lôbasepxki, Riman, Gaux, v.v...) mà công trình của họ đóng một vai trò lớn trong toàn bộ sự phát triển của hình học.

Tác giả không có trong tay mình những tác phẩm gốc, và thường phải thông qua một tác giả thứ hai, có khi là thứ ba. Điều đó cố nhiên làm cho nhận định của mình kém phần khách quan. Nhưng trong điều kiện hiện nay của chúng ta, điều đó rất khó khắc phục.

Mong rằng cuốn sách nhỏ này thỏa mãn được phần nào sự tìm hiểu của độc giả.

Tác giả

Chương I

SỰ HÌNH THÀNH NHỮNG KHÁI NIỆM ĐẦU TIÊN VỀ HÌNH HỌC. HÌNH HỌC THỜI AICẬP VÀ BABILON CỔ

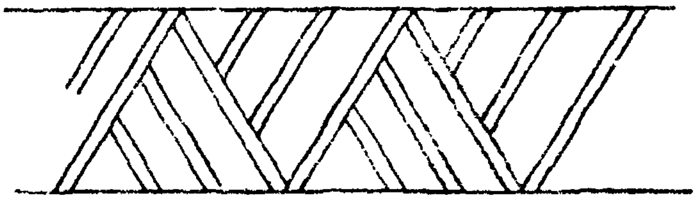
1. Những tài liệu lịch sử về thời kỳ ban đầu của toán học nói chung, và của hình học nói riêng, còn lưu lại đến ngày nay cho chúng ta thật là ít ỏi và rời rạc. Bởi vậy, quả là khó khăn nếu chúng ta muốn vẽ nên một bức tranh chi tiết và chính xác về sự xuất hiện và phát triển của môn *hình học*, đặc biệt là trong những giai đoạn đầu của nó.

Tuy vậy tình hình không đến nỗi làm cho chúng ta hoàn toàn bó tay. Dựa vào những thành tựu nghiên cứu lịch sử toán học, đặc biệt là trong những năm gần đây, ta có thể thu được một bức phác họa tương đối tổng quát về thời kỳ sơ khai của hình học. Mặc dầu nhiều chi tiết của nó còn phải bàn cãi, nói chung ta vẫn có thể nhìn nhận được vấn đề trên những nét lớn.

Cũng như khái niệm về số, những khái niệm đầu tiên về hình học xuất hiện trong thời kỳ sơ khai của loài người. Sự nảy sinh những khái niệm đó gắn liền mật thiết với hoạt động thực tiễn phong phú của loài người. Từ khi con người không còn đi hái, lượm những thức ăn có sẵn trong thiên nhiên, mà tự mình sản xuất để tạo ra những điều kiện sống cần thiết cho mình, người ta bắt đầu phải tiếp xúc nhiều đến các đại lượng và các quan hệ không gian của các vật thể. Những khái niệm này ngày càng trở nên phong phú, hoàn thiện và ngày càng được con người hiểu biết một cách kỹ càng do những hoạt động ngày càng nhiều mặt của họ để đấu tranh cải tạo thiên nhiên.

Công việc cày cấy mặc dầu còn thô sơ vẫn đòi hỏi phải đo đạc các đám đất, cân đong và phân chia lương thực, hàng hóa... Công việc xây cất nhà cửa đòi hỏi phải tìm ra những quy tắc để vạch các đường thẳng, dựng những chiếc cột hay bức tường thẳng đứng... Để có thể tính toán thời vụ, cần quan sát sự di chuyển của mặt trăng, mặt trời, các vì sao, và do đó đưa đến việc đo đạc các góc, v.v... Tất cả những điều đó đều không thể thực hiện được nếu không biết đến những kiến thức cơ bản về hình học.

Loài người thời đồ đá mới đã có những hiểu biết khá phong phú về các hình dạng hình học. Các hình trang trí trên đồ gốm, và về sau trên đồ đồng, do khai quật được, đã chứng tỏ điều đó. Những trang trí đó thường gồm những hình hình học bằng nhau, đối xứng, hoặc đồng dạng, được sắp xếp một cách hài hòa, đẹp mắt. Như vậy là loài người thời bấy giờ đã nắm được đến một mức độ nào đó các hình dạng hình học và các quy tắc để dựng chúng

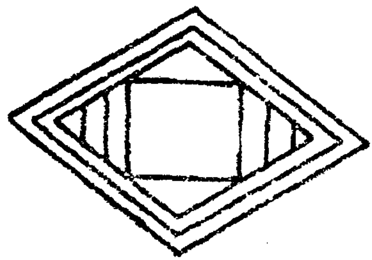


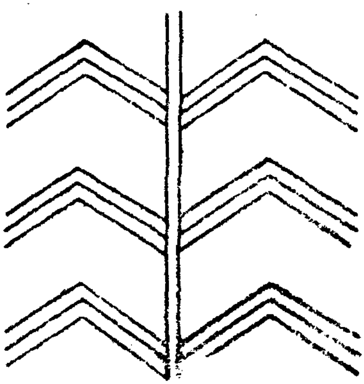
Hình 1

Nghệ thuật trang trí ở vùng lưu vực sông Tigrơ và Ephơrut

Hình 2

Trang trí của người da đỏ châu Mỹ



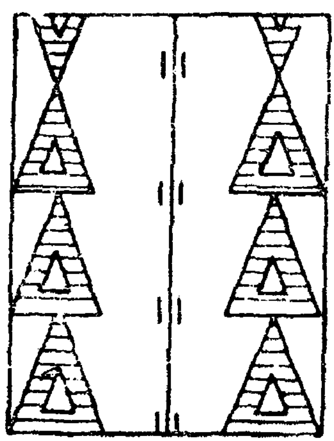


Hình 3

Trang trí trên đồ gồm ở Hy lạp, khoảng 4000 năm trước công nguyên

Hình 4

Ở cửa ra vào trung tâm châu Âu, khoảng 1000 năm trước công nguyên



2. *Phương đông* (trong đó chủ yếu là Ai cập và Babilon) được xem là cái nôi của hình học. Những tài liệu phát hiện được trong những năm gần đây đã cho phép chúng ta xác định được trình độ về hình học của người Ai cập và Babilon cách đây 3, 4 ngàn năm trước công nguyên. Đó là thời kỳ phát triển nhất của hai nền văn hóa Phương Đông : *nền văn hóa Ai cập* (vùng lưu vực sông Nin) và *nền văn hóa Babilon* (vùng lưu vực sông Tigrơ và sông Ephơrat). Đồng thời với hai nền văn hóa đó còn có *nền văn hóa Ấn độ* (vùng lưu vực sông Ấn và sông Hằng), *nền văn hóa Trung hoa* (vùng sông Hoàng và sông Dương tử), và muộn hơn một ít, có các *nền văn hóa Trung Á, Đông Dương và Inđônêxia*. Ta không biết gì nhiều lắm về hình học thuộc các nền văn hóa này vì chưa tìm thấy những tài liệu có căn cứ. Nhưng, dựa vào trình độ chung, có thể chắc chắn rằng toán học ở vùng này so với Ai Cập và Babilon thì không phát triển bằng.

Những hiểu biết của chúng ta về toán học Ai cập chủ yếu dựa vào hai bản chép tay. Những bản này viết trên một thứ vỏ cây giống như giấy, và được cất dấu trong những hầm mộ cổ. Bản thứ nhất gọi là bản Raiđ (Rhind) (lấy tên người đã tìm ra nó năm 1858), có kích thước 5,25 *m* × 33 *cm* bao gồm 84 bài toán. Hiện nay một phần bản đó được lưu trữ tại viện bảo tàng « Anh quốc » ở Luân đôn, và một phần ở Niu Iooc. Bản thứ hai gọi là bản Maxcơva do Gôlênisôp tìm thấy vào cuối thế kỷ trước, có kích thước 5,44 *m* × 8 *cm*, gồm 25 bài toán và hiện được lưu trữ tại viện bảo tàng nghệ thuật Puskin (Maxcơva). Cả hai bản đều được phiên dịch ra ngôn ngữ ngày nay. Nội dung các bài toán trong hai bản đó phần lớn bàn về số học. Tuy vậy những vấn đề hình học trong đó cũng giúp chúng ta hình dung một phần nào các kiến thức của người Ai cập hồi bấy giờ.

Người Ai cập cổ đã biết các phương pháp tính diện tích và thể tích. Diện tích hình chữ nhật, hình tam giác, hình thang, được tính theo công thức đúng như ngày nay. Diện tích hình chữ nhật với các cạnh tuần tự là *a, b, c, d* được tính theo công thức

$S = \frac{1}{2}(a + c) \times \frac{1}{2}(d + b)$ (công thức này trong trường hợp tổng quát thì gặp phải sai số khá lớn ! Có lẽ nó được áp dụng cho các hình tứ giác gần giống với hình chữ nhật).

Để tính diện tích hình tròn có đường kính *d*, người ta xem nó bằng diện tích hình vuông có cạnh $\frac{8}{9}d$:

$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ như vậy là ứng với số π là

$4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3,1605$; sai số nhỏ hơn 2%.

Thể tích các hình hộp, hình lập phương, hình lăng trụ, hình trụ đều được tính bằng cách lấy diện tích đáy nhân với chiều cao.

Một thành tựu sáng chói nhất và cũng đáng làm cho chúng ta ngạc nhiên nhất của người Ai cập là công thức tính thể tích hình chóp cụt có đáy là hình vuông :

$$V = (a^2 + ab + b^2) \times \frac{h}{3},$$

trong đó, *a, b* lần lượt là cạnh của đáy trên và đáy dưới, *h* là chiều cao của hình chóp cụt.

Công thức này đã làm cho một số người dự đoán rằng người Ai cập đã biết đến định lý Pythago. Điều đó còn đáng ngờ. Cũng có một số truyền thuyết không có căn cứ lắm cho rằng người Ai cập đã biết dựng góc vuông nhờ một sợi dây kín gồm $3 + 4 + 5 = 12$ đoạn bằng nhau (áp dụng công thức Pythago : $3^2 + 4^2 = 5^2$).

3. Tình hình toán học của Babilon cổ được sáng tỏ nhờ những tài liệu tìm thấy trong các công trình khảo cổ ở vùng này. Những tài liệu này thường là những văn bản trên những bản bằng đất sét nung (giống như đồ sành của ta) chữ được khắc bằng mũi dao nhọn. Người ta tìm thấy khoảng 50 vạn bản như thế, trong số đó có 150 bản với các bài toán có lời và 200 bảng số. Những cố gắng để tìm cách đọc và phân tích các tài liệu đó đã mở ra trước mắt chúng ta một thế giới toán học của người Babilon vào khoảng 4000 năm trước công nguyên. Trong công việc này Nâyghêbaue là người có những đóng góp lớn. Các công trình của ông vào những năm 30 của thế kỷ này đã làm cho công cuộc nghiên cứu các bản đất sét nung phát triển mạnh mẽ

Những kiến thức hình học của người Babilon phần lớn có liên quan đến việc đo đạc các hình đơn giản thường gặp khi phân chia ruộng đất, xây dựng nhà cửa, đắp đập, đào sông ... Bên cạnh các công thức đúng, họ còn sử dụng các công thức gần đúng. Ví dụ: thể tích hình chóp cụt đáy vuông được tính theo công thức : $V = (a^2 + b^2)\ \frac{h}{2}$. Thể tích hình nón cụt cũng được tính tương tự như thế.

Độ dài đường tròn được xem gấp ba lần đường kính, như vậy là ứng với giá trị thô sơ của số π là 3. Diện tích hình tròn được tính là $S = \frac{C^2}{12}$, trong đó C

là độ dài đường tròn. Trong một số bản khác, ta thấy có giá trị gần đúng $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$.

Đặc biệt người Babilon đã biết công thức Pythago. Không rõ bằng cách nào họ đã đi tới định lý nổi tiếng ấy, nhưng trên một số bản còn ghi lại những bộ ba số Pythago (tức là ba số hợp thành ba cạnh của tam giác vuông). *Một trong những bản như vậy* có 15 giòng gồm các số Pythago. Bên cạnh những giòng gồm những số đơn giản như 60, 45, 75 (tức 15.4, 15.3 và 15.5) ta còn thấy *những giòng rất phức tạp như* 72, 65, 97 và 3456, 3367, 4825.

Trong một số bản, có vẽ các hình đa giác đều 5 cạnh, 6 cạnh, 7 cạnh, và kề bên ghi các hằng số : 1,40 bên cạnh S_5; 2,37 bên cạnh S_6; 3,41 bên cạnh S_7. M.E. Bơruinx đã giải thích ý nghĩa các số đó như sau : chúng cho biết diện tích các đa giác đều tương ứng nếu cạnh bằng đơn vị. Việc tính toán dựa trên công thức gần đúng $a_n \approx \frac{C}{n}$, với C là độ dài đường tròn trong đó nội tiếp một đa giác đều n cạnh và a_n là độ dài các cạnh đó: Khi ấy :

$$S_n = n\frac{a_n \cdot h_n}{2} = \frac{n}{2} a_n \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

Ở đây d là đường kính đường tròn, xem là $\frac{C}{3}$.

Nếu $a_n = 1$, ta có $S_n = \frac{n}{12}\sqrt{n^2 - 9}$ Khi $n = 5$, 6, 7 ta được các giá trị nói trên.

Biết được các hằng số S_8, S_9, S_7, người Babilon có thể tìm được diện tích một đa giác đều đồng dạng với một trong các đa giác đó mà cạnh không bằng 1.

Muốn vậy chỉ việc nhân hằng số tương ứng với bình phương độ dài của cạnh. Như vậy là họ đã biết một số tính chất của hình đồng dạng. Tuy vậy trong các tài liệu hiện có ta không tìm thấy khái niệm đồng dạng và các tính chất đơn giản.

4. Như vậy ta thấy rằng hình học thời Ai cập và Babilon được hình thành như là tập hợp một số khái niệm và các công thức tính toán cho phép đo đạc trên các hình. Căn cứ vào những tài liệu hiện có thì hình học ở Babilon đã phát triển ở mức độ cao hơn hình học ở Ai cập. Tuy vậy, ở cả hai nơi đó, hình học còn xa mới đạt đến trình độ của một khoa học suy diễn, như sau này đã hình thành ở Hy lạp. Thật vậy, mặc dầu đã tích lũy được một số khá lớn khái niệm và một số lớn công thức phức tạp, nhưng sự liên hệ lôgic giữa chúng vẫn chưa hình thành, và do đó các bài toán riêng lẻ chưa được thống nhất lại trong một hệ thống chung.

Hình học ở Ai cập và Babilon đã ảnh hưởng nhiều đến sự phát triển hình học của thế giới sau này. Chính những người Hy lạp sau này đã kể lại rằng họ đã thu thập được khá nhiều hiểu biết về toán học khi đi qua Ai cập và Babilon.

Chương II

HÌNH HỌC Ở HY LẠP CỔ

1. Vào thế kỷ V trước CN (công nguyên) ách thống trị của người Ba tư ở các quốc gia Hy lạp bắt đầu sụp đổ. Sau khi đã thống nhất lực lượng do thành Aten đứng đầu, người Hy lạp nổi lên đánh đuổi người Ba tư và đã hai lần giành thắng lợi: một lần ở Maratông vào năm 490 trước CN, và lần thứ 2, mười năm sau ở Xalamin. Chiến thắng sau này đã kết thúc cuộc chiến tranh dữ dội giữa các đội quân của các quốc gia dân chủ chủ nô ở Hy lạp và đội quân nô lệ của hoàng đế Ba tư.

Sau khi chiến thắng người Ba tư, Aten trở thành trung tâm chính trị và văn hóa của Hy lạp. Từ cuối thế kỷ V trước CN đến đầu thế kỷ IV trước CN là thời đại hoàng kim của Aten. Rất nhiều nhà bác học có tên tuổi từ khắp nơi đã tới đây làm việc: Anaxago từ Clazômen, Đêmôcrit từ Apđe, Ghippi từ Eliđa, Theođo từ Kiren, Hypôcrat từ Côx, Aristôten từ Xtagia. Họ hâm mộ và say mê cuộc sống tinh thần sôi sục ở Aten, nơi mà Xôcrat bằng những bài giảng hấp dẫn của mình đã giúp cho những tư tưởng lớn nảy sinh trong số người nghe, nơi mà Platông và sau này là

Aristôten đã xây dựng viện hàn lâm nổi tiếng, hình ảnh tương lai của các trường đại học.

2. Hình học Hy lạp từ thế kỷ IV trước CN đã có nhiều biến chuyển sâu sắc. Trước đó người Hy lạp đã tích lũy được một số kiến thức tương tự như người Phương Đông. Nhưng từ thế kỷ IV trước CN trở đi, hình học nhanh chóng trở thành một khoa học suy diễn và trừu tượng. Sự chứng minh bằng lôgic đã trở thành phương pháp cơ bản để khẳng định tính chân thật của một mệnh đề toán học. Trước kia các nhà toán học đặt câu hỏi «làm thế nào?» trước một bài thì bây giờ họ đặt thêm câu hỏi «tại sao?».

Mở đầu thời kỳ mới này của hình học chúng ta thấy nổi lên tên tuổi của Thales ở thành Milê, một nhà buôn, *nhà hoạt động chính trị, nhà triết học, toán học,* thiên văn học, người đặt nền móng cho khoa học và triết học Hy lạp, sống vào khoảng 624 trước CN đến 548 trước CN. Ông và các học trò như Anaximan và Anaximen thuộc vào trường phái duy vật thô sơ, cho rằng những hiện tượng tự nhiên đều là vật chất và đều bắt nguồn từ một «nguyên thể» duy nhất. Thales cho rằng «nguyên thể» của vật chất là nước, còn Anaximen thì cho đó là không khí.

Trong phạm vi hình học, Thales đã chứng minh được: góc nội tiếp trong nửa đường tròn là góc vuông; các góc ở đáy của tam giác cân bằng nhau; các góc vuông đều bằng nhau. Thales cũng biết cách xác định một tam giác bởi một cạnh và hai góc kề với nó, từ đó ông có thể tính được chiều cao của một vật biết bóng của nó trên mặt đất, hoặc tính được khoảng cách đến một vật không tới gần được.

Đáng tiếc là chúng ta không hề biết gì về các chứng minh của Thales. Có lẽ ông cũng sử dụng rộng rãi phương pháp gấp và chồng các hình, vì theo như lời của Prôc (thế kỷ V sau CN, nhà bình luận nổi tiếng về toán học cổ Hy lạp) : « Khi thì ông (tức Thales) xem xét vấn đề một cách tổng quát, khi thì chủ yếu dựa vào trực giác »

3. Nhưng có lẽ Pythago mới là người mang lại nhiều biến đổi sâu sắc cho hình học. Theo lời của Prôc, Pythago nghiên cứu hình học « xuất phát từ một số cơ sở đầu tiên của nó, và cố gắng chứng minh các định lý bằng suy luận lôgic, chứ không phải bằng cách dựa vào trực giác ». Như vậy Pythago là người đầu tiên xây dựng hình học như là một khoa học suy diễn.

Sau đây là một số chi tiết ít ỏi mà chúng ta biết được về cuộc đời của Pythago, con người gần như trở thành thần thoại. Ông sinh ở đảo Xamôs, một đảo buôn bán giàu có, và khoảng năm 530 trước CN ông tới Krôtôn (nam Ý) ở đây ông đã lập nên một hội lấy tên là « hội Pythago », theo đuổi những mục tiêu về toán học, tôn giáo, đạo đức và chính trị. Hoạt động của hội rất bí mật, và tất cả những phát minh khoa học của hội đều được gán cho một mình Pythago. Vào đầu thế kỷ V trước CN, sau những hoạt động chính trị thất bại, hội bị đuổi ra khỏi các thành phố nam Ý, và chấm dứt sự tồn tại của mình.

Tuy vậy, sau đó ở Xibarit, Krôtôn, Tarent và ở một số thành phố Hy lạp có nhiều nhà bác học xuất sắc tự xưng mình là Phithagorit, trong số đó có Ackhit ở Tarent và Theôđo ở Kiren.

Pythago và các nhà Pythagorít đã có những phát minh sau đây:

1. Định lý về tổng số góc trong một tam giác;

2. Chia mặt phẳng thành các đa giác đều (tam giác đều, hình vuông, lục giác đều);

3. Giải phương trình bậc hai bằng hình học (áp dụng các phép tính về diện tích);

4. Dựng một đa giác có diện tích cho trước và đồng dạng với một đa giác cho trước;

5. Tồn tại các đoạn thẳng vô ước (ý nghĩa của phát minh này có thể so sánh với phát minh ra hình học Phi Ơclit ở thế kỷ XIX hoặc thuyết tương đối ở thế kỷ XX);

6. Có năm loại khối đa diện đều (phát minh này chứng tỏ các kiến thức về hình học không gian thời bấy giờ đã khá phong phú);

7. Định lý Pythago (trước đây chỉ mới biết một số trường hợp riêng của định lý này. Thật khó mà đánh giá hết tầm quan trọng của định lý nếu ta không nhớ rằng sự mở rộng của nó nằm trong định nghĩa của tất cả các không gian mêtric) (1).

8. Tính cực trị của đường tròn và mặt cầu (phát minh này có thể xem như là nền móng của lý thuyết đẳng chu).

4. Muốn hiểu biết trình độ suy luận trong hình học ở thời bấy giờ, chúng ta cần có những nguyên bản. Tiếc thay, hiện nay chúng ta chỉ mới tìm được một

---

(1) Không gian mètric là những không gian mà trong đó có thể đo được khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Các số đo này phải thỏa mãn một số tiên đề nào đó gọi là tiên đề của không gian mêtric.

đoạn tài liệu quý giá về hình học của Hypôcrat ở thành Khiôx, cũng là một Pythagorit (khoảng thế kỷ V trước CN). Trong đoạn tài liệu này, Hypôcrat trình bày vấn đề cầu phương của các «nguyệt hình» là những hình giới hạn bởi các cung tròn. Đây là lần đầu tiên trong toán học, người ta xét vấn đề cầu phương của các hình giới hạn bởi đường cong. Hypôcrat đã chứng minh rằng diện tích hai hình viên phân đồng dạng tỉ lệ với hai dây cung căng chúng. Dựa trên cơ sở đó ông đã nêu lên cách tính diện tích của một số nguyệt hình.

Suy luận toán học của Hypôcrat đạt đến trình độ cao, trong đó đã áp dụng một cách triệt để các quy tắc suy diễn chặt chẽ để từ kết quả này suy ra kết quả khác. Đó chắc chắn cũng là trình độ chung của hình học thời bấy giờ.

5. Vấn đề cầu phương các nguyệt hình, dẫn đến vấn đề cầu phương đường tròn, là một trong ba bài toán không giải được đầu tiên trong lịch sử toán học, xuất hiện vào thế kỷ V trước công nguyên. Ba bài toán đó là :

1. Gấp đôi một hình lập phương : tức là dựng một hình lập phương có thể tích gấp đôi thể tích hình lập phương cho trước ;

2. Chia ba một góc : tức là dựng một góc có độ lớn bằng một phần ba độ lớn của một góc cho trước ;

3. Cầu phương hình tròn : tức là dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cho trước. Tất cả các phép dựng đó đều đòi hỏi phải thực hiện bằng thước và compa.

Mãi đến thế kỷ XIX người ta mới chứng minh được rằng đó là những bài toán không giải được, tức là ta không thể bằng một số hữu hạn phép dựng bằng thước và compa tìm thấy được hình đòi hỏi: Tuy vậy việc nghiên cứu các bài toán đó đã giúp các nhà toán học Hy lạp tìm ra giao tuyến cônic (1), các đường cong bậc 3, bậc 4, v.v...

Hypôcrat đã đưa bài toán thứ nhất về việc tìm hai đại lượng trung bình nhân kép, tức là hai đại lượng x và y sao cho:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Khi $2a=b$, thì x sẽ là cạnh của hình lập phương có thể tích gấp đôi hình lập phương cạnh a.

Ngay sau đó, Ackhit (khoảng năm 428—365 trước CN) chỉ ra rằng đại lượng x như vậy có thể tìm thấy bằng cách *xét giao tuyến của ba* mặt: mặt nón, mặt trụ và mặt xuyến.

Những cố gắng về sau của các nhà bác học nhằm vào việc tìm các phương pháp dựng đoạn trung bình nhân kép. Từ đẳng thức Hypôcrat ta suy ra:

$$ay = x^2 \text{ và } xy = ab \text{ hay } y^2 = bx.$$

Nếu dựng được tọa độ x, y của giao điểm hai đường cong có phương trình như vậy thì sẽ giải được bài toán. Chỉ mãi đến nửa sau thế kỷ IV trước CN, Menêc mới giải thích được rằng những đường cong đó là giao tuyến cônic. Ông xét ba loại hình nón tròn xoay với góc ở đỉnh là vuông, tù, nhọn. Bằng cách vẽ một mặt phẳng

(1) Giao tuyến cônic là những đường có được bằng cách cắt mặt nón bởi một mặt phẳng không đi qua đỉnh mặt nón. Đó là các đường elip, parabôl hoặc hypecbôl.

vuông góc với một đường sinh ông nhận được ba loại đường cong mà bây giờ ta gọi là parabôl, hypecbôl và elip.

6. Cùng với loại phát minh ra các đoạn thẳng vô ước (tức là các đại lượng vô tỉ) cũng như việc xác định thể tích của hình chóp, chu vi của đường tròn... lần đầu tiên toán học gặp phải khái niệm vô hạn. Ở đây lập tức xuất hiện những khó khăn và gây ra một cuộc khủng hoảng sâu sắc đầu tiên, làm lung lay nền tảng của toán học.

Để xác định tỉ số của hai đoạn thẳng, người ta đã dùng một thuật tính mà ta gọi là thuật tính Ơclit. Thuật tính này cho phép tìm được ước chung f của hai đoạn thẳng a, b cho trước. Nếu $a = mf$ và $b = nf$ thì $a : b = m : n$.

Nhưng nếu a, b là các đoạn thẳng vô ước với nhau thì thuật tính nói trên sẽ trở nên vô hạn, và người ta không thể biết được các tỉ số đó có bằng nhau hay không. Để giải thích vấn đề đó, một số nhà Pythagorit đã giả thiết rằng các đoạn thẳng vô ước có một ước chung vô cùng bé, đó là những phần tử đơn giản nhất, xem là những điểm. Theo họ đoạn thẳng là tập hợp gồm vô hạn các phần tử không còn chia nhỏ được như vậy.

Khi xác định thể tích hoặc diện tích của các hình không giới hạn bởi những mặt phẳng hoặc đường thẳng, người ta buộc phải dùng đến một quá trình vô hạn. Ở thế kỷ V, Antiphôn đã giải quyết bài toán cầu phương Hình tròn như sau : «Ta hãy nội tiếp trong đường tròn một đa giác đều; đối với đa giác đều này ta có thể bằng thước và compa dựng một hình vuông có cùng diện tích. Bây giờ ta lại nội tiếp trong đường tròn một đa giác đều có số cạnh gấp đôi, và dựng hình vuông có cùng diện tích với nó. Nhưng vì hình tròn chính là đa giác đều với số cạnh là vô hạn, cho nên từ đó suy ra ta luôn luôn có thể dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn »:. Như vậy Antiphôn đã từ một mệnh đề đúng đối với đa giác đều có số cạnh hữu hạn chuyển thành một mệnh đề với đa giác đều có số cạnh vô hạn.

Ngay từ hồi bấy giờ, lập luận của Antiphôn không được thừa nhận.

Những khó khăn liên quan tới vấn đề vô hạn đã thực sự làm các nhà toán học lo lắng. Không những thế, nó còn vượt ra ngoài phạm vi của toán học, trở nên đầu đề tranh luận của các nhà triết học đủ mọi trường phái.

7. Zênông (khoảng năm 450 trước CN) là người đã bóc trần những khó khăn thực sự có liên quan tới khái niệm vô hạn và liên tục, đồng thời chứng tỏ rằng những khái niệm đó về bản chất hoàn toàn không giống như người ta đã quan niệm về chúng. Để trình bày lập luận của mình, ông đã nêu ra những nghịch lý nổi tiếng, mà hơn 25 thế kỷ sau vẫn còn thu hút sự chú ý của các nhà toán học và triết học. Các nghịch lý của Zênông nhằm bác bỏ một số quan niệm trực giác trước kia về vô cùng lớn, vô cùng bé, cũng như quan điểm của trường phái Pythago cho rằng đoạn thẳng là tập hợp những yếu tố «không chia nhỏ được». Zênông lập luận như sau : « Giả sử đoạn thẳng gồm một số vô hạn các phần tử không chia nhỏ được, khi đó nếu độ dài mỗi phần tử đó bằng không (tức mỗi phần

tử đó là một điểm) thì độ dài của đoạn thẳng bằng không. Còn nếu độ dài của mỗi yếu tố là một đại lượng nào đó, thì độ dài của đoạn thẳng phải là vô cùng lớn».

Lập luận đó chứng tỏ rằng không nên định nghĩa độ dài đoạn thẳng là tổng độ dài các phần tử không chia nhỏ được, rằng độ đo của một tập hợp nói chung không phải là độ đo các phần tử của nó (ngày nay, chúng ta *định nghĩa* độ đo một đoạn thẳng bằng một cái phủ bởi các khoảng, mỗi khoảng có một độ dài nhất định).

Bốn nghịch lý của Zênông («Chia đôi», «Asin đuổi rùa», «mũi tên», và «sân vận động») thực sự đã gây nên sóng gió cho toán học, mà cho đến ngày nay vẫn còn dư âm. Những nghịch lý này nhằm nhấn mạnh sự mâu thuẫn trong những khái niệm liên tục của chuyển động và thời gian, nhưng hoàn toàn không có ý định giải quyết những mâu thuẫn đó.

Chúng ta nêu ra ở đây hai trong số bốn nghịch lý đó : «*Asin đuổi rùa*». Asin và con rùa cùng chạy theo một đường thẳng và theo cùng một hướng. Mặc dầu Asin chạy nhanh hơn con rùa *nhưng không bao giờ có thể* đuổi kịp con rùa, nếu ban đầu con rùa cách Asin một khoảng là a.

Thật vậy giả sử tốc độ của Asin *lớn* gấp k lần tốc độ rùa thì khi Asin chạy được khoảng a, rùa chạy được một khoảng a/k, khi Asin chạy được khoảng đó, thì rùa *lại chạy thêm được một khoảng* a/k^2, vv... và mỗi lần như vậy khoảng cách giữa họ vẫn không bằng không.
«*Chia đôi*». Một vật chuyển động không thể bao giờ đến đích được. Thật vậy nếu nó chuyển động từ A đến B thì trước hết nó phải đến được *trung điểm* A_1

của đoạn AB, sau đó lại phải đến được các trung điểm A_2, A_3 ... của các đoạn A_1, B, A_2, B, ... Như vậy không bao giờ nó đến được B.

8. Các nghịch lý của Zênông đã làm các nhà toán học hoang mang. Prôtago (năm 480 — 411 trước CN) lên tiếng chống lại tính chất trừu tượng của toán học. Theo ông, không nên nói rằng điểm không có thành phần đường không có bề dày, bề rộng vv... bởi vì chưa hề ai trông thấy chúng. Ông còn nói đường thẳng và đường tròn tiếp xúc với nhau không thể chỉ ở một điểm mà là ở một đoạn thẳng hữu hạn. Nhưng các nhà toán học Hy lạp đã hiểu rất rõ rằng từ bỏ tính trừu tượng của toán học là từ bỏ toàn bộ toán học. Con đường của Prôtagô không được thừa nhận.

Đêmôcrit (khoảng năm 460 — 380 trước CN), nhà triết học nguyên tử luận, nhà toán học đã đề nghị một phương pháp xây dựng toán học thoát khỏi những khó khăn gây ra bởi khái niệm vô hạn. Ông là một con người toàn diện đến ngạc nhiên, ông viết về tất cả mọi vấn đề: triết học, toán học, vật lý, kỹ thuật, khí tượng, động vật học, thẩm mỹ học...

Đêmôcrit xem nguyên tử và các khoảng trống trong đó các nguyên tử chuyển động là cơ sở đầu tiên của vũ trụ. Nguyên tử, tức là những cái không chia được, của Đêmôcrit là những phần tử của vật chất không chứa phần nhỏ hơn nhưng đồng thời lại có một độ đo có thể biết được. Như vậy nếu cái không chia được của trường phái Pythago không có độ dài, thì cái không chia được của Đêmôcrit lại đo được. Lịch sử toán học đã chứng tỏ rằng quan điểm của Đêmôcrit đã đóng một vai trò tích cực trong sự phát triển của toán học.

Theo Acsimet thì Đêmôcrit đã tìm được kết quả: thể tích của một hình chóp bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của hình lăng trụ có cùng diện tích đáy và chiều cao, thể tích hình nón bằng $\frac{1}{3}$ thể tích hình trụ có cùng đáy và chiều cao.

Dựa trên một số đoạn còn tìm thấy được trong tác phẩm của Đêmôcrit, có thể đoán rằng ông đã đi đến kết quả ấy bằng cách chia vật thể thành một số hữu hạn phần — nguyên tử — mà thể tích có thể biết được. Thể tích của vật thể sẽ bằng tổng thể tích của các phần như thế. Nhưng như chúng ta đã biết, hình chóp không thể chia ra thành một số hữu hạn hình lăng trụ được, do đó muốn đi đến kết luận trên thì không thể nào không chuyển qua giới hạn, mà điều đó thì chắc chắn là Đêmôcrit không làm. Bởi vậy Acsimet xem những kết quả của ông là chưa được chứng minh.

Con đường của Đêmôcrit là con đường «toán học hữu hạn» hoàn toàn không áp dụng được để nghiên cứu các đại lượng liên tục và chuyển động. Nhưng quan điểm của ông chứa đựng một phương pháp quan trọng mà Acsimet là người đầu tiên đã đánh giá cao và phát triển nó. Đó chính là mầm mống của phương pháp tích phân. Nhờ phương pháp này, Acsimet đã phát minh ra một loạt định lý về diện tích và thể tích. Đềcac, Galilê, Kavalêri, Paxcan ở một mức độ nào đó cũng đã sử dụng phương pháp của Đêmôcrit, và do đó đã chuẩn bị cho sự phát minh ra phép tính vô cùng bé.

9. Người đầu tiên đã xây dựng một phương pháp cho phép chuyển qua giới hạn là Ơđôcx (năm 410-356 trước CN). Đó là một nhà toán học vĩ đại, mà trí thông minh

còn làm cả những con người của thời đại này phải khâm phục, một nhà thiên văn, địa chất, triết học và một thầy thuốc có uy tín.

Công lao lớn nhất của ông trong toán học là đã xây dựng được một lý thuyết tổng quát về tỉ lệ và xây dựng phương pháp «lấy hết» *để chuyển qua giới hạn*. Có thể nói Ơđôcx là người đã đặt nền móng cho giải tích vô cùng bé.

Ở đây chúng tôi không trình bày lý thuyết về tỉ lệ của Ơđôcx, vả lại nó không thuộc phạm vi hình học. Tuy vậy, cũng cần phải nói rằng toàn bộ công trình sâu sắc đó của ông, mặc dầu vẫn được áp dụng cho tới cuối thế kỷ trước, chỉ được đánh giá một cách đúng mức sau khi xuất hiện công trình của Đêđêkin, trong đó định nghĩa số thực như là một nhát cắt trong phạm vi số hữu tỉ. Giữa lý thuyết của Ơđôcx và của Đêđêkin có sự giống nhau nhiều đến nỗi Lipsit có viết thư hỏi Đêđêkin rằng ông đã làm được gì mới so với thời cổ.

Ta sẽ nói kỹ hơn về phương pháp «lấy hết» của Ơđôcx. Phương pháp này dựa trên bổ đề cơ bản sau đây «Nếu cho hai đại lượng a, b, $a > b$, thì bằng cách lấy đi từ a hơn một nửa, rồi từ phần còn lại ta lại lấy đi hơn một nửa, ..., cuối cùng sau một số hữu hạn lần ta sẽ còn lại đại lượng $\alpha_n < b$. Chứng minh bổ đề đó dựa trên tiên đề (mà sau này ta gọi là tiên đề Acsimet) : cho a, b, $a > b$ thì có thể gấp b lên N lần sao cho $Nb > a$.

Áp dụng bổ đề đó, ta có thể nêu lên sơ đồ tính diện tích $S(A)$ của một hình A nào đó. Ta sẽ tìm một loạt các hình A_1, A_2, ..., A_n, nội tiếp trong hình A, sao cho diện tích $S(A_i)$ có thể tính được, và thỏa mãn các điều kiện :

$$S(A) - S(A_1) < \frac{S(A)}{2};$$

$$S(A) - S(A_2) < \frac{S(A) - S(A_1)}{2} < \frac{S(A)}{4};$$

. . . .

$$S(A) - S(A_n) < \frac{S(A)}{2^n}$$

Khi đó theo bổ đề, với n đủ lớn ta có $S(A) - S(A_n)$ bé hơn bất kỳ một đại lượng b nào cho trước. Bước sau đó là phải tìm một đại lượng B sao cho $B - S(A_n)$ bé hơn một đại lượng cho trước với n đủ lớn (tức là tìm giới hạn của dãy $S(A_1)$, $S(A_2)$,...). Bước cuối cùng là chứng minh $S(A) = B$. Giống như chúng ta, Ơđôcx đã chứng minh điều đó bằng phản chứng. Nếu $S(A) < B$ thì ta có thể tìm n đủ lớn sao cho $B - S(A_n) < B - (A)$, tức là $S(A_n) > S(A)$, vô lý. Trường hợp $S(A) > B$ cũng chứng minh tương tự. Nhờ phương pháp đó, Ơđôcx đã chứng minh chính xác các định lý sau đây :

1. Tỉ số diện tích hai hình tròn bằng bình phương tỉ số hai đường kính của chúng ;

2. Thể tích hình chóp bằng $\frac{1}{3}$ thể tích hình lăng trụ có cùng đáy và chiều cao ;

3. Thể tích hình nón bằng $\frac{1}{3}$ thể tích hình trụ có cùng đáy và chiều cao.

Như vậy, phương pháp « lấy hết » chính là học thuyết đầu tiên về giới hạn, nó cho phép ta tìm được giới hạn của một lớp khá rộng các dãy. Phương pháp « lấy hết » ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển của toán học.

10. Năm 404 trước CN, cuộc chiến tranh Pêlôpône kéo dài 27 năm giữa hai đồng minh đứng đầu là Aten và Xpac đã kết thúc bởi sự thất bại của Aten.

Cuộc chiến tranh đó đã làm cho nhân dân Hy lạp lâm vào cảnh nước mất nhà tan, đô thị điêu tàn, ruộng đồng hoang phế, các công trình văn hóa bị thiêu hủy. Từ đó cho đến giữa thế kỷ IV trước công nguyên, các thành bang Hy lạp, kể cả Aten bước vào con đường tàn tạ. Những mâu thuẫn trong nội bộ xã hội nô lệ đã đưa toàn bộ nước Hy lạp vào một cuộc khủng hoảng vô cùng trầm trọng. Trong hoàn cảnh đó việc nghiên cứu khoa học bị đình trễ. Aten dần dần mất vai trò trung tâm văn hóa và khoa học để nhường chỗ cho những thành phố khác nổi lên trong thời kỳ Hy lạp hóa (thế kỷ VI đến thế kỷ I trước CN).

Chương III

HÌNH HỌC Ở CÁC NƯỚC HY LẠP HÓA VÀ Ở ĐẾ QUỐC LA MÃ

1. Trong tình trạng suy tàn của các thành bang Hy lạp, ở phía Bắc có nước Makêđônia ngày càng hưng thịnh và trở thành một quốc gia nô lệ có lực lượng quân sự hùng mạnh nhất ở bán đảo Hy lạp. Hoàng đế Philip của Makêđônia đã tiến hành một cuộc chiến tranh chinh phục người Hy lạp và năm 338 trước CN và đã hoàn toàn thắng lợi. Makêđônia cùng các quốc gia ở Hy lạp lập thành một «Khối đồng minh Hy lạp» dưới sự lãnh đạo của Makêđônia. Từ đó nền độc lập của các thành bang Hy lạp hoàn toàn chấm dứt.

Năm 336 trước CN, Philip chết để lại sự nghiệp cho con là Alêxanđr, một thanh niên 20 tuổi, thông minh, có tài thao lược và tài tổ chức. Lập tức Alêxanđr thống lĩnh quân đội, tiến hành một cuộc chiến tranh xâm lược Ai cập, Babilon, Ba tư, các quốc gia ở Trung Á và cả một phần Ấn độ. Cuộc chiến tranh nổi tiếng này kéo dài trong 10 năm.

Cuộc viễn chinh của Alêxanđr đã xúc tiến sự đi lại buôn bán và trao đổi văn hóa giữa Hy lạp và phương Đông. Trên đường viễn chinh Alêxanđr đã lập nên nhiều thành phố, chúng trở nên thuộc địa của người Hy lạp và trung tâm truyền bá văn hóa Hy lạp, trong đó có thành phố Alêxanđr trên bờ biển Ai cập.

Năm 323 trước CN, Alêxanđr chết ở Babilon, đế quốc của ông chia ra làm ba quốc gia nô lệ lớn: quốc gia thứ nhất do Antigôn thành lập gồm Makêđônia và bán đảo Hy lạp, quốc gia thứ hai bao gồm Babilon Xiri, Iran, Tiểu Á và các vùng đất khác do Selơcux lãnh đạo, quốc gia thứ ba gồm Ai cập và một bộ phận Libi dưới quyền các hoàng đế Ptôlêmê, thủ đô ở Alêxanđri.

Thời kỳ từ cuộc viễn chinh của Alêxanđr đến cuộc xâm lược của người La mã, trong lịch sử Hy lạp gọi là thời kỳ Hy lạp hóa.

Trong thời kỳ này thành Alêxanđri đã phát triển thành một đô thị quốc tế, trở nên trung tâm văn hóa và thương nghiệp của miền Địa trung hải. Dân cư ở đây ngoài người Makêđônia, người Hy lạp và Ai cập ra, còn có người Xiri, Do thái, Ba tư và thương nhân từ khắp nơi đến. Triều đại Ptôlêmê ra sức khuyến khích học thuật, xây dựng tại thủ đô nhiều thư viện và viện nghiên cứu, trong đó nhiều nhà bác học nổi tiếng. Thư viện lớn ở Alêxanđri thực sự là một lâu đài khoa học, chứa khoảng 70 vạn cuốn sách chép tay, thu hút nhiều học giả khắp nơi.

Như vậy là điều kiện phát triển khoa học ở Ai cập lúc này đã khác so với các quốc gia đô thị thời Ai cập cổ. Vào thế kỷ III trước CN, nổi lên ba nhà bác học vĩ đại: Ơclit, Acsimet, Apôlôni, mà tác phẩm của họ có ảnh hưởng hết sức to lớn đối với sự phát triển sau này của hình học.

2. Chúng ta hầu như không biết gì về cuộc đời của Ơclit. Không biết ông sinh ở đâu, trong gia đình như thế nào, học ở đâu và với ai. Chỉ biết chắc rằng ông đã làm việc ở Alêxanđri *dưới triều đại* Ptôlêmê đệ nhất. Có một số chuyện liên quan đến Ơclit, nhưng đều là giai thoại. Bởi vậy có một số ý kiến cho rằng Ơclit là tên của một nhóm các nhà bác học ở Alêxanđri, kiểu như một Nicôla Bubaki ở Pháp bây giờ. Điều đó thật không có căn cứ. Dẫu sao ta cũng không nên nghi ngờ về sự tồn tại của một Ơclit.

Ơclit để lại khá nhiều tác phẩm về toán học, quang học, âm nhạc, nhưng nổi tiếng nhất vẫn là tập « Cơ bản » gồm 13 cuốn. Đó là một tác phẩm đầu tiên của thời cổ còn giữ nguyên vẹn được đến ngày nay. Trước Ơclit, còn có nhiều người viết các tập « Cơ bản », trong số đó có tập « Cơ bản » của Hypôcrat, nhưng tất cả các tác phẩm đó đều không giữ được đến bây giờ, có lẽ vì chúng không thể sánh kịp với tập « Cơ bản » của Ơclit và do đó bị lãng quên. Trong lịch sử phương Tây, « Cơ bản » của Ơclit chiếm hàng thứ hai về số lần tái bản, chỉ thua kinh thánh. Cuốn sách đó đã sống hơn 2000 năm cho đến ngày nay giá trị khoa học của nó vẫn không hề bị giảm sút. Tất cả các nhà toán học thế giới đều phải học trong cuốn sách này, như là bước đầu cần thiết để nắm được hình học. Phần lớn chương trình hình học ở trường phổ thông trên thế giới, cho đến những thời kỳ gần đây, là một sự lặp lại hầu như từng chữ 6 cuốn đầu tiên của tập « Cơ bản » đó.

Ơclit viết tập « Cơ bản » nhằm mục đích hệ thống các kiến thức hình học đã biết thành một lý thuyết toán học hoàn chỉnh, dựa trên một số tiên đề, và các định lý đều được chứng minh bằng suy diễn một cách chặt chẽ. Như vậy Ơclit chính là thủy tổ của phương pháp tiên đề hiện đại.

Mỗi cuốn trong tập «Cơ bản» đều bắt đầu bằng những định nghĩa. Ngoài ra trong cuốn thứ nhất có 5 định đề và 5 tiên đề. Sau đây là một số định nghĩa trong số 35 định nghĩa của tập «Cơ bản»:

1. Điểm là cái gì không có thành phần.

2. Đường có bề dài và không có bề rộng.

3. Mút của đường là điểm.

4. Đường thẳng là đường như nhau đối với mọi điểm của nó...

Sau đó là định nghĩa về mặt phẳng, góc, góc vuông, sự vuông góc, góc nhọn, góc tù, đường tròn, tâm, tam giác, tứ giác, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi... Ta có thể chia các định nghĩa của Ơclit thành hai loại: loại có việc làm, tức là những định nghĩa được sử dụng để xây dựng lý thuyết (ví dụ định nghĩa về góc vuông, về hai đường thẳng song song), loại thứ hai là loại mô tả, gồm những định nghĩa về sau không sử dụng (ví dụ định nghĩa điểm, đường...).

Ngày nay chúng ta đã rõ rằng trong phương pháp tiên đề hiện đại, các khái niệm «điểm», «đường thẳng» được xem là những khái niệm cơ bản không được định nghĩa trực tiếp. Chúng được định nghĩa một cách gián tiếp bằng cách buộc chúng phải thỏa mãn một hệ tiên đề.

Các định đề của tập «cơ bản» là:

1. Từ một điểm bất kỳ này tới một điểm bất kỳ khác có thể vẽ một đường thẳng.

2. Đường thẳng giới hạn đều có thể kéo dài một cách liên tục ra vô hạn.

3. Từ một tâm bất kỳ và với bán kính bất kỳ đều có thể vẽ một đường tròn.

4. Mọi góc vuông đều bằng nhau.

5. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo thành hai góc trong cùng phía có tổng bé hơn hai góc vuông thì hai đường thẳng này sẽ cắt nhau khi kéo dài chúng về phía hai góc đó.

Và sau đây là các tiên đề:

1. Hai cái cùng bằng cái thứ ba thì bằng nhau.

2. Thêm những cái bằng nhau vào những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.

3. Bớt những cái bằng nhau từ những cái bằng nhau thì được những cái bằng nhau.

4. Trùng nhau thì bằng nhau.

5. Toàn thể lớn hơn một phần.

Việc lựa chọn các định đề và tiên đề của Ơclit khá thành công, hầu hết chúng đều nằm trong danh sách các tiên đề mà sau này Hinbe đề nghị (cuối thế kỷ XIX). Nhưng các định đề và tiên đề của ông không đủ để xây dựng hình học. Trong nhiều chứng minh, ông đã phải thừa nhận những điều mà ông không nêu lên thành tiên đề. Chẳng hạn khi có hai đường tròn bằng nhau mà đường này đi qua tâm của đường kia, thì Ơclit mặc nhiên công nhận rằng chúng cắt nhau, chứ không chứng minh sự tồn tại của các giao điểm.

Ơclit thiếu hẳn các tiên đề của hình học không gian, các tiên đề về dời hình (mà hình học của ông thực chất là nghiên cứa bất biến qua phép dời) và các tiên đề liên tục.

Thiếu sót của Ơclit không phải là điều khó hiểu nếu ta nhớ rằng khoảng 2200 năm sau, Hinbe mới nêu được một hệ tiên đề không thừa và cũng không thiếu cho hình học Ơclit.

3. Ta hãy điểm qua nội dung của 13 cuốn trong tập «Cơ bản». Bốn cuốn đầu tiên gồm các kiến thức về hình học phẳng và đại số hình học. Đặc điểm của chúng là không dùng lý thuyết về các hình đồng dạng tức là không dùng số thực.

Trong cuốn 1 ta thấy các định lý về sự bằng nhau của tam giác, về thẳng góc và song song, về hình bình hành, về «diện tích» của các hình phẳng và định lý Pythago. Chữ «diện tích» chúng ta để trong dấu ngoặc kép, vì diện tích của Ơclit không phải là các số; lý thuyết diện tích của ông là các mệnh đề về sự đẳng hợp. Chẳng hạn, định lý thông thường «diện tích tam giác bằng nửa tích số của cạnh đáy và chiều cao» được Ơclit phát biểu là «*tam giác* đẳng hợp với nửa hình chữ nhật có các cạnh là cạnh đáy và chiều cao của tam giác» Định lý Pythago được phát biểu dưới dạng: «Hình vuông dựng trên cạnh huyền của một tam giác vuông đẳng hợp với hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông».

Cuốn 2 gồm các mệnh đề cơ bản của «đại số hình học», tức là những đẳng thức về đại số, nhưng phát biểu như là sự đẳng hợp giữa các hình. Ví dụ, đẳng thức $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ được phát biểu là: «Hình vuông dựng trên tổng của hai đoạn thẳng thì đẳng hợp với hai hình vuông dựng trên các đoạn đó và hai hình chữ nhật có hai cạnh là hai đoạn đó».

Cuốn 3 nói về các tính chất của đường tròn, tiếp tuyến và giây cung. Ở đây đặc biệt có định lý về phương tích của một điểm đối với đường tròn.

Cuốn 4 trình bày phép dựng các đa giác đều với số cạnh là 3, 4, 5, 10, 15. Phương pháp dựng hình 15 cạnh đều rất hay và có lẽ là của chính Ơclit.

Cuốn 5 trình bày lý thuyết tỉ lệ của Ơđôcx với sự chính xác cao và chặt chẽ về lập luận.

Trong cuốn 6 chúng ta thấy lý thuyết về các hình đồng dạng và ứng dụng vào các bài toán tương đương với việc giải phương trình bậc 2 dạng $\frac{b}{c}(a \pm x)\,x = S$.

Cuốn 7, 8 và 9 có nội dung là số học về các số nguyên được trình bày dưới dạng hình học. Ở đây ta gặp thuật tính Ơclit về việc tìm ước chung lớn nhất.

Cuốn 10 gồm các phép dựng hình hình học để tìm các căn bậc hai của các số nguyên. Ta thấy có các phép dựng các đoạn thẳng dạng $a \pm \sqrt{a^2 - b}$, $\sqrt{a^2 + b} \pm a$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ các căn bậc hai và căn bậc 4 của chúng, v.v...

Ba cuốn cuối cùng nói về hình học không gian.

Cuốn thứ 11 gồm các định lý về vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng, định lý về góc phẳng của góc đa diện, về sự song song và sự bằng nhau về thể tích của các hình chóp có đáy và chiều cao tương đương.

Cuốn thứ 12 nói về tỉ số diện tích các hình tròn và tỉ số thể tích các hình đồng dạng. Trong các định lý về thể tích của hình chóp và hình nón, Ơclit đã sử dụng phương pháp «lấy hết» của Ơđôcx.

Cuối cùng cuốn 13 trình bày tỉ lệ thể tích của các hình cầu và cách dựng 5 loại khối đa diện đều. Mệnh đề cuối cùng khẳng định rằng ngoài 5 loại khối đa diện đều đó ra không còn một loại nào khác.

Toàn bộ tác phẩm của Ơclit thể hiện ý đồ muốn xây dựng hình học một cách hết sức chặt chẽ. Bởi vậy ta thấy rằng ông đã không dùng trung điểm của một đoạn thẳng cho đến khi mà chưa chứng minh được sự tồn tại của nó. Trong cuốn 3 ông đã chứng minh một cách thận trọng rằng « một đường thẳng đi qua hai điểm của đường tròn thì phải đi qua những điểm nằm trong đường tròn ». Nhưng như trên ta đã nói, ý đồ ấy không thực hiện được một cách triệt để. vì số tiên đề của Ơclit không đủ dùng.

Một nhận xét khác : ta không hề gặp trong tập « cơ bản » những ứng dụng thực tiễn của hình học. Thậm chí không thấy nhắc đến thước và compa là những dụng cụ dựng hình để dựng đường thẳng và đường tròn. Điều đó không phải riêng gì trong tập « cơ bản » : đó là một tác phong chung của thời bấy giờ trong phạm vi hình học. Các vấn đề của toán học ứng dụng và nhất là kỹ thuật tính toán không được coi trọng và do đó thành tựu trong lĩnh vực đó rất nghèo nàn so với các vấn đề lý thuyết.

Để kết thúc phần trình bày ngắn gọn này về nội dung của tập « Cơ bản », chúng ta nhắc lại rằng trải qua hàng bao nhiêu thế hệ các nhà toán học tập « Cơ bản » vẫn là một mẫu mực đáng noi theo về phương pháp xây dựng một lý thuyết toán học. Nếu như đến cuối thế kỷ 19 chúng ta đã đưa ra một hệ tiên đề đầy đủ về hình học, thì thắng lợi đó chính là đã bắt nguồn từ tập «Cơ bản» của Ơclit vậy!

4. Acsimet thuộc về một số ít các nhà bác học thiên tài mà tác phẩm của họ có tác dụng to lớn và quyết định đối với lịch sử khoa học, và do đó đối với lịch sử phát triển của loài người. Về mặt đó Acsimet có thể sánh được với Niutơn.

Ông sinh năm 287 trước CN trong một gia đình buôn bán giàu có ở thành Xiracut (phía nam đảo Xixin). Do ảnh hưởng của người cha là nhà thiên văn Phiđin, từ nhỏ Acsimet đã có lòng mê say nghiên cứu toán học và cơ học. Acsimet đã sang Alêxanđri làm việc trong thư viện nổi tiếng ở đó. Ông đã làm quen với nhiều nhà toán học ở Alêxanđri và khi trở về Xiracut ông vẫn còn giữ liên hệ thường xuyên với họ. Ông thường viết thư cho nhà thiên văn Kônông và sau khi ông này chết thì viết thư cho Đôxiphe và Eratôsthen. Những bức thư này là những công trình khoa học thực sự, mỗi bức thư nói về một chủ đề toán học trong đó thông báo những kết quả mới được chứng minh chính xác và đầy đủ.

Khi trở về Xiracut quê hương, ông làm việc rất nhiều và hăng say. Nhưng Acsimet không chỉ giới hạn trong phạm vi lý thuyết. Ông còn là một nhà thực nghiệm rất sáng tạo. Khi còn ở Ai cập ông đã phát minh ra chân vịt (mà sau này còn gọi là vít Acsimet) để hút nước hiện nay còn được sử dụng ở Bắc phi.

Tài năng về mặt đó của Acsimet được thể hiện rực rỡ trong thời gian thành Xiracut bị phong tỏa bởi quân đội xâm lược La mã dưới sự chỉ huy của thống tướng

Macxoen. Những máy bắn đá và gương làm cháy lương thảo giặc của ông đã làm cho kẻ thù thiệt hại và khiếp sợ, thành Xiracut chỉ rơi vào tay quân La mã khi có nội phản. Acsimet bị quân thù giết chết ngay những giờ phút đầu tiên khi thành phố thất thủ. Lúc ấy vào mùa thu năm 212 trước CN.

Cống hiến của Acsimet về khoa học rất lớn lao và phong phú. Ông đã áp dụng những phương pháp toán học tế nhị nhất thời bấy giờ vào việc nghiên cứu các bài toán hình học và cơ học. Ngược lại chính những định lý về cơ học đặc biệt là nguyên tắc đòn bẩy, đã được Acsimet áp dụng để tìm ra những kết quả mới về toán học. Ngoài ra, ông còn có những tác phẩm về phương pháp tính gần đúng.

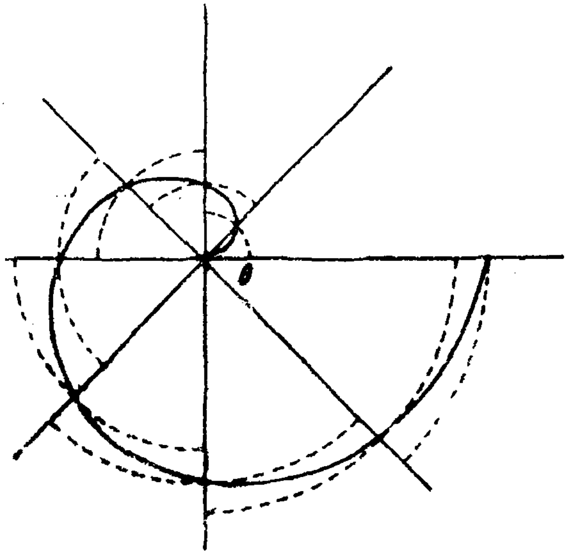
Không có tham vọng trình bày toàn bộ những cống hiến (dầu chỉ trên những nét lớn) của Acsimet, chúng ta hãy dừng lại trên phương pháp tổng trên, tổng dưới (thực chất là phương pháp tích phân).

5. Phương pháp tổng trên, tổng dưới, mà sau này ta gọi là tổng Riman hay Đạcbu, được Acsimet trình bày trong tác phẩm « Về hình cầu và hình trụ », « Về đường xoắn ốc », « Về các phỏng nón và phỏng cầu » như là một phương tiện để tính thể tích và diện tích. Để làm thí dụ, ta đưa ra đây phương pháp tình diện tính S vòng đầu tiên của đường xoắn

$\rho = a \dfrac{\varphi}{2\pi}$. Acsimet chia góc ở tâm O (bằng 2π)

thành n phần bằng nhau, và gọi $\bar{S}$ là tổng diện tích các hình quạt tròn ngoại tiếp, S là tổng diện tích các hình quạt tròn nội tiếp (hình 5).

Hình 5



$$\bar{S} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\lambda a}{n}\right)^2 \frac{\pi}{n} > \frac{n^3}{3} \, \frac{a^2}{n} \, \frac{\pi}{n} = \frac{a^2 \pi}{3},$$

$$S = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda a}{n}\right)^2 \frac{\pi}{n} < \frac{n^3}{3} \, \frac{a^2}{n^2} \, \frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{3} \pi$$

(ở đây Acsimet đã sử dụng công thức được chứng minh từ trước.

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (\lambda h)^2 = \frac{n\,(n+1)\,(n+1)\,h^2}{6} \,)$$

Acsimet đã chứng minh rằng hiệu $\bar{S} - S$ có thể làm cho nhỏ vô cùng bằng cách lấy n đủ lớn, và vì $S < \bar{S}$

nên từ đó ông kết luận $S = a^2 \frac{\pi}{3}$ bằng cách chứng minh phản chứng.

Như vậy về thực chất, Acslmet đã tìm thấy:

$$\int_0^a x^2 xd = \frac{a^3}{3}$$

Bằng cùng phương pháp đó ông đã tính thể tích của hình viên phân elipxôit và hypecbôlôit tròn xoay (ông gọi elipxôit là phỏng cầu còn hypecbôlôit và parabôlôit tròn xoay là phỏng nón), và về thực chất cũng đưa đến công thức tích phân nói trên. Rõ ràng là Acsimet thấy rất rõ *một sự tương tự giữa ba bài toán đó. Nhưng ông chưa* đủ phương tiện để nêu ra một khái niệm chung về tích phân định hạn, mặc dầu ông hình dung rất rõ.

Những kết quả khác trong cuốn «Về phỏng nón và phỏng cầu tương đương với cái công thức sau đây:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$$

$$\int_0^a (x^2 + b\,x)\,dx = \frac{a^3}{3} + b\frac{a^2}{2}$$

Nhờ phương pháp tổng trên và tổng dưới, và các tiên đề sau đây Acsimet đã giải quyết được nhiều bài toán khó về độ dài cung và diện tích mặt:

« 1. Trong những đường có chung 2 mút, đường thẳng là đường ngắn nhất.

2. Hai đường khác nhau cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng có hai mút chung thì sẽ luôn luôn không bằng nhau nếu chúng cùng lồi về một phía, và một đường

hoặc bị chứa trong đường kia cùng với đoạn thẳng nối hai điểm mút, hoặc một phần của nó bị chứa còn một phần thì trùng với đường kia. Khi đó đường bị chứa sẽ bé hơn.

3. Tương tự: trong những mặt có chung biên nằm trên mặt phẳng, mặt phẳng là bé nhất.

4. Hai mặt khác nhau có biên chung nằm trên một mặt phẳng thì luôn luôn không bằng nhau nếu chúng cùng lồi về một phía và một trong chúng hoặc bị chứa hoàn toàn trong mặt kia và mặt phẳng chứa biên, hoặc một phần bị chứa còn một phần thì trùng với mặt kia. Khi đó mặt bị chứa sẽ bé hơn.

5. Nếu hai đường, mặt, vật thể không bằng nhau, thì cái lớn sẽ lớn hơn cái bé một đại lượng mà gấp nó lên một số lần sẽ được một đại lượng lớn hơn bất kỳ đại lượng nào trong số những đại lượng có thể đặt trong một tỉ lệ xác định».

Những tiên đề này cho phép Acsimet tìm diện tích mặt cầu và viên phân cầu, và tìm được độ dài đường tròn với độ chính xác tùy ý. Ông đã nội tiếp trong đường tròn một đa giác đều có số cạnh là bội của 4 và quay đường tròn và đa giác đó quanh một đường kính nối hai đỉnh. Khi đó diện tích S_n của mặt tròn xoay sinh bởi đa giác đó là tổng của các hình nón cụt. Sau đó ông lại xét đa giác đều đồng dạng với đa giác nói trên nhưng ngoại tiếp đường tròn, và tính diện tích S_n của mặt tròn xoay sinh bởi đa giác đó. Theo tiên đề 4 thì:

$$S_n < S < \overline{S}_n$$

trong đó S là diện tích mặt cầu. Acsimet tính được.

$$S_n = \sum_{K=1}^{n-1} 2\pi r \sin\frac{k\pi}{n}\, r\, \frac{\pi}{n} = 2r^2\pi \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$< 4r^2\pi \text{ tương tự } \overline{S_n} > 4r^2\pi .$$

Khi số cạnh n của đa giác tăng lên thì S_n tăng và $\overline{S_n}$ giảm theo tiên đề 4. Ngoài ra Acsimet chứng minh rằng $\overline{S_n} : S_n$ với n càng tăng thì càng tiến tới đơn vị.

Từ đó suy ra $S = 4\pi r^2$. Kết quả đó tương đương với :

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 1$$

Cũng bằng cách tương tự trên đây, khi tính độ dài đường tròn bằng cách nội tiếp và ngoại tiếp các đa giác đều 96 cạnh, ông tìm thấy :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Ngoài ra trong các tác phẩm của Acsimet, ta còn thấy ông sử dụng phương pháp vi phân (khi xác định tiếp tuyến) và phương pháp cực trị. Ông đã giải bài toán cực trị của hàm $x^2. (a - x)$ và tìm thấy rằng khi $x = 2a/3$ hàm đạt giá trị cực đại là $4a^3/27$. Vào thế kỷ XVII, Pixi và Tôrixenhi đã áp dụng thành công phương pháp của ông để tìm cực trị của hàm :

$$x^m. (a - x^n),\ 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Các nghiên cứu của Acsimet không được phát triển trong tình hình toán học thời bấy giờ vì con đường của ông vạch ra đã vượt quá thời đại của ông rất nhiều. Đã hai lần loài người quay trở về với Acsimet và đã hai lần các nhà bác học định cố gắng tiến lên theo con đường của ông. Lần thứ nhất xảy ra ở Ai cập.

Khi Xabit Ipn Kora (836-901) cùng các nhà bác học thuộc trường phái của ông đã nắm được phương pháp tổng trên, tổng dưới và tính được một số tích phân mới. Nhưng họ cũng không tiến được xa hơn. Lần thứ hai ở Âu châu vào thế kỷ XVI — XVII sau khi Viet và Đecac phát minh ra đại số ký hiệu cũng như khi Đecac và Pecma phát minh ra hình học giải thích. Lúc đó đã có điều kiện để phép tính vô cùng bé ra đời. Nhưng để đạt được điều đó đã phải tập trung trí tuệ của biết bao nhà bác học lỗi lạc từ Kêple, Galilê cho đến Niutơn, Lêpnitx. Tất cả họ, trên một mức độ nào đó đều dựa trên công trình của Acsimet vĩ đại.

6. Nhà hình học vĩ đại thứ ba của thời đại Hy lạp hóa là Apôlôni (khoảng năm 200 — 170 trước CN) quê ở vùng Tiểu Á. Ông đến Alêxanđri lúc còn niên thiếu và học tập dưới sự hướng dẫn của các nhà toán học thuộc trường phái Ơlcit. Mặc dầu các công trình của ông chưa thể so sánh với những tác phẩm thiên tài của Acsimet, nhưng ông đã để lại trong lịch sử hình học những trang cực kỳ quan trọng và sáng ngời. Mang lại vinh quang cho ông là tác phẩm tuyệt đẹp «Về các cônic» gồm 8 cuốn nói về các giao tuyến cônic.

Như ta đã thấy, vào thế kỷ V trước CN, Menêc đã biết về giao tuyến cônic xem như là giao tuyến của một mặt nón tròn xoay với một mặt phẳng vuông góc với đường kính. Apôlôni đã xét vấn đề một cách tổng quát hơn. Trước hết ông xét mặt nón tròn xoay gồm hai tầng. Như vậy đường hypecbôl của ông sẽ có hai nhánh. Sau nữa ông xét mặt nón bất kỳ, với góc ở đỉnh tùy ý, và xét giao tuyến tạo với đường sinh một góc tùy ý. Về thực chất ông đã xét các đường cônic không phải theo một hệ tọa độ vuông góc mà theo một hệ tọa độ xiên nào đó, với một trục tọa độ là đường kính và trục kia là tiếp tuyến của cônic tại mút của đường kính đó.

Sau khi định nghĩa cônic nhờ không gian như vậy, Apôlôni cũng đã đưa nó về dạng phương trình và ông đã phân loại đường cônic theo dạng phương trình của chúng, như vậy là ông đã xét vấn đề theo quan điểm của hình học giải tích. Với hệ tọa độ như đã nói ông tìm thấy phương trình của parabôl, elip và hypecbôl lần lượt là:

$$y^2 = 2px \ , \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \ , \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

Apôlôni biết rất rõ rằng sự phân loại ấy chỉ có nghĩa nếu dạng phương trình không thay đổi khi ta thay đổi hệ tọa độ. Trong cuốn I ông đã giải quyết vấn đề đó. Sau khi định nghĩa các giây cung liên hợp và các tính chất như: giây cung liên hợp với một đường kính và đi qua mút của đường kính chính là tiếp tuyến, ông đã chứng minh rằng: dạng phương trình sẽ không thay đổi nếu ta chuyển sang hệ tọa độ mới có một trục là đường kính và trục kia là tiếp tuyến của cônic tại mút của đường kính. Như vậy là để phân loại đường cong, Apôlôni đã xét các tính chất của phương trình đại số biểu thị cho chúng, tức là những tính chất không thay đổi qua phép biến đổi hệ tọa độ nói trên. Chỉ đến cuối thế kỷ XIX tư tưởng này của Apôlôni mới được hiểu rõ sau khi Klêin đưa ra « chương trình Eclanghen », trong đó hình học được định nghĩa như là khoa học về các bất biến của một nhóm các phép biến hình.

Trong các cuốn tiếp sau, Apôlôni đã nghiên cứu các đường cônic một cách kỹ càng, nêu lên những khái niệm và các tính chất của chúng như: tiêu điểm, cực tuyến, cực điểm, tiếp tuyến,.pháp tuyến, các vấn đề như: số giao điểm của các cônic, các định lý về diện tích và cả các định lý nổi tiếng sau đây:

2. Tổng bình phương các đường kính liên hợp của một elip bằng tổng bình phương các trục chính.

2. Hiệu bình phương các đường kính liên hợp trong một hypecbôl bằng hiệu bình phương các trục chính.

3. Hình bình hành dựng trên hai đường kính liên hợp của một elip hoặc hypecbôl có diện tích không đổi.

Trong tác phẩm của mình, «Apôlôni không những chỉ phát triển phương pháp của hình học giải tích mà còn cả phương pháp của hình học xạ ảnh, nghiên cứu những tính chất không thay đổi qua phép chiếu xuyên tâm (lý thuyết cực tuyến, cực điểm về thực chất là thuộc hình học xạ ảnh).

Trong lịch sử toán học, giao tuyến cônic một thời gian dài không tìm thấy sự áp dụng, nếu không để ý đến việc nghiên cứu sự phản hồi của tia sáng theo mặt gương hình parabôlôit tròn xoay. Chỉ đến thế kỷ XVII tư tưởng của Apôlôni mới được phục hồi: Fecma và Đêcac chuyển phương pháp của ông sang ngôn ngữ đại số làm cơ sở cho hình học giải tích. (Nhưng trong phạm vi cơ học thiên thể thì các đường cônic đã được áp dụng sớm hơn một ít: Kêple đã chứng minh rằng các hành-tinh trong hệ thống mặt trời chuyển động theo đường elip mà mặt trời là một tiêu điểm.

Galilê chứng tỏ rằng một viên đá ném đi thì chuyển động theo đường parabôl. Nhưng tất cả những điều đó đều muộn hơn rất nhiều so với phát minh của Apôlôni).

Như vậy, giao tuyến cônic của Apôlôni là một thí dụ về một lý thuyết toán học được phát sinh trước khi nó cần thiết phát sinh ra. Trong toán học không hiếm những trường hợp như vậy. Chẳng hạn, cơ sở cho học thuyết tương đối của Anhxtanh (1905 — 1916) đã được xây dựng bởi Gaux năm 1827 và Riman năm 1854 ; lý thuyết nhóm áp dụng rộng rãi trong cơ học lượng tử được sinh ra rất sớm so với môn học đó. Nhưng dầu sao lý thuyết giao tuyến cônic của Apôlôni vẫn là một thí dụ lạ lùng nhất.

7. Sau Apôlôni, bắt đầu một sự ngừng trễ về khoa học. Những nghiên cứu riêng lẻ trong khoảng hai thế kỷ sau đó không vượt phạm vi những vấn đề mà ba nhà hình học vĩ đại là Ơclit, Acsimet và Apôlôni đã đề cập đến. Nguyên nhân căn bản của tình hình nói trên là những cuộc chiến tranh liên miên xảy ra trên lãnh thổ của các quốc gia Hy lạp hóa. Đó chính là thời kỳ đế quốc La mã ra đời (vào thế kỷ III trước công nguyên). Quân đội La mã xâm chiếm Xiracut năm 212 trước CN, Cacphahen và Hy lạp năm 146 trước CN, Babilon năm 64 trước CN và Ai cập năm 30 trước CN. Các quốc gia Hy lạp hóa lần lượt mất sự độc lập về chính trị và trở nên những tỉnh thành của La mã.

Đế quốc La mã trong khi tiến hành các cuộc chiến tranh xâm lược đã phá hoại các trung tâm khoa học mà sau này không thể phục hồi lại được. Thư viện giàu sách vở ở Alêcxanđri bị đốt cháy một phần khi quân đội Xêda chiếm thành này (về sau còn bị cháy một số lần nữa).

Cuộc sống kinh tế và văn nóa của các quốc gia Hy lạp hóa bị ngừng trệ. Những tư tưởng sáng tạo của nhân dân các nước này thôi không còn ảnh hưởng tới các dân tộc phương Đông nữa. Ngược lại bắt đầu nảy sinh tư tưởng sùng bái phương Đông một cách huyền bí. Con người muốn thoát khỏi cuộc sống hiện thực đầy đau khổ bằng cách đi tìm những học thuyết tôn giáo khác nhau hứa hẹn cho họ một cuộc sống tốt đẹp hơn ở một thế giới khác.

Chỉ có vào những thế kỷ đầu tiên sau công nguyên, khi đế quốc La mã đã ở vào thế vững mạnh, tình hình kinh tế bắt đầu ổn định, thì nền khoa học Hy lạp mới dần dần sống lại.

Thành Alêxanđri lại dần dần khôi phục được vị trí trung tâm văn hóa. Ở đây vào hồi bấy giờ nổi lên tên tuổi của hai nhà hình học xuất sắc : Hêrông và Mênêlai.

8. Hêrông (thế kỷ I) là một nhà kỹ sư tài giỏi và một nhà toán học nghiên cứu và bình luận tập « Cơ bản » của Ơclit. Ông viết cuốn « Mêtric », trong đó tập hợp các công thức khác nhau để đo đạc các hình. Ở đây ta gặp công thức nổi tiếng của Hêrông để tính một tam giác theo ba cạnh của nó. « Mêtric » được viết ngắn gọn và rõ ràng. Phần lớn là những công thức và minh họa bằng thí dụ. Nếu có chứng minh thì chứng minh gọn và đúng. Hêrông còn đưa vào tác phẩm mình những công thức gần đúng. Ví dụ để tìm căn bậc hai của một số, ông đã dùng công thức $\sqrt{N} \approx \left(\frac{1}{2}a + \frac{N}{a}\right)$ trong đó a là số nguyên lớn nhất có bình phương bé hơn N.

Mênêlai (thế kỷ I — II) là một nhà thiên văn. Năm 98, ông tiến hành quan sát thiên văn ở Rôm và viết thành một cuốn sách, sau này không tìm thấy. Cuốn «Mặt cầu» của ông còn truyền lại được ngày nay là do bản dịch ra tiếng A rập của Xabit Ipn Kora. Trong cuốn sách này, Mênêlai đã trình bày hệ thống hình học trên mặt cầu, và đó chính là hệ thống hình học đầu tiên khác với hình học Ơclit. Ông đã chứng minh những tính chất cơ bản của tam giác cầu, trường hợp bằng nhau của chúng và chứng minh rằng tổng các góc trong tam giác cầu lớn hơn 180°.

Một phần cuốn sách dành cho lượng giác trên mặt cầu. Trong phần này ta thấy định lý nổi tiếng của Mênêlai về các tuyến của tam giác: Nếu một cát tuyến cắt các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC tại các điểm C', A', B' thì

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

Công thức đó chuyển sang mặt cầu nhờ phép chiếu xuyên tâm đã trở thành một công thức về các dây cung trên mặt cầu.

9. Vào những thế kỷ đầu tiên sau công nguyên, đạo Cơ đốc trở nên quốc giáo của La mã và là một kẻ thù thực sự của khoa học. Thư viện bị phá hủy, sách vở bị đốt cháy, các nhà khoa học bị nhục hình. Điều đó không lấy làm lạ: khoa học làm cho con người có óc phê phán, có thói quen phân tích khoa học các sự kiện, mà điều đó thì không có lợi cho sự truyền bá đạo cơ đốc của nhà thờ. Khẩu hiệu của nhà thờ lúc bấy giờ là «Sau khi có Đức chúa, chúng ta không cần một sự

hiểu biết nào khác. Sau khi có kinh Phúc Âm chúng ta không cần nghiên cứu gì nữa hết ».

Thành phố Alêxanđri bị sụp đổ. Các tổ chức khoa học các trường học phi thiên chúa giáo đều bị đóng cửa. Năm 412 trường phái khoa học ở Alêxanđri bị giải tán, nhà nữ toán học Ghipatia người lãnh đạo của trường phái bị phanh thây. Sự nghiên cứu toán học thực sự bị ngừng trệ.

Trong thời kỳ này, về những thành công trong phạm vi hình học chỉ có thể kể đến cuốn « Tuyển tập toán học » của Pap (thế kỷ III), liên quan tới hình học xạ ảnh và việc nghiên cứu các đường cong trên mặt xuyến và một số mặt khác. Trong tác phẩm này ta tìm thấy định lý nổi tiếng của ông : « Nếu trên một đường thẳng ta lấy ba điểm A, B, C và trên một đường thẳng khác ta cũng lấy ba điểm A′,B′,C′ thì giao điểm của AB′ và A′B, BC′ và B′C, AC′ và A′C nằm trên một đường thẳng ». Định lý này về sau được Đêcac và Paxcan mở rộng (thế kỷ 17), đánh dấu sự xuất hiện môn hình học xạ ảnh.

10. Hình học trong thời đại Hy lạp cổ đã có một tác dụng lớn lao đối với sự phát triển hình học và toán học nói chung. Chính vào thời kỳ này, hình học đã thực sự trở thành một khoa học suy diễn, và đạt được những tiến bộ rất lớn trong việc hình thành các phương pháp để nghiên cứu nó. Các thành tựu của hình học Hy lạp như lý thuyết về các đại lượng vô ước, việc nghiên cứu các bài toán không thể giải quyết được bằng thước và compa, nghịch lý về vô hạn và phương pháp « lấy hết », phương pháp tích phân và vi phân của Acsimet, giao tuyến cônic của Apôlôni, phương pháp

tiền đề, hình học cầu của Mênêlai..., đã có tác dụng quyết định cho sự phát triển của toán học trong rất nhiều thế kỷ sau đó. Ở đây xuất hiện những tư tưởng lớn mà phải hàng ngàn năm sau mới hoàn thành được. *Đã nhiều lần các nhà toán học ngày nay cảm thấy một* cách rất rõ rằng họ đang làm những điều mà thời cổ Hy lạp người ta đã làm. Đã nhiều lần các nhà toán học ngày nay phải quay trở về với Ơđôcx, Ơclit, Acsimet... và lại phát hiện ra ở những con người vĩ đại đó những tư tưởng và phương pháp mới giúp ích rất nhiều cho sự tiến lên của toán học hiện tại. *Và điều đó chắc chắn vẫn sẽ còn xảy ra.*

Chương IV

HÌNH HỌC Ở TRUNG QUỐC, ẤN ĐỘ VÀ CÁC NƯỚC HỒI GIÁO VÀO THỜI TRUNG CỔ

1. Nền văn hóa Trung Hoa xuất hiện từ thiên niên kỷ II trước CN (thiên niên kỷ — 1000 năm) ở lưu vực sông Hoàng và sau đó lan dần đến lưu vực sông Dương Tử. Nhà nước Trung Hoa đầu tiên xuất hiện từ thời nhà Ân (thế kỷ XVIII — XII trước CN). Người ta đã phát hiện những đồ sành vào khoảng thời kỳ này, trên đó có vẽ những hình trang trí hình học như hình 5 cạnh đều, 8 cạnh đều và 12 cạnh đều. Vạn lý trường thành nổi tiếng cũng được xây dựng vào thời kỳ này.

Vào thế kỷ VI trước công nguyên, xuất hiện nhà tư tưởng nổi tiếng Khổng tử (năm 551 đến 479 trước CN), người sáng lập ra phái Nho giáo, đồng thời cũng bắt đầu xuất hiện khoa toán học và thiên văn học. Đã có những cuốn sách giáo khoa đầu tiên về toán học, mặc dầu hiện nay vẫn chưa tìm thấy được, nhưng có lẽ cũng tương tự như cuốn «Cửu chương toán thuật» mà ta sẽ nói kỹ vào đoạn sau.

Các tài liệu toán học cổ đại Trung Quốc còn lưu được đến ngày nay thường nói về tình hình toán học vào cuối thiên niên kỷ I trước CN. Đó là vì vào năm 213 trước CN Tần Thủy hoàng ra lệnh đốt hết sách vở của phái Nho giáo. Tuy thế, sang đến đời nhà Hán, các cuốn sách cổ dần dần được khôi phục lại, chủ yếu dựa vào trí nhớ. Vào thế kỷ II trước CN, kỹ thuật làm giấy được phát minh, giúp cho việc lưu truyền các văn bản chép tay về toán học được thuận tiện hơn. Tài liệu toán học cổ nhất vào thời kỳ này.

Vào đời Đường (thế kỷ XII — X) Trung Quốc chiếm đoạt một loạt nước láng giềng, mở rộng đất đai từ biển Đông sang tới Tibê và từ Vạn Lý Trường Thành đến biên giới Việt nam. Sự liên hệ buôn bán giữa Trung Quốc với Ấn độ, Nam Dương, Irăng, Trung Á bắt đầu mở rộng. Đến thế kỷ VIII, Đạo Phật nảy sinh ở Ấn độ được truyền bá sang Trung Quốc, đồng thời với cả những kiến thức khoa học của Ấn độ.

Từ thế kỷ X — XIII, thủ công nghiệp và nghệ thuật phát triển cao. Người ta đã phát minh ra địa bàn và thuốc súng. Vào thế kỷ XIII, Mông cổ xâm chiếm Trung Quốc, họ bắt về nước mình các nhà chuyên môn, thợ lành nghề về kỹ thuật xây dựng và kỹ thuật vũ khí, cả thầy bói và thầy cúng. Những người này sau đó lại theo đoàn quân xâm lược Mông cổ sang vùng Irăng và Trung Á, vì thế về sau tại các vùng này, xuất hiện các nhà bác học Trung Quốc. Tiếp đó, các nhà bác học của các nước Hy Lạp hóa cũng bắt đầu sang Trung Quốc, trước khi người Âu đặt chân lên đất nước bao la này. Như vậy có một sự ảnh hưởng lẫn nhau, và sự liên hệ mật thiết giữa các nền văn hóa Trung Quốc, Ấn độ, Trung Á và cả Hy Lạp nữa.

Trong thời cổ đại, việc giảng dạy toán học ở Trung Quốc chiếm một vị trí khá quan trọng. Hệ thống giáo dục được xác định từ hồi nhà Chu vào thế kỷ V, việc giảng dạy và thi cử toán học được tiến hành một cách nghiêm túc. Vào đời nhà Đường, trong chương trình học của nhà nước, toán học được giảng dạy và học tập trong vòng 7 năm. Muốn được bổ dụng thành những quan chức nhà nước cần phải tham dự một số kỳ thi, trong đó có môn toán. Người ta đã tái bản nhiều lần trong nhiều thế kỷ tập «Cửu chương toán thuật» xem như tài liệu giáo khoa.

Nếu như tập «Cơ bản» của Ơclit là một tác phẩm thống nhất, tổng kết được những thành tựu về hình học trước đó, và được viết lại dưới một quan điểm mới thì tập «Cửu chương toán thuật» chỉ là một tác phẩm được in lại không thay đổi, tuy có bổ xung thêm do người viết. Bởi vậy trong đó ta thấy nhiều sự khác biệt nhau về trình độ khoa học.

2. «Cửu chương toán thuật» (tức là toán học trong 9 chương) được Trần Sanh (chết năm 150) viết lại cuối cùng, bao gồm 246 bài toán trình bày rập khuôn : trước hết nêu bài toán, sau đó nêu đáp số và tóm tắt cách giải. Như đã nói, trình độ khoa học thể hiện qua các bài toán rất khác nhau. Chương cuối cùng có lẽ do chính Trần Sanh viết, còn những chương trước có liên quan với những thời kỳ sớm hơn nhiều.

Chương I «Phương điền» dành cho việc tính diện tích. Diện tích của hình chữ nhật, hình vuông được tính một cách chính xác. Khi tính diện tích hình tròn, hình quạt... người ta sử dụng số $\pi = 3$.

Các chương tiếp theo dành cho các bài toán về số học.

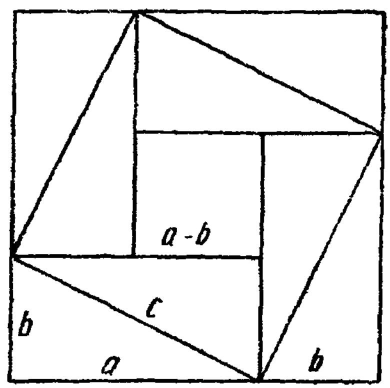
Chương cuối cùng gồm những bài toán xác định các khoảng cách và chiều cao không tới được nhờ định lý Pythago và tính chất của tam giác đồng dạng.

Về định lý Pythago thì vào khoảng năm 1100 trước CN người ta đã biết tam giác với ba cạnh 3, 4, 5 là tam giác vuông (Trần Hạo) và đến thế kỷ VI trước CN, người ta đã biết trong trường hợp tổng quát (Seng Xư). Xem chương IX của «Cửu chương toán thuật» ta có thể đoán được rằng sự chứng minh định lý Pythago được tiến hành trên hình vẽ. Một hình vuông dựng trên tổng hai cạnh a, b của tam giác vuông có thể đặt dưới dạng tổng hình vuông dựng trên cạnh huyền c và bốn hình tam giác bằng tam giác đã cho (hình 6). Mặt khác nó cũng có thể đặt dưới dạng tổng của 4 hình chữ nhật cạnh a, b và hình vuông cạnh $a - b$. Tức là

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2 = 4ab + (a-b)^2$$

Từ đó suy ra $c^2 = a^2 + b^2$

Hình 6



Trong chương này còn có những bài toán mà về sau ta lại tìm thấy trong tác phẩm của các nhà toán học Ấn độ là Bracmagupta (thế kỷ VII) và B.Khackara (XII) như bài toán về cây lau mọc giữa hồ nước hình vuông hay vẻ một cây gẫy mà ngọn dính với đất và cách gốc một khoảng nào đó. Những bài toán này đưa đến việc tìm các đại lượng b, c sao cho

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)\ (c - b)$$

mà đã biết a và $c + b$ hoặc $c - b$. Quy tắc giải được biểu thị bằng các công thức:

$$c + b = \frac{a^2}{c - b};$$

$$c - b = k.$$

Khi đó hoặc $2c = \frac{a^2}{k} + k \rightarrow c = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{k} + k\right)$

hoặc $2b = \frac{a^2}{k} - k \rightarrow b = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{k} + k\right)$

Người Trung Quốc cũng biết cách xác định bán kính r của đường tròn nội tiếp trong tam giác vuông có cạnh góc vuông a, b:

$$r = \frac{ab}{a + b + c}, \qquad \text{trong đó } c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Điều đó chứng tỏ rằng họ đã biết các sự kiện hình học như: bán kính vuông góc với tiếp tuyến tại tiếp điểm, hai tiếp tuyến vẽ từ một điểm thì bằng nhau ...

Trong một bài toán khác ta thấy có sử dụng đến tính chất: góc nội tiếp trong nửa đường tròn là góc vuông.

3. Từ thế kỷ I đến thế kỷ III, các nhà toán học Trung Quốc, có lẽ do ảnh hưởng của Hy lạp và Ấn độ bắt đầu nghiên cứu việc chính xác hóa tỉ số giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó.

Nhà triết học và thiên văn học Trương Hành (78— 139) chứng minh rằng bình phương độ dài đường tròn và bình phương chu vi hình vuông ngoại tiếp tỉ lệ với 5 và 8. Như vậy $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162$. Kết quả này chúng ta cũng tìm thấy ở nhà toàn học Ấn độ Bracmagupta (thế kỷ VII và Angôret thế kỷ IX). Nhà bác học và nhà chỉ huy quân sự Van Phan (chết năm 267) có kết quả tốt hơn $\pi = 142/45 = 3{,}155$. Ta không biết được phương pháp tìm ra kết quả đó. Lưu Huy (thế kỷ III) trong bài bình luận về « Cửu chương toán thuật » đã xét một đa giác đều nội tiếp trong đường tròn. Ông lập luận rằng diện tích hình tròn bé hơn diện tích hình gồm đa giác n cạnh nội tiếp và n hình chữ nhật ngoại tiếp các hình viên phân thừa ra, và đi đến bất đẳng thức:

$$S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n)$$

trong đó S_{2n} và S_n lần lượt là diện tích hình đa giác đều 2n cạnh và n cạnh nội tiếp, S là diện tích hình tròn. Trong trường hợp đường tròn có bán kính 10 và $n = 96$, ông tìm thấy

$$314\frac{64}{625} < S < 314\frac{169}{625}$$

Do đó ông lấy diện tích hình tròn là 314, tức $\pi = 3{,}14$. Tiếp tục với $n = 3072$, Lưu Huy nhận được giá trị $\pi = 3{,}14159$. Nhà thiên văn học, toán học và kỹ sư Tổ Sung Chi (430-501) đã tính giá trị π với độ chính xác khá cao.

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Ông còn tìm ra $\pi = 355/113$. Kỷ lục về sự chính xác đó mãi đến thế kỷ XV mới bị phá bởi An Kasi, và giá trị $\pi = 355/113$ lại còn được tìm thấy vào thế kỷ XVI bởi nhà toán học Hà lan Ốttô.

4. Các tài liệu lịch sử toán đều chứng tỏ rằng từ thế kỷ XIV nền toán học Trung Quốc bước vào một giai đoạn đình trễ khá dài. Các kiến thức đã có không được phát triển và không được truyền bá rộng rãi.

Hình học Trung Quốc đã phát triển cho đến thế kỷ XIV, nhưng nó chỉ mới là một tập hợp các công thức để tính toán và giải các bài toán. Nó còn xa mới trở nên một khoa học suy diễn có hệ thống chặt chẽ như ở Hy lạp.

Hình học và toán học Trung Quốc nói chung không bị cô lập với sự phát triển toán học ở các nước khác. Vài trăm năm sau khi định lý Pythago được chứng minh ở Trung Quốc, ta lại tìm thấy ở Ấn độ. Điều đó chứng tỏ đã có sự trao đổi văn hóa giữa hai nước vào những năm đầu tiên sau công nguyên.

Sự trao đổi văn hóa giữa Trung Quốc và các nước Trung Á cũng được chứng minh bởi sự xuất hiện ở Trung Á quy tắc «hai lần giả sử», sau khi nó xuất hiện ở Trung Quốc.

Qua các nước Ấn độ và Hồi giáo, toán học Trung Quốc cũng đã ảnh hưởng tới châu Âu, mặc dầu nhiều phát minh quan trọng của Trung Quốc được châu Âu biết đến quá muộn.

5. Nền văn hóa Ấn độ xuất hiện rất sớm, vào thiên niên kỷ III trước CN. Sau đó vào thiên niên kỷ II trước công nguyên các bộ tộc từ miền Trung Á tràn xuống chiếm Ấn độ và thiết lập ở đây một nhà nước chiếm hữu nô lệ. Vào thiên niên kỷ I trước CN, xuất hiện kinh thành Vệ đà; lúc đó thiên văn khá phát triển và đã có lịch. Từ thế kỷ VII trước CN đã xuất hiện những tài liệu toán học chép tay.

Năm 325 trước CN một phần lớn bắc Ấn bị Alêxandr xứ Makêđônia xâm chiếm, và sau đó trở thành một bộ phận của Vương quốc Sêlơcux. Từ đó, giữa Ấn độ và Hy lạp có những quan hệ mật thiết hơn. Văn hóa của người Hy lạp và Ba tư truyền sang Ấn độ đã có ảnh hưởng lớn ở nước này. Ngược lại, văn hóa Ấn độ cũng được truyền bá sang Ba tư và Hy lạp.

Năm 321 trước CN, Sanđragupta khởi nghĩa thắng lợi lập nên vương triều Moria nổi tiếng trong lịch sử Ấn độ. Khi cháu của Sanđragupta là Asôca (273 - 232 trước CN) lên ngôi thì quốc gia chiếm hữu nô lệ Ấn độ đã bước vào thời cực thịnh. Bằng những cuộc chiến tranh đẫm máu, Asôca đã thống nhất được hầu hết lãnh thổ Ấn độ, sự thống nhất này đã thúc đẩy sự phồn vinh về kinh tế và sự phát triển văn hóa, khoa học, nghệ thuật.

Những triều vua thừa kế kể Asôca đã bất lực trước sự xâm lấn của nước ngoài. Mãi đến thế kỷ IV, người Ấn độ lại mới tự mình xây dựng nên vương triều Gupta với một nền kinh tế và văn hóa phát triển hơn. Lúc này Ấn độ đã bước vào chế độ phong kiến.

Vào thời kỳ này bắt đầu xuất hiện các công trình về thiên văn và toán học mang tên « Xitkhanta » (học thuyết). Đó là những công trình của các nhà toán học xuất sắc Ariapkhata (cuối thế kỷ V) Varakhamikhira (thế kỷ V—VI). Bracmagupta (sinh năm 598). Vào các thế kỷ VII—VIII các « Xitkhanta » của Ariapkhata và Bracmagupta rất nổi tiếng trong các nước Hồi giáo và được dịch ra tiếng A rập.

Từ thế kỷ IX, sau những cuộc chiến tranh tàn phá ở Bắc Ấn, trung tâm khoa học dần dần chuyển về Nam Ấn, ở đây có nhiều nhà toán học và thiên văn : Magavira (thế kỷ IX), Sritkhara (thế kỷ IX - X), Brackara (thế kỷ XII), Naraiana (thế kỷ XIV), Nilakanta (thế kỷ XV - XVI).

6. Các kiến thức và phát minh của các nhà bác học Ấn Độ trong phạm vi hình học thua kém rất nhiều so với số học và đại số. Môn hình học ở Ấn độ mang tính thực tiễn, do đó không phải là một môn khoa học suy diễn. Hầu như không có những tác phẩm riêng về hình học, những khái niệm và công thức hình học thường nằm xen trong các tác phẩm về số học hoặc thiên văn học.

Các mệnh đề hình học được nêu lên mà không chứng minh, thường được minh họa bằng hình vẽ và viết thêm « Hãy xem ! » Trong một số trường hợp mới thấy có sự giải thích ngắn gọn. Có lẽ là các chứng minh được giải thích cho học sinh bằng miệng.

Tuy vậy người Ấn Độ biết nhiều loại toán dựng hình và ứng dụng vào công việc xây dựng. Trong tác phẩm xuất hiện khá sớm « Sunva Xutra » (VII—V trước CN) có trình bày những phương pháp xây dựng các đền thờ và các phép tính toán có liên quan.

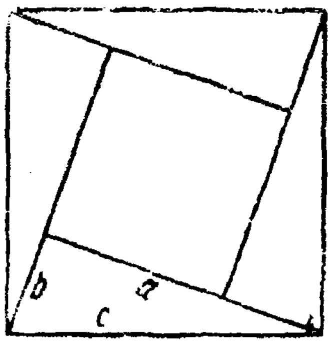
Việc xây dựng các đền thờ và chùa chiền được ấn định theo một số mẫu mực như : hình dạng kích thước và phương hướng. Muốn vậy phải giải quyết một số bài toán liên quan như : dựng góc vuông, hình vuông, dựng tam giác vuông có cạnh là những số nguyên, dựng hình vuông gấp đôi một hình vuông cho trước, v.v... Định lý Pythago là cơ sở cho các phép dựng đó.

Việc chứng minh định lý Pythago được đưa vào tác phẩm của Bkhaxkara dưới dạng hình vẽ (hình 7) và chú thích « Hãy xem ! ». Nếu ta ký hiệu a, b là cạnh góc vuông và c là cạnh huyền của tam giác vuông, thì diện tích c^2 của hình vuông bằng 4 lần diện tích của tam giác vuông đó và diện tích hình vuông có cạnh $a - b$. Như vậy

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a - b)^2,$$

Chứng minh này so với cách chứng minh của người Trung Quốc thì có gọn hơn.

Hình 7



Bracmagupta đã nêu lên quy tắc để tính gần đúng diện tích hình chữ nhật bất kỳ, là tích của các nửa tổng số các cạnh đối diện, giống như chúng ta đã thấy ở người Babilon. Sritkhata đã nhận xét rằng quy tắc ấy không nên áp dụng cho tứ giác bất kỳ, và nêu ra công thức tính diện tích hình thang như hiện nay.

Bracmagupta còn nêu lên một công thức tính diện tích hình chữ nhật tương tự như công thức Hêrông :

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

trong đó p là nửa chu vi, a, b, c, d là các cạnh. Thực ra công thức đó chỉ đúng đối với tứ giác nội tiếp. Ông không nêu lên nhận xét đó, nhưng ông chỉ áp dụng đối với hình thang cân và hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Các giá trị gần đúng của π cũng tìm thấy trong các «Xitkhanta». Chẳng hạn trong «Pulixơ, Xitkhanta» (thế kỷ V) có nói rằng độ dài đường tròn và đường kính tỉ lệ với 3927 và 1250, như vậy là $\pi = 3{,}1416$. Ariapkhata thì tìm thấy π dưới dạng 62832 : 20000, còn Bracmagupta thì dùng $\pi = \sqrt{10}$ (có lẽ lấy theo người Trung Quốc).

Sritkhara nêu ra quy tắc tính thể tích hình lăng trụ là $V = SH$, còn thể tích hình nón cụt đáy tròn là:

$$V = \frac{\pi H}{3}\left[R^2 + rR + r^2\right] \text{ trong đó } \pi = \sqrt{10},$$

còn thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} SH$.

Bkhakara còn nêu quy tắc tính thể tích hình cầu:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ với } \pi = 3{,}1416.$$

Về lượng giác ta cũng tìm thấy trong các «Xitkhanta» những công thức sau đây «viết theo ký hiệu hiện nay):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$
$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Trong «Xuria Xit Khanta» của Ariapkhata, ta thấy có một bản tính sin của các góc cách nhau 3°45', khá chính xác. Trong các bảng lượng giác được thiết lập sau đó, sự chính xác ngày càng cao. Đặc biệt Bkhackara đã lập bảng sin cách nhau 1°. Ngoài ta cũng còn có các công thức lượng giác cầu, áp dụng trong thiên văn.

7. Nhìn chung, tình hình phát triển hình học ở Ấn Độ cũng tương tự như ở Trung Quốc. Nền toán học

Ấn Độ cũng có nhiều ảnh hưởng tới sự phát triển toán học ở phương Đông cũng như phương Tây nhưng đáng tiếc là những công trình của các nhà toán học Ấn Độ viết vào khoảng thế kỷ XV — XVIII không được người nước ngoài biết đến, mà lại được «phát minh lại» bởi người Âu châu.

Rõ ràng là những cống hiến của người Ấn Độ vào sự phát triển toán học của thế giới sẽ còn lớn lao hơn nếu Ấn Độ không bị rơi vào ách thuộc địa của đế quốc Anh hàng mấy trăm năm.

8. Vào thế kỷ VII ở vùng bán đảo A rập xuất hiện một tôn giáo mới gọi là Hồi giáo mà người sáng lập là Môhamet (571 — 632). Sau khi Môhamet chết, những người kế nghiệp ông đã tiến hành một cuộc chiến tranh xâm lược rộng lớn, dùng gươm, lửa để truyền bá và củng cố địa vị thống trị của đạo Hồi. Họ đã chiếm Xili, Babilon và Iran năm 637, Ai cập năm 642 và chiếm toàn bộ Bắc phi vào nửa sau thế kỷ VII, Năm 711, người A rập tiến từ châu Phi vào Tây ban nha và nhanh chóng chiếm được toàn bộ bán đảo Pirênê, và đến thế kỷ IX chiếm luôn Xixin và Nam Ý. Năm 712 họ bắt đầu đánh Trung Á, chiếm vùng Zacapka và một phần Ấn Độ. Người A rập đi đến đâu đều cố tình phá vỡ các truyền thống văn hóa Hy lạp — La mã để thay thế bằng nền văn hóa Hồi giáo. Đạo Hồi đã chiếm được địa vị thống trị và tiếng A rập đã trở thành ngôn ngữ chính thức được dùng trong văn học nghệ thuật và khoa học.

Năm 762 thủ đô của đế quốc A rập là Batđat (trước kia ở Đamat), một thành phố thương mại phát triển. Các nhà buôn bán đã từ đó đi Ấn Độ, Trung Quốc, các nước châu Âu ở vùng Địa trung hải và châu Phi. Ngoài ra chính quyền Batđat rất chú trọng vấn đề canh tác và thủy lợi.

Tất cả các mặt hoạt động kinh tế đó đã tạo điều kiện cho toán học và thiên văn học phát triển. Thêm vào đó, nhà cầm quyền cũng đã thi hành một chế độ bảo trợ khoa học. Các nhà bác học được trả lương cao. Người ta xây dựng những đài thiên văn, các thư viện lớn. Các tác phẩm cổ của Hy lạp được dịch ra tiếng A rập. Các nhà bác học lớn ở khắp nơi được mời về Batđat làm việc. Vào thế kỷ IX-X, các nhà bác học nổi tiếng làm việc ở đây phần lớn là người Trung Á: An Gorêzmi (787 — khoảng 850), An-Macbzi, An Pecgani (thế kỷ IX), hoặc là con cháu người Babilon như Xabit Ipn Kora (836-901) và cháu là Ibrahim Ipn Xinan (908 — 946) An Batant (khoảng 850 — 929).

Vào thế kỷ X, một số nước bị chiếm đóng đã dành được độc lập, nhưng về tôn giáo vẫn giữ đạo Hồi. Vùng Horaxan (tức vùng gồm Thổ nhĩ kỳ và một phần Iran bây giờ) và vùng giữa hai sông Amuađaria và Xưđaria thống nhất lại thành một quốc gia độc lập với thủ đô là Bukha. Gorêzm cũng dành được độc lập, còn vùng Iran và Babilon thì thống nhất thành một quốc gia dưới các vương triều Buit, vào thời nầy sinh nhiều trung tâm khoa học như Bukha và Gorêzm, ở đó có nhiều nhà bác học nổi tiếng: Ipn Xina (980—1037) và An Biruni (938—khoảng 1050). Ở Bắc Phi và Tây Ban Nha cũng thiết lập một quốc gia độc lập với thủ đô là Cairô. Cairô cũng nhanh chóng trở thành trung tâm khoa học, có Abu kamin (khoảng 850—930) và sau này nhà vật lý vĩ đại An Haxan Ipn, An-Haixam cũng đến làm việc ở đây.

Vào thế kỷ XI, vùng Trung Á, Iran, Xiri và Babilon bị người Thổ chiếm đóng và sau đó vào thế kỷ XIII, bị người Mông cổ chiếm đóng. Trong các vùng này, kẻ chiếm đóng cũng tổ chức nên những trung tâm khoa học. Nhà bác học lớn của thế kỷ XI Oma knaiam (1048—1131) đã làm việc ở Ixphakhan (Iran) còn Naxia At Đin At-Tuxi (1201 — 1274) làm việc ở Maraga (Azecbaigiang).

Vào thế kỷ XV, đội quân của Timua xâm chiếm vùng Trung Á, Iran và một số vùng khác. Tại thủ đô Xamakanga lại thiết lập một trung tâm khoa học mới đứng đầu là Ulucbêc, cháu của Timua. Tại đài thiên văn của trung tâm này có nhà toán học Giax An-kasi At-Đin (chết khoảng 1530).

Các hoạt động của các nhà toán học Á Rập rất phong phú và độc đáo. Họ đã tiếp thu được những di sản quý báu của Hy lạp cổ, nắm vững và tu chỉnh các luận văn của Ơclit, Acsimet, Apôlôni ... và trên cơ sở đó hình thành một nền toán học riêng của mình.

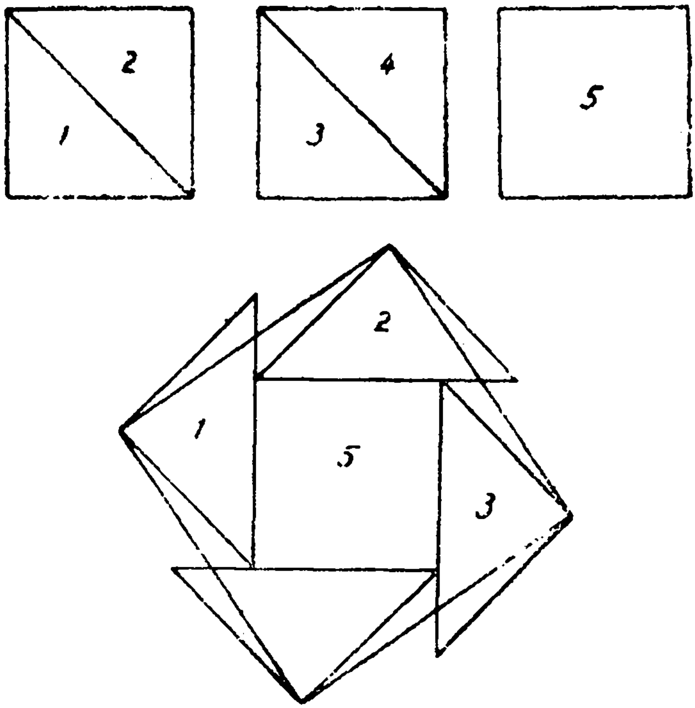
9. Trong phạm vi hình học, người Á Rập chú trọng đến việc áp dụng các phương pháp tính toán và các bài toán dựng hình. Cuốn « Về đường tròn » của An — Kasi là *một thí dụ điển hình về nghệ thuật tính toán,* trong đó độ dài đường tròn được tính bằng giá trị trung bình cộng giữa chu vi của đa giác đều nội tiếp và ngoại tiếp với số cạnh $3 \cdot 2^{28}$. Điều đó cho phép ông tìm thấy $\pi = 3,$ 141 592 653 589 793 25, chỉ sai có con số 5 cuối cùng (đáng lẽ là 3). Một sự chính xác cao như thế 150 năm sau A.Van Rôômen mới tìm thấy. Cần nói thêm rằng các nhà toán học Hồi giáo cũng đã có ý kiến về tính vô tỉ của số π, một sự kiện mà chỉ được Lambe và Logiăngđrơ chứng minh vào thế kỷ XVIII.

Phương pháp dựng hình đã phát triển khá phong phú. Ibrahim Ipn Xian (908 — 946) cháu của Xabit Ipn Kora đã viết một cuốn sách về lý thuyết dựng hình nhan đề. « Về phương pháp phân tích tổng hợp và về các phương pháp khác trong bài toán dựng hình ». Trong cuốn « Về phép dựng ba giao tuyến cônic », Ipn Xian đã xét bảy phương pháp dựng elip, hypecbôl và parabôl bằng thước và compa theo các điểm. Abu Xait As Xitgizi (thế kỷ X-XI) trong cuốn « Mô tả các giao tuyến cônic » đã xét việc dựng liên tục cả ba đường cônic bằng cái gọi là compa hoàn thiện. Đó là một loại compa mà khi quay thì một chân của nó có thể ngắn lại hay dài ra.

Việc dựng elip nhờ một vòng giây lồng qua hai tiêu điểm của nó cũng được nói đến trong cuốn « Về đường tròn kéo dài » của hai anh em Banu Muxa An — Haxan vào thế kỷ IX.

Một số lớn các bài toán dựng hình được trình bày trong cuốn « Bàn về những kiến thức hình học cần thiết đối với người thợ thủ công » của Abu Vapha An — Bugiani (940—980), Ngoài những bài toán giải được bằng thước và compa một cách chính xác, trong sách còn trình bày các phép dựng gần đúng, ví dụ dựng đa giác 7 cạnh và 9 cạnh đều ; lại còn xét cả phương pháp cơ học để chia 3 một góc và gấp đôi hình lập phương. Đặc biệt còn thấy những bài toán dựng nhờ compa có khẩu độ không đổi. Các bài toán dựng hình trên mặt cầu của ông rất đáng chú ý : bên cạnh các bài toán sơ cấp của hình học cầu, ông còn giải quyết các bài toán chia mặt cầu thành một số đa giác cầu bằng cách chiếu từ các hình đa diện đều và nửa đều nội tiếp lên mặt cầu, lấy tâm chiếu là tâm hình cầu.

Trong số các bài toán của Abu Vapha đáng chú ý nhất là một bài toán có phương pháp dựng rất thông minh sau đây: dựng một hình vuông có diện tích bằng ba hình vuông bằng nhau cho trước. Phép dựng được mô tả trên hình 8.



Hình 8

Ông đã vạch ra sự thiếu chính xác của phương pháp mà thợ thủ công thường dùng để giải bài toán đó. Ngoài ra ông còn nêu lên một phương pháp giải khác: cạnh của hình vuông cần tìm là đường chéo của hình lập phương dựng trên hình vuông đã cho. Quan trọng nhất là nhận xét sau đây của ông về phương pháp đó « Cũng tương tự như vậy nếu ta muốn dựng một hình vuông gồm từ một số nhiều hơn 3, hay ít hơn 3 hình vuông bằng nhau đã cho». Như vậy với $n > 3$ hình vuông đã cho, ta cần dựng đường chéo của hình lập phương n chiều có một mặt bên là hình vuông đã cho. (Vào thời kỳ này, các nhà bác học Hồi giáo đã sử dụng đến các lũy thừa bậc cao với tên gọi mượn từ các thuật ngữ hình học : bình phương — bình phương, bình phương — lập phương, lập phương — lập phương....).

10. Trong thời kỳ này, khoa học thiên văn phát triển cao. Nhờ vậy môn lượng giác phẳng và lượng giác cầu cũng đạt được những thành tựu đáng kể.

Trong cuốn «Về khoa học của các vì sao» của Abu Apđala Batani (khoảng 850—929), lý thuyết về các hàm lượng giác đã đạt được những kết quả sâu sắc. Đã tìm thấy các hệ thức giữa các hàm lượng giác, đã tìm được các phương pháp để lập các bảng lượng giác, tìm được một số định lý quan trọng để giải các tam giác phẳng và cầu. Tuy vậy, số các quy tắc không đủ lớn, nên việc giải các tam giác thường rất cồng kềnh, phức tạp.

Một trong những thành công lớn về mặt tính gần đúng là phương pháp giải phương trình siêu việt dạng $t = \theta - k\sin\theta$ (t là một số đã cho).

Phương pháp của An-Haxip An-Mavazi là tạo thành một dãy gần đúng :

$$\theta_0 = t + k\sin t \;;$$
$$\theta_1 = t + k\sin\theta_0 \;;$$
$$\theta_2 = t + k\sin\theta_1 \;;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Ông xem rằng θ_3 là nghiệm gần đúng của phương trình nói trên.

Vào thế kỷ XI xuất hiện một tác phẩm tra cứu về lượng giác cầu «Tuyển tập các quy tắc của khoa thiên văn».

Không thấy đề tên tác giả, chỉ thấy để tặng cho một người là Amit An — Munku Abu Naxia Manxura Ipn Môhamet. Cuốn sách được viết ở Ixphakhan hai năm sau khi đài thiên văn do tác giả lãnh đạo bị đóng cửa. Trong cuốn sách này, ta tìm thấy định lý Mênêlai về các tuyến trong tam giác, các định lý về lượng giác cầu tương tự như định lý Mênêlai, và lời giải sáu bài toán về việc xác định tam giác theo ba yếu tố. Bài toán đầu tiên là xác định tam giác cầu khi biết ba góc. Ở đây ta gặp khái niệm tam giác đối cực của tam giác ABC đã cho, đỉnh A', B', C' của nó là cực của các cạnh AB, BC và AC. Đây là cuốn sách lớn đầu tiên nói về lượng giác cầu.

Các tác phẩm sau này về lượng giác cầu đều viết theo dàn ý của cuốn đó Thí dụ «Về tứ giác toàn phần» của Naxia At — Đin At — Tuxi.

11. Các phương pháp chuyển qua giới hạn cũng được tiếp tục nghiên cứu. Trong cuốn «Về đo đạc đường parabôl» Ipn Kôra đã nêu ra một phương pháp cầu phương hình viên phân parabôl. Ta đã biết rằng diện tích đó bằng 2/3 hình bình hành ngoại tiếp hình viên phân. Kết quả ấy được Acsimet tìm ra bằng phương pháp cơ học và phương pháp tổng trên tổng dưới. Nhưng có lẽ nhà bác học A Rập này không biết đến tác phẩm đó của Acsimet. Ipn Kôra đã giải quyết bằng phương pháp khác: Ông chia đường kính của parabôl thành những phần tỉ lệ thuận với các số lẻ 1, 3, 5, 7,... Khi đó khoảng cách từ các điểm chia đều đỉnh sẽ tỉ lệ với các số chính phương 1, 4, 9, 16,... còn hoành độ các điểm tương ứng của parabôl sẽ tỉ lệ với 1, 2, 3, 4 ... Như vậy, phương pháp của ông tương đương với việc tính tích phân xác định $\int_0^a \sqrt{x}\, dx$, mà lần đầu tiên ông là người đã chia đoạn lấy tích phân thành những phần không bằng nhau. Phương pháp này là một tiến bộ rất quan trọng so với thành tích của các nhà bác học Hy lạp, vì ở Acsimet ta chỉ mới gặp các tích phân $\int xdx$, $\int x^2 dx$, ... Phương pháp của Ipn Kôra chỉ được phát triển vào thế kỷ XVII khi Phecma tính được tích phân $\int_0^a x^{n/m} dx$ cũng bằng cách chia đoạn lấy tích phân thành những phần không đều.

Cháu của Ipn Kôra là Ipn Xinan trong cuốn « Về vấn đề đo parabôl » đã giải quyết vấn đề cầu phương parabôl một cách tuyệt diệu. Đầu tiên ông chứng minh rằng nếu một đa giác là biến đổi của một đa giác nhờ một phép afin thì diện tích một tam giác vẽ trong đa giác thứ nhất và diện tích tam giác tương ứng với nó trong đa giác thứ hai sẽ tỉ lệ với diện tích đa giác thứ nhất và đa giác thứ hai. Ở đây lần đầu tiên xuất hiện phép biến đổi afin dưới dạng tổng quát nhất. Dùng phương pháp « lấy hết », có thể mở rộng kết quả đó cho trường hợp hình viên phân parabôl và tam giác nội tiếp trong nó (đáy của tam giác là đáy hình viên phân còn đỉnh tam giác là mút của đường kính liên hợp với giây cung đó). Tam giác này sẽ tạo nên hai hình viên phân bé mà đáy là hai cạnh bên của tam giác. Sau đó ông chứng minh rằng diện tích tam giác nội tiếp trong hình viên phân đã cho và tam giác nội tiếp trong hình viên phân bé tỉ lệ với 1 : 8, và bởi vậy đó cũng chính là tỉ lệ của hình viên phân đã cho với hình viên phân bé. Vậy hình viân phân đã cho bằng 4 lần hai hình viên phân bé hay là bằng 4/3 lần diện tích tam giác nội tiếp nó.

Trong cuốn « Đo đạc các thể parabôl » Ipn Kôra xét thể tròn xoay sinh ra bởi hình viên phân parabôl và các công thức tính thể tích của chúng. Ipn An Khaixam cũng tính các thể tích như vậy và về thực chất tương đương với việc *tính tích* phân $\int_0^a x^2\,dx$.

12. Trong số những vấn đề hình học chung, các nhà toán học Ả rập còn chú ý đến lý thuyết về đường song song. Định đề V của Ơclit nêu trong tập « Cơ bản » đã được xét đến từ hồi Hy lạp cổ, nhưng chưa thành một phong trào lớn. Hồi đó nhiều người cho rằng có thể chứng minh định đề V dựa vào các định đề và tiên đề khác của Ơclit và họ cố gắng tìm cách chứng minh nó.

Công trình A rập đầu tiên về lý thuyết đường song song là cuốn « Sự cải tiến tập « Cơ bản » của An-Apbas An Giankhari (thế kỷ IX). Chứng minh của ông dựa trên một mệnh đề mà ông cho là hiển nhiên : khi cắt hai đường thẳng bởi một đường thẳng thứ ba mà hai góc so le trong bằng nhau, thì khi cắt chúng bởi một đường thẳng khác ta cũng có các góc so le trong bằng nhau. Dựa vào đó, *ông chứng minh rằng qua một điểm bất kỳ nằm* trong một góc có thể dựng một đường thẳng cắt hai cạnh góc đó. Từ đó ông chứng minh định đề V. Sự thực thì hai mệnh đề nói trên đều tương đương với định đề V cả.

Trong cuốn « Về việc chứng minh định đề nổi tiếng của *Ơclit* » Ipn Kôra đã dựa vào mệnh đề « hiển nhiên »: nếu hai đường thẳng xa nhau vô tận về một phía thì chúng phải gần nhau vô tận về *phía* kia (mệnh đề này lại cũng tương đương với định đề V).

Trong cuốn « Bàn về hai đường thẳng cắt một đường *thẳng* khác *theo các* góc bé *hơn* hai vuông thì phải gặp nhau » Ipn Kôra đã xuất phát từ sự tồn tại của một đường thẳng cách đều một đường thẳng khác để chứng minh sự tồn tại của hình chữ nhật. Nhưng ở đây, tình hình cũng không tiến lên được, vì sự tồn tại của hai đường thẳng, cách đều nhau là một điều khẳng định tương đương với định đề V.

Ipn An — Khaixam cũng nghiên cứu lý thuyết về đường song song và được viết thành hai cuốn. Trong cuốn « Giải quyết điều nghi vấn trong tập « Cơ bản của Ơclit », ông đã xuất phát từ mệnh đề : từ một điểm không thể có hai đường thẳng cùng song song với một đường đã cho. Trong cuốn thứ hai « Bình luận về tập « Cơ bản » của Ơclit » ông đã dùng sự chuyển động tịnh tiến để chứng tỏ nếu đoạn thẳng vuông góc với một đường thẳng và chuyển động dọc theo đường thẳng thì mút của nó sẽ vẽ ra đường thẳng cách đều đường thẳng đã cho. Từ đó ông cũng chứng minh được sự tồn tại của hình chữ nhật. Muốn vậy ông đã xét một tứ giác với ba góc vuông, góc còn lại chỉ có thể nhọn, tù, hoặc vuông. Ipn An — Khaixam đã bác bỏ giả thuyết nhọn và tù nhờ sự tồn tại của hai đường thẳng cách đều mà ông tưởng là ông đã « chứng minh » được.

Ôma Khaiam (1048-1131) đã phê phán chứng minh đó bằng cách nói rằng theo Aristôt thì trong hình học không có khái niệm chuyển động. Ông cũng nêu lên chứng minh của mình dựa trên một nguyên tắc mà ông xem là đơn giản hơn định đề V của Ơclit : hai đường thẳng hội tụ thì cắt nhau, và không thể nào chúng lại phân kỳ theo hướng hội tụ. Mỗi mệnh đề ấy đều tương đương với định đề V, nhưng khác với những nhà bác học khác, ông phát biểu giả thiết của mình thành một định đề rõ ràng. Trong lập luận, ông đã nêu lên một tứ giác có hai cạnh bên bằng nhau và cũng vuông góc với cạnh đáy. Các góc kể với cạnh thứ tư phải bằng nhau và chỉ có thể xẩy ra ba trường hợp : nhọn, tù, vuông. Ông đã bác bỏ giả thuyết nhọn và tù cũng bằng cách dựa vào sự tồn tại của hình chữ nhật.

Chúng ta không thể nêu ra đây tất cả các công trình của các nhà hình học A Rập theo hướng này. Nhưng các công trình đó đều mắc một sai lầm phổ biến : họ đã dựa trên một mệnh đề tương đương với định đề V để chứng minh định đề đó (sự tương đương biểu hiện một cách tinh vi khó thấy, cố nhiên). Các nhà hình học A Rập còn xa mới đi đến ý nghĩ sáng tạo ra hình học phi Ơclit. Tuy thế họ đã có được những phát minh quan trọng : tìm ra được sự liên hệ hai chiều giữa định đề V và một số sự kiện như tổng số góc trong tam giác, trong tứ giác. Ngoài ra ở đây họ còn sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng rất linh hoạt.

13. Toán học của các nước Hồi giáo ảnh hưởng rất lớn đến sự phát triển của toán học phương Đông và đặc biệt là phương tây.

Vào thế kỷ XIII ở Bắc Kinh xuất hiện những công trình nghiên cứu về lượng giác cầu. Những công trình này liên quan mật thiết tới các công trình của Naxia At Đin At Tuxi. Người ta biết rằng năm 1267 một cộng tác viên của đài thiên văn Maraga là Giama At-Đin đã tới Bắc Kinh và xây dựng ở đây một số dụng cụ thiên văn. Ngược lại một số nhà bác học Trung Quốc cũng đến Maraga làm việc. Vào thế kỷ XI nhà bác học nổi tiếng Trung Á là An-Binuni đã làm việc và sống nhiều năm ở Ấn Độ. Trong cuốn «Ấn Độ» ông có viết rằng ông đã giới thiệu với các nhà bác học Ấn Độ tác phẩm «Cơ bản» của Ơclit, một số tác phẩm của Ptôlêmê và của ông bằng cách dịch ra tiếng Xancrit, là tiếng dùng trong khoa học ở Ấn Độ hồi bấy giờ.

Đối với phương Tây, trong khoảng 100 năm, bắt đầu từ thế kỷ XI, sự truyền bá và học tập các kiến thức phương Đông đã có một ý nghĩa quyết định. Các nhà bác học nhiều nước ở châu Âu đã tới các nước Hồi giáo để làm quen với toán học. Vào thế kỷ XII một phong trào dịch các tác phẩm của các nhà bác học A Rập sang tiếng la tinh đã *phát triển rộng rãi, và thực tế đã tạo nên một nền toán* học A Rập bằng tiếng la tinh.

Việc dịch thuật ấy vẫn còn chiếm một vị trí quan trọng ngay cả sau này khi mà châu Âu đã tìm được phương hướng riêng cho mình trong toán học.

Việc nghiên cứu khoa học Hồi giáo đã cho phép các nhà bác học châu Âu tiến hành xây dựng toán học trên một cơ sở vững chắc và không lặp lại lần nữa con đường của những người trước đã đi qua.

Chương V

HÌNH HỌC Ở CHÂU ÂU THỜI TRUNG CỔ VÀ THỜI PHỤC HƯNG

1. Từ thế kỷ III trở đi, chế độ chiếm hữu nô lệ La Mã bước vào một cuộc khủng hoảng trầm trọng về kinh tế, xã hội, chính trị, và đến thế kỷ V nó hoàn toàn tan rã. Đế chế La Mã bị tiêu diệt bởi những cuộc nổi dậy của nô lệ từ bên trong, và các cuộc đột nhập của các «man tộc» từ bên ngoài. Trong cuộc chiến tranh liên miên và tàn khốc của thời kỳ hậu Đế chế La Mã, nhân loại đã chứng kiến giai đoạn mở đầu của một trang sử mới: thời đại của chế độ phong kiến ở châu Âu (từ thế kỷ V đến thế kỷ XVIII) còn có tên gọi là thời trung cổ.

Giai đoạn thứ nhất từ thế kỷ V đến thế kỷ X là một quá trình lâu dài để hình thành và củng cố các quan hệ phong kiến. Các thành thị lớn trước kia trở nên điêu tàn và các lãnh chúa phong kiến xuất hiện. Bọn chúng chiếm cứ đất đai, thiết lập chính quyền riêng và xây dựng quân đội riêng. Xuất hiện những quốc gia phong kiến không lớn, thường xuyên xâm chiếm lẫn nhau. Kinh tế chủ yếu là nông nghiệp, tự túc và hầu như không có sự trao đổi. Đây là thời kỳ chế độ phong kiến phân quyền.

Giai đoạn thứ hai từ thế kỷ XI đến thế kỷ XV là thời kỳ phồn vinh và vững mạnh của chế độ phong kiến. Thủ công nghiệp đã tách khỏi nông nghiệp và trở thành một ngành kinh tế quan trọng. Nhiều nghề thủ công phát triển cao như nghề dệt, nghề luyện kim, nghề nấu thủy tinh. Đô thị mọc lên ngày càng nhiều và ngày càng củng cố, mở rộng, ngày càng huy hoàng tráng lệ. Việc buôn bán trao đổi hàng hóa cũng phát triển cao, đường giao thông (kể cả đường biển) được sử dụng rộng rãi để chuyên chở hàng hóa. Đây là chế độ phong kiến tập quyền.

Giai đoạn thứ ba từ thế kỷ XV đến thế kỷ XVIII là giai đoạn tan rã của chế độ phong kiến. Từ trong lòng của nó đã xuất hiện những mầm mống của chế độ xã hội tiến bộ xã hội tư bản chủ nghĩa. Mở đầu của thời kỳ này, khoảng thế kỷ XV đến XVI gọi là thời kỳ Phục Hưng (phục hồi trình độ cao của nền văn minh cổ Hy Lạp).

2. Nền toán học châu Âu vào thời kỳ đầu của chế độ phong kiến đạt trình độ rất thấp. Không có những phát minh lớn, không có những công trình quan trọng. Những người làm toán phần nhiều là các thầy tu, cha cố và họ cũng chỉ giới hạn trong một số ít kiến thức của số học dùng vào việc tính toán. Điều đó cũng không có gì khó hiểu. Nền kinh tế bây giờ là nền kinh tế nông nghiệp lạc hậu, không thể tạo ra được những điều kiện cho việc phát triển toán học. Những yêu cầu về toán học không vượt ra ngoài phạm vi các phép tính về số nguyên, phân số và đo đạc của hình đơn giản.

Một trong những nhà toán học có tên tuổi hồi bấy giờ là Sêvêrin Bơthiu (480-524), tác giả của một số tác phẩm toán học được lưu hành ở châu Âu hơn một ngàn năm.

Các tác phẩm ấy có thể phản ánh tình hình toán học hồi bấy giờ. Nội dung của chúng khá nghèo nàn và sở dĩ chúng được lưu hành có lẽ vì tác giả đã bị nhục hình và « tử vì đạo » năm 524 (Thiên chúa giáo).

Một nhà toán học lớn khác là thầy tu người Pháp tên là Gecbect (940—1003). Ông này trở thành giáo hoàng năm 999 và lấy tên là Xinvestrơ đệ nhị. Ông là nhà bác học châu Âu đầu tiên đã sang Tây Ban Nha để nghiên cứu toán học của người Á rập. Ông có viết một số tác phẩm về toán, nhưng nội dung không có gì đặc sắc.

Bước sang thời kỳ phồn vinh của chế độ phong kiến, nền toán học châu Âu mới bắt đầu có những biến chuyển mạnh mẽ. Lúc này người châu Âu đã tìm ra một phương pháp để làm giàu thêm những kiến thức của mình : học tập di sản văn hóa cổ Hy Lạp và phương Đông, thông qua việc dịch các tác phẩm cổ điển từ tiếng A Rập sang tiếng latinh. Công việc dịch thuật đó ở thế kỷ X còn ít ỏi và rời rạc nhưng từ thế kỷ XI đến thế kỷ XIII đã nhanh chóng trở nên một phong trào rầm rộ, có hệ thống. Bằng con đường đó, người Âu châu đã được đọc tập « Cơ bản » của Ơclit, các tác phẩm của Acsimet vĩ đại và Apôlôni nổi tiếng... Họ bắt đầu học tập, tổng kết những thành tựu đạt được của thời cổ, bắt đầu đặt ra những bài toán và giải quyết chúng. Nền toán học Âu châu bước vào con đường phát triển, tuy ban đầu còn rất chậm chạp nhưng về sau nhanh dần để đạt tới những phát minh lớn lao đóng vai trò cách mạng trong toán học.

Một yếu tố thúc đẩy sự phát triển toán học lúc này là sự ra đời của các trường đại học. Cuối thế kỷ XII trường đại học Pari (Pháp) được xây dựng và trở nên kiểu mẫu cho việc xây dựng các trường đại học khác sau này. Sinh viên *mới* vào trường phải học qua khoa phổ thông gồm 7 ngành : 3 ngành văn chương (trivium) là văn phạm, phương pháp lập luận, và phương pháp hùng biện, 4 ngành khoa học (Quadrivium) là âm nhạc, số học, hình học và thiên văn. Sau đó các trường đại học xuất hiện khắp nơi : Ôxpho năm 1167, Cambrigiơ năm 1209, Praha năm 1348, Crakôp năm 1364, Viên năm 1365,... Những trường này đều lệ thuộc vào nhà thờ, do các cha giám mục làm giám đốc.

3. Nhà toán học châu Âu đầu tiên đã vượt ra ngoài phạm vi hiểu biết toán học cổ và có cống hiến quan trọng là Lêônacđô Padanô (1180—1240). Ông còn có tên là Phibônaxi (tức là con của Bônaxi). Lêônacđô sinh ở Pida là một trung tâm thương mại của Ý hồi bấy giờ. Ông học toán ở Angiê — nơi cha ông sống làm nghề buôn bán — với các thầy giáo người A Rập. Ông đã đi thăm nhiều nơi như Xiri, Vidantium, Xixin và nhờ đó đã mở rộng rất nhiều vốn kiến thức toán học của mình. Công trình chính của ông là cuốn « Sách abac » (Liber abaci) viết năm 1202 và viết lại năm 1228 mà nội dung chủ yếu là đại số và số học (ở đây ta gặp dãy số sau này mang tên ông : dãy Phibônaxi). Cuốn sách nổi tiếng này của ông là một trong những phương tiện quan trọng để truyền bá những kiến thức toán học ở châu Âu. Trong tập thứ 15 của cuốn sách có một loạt các bài toán hình học về ứng dụng định lý Pythago, trong đó phần lớn là giải các phương trình bậc hai.

Năm 1220 Lêônacđô viết cuốn « Ứng dụng của hình học ». Mặc dầu có tên gọi như thế, nội dung của cuốn sách lại không phải là các vấn đề ứng dụng, mà gồm nhiều định lý khác nhau của hình học phẳng và không gian, và vấn đề đo đạc trên các hình. Ngoài những kết quả đã biết từ thời cổ, ở đây còn có những kết quả mới do ông tìm ra, hoặc là những chứng minh mới rất đặc sắc. Chẳng hạn ông đã đưa ra chứng minh ba đường trung tuyến trong tam giác cắt nhau tại một điểm bằng cách chứng minh rằng giao điểm của hai đường trung tuyến thì chia mỗi đường thành 2 đoạn thẳng tỉ lệ với 1 : 2. Ở đây ta còn thấy trình bày định lý của ông về bình phương đường chéo của hình hộp chữ nhật (Ơclit chưa có định lý này).

Để tính giá trị của π ông đã dùng tứ giác đều 96 cạnh nội và ngoại tiếp đường tròn và tìm thấy

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$$

tức là $\pi \approx 3,1418...$

Một nhà toán học cùng thời với Lêônacđô là Gioocđan Nêmôrari (thế kỷ XIII), cũng có những tác phẩm được lưu hành rộng rãi tuy rằng nội dung không phong phú bằng các tác phẩm của Lêônacđô. Về hình học, Gioocđan viết tác phẩm «Về các tam giác», trong đó trình bày các định lý về sự phân biệt các loại tam giác vuông, tù, nhọn theo độ dài của các cạnh và đường trung tuyến, các định lý về phân chia các hình. Chẳng hạn, phương pháp chia một tam giác thành ba phần bằng nhau (thực chất là dựng trọng tâm của nó). Ảnh hưởng của Hy Lạp và A Rập trong tác phẩm này biểu hiện một cách khá rõ nét.

Thôma Bradvacđin (khoảng 1290—1349) giáo chủ, dạy ở trường đại học Oxpho viết tác phẩm «Hình học lý thuyết» được các nhà toán học thế kỷ XIV—XV đánh giá cao. Trong chương đầu của tác phẩm đó, ông xét các hình đa giác sao thu được bằng cách kéo dài các cạnh của một đa giác đều (bắt đầu từ 5 cạnh trở lên). Từ các đa giác sao loại 1, lại có thể tạo thành các đa giác sao loại 2 (bắt đầu từ 7 cạnh trở lên)... Ông đã chứng minh các định lý về tổng các góc trong các đa giác sao như vậy.

Chương hai của tác phẩm dành cho việc nghiên cứu tính đẳng chu của đa giác, đường tròn, hình cầu, dựa trên các kết quả đã biết từ thời cổ.

Chương ba nghiên cứu lý thuyết tỉ lệ, nói về tính vô tỉ của $\sqrt{2}$ xem là tỉ số của đường chéo một hình vuông với cạnh của nó, nhắc đến cuốn « Đo đường tròn » của Acsimet và giá trị gần đúng của π là $\frac{22}{7}$. Chương bốn nói về sự tồn tại của 5 loại khối đa diện và xét đến vấn đề lấp đầy không gian bởi các loại khối đa diện đều.

4. Những thành tựu toán học của châu Âu vào thời kỳ Phục hưng chủ yếu xuất hiện ở các nước có nền kinh tế phát triển cao như Ý, Pháp, Đức, và sau đó cả Hà lan là nước tư bản đầu tiên ở châu Âu. Phần lớn những thành tựu đó thuộc về môn đại số. Đã có những chuyển biến nhanh chóng từ đại số bằng lời sang đại số bằng cách viết tắt và sau đó đã hoàn thành việc xây dựng đại số trên các ký hiệu. Điều đó đã làm cho lý thuyết các phương trình phát triển nhanh chóng. Đã tìm ra cách giải các phương trình bậc 3, bậc 4 bằng căn thức. Đã xuất hiện số ảo, v.v... Về mặt hình học những thành tựu đáng kể là: lượng giác phẳng và cầu khá phát triển: xuất hiện những khái niệm đầu tiên về phép chiếu xuyên tâm đã có những bước tiến xa hơn trong việc nghiên cứu lý thuyết đường song song.

Dưới đây chúng ta sẽ xét chi tiết hơn các vấn đề đó.

5. Lượng giác xuất hiện ở châu Âu từ thế kỷ XII với những công trình dịch thuật các tác phẩm thiên văn của các nhà bác học Hồi giáo.

Nhà toán học người Đức Giôhan Muyle (1436—1476) là người đầu tiên ở châu Âu nghiên cứu lượng giác một cách có hệ thống và làm cho nó trở thành một môn độc lập tách khỏi thiên văn học. Ông còn có tên là Rêgiômôntan (tên gọi latinh của thành phố Kênixbec, nơi ông đã sinh ra). Lúc 12 tuổi, ông học ở trường đại học Laixich và sau đó vào học trường đại học Viên, đến năm 1458 ông dạy ở đó. Vào những năm cuối đời, Rêgiômôntan làm việc trong triều đình của hoàng đế Hungari và phụ trách đài thiên văn Nubecgơ. Ông mất ở Rôm, trong lúc đang nghiên cứu vấn đề cải cách lịch.

Ông đã hoàn thành tác phẩm lượng giác « Năm cuốn sách về các tam giác đủ mọi loại » tại Ý vào những năm 1462—1464.

Đó là một tác phẩm phong phú về nội dung, nhiều kết quả là của tác giả, và các chứng minh đều chặt chẽ. Đặc biệt ông đã chứng minh mệnh đề sau đây: « Trong mọi tam giác cầu ABC, với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, ta có công thức

$$\frac{\sin \text{vers } A}{\sin \text{vers } a - \sin \text{vers } (b - a)} = \frac{1}{\sin b . \sin c}$$

ở đây $\sin \text{vers } x = 1 - \cos x$. Bởi vậy công thức trên chính là
$$\frac{1 - \cos A}{\cos (b - c) - \cos a} = \frac{1}{\sin b . \sin c}$$
hay

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Đó là công thức côsin trong tam giác cầu.

Rêghiômôntan đã thành lập một bảng sin và tang với bảy số lẻ thập phân.

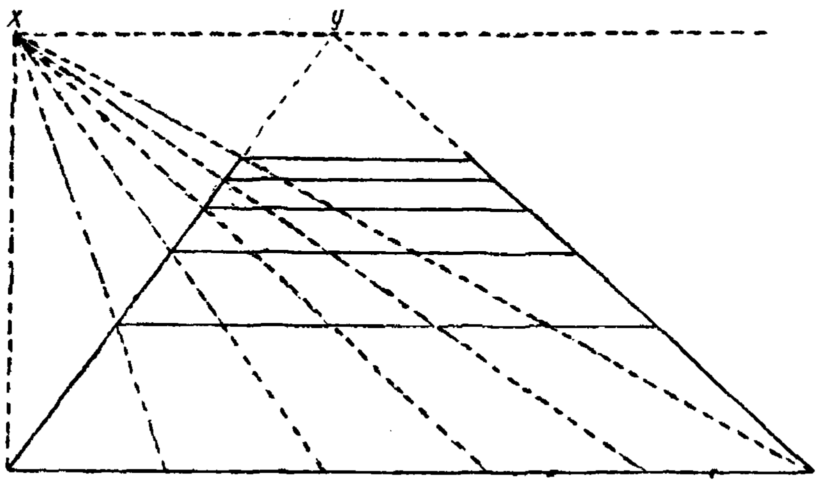
Nhà thiên văn học vĩ đại Ba-lan Nicôlai Côpecnic (1473 — 1543) đã có ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển của lượng giác. Ông là người đề xướng ra thuyết «nhật tâm» nói rằng quả đất quay chung quanh mặt trời, khác với thuyết «địa tâm» của Ptôlêmê nói rằng quả đất là trung tâm vũ trụ, mọi hành tinh khác và mặt trời đều quay quanh quả đất. Thuyết «nhật tâm» được ông trình bày trong tác phẩm «Về sự quay của mặt cầu vũ trụ» xuất bản gần như cùng một lúc với cái chết của tác giả. Chương XIII của cuốn sách trình bày ngắn gọn lượng giác phẳng, còn chương XVI thì dành cho lượng giác cầu. Côpecnic đã thành lập một bảng lượng giác khá chính xác, in trong cuốn «Bảng khoa học về tam giác».

-6. Phép chiếu xuyên tâm (của một hình không gian lên một mặt phẳng), đã được nghiên cứu từ thời cổ để áp dụng vào việc vẽ phong cảnh cho sân khấu. Ơclit và Ptôlêmê cũng đã nghiên cứu phép chiếu xuyên tâm dưới nhiều hình thức khác nhau.

Nhà bác học Ba-lan ở thế kỷ XIII là Vitêlô (khoảng 1225 — 1280) đã viết tác phẩm «Quang học» trong đó trình bày những kết quả cơ bản về phép chiếu xuyên tâm của Ơclit, Ptôlêmê và Ipn An Khaixam. Cuốn sách của Vitêlô đã có ảnh hưởng rất lớn đến sự phát triển của hình học.

Phép chiếu xuyên tâm được sử dụng trong hội họa để biểu diễn các hình không gian lên mặt phẳng.

Kiến trúc sư người Ý Lêông Battista Anbecti (1404—1472) trong tác phẩm «Về hội họa» đã nghiên cứu phương pháp dựng hình biểu diễn của các đường thẳng song song cách đều. Phương pháp đó thể hiện trên hình 9, trong đó đường thẳng XY biểu diễn đường chân trời



Hình 9

Họa sĩ Pierô Đây Fransexki (1416—1492), trong tác phẩm «Phép chiếu trong hội họa», cũng đã mô tả việc dựng hình biểu diễn của một đối tượng theo các hình chiếu bằng và chiếu đứng của nó.

Họa sĩ vĩ đại người Ý Lêôna đơ Vanhxi (1452—1519) đã nghiên cứu phép chiếu xuyên tâm và ứng dụng của nó vào hội họa một cách rộng rãi.

7. Các nhà toán học châu Âu đầu tiên nghiên cứu lý thuyết về đường song song là Lêvi Ben Gecsông (1288—1344) và Anphôngxô (thế kỷ XV). Cả hai cũng

định chứng minh định đề V của Ơclit trên cơ sở chứng minh sự tồn tại của hình chữ nhật, giống như các nhà bác học Hồi giáo.

Vào thế kỷ XVI xuất hiện chứng minh của Klavi Cristôpho (1537 — 1612). Ông dạy toán nhiều năm ở Rôm và tham gia vào việc sửa đổi lịch thời giáo hoàng Grigôri 13. Chứng minh của ông dựa vào định lý nói rằng quỹ tích của những điểm cách đều một đường thẳng là đường thẳng. Ông chứng minh điều đó dựa vào định nghĩa của Ơclit là đường thẳng «như nhau đối với mọi điểm của nó». Từ đó suy ra quỹ tích nói trên chỉ có thể là đường thẳng hoặc đường tròn. Ông bác bỏ giả thiết đường tròn vì những điểm cách đều một đường tròn phải là đường tròn. Như vậy lập luận của ông gần giống lập luận của Ipn An-Khaixam.

Chương VI

HÌNH HỌC Ở THẾ KỶ XVII

I. Thế kỷ XVII với sự thắng lợi của cuộc cách mạng tư sản Anh là thời kỳ mở đầu cho sự ra đời và phát triển mạnh mẽ của một hình thái xã hội mới tiến bộ hơn : xã hội tư bản chủ nghĩa.

Đồng thời với cuộc cách mạng về chế độ xã hội, trong khoa học, kỹ thuật cũng đã nảy sinh ra những cuộc cách mạng lớn lao. Một loạt các phát minh quan trọng đã làm thay đổi hẳn bộ mặt khoa học kỹ thuật của thế giới.

Do việc sử dụng máy móc (nhất là máy hơi nước) một cách rộng rãi trong sản xuất và trong đời sống, cơ học lý thuyết ngày càng được chú trọng nghiên cứu. Cũng vì lý do đó, trong toán học người ta bắt đầu chú ý đến chuyển động và các đại lượng biến thiên. Việc nghiên cứu các đại lượng biến thiên là một nét đặc trưng cơ bản của toán học từ thế kỷ XVII trở đi.

Trước đó, toán học có thể xem là hợp thành của các môn số học, đại số, hình học, lượng giác và chủ yếu là nghiên cứu các đại lượng không đổi (mặc dầu trong đại số đã xuất hiện các tham số). Khái niệm thô sơ về hàm liên tục ở thế kỷ trước và việc chuyển qua giới hạn (bằng phương pháp «lấy hết») ở thời cổ không được áp dụng và không phát triển.

Ở thế kỷ XVII, toán học bắt đầu nghiên cứu các đại lượng biến thiên và thu được những thành tựu quan trọng, điều đó đã thúc đẩy toán học phát triển một cách nhanh chóng và mạnh mẽ hơn.

«Đại lượng biến thiên của Đêcac là một cuộc cách mạng trong toán học. Nhờ nó sự vận động và do đó phép biện chứng đã được đưa vào toán học, và cũng nhờ nó mà phép tính vi phân, tích phân đã thực sự trở thành không thể thiếu được». (F. Ănghen. Biện chứng pháp của tự nhiên).

Toán học đã vượt qua một thời kỳ, thường gọi là thời kỳ toán học sơ cấp để bước vào thời kỳ mới : toán học cao cấp, hiện đại. Nội dung của toán học được mở rộng rất nhiều, và xuất hiện một số ngành học mới : hình học giải tích, hình học xạ ảnh, xác xuất, phép tính các đại lượng vô cùng bé, phép tính tích phân, vi phân và những ứng dụng vào hình học vi phân. Chỉ trong thế kỷ XVII, khối lượng các khái niệm mới và phương pháp mới trong toán học đã vượt qua cả những kiến thức của 15 thế kỷ trước đó.

2. Có thể nói việc phát minh ra hình học giải tích là một khâu quan trọng trong việc chuyển đổi tượng toán học từ đại lượng không đổi sang đại tượng biến thiên. Hai nhà toán học lớn người Pháp là Rơnê Đêcac và Pie Phecma đồng thời cùng nêu ra những cơ sở cho môn học này.

Rơnê Đêcac (1596 — 1650) sinh ra trong một gia đình quý tộc tại thành phố La E, và được giáo dục tốt ở trường trung học nhà chung tại thành phố La Phơlesơ. Năm 1613 ông đến Pari và ở đó ông đi sâu vào toán học và triết học. Năm 1617 do áp lực của gia đình, Đêcac phục vụ trọng quân đội của tướng Môrix Oranxki và do đó có điều kiện đi qua Đức, Hung, Tiệp, Ý. Năm 1628 ông trở về Pháp và tham gia vào đội quân hoàng gia vây hãm pháo đài La Rôsơli.

Sau đó, cuộc sống của Rơnê Đêcac có chuyển biến. Ông rút về ở ẩn, tìm một sự cô độc và yên tĩnh để có thể hoàn thành một kế hoạch làm việc mà ông đã đặt ra cho mình. Phương châm của ông là: Ở ẩn tốt, thì làm việc tốt», vì thế ông hạn chế gắt gao sự giao thiệp với các nhà toán học, kể cả bạn thân. Ông chỉ giữ vững liên lạc với họ bằng thư từ với nội dung thuần túy khoa học. Mặc dầu vậy do những quan điểm của ông đã gây nên những quan hệ căng thẳng với nhà thờ, nên ông buộc phải chuyển sang Hà lan năm 1629, và sống ở đó một mình trong vòng 20 năm. Ở đây ông đã cho in các công trình chủ yếu của mình.

Tại Hà lan, các quan điểm của ông lại làm cho giáo hội nổi giận, và để «ở ẩn tốt» ông lại chuyển sang Stôckhôm (Thụy Điển) năm 1649. Khí hậu ở đây không thích hợp với ông nên năm 1650 ông qua đời vì bị cảm lạnh.

Cũng như nhiều nhà tư tưởng lớn của thế kỷ XVII, Rơnê Đêcac muốn tìm một phương pháp chung của sự suy nghĩ để có thể chứng tỏ một cách nhanh chóng các chân lý trong khoa học. Bấy giờ vì cơ học, là khoa học duy nhất về tự nhiên, đã được xây dựng một cách có hệ thống, và vì toán học cho ta một chìa khóa để hiểu biết cơ học, nên toán học đã trở nên một phương tiện quan trọng để nắm được vũ trụ. Bởi vậy, mục đích của Đêcac là tìm một phương pháp suy diễn toán học tổng quát cho việc nghiên cứu mọi vấn đề của khoa học tự nhiên.

Ông đã viết tác phẩm « Luận về phương pháp » để trình bày quan điểm của mình và sau đó cho công bố tác phẩm

« Hình học » với tính chất là sự ứng dụng phương pháp của mình. Chính từ tác phẩm này, môn hình học giải tích sự kết hợp giữa hình học và đại số — đã ra đời, đánh dấu một bước ngoặt quan trọng trong sự phát triển của hình học và toán học.

3. Ta hãy điểm qua nội dung cơ bản của tác phẩm « Hình học ».

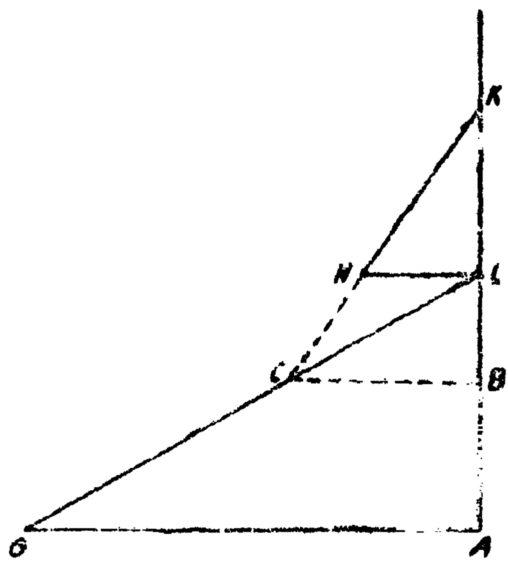
Đecac khẳng định rằng Mọi điểm của một đường cong đã cho đều nằm trong một quan hệ nào đó với tất cả các điểm của một đường thẳng, quan hệ này được biểu thị bằng một phương trình nào đó, giống nhau đối với tất cả các điểm của đường cong đã cho ». Để minh họa cho quan điểm này, Đecac đã đưa ra phương pháp tọa độ vuông góc, và kèm theo đó là khái niệm về hàm số xem như là một biểu thức giải tích giữa các đoạn thẳng « không xác định » x và y (tức là tọa độ của một điểm).

Ta nhớ rằng Apôlôni cũng đã dùng tọa độ. Nhưng hệ trục tọa độ của ông luôn luôn gắn chặt với đường cong. Chẳng hạn, *đối với một điểm của parabôl thì tung độ là khoảng cách từ điểm đó đến trục parabôl*. Đecac lần đầu tiên đã đưa ra hệ trục tọa độ độc lập đối với đường cong. Khi đó ta được một phương pháp tổng quát để biểu thị các điều kiện của một đường cong (tức là điều kiện để cho một điểm thuộc đường cong) bằng phương trình liên hệ giữa hai tọa độ của một điểm.

Ta hãy xét thí dụ thứ nhất sau đây của Đecac. Một tam giác vuông KLN kích thước không đổi, có cạnh góc vuông KL chuyển động dọc theo đường thẳng AB. G là một điểm cố định không nằm trên AB. Tìm quỹ tích giao điểm của đường thẳng GL và cạnh huyền NK kéo dài. Giả sử GA ⊥ AB và GA = a, KL = b, NL = c. Đecac đã chọn AB là trục x gốc ở A (hình 10), và ký hiệu các đoạn chưa biết CB = y, BA = x. Khi đó từ hai tam giác đồng dạng CBK và NLK và hai tam giác đồng dạng CBL và GAL ông suy ra:

$$yy = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

Đecac nói rằng đó là đường hypecbôl, nhưng ông không chứng minh.



Hình 10

Trong thí dụ này, Đêcac đã dùng một hệ trục tọa độ vuông góc. Nói chung, ông thường chỉ ra một trục với điểm gốc, còn trục kia thì chỉ hướng (thường là không vuông góc với trục thứ nhất). Các tọa độ âm không xét đến (mãi đến thế kỷ XVIII người ta mới sử dụng tọa độ âm).

Để chứng tỏ thêm sức mạnh của phương pháp mới do mình nêu ra, Đecac đã xét đến một bài toán khó là bài toán : « Cho $2n$ (hoặc $2n - 1$) đường thẳng cố định, tìm quỹ tích những điểm sao cho tỉ số của tích độ dài các đoạn thẳng vẽ từ điểm đó tới n đường thẳng đã cho dưới một góc cho trước và tích độ dài các đoạn thẳng tương tự vẽ tới n (hoặc $n - 1$) đường thẳng còn lại là một số không đổi ».

Bằng cách chọn một đường thẳng đã cho làm trục x còn trục y thì tạo với trục x một góc bằng góc đã cho, trong trường hợp bốn đường thẳng, Đêcac tìm thấy phương trình của quỹ tích có dạng như sau :

$$y = \sqrt{\frac{a}{a'} x^2 + bx + c^2} + \frac{d}{d'} x + e$$

Dựa vào kết quả của Apôlôni trong « Giao tuyến cônic », Đêcac *chứng tỏ rằng phương trình đó là phương trình* của giao tuyến cônic, và trong trường hợp đặc biệt (khi biểu thức trong căn bằng không) đó là phương trình của đường thẳng. Ông đã biện luận theo dấu của các hệ số để có hypecbôl, parabôl, elip, đường tròn và trong từng trường hợp như vậy ông chỉ rõ vị trí của giao tuyến cônic đó.

Đối với trường hợp của 5 đường thẳng Đecac đã xét bài toán dưới dạng đặc-biệt : 4 đường thẳng song song cách đều còn đường thứ 5 thì vuông góc với chúng. Ông nhận được một phương trình bậc 3 (và đây là lần đầu tiên trong lịch sử của hình học giải tích ta gặp một phương trình của đường cong bậc 3) :

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$$

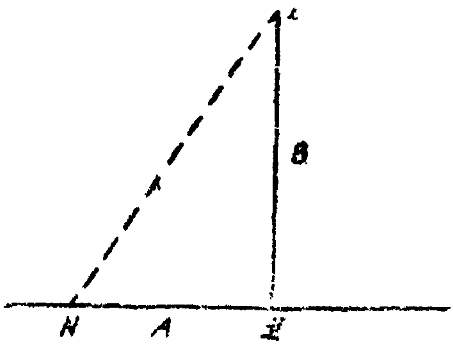
Trong tác phẩm « Hình học » Đêcac còn nêu lên những định lý về cách dựng pháp tuyến và tiếp tuyến của các đường cong đại số và áp dụng cho các đường cônic.

Ngoài ra ông còn mở rộng phương pháp của mình cho trường hợp đường cong trong không gian 3 chiều, bằng cách xét hình chiếu của nó trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Ở đây ta gặp một trong các mệnh đề sai của Đêcac (số này không nhiều) : qua phép chiếu như vậy pháp tuyến lại biến thành pháp tuyến.

4. Như đã nói, ngoài Rơnê Đêcac, Pie Phecma cũng được xem như người sáng lập ra môn hình học giải tích. Là một người ở miền nam nước Pháp, Phecma (1601 — 1665) sống chủ yếu ở thành phố Tuludơ, làm cố vấn luật pháp cho chính quyền địa phương. Ông biết rất nhiều ngôn ngữ cổ và hiện đại : tiếng latinh, tiếng Hy Lạp cổ, tiếng Tây Ban Nha, tiếng Ý...

Ông nghiên cứu các tác phẩm nguyên văn của Ơclit, Acsimet, Apôlôni, Pap, Điôphăng,... vào những thời gian rỗi. Tuy vậy, tài năng toán học của Phecma phát triển rất rực rỡ. Ông đã có nhiều phát minh quan trọng về lý thuyết số, hình học, về phép tính các đại lượng vô cùng bé, vv... Phecma viết ít và viết rất ngắn gọn. Hơn thế, ông lại thường không công bố các phát minh của mình. Ông chỉ thông báo với bạn bè bằng thư từ hoặc thông qua các cuộc tiếp xúc, luận đàm. Các công trình xuất sắc của ông chỉ được công bố vào năm 1679 sau khi ông mất.

Các quan điểm của Phecma về hình học giải tích được trình bày trong tác phẩm không lớn « Mở đầu và nghiên cứu các quỹ tích phẳng và không gian » viết năm 1636 (theo danh từ cổ Hy Lạp, quỹ tích phẳng là đường thẳng, đường tròn, quỹ tích không gian là các đường cônic». Năm 1679, tác phẩm này mới được in. Phecma phát biểu nguyên tắc của hình học giải tích như sau : «Mỗi lần khi trong phương trình cuối cùng ta có hai đại lượng chưa biết, thì sẽ có quỹ tích, và điểm cuối cùng của một trong chúng vạch ra một đường thẳng hoặc đường cong. Để thiết lập phương trình ta thường xét hai đại lượng chưa biết tạo với nhau một góc đã cho (thường là góc vuông) và xét vị trí điểm cuối của một trong hai đại lượng chưa biết đó». Ở đây đại lượng chưa biết được hiểu là các đoạn thẳng, đoạn thứ nhất thường ký hiệu NZ hoặc A, đoạn thứ hai ký hiệu ZI hoặc B (hình 11).



Hình 11

Phương trình đường thẳng NI đi qua gốc tọa độ N được Phecma viết dưới dạng : « D trên A bằng B trên E » tức là dx = by.

Sau đó ông đã nêu ra phương trình đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, phương trình của hypecbôl có tiệm cận là các trục tọa độ, của elip mà hai đường kính liên hiệp là các trục tọa độ...

Phecma cũng đã nghiên cứu dạng tổng quát của phương trình bậc nhất và bậc hai bằng cách biến đổi tọa độ để đưa chúng về dạng chính tắc đã xét ở trên. Phecma đã xét trường hợp này bằng một thí dụ sau: $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$, là một trường hợp khó vì ở đây chứa số hạng tích xy. Ông đã dùng phép biến đổi tọa độ $X = \sqrt{2}x$, $Y = x + y$ để đưa về phương trình $(2b^2 - X^2) = 2Y^2$, và đó là phương trình của elip. Để kết luận, Phecma viết « Như vậy là chúng tôi đã trình bày một cách ngắn gọn và rõ ràng tất cả những điều về quỹ tích phẳng và không gian mà thời cổ còn chưa biết rõ ».

5. Sau Đêcac và Phecma, phương pháp của hình học giải tích được nhiều nhà toán học nghiên cứu và phát triển, làm cho nó dần dần trở thành một ngành của toán học.

Nhà toán học cùng thời với Đecac là Ph. Đêbôn (1601 — 1652) đã hoàn thiện một số kết quả của Đêcac. Ông đã chứng minh rằng mọi phương trình bậc nhất đều biểu thị cho đường thẳng và đã phân tích một cách chi tiết phương trình của hypecbôl: $xy + bx + cy - d = 0$. Ông đã phân biệt 17 dạng của phương trình nói trên. Ph. Van Sôten (1615 — 1660) đã ứng dụng một phép tinh tiến và một phép quay đối với công thức biến đổi các hệ trục tọa độ. Học trò của ông là Gian Đê Vit (1625 — 1672) đã nghiên cứu các giao tuyến cônic mà không nhờ đến phương tiện của không gian.

Giôn Valis (1616 — 1703) cũng định nghĩa cônic một cách trực tiếp chứ không bằng giao tuyến của một mặt nón và mặt phẳng.

Vào nửa sau của thế kỷ XVII còn xuất hiện một số tác phẩm về giao tuyến cônic, trong đó đáng chú ý là cuốn «Những điều mới về giao tuyến cônic» của Phi Lip Đơ La Hia (1640 - 1718).

Trong tác phẩm đó lần đầu tiên La Hia đã đưa ra tọa độ của một điểm trong không gian gồm ba đại lượng x, y, z, và nói chung một phương trình của ba biến số đó sẽ biểu thị cho một mặt trong không gian. Năm 1700, A. Paren (1666 — 1716) viết được phương trình của mặt cầu và tiếp diện của nó. Sau này phương pháp tọa độ phát triển mạnh mẽ nhờ công trình của A. C. Klêrô (1713 — 1765).

Mặc dầu có những thành tựu kể trên, các kết quả thu được bằng cách áp dụng phương pháp hình học giải tích nhìn chung còn ít ỏi và tản mạn. Phương pháp tọa độ và phương trình đóng vai trò quan trọng trong phép tính các vô cùng bé hơn là trong hình học. Mãi đến đầu thế kỷ XVIII năm 1704 nhà vật lý và toán học vĩ đại Niutơn (1643 — 1727) trong tác phẩm «Liệt kê các đường cong bậc ba» mới phát triển sử dụng phương pháp hình học giải tích một cách có hệ thống. Từ đó hình học giải tích trở thành một phương pháp thuận lợi để nghiên cứu hình học. Nhờ phương pháp này, mọi bài toán hình học đều có thể chuyển thành một bài toán của đại số và việc giải bài toán đại số này thường dễ thực hiện hơn là giải trực tiếp bằng phương pháp hình học.

6. Chúng ta đã biết rằng ngay từ thời cổ các nhà toán học đã nghiên cứu phép chiếu xuyên tâm, và đó là cơ sở của môn hình học xạ ảnh. Ở thế kỷ XVII phương pháp xạ ảnh đạt được một số thành tựu quan trọng, đặc biệt là việc Gi. Keple (1571-1630) lần đầu tiên đưa ra khái niệm điểm vô tận.

Kêple là một nhà thiên văn vĩ đại, đã phát minh ra những quy luật chuyển động của các hành tinh, sau này gọi là quy luật Kêple. Đó là:

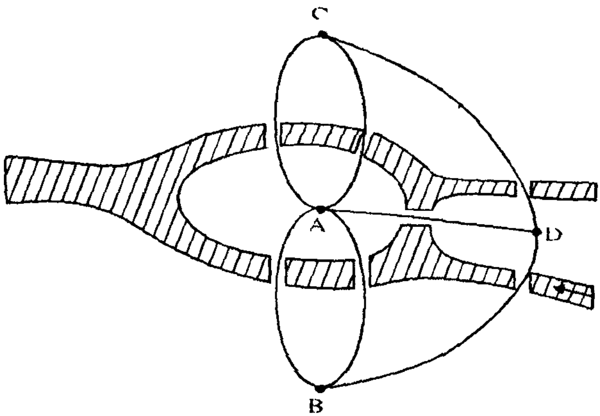
1. Các hành tinh chuyển động theo đường elip, mà mặt trời là một tiêu điểm.

2. Tỉ số giữa thời gian mà hành tinh chuyển động theo một cung elip và thời gian chuyển động theo toàn bộ elip bằng tỉ số giữa diện tích vạch bởi bán kính vectơ vẽ từ tiêu điểm của cung đó và diện tích toàn bộ elip.

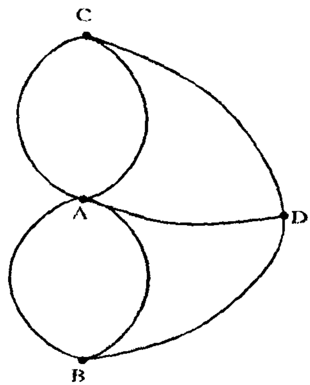
3. Bình phương các chu kỳ quay của các hành tinh tỉ lệ với tam thừa của các khoảng cách trung bình từ chúng tới mặt trời.

Đối với lịch sử hình học, cuốn «Phần quang học của thiên văn» của Kêple (xuất bản năm 1604) đóng vai trò quan trọng. Ông đã chỉ ra rằng giao tuyến của mặt nón với mặt phẳng có thể là đường thẳng, đường tròn, parabôl, hypecbôl, elip. Ông nói rằng «đường thẳng biến thành đường parabôl khi chuyển qua đường hypecbôl, và biến thành đường tròn khi chuyển qua elip», rằng «trong hypecbôl thì đường tù nhất là đường thẳng và đường nhọn nhất là parabôl, còn trong các elip thì đường nhọn nhất là parabôl và tù nhất là đường tròn».

Kêple đã chỉ rõ rằng nói chung các giao tuyến cônic đều có hai tiêu điểm như là elip. Đối với đường tròn, hai tiêu điểm đó trùng nhau tại tâm. Đối với parabôl thì một tiêu điểm đi xa ra vô tận trên trục, còn đối với hypecbôl thì tiêu điểm xa vô tận đó lại trở về gần theo «phía bên kia».



Hình 42



Hình 43

Có lẽ, một trong những người anh em nghiện rượu vui tính, những người thường qua các chiếc cầu này để về nhà vào đêm hôm khuya khoắt, đã là tác giả của bài toán này. Nhiều người đã thử giải bài toán này nhưng không một người nào đạt kết quả. Euler cũng đã nghe bài toán này, và trong chốc lát, từ một chuyện vui đùa của các bạn rượu Konigsberg đã trở thành một Chúng ta thấy những sự kiện bên lề của bài toán để có thể tìm được dễ dàng hơn câu trả bởi một mặt phẳng », xuất bản năm 1639. Ở đây ta thấy Đêdac đã sử dụng rộng rãi các khái niệm; phép biến đổi xạ ảnh, điểm vô tận, đường thẳng vô tận, tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

Thêm vào *mặt* phẳng các điểm vô tận, ông đã xem parabôl và hypecbôl đều là những đường kín, cắt đường thẳng vô tận tại một điểm (kép) hoặc hai điểm phân biệt. Ông đã xét các phép biến đổi trên đường thẳng, giữ nguyên tỉ số kép, và đặc biệt xét cả các phép đối hợp trên đường thẳng.

Hai định lý sau đây bây giờ mang tên là định lý Đêdac 1 và 2:

Định lý Đêdac 1: Nếu hai tam giác ABC và A′B′C′ có các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy, thì giao điểm các cạnh tương ứng thẳng hàng.

Định lý Đêdac 2: Các đường bậc hai đi qua bốn điểm cho trước và các cặp đường thẳng có thể vẽ qua bốn điểm đó chắn ra trên một đường thẳng bất kỳ các cặp điểm tạo thành một liên hệ đối hợp.

Đêdac cũng đã chứng minh một loạt các định lý về điểm cực của một đường thẳng và đường cực của một điểm đối với một cônic, và ứng dụng các định lý đó để giải một loạt các bài toán dựng hình.

Các nhà toán học đương thời đã có những thái độ khác nhau đối với hình học xạ ảnh của Đêdac.

Đêdac thì hầu như không quan tâm đến, điều đó không có gì lạ vì ông đang « ở ẩn ». Phecma đánh giá cao nhưng không nghiên cứu. Một số khác thì kinh sợ vì muốn đọc tác phẩm của Đêdac cần phải nắm vững ngôn ngữ toán học mới của ông (Đêdac thường tạo ra nhiều từ mới lấy trong thực vật học). Nói chung, những tư tưởng mới của Đêdac chỉ được một số ít các nhà toán học hoan nghênh, trong số đó có Paxcan (1623 — 1662) lúc bấy giờ tuy mới 17 tuổi nhưng đã cống hiến cho hình học xạ ảnh một định lý mà Đêdac gọi là «định lý vĩ đại».

8. Paxcan là một nhà toán học và vật lý toàn diện (về vật lý ông đã phát minh ra định luật Paxcan trong thủy lực học). Về toán học ngoài hình học, ông còn nhiều công trình xuất sắc trong lĩnh vực số học và xác xuất

«Định lý vĩ đại» của Paxcan được in ra khoảng năm chục bản để gửi đi cho các nhà toán học. Định lý đó nói rằng «*Giao điểm các cạnh đối diện của một hình lục giác nội* tiếp trong giao tuyến cônic nằm trên một đường thẳng». Một trường hợp riêng của định lý này là định lý Páp khi đường cônic suy biến thành hai đường thẳng.

Paxcan khẳng định rằng nhờ định lý đó và hai định lý của ông có liên quan, ông có thể xây dựng một lý thuyết đầy đủ về giao tuyến cônic, bao gồm các tính chất về đường kính và tiếp tuyến, dựng giao tuyến theo một số điểm của chúng, vv ...

Người ta biết rằng sau khi Paxcan chết, vẫn còn lại một bản thảo về lý thuyết xạ ảnh của các đường cônic. Năm 1676 Lêpnitx đã nhìn thấy bản thảo đó và trong một bức thư, ông đã trình bày ngắn gọn nội dung phong phú của nó.

Lêpnitx còn nói rằng bản thảo đã hoàn thành và có thể đem in. Tuy nhiên, công trình đó của Paxcan không được in ra và cho đến bây giờ mọi cố gắng tìm kiếm đều không có kết quả.

Trong lúc các nhà toán học đang tập trung chăm chú vào toán học giải tích và ứng dụng của nó là hình học giải tích, phương pháp hình học xạ ảnh của Đedac và Paxcan hầu như không được tiếp tục phát triển. Tác phẩm của Đêdac hoàn toàn bị biến mất và chỉ tới năm 1845. M. Salơ mới tìm thấy lại một bản chép tay do Đơ La Hia sao lại năm 1679. Còn bản in của tác phẩm đó thì 100 năm sau nữa mới tìm thấy.

Trong một thời gian khá dài, hình học xạ ảnh không tiến bộ được gì thêm. Phải chờ đến đầu thế kỷ thứ XIX, sau khi đã có những thành công trong lĩnh vực hình học họa hình, thì hình học xạ ảnh mới thực sự bước vào thời kỳ phát triển rực rỡ.

9. Cùng với hình học giải tích, sự xuất hiện các phép tính tích phân và vi phân đã làm cho bộ mặt toán học của thế kỷ XVII hoàn toàn thay đổi. Toán học từ việc nghiên cứu các đại lượng rời rạc đã trở thành toán học của các đại lượng biến thiên.

Ở đây ta sẽ chỉ trình bày các phương pháp tích phân và vi phân trong phạm vi hình học.

Đầu tiên phép tính tích phân thực chất là các bài toán về việc tính độ dài, diện tích, thể tích, tìm trọng tâm. Như chúng ta đã biết, ngay từ thời cổ, Ơđôcx đã giải quyết một số bài toán bằng phương pháp «lấy hết». Acsimet đã áp dụng một cách tài tình phương pháp đó, và đi đến khái niệm «tổng trên» và «tổng dưới».

Các nhà toán học ở thế kỷ XVII đã quay trở lại, tìm về Acsimet và họ phải bắt đầu từ chỗ mà Acsimet đã dừng lại.

Kêple là nhà bác học đầu tiên đã thực hiện các phương pháp tính toán trực tiếp với các đại lượng vô cùng bé. Căn cứ vào phương pháp của Acsimet, Kêple cho rằng một hình thức bất kỳ được biểu diễn dưới dạng tổng của một số vô hạn các phần vô cùng nhỏ (chẳng hạn hình tròn gồm một số vô hạn các quạt tròn rất hẹp mà chúng có thể xem như là những tam giác cân có chiều cao bằng bán kính hình tròn, còn đáy là những đoạn vô cùng bé nhưng có tổng bằng độ dài đường tròn). Như ta đã thấy, Kêple đã phát minh ra ba quy luật chuyển động của các hành tinh, trong đó quy luật thứ hai được phát biểu theo ngôn ngữ của Kêple là. tỉ số thời gian mà hành tinh chuyển động theo một cung trên quỹ đạo và thời gian để chuyển động theo cả quỹ đạo bằng tỉ số giữa «tổng bán kính vectơ» vẽ từ một tiêu điểm tới các điểm của cung đó và «tổng bán kính vectơ» vạch ra toàn bộ elip quỹ đạo. Tổng «bán kính vectơ» ở đây chính là diện tích hình quạt. Thực tế, ông đã tính diện tích hình quạt bằng cách lấy tổng các tam giác bé đến mức có thể xem như là một bán kính vectơ.

Trong tác phẩm «Thiên văn mới» (xuất bản năm 1609), khi so sánh tổng sin của các góc lấy cách nhau 1° từ 0 cho đến φ, ông đã tìm thấy công thức, mà viết theo ký hiệu bây giờ là

$$\int_0^{\varphi} \sin x dx = 1 - \cos x$$

Sau này, chính ông đã chứng minh được kết quả đó bằng phương pháp chính xác của Acsimet.

Vào vụ nho năm 1612, Kêple đã chú ý đến những quy tắc mà nông dân thường dùng để tính toán lượng rượu nho đựng trong những thùng với hình dạng khác nhau, ông đã để tâm nghiên cứu vấn đề đó và đã tìm ra những phương pháp để tính thể tích của các vật tròn xoay. Năm 1615 ông đã cho xuất bản cuốn «*đo thể tích các thùng rượu nho theo cách mới*». Kêple đã tiến một bước khá xa so với những hiểu biết của thời cổ ông đã tính được thể tích của 87 hình mới.

Sau các công trình của Kêple, nhiều nhà toán học đã chú ý nghiên cứu việc hoàn thiện một phương pháp tính toán chính quy trên các đại lượng vô cùng bé, trong số đó đáng kể nhất là Kavalêri (1598 — 1647).

Quan điểm của Kavalêri được trình bày một cách có hệ thống trong tác phẩm «Hình học trình bày bằng những phương pháp mới nhờ các đại lượng không phân chia được» công bố năm 1635. Nếu ta xét một hình phẳng nào đó, thì mỗi đường thẳng chuyển động song song với một đường thẳng cho trước (gọi là chuẩn) sẽ cắt hình đó theo một đoạn thẳng. Như vậy hình phẳng đã cho xem như tạo thành bởi vô số đoạn thẳng như vậy. Các đoạn thẳng này gọi là phần không chia được của hình phẳng. Tương tự, một khối trong không gian có thể xem như sinh bởi tập hợp vô số các hình phẳng nằm trên những mặt phẳng song song, các hình phẳng này cũng gọi là phần không chia được của khối đã cho. Kavalêri tìm thấy kết quả sau đây: Nếu hai hình phẳng được sắp xếp sao cho khi ta cắt chúng bằng một đường thẳng song song với đường chuẩn thì ta được hai phần tử không chia được có tỷ lệ là một hằng số k thì diện tích hai hình đó tỷ lệ với k. Đối với thể tích các khối cũng có kết quả tương tự.

Ngoài ra Kavalêri còn xét cả tổng lũy thừa của các phần tử không chia được. Chẳng hạn, ông đã chứng minh rằng, tổng bình phương các đoạn thẳng không chia được của hình bình hành bằng ba lần tổng bình phương các đoạn thẳng không chia được của hai tam giác tạo nên bởi việc chia hình bình hành bằng một đường chéo. Kết quả này tương đương với công thức

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^a a^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Định lý đó còn được mở rộng cho lũy thừa bất kỳ, tức là tương đương với việc tính tích phân $\int_0^a x^n\,dx$.

Mặc dầu phương pháp của Kavalêri còn một số thiếu sót (như khái niệm «không chia được» không được định nghĩa một cách rõ ràng, thiếu những ký hiệu đại số, và nó không áp dụng được cho việc đo độ dài các đường cong, vì trong trường hợp này cái «không chia được» là điểm), nhiều nhà toán học đã nhiệt tình ủng hộ Kavalêri và phát triển phương pháp của ông.

Tôrixenli (1608-1647) đã tính thể tích của một hình tạo bởi một hypecbôl quay chung quanh một tiệm cận. Ở đây ông đã chọn cái «không chia được» là những mặt cong (chứ không phải là hình phẳng như Kavalêri). Ngoài ra ông còn tính diện tích giới hạn bởi các đường parabôl và hypecbôl với bậc tùy ý, tức là những đường cong có phương trình $y^n = kx^{\pm m}$ và đã tìm ra điều kiện tồn tại giá trị của tích phân định hạn $\int_a^\infty y\,dx$ trong trường hợp của đường hypecbôl.

10. Bây giờ ta xét đến phương pháp vi phân có liên quan tới bài toán tìm tiếp tuyến của một đường cong và xác định cực trị của hàm số.

Trong phạm vi này các nhà toán học thời cổ đã làm được rất ít so với phép tính tích phân.

Đêcac trong tác phẩm « Hình học » đã nêu lên phương pháp tìm pháp tuyến của đường cong tại một điểm (và do đó tìm được tiếp tuyến). Nhưng phương pháp của ông là phương pháp đại số chứ không phải là phương pháp vi phân.

Vào khoảng năm 1629, trong khi Đêcac tìm ra phương pháp đại số đó, Phecma đã sáng tạo một phương pháp khác, có thể áp dụng để tìm cực trị của một hàm và pháp tuyến của đường cong. Phương pháp này được trình bày trong tác phẩm không lớn « Phương pháp tìm cực đại và cực tiểu » và đã trở nên một bộ phận quan trọng của giải tích các đại lượng vô cùng bé.

Lập luận của Phecma như sau : Giả sử hàm số $f(x)$ đạt được cực đại tại $x = a$, tức là $f(a \pm h) < f(a)$. Khi đó $f(a \pm h) - f(a) < O$ do đó :

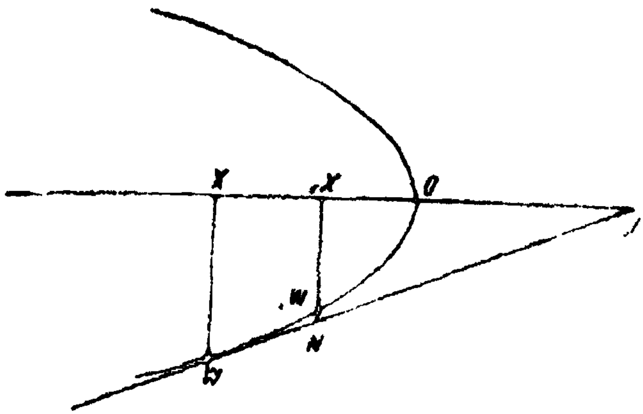
$$f_1(a)\,h + f_2(a)\,h^2 + f_3(a)\,h^3 \ldots < O \quad \text{và}$$
$$-f_1(a)\,h + f_2(a)\,h^2 - f_3(a)\,h^3 + \ldots < O$$

Khi h đủ nhỏ và $f_1(a) \neq O$ dấu của các vế bên trái trùng với dấu của số hạng thứ nhất bởi vậy muốn có cả hai bất đẳng thức trên ta phải có $f_1(a) = O$, và $f_2(a) < O$. Cũng lập luận tương tự, nếu $f_1(a) = O$ và $f_2(a) > O$, ta có cực tiểu tại $x = a$.

Như vậy, điều kiện có cực trị $f_2(a) = O$ trùng với điều kiện mà ta viết dưới dạng như hiện nay :

$$\lim_{h \to O} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; f'(a) = O$$

Về việc tìm tiếp tuyến, Phecma đã viết : « Việc xác định tiếp tuyến tại một điểm của một đường cong nào đó sẽ dẫn đến phương pháp đã trình bày trên ». Ông không nêu ra một quy tắc chung, mà chỉ đưa ra thí dụ về tìm tiếp tuyến TM tại điểm M của parabôl $\frac{x}{y^2} = C$ bằng cách tìm đoạn TX (hình 12).



Hình 12

Do hai tam giác TXM và TX'M' đồng dạng và bất đẳng thức X'M' < X'N, ta có :

$$\frac{OX}{OX'} = \frac{XM^2}{X'M'^2} > \frac{XM^2}{X'N^2} = \frac{TX^2}{TX'^2}$$

Ký hiệu $OX = x$, $OX' = x - h$, $TX = t$, $TX' = t - h$, ta sẽ được :

$$\frac{x}{x-h} > \frac{t^2}{(t-h)^2} \text{ hay } t^2h + xh^2 > 2\ txh.$$

Khi h khá nhỏ, bất đẳng thức trở thành đẳng thức và ta có $t = 2x$

Như vậy phương pháp của Phecma thực chất là phương pháp vi phân.

Trên đây ta đã trình bày một cách sơ lược các vấn đề hình học liên quan tới phép tính tích phân và vi phân. đó cũng chính là thời kỳ phôi thai của ngành giải tích vô cùng bé.

Chương VII

HÌNH HỌC Ở THẾ KỶ XVIII

1. Cũng như ở thế kỷ trước, giải tích toán học chiếm địa vị ưu thế trong sự phát triển toán học của thế kỷ XVIII. Trong thời gian này, cơ học là môn học đi đầu trong các khoa học về thiên nhiên, được phát triển mạnh mẽ với những cống hiến quan trọng của Niutơn, Laplax (1749 — 1827), Ơle... Cơ học đã có một ảnh hưởng mạnh mẽ tới toán học nhất là giải tích, và vào khoảng giữa thế kỷ XVIII phép tính vi phân và tích phân của Lêpnitx đã được nghiên cứu trong cơ học của Niutơn.

Giải tích toán học được phân chia thành nhiều ngành độc lập, do yêu cầu của cơ học cũng như yêu cầu của chính bản thân toán học.

Những thành công của giải tích toán học đã ảnh hưởng nhiều đến sự phát triển của hình học : hình học giải tích được tiếp tục nghiên cứu mạnh mẽ. Môn hình học vi phân ra đời nhằm nghiên cứu các đường cong và mặt cong không gian bằng phương pháp vi phân.

Trong thế kỷ này, do yêu cầu của ngành xây dựng và ngành kiến trúc môn hình học họa hình ra đời, phát triển mạnh và tạo điều kiện cho sự xuất hiện của hình học xạ ảnh ở đầu thế kỷ XIX.

Một hướng khác trong hình học là việc nghiên cứu lý thuyết đường song song, chuẩn bị cho một phát minh quan trọng cũng vào đầu thế kỷ XIX : hình học phi Ơclit.

2. G.F. Lôpitan (1661 — 1704) là tác giả của một trong những cuốn sách giáo khoa đầu tiên về hình học giải tích, cuốn «Về các giao tuyến cônic và về những ứng dụng của chúng để giải phương trình trong những bài toán xác định hoặc không xác định» (1707). Ông đã đưa phương trình của giao tuyến cônic về các dạng :

$$y^2 = px,\ y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2} = \frac{1}{2}pt - \frac{px^2}{2t}$$

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{t^2} \mp c^2 = \frac{p^2x^2}{2t} \mp \frac{1}{2}pt,$$

trong đó, t là nửa trục lớn và c là nửa trục nhỏ. Các tính chất của cônic được chứng minh bằng phương pháp hình học thuần túy hoặc bằng phương pháp đại số, suy ra từ những phương trình đó.

Lôpitan đã xét một loạt các bài toán thú vị, và đã chứng minh rằng quỹ tích của các điểm mà tỉ số khoảng cách tới hai điểm cố định bằng hằng số là một đường tròn, còn quỹ tích các điểm mà tỉ số khoảng cách tới một điểm và một đường thẳng cố định bằng hằng số là một đường cônic.

Giacôp Hecman (1678 — 1733) là người có những đóng góp lớn vào sự phát triển của hình học giải tích. Ông đã khảo sát đường cong bậc hai một cách đầy đủ hơn so với những người đi trước ông. Xuất phát từ phương trình

$$\alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \varphi = 0,$$

ông chứng tỏ rằng đường cong có phương trình đó là elip, hypecbôl, parapôl phụ thuộc vào đại lượng $\beta^2 - \alpha\gamma$ bé hơn 0, bằng 0, hoặc lớn hơn 0. Ông cũng đã biết rằng phương trình nói trên có thể biểu thị cho một cặp đường thẳng.

Hecman cũng đã áp dụng phương pháp tọa độ cực vào việc nghiên cứu các đường cong, và đưa ra công thức liên hệ giữa tọa độ cực.

3. Như đã nói, năm 1704 Niutơn cho công bố cuốn «Liệt kê các đường cong bậc ba», một tác phẩm có nhiều đóng góp quan trọng vào việc nghiên cứu các đường cong bậc cao, và vào việc phát triển các phương pháp của hình học giải tích. Ixăc Niutơn (1643 — 1727), nhà toán học và vật lý học vĩ đại người Anh, sinh ra trong một gia đình điền chủ. Ông tốt nghiệp trường đại học Cambritgiơ năm 1665 và ở lại làm việc tại khoa *toán do Ixăc Barô (1630-1677)* lãnh đạo. Năm 1669 Ixăc Barô đề nghị nhường quyền lãnh đạo khoa cho Niutơn, vì ông nhận thấy rằng chàng thanh niên 26 tuổi ấy đã vượt xa mình. Niutơn ở lại Cambritgiơ cho đến năm 1696, khi đó ông được triều đình Anh quốc mời ra nhận chức thanh tra. Tên tuổi của Niutơn được mọi người biết đến từ khi ông cho ra đời cuốn «Cơ sở toán học của triết học tự nhiên» (1687). Đó là một cuốn sách lớn trình bày cách xây dựng tiên đề của cơ học và định luật hấp dẫn (định luật làm cho quả táo rơi xuống đất và mặt trăng quay chung quanh quả đất). Từ định luật lực hấp dẫn tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách, Niutơn đã rút ra quy luật chuyển động của các hành tinh mà Kêple đã tìm thấy bằng thực nghiệm. Ông cũng đã giải thích hiện tượng thủy triều và nhiều hiện tượng khác về sự chuyển động của các thiên thể.

Trong cuốn « Liệt kê các đường cong bậc ba », Niutơn đã phân các đường cong bậc 3 thành 72 loại xuất phát từ mệnh đề nói rằng mọi đường cong bậc 3 đều có thể thu được bằng cách chiếu xuyên tâm một đường « Parabôl phân kỳ » $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lên một mặt phẳng. Các kết quả đều trình bày ngắn gọn và không có chứng minh, kể cả định lý quan trọng như : số giao điểm của hai đường cong đại số bằng tích các bậc của chúng.

Niutơn còn đề ra một phương pháp động học để tạo thành một đường cong bậc hai mà ông gọi là « sự mô tả có hạn ». Nếu ta quay hai góc đã cho chung quanh đỉnh của chúng, sao cho giao điểm hai cạnh nào đó của chúng chuyển động dọc theo một đường thẳng thì giao điểm của hai cạnh kia sẽ vạch thành một giao tuyến cônic (đặc biệt có thể là đường thẳng). Từ đó ông nêu lên những phương pháp dựng đường cong bậc hai khi biết năm điều kiện, hai trong số các điều kiện đó là : hoặc đường cong bậc hai đi qua một điểm đã cho hoặc tiếp xúc với một đường thẳng đã cho.

Năm 1717, Xtiêclinh (1642 — 1770) viết cuốn « Các đường cong bậc 3 của Niutơn », trong đó ông chứng minh hầu hết các định lý của Niutơn. Ở đây XtiêcLinh, đồng thời một lúc với Hecman, đã nêu lên mệnh đề về số các hệ số trong phương trình của một đường cong đại số bậc n, và từ đó suy ra rằng đường cong bậc n được xác định bởi $\frac{n(n+3)}{2}$ điểm.

Xtiêclinh còn xác định số nhánh vô tận có thể có của đường cong, xác định tiệm cận và cả đường tiệm cận cong. Ông còn thêm vào 72 loại của Niutơn 4 loại mới, Nhìn chung Xtiêclinh đã có những đóng góp quan trọng để làm sáng tỏ công trình của Niutơn. Tuy vậy ông vẫn chưa chứng minh được một trong những định lý quan trọng nhất nói rằng tất cả các đường cong bậc ba đều có thể thu được bằng cách chiếu xuyên tâm đường parabôl phân kỳ. Điều đó sau này Klerô chứng minh được.

Phương pháp «mô tả có hạn» của Niutơn được Côlin Maclôranh (1698—1746) áp dụng để xây dựng những đường cong bậc 3. Ví dụ cho một góc quay quanh đỉnh còn góc thứ hai chuyển động sao cho một cạnh đi qua một điểm cố định. Khi đó nếu giao điểm hai cạnh nào đó vạch ra một đường thẳng thì giao điểm hai cạnh kia sẽ vạch thành một đường cong bậc 3. Trong cuốn «Về các tính chất chung của các đường hình học» (1748), ông đã nêu lên những định lý mới về giao điểm các đường cong bậc 3 với đường thẳng, và các tiếp tuyến của đường cong tại các tiếp điểm. Chẳng hạn định lý sau đây: Nếu từ một điểm P ta vẽ hai cát tuyến cắt một đường cong tại A, B, C... (trên một cát tuyến) và A', B', C' (trên cát tuyến kia). Gọi A_1, B_1. C_1 là giao tuyến của cát tuyến PA với các tiếp tuyến của đường cong tại A', B', C',... khi đó :

$$\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}+\ldots=\frac{1}{PA_1}+\frac{1}{PB_1}+\frac{1}{PC_1}+\ldots$$

Một định lý khác : Nếu vẽ qua một điểm P một cát tuyến bất kỳ. cắt đường cong tại A, B, C, ... thì quỹ tích những điểm M của cát tuyến đó sao cho

$$\frac{1}{PM}+\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}+\ldots$$

là một đường thẳng (bây giờ ta gọi nó là đường đối cực của điểm *P* đối với đường cong đã cho).

4. A. C. Klerô (1713 — 1768) có những đóng góp quan trọng vào sự phát triển của hình học, đặc biệt là hình học giải tích. Là con của một giáo viên toán ở Pari, Klêrô đã thể hiện tài năng toán học của mình rất sớm. Năm 12 tuổi, ông đã làm cho các viện sĩ Viện Hàn lâm Pari phải ngạc nhiên vì một công trình của ông về một số đường cong bậc 4. Sau khi ông trả lời tất cả các câu hỏi của các viện sĩ, họ mới thật tin rằng ông là tác giả của công trình đó. Năm 1729 ông trình bày trước Viện Hàn lâm Pari công trình « Nghiên cứu các đường cong có hai độ cong », công trình này đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của hình học giải tích và hình học vi phân. Hai năm sau, chàng thanh niên 18 tuổi được bầu làm viện sĩ Viện Hàn Lâm Pari, một điều chưa từng có trong lịch sử. Năm 1754 ông được bầu làm viện sĩ nước ngoài của Viện Hàn lâm Pêtecbua và năm 1752 được giải thưởng của Viện về công trình nghiên cứu qũy đạo của mặt trăng, và mười năm sau được giải thưởng (cũng của Viện Hàn lâm Pêtecbua) về công trình nghiên cứu sao chổi.

Klerô viết tác phẩm « Về các đường cong, có được bằng cách cắt một mặt cong nào đó bởi một mặt phẳng có vị trí xác định » (1733) khi ông mới 18 tuổi. Trong tác phẩm này, ông đã chứng minh rằng tất cả các đường cong bậc 3 đều có thể xem là hình chiếu xuyên tâm của 5 loại parabôl phân kỳ. Định lý này do Niutơn nêu ra trong cuốn « Liệt kê các đường cong bậc 3 », và như đã nói, Xtiêclinh không chứng minh được. Klerô đã xét một hình nón bậc 3 :

$$xy^2 = ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3$$

mà giao tuyền của nó với các mặt phẳng x = const là những parabôl phân kỳ, còn giao tuyền của nó với mọi mặt khác thì cho ta tất cả các dạng khác của đường cong bậc 3.

Cũng trong tác phẩm đó Klerô đã khảo sát một lớp rất quan trọng của các phép biến đổi mặt phẳng, mà bây giờ ta gọi là phép afin. Hai đường cong tương ứng với nhau qua phép afin được ông gọi là hai đường « cùng một dạng ». Như vậy Klerô là người đầu tiên đã tiến hành phân loại afin các đường cong.

5. Nhân vật trung tâm của nền toán học thế giới thế kỷ XVIII là nhà toán học vĩ đại Lêôna Ơle (1707 - 1783). Trong lịch sử khoa học toán-lý, thế kỷ XVIII có thể gọi là « thế kỷ Ơle ». Trong sự phát triền của hình học giải tích, Ơle cũng đã để lại những cống hiến không thể phai mờ.

Lêôna Ơle sinh tại thành phố Baden (Thụy sĩ). Cha là Pôn Ơle, học toán với Giacôp Becnui (1654 - 1705) còn chính ông thì học với Giôhan Becnui (1667-1748). Năm 1725 chàng thanh niên Ơle cùng đi sang Pêtecbua với Nicôlai Becnui (1695-1726) (con của Giôhan Benui) và làm việc tại Viện Hàn lâm Pêtecbua cho đến năm 1741. Từ 1741 đến 1766 ông làm việc tại Viện Hàn lâm Beclin dưới sự bảo trợ đặc biệt của vua Phriđric đại đế và từ 1766 đến 1783 ông lại trở về Pêtecbua và lúc bấy giờ được sự che chở của nữ hoàng Êkatêrina. Ông hai lần lấy vợ và có 13 con tất cả.

Hoạt động khoa học của Ơle kéo dài liên tục trong gần 60 năm. Thiên tài toán học của ông để lại những dấu vết trong tất cả mọi ngành toán học và cơ học của thế kỷ XVIII. Mặc dầu năm 1735 ông bị mù một mắt, và năm

1756 mù nốt mắt còn lại, các nghiên cứu khoa học của ông không hề giảm sút. Với một trí nhớ kỳ diệu và khả năng sáng tạo phi thường, Ơle đọc cho các thư ký viết các phát minh của mình. Ông đã để lại cho nền toán học thế giới khoảng 850 công trình, trong đó 530 công trình được in ra khi ông còn sống. Sau khi mất, những bản thảo mà ông để lại được Viện Hàn lâm Pêtecbua lần lượt công bố trong khoảng 47 năm mới hết.

Trong tập 2 của cuốn «Mở đầu về giải tích vô cùng bé» (1748) Ơle đã trình bày một cách đầy đủ và có hệ thống môn hình học giải tích. Khác với Niutơn, trong cuốn này Ơle cố gắng giải quyết tất cả các vấn đề của hình học bằng phương pháp đại số và giải tích.

Trong hai chương đầu của cuốn sách Ơle đã định nghĩa hệ tọa độ vuông góc và xiên góc, định nghĩa đường cong và đường cong liên tục, và đưa ra công thức biến đổi tọa độ. Trong trường hợp biến đổi tọa độ vuông góc, công thức của Ơle là

$$\begin{cases} x = u \sin q + t \cos q - f \ ; \\ y = u \cos q - t \sin q - g, \end{cases}$$

trong đó q là góc quay của các trục tọa độ.

Chương V và VI nói về những tính chất chung của giao tuyến cônic, tức là những tính chất có thể suy ra từ phương trình bậc hai tổng quát, mà ông viết dưới dạng :

$$y^2 + \frac{(\varepsilon x + \gamma)\, y}{\zeta} + \frac{\delta x + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$$

Dựa vào các tính chất của tổng và tích các nghiệm của phương trình bậc 2, từ phương trình nói trên Ơle đã suy ra những tính chất chung của đường kính, giây cung, tiếp tuyến. Sau đó ông xác định phương trình của đường kính chia đôi các giây cung song song với trục tung, trong trường hợp hệ tọa độ vuông góc cũng như xiên góc. Giao điểm của hai đường kính sẽ là tâm của giao tuyến cônic, không phụ thuộc vào góc giữa các trục tọa độ. Ơle cũng đã thiết lập các phương trình đưa về các đường kính liên hợp

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \text{ và } y^2 = \alpha - \beta x^2$$

Xuất phát từ phương trình sau, bằng những tính toán, ông đã xác định được cặp đường kính liên hợp khác nếu biết góc hợp bởi trục hoành và một trong các đường kính đó. Ông *tính được* góc *hợp* bởi hai đường kính liên hợp đó và độ dài của chúng.

Các chương sau nêu lên các định nghĩa và tính chất của tiêu điểm, nửa trục lớn, nửa trục bé, khoảng cách từ tiêu điểm đến đỉnh...

Ơle còn xét phương elip mà có đỉnh tại gốc tọa độ.

$$y^2 = 2cx - \frac{c(2d - c)}{d^2} x^2$$

Từ đó ông chuyển sang parabôl bằng cách đặt $2d = c$. Những tính chất của parabôl được tìm ra bằng cách xem nó là đường elip đặc biệt (một đỉnh bị kéo ra vô tận). Sau đó ông xét *phương trình* hypecbôl.

$$y^2 = \alpha + \gamma x^2$$

và chứng tỏ rằng các trục liên hợp của nó trong trường hợp này là ảo. Ông giả thiết trục ảo bằng $b\sqrt{-1}$ và đưa phương trình hypecbôl về dạng.

$$y^2 = \frac{b^2}{a} (x^2 - a^2).$$

Tính chất của hypecbôl được suy ra từ tính chất của elip bằng cách thay b^2 bởi $-b^2$.

Chúng ta không đủ chỗ để trình bày mặc dầu là rất sơ lược nội dung của cuốn sách gồm 22 chương đó của Ơle. Trên đây chỉ là một số ít sự kiện có liên quan đến đường cong bậc 2. Những phần còn lại có liên quan đến các đường cong đại số; các đường tiệm cận thẳng và cong, các điểm đặc biệt; các phép biến đổi biến đường cong thành chính nó, phép biến đổi đồng dạng, phcp afin, phép biến đổi bao giác, một số đường cong siêu việt, v.v...

6. Bây giờ chúng ta chuyển sang xét sự phát triển của hình học giải tích trong không gian.

Việc áp dụng phương pháp tọa độ trong không gian 3 chiều đã được xét tới thế kỷ XVII, với Đêcac và Phecma, nhưng trong một thời gian dài nó vẫn không được phát triển mặc dầu La Hia đã viết được *phương trình của* một số mặt.

Mùa hè năm 1700, Angtoan Parăng (1666 — 1716) viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Pari đã trình bày một công trình về tính chất của các mặt, mang tên « Những thí nghiệm và nghiên cứu về toán học và vật lý » Parăng đã giải quyết bài toán xác định tiếp diện của mặt cầu có phương trình :

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2$$

Ngoài ra ông còn nghiên cứu các mặt :

$$y = (b + x)\sqrt{\frac{z - x}{z}}, \quad y = \frac{z^3}{x^2 + az}$$

bằng cách xét cả giao tuyến bởi những mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ.

Năm 1728 trong công trình « Về các đường ngắn nhất (tối đoản) trên một mặt bất kỳ, đi qua hai điểm bất kỳ », bằng cách đưa vào hệ tọa độ vuông goc trong không gian

Ơle đã chỉ ra rằng một mặt được biểu thị bằng một phương trình liên hệ với ba tọa độ t, x, y và đường thì được biểu thị bởi hai phương trình như vậy. Ông còn nêu lên phương trình của ba loại mặt : mặt trụ, mặt nón và *mặt tròn xoay*, mà trong ký hiệu ngày nay có thể viết :

$$Z = f(y),\ \frac{Z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right),\ Z = f(x^2 + y^2)$$

Trong tạp chí «Báo cáo» của Viện Hàn lâm Pêtecbua năm 1732, 1733 có những công trình của Hecman về hình học giải tích trong không gian. Ông đã nghiên cứu mặt phẳng $az + by + cx - e^2 = O$ và một số mặt bậc hai như : mặt trụ parabôlic : $z^2 - ax - by = O$; mặt nón $z^2 = xy$ và $az^2 - bxz - cyz + cy^2 = O$; các mặt $z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = O$ và $az^2 + byz + cy^2 - exz + fx^2 + gz - bx = O$; và cuối cùng là «thể tròn» $u^2 - x^2 - y^2 = O$ trong đó u là hàm của z, đặc biệt $u^2 = a^2 - \frac{a^2z}{b}$, và $u^2 = a^2 - \frac{a^2r^2}{b^2}$.

Công trình nói trên chưa được hệ thống, nhưng bằng những thí dụ khác nhau, Hecman đã chỉ ra phương pháp xác định mặt phẳng tiếp xúc, các điểm cực trị của mặt, cũng như phương pháp xác định hình dáng của mặt dựa vào các thiết diện khác nhau.

Năm 1731, Klêrô cho xuất bản cuốn «Nghiên cứu các đường có hai độ cong». Cuốn sách này đã trình bày những cơ sở của ba ngành học : hình học giải tích trong không gian, hình học vi phân và hình học họa hình. Ông đã đưa ra những phương trình của một số mặt tròn xoay phức tạp như elipxôit tròn xoay, hypecbôlôit một tầng tròn xoay, và parabôlôit tròn xoay. Sau đó Klerô còn nghiên cứu các đường cong trong không gian. Trong công trình này, Klêrô lần đầu tiên đã nêu công thức tính khoảng cách giữa hai điểm một cách rõ ràng

$$f = \sqrt{(x \mp a)^2 + (y \mp b)^2 + (z \mp c)^2}$$

và Klêrô cũng là người đầu tiên viết phương trình của mặt phẳng theo các đoạn chắn (trên trục tọa độ) :

$$\frac{z}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$$

7. Lần đầu tiên, hình học giải tích trong không gian được trình bày một cách có hệ thống trong phần « Phụ lục về các mặt » của cuốn « Mở đầu về giải tích vô cùng bé » (Ơle 1784). Phần mục lục này có liên hệ chặt chẽ với các hàm giải tích hai biến số.

Đặc biệt trong chương IV, Ơle đã xét các phép biến đổi tọa độ vuông góc có dạng :

$$x = p\,(\cos\xi\,\cos\theta - \sin\xi\,\cos\eta\,\sin\theta) +$$
$$q\,(\cos\xi\,\sin\theta + \sin\xi\,\cos\eta\,\cos\theta) - r\,\sin\xi\,\sin\eta + f;$$

$$y = -p\,(\sin\xi\,\cos\theta + \cos\xi\,\cos\eta\,\sin\theta) -$$
$$q\,(\sin\xi\,\cos\theta - \cos\eta\,\cos\xi\,\cos\theta) - r\,\cos\xi\,\sin\eta + g;$$

$$z = -\,p\sin\eta\,\sin\theta + q\sin\eta\,\cos\theta + r\,\cos\eta + h.$$

Các góc ξ, η, θ, xác định sự quay của các trục, ngày nay gọi là góc Ơle.

Trong chương V, Ơle đã nghiên cứu các mặt bậc hai với phương trình viết dưới dạng :

$$\alpha z^2 - \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \xi x^2 + \eta z + \theta y + ix + \mathfrak{T} = 0$$

và lần đầu tiên đưa ra khái niệm nón tiệm cận. Bằng phương pháp biến đổi tọa độ để đưa phương trình mặt bậc hai về dạng đơn giản. Ơle đã đặt nền móng cho việc phân loại các mặt bậc hai. Các phương trình chính tắc của mặt bậc hai không suy biến được Ơle viết dưới dạng:

$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2$; $Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2$

$Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2$; $Ap^2 + Bq^2 = ar$, $Ap^2 - Bq^2 = ar$, $Ap^2 = aq$; ông đã lần lượt gọi tên các mặt đó là: eliptôit, mặt hypecbôl eliptic, mặt hypecbôl hypecbôlic, mặt parabôl eliptic, mặt parabôl hypecbôlic và mặt trụ parabôl. Ơle còn nêu lên phương pháp tổng quát để từ một phương trình của mặt bất kỳ có thể biết được mặt đó có một trong những dạng nói trên.

Ơle đã phát hiện trên mặt parabôlôit hypecbôlic $Ap^2 - Bq^2 = ar$ một cặp đường thẳng trong mặt phẳng $r = O$ nhưng các đường thẳng khác của mặt thì không thấy nhắc đến. Sau này năm 1759 W. Brêikenritgiơ (1700 — 1769) đã chứng tỏ mặt parabôlôit hypecbôlic là mặt kẻ, có một họ đường sinh thẳng, và năm 1763 A.R. Môduy (1731 — 1815) phát hiện thêm một họ đường sinh thứ hai. Một học trò của G. Mônggiơ là Saclơ Tanhxô (1749 — 1822) đã nghiên cứu các mặt kẻ một cách tổng quát hơn: đó là những mặt sinh bởi một đường thẳng chuyển động song song với một mặt phẳng và tựa lên hai đường cong cho trước.

Mônggiơ (1746 — 1818) và Lagranggiơ (1736 — 1813) đã giải quyết một số bài toán trong không gian, tuy sơ cấp nhưng rất quan trọng để trình bày một cách có hệ thống môn hình học giải tích không gian. Mônggiơ đã viết phương trình của mặt phẳng đi qua một điểm cho trước vuông góc với một đường thẳng cho trước và ứng dụng để viết phương trình mặt phẳng pháp của đường cong ghềnh $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Ông cũng đã xác định được khoảng cách từ một điểm đã cho tới một mặt phẳng đã cho.

Trong tác phẩm « Một số bài toán về hình chóp đáy tam giác, giải bằng phương pháp giải tích » (1773), Lagranggiơ đã ứng dụng phương pháp hình học giải tịch vào những bài toán trước đó chỉ giải bằng phương pháp tổng hợp. Nếu cho trước tọa độ các đỉnh của hình tứ diện, Lagrănggiơ có thể tính được độ dài các cạnh, diện tích các mặt bên, đường cao của tứ diện và thể tích của nó. Ông còn tính được bán kính hình tâm cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện cũng như trọng tâm của nó.

Khi tính diện tích của một tam giác có một đỉnh tại gốc tọa độ còn hai đỉnh kia ứng với hai bán kính vectơ r và r', ông đã đưa ra công thức, mà ngày nay ta gọi là công thức Lagrănggiơ :

$$(r)^2\ (r)^2 - (r\,r')^2 = [r\,r']^2$$

trong đó $(r)^2$ và $(r')^2$ là bình phương vô hướng, $r\,r'$ là tích vô hướng, $[r\,r']$ là tích vectơ.

Các công trình nghiên cứu của Ơle, Mônggiơ Lagrănggiơ và các nhà toán học khác đã cho phép soạn thảo một giáo trình về hình học giải tích vào cuối thế kỷ XVIII, về cơ bản giống như giáo trình ở các trường đại học ngày nay. Về mặt đó phải kể đến công trình của S.Ph.Lacroa (1765 — 1842) Giáo trình cơ sở về lượng giác phẳng, lượng giác cầu và ứng dụng của đại số trong hình học. Trình bày của Lacroa rất hiện đại, đến mức ngày nay có thể dùng *giáo trình gốc đó (in lần thứ nhất)* làm tài liệu giảng dạy ở các trường đại học (năm 1897 còn xuất bản giáo trình đó lần thứ 25).

Như vậy là có thể nói rằng trong khoảng 200 năm, bắt đầu từ Đêcac và Phecma, hình học giải tích nhanh chóng phát triển thu được những kết quả quan trọng và đến cuối thế kỷ XVIII nó đã trở thành một môn học hoàn chỉnh, được đưa vào giảng dạy ở những năm đầu tiên của bậc đại học.

8. Trong phần trên ta đã một đôi lần nhắc đến G.Mônggiơ. Nhà toán học lỗi lạc người Pháp đó đã đóng một vai trò quan trọng trong việc phát triển hình học, nhất là hình học giải tích, hình học vị phân và hình học họa hình.

G. Mônggiơ *sinh năm* 1748 *trong một* gia đình buôn bán nhỏ. Tốt nghiệp trường kỹ sư quân sự ở Mêdierơ ông được giữ lại giảng dạy ở đó từ năm 1765 đến 1783. Năm 1768 ông trở thành giáo sư toán học và 1771 — giáo sư vật lý. Từ năm 1780 ông bắt đầu giảng dạy ở Pari, nửa năm ở Pari và nửa năm ở Mêdierơ. Cũng năm đó, ông được bầu làm viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Pari, và từ 1783 thì ở hẳn tại Pari.

Trong thời gian ở Mêdierơ, Mônggiơ đã nghiên cứu các nguyên tắc của họa hình, đặc biệt là phương pháp mà sau này ta gọi là «Phương pháp Mônggiơ». Vào khoảng những năm 70 ông bắt đầu nghiên cứu những ứng dụng của giải tích vào lý thuyết mặt. Ngoài ra ông còn nghiên cứu thành công các vấn đề vật lý, hóa học và kỹ thuật do yêu cầu phải tự đảm nhận quản lý một nhà máy luyện kim, của hồi môn trong cuộc hôn nhân năm 1777.

G. Mônggiơ là người sáng lập ra trường Bách khoa (1794) và lãnh đạo nó trong suốt 20 năm. Chính ở trường này đã xuất hiện những giáo trình cơ sở về hình học vi phân và hình học họa hình.

Vị Mônggiơ là người nhiệt tình ủng hộ Napôlêông, nên sau khi vị hoàng đế này bị đi đày, thì vào mùa xuân năm 1816 ông bị trục xuất khỏi Viện Hàn lâm Pari và khỏi trường Bách khoa. Thậm chí năm 1818 khi ông mất, học trò của ông bị cấm không được đi đưa đám người thầy học lỗi lạc của họ.

9. Môn hình học vi phân xuất hiện từ cuối thế kỷ trước như là sự áp dụng của phép tính vô cùng bé vào, hình học. Lúc bấy giờ trong các công trình của Lêpnitx, Niutơn, và hai anh em Becnui đã đề cập đến các khái niệm đầu tiên của hình học vi phân như : tiếp tuyến, cực trị, bề lồi, bề lõm, điểm uốn, đường tròn mật tiếp, bán kính cong...

Trong thế kỷ XVIII ngành hình học mới này được phát triển một cách rộng rãi.

Về hình học vi phân trên mặt phẳng thì phần lớn các công trình dành cho việc nghiên cứu các đường cong cho bởi một hệ thức nào đó giữa bán kính cong và các đại lượug khác như bán kính vectơ, tiếp tuyến, pháp tuyến, độ dài cung..., và thường đi đến việc giải một phương trình vi phân nào đó. Ơle và các nhà bác học ở Pêtecbua đã thu được nhiều kết quả.

Về các đường cong trong không gian, các công trình đầu tiên đều chú ý tới các đường ngắn nhất trên một mặt. Becnui đã đưa ra khái niệm mặt phẳng mật tiếp của một đường cong, tức là mặt phẳng đi qua ba điểm rất gần nhau của đường cong. Vào năm 1728 Becnui đặt cho Ơle bài toán về phương trình của đường ngắn nhất trên một mặt. Vào năm sau, Ơle đã tìm được lời giải của bài toán đó. Phương trình ngắn nhất của Ơle có dạng

$$\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

trong đó P, Q lấy từ phương trình vi phân của mặt $Pdx = Qdy + Rdt$. Trong một thư khác gửi cho Ơle vào 1729, Becnui cũng đã tìm được phương trình đường ngắn nhất:

$$\frac{T\,ddy}{Tdzds - zds^2} = \frac{ddz}{ds^2 + dz^2}$$

trong đó $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Về việc nghiên cứu các mặt trong không gian lại vẫn Ơle là người có nhiều đóng góp quan trọng. Chẳng hạn ông đã nêu lên khái niệm «mặt trải được» (còn gọi là mặt khai triển), tức là mặt có thể trải được trên mặt mà không bị nhăn và không bị rách. Ơle đã tìm được điều kiện để cho một mặt là mặt trải được. Ông cũng là người đã nêu lên những khái niệm có thể ứng dụng để nghiên cứu những tính chất nội bộ của mặt đó mà không viện đến các khái niệm của không gian chung quanh. Tư tưởng này của Ơle về sau được Gaux phát triển rất sâu rộng (1827). Một kết quả quan trọng của Ơle là: tất cả các tiếp tuyến của một đường cong bất kỳ trong không gian tạo thành một mặt trải được, và mọi mặt trải được (nếu không phải là mặt trụ và mặt nón) đều tạo thành bởi các tiếp tuyến của một đường cong nào đó.

Trong tác phẩm «Về việc biểu diễn mặt cầu trên mặt phẳng» Ơle đã chứng minh được rằng không có phép đẳng cự nào biến mặt cầu thành mặt phẳng và nghiên cứu một cách chi tiết phép chiếu nổi có nhiều ứng dụng trong việc vẽ bản đồ.

Mônggiơ cũng đã đưa ra khái niệm mặt trải được độc lập với Ơle, trong tác phẩm « Về sự trải được, bán kính cong và các dạng điểm uốn của đường hai độ cong» (1771). Ông nêu lên một khái niệm mới rất quan trọng: trục cực của vi phân cung xác định bởi ba điểm vô cùng gần nhau của đường cong; đó là trục của đường tròn đi qua ba điểm ấy, và cũng là giao tuyến của hai mặt phẳng pháp tại hai điểm gần nhau vô cùng của đường cong. Mônggiơ chứng minh rằng các trục cực của một đường cong đã cho tạo thành một mặt khả triển, gọi là mặt cực. Các tâm của các vòng tròn mật tiếp (còn gọi là tâm cong) nằm trên mặt cực đó sẽ tạo thành một đường mà khi trải mặt lên mặt phẳng sẽ biến thành đường thẳng, tức là một đường ngắn nhất của mặt cực.

Mônggiơ đã viết được phương trình vi phân của đường ngắn nhất trên một mặt, và ông chứng minh rằng nó trùng với phương trình của Becnui.

Trong một công trình khác xuất bản năm 1775. Mônggiơ đã viết được phương trình mặt trải như sau

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

và phương trình của mặt kẻ là

$$\frac{2\partial}{\partial x}\left(\frac{\dfrac{-\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sqrt{\omega}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sqrt{\omega}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right) = 0$$

trong đó

$$\omega = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ông còn viết phương trình của mặt kẻ đi qua ba đường cong đã cho. Nếu ba đường đó là ba đường thẳng từng đôi một chéo nhau thì ta được mặt hypecbôlôit một tầng hoặc mặt yên ngựa (parabôlôit hypecbôlit).

Trong các bài giảng của Mônggiơ đọc ở Trường Bách khoa Pari, chúng ta có thể tìm thấy một sự trình bày có hệ thống về lý thuyết mặt. Ở đây có nhiều phát minh mới của Mônggiơ.

Ông đã nêu ra khái niệm về họ mặt xác định bởi *phương trình các đạo hàm riêng*:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

hay

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (2)$$

Giao của hai đường vô cùng gần nhau của họ được gọi là đường đặc trưng. Tất cả các đường đặc trưng sẽ bao một đường nào đó, mà ông gọi là «tuyến lùi» và nó là quỹ tích của tất cả các giao điểm của ba mặt gần nhau vô cùng. Ông còn viết được phương trình đường đặc trưng của mặt (1) và (2).

10. Bây giờ ta sẽ nói đến sự phát triển của hình học họa hình, tức là lý thuyết về việc biểu diễn các hình không gian trên mặt phẳng.

Trong thế kỷ XVIII, môn học này đạt được một số kết quả như sau.

Nhà toán học Hà Lan W. Xgavexanđe (1688-1742) đã sử dụng hình chiếu của đường thẳng vô tận trên mặt phẳng vật qua phép chiếu xuyên tâm.

Nhà toán học Pháp N.L. Đơ La Ke (1713-1762) đã tìm được phương trình của đường hypecbôl khi nó là hình chiếu của một vòng tròn. Ông chứng minh rằng nếu x, y, z, là tọa độ của một điểm trong không gian thì tọa độ x', y' của hình chiếu trên mặt phẳng ảnh sẽ là:

$x' = \dfrac{dx}{d + y}$, $y' = \dfrac{dz}{y + d}$, d là khoảng cách từ tâm chiếu tới mặt phẳng ảnh.

Gi. H. Lămbec đã chuyển việc nghiên cứu phép chiếu xuyên tâm sang phép chiếu song song. Ông cũng đã nghiên cứu việc dựng hình bằng một mình thước, và trong trường hợp cần thiết bằng compa có khẩu độ cố định.

Trái lại, G. Mo (1640-1677) lại nghiên cứu việc dựng hình bằng một mình compa. Lý thuyết tổng quát về phép dựng như vậy được hoàn thiện thêm bởi L. Maxkêrôni (1750-1800); ông đã chứng minh rằng mọi bài toán giải được bằng thước và compa đều có thể giải được bằng một mình compa.

Năm 1795 Mônggiơ cho đăng những bài giảng của mình về, hình học họa hình, trong đó trình bày những phương pháp quan trọng đặc biệt là « phương pháp Mônggiơ ». Ông đã thực hiện các phép chiếu một hình không gian lên hai mặt phẳng vuông góc với nhau: mặt phẳng ngang và mặt phẳng thẳng đứng, sau đó quay quanh giao tuyến của chúng để hai mặt phẳng đó trùng nhau. Kết quả là mỗi một điểm trong không gian được biểu diễn trên hình vẽ bằng một cặp điểm, mỗi một đường thẳng trong không gian được biểu diễn bởi một cặp đường thẳng, trên đó đã đánh dấu các «vết» (tức là giao điểm của đường thẳng đã cho với các mặt phẳng chiếu)... Trong cuốn sách của mình Mônggiơ đã giải quyết tất cả các bài toán cơ bản về việc dựng các điểm, đường thẳng, mặt phẳng và một số đường và mặt mà ông đã nghiên cứu bằng phương pháp hình học vi phân. Phương pháp của Mônggiơ rất thuận tiện và cho đến bây giờ vẫn là một phương pháp cơ bản trong vẽ kỹ thuật. Trong cuốn sách đó, Mônggiơ cũng đã chứng minh một loạt các định lý về hình học xạ ảnh.

11. Như đã biết, hình học xạ ảnh xuất hiện từ thế kỷ XVII với công trình của Đêdac và Paxcan và phương pháp chủ yếu của nó là phương pháp tổng hợp. Đến thế kỷ XVIII đã xuất hiện phương pháp giải tích trong bộ môn này. Chẳng hạn Đơ Gua (1712 — 1785) đã dựng biểu thức giải tích của phép chiếu xuyên tâm từ mặt phẳng này sang mặt phẳng khác, và nhờ biểu thức đó Đơ La Ke đã tìm được *phương trình hình chiếu* của đường tròn. Một phép biến đổi của mặt phẳng xạ ảnh (*tức là mặt phẳng được bổ sung thêm một đường thẳng vô tận*) sẽ gọi là phép biến đổi xạ ảnh nếu nó là kết quả của một loạt phép chiếu xuyên tâm. Phép biến đổi xạ ảnh biến đường thẳng thành đường thẳng, và bởi vậy còn có tên gọi là phép cộng tuyến. Biểu thức giải tích tổng quát của phép biến đổi xạ ảnh được nêu lên lần đầu tiên trong tác phẩm « Nghiên cứu bằng phương pháp giải tích các phương trình đại số và tính chất của đường cong » (1762) của

E. Varinh (1734 — 1798). Phép biến đổi xạ ảnh trên mặt phẳng sẽ có phương trình :

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + Bv + C}, \quad ; \; y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C}$$

Phép biến đổi afin của Ơle chính là một trường hợp đặc biệt của phép biến đổi xạ ảnh, khi mà đường thẳng vô tận được biến thành chính nó. Biểu thức tổng quát của phép biến đổi afin sẽ thu được bằng cách đặt $A = B = O$ trong công thức của Varinh.

Vào cuối thế kỷ XVIII, do sự xuất hiện cuốn « Hình học họa hình » của Mônggiơ, các nhà toán học lại quay trở về các phương pháp tổng hợp để nghiên cứu hình học. Trong nhiều định lý của hình học xạ ảnh mà Mônggiơ đã chứng minh có định lý sau đây : nếu ta vẽ từ một điểm các tiếp tuyến với một mặt bậc hai, thì các tiếp điểm sẽ nằm trên một mặt phẳng, là mặt phẳng cực của điểm đã cho.

Hình học xạ ảnh, mà Đêdac là người sáng lập, chỉ được phát triển mạnh mẽ ở thế kỷ XIX, vào lúc mà chính những tác phẩm và kết quả của Đêdac đã hoàn toàn bị quên lãng.

12. Trong thế kỷ XVIII, việc nghiên cứu lý thuyết đường song song vẫn được tiếp tục và có phần mạnh mẽ. Một trong những công trình quan trọng đó của Ghirôlaniô Xackêri (1667 — 1733), một thầy tu người Ý, giáo viên toán và ngữ pháp tại các trường nhà giòng ở Milăng, Turinh, Pari... Tác phẩm chủ yếu về toán của ông là cuốn « Ơclit đã sạch mọi vết mờ, hay là thử thiết lập những cơ sở đầu tiên của toàn bộ môn hình học ». Xackêri định chứng minh tiên đề V, mà theo ông là một vết «mờ nhất» của Ơclit. Ông xét một tứ giác có hai góc vuông ở đáy và hai cạnh bên bằng nhau, và cũng nêu lên ba giả thuyết, nhọn, vuông, tù cho các góc còn lại.

Ông đã chứng tỏ rằng nếu công nhận giả thuyết góc tù, thì suy ra rằng mọi đường thẳng đều cắt nhau, và đó là điều vô lý. Nếu công nhận giả thuyết góc vuông thì ta sẽ suy ra định đề V của Ơclit, và bởi vậy muốn chứng minh nó, Xackêri phải bác bộ giả thuyết về góc nhọn. Ông đã cố gắng thực hiện điều đó bằng lập luận phản chứng: tức là công nhận giả thuyết góc nhọn rồi tìm ra những điều mâu thuẫn. Ông đã chứng minh được một loạt các mệnh đề suy từ giả thuyết góc nhọn, nhưng không hề thấy điều gì mâu thuẫn cả. Cuối cùng mệnh đề «vô lý» mà Xackêri tìm thấy là mệnh đề thứ 33: «Trong mặt phẳng có hai đường thẳng l_1 và l_2 gần nhau vô cùng về một phía và xa nhau vô cùng về phía kia». Từ đó ông đi đến kết luận sai lầm rằng hai đường thẳng đó cùng có một đường vuông góc chung ở điểm vô tận, và điều đó «trái với bản chất của đường thẳng».

Không thỏa mãn với chứng minh nói trên, Xackêri còn xét quỹ tích những điểm (trong mặt phẳng) cách đều một đường thẳng, quỹ tích này gọi là đường cách đều. Trong trường hợp giả thuyết góc nhọn, đường cách đều không phải là đường thẳng. Xackêri biết rõ điều đó. Nhưng ông lại mắc phải một sai lầm về tính toán độ dài cung của đường cách đều, và dựa vào đó ông lại một lần nữa «bác bỏ» giả thuyết góc nhọn

Các nhà toán học của thế kỷ XVIII bị lôi cuốn vào lý thuyết đường song song sau khi Đalămbe cho ra cuốn

«Tổng quan về văn học, lịch sử và triết học» (1759), trong đó ông chỉ ra rằng lý thuyết về đường song song là một trong những vấn đề quan trọng nhất của toán học sơ cấp. Từ năm 1759 đến 1800 chỉ riêng ở châu Âu đã có 55 công trình về đường song song. G.S. Klugen (1739—1812) trong luận văn «Tổng quan về những chứng minh quan trọng nhất của lý thuyết đường song song» (1763) đã nêu lên, phân tích và phê phán gần 30 công trình như thế. Klugen đã đi đến kết luận là Oclit đã đúng khi đã đưa mệnh đề về đường song song vào trong số các tiên đề hình học.

Trong tác phẩm «Lý thuyết về đường song song» (1786) được in sau khi mất Gi.G. Lămbe (1728—1777) cũng đã dự định chứng minh định đề V bằng phương pháp phản chứng. Ông xét một tứ giác có ba góc vuông và đưa ra ba giả thuyết nhọn, tù, vuông cho góc còn lại. Giả thuyết góc tù cũng được nhanh chóng bác bỏ, và đáng chú ý là Lămbe đã nhận xét rằng giả thiết đó đúng đối với hình kọc trên mặt cầu.

Với giả thiết góc nhọn, Lămbe đã đi xa hơn Xackêri, chứng minh được khá nhiều mệnh đề hình học Lôbasepxki. Đặc biệt ông chứng minh rằng tổng số góc trong tam giác bé hơn 180^o, và diện tích tam giác sẽ tỉ lệ với số $\delta = 180^o - d$, trong đó d là tổng số góc của tam giác đó. So sánh với sự kiện là diện tích tam giác cầu tỉ lệ với số $\varepsilon = d - 180^o$ (d là tổng số góc của tam giác) ông viết: «Từ đó, hầu như tôi phải đi đến kết luận là giả thuyết góc nhọn phải đúng đối với mặt cầu ảo. Dầu sao cũng phải có một nguyên nhân nào đó khiến cho trên mặt phẳng giả thuyết góc nhọn không thể bị bác bỏ một cách nhanh chóng như là giả thuyết góc tù».

Lămbe không tìm thấy mâu thuẫn cho giả thiết góc nhọn và ông kết luận là mọi dự định chứng minh định đề V đều không thành công. Vậy mà ông vẫn không tin rằng có một thứ hình học trong đó giả thuyết góc nhọn đúng.

Nhà toán học Pháp, Lơgiăngđrơ (1752 — 1833), trong những lần xuất bản khác nhau của cuốn «Cơ sở hình học» đã đưa ra nhiều cách chứng minh định đề V.

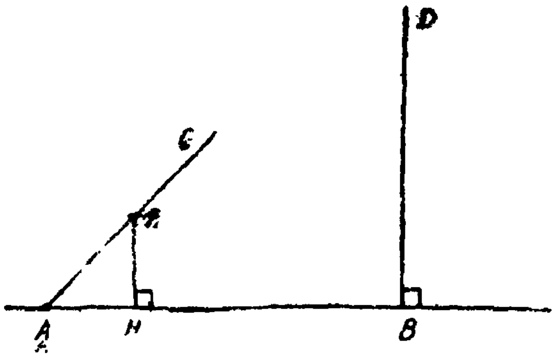
Trong lần xuất bản đầu tiên, ông xét một hình gồm đường thẳng BD vuông góc với AB, còn AC thì tạo với AB một góc nhọn CAB (hình 13). Để chứng minh định đề V, ta phải chứng tỏ AC và BD cắt nhau.

Lơgiăngđrơ đã chứng minh rằng nếu từ một điểm F trên tia AC ta kẻ đường vuông góc FH với AB thì điểm H sẽ nằm trên đoạn thẳng AB, và nếu cho điểm F càng ngày càng xa điểm A, thì khoảng cách AH càng ngày càng lớn. Từ đó ông đi đến kết luận sai lầm. Vì khoảng AH ngày càng lớn, và có thể lớn «vô cùng» nên đến một lúc nào đó điểm *H* phải trùng với *B*, và khi đó điểm *F* sẽ là giao điểm của AC và BD.

Không thỏa mãn với chứng minh đó, trong lần xuất bản thứ 3 của cuốn «Cơ sở hình học» (1800) Lơgiăngđrơ lại đưa ra một chứng minh mới. Ông chứng minh rằng tổng số góc trong một tam giác không thể lớn hơn 180°. Sau đó để chứng minh tổng số góc trong tam giác không thể bé hơn 180° ông đã ngầm công nhận rằng từ một điểm nằm trong một góc, luôn luôn có thể vẽ được một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc. Tiếc thay, điều ông công nhận đó chính là một dạng khác của định đề V.

Phát hiện sai lầm của mình, trong lần xuất bản thứ 12, Lơgiăngđrơ lại cho ra một chứng minh mới, nhưng lần này lại ngầm công nhận rằng có thể có hai tam giác mà tổng số góc bằng nhau nhưng diện tích thì khác nhau.

Những nghiên cứu của Lơgiăngđrơ, mặc dầu mắc phải sai lầm nhưng cũng đã đóng một vai trò quan trọng trong việc chuẩn bị cho việc ra đời của môn hình học phi Ơclit, một phát minh vĩ đại của thế kỷ XIX.



Hình 13

Chương VIII

HÌNH HỌC Ở THẾ KỶ XIX

1. Vào cuối thế kỷ XVIII, một số nhà toán học lớn đã phát biểu quan điểm bi quan, cho rằng phạm vi nghiên cứu toán học hầu như đã cạn. Họ cho rằng thiên tài và sự nỗ lực của Ơle, Lagrănggiơ, Đalămbe và các nhà toán học khác đã đưa đến những cống hiến quan trọng nhất. Bởi vậy các nhà toán học thuộc thế hệ sau chỉ còn phải giải quyết những vấn đề kém phần quan trọng. Năm 1772, Lagrănggiơ viết cho Đalămbe « Ngài không thấy rằng hình học cao cấp đang đi đến chỗ suy thoái, chỉ có Ngài và Ơle là còn cố nâng nó dậy ? ».

Nguồn gốc của tư tưởng bi quan đó là khuynh hướng đồng nhất sự tiến bộ của toán học, đặc biệt là hình học, với sự tiến bộ của cơ học và thiên văn học. Từ thời cổ Babilon cho đến thời Ơle và Laplax, thiên văn học luôn luôn là nguồn cổ vũ và chỉ đạo cho những phát minh toán học quan trọng nhất. Và giờ đây quá trình kết hợp đó sau khi đã đạt cao điểm vào cuối thế kỷ XVIII, hình như dần dần trở nên không còn khăng khít nữa.

Lịch sử của sự phát triển toán học ở thế kỷ XIX đã chứng tỏ rằng tư tưởng bi quan nói trên hoàn toàn không có cơ sở.

Cuộc cách mạng Pháp và thời đại Napôlêông đã tạo ra những điều kiện hết sức tốt đẹp cho sự phát triển toán học. Trên toàn Châu Âu, nổ ra cuộc cách mạng công nghiệp, đó là động lực rất lớn để thúc đẩy khoa học và kỹ thuật.

Toán học được phát triển rất mạnh mẽ ở Pháp và rồi ở Đức là những nơi đã xảy ra và sẽ phải xảy ra những sự biến đổi sâu sắc để chuẩn bị cơ sở cho một chế độ kinh tế chính trị mới : chế độ tư bản chủ nghĩa. Toán học dần dần được giải phóng khỏi một khuynh hướng thiển cận trước kia. Cho rằng mục tiêu của toán học nằm trong cơ học và thiên văn. Các nghiên cứu về toán học ngày càng ít liên quan tới yêu cầu của kinh tế hoặc quân sự. Sự giải phóng này rất có lợi cho toán học, và đã giúp cho toán học phục vụ thực tế một cách đắc lực hơn

2. Hình học ở thế kỷ XIX chứa đựng nhiều sự biến đổi sâu sắc về nội dung, phương pháp nghiên cứu và cả cách nhìn nhận bản chất của hình học.

Do ảnh hưởng của cuốn «Hình học họa hình» của Mônggiơ phương pháp tổng hợp trong hình học được phục hồi. Phương hướng nghiên cứu này đã đưa đến việc xây dựng một cách hoàn thiện môn hình học xạ ảnh trong thế kỷ XIX với những đóng góp chủ yếu của Pôngxơlê (1788 — 1867) Xtene (1796 — 1863) và Stautơ (1798 — 1867).

Victo Pôngxơlê, một kỹ sư quân sự, học trò của Mônggiơ, tham gia đạo quân của Napôlêông tấn công nước Nga và bị bắt làm tù binh. Trong trại tù ở Xaratôp, bị cách biệt với cuộc sống bên ngoài, ông đã tập trung vào việc nghiên cứu lý thuyết của phép chiếu xuyên tâm.

Trở về Pháp ông cho xuất bản cuốn «Nghiên cứu về những tính chất xạ ảnh của hình» (1822). Một tính chất của hình gọi là tính chất xạ ảnh nếu nó không thay đổi qua một phép biến đổi xạ ảnh của mặt phẳng (ta đã biết rằng phép biến đổi xạ ảnh được định nghĩa như là tích của một số hữu hạn các phép chiếu xuyên tâm). Trong cuốn sách này, Pôngxơlê đã nêu lên những khái niệm chủ yếu của hình học xạ ảnh như là tỉ số kép, phép biến đổi xạ ảnh, phép đối hợp, phép phối cảnh và cả các điểm Xyclic nữa. Ông đã biết rằng tiêu điểm của giao tuyến cônic chính là giao điểm của các tiếp tuyến với cônic xuất phát từ các điểm xyclic. Ông còn trình bày trong công trình của mình lý thuyết về các đa giác nội tiếp trong một cônic và ngoại tiếp một cônic khác.

Cuốn sách của Pôngxơlê là một thí dụ cổ điển về một công trình nghiên cứu trong đó một ngành học được xây dựng một cách hoàn thiện và mẫu mực. Ông được xem là người sáng lập ra môn hình học xạ ảnh.

3. Phương pháp và tư tưởng của Pôngxơlê được Xtene tiếp tục. Người nông dân Thụy sĩ này cho đến 19 tuổi mới bắt đầu đi học. Ông đã trải qua một con đường dài từ trường học cho nông dân đến trường trung học rồi trường đại học. Từ năm 1834 đến lúc chết (1863), ông là khoa trưởng Trường Đại học Beclin. Xtene là một đại biểu xuất sắc của trường phái hình học tổng hợp trong thế kỷ XIX. Bằng phương pháp của hình học sơ cấp, ông đã giải quyết nhiều vấn đề khó của giải tích, đặc biệt là các bài toán đẳng chu (ông đã chứng minh rằng hình tròn là hình có diện tích lớn nhất trong tất cả các hình có cùng một chu vi).

Về hình học xạ ảnh, Xtene đã chứng tỏ rằng, mọi bất biến mà Pôngxơlê đã tìm thấy đều có thể suy từ bất biến của tỉ số kép. Từ đó ông đã nêu ra định nghĩa phép biến đổi xạ ảnh là một phép biến đổi giữ nguyên tỉ số kép của 4 điểm. Trên cơ sở đó ông xây dựng toàn bộ hình học xạ ảnh một cách tổng hợp.

Nhưng dầu sao thì tỉ số kép (là một bất biến cơ bản của Xtene) vẫn phải định nghĩa thông qua một số (Tỉ số kép của 4 điểm ABCD thẳng hàng được định nghĩa là số $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$). Như vậy hóa ra cơ sở của hình học xạ ảnh vẫn là đại số. Nhược điểm đó trong cách xây dựng của Xtene đã được khắc phục bởi Stautơ, giáo sư trường đại học ở Eclănghen.

Nếu tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D, bằng − 1 thì A, B, C, D gọi là hàng điểm điều hòa. Stautơ đã đưa ra một định nghĩa hoàn toàn hình học của hàng điểm điều hòa. A, B, C, D là một hàng điểm điều hòa A, B là hai đỉnh đối diện của một hình bốn cạnh toàn phần, còn C, D là giao điểm của đường chéo AB với hai đường chéo còn lại. Dựa trên định lý Đêdac, ông đã chứng minh rằng nếu A, B, C là ba điểm đã cho thì chỉ có một điểm D duy nhất sao cho A, B, C, D là một hàng điểm điều hòa. Bây giờ Stautơ định nghĩa phép biến đổi xạ ảnh là một phép biến đổi sao cho một hàng điểm điều hòa lại biến thành một hàng điểm điều hòa. Bằng cách đó, hình học xạ ảnh được xây dựng mà không cần viện đến phép đo các đoạn thẳng.

Giao tuyến cônic cũng được định nghĩa thuần túy bằng xạ ảnh. Đó là quỹ tích giao điểm của các đường thẳng tương ứng trong hai chùm đường thẳng liên hệ xạ ảnh với nhau.

Phương pháp nghiên cứu này đã cho phép phát hiện nhiều tính chất mới của các đường cônic, đưa đến lý thuyết đối ngẫu, lý thuyết cực và đối cực...

Trong thời gian hàng chục năm sau đó, hình học xạ ảnh thu được nhiều kết quả, bằng cách vẫn giữ nguyên những cơ sở của Pôngxơlê, Xtene và Stautơ. Nhiều công trình tổng kết đã ra đời, đáng chú ý ra cuốn « Hình học vị trí » của Th.Rêye (in lần thứ 3 năm 1892).

4. *Trong lúc phương pháp tổng hợp thu được nhiều kết quả rực rỡ, thì phương pháp đại số trong hình học cũng được phát triển rộng rãi và theo nhiều hướng khác nhau.* Đại diện cho trường phái hình học đại số có thể là Mơbiux, Plucke ở Đức, Salơ ở pháp và Keli ở Anh.

A. F. Mơbiux, trong hơn 50 năm là cộng tác viên và sau đó là giám đốc Đài Thiên Văn Lai xich, là một nhà bác học toàn diện. Trong cuốn « Phép tính trọng tâm » ông là người đầu tiên đưa ra tọa độ thuần nhất. Bằng cách gắn vào các đỉnh của tam giác cố định các trọng lượng m_1, m_2, m_3, Mơbiux đã tính trọng tâm của tam giác, và chỉ ra rằng tọa độ trọng tâm đó rất thuận tiện để mô tả các tính chất xạ ảnh và afin trên mặt phẳng. Từ đó tọa độ thuần nhất đã trở thành một công cụ được sử dụng một cách rộng rãi trong các tác phẩm về hình học xạ ảnh. Làm việc một cách im lặng và cô độc, Mơbiux đã phát minh ra nhiều quan trọng và thú vị. Một trong những thí dụ là Mơbiux, một mặt không định hướng được biết đầu tiên trong toán học. Điều đó cũng đã chứng tỏ rằng Mơbiux là một trong những người đặt nền móng cho môn tôpô hiện đại.

Giuliux Plucke (1801 - 1868) — là một nhà hình học và đồng thời là một nhà vật lý thực nghiệm. Trong cuốn « Hình học mới trong không gian » (1868 - 1869) ông đã xây dựng lại hình học giải tích, bằng cách đưa ra nhiều tư tưởng mới. Ông đã nêu ra tọa độ thuần nhất cũng như tọa độ xạ ảnh trong không gian xuất phát từ một hình tứ diện làm cơ sở. Ông cho rằng các yếu tố cơ bản của hình học không phải chỉ là điểm, mà có thể là đường thẳng, mặt phẳng. đường tròn, mặt cầu. Quan điểm đó đã soi sáng cho hình học tổng hợp cũng như hình học đại số và đưa đến nhiều dạng đối ngẫu mới. Số chiều trong hình học của dạng này hay dạng khác có thể là một số nguyên dương bất kỳ, phụ thuộc vào số tham số cần thiết để xác định ra « yếu tố cơ bản ». Ông cũng đã công bố một lý thuyết tổng quát về các đường đại số trong mặt phẳng, trong đó đưa ra sự « phụ thuộc Pluke » giữa số các điểm đặc biệt của những loại đường cong khác nhau.

Misen Salơ vốn là sinh viên của Trường Bách khoa Pari trong những năm cuối đời của Mônggiơ, và từ năm 1841 thì trở thành giáo sư của trường đó. Từ năm 1846 ông lãnh đạo khoa hình học cao cấp ở Xoocbon. Cũng giống như Pluke, Salơ đã từ những phương trình đại số mà suy ra rất nhiều sự kiện hình học. Ông đã sử dụng một cách rất nghệ thuật các đường thẳng đẳng hướng và các điểm Xyclic. Ông là người kế tục Pôngxơlê trong « phương pháp tính toán » và đã phát triển phương pháp này trong những phạm vi mới của hình học, gọi là « hình học tính toán ».

Hình học đại số có ảnh hưởng rất mạnh trong tất cả các ngành của toán học ở thế kỷ XIX. Trong các công trình của Minkôpxki (1864—1909), phương pháp của hình học còn được thâm nhập vào lý thuyết số, vốn là thành lũy của các phương pháp đại số và số học. Một số nhà toán học, đặc biệt là Salơ đã khẳng định rằng việc đại số hóa hình học ở thế kỷ XVIII đã được thay thế bởi việc hình học hóa đại số ở thế kỷ XIX. Có lẽ nên nói thế này thì đúng hơn : phương pháp hình học giải tích đóng một vai trò rất lớn từ thời Đêcac cho tới Mônggiơ, bây giờ đã phải nhường chỗ cho một sự kết hợp rất sâu sắc và mật thiết của phương pháp đại số và hình học.

5. Ta đã biết rằng trong thế kỷ trước, môn hình học vi phân đã đạt được nhiều kết quả do những đóng góp của nhiều nhà toán học, đặc biệt là Mônggiơ. Bước sang thế kỷ XIX, môn học này được phát triển một cách mạnh mẽ nhờ những phương pháp mới của nhà toán học thiên tài người Đức Kac Fridrich Gaux (1777 — 1855).

Ông sinh ra trong một gia đình công nhân tại thành phố Braunvây. Tài năng toán học của Gaux phát triển rất sớm, đặc biệt là các phương pháp tính toán, thường làm cho các giáo viên phải kinh ngạc và khâm phục. Vào khoảng 14, 15 tuổi, ông đã bắt tay nghiên cứu những tính chất của « trung bình nhân cộng » (cố nhiên lúc bấy giờ ông chưa biết rằng khái niệm đó sẽ đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết các hàm eliptic), của các số nguyên tố, và lý thuyết đường song song. Năm 1795, ông sáng tạo ra phương pháp bình phương bé nhất và năm sau ông đã giải bài toán dựng hình đa giác đều 17 cạnh bằng thước và compa. Từ năm 1795—1798 ông theo học ở Trường Đại học Ghetinghen và năm 1799 ông được trao bằng học vị tiến sĩ. Từ 1807 đến khi mất (1855) ông là giáo sư ở trường đại học đó và là giám đốc đài thiên văn ở địa phương. Gaux đã để lại những phát minh quan trọng trong hầu khắp các lĩnh vực toán học: đại số, số học, hình học vi phân, hình học phi Ơclit, giải tích, lý thuyết hàm biến phức, xác suất, thiên văn, trắc địa, cơ học,...

Trong phạm vi hình học, công trình của ông « Nghiên cứu tổng quát về các mặt cong » (1827) đã đưa ra một phương pháp mới, khiến cho hình học vi phân nhanh chóng trở thành một môn học độc lập. Trong tác phẩm này, Gaux đã đưa ra tọa độ cong trên một mặt và biểu thị phần tử tuyến tính nhờ một dạng vi phân toàn phương $ds^2 = Edu^2 + Fdudv = Gdv^2$ gọi là dạng toàn phương cơ bản thứ nhất. Nếu biết dạng toàn phương đó, độ dài của cung cũng như độ lớn của góc trên mặt hoàn toàn được xác định, có nghĩa là mêtric của một mặt hoàn toàn được xác định bởi các hệ số E, F, G của dạng toàn phương (chúng là hàm của các biến u, v). Các tọa độ cong u, v có thể chọn một cách tùy ý; khi thay đổi tọa độ cong, hệ số của dạng toàn phương cơ bản sẽ thay đổi, nhưng mêtric của mặt dĩ nhiên không thay đổi, nó là một bất biến qua phép biến đổi tọa độ cong. Như vậy có thể nói rằng việc nghiên cứu mêtric của một mặt được đưa về việc nghiên cứu các bất biến của dạng toàn phương cơ bản của nó. Gaux đã chứng minh rằng độ cong toàn phần của mặt tại mỗi điểm là một bất biến như vậy. Nếu ta dùng một phép biến dạng để biến đổi mặt thì độ dài của các đường cong trên mặt không thay đổi và do đó toàn bộ mêtric của mặt cũng không thay đổi: Suy ra những bất biến của dạng toàn phương cũng không thay đổi qua phép biến dạng. Ở đây Gaux đã chứng minh một định lý nổi tiếng nói rằng độ cong toàn phần là một bất biến qua *phép biến dạng*.

Ngoài ra, Gaux còn đưa ra một dạng toàn phương cơ bản thứ hai $Pdu^2 + Qdudv + R\,dv^2$, trong đó P, Q, R được xác định nhờ các đạo hàm bậc hai của các hàm số $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ là phương trình của mặt cong. Dạng toàn phương thứ hai này đối với Gaux chỉ đóng vai trò phụ. Tuy vậy về sau người ta đã đánh giá cao tầm quan trọng của nó. Thật vậy, khi biết cả hai dạng toàn phương của một mặt, ta không những chỉ xác định được mêtric của mặt mà còn cả hình dạng của mặt nữa. Như vậy, nếu ta không quan tâm đến vị trí của mặt trong không gian mà chỉ quan tâm tới hình dạng và kích thước của nó thì ta không cần đến phương trình của mặt (đó là phương pháp của Mônggiơ) mà chỉ cần hai dạng toàn phương là đủ. Hơn thế nếu ta chỉ quan tâm đến mêtric của mặt, mà không chú ý đến hình dạng của nó (tức là cho phép biến đổi mặt bởi một phép biến dạng mà không thay đổi mêtric) thì ta chỉ cần dạng toàn phương cơ bản thứ nhất. Đó chính là hình học vi phân của Gaux, bao gồm lý thuyết về đường trắc địa của mặt, về sự biến dạng, về độ cong của mặt, về những mặt có độ cong không đổi v.v...

6. Một trong những thành tựu lớn lao của toán học đã được thực hiện vào những năm 20 của thế kỷ XIX là sự phát minh ra hình học phi Ơclit được xem là một cuộc cách mạng thực sự trong toán học.

Như chúng ta đã biết vấn đề lý thuyết về đường song song đã tồn tại hơn 2000 năm từ thời Ơclit cho đến đầu thế kỷ XIX. Nhiều thế hệ toán học đã trôi qua, nhiều sức lực của nhiều nhà toán học đã hao phí để tìm cách chứng minh định đề V của Ơclit. Họ đều thất bại mặc dầu trong quá trình nghiên cứu có thu được một số kết quả thú vị.

Những người đầu tiên đã vén bức màn bí mật bao phủ lên hình học hơn 2000 năm là nhà toán học Nga N.I. Lôbasepxki (1793 — 1856) và nhà toán học Hunggari Gianôs Bôia (1802 — 1866). Họ đã chứng minh rằng định đề V không thể suy ra được từ những tiên đề còn lại của Ơclit. Họ đã xây dựng một thứ hình học, bằng cách giữ lại mọi tiên đề của Ơclit và thay định đề V bằng một tiên đề ngược lại. Môn hình học phi Ơclit đó sau này gọi là hình học Lôbasepxki-Bôia. Thứ hình học này không có mâu thuẫn nội tại, và chính vì vậy mà định đề V đúng là một định đề chứ không phải là định lý.

Ngoài Lôbasepxki và Bôia, Gaux cũng là người đã xây dựng được hình học phi Ơclit. Nhưng ông không bao giờ công bố kết quả của mình vì sợ gặp phải sự phản ứng của đa số các nhà toán học. Thậm chí Gaux còn từ chối phát biểu công khai những ý kiến của mình về hình học phi Ơclit. Bởi vậy, trong vấn đề này, Gaux đã đóng một vai trò tiêu cực. Với uy tín sẵn có của mình đáng ra ông đã có thể giúp cho dư luận toán học sớm thừa nhận sự đúng đắn của hình học phi Ơclit hơn.

7. Nicôlai Ivanôvits Lôbasepxki sinh năm 1792 trong một gia đình làm nghề đạc điền nghèo. Năm 15 tuổi, ông được nhận vào học ở Trường Đại học Kadan và từ đó cho đến những ngày cuối cùng, cuộc đời ông gắn chặt với trường đại học đó. Ông tốt nghiệp đại học năm 1811, rồi trở thành giáo sư của trường năm 1816 và trong 20 năm liền làm giám đốc.

Lôbasepxki không chỉ là một nhà hình học thiên tài. Ông còn có nhiều công trình có giá trị về giải tích và đại số. Về hình học, đầu tiên Lôbasepxki cũng định chứng minh định đề V của Ơclit, sau đó ông tách ra từ hình học Ơclit những gì không phụ thuộc vào định đề đó — gọi là hình học tuyệt đối. Ông nảy ra ý định thay thế định đề V bằng một tiên đề khác: «qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có không chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó» rồi cố tìm ra những mâu thuẫn. Không tìm thấy một mâu thuẫn nào, Lôbasepxki đã *nhận được một hệ thống* hình học khác nhiều với hình học Ơclit. Nhưng nếu như các nhà toán học trước ông chỉ dừng lại đó, hoặc là công bố một cách sai lầm là đã tìm thấy mâu thuẫn, thì Lôbasepxki đã cho rằng hệ thống hình học của mình cũng có quyền tồn tại như hình học của Ơclit.

Trong thư gửi cho Gaux, ông viết: «Môn hình học này có vẻ như là một nghịch lý và khác với quan niệm thông thường. Nhưng phân tích một cách kỹ càng và bình tĩnh, ta sẽ thấy rằng không hề có một sự vô lý nào. Chẳng hạn, ba góc của một tam giác có thể làm cho bé bao nhiêu cũng được nếu ta lấy các cạnh của nó đủ lớn; diện tích của tam giác không thể lớn vô cùng, thậm chí không thể đạt tới một giới hạn nào đó, dầu cho các cạnh của nó lớn bao nhiêu. Tất cả mọi cố gắng của tôi để tìm trong hình học phi Ơclit này những sự mâu thuẫn đều không đem lại kết quả. Chỉ có một điều duy nhất trái với hiểu biết thông thường của chúng ta là trong *không gian* (nếu hệ thống hình học này đúng) phải tồn tại một đại lượng nào đó hoàn toàn xác định, mặc dầu chúng ta chưa biết. Nhưng tôi nghĩ rằng chúng ta biết rất ít, hoặc thậm chí còn chưa biết gì về bản chất của không gian. Chúng ta không nên lẫn lộn cái khác thường với cái không có thể có».

Lôbasepxki công bố các kết quả nghiên cứu của mình về hình học phi Ơclit vào ngày 23-2-1826. Đương thời, ông bị mọi người không hiểu, thậm chí còn có kẻ chế diễu những ý kiến độc đáo của ông và môn hình học mới của ông hồi đó được gọi là «môn hình học kỳ quặc». Về cuối đời ông bị mù hẳn, nên ông phải đọc tác phẩm cuối cùng «Hình học phẳng» (1855) cho thư ký chép.

8. Gianôs Bôia là một giáo viên toán người Hunggari. Cha là Phakas Bôia, là bạn học thân thiết của Gaux ở trường đại học Ghettinghen và về sau hai người vẫn thường xuyên trao đổi thư từ. Phakas cũng đã tốn nhiều thời gian để chứng minh định đề V, nhưng không đi đến một kết quả nào. Bởi vậy ông muốn hướng tài năng toán học của con mình vào những vấn đề khác. Nhưng vốn có năng khiếu toán học ngay từ bé, Gianôs quyết tâm đi sâu vào lý thuyết đường song song mặc dầu cha ông hết sức ngăn cản.

Gianôs Bôia phục vụ trong quân đội và có tiếng là một sĩ quan gương mẫu. Trong thời gian đó ông đã xét định đề V của Ơclit như là một tiên đề độc lập, và nhờ vậy ông đã xây dựng được hình học phi Ơclit. Các kết quả về hình học này của ông cũng phong phú và những chứng minh của ông rất hoàn thiện.

Bôia đã trình bày những kết quả của mình trong phần phụ lục của một cuốn sách của cha ông «Phụ lục trình bày một học thuyết tuyệt đối đúng về không gian» (năm 1832).

Phakas gửi thư cho Gaux để nghị Gaux cho nhận xét về công trình của Bôia. Trong thư trả lời, Gaux đã nói rằng ông không thể ngợi khen công trình đó, vì như thể tức là tự khen mình. Ông nói rằng tư tưởng trong « phụ lục » chính là tư tưởng của ông trong nhiều năm trước đây.

Nhận được thư Gaux, nhà toán học trẻ tuổi Bôia rất chán nản và bi quan. Bức thư đã xếp ông vào hạng các nhà bác học lớn, nhưng lại chứng tỏ ông không phải là người đầu tiên sáng lập ra hình học phi Ơclit. Ông lại càng bi quan hơn khi mà mọi người không thừa nhận quan điểm của mình. Đặc biệt từ khi cuốn sách của Lôbasepxki được dịch ra tiếng Đức (1840) Bôia không bao giờ in những tác phẩm của mình nữa.

Khác với Bôia, Lôbasepxki suốt đời đấu tranh làm cho tư tưởng của mình được thừa nhận, và tiếp tục phát triển hình học mới của mình.

9. Năm 1855, Gaux qua đời, tiếp đó năm 1856 đến lượt Lôbasepxki và năm 1860 Bôia chết. Các nhà sáng lập hình học phi Ơclit lần lượt mất đi và phát minh nổi tiếng của họ bị quên lãng. Tính chất khác thường của những tư tưởng mới đã làm các nhà toán học đương thời khiếp sợ và ngăn cản họ tìm hiểu một cách nghiêm túc toàn bộ hệ thống hình học mới.

Sau khi công bố những thư từ của Gaux, đặc biệt là bức thư, trong đó Guax đánh giá cao công trình của Lôbasepxki, thế giới toán học mới lại bắt đầu chú ý tới hình học phi Ơclit. Có thể nói sau những công trình của nhà toán học Y E. Bentrami (1835-1900) hình học phi Ơclit mới bắt đầu củng cố được địa vị của mình

Trong khi nghiên cứu những vấn đề quan trọng nhất của phép biểu diễn hình, Bentrami đã cố gắng tìm một phương pháp xây dựng các hình biểu diễn của mặt cong lên trên mặt phẳng, sao cho các đường trắc địa trên mặt được biểu diễn thành các đường thẳng trên phẳng. Ông đã chứng minh rằng các phép biểu diễn *như vậy chỉ thực hiện được đối với những mặt có độ cong là hằng số.*

Từ đó Bentrami đi đến việc nghiên cứu hình học trên các mặt như thế. Mặt có độ cong bằng không đã được Mônggiơ xét đến, đó là mặt khả triển. Hình học trên những mặt này trùng với hình học Ơclit thông thường. Mặt có độ cong là hằng số dương chính là mặt cầu hoặc những mặt do mặt cầu biến dạng. Hình học trên các mặt đó dĩ nhiên trùng với hình học cầu.

Như vậy chỉ còn đáng chú ý là hình học trên các mặt có độ cong là hằng số âm. Bentrami gọi những mặt như vậy là mặt cầu giả và chứng minh rằng hình học trên các mặt như vậy trùng với hình học Lôbasepxki. Nói cho chính xác hơn mỗi mảnh của mặt cầu giả ta sẽ có hình học trùng với hình học trên một phần của mặt phẳng Lôbasepxki.

Phát hiện đó đã gây ra những ấn tượng mạnh mẽ. Hình học Lôbasepxki mà trước đây bị mọi người xem là vô lý, hoang đường, thì nay lại xuất hiện trên một mặt cụ thể của không gian Ơclit. Ở đây một lần nữa tính trừu *tượng toán học tỏ rõ sức mạnh của mình*: một hệ thống hình học mới đã được xây dựng bằng một quá trình lôgic thuần túy, trước khi phát hiện được một mô hình thực tế của nó.

Các nhà hình học bắt đầu đổ xô vào nghiên cứu hình học Lôbasepxki Nếu như trước kia hình học đó chỉ được một số ít người biết đến một cách thờ ơ, thì vào những năm 70 của thế kỷ XIX, nó trở thành trung tâm chú ý của các nhà hình học.

Sau công trình của Bentrami, với lòng tin rằng hình học Lôbasepxki không mâu thuẫn, các nhà toán học cố đi tìm một mô hình của toàn bộ không gian Lôbasepxki, hoặc toàn bộ mặt phẳng Lôbasepxki, chứ không phải chỉ là một phần của mặt phẳng đó. Như vậy là phải tìm được một mặt cầu giả trên đó hình học Lôbasepxki được thể hiện trong toàn thể. Người ta không thể tìm được một mặt như vậy, và mãi đến sau này (1901) Hinbe mới chứng minh được rằng nó không tồn tại. Tuy vậy, như sau này sẽ thấy, Phêlix Klêin đã tìm được cho hình học Lôbasepxki một mô hình xạ ảnh và do đó đã khẳng định sự không mâu thuẫn của nó.

10. Hình học Lôbasepxki (còn gọi là hình học hypecbôlic) không phải là một hình học phi Ơclit duy nhất.

Năm 1854 trong luận văn «Về những giả thuyết thuộc cơ sở của hình học», nhà bác học thiên tài Riman đã xây dựng nhiều thứ hình học phi Ơclit khác nhau về sau được gọi chung là hình học Riman.

Becgac Riman (1826-1866) sinh đúng vào năm mà tại Trường Đại học Kadan, Lôbasepxki đọc báo cáo khai sinh cho môn hình học hypecbôlic. Riman là một con người, mà những cống hiến của mình đã có những ảnh hưởng quan trọng tới toàn bộ sự phát triển của toán học. Ông là con của một linh mục ở nông thôn, theo học ở trường Đại học Ghettinghen; ở đó năm 1851 ông được nhận bằng tiến sĩ đến năm 1859 ông trở thành giáo sư. Vì bị bệnh tật, ông phải sang Ý sống những ngày cuối cùng và mất ở đó vào tuổi 40, ttong khi còn hứa hẹn nhiều cống hiến quan trọng.

Trong cuộc đời ngắn ngủi của mình, B. Riman cho công bố một số không nhiều các công trình toán học, những công trình nào cũng quan trọng, và một số đã mở ra những phạm vi toán học hoàn toàn mới và ích lợi.

Luận văn về hình học nói trên của Riman là một « Bài giảng thử » trước hội đồng khoa học để tác giả được xét công nhận chức giáo sư. Bài giảng được trình bày rất gọn, bỏ qua hầu hết chứng minh, và chỉ nêu lên những tư tưởng chính quan trọng nhất. Sau khi ông chết, luận văn đó mới được in ra, do Đêđêkin chú thích.

Trong tác phẩm của mình, Riman đã phát triển phương pháp của Gaux dùng để nghiên cứu các mặt dựa trên một dạng vi phân toàn phương. Theo ông, không gian hình học là tập hợp các đối tượng, mà mỗi trong chúng được xác định bởi n số, tức là n tọa độ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mỗi đối tượng như thế gọi là điểm. Số n được gọi là số chiều của không gian. Như vậy, tập hợp các điểm của mặt phẳng là một không gian 3 chiều, tập hợp tất cả các đường thẳng trong không gian là một không gian 4 chiều. Tập hợp tất cả các màu sắc là một không gian 2 chiều, vì mỗi một màu đều được pha từ ba màu cơ bản theo những tỷ lệ khác nhau, bởi vậy nếu biết hai tỷ lệ nào đó (thì cố nhiên biết tỷ lệ thứ 3) thì màu sẽ được hoàn toàn xác định.

Với ý nghĩa đó, « không gian » là một khái niệm mở rộng của khái niệm không gian mà chúng ta vẫn hiểu theo cách thông thường.

Bây giờ giả sử trong không gian n chiều cho hai điểm gần nhau vô cùng $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n)$. Riman định nghĩa một mêtric của không gian đó bằng cách định nghĩa phần tử tuyến tính ds của nó bởi công thức:

$$ds^2 = \sum g_{ij}\, dx_i\, dx_j ,$$

trong đó vế phải là một dạng toàn phương của dx_i, các g_{ij} là những hàm của các tọa độ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Khi đã cho dạng toàn phương (hay còn gọi là dạng cơ bản), hình học của không gian tương ứng sẽ hoàn toàn xác định, (cũng giống như khi đã cho dạng toàn phương cơ bản thứ nhất của Gaux, thì hình học trên mặt được xác định), hình học đó bây giờ ta gọi là hình học Riman. Bởi vì dạng cơ bản có thể chọn nhiều cách khác nhau, cho nên trong cùng một không gian, ta có thể có nhiều hình học khác nhau.

Hình học Ơclit n chiều sẽ ứng với dạng cơ bản

$$ds^2 = \sum dx^2_i$$

còn hình học khác đều là phi Ơclit (trong đó có hình học phi Ơclit của Lôbasepxki).

Như vậy khái niệm hình học phi Ơclit được mở rộng. Mặc dầu Riman không đặt mục đích của luận văn là xét ý nghĩa của hình học Ơclit và hình học Lôbasepxki trong hệ thống hình học của mình, nhưng về thực chất vấn đề đó đã được giải quyết.

Riman cũng nêu ra trong không gian của mình một đại lượng biểu thị qua các hệ số của dạng cơ bản và các đạo hàm bậc nhất và bậc hai của chúng, đại lượng đó được gọi là độ cong của không gian tại một điểm theo một phương hai chiều.

Các không gian Riman có độ cong không đổi (tức là không phụ thuộc vào điểm và vào phương hai chiều) được chia làm ba loại : Nếu độ cong không đổi đó bằng O ta được hình học Ơclit. Nếu độ cong không đổi đó là $-\frac{1}{k^2}$ ta có hình học hypecbôlic (trong trường hợp $n = 2$ $n = 3$ ta được hình học Lôbasepxki — Bôia) trong đó k là hằng số đặc trưng cho không gian đó được Lôbasepxki, Bôia và Gaux tìm ra bằng những con đường khác. Cuối cùng nếu độ cong không đổi đó là $\frac{1}{k^2}$, ta được hình học Riman nghĩa hẹp hay là hình học eliptic (khi $n = 2$ hình học này về bản chất trùng với hình học trên mặt cầu).

Vào khoảng năm 1870 tư tưởng và phương pháp của Riman đã được nhiều nhà toán học trẻ của thế hệ mới nghiên cứu và phát triển. Chẳng hạn lý thuyết về dạng vi phân toàn phương là đối tượng nghiên cứu trong các công trình của hai nhà toán học Đức E. V. Krixtôphen (1829 — 1900) và R. Lipsit (1832 — 1903). Lần đầu tiên ta thấy nêu ra «Ký hiệu Krixtôphen». Các kết quả của họ kết hợp với lý thuyết thông số vi phân của Bentrami được G. Risi — Cuôcbaxtrô (1833 — 1925) sử dụng để xây dựng phép tính vi phân tuyệt đối (1884). Đó là một ký hiệu bất biến mới, ban đầu được xây dựng để dùng trong lý thuyết biến đổi các phương trình đạo hàm riêng, nhưng sau này cũng áp dụng rất thuận tiện cho lý thuyết biến đổi các dạng vi phân toàn phương.

Trong tay Risi và một số học trò của ông, đặc biệt là Lêvi — Sivita (1873 — 1971), phép tính vi phân tuyệt đối đã phát triển mạnh và trở thành cái mà ngày nay ta gọi là phép tính tenxơ.

11. Trong sự phát triển của toán học luôn luôn xảy ra hai quá trình có vẻ đối lập nhau. Một mặt toán học càng ngày càng được phân thành nhiều môn học và được nghiên cứu ngày càng sâu. Sự chuyên môn hóa đó làm cho một nhà toán học, dầu uyên thâm đến đâu, cũng chỉ nắm *được một số ngành* nào đó mà thôi. Mặt khác cũng luôn luôn xảy ra các quá trình kết hợp những ngành toán học khác nhau, để đưa đến những thành tựu lớn.

Vào cuối thế kỷ XIX cũng đã xuất hiện một sự kết hợp giữa *lý thuyết nhóm* và *lý thuyết hình học Riman* được trình bày trong các công trình chủ yếu của Ph.Klêin và X. Li.

Phêlix Klêin (1849 — 1925) là phụ giáo của Plucke ở Bon vào cuối những năm thứ 60, ở đấy ông nghiên cứu hình học. Năm 1870 ông sang Pari và gặp một người Na uy là Xôphux Li (1842 — 1899), lớn hơn ông 7 tuổi nhưng mới chỉ bắt đầu quan tâm đến toán học cách đó không lâu. Hai người thanh niên này được tiếp xúc với các nhà toán học Pháp ở trường Bách Khoa và nghiên cứu những tác phẩm của họ. Trong số những người làm việc ở trường Bách khoa có nhà toán học C.Gioocđăng (1838 — 1922). Vào năm đó Gioocđăng viết « Nghiên cứu về phép thế », một cuốn sách về lý thuyết phương trình Galoa. Từ đó Klêin và Li bắt đầu nhận thức được ý nghĩa cơ bản của lý thuyết nhóm, và về sau mỗi người đi theo mỗi hướng khác nhau : Klêin về các nhóm rời rạc, còn Li thì về các nhóm liên tục.

Năm 1872, Klêin trở thành giáo sư ở Trường đại học Eclanghen, sau khi trình bày một bài giảng, bây giờ được gọi là « Chương trình Eclanghen ». Theo chương trình đó, hình học được định nghĩa như là lý thuyết về các bất biến của một nhóm biến đổi nào đó. Bằng cách mở rộng hay thu hẹp nhóm biến đổi, ta có thể chuyển từ một dạng hình học này sang một dạng hình học khác. Hình học Ơclit nghiên cứu các bất biến của nhóm dời, hình học xạ ảnh nghiên cứu những bất biến của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh. Sự phân loại các nhóm biến đổi sẽ cho ta một sự phân loại hình học, và lý thuyết về các bất biến đại số và vi phân của mỗi một nhóm sẽ cho ta một cấu trúc giải tích của hình học tương ứng. Sau những công trình của Lôbasepxki, Bôia và Riman hệ thống hình học của Klêin là một cái mốc quan trọng trong việc nhận thức thực chất của hình học.

Một cống hiến quan trọng của Klêin trong tác phẩm nói trên là việc xây dựng một mô hình xạ ảnh cho hình học hypecbôlic. Klêin đã tìm thấy gợi ý về công trình đó, trong tác phẩm của nhà toán học Anh Actơ Keli (1821 — 1895) Keli đã chứng minh rằng nếu cho trước một giao tuyến cônic, thì tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh giữ nguyên cônic đó sẽ làm thành một nhóm (gọi là nhóm Keli).

Klêin đã xét các điểm nằm trong một đường elip xem như là một không gian hình học (2 chiều) trong đó nhóm Keli đối với elip là nhóm biến đổi của không gian đó. Kết quả ta sẽ thu được hình học hypecbôlic.

Trong mô hình nói trên, điểm như đã nói là những điểm nằm trong elip, còn đường thẳng là những giây cung của elip. Độ dài của đoạn thẳng được định nghĩa sao cho nó là bất biến của nhóm Keli.

Cố nhiên, bằng cách xét một mặt elipxôit, ta có thể xây dựng một mô hình của hình học hypecbôlic 3 chiều. Đến đây, vấn đề phi mâu thuẫn của hình học hypecbôlic đã được giải quyết. Mỗi một mâu thuẫn (nếu có) của hình học đó lập tức sẽ đưa đến một mâu thuẫn của hình học Ơclit. Như vậy nếu hình học Ơclit phi mâu thuẫn thì hình học hypecbôlic cũng vậy. Về sau tư tưởng này của Klêin đóng một vai trò cơ bản trong phương pháp tiên đề của Hinbe.

Còn về X. Li thì sau khi trở lại Na uy, ông là giáo sư ở Crixchian và sau đó từ năm 1886 đến 1898 ông giảng dạy toán học ở Laixich. Cả cuộc đời của Li dành cho việc nghiên cứu một cách có hệ thống các nhóm biến đổi liên tục và những bất biến của chúng, chỉ ra giá trị cơ bản của chúng đối với sự phân loại trong hình học, cơ học, trong lý thuyết phương trình vi phân thường và phương trình đạo hàm riêng.

Li đã cho phương pháp tổng quát để tìm ra tất cả những bất biến của một nhóm hữu hạn các phép biến đổi liên tục, nhưng đồng thời cũng chứng tỏ rằng trong không gian ba chiều chỉ có ba nhóm khác nhau, nhận một dạng vi phân toàn phương xác định dương làm bất biến. Ba nhóm đó ứng với ba loại không gian Riman có độ cong là hằng số.

Sau các công trình của Klêin và Li, các nhà hình học tập trung nghiên cứu các không gian có độ cong là hằng số. Cần phải mở rộng các tính chất đã biết đối với không gian ba chiều cho những không gian n chiều. Tuy vậy vấn đề đó cũng đã nhanh chóng hoàn thành và không gian có độ cong là hằng số được phát triển một cách rộng rãi. Các bài toán được đặt ra hầu như đều giải quyết hết, và do đó Bianki (1856—1928) chỉ còn việc tổng kết và hệ thống hóa lại trong tác phẩm «Các bài giảng về hình học vi phân» (1894). Tác phẩm đó cùng với «Lý thuyết tổng quát của các mặt» của G. Đacbu (1842—1917) được xem như là những sự trình bày cổ điển của hình học vi phân ở thế kỷ XIX.

Chương IX

VÀI NÉT VỀ HÌNH HỌC VÀO NHỮNG NĂM ĐẦU CỦA THẾ KỶ XX

1. Cũng như toán học nói chung, hình học thế kỷ XX là một môn khoa học đa dạng, phong phú về nội dung và phương pháp nghiên cứu. Những tư tưởng lớn xuất hiện trong hình học vào cuối thế kỷ trước đã đề ra những vấn đề nghiên cứu quan trọng cho thế hệ mới các nhà toán học. Những tư tưởng đó được hoàn thiện, bổ sung và phát triển, đưa đến những kết quả xuất sắc. Rõ ràng là hiện nay, việc mô tả và phân tích sự phát triển của hình học của thế kỷ này là một công việc khó khăn, và có lẽ chưa nên làm.

Tuy vậy chúng ta không nên dừng lại ở cuối thế kỷ XIX, bởi vì ngày 1-1-1901 không phải là một cái mốc đóng một vai trò quan trọng gì trong lịch sử phát triển của hình học. Việc phân chia quá trình phát triển của toán học theo từng thế kỷ, như trong cuốn sách này đã làm, chỉ cốt để nhằm thuận tiện cho việc trình bày mà thôi.

Vì những lẽ đó, chúng tôi viết thêm một chương ngắn có tính chất bổ sung, nhằm trình bày một số vấn đề có liên quan tới những điều đã nói vào cuối thế kỷ trước. Đó là các vấn đề về cơ sở Hình học, mở đầu về Tôpô học, và một số vấn đề khác.

2. Về những vấn đề thuộc cơ sở Hình học, trước hết chúng ta sẽ gặp tên tuổi của nhà toán học vĩ đại Đavit Hinbe (1862—1943), người mà sau khi Poăngcarê mất, đã đứng vào hàng đầu trong đội ngũ các nhà toán học thế giới. Đ.Hinbe sinh ra, lớn lên, và học tập tại thành phố Rêningxbec (bây giờ là Calininggrat). Sau khi bảo vệ luận án năm 1885, ông trở thành phó giáo sư (từ 1886—1892) rồi giáo sư (1895) tại trường đại học của thành phố đó. Từ năm 1896 đến khi mất, ông là giáo sư của Trường Đại học nổi tiếng Ghettinghen.

Hinbe đã cống hiến nhiều phát minh quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như đại số, lý thuyết số, giải tích hình học, lôgic toán, vật lý lý thuyết.

Ông không chỉ sáng tạo ra nhiều lý thuyết chung quan trọng, mà đồng thời còn giải quyết nhiều bài toán cụ thể. Chẳng hạn trong hình học vi phân ông đã chứng minh một định lý khó và bất ngờ. Trong không gian ba chiều, mọi mặt có độ cong âm hằng số đều có điểm kì dị.

Thiên tài toán học của ông thậm chí còn in dấu vào cả những lĩnh vực mà ông không hề nghiên cứu, như tôpô đại cương chẳng hạn.

Năm 1899 xuất hiện cuốn « Các cơ sở hình học » của Hinbe. Công trình hết sức tinh tế đó đã tiếp tục và hoàn thiện những vấn đề tiên đề của hình học trong thế kỷ XIX và mở ra một chương mới trong lịch sử của phương pháp tiên đề. Hinbe không phủ nhận cơ sở thực tiễn của các tiên đề, nhưng ông đòi hỏi chúng phải được diễn đạt như là một cơ sở của lý thuyết, và không cho phép một trực giác nào xen vào quá trình chứng minh các định lý từ các tiên đề đó. Bởi vậy mà bản chất của các đối tượng của lý thuyết không mang một nội dung cụ thể nào. Các đối tượng được hiểu như thế nào cũng được, miễn là chúng thỏa mãn hệ tiên đề đã nêu ra. Vì vậy, Hinbe đã mở đầu cuốn sách của mình bằng câu : « Chúng ta hãy hình dung ba hệ thống đối tượng, mà chúng ta sẽ gọi là điểm, đường thẳng, mặt phẳng », còn trong lúc chuyện trò, ông vẫn thường nói đùa rằng trong hình học, thay cho điểm, đường thẳng, mặt phẳng ta có thể nói về cái bàn, cái ghế và những cốc bia.

Như ta đã biết, Ơclit cũng định xây dựng hình học bằng phương pháp tiên đề. Những số các định đề và tiên đề của ông nêu ra quá ít, không đủ để làm cơ sở cho hình học, bởi vậy trong nhiều chứng minh của mình ông không thể tránh khỏi vận dụng đến trực giác.

Trong lần xuất bản đầu tiên của « Cơ sở hình học » Hinbe đã nêu ra một hệ tiên đề đầy đủ, bao gồm 5 nhóm đồng thời ông tiến hành nghiên cứu mối quan hệ của các nhóm đó, vai trò của một số các tiên đề, và những vấn đề khác nữa như : sự phi mâu thuẫn, sự đầy đủ của hệ tiên đề, và sự độc lập của một tiên đề nào đó đối với các tiên đề còn lại. Một phần quan trọng của các công trình nghiên cứu hình học trong thế kỷ này nhằm soi sáng các vấn đề đó.

Cần nói thêm vài lời về sự phát triển của phương pháp tiên đề : các quy tắc suy diễn dùng để chứng minh các định lý thường được hiểu ngầm, mà không phát biểu một cách chính xát dưới dạng toán học. Đó là một thứ lôgic được thừa nhận rộng rãi. Hình thức hóa những quy lắc suy diễn đó và biểu thị chúng dưới dạng các thuật toán là một vấn đề thuộc phạm vi lôgic toán, còn việc chỉ ra một cách rõ ràng các quy tắc đó là một phần hợp thành của phương pháp tiên đề. Hinbe là một trong những nhà toán học đã làm cho phương pháp tiên đề phát triển đến một trình độ cao.

3. Một trong những ngành học mới xuất hiện vào đầu thế kỹ XX là tôpô học. Cũng như nhiều ngành toán học hiện đại khác, tôpô học bắt nguồn từ những tư tưởng của nhà toán học thiên tài Riman.

Thực vậy, chính Riman là người đầu tiên nêu ra khái niệm không gian tôpô, nêu ra những vấn đề của một lý thuyết độc lập về các không gian như vậy. Ông còn xác định những bất biến (các số betti) đóng vai trò cực kỳ quan trọng trong sự phát triển của tôpô học, và cũng đã nêu lên những ứng dụng đầu tiên vào giải tích toán học (tính chu kỳ của các tích phân aben).

Nếu theo sơ đồ hình học của Klêin, thì ta có thể định nghĩa tôpô học là khoa học nghiên cứu những bất biến của nhóm các phép đồng phôi (là những phép biến đổi liên tục, mà phép ngược lại của nó cũng liên tục), các bất biến như vậy gọi là bất biến tôpô, hay tính chất tôpô.

Những tính chất tôpô nẩy sinh từ một phạm vi toán học có vẻ như rất xa với hình học: lý thuyết hàm biến phức. Đối với các hàm như vậy, Riman đã xây dựng những mặt (sau này gọi là diện Riman), mà về thực chất chỉ cần quan tâm đến các tính chất tôpô của chúng mà thôi.

Như vậy là tôpô học đã được bắt đầu nghiên cứu từ nửa sau của thế kỷ XIX. Tuy nhiên có chỉ thực sự trở thành một sự độc lập từ sau công trình nổi tiếng của nhà toán học Pháp lừng danh H. Poăngcarê (1854-1912) giáo sư Trường Đại học Xoocbon từ năm 1881 đến 1912. Poăngcarê là một nhà bác học, mà không một nhà toán học nào của thế kỷ XIX — trừ Riman — có thể sánh kịp về những di sản quý báu mà ông để lại cho toán học của thế kỷ XX. Những nghiên cứu về tôpô của ông được xuất bản trong tác phẩm «Giải tích về vị trí» (Analysis situs) và năm tập «Bổ sung» vào tác phẩm đó (1895-1904). Trong tập «Bổ sung» thứ 5, ông viết «tôi đã có nhiều dịp nghiên cứu về Analysis situs... Bây giờ tôi trở lại vấn đề đó một lần nữa với lòng tin rằng nó chỉ có thể giải quyết đến cùng nhờ một sự cố gắng nỗ lực liên tục, và nó xứng đáng với một sự cố gắng như vậy». Trong tác phẩm của mình Poăngcarê đã nêu lên một phương pháp để nghiên cứu các đa tạp tôpô, đó là phương pháp phân hoạch tam giác và phân hoạch đơn hình. Bởi vậy, hướng nghiên cứu này của Poăngcarê thường được gọi là tôpô tổ hợp. Nhờ phương pháp rất hiệu lực nói trên, về sau các nhà toán học đã tiến hành nghiên cứu một cách có hệ thống các đa tạp tôpô có số chiều 2, 3 và lớn hơn.

Có thể nói rằng tôpô tổ hợp của Poăngcarê là tiền thân của môn tôpô đại số hiện đại ngày nay, bởi vì tuy vào thời kỳ này, các vấn đề của tôpô được liên hệ với lý thuyết các hàm đại số và tích phân, nhưng thực chất là ẩn náu một mối liên hệ với đại số. Mối liên hệ đó chỉ thực sự trở nên rõ ràng vào những năm thứ hai mươi khi mà môn đại số bước vào một thời kỳ mới, chuyển từ «khoa học về giải các phương trình đại số» sang đại số «trừu tượng» hay «hiện đại», mà đối tượng là các cấu trúc đại số như nhóm, vành, trường . . .

Môn đại số mới đã cho ta một công cụ rất hiệu lực để nghiên cứu các không gian tôpô. Nó cho phép ta tìm thấy bản chất đại số của những quan hệ hình học, cũng như cho phép mở rộng các kết quả trước đây bị hạn chế một cách không thực chất. Có thể lấy thí dụ là việc chuyển từ tổng các đơn hình với hệ số nguyên sang tổng với các hệ số thuộc một vành tùy ý (tức là nhóm đồng điệu được xét một cách tổng quát hơn, với hệ số tùy ý) đã cho phép phát biểu định lý đối ngẫu một cách tổng quát hơn.

Phương pháp của tôpô đại số, nói một cách thô sơ, là việc chuyển phạm trù của các không gian tôpô sang phạm trù của các nhóm, và do đó một bài toán về tôpô sẽ trở nên một bài toán về lý thuyết nhóm. Hiện nay, tôpô đại số là một trong những ngành toán học quan trọng và hiện đại nhất; nó đạt được nhiều kết quả rực rỡ và cũng tìm thấy nhiều ứng dụng trong những ngành học khác.

Một phương hướng khác để nghiên cứu tôpô thường được gọi là tôpô — lý thuyết tập hợp, hoặc là tôpô đại cương; nó nghiên cứu lý thuyết chung của các không gian tôpô tổng quát, dựa vào những thành tựu về lý thuyết tập hợp của Căngto.

Khái niệm cơ bản của tôpô học là khái niệm liên tục (phép đồng phôi được định nghĩa nhờ khái niệm này). Trong thế kỷ XIX, khái niệm đó được nghiên cứu một cách sâu sắc trong các công trình của Côsi, Bônzanô, Aben. Tuy vậy khái niệm liên tục thường được xét trong một không gian mêtric, tức là không gian mà trong đó có cách đo khoảng cách giữa hai điểm, trong lúc đó đối với không gian tôpô, mêtric không phải là bất biến. Bởi vậy, cần phải nêu lên một định nghĩa của không gian tôpô, và phép biến đổi liên tục của chúng, sao cho không cần phải sử dụng khái niệm mêtric.

Haoxđooc đã giải quyết vấn đề đó. Ông đưa ra một định nghĩa của không gian tôpô bằng phương pháp tiên đề, trong đó khái niệm cơ bản là khái niệm « lân cận » (cũng cần phải nói rằng, khái niệm « lân cận » lần đầu tiên được Hinbe nêu ra trong « Cơ sở hình học », và theo lời ông, nó phải là « khái niệm cơ bản để xây dựng Analysis Situs »). Từ một số ít các tiên đề (đối với không gian tôpô tổng quát. Số các tiên đề chỉ có 4). Haoxđooc xây dựng (trên những nét lớn) một lý thuyết chung của các không gian tôpô.

Có thể nói rằng công trình của Haoxđooc là xuất phát điểm của mọi nghiên cứu sau này về tôpô đại cương.

4. Trong những năm 1915-1916, thuyết tương đối của Anhxtanh ra đời và đã làm một cuộc cách mạng thực sự trong vật lý và có ảnh hưởng sâu sắc tới hình học.

Trong khi xây dựng lý thuyết tương đối tổng quát, Anhxtanh đã đưa hình học vi phân Riman vào vật lý bằng cách dùng phép tính tenxơ. Như đã biết, phép tính tenxơ đã được nghiên cứu từ thế kỷ XIX bởi các nhà toán học Risi-Cuôcbaxtrô và Lêvi-Sivita, nhưng chỉ có Anhxtanh mới làm cho nó trở nên phổ biến rộng rãi và phát triển. Từ đó, các nhà toán học càng chú ý nhiều hơn vào việc nghiên cứu các đa tạp Riman hoặc là « trong chính nó », hoặc bằng cách nhúng nó trong không gian Ơclit.

Như vậy là bắt đầu một chương mới rất phong phú trong lịch sử phát triển của hình học. Lêvi-Sivita đã đưa vào hình học Riman một khái niệm rất đơn giản nhưng quan trọng : khái niệm chuyển dời song song. Nhờ khái niệm đó, trong không gian Riman có thể nói về việc chuyển dời một vectơ từ một điểm này tới một điểm khác dọc theo một cung. Tuy nhiên khác với không gian Ơclit, kết quả của sự chuyển dời nói chung phụ thuộc vào đường cong. Lêvi-Sivita đã chứng minh một kết quả rất hay : Tại một điểm M trong không gian Riman ta xét một phần tử hai chiều và một đường kín đủ nhỏ trong phần tử hai chiều đó, bao chung quanh M. Khi đó, nếu $d\varphi$ là độ lệch của vectơ khi chuyển dời quanh đường cong, còn $d\sigma$ là diện tích giới hạn bởi đường cong kín, thì $d\varphi = k d\sigma$, k là độ cong của không gian tại điểm M theo phương hai chiều của phần tử nói trên. Như vậy ta có một cách giải thích ý nghĩa hình học độ cong.

Phát triển những kết quả của Lêvi-Sivita, Hecman Vây (1885-1955) đã xây dựng không gian Riman xuất phát từ các phép chuyển dời song song. Kết quả đưa đến hình học afin Riman, hoặc còn gọi là hình học của liên thông afin. Theo cách xây dựng của Hecman Vây thì hình học mêtric Riman sẽ trở thành một trường hợp đặc biệt của hình học afin Riman giống hệt như là hình học Ơclit là một trường hợp đặc biệt của hình học afin vậy.

Phép tính tenxơ và những ứng dụng của nó được phát triển rộng rãi trong các trường phái toán học ở Hà lan, Maxcơva và Mỹ. Đóng góp lớn lao trong phạm vi đó là những công trình của Eli Cactăng (1869-1951). Ông đã nêu lên khái niệm về nhóm hôlônôm và trên cơ sở đó tiến hành một các phân loại hình học, bao gồm hình học của Klêin và hình học Riman như là một trường hợp đặc biệt.

MỤC LỤC

VĂN NHƯ CƯƠNG

LỊCH SỬ HÌNH HỌC

Người biên tập : *Tương Quan*

Người sửa bài : *Nguyễn Thiết Hùng*

In 20.200 cuốn tại Nhà máy in Trần Phú — Thành phố Hồ Chí Minh
Khổ 13 x 19 — Số in 028 — Số XB : 15 — 77/KHKT
Xong tháng 6-1977 Gửi lưu chiểu tháng 5 năm 1977

Giá tiền Bắc : 0 đ 45
Giá tiền Nam : 0 đ 36