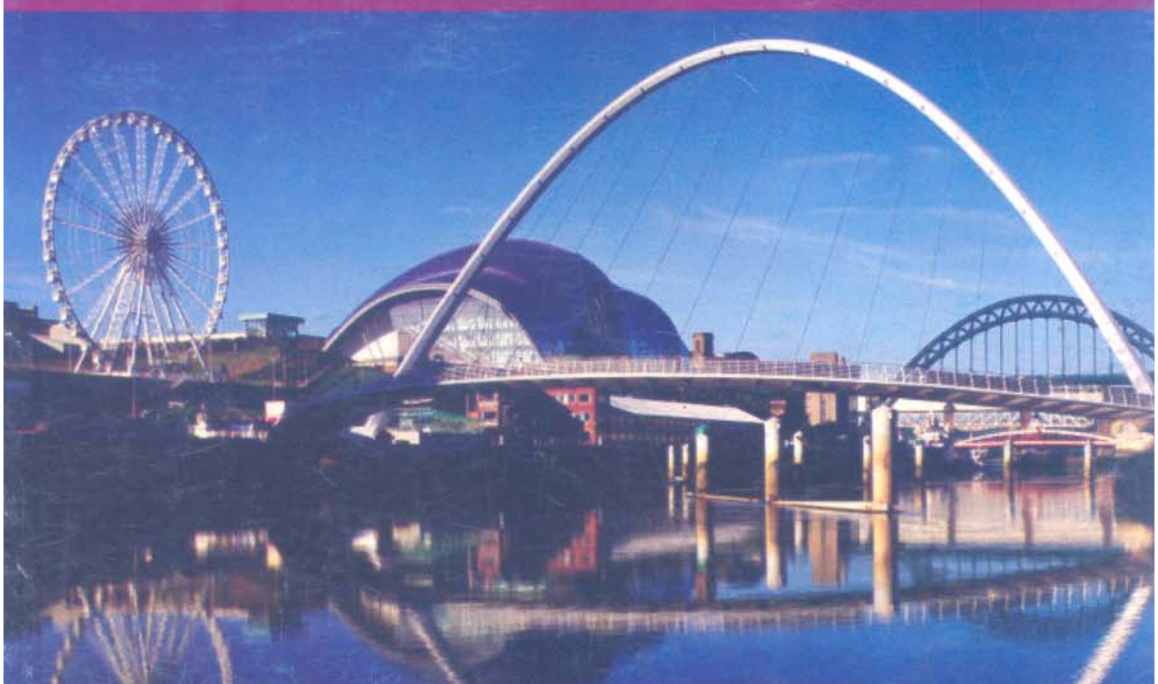
TRẦN VĂN HẠO
(Chủ biên)

NGUYỄN CAM
NGUYỄN MỘNG HY
TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ
NGUYỄN SINH NGUYÊN
NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

ĐẠI SỐ



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)
NGUYỄN CAM - NGUYỄN MỘNG HY - TRẦN ĐỨC HUYÊN
CAM DUY LỄ - NGUYỄN SINH NGUYÊN - NGUYỄN VŨ THANH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

ĐẠI SỐ

BIÊN SOẠN THEO CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT NÂNG CAO HIỆN HÀNH

(Tái bản lần thứ năm có chỉnh lí và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

32-2009/CXB/116-16/GD

Mã số : PTK33t9 - LKT

Lời nói đầu

Bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học** được biên soạn nhằm mục đích giúp các em học sinh lớp 12 có thêm tài liệu tham khảo, nắm vững phương pháp giải các dạng bài toán cơ bản, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng hàng năm.

Nội dung bộ sách bám sát theo chương trình bộ môn Toán THPT nâng cao hiện hành và Hướng dẫn ôn tập thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng môn Toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bộ sách gồm 7 tập, tương ứng với 7 chuyên đề :

1. Đại số
2. Lượng giác
3. Hình học không gian
4. Hình học giải tích
5. Giải tích - Đại số tổ hợp
6. Khảo sát hàm số
7. Bất đẳng thức

Tập sách **"Chuyên đề luyện thi vào Đại học : Đại số"** này, gồm 2 phần :

Phần I : Kiến thức cơ bản – Ví dụ áp dụng : gồm 6 chương thuộc phần Đại số, trong lần tái bản này có bổ sung thêm chương số phức. Mỗi chương gồm nhiều đơn vị kiến thức (§). Mỗi (§) được biên soạn thống nhất gồm các mục :

A. Kiến thức cơ bản : Tóm tắt, hệ thống kiến thức trọng tâm.

B. Ví dụ áp dụng : gồm nhiều ví dụ có hướng dẫn giải. Mỗi ví dụ là một dạng bài tập cơ bản, thường gặp trong các đề thi tuyển sinh Đại học.

C. Luyện tập : gồm nhiều bài tập, giúp học sinh tự rèn luyện kĩ năng giải toán.

Phần II : Hướng dẫn giải – Câu hỏi trắc nghiệm ôn tập : hướng dẫn giải bài tập hoặc cho đáp số các bài luyện tập ở mỗi (§) và phần câu hỏi trắc nghiệm ôn tập cho cả phần Đại số, có đáp án.

Cuối sách có phần phụ lục : **Trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học (2005 – 2008)**. Đây là phần trích giới thiệu một số đề thi tuyển sinh Đại học đã ra từ 2005 đến 2008 – môn Toán, có liên quan đến phần Đại số, có hướng dẫn giải ; giúp học sinh làm quen với các dạng câu hỏi của đề thi tuyển sinh Đại học.

Tập thể tác giả trân trọng giới thiệu với các em học sinh 12 bộ sách **Chuyên đề luyện thi vào Đại học**. Chúng tôi tin tưởng bộ sách này sẽ góp phần giúp các em học sinh 12 nâng cao chất lượng học tập và đạt được kết quả mĩ mãn trong kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Chủ biên

PGS, TS. TRẦN VĂN HẠO

CẤU TRÚC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG 2009, MÔN TOÁN

II. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 ĐIỂM)

Câu I (3 điểm) :

– Khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số.

– Các bài toán liên quan đến ứng dụng của đạo hàm và đồ thị của hàm số : chiều biến thiên của hàm số. Cực trị. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Tiếp tuyến, tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số. Tìm trên đồ thị những điểm có tính chất cho trước, tương giao giữa hai đồ thị (một trong hai đồ thị là đường thẳng) ;...

Câu II (2 điểm) :

– Phương trình, bất phương trình ; hệ phương trình đại số ;

– Công thức lượng giác, phương trình lượng giác.

Câu III (1 điểm) :

– Tìm giới hạn

– Tìm nguyên hàm, tính tích phân

– Ứng dụng của tích phân: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay.

Câu IV (1 điểm) :

Hình học không gian (tổng hợp) : Quan hệ song song, quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay, hình trụ tròn xoay ; tính thể tích khối lăng trụ, khối chóp, khối nón tròn xoay, khối trụ tròn xoay ; tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Câu V (1 điểm) :

Bài toán tổng hợp.

II. PHẦN RIÊNG (3 ĐIỂM) :

Thí sinh chỉ được làm một trong 2 phần (phần 1 hoặc 2)

1. Theo chương trình chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm) :

Nội dung kiến thức : Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, elip, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII. a (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

- Số phức

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

2. Theo chương trình nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm) :

Nội dung kiến thức :

Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng và trong không gian :

– Xác định toạ độ của điểm, vectơ.

– Đường tròn, ba đường cônic, mặt cầu.

– Viết phương trình mặt phẳng, đường thẳng.

– Tính góc ; tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng, mặt phẳng; khoảng cách giữa hai đường thẳng. Vị trí tương đối của đường thẳng, mặt phẳng và mặt cầu.

Câu VII.b (1 điểm) :

Nội dung kiến thức :

– Số phức

– Đồ thị hàm phân thức hữu tỉ dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ và một số yếu tố liên quan.

– Sự tiếp xúc của hai đường cong.

– Hệ phương trình mũ và lôgarit.

– Tổ hợp, xác suất, thống kê.

– Bất đẳng thức. Cực trị của biểu thức đại số.

Phần I.

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Chương 1.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH ax + b = 0

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0$ (1)

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$

- $a\neq 0:(1)\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$
- $a=0:(1)\Leftrightarrow 0x=-b$

  $b\neq 0:(1)$ vô nghiệm

  $b=0:(1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

2. Phương trình quy về dạng $ax+b=0$

Có những phương trình, với tập xác định D, được biến đổi tương đương trên D thành phương trình $ax+b=0$. Khi đó chỉ cần giải và biện luận phương trình $ax+b=0$ với $x\in D$. Chẳng hạn, ta có :

$$\frac{ax+b}{x-\alpha}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\alpha\\ ax+b=0.\end{cases}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình :

$$(m^2-m-6)x=m^2-4m+3. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (m+2)(m-3)x = (m-1)(m-3). \qquad (2)$$

- $m \neq -2$ và $m \neq 3$: $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{m-1}{m+2}$.
- $m = -2$: $(2) \Leftrightarrow 0x = 15$. Do đó (1) vô nghiệm.
- $m = 3$: $(2) \Leftrightarrow 0x = 0$. Do đó (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{mx + m + 2}{x - 1} = 2. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Trên D, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow mx + m + 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow (m-2)x = -m-4. \qquad (2)$$

- $m = 2$: (2) vô nghiệm.
- $m \neq 2$: (2) có nghiệm $x = \dfrac{-m-4}{m-2}$.

Ta có : $x = \dfrac{-m-4}{m-2} \in D \Leftrightarrow \dfrac{-m-4}{m-2} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Vậy : $m \neq 2$ và $m \neq -1$: $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{-m-4}{m-2}$;

$m = 2$ hoặc $m = -1$: (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{x}{\sqrt{x+m}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}}. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định : $D = (-m ; +\infty) \cap (-1 ; +\infty)$.

Xét hai trường hợp :

- $m = 1$: (1) được thoả với mọi $x \in D$ với $D = (-1 ; +\infty)$.

• $m \neq 1 : (1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+m}\right)x = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (do } \sqrt{x+1} \neq \sqrt{x+m} \text{)}.$$

Nghiệm $x = 0$ này thuộc D nếu $-m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy : $m \leq 0 : (1)$ vô nghiệm ;

$m > 0$ và $m \neq 1 : (1) \Leftrightarrow x = 0$;

$m = 1 : (1)$ có tập nghiệm là $(-1 ; +\infty)$.

Ví dụ 4. Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-b}{x-a} = 2. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{a ; b\}$. Trên D, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (x-b)^2 = 2(x-b)(x-a) \Leftrightarrow 0x = (a-b)^2. \qquad (2)$$

• $a \neq b : (2)$ vô nghiệm.

• $a = b : (2)$ được thoả mãn với mọi $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Vậy : $a \neq b : (1)$ vô nghiệm ;

$a = b : (1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Ví dụ 5. Xác định m để phương trình sau vô nghiệm :

$$\frac{x+m}{x+1} + \frac{x-1}{x+2} = 2. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; -2\}$. Trên D, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + mx + 2x + 2m + x^2 - 1 = 2x^2 + 6x + 4$$

$$\Leftrightarrow (m-4)x = 5 - 2m. \qquad (2)$$

Phương trình (1) vô nghiệm trong các trường hợp sau :

• (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow m = 4$;

- (2) có nghiệm $x = -1$ hoặc $x = -2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l} -m+4=5-2m \\ -2m+8=5-2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ 0m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=1.$$

Vậy, phương trình (1) vô nghiệm khi $m = 4$ hoặc $m = 1$.

C. LUYỆN TẬP

1.1 Tìm m để phương trình sau có nghiệm dương :

$$m^2(x-1) = 4x - 3m + 2.$$

1.2 Tìm a và b để phương trình sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$:

$$a(x-1) + b(2x+1) = x + 2.$$

1.3 Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\frac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

1.4 Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}.$$

§ 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH ax + b > 0

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các bất phương trình dạng $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải giống nhau. Để minh hoạ, ta chỉ xét dạng $ax + b > 0$.

1. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$ **(1)**

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

- $a > 0$: (1) $\Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

- $a < 0 : (1) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$
- $a = 0 : (1) \Leftrightarrow 0x > -b$

  $b \le 0 : (1)$ vô nghiệm ;

  $b > 0 : (1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

2. Giải và biện luận hệ bất phương trình $\begin{cases} ax + b > 0 & (1) \\ cx + d > 0 & (2) \end{cases}$

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2). Khi đó, tập nghiệm của hệ là $X = X_1 \cap X_2$.

B. ÁP DỤNG VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình : $(m-1)x \le m+1$. (1)

Hướng dẫn giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.

- $m > 1 :\ (1) \Leftrightarrow x \le \dfrac{m+1}{m-1}$
- $m < 1 :\ (1) \Leftrightarrow x \ge \dfrac{m+1}{m-1}$
- $m = 1 :\ (1) \Leftrightarrow 0x \le 2$. Do đó (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tham số a sao cho hai bất phương trình sau đây tương đương :

$$(a-1)x - a + 3 > 0; \quad (1)$$

$$(a+1)x - a + 2 > 0. \quad (2)$$

(Trích đề thi Cao đẳng Hải quan, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của bất phương trình (1) và (2). Ta tìm a sao cho $X_1 = X_2$. Để tiện việc so sánh X_1 và X_2, ta ghi kết quả giải và biện luận các bất phương trình (1) và (2) trong bảng sau :

a	X_1	X_2
$+\infty$	$\left[\dfrac{a-3}{a-1};+\infty\right)$	$\left[\dfrac{a-2}{a+1};+\infty\right)$
1	$\mathbb{R}$	$\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$
	$\left(-\infty;\dfrac{a-3}{a-1}\right]$	$\left[\dfrac{a-2}{a+1};+\infty\right)$
-1	$\left(-\infty;2\right)$	$\mathbb{R}$
$-\infty$	$\left(-\infty;\dfrac{a-3}{a-1}\right]$	$\left(-\infty;\dfrac{a-2}{a+1}\right]$

Từ bảng trên, ta suy ra : $X_1 = X_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a > 1 \end{array}\right. \\ \dfrac{a-3}{a-1} = \dfrac{a-2}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow a = 5$.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hệ bất phương trình sau đây vô nghiệm : $\begin{cases} 2mx + 3 \geq 0 & (1) \\ (m-1)x + m - 2 < 0. & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình (1) và (2).

Ta tìm m sao cho : $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Nhận xét : Nếu $m < 2$ thì hệ có nghiệm $x = 0$. Do vậy, ta chỉ cần giải bài toán với $m \geq 2$.

Với $m \geq 2$ thì $X_1 = \left[-\dfrac{3}{2m};+\infty\right)$, $X_2 = \left(-\infty;\dfrac{2-m}{m-1}\right)$. Ta có :

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{2-m}{m-1} \leq -\frac{3}{2m}$$

$\Leftrightarrow 4m - 2m^2 \leq -3m + 3$ (do $m > 0, m - 1 > 0$)

$\Leftrightarrow 2m^2 - 7m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 3)(2m - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow m \geq 3$ (vì $2m - 1 > 0$).

C. LUYỆN TẬP

2.1 Tìm m để bất phương trình $mx > 2m + 1$ được thoả mãn với mọi x thuộc khoảng $(-1; 1)$.

2.2 Tìm m để hệ bất phương trình sau đây vô nghiệm :

$$\begin{cases} 2x - m + 3 > 0 \\ m(x - 1) + 2 < 0. \end{cases}$$

2.3 Tìm a để hệ bất phương trình sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} ax - 2a - 1 \geq 0 \\ (a - 1)x - a + 3 \leq 0. \end{cases}$$

§ 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

- $\Delta < 0$: (1) vô nghiệm ;
- $\Delta = 0$: (1) có nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
- $\Delta > 0$: (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Tổng, tích của hai nghiệm

a) Định lí Viét. Nếu phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 thì :

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

b) Các biểu thức đối xứng với x_1, x_2 đều có thể tính theo S và P.

Chẳng hạn : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$;

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP \;;$$

3. Dấu của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Khi tam thức $f(x)$ có hai nghiệm x_1 và x_2, ta thường quy ước $x_1 \le x_2$.

a) Định lí về dấu của tam thức

- $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) = 0 \text{ với } x_0 = -\dfrac{b}{2a} \text{(nghiệm kép)} \\ af(x) > 0 \text{ với mọi } x \neq x_0 \end{cases}$
- $\Delta > 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và :

$$af(x) < 0 \text{ nếu } x \in (x_1 ; x_2) \;;$$

$$af(x) > 0 \text{ nếu } x \notin [x_1 ; x_2].$$

b) Điều kiện tam thức không đổi dấu trên $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

4. So sánh số thực α với các nghiệm của tam thức bậc hai

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Gọi x_1 và x_2 $(x_1 \le x_2)$ là các nghiệm của tam thức $f(x)$. Theo hệ thức Viét ta có :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ ; } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

- $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0. \end{cases}$

- $x_1 \leq x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 - \alpha < 0 \\ x_2 - \alpha < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0. \end{cases}$

- $\alpha < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ x_1 - \alpha > 0 \\ x_2 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0. \end{cases}$

Lưu ý. Khi giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, nếu hệ số a của x^2 có thể triệt tiêu thì xét thêm trường hợp $a = 0$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho phương trình bậc hai :

$$x^2 - (2\cos\alpha - 3)x + 7\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - \frac{9}{4} = 0.$$

Với những giá trị nào của α thì phương trình có nghiệm kép ?

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Quy Nhơn, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\Delta = 4\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 9 - 4\left(7\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - \frac{9}{4}\right)$

$$= -24\cos^2\alpha + 18 = 6(3 - 4\cos^2\alpha).$$

Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \alpha = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2. Cho hai phương trình : $x^2 - x + m = 0$; (1)

$$x^2 - 3x + m = 0. \quad (2)$$

Tìm m để phương trình (2) có một nghiệm khác 0 và bằng hai lần một nghiệm của phương trình (1).

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần. Giả sử phương trình (1) có nghiệm $x_0 \neq 0$ sao cho $\frac{x_0}{2}$ là nghiệm của (1). Thế thì :

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} - \frac{x_0}{2} + m = 0 \\ x_0^2 - 3x_0 + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 4m = 0 \\ x_0^2 - 3x_0 + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0 = -3m \Rightarrow m = -\frac{10}{9}.$$

Điều kiện đủ. Xét $m = -\frac{10}{9}$. Ta có :

$(1) \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$ và $x_2 = \frac{5}{3}$;

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$ và $x_4 = \frac{10}{3}$.

Vì $x_4 = 2x_2$ nên giá trị $m = -\frac{10}{9}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$. Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức $E = x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

- $\Delta' = m^2 - 2m + 3 > 0, \forall m$ suy ra phương trình luôn luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

- $E = x_1x_2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) = 3x_1x_2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 = 6m - 9 - 4m^2$

$$= -\left(4m^2 - 6m + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} - 9 = -\frac{27}{4} - \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 \leq -\frac{27}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = \frac{3}{4}$. Vậy $\max E = -\frac{27}{4}$ khi $m = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$. Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và biểu thức $E = x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

- $\Delta = m^2 - 2m - 3 = (m+1)(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3. \end{array}\right.$

- $E = 3x_1x_2 - \left(x_1 + x_2\right)^2 = 6m + 9 - 4m^2$.

Xét hàm số $f(m) = -4m^2 + 6m + 9$ với $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. Ta có :

$f'(m) = -8m + 6 = -8\left(m - \frac{3}{4}\right)$; $f(-1) = -1$; $f(3) = -9$.

Bảng biến thiên :

m	$-\infty$	-1	$\frac{3}{4}$	3	$+\infty$
$f'(m)$	$+$		$+$ 0 $-$		$-$
$f(m)$	$-\infty$ ↗	-1		-9	↘ $-\infty$

Suy ra biểu thức E đạt giá trị lớn nhất là -1 khi $m = -1$.

Ghi chú. Học sinh hãy giải thích tại sao trong bài toán này ta không thể áp dụng phương pháp đã dùng trong Ví dụ 3.

C. LUYỆN TẬP

3.1 Giả sử $a_1, a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$. Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm : $x^2 + a_1x + b_1 = 0$; $x^2 + a_2x + b_2 = 0$.

3.2 Tìm m để phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn hệ thức $5x_1 + 2x_2 - 1 = 0$.

3.3 Cho phương trình : $x^2 - 2kx - (k-1)(k-3) = 0$. (1)

Chứng minh rằng với mọi giá trị của k, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và các nghiệm đó thoả mãn hệ thức :

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 3 = 0. \qquad (2)$$

(Trích đề thi Cao đẳng Sư phạm Hà Nội, năm 1999)

3.4 Cho phương trình : $x^2 - 2kx + 2k^2 + \frac{4}{k^2} - 5 = 0 \ (k \neq 0)$. (1)

1) Tìm k để (1) có nghiệm. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1).

2) Đặt $E = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)$. Tìm k để biểu thức E

a) đạt giá trị lớn nhất ; b) đạt giá trị nhỏ nhất.

(Trích đề thi Đại học Đà Nẵng, khối A và B, năm 1999)

3.5 Cho phương trình : $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. (1)

1) Định m để phương trình (1) có nghiệm.

2) Định m để phương trình (1) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 1.

3) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

§ 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giải và biện luận phương trình : $a\varphi^2(x) + b\varphi(x) + c = 0$. (1)

Có thể giải phương trình (1) bằng cách dùng ẩn số phụ $t = \varphi(x)$.

Khi dùng ẩn phụ, các bước thực hiện như sau :

- Đặt $t = \varphi(x)$.
- Từ (1) suy ra : $at^2 + bt + c = 0$ (2)
- Giải (2) ta được : $t \in T$.
- Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \varphi(x) \in T$.

2. Phương trình trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Đặt : $t = x^2 \geq 0$, ta được phương trình $at^2 + bt + c = 0$.

Lưu ý. Phương trình $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ được đưa về phương trình trùng phương bằng cách đặt $t = x + \dfrac{a + b}{2}$.

3. Phương trình phản thương loại 1 :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

- Nhận xét : $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$, $|t| \geq 2$, ta được phương trình :

$$at^2 + bt + c - 2a = 0.$$

4. Phương trình phản thương loại 2 :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

- Nhận xét : $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$, ta được phương trình : $at^2 + bt + c + 2a = 0$.

5. Chú ý

- Khi dùng ẩn phụ $t = \varphi(x)$, nên đặt điều kiện t thuộc *miền giá trị* của hàm số $t = \varphi(x)$.

- Tìm điều kiện về nghiệm của phương trình $g[\varphi(x)] = 0$:

- Xét mối quan hệ giữa hai ẩn x và t thông qua hệ thức $\varphi(x) = t$.

- Từ đó, đưa ra yêu cầu về nghiệm t của phương trình $g(x) = 0$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải phương trình : $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 10$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (x+1)(x+5)(x+2)(x+4) = 10$

$$\Leftrightarrow (x^2+6x+5)(x^2+6x+8) = 10.$$

1) Đặt $t = x^2 + 6x + 5$. Khi đó : $(1) \Rightarrow t(t+3) = 10$ (2)

2) Ta có : $(2) \Leftrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -5 \\ t = 2. \end{array}\right.$

3) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+5 = -5 \\ x^2+6x+5 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+10 = 0 \\ x^2+6x+3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{6}.$

Nhận xét. Ta có $t = x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4 \geq -4$. Do đó, nếu ở bước 1) ta đặt điều kiện $t \geq -4$ thì ở bước 2), giá trị $t = -5$ bị loại.

Ví dụ 2. Xác định tất cả các giá trị của a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$ax^4 - (a-3)x^2 + 3a = 0 \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia TP. HCM, Khối D, năm 1998)

Hướng dẫn giải

- Đặt : $t = x^2 \Rightarrow t \geq 0$. Ta được phương trình :

$$at^2 - (a-3)t + 3a = 0. \qquad (2)$$

• Nhận xét : Mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình (2) cho hai nghiệm tương ứng $x = \pm\sqrt{t}$ của phương trình (1). Do đó điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt là phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

• Đặt : $f(t) = at^2 - (a-3)t + 3a$. Với $a \neq 0$, ta có :

$$\Delta = (a-3)^2 - 12a^2 = -(11a^2 + 6a - 9)\ ;\ P = 3\ ;\ S = \frac{a-3}{a}.$$

Điều kiện cần tìm là :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 11a^2 + 6a - 9 < 0 \\ \dfrac{a-3}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-6\sqrt{3}}{11} < a < 0.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình : $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0.$ (1)

Hướng dẫn giải

Nhận xét : $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \left(x^4 + 1\right) - 4\left(x^3 + x\right) + 5x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Đặt : $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$. Ta được phương trình :

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (\text{loại}) \\ t = 3. & \end{array}\right.$$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Ví dụ 4. Giải phương trình : $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0.$ (1)

Hướng dẫn giải

Nhận xét : $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1).

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (x^4+1)-2(x^3-x)-5x^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5=0.$$

• Đặt $t=x-\frac{1}{x}$, ta được phương trình : $t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

• Do đó : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{x}=-1 \\ x-\frac{1}{x}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ x^2-3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$.

C. LUYỆN TẬP

4.1 Giải phương trình : $2x^2+8x-7\sqrt{x^2+4x+7}+20=0$.

4.2 Giải phương trình : $(x+1)^4+(x-3)^4=82$.

4.3 Giải các phương trình :

a) $x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$;

b) $x^4-9x^3+28x^2-36x+16=0$.

4.4 Định m để phương trình sau có nghiệm :

$$(x^2-2x+2)^2-2(m-3)(x^2-2x+2)+m^2-6m=0.$$

4.5 Định m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$(m-4)x^4-2(m-2)x^2+m-1=0.$$

§ 5. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA, BẬC BỐN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Sơ lược về đa thức

• Đa thức bậc n (n nguyên dương) là biểu thức có dạng :

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

• Nếu tồn tại số thực x_0 sao cho $P(x_0) = 0$ thì x_0 được gọi là một nghiệm của $P(x)$.

• Nếu $P(x)$ có nghiệm x_0 thì ta có $P(x) = (x - x_0).Q(x)$ trong đó $Q(x)$ là một đa thức bậc $n - 1$.

• Một đa thức bậc n có nhiều nhất là n nghiệm.

2. Phương trình bậc 3 : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$

• Phương trình bậc 3 có ít nhất một nghiệm (và nhiều nhất 3 nghiệm).

• ***Cách giải :*** Nói chung, ta chỉ giải được phương trình bậc 3 nếu biết được một nghiệm của nó. Khi đó bài toán đưa về giải phương trình bậc hai.

• ***Định lí Viét.*** Nếu phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thì ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

3. Phương trình bậc 4 : $ax^4 + bx + cx^2 + dx + e = 0$ $(x \neq 0)$

Ta đã biết cách giải phương trình bậc 4 khi nó có dạng đặc biệt như phương trình trùng phương, phương trình phản thương... Ngoài ra, có thể giải phương trình bậc 4 trong các trường hợp sau :

• Hoặc biết được một nghiệm của nó, khi đó bài toán đưa về giải phương trình bậc 3.

• Hoặc phân tích được vế trái của phương trình thành tích của hai tam thức bậc hai.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho phương trình :

$$x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3m^2 + 3m + 6 = 0.$$

a) Định m để phương trình có một nghiệm bằng -1.

b) Giải phương trình ứng với các giá trị m vừa tìm.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình có nghiệm -1 khi và chỉ khi :

$$-1 + m^2 - m + 7 - 3m^2 + 3m + 6 = 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 3. \end{array}\right.$$

b) Với $m = -2$ hoặc $m = 3$, phương trình trở thành :

$$x^3 - 13x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Ví dụ 2. Tìm m để phương trình $x^3 - 1 - m(x-1) = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x + 1 - m = 0. \end{array}\right.$

Đặt : $f(x) = x^2 + x + 1 - m$. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4m - 3 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > \dfrac{3}{4} \\ m \neq 3. \end{array}\right.$$

Ví dụ 3. Cho đa thức $P(x) = x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x + m(1 - m^2)$.

a) Tính $P(m)$.

b) Tìm m sao cho phương trình $P(x) = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) $P(m) = m^3 - 2m^3 + 2m^3 - m + m - m^3 = 0$.

b) Ta có $P(x) = (x - m)(x^2 - mx + m^2 - 1)$. Do đó :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = m & (1) \\ x^2 - mx + m^2 - 1 = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán là $m > 0$ và phương trình có hai nghiệm phân biệt và đều khác m, tức là $m > 0$ và :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ f(m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3m^2 > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của a và b để phương trình $x^3 + ax + b = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thoả mãn hệ thức $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3. Theo định lí Viét, ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Từ giả thiết $x_1 + x_3 = 2x_2$, suy ra $x_2 = 0$, do đó $b = 0$.

Đảo lại : Với $b = 0$ phương trình (1) trở thành :

$$x^3 + ax = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + a) = 0.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a < 0$. Khi đó ta được $x_1 = -\sqrt{-a}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{-a}$. Các nghiệm này thoả mãn hệ thức $x_1 + x_3 = 2x_2$.

Vậy các giá trị cần tìm của a và b cần tìm là : $a < 0$, $b < 0$.

Ví dụ 5. Giả sử phương trình $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng : $a^2 + 3b > 0$.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, Khối A, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm cua phương trình đã cho. Theo định lí Viét

ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = -b. \end{cases}$

Từ đó suy ra :

$$a^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2$$

$$= (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 - 2b. \qquad (1)$$

Do đó : $a^2 + 2b = (x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2$.

Áp dụng kết quả : $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ta có :

$$(x_1x_2)^2 + (x_2x_3)^2 + (x_3x_1)^2 > x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -b. \qquad (2)$$

(Đẳng thức không xảy ra vì x_1, x_2, x_3 đôi một khác nhau).

Từ (1) và (2), suy ra : $a^2 + 2b > -b \Leftrightarrow a^2 + 3b > 0$.

Ví dụ 6. Giải phương trình : $x^4 - 24x - 32 = 0$. (1)

Hướng dẫn giải

Ta tìm cách phân tích vế trái của (1) thành thừa số.

$$x^4 - 24x - 32 = x^4 + (4x^2 + 4) - 4x^2 - 24x - 36$$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4(x + 3)^2$$

$$= (x^2 + 2 + 2x + 6)(x^2 + 2 - 2x - 6)$$

$$= (x^2 + 2x + 8)(x^2 - 2x - 4).$$

Vì $x^2 + 2x + 8 > 0$ nên : $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Ghi chú. Cách giải trên đây rất gọn nhưng có vẻ "may rủi". Có thể giải cách khác như sau : Ta tìm ba số a, b, m sao cho với mọi x ta có :

$$x^4 - 24x - 32 = (x^2 + a)^2 - m(x + b)^2$$

$$= x^4 + (2a - m)x^2 - 2mbx + a^2 - mb^2.$$

Các số a, b, m phải nghiệm đúng hệ sau :

$$(I)\begin{cases}2a-m=0 & (1)\\ mb=12 & (2)\\ a^2-mb^2=-32. & (3)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $m=2a,\ b=\dfrac{12}{m}=\dfrac{6}{a}$. Thay vào (3) ta được :

$$a^2-2a\left(\frac{36}{a^2}\right)=-32 \Leftrightarrow a^3+32a-72=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+36)=0$$

$$\Leftrightarrow a=2.$$

Tóm lại : $a=2,\ m=4,\ b=3$ (thoả mãn hệ (I)). Vậy :

$$x^4-24x-32=(x^2+2)^2-4(x+3)^2.$$

Ví dụ 7. Cho đa thức $P(x)=x^4-2x^3+(m-1)x^2+2x-m$.

a) Tính $P(1), P(-1)$;

b) Tìm m để phương trình $P(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

a) $P(1)=1-2+m-1+2-m=0$;

$P(-1)=1+2+m-1-2-m=0.$

b) $P(x)=(x^2-1)(x^2-2x+m)$. Đặt $f(x)=x^2-2x+m$. Điều kiện cần tìm là $f(x)$ có hai nghiệm khác 1 và khác -1, tức là :

$$\begin{cases}\Delta'=1-m>0\\ f(1)=-1+m\neq 0\\ f(-1)=3+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<1\\ m\neq -3.\end{cases}$$

Ví dụ 8. Tìm a để phương trình sau có nghiệm :

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Xem vế trái của (1) là một tam thức theo biến số a :

$$f(a)=a^2-2(x^2-5x-1)a+x^4-10x^3+22x^2+12x.$$

Ta có : $\Delta' = \left(x^2 - 5x - 1\right)^2 - 4x^4 + 10x^3 - 22x^2 - 12x$

$$= x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Do đó, $f(a)$ có hai nghiệm là $a = x^2 - 5x - 1 - (x - 1) = x^2 - 6x$ và $a = x^2 - 5x - 1 + x - 1 = x^2 - 4x - 2$, nên suy ra :

$$f(a) = \left(a - x^2 + 6x\right)\left(a - x^2 + 4x + 2\right).$$

Như vậy : $(1) \Leftrightarrow \left(x^2 - 6x - a\right)\left(x^2 - 4x - a - 2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 6x - a = 0 & (\Delta' = 9 + a) \\ x^2 - 4x - a - 2 = 0 & (\Delta' = 6 + a) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r}(2)\\(3)\end{array}$$

(1) có nghiệm khi : $\left[\begin{array}{l} a + 9 \geq 0 \\ a + 6 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geq -9.$

C. LUYỆN TẬP

5.1 Giải phương trình : $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0.$

5.2 Giải phương trình $x^3 - 3x - 1 = 0$ bằng cách đặt $x = 2\cos t$ với $t \in [0; \pi]$.

5.3 Giải và biện luận phương trình : $x^3 - 3x^2 + (3 - m)x + m - 1 = 0$.

5.4 Cho đa thức $P(x) = x^3 + 2(k - 1)x^2 + (2 - 3k)x - 2(k + 2)$.

a) Tính $P(2)$;

b) Tìm k sao cho phương trình $P(x) = 0$ có nghiệm kép.

5.5 Giả sử phương trình $x^3 - x + m = 0$ có ba nghiệm a, b, c. Tính :

a) $S = a^4 + b^4 + c^4$; b) $T = a^8 + b^8 + c^8$.

5.6 Giải phương trình : $x^4 - 4x - 1 = 0.$

5.7 Cho đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + ax + b = 0.$ Tìm a và b để $P(x)$ có hai nghiệm kép phân biệt.

5.8 Giải phương trình : $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0.$

5.9 Giải phương trình : $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0.$

§ 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Bất phương trình bậc hai là bất phương trình có dạng $f(x) > 0$, hoặc $f(x) \geq 0$, hoặc $f(x) < 0$, hoặc $f(x) \leq 0$. Muốn giải bất phương trình bậc hai, ta xét dấu tam thức $f(x)$, từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình. Nếu hệ số a có thể triệt tiêu, phải xét thêm trường hợp $a = 0$.

1. Giải và biện luận bất phương trình :

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (a \neq 0).$$

Khi $\Delta > 0$, ta kí hiệu : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- $a > 0 \Rightarrow x_1 < x_2$;
- $a < 0 \Rightarrow x_2 < x_1$.

Trong bảng kết quả sau, X là tập nghiệm của bất phương trình cho :

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$
1. $\Delta < 0$		
$a > 0$	$X = \mathbb{R}$	$X = \mathbb{R}$
$a < 0$	$X = \varnothing$	$X = \varnothing$
2. $\Delta = 0$		
$a > 0$	$X = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$X = \mathbb{R}$

$a < 0$	$X = \varnothing$	$X = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
3. $\Delta > 0$		
$a > 0$	$X = (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)$	$X = (-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty)$
$a < 0$	$X = (x_2 ; x_1)$	$X = [x_2 ; x_1]$

Cách giải tương tự cho các bất phương trình : $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$.

2. Bất phương trình bậc hai vô nghiệm

- $ax^2 + bx + c > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0. \end{cases}$$

- $ax^2 + bx + c < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0. \end{cases}$

3. Hệ bất phương trình bậc hai : $\begin{cases} f(x) > 0 & (1) \\ g(x) > 0. & (2) \end{cases}$

(Một trong hai bất phương trình có thể là bậc 1 hoặc bậc 3).

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình (1) và (2). Tập nghiệm của hệ là : $X = X_1 \cap X_2$.

- ***Ghi chú :*** Nếu ta có $X_1 \subset X_2$ thì $X = X_1$.

Điều kiện $X_1 \subset X_2$ có nghĩa là mọi nghiệm của bất phương trình (1) đều thoả mãn bất phương trình (2).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình :

$$(m+1)x^2 - 4x + m - 2 \le 0. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

- $m = -1$: $(1) \Leftrightarrow -4x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{4}$.
- $m \ne -1$: $\Delta' = 4 - (m+1)(m-2) = -(m+2)(m-3)$.

Bang xét dấu Δ' và a :

m	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
a		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Khi $\Delta' > 0$, ta kí hiệu : $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$; $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$.

Gọi X là tập nghiệm của bất phương trình (1). Ta có kết quả sau :

1) $m \le -2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow X \in \mathbb{R}$.

2) $-2 < m < -1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow X = \left(-\infty\, ;\, x_2\right] \cup \left[x_1\, ;\, +\infty\right)$.

3) $m = -1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X = \left[-\dfrac{3}{4}\, ;\, +\infty\right]$.

4) $-1 < m < 3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow X = \left[x_1\, ;\, x_2\right]$.

5) $m = 3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow X = \left\{-\dfrac{2}{m+1}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

6) $m > 3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow X = \varnothing$.

Ví dụ 2. Cho biểu thức $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1$. Xác định m sao cho :

a) Bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm ;

b) Bất phương trình $f(x) \geq 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

a) • $m = 1 : f(x) < 0 \Leftrightarrow -4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{4}$. Vậy $m = 1$ không thoả điều kiện bài toán.

• $m \neq 1 : \Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(2m-1) = -m^2 + 5m$. Ta có :

$f(x) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5m \leq 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5.$$

b) Xác định m sao cho bất phương trình $f(x) \geq 0$ có nghiệm.

Ta giải bài toán : "Xác định m sao cho $f(x) \geq 0$ vô nghiệm".

• $m = 1 : f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{4}$. Vậy $m = 1$ không thích hợp.

• $m \neq 1$: $f(x) \geq 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5m < 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < 0.$$

Tóm lại, điều kiện để $f(x) \geq 0$ vô nghiệm là $m < 0$.

Vậy, điều kiện để $f(x) \geq 0$ có nghiệm là $m \geq 0$.

Ví dụ 3. Cho bất phương trình : $mx^2 - 2(m-4)x + 2 > 0$. (1) Xác định m sao cho (1) được thoả mãn với mọi $x > -1$.

Hướng dẫn giải

Giải X là tập nghiệm của bất phương trình (1). Ta tìm m sao cho :

$$(-1\,;\,+\infty) \subset X. \qquad (*)$$

- $m < 0$: Điều kiện $(*)$ không được thoả mãn.
- $m = 0 : (1) \Leftrightarrow 8x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$. Suy ra : $X = \left(\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right)$,

không thoả mãn điều kiện $(*)$.

- $m > 0$: Đặt $f(x) = mx^2 - 2(m-4)x + 2$. Ta có :

$$\Delta' = (m-4)^2 - 2m = m^2 - 10m + 16 = (m-2)(m-8).$$

m	$-\infty$		2		8		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

1) $2 < m < 8 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow X = \mathbb{R}$: Thoả mãn $(*)$

2) $\left[\begin{array}{l} 0 < m \le 2 \\ m \ge 8 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow X = (-\infty\,;\,x_1) \cup (x_2\,;\,+\infty)$.

Điều kiện $(*)$ được thoả mãn khi và chỉ khi :

$$x_1 \le x_2 \le -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) \ge 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P + S + 1 \ge 0 \\ S + 2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < m \leq 2 \\ m \geq 8 \end{array}\right. \\ \dfrac{3m-6}{m} \geq 0 \\ \dfrac{4m-8}{m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < m \leq 2 \\ m \geq 8 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m \geq 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Tổng hợp các kết quả trên, ta được : $2 \leq m < 8$.

Ví dụ 4. Cho bất phương trình : $mx^2 - 3x + m + 4 < 0$. (1)

a) Tìm m để bất phương trình (1) được thoả mãn với mọi $x > 0$.

b) Tìm m để bất phương trình (1) có nghiệm $x > 0$.

Hướng dẫn giải

a) Gọi X là tập nghiệm cua bất phương trình (1). Ta tìm m để có :

$$(0 ; +\infty) \subset X. \qquad (*)$$

- $m > 0$: Không thích hợp.
- $m = 0 : (1) \Leftrightarrow -3m + 4 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{3}$. Suy ra $X = \left(\dfrac{4}{3} ; +\infty\right)$.

không thoả mãn $(*)$.

- $m < 0 : \Delta = 9 - 4m(m+4) = -(2m-1)(2m+9)$

Xét dấu Δ và a :

m	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
a		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

1) $m < -\dfrac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow X = \mathbb{R}$: Thoả mãn (*)

2) $-\dfrac{9}{2} \leq m < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow X = (-\infty ; x_2) \cup (x_1 ; +\infty)$. Ta có :

$$(*) \Leftrightarrow x_2 \le x_1 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le m \le -4.$$

Tổng hợp các kết quả trên, ta được : $m \le -4$.

b) Ta tìm m sao cho X chứa *ít nhất một số thực dương.* $(**)$

- $m < 0$: Thoả mãn $(**)$
- $m = 0 : X = \left[\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right)$, thoả mãn $(**)$.
- $m > 0$ (xem bảng xét dấu, phần gạch chéo)

1) $m \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow X = \varnothing$, không thoả mãn $(**)$.

2) $0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow X = (x_1\ ;\ x_2)$. Tập này chứa $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2m} > 0$ nên không thoả mãn $(**)$.

Tổng hợp các kết quả, ta được : $m < \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Xác định m để bất phương trình $x^2 - 2x + 1 - m^2 \le 0$ được thoả mãn với mọi x thuộc đoạn $[1 ; 2]$.

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Gọi X là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x + 1 - m^2 \le 0$. Ta xác định m sao cho : $[1 : 2] \subset X$. $(*)$

Phương trình $x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0$ có hai nghiệm là $x = 1 \pm m$.

1) $m \ge 0 \Rightarrow X = [1 - m ; 1 + m]$. Do đó :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \le 1 \\ 1 + m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1.$$

2) $m < 0 \Rightarrow X = [1+m ; 1-m]$. Do đó :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m \le 1 \\ 1-m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$$

Vậy : $m \le -1$ hoặc $m \ge 1$.

Ví dụ 6. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$(A) \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \le 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0. & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Gọi X_1 và X_2 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình (1) và (2).

Ta có : $X_2 = [m ; m+1]$.

Xét bất phương trình (1) : $\Delta' = 1 - 1 + m = m$.

- $m < 0 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow X_1 = \varnothing$. Suy ra hệ (A) vô nghiệm.
- $m \ge 0 \Rightarrow \Delta' \ge 0 \Rightarrow X_1 = [1-\sqrt{m} ; 1+\sqrt{m}]$.

Ta giải bài toán sau : Tìm $m \ge 0$ sao cho hệ bất phương trình (A) vô nghiệm, tức là tìm $m \ge 0$ sao cho $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Với $m \ge 0$, ta có : $1 - \sqrt{m} \le 1 + m$. Do đó :

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing \Leftrightarrow 1 + \sqrt{m} < m \Leftrightarrow \sqrt{m} < m - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m < m^2 - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - 3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Tóm lại, với $m \ge 0$, hệ (A) vô nghiệm khi $m > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Vậy, hệ (A) có nghiệm khi $0 \le m \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 7. Giải hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 4 < 0 & (1) \\ x^3 + 3x^2 - 9x - 10 > 0. & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $X_1 = (-4\ ; -1)$. Ta chứng minh mọi $x \in X_1$ đều thoả bất phương trình (2).

Chia đa thức $x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = 0$ cho đa thức $x^2 + 5x + 4$, ta được : $x^3 + 3x^2 - 9x - 10 = (x^2 + 5x + 4)(x - 2) - 3x - 2$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x - 2) - 3(x + 1) + 1 . (3)$$

Biểu thức ở vế phải của đẳng thức (3) có giá trị dương với mọi $x \in X_1$, tức là bất phương trình (2) được thoả mãn với mọi $x \in X_1$. Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là : $X = [-4\ ; -1]$.

C. LUYỆN TẬP

6.1 Giải và biện luận bất phương trình :

a) $mx^2 - (m+1)x^2 + 1 = 0$; b) $mx^2 - (m-1)x^2 - 1 = 0$.

6.2 Xác định m để bất phương trình sau vô nghiệm :

$$(m+1)x^2 - 3(m+1)x + 2m + 1 \geq 0 .$$

6.3 Xác định m để bất phương trình $mx^2 + (m-4)x + m \geq 0$ được thoả mãn với mọi $x > 0$.

6.4 Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình sau được thoả mãn với mọi giá trị $x \in [0 : 1]$: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m \leq 0$.

(Trích đề thi Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, năm 1998)

6.5 Tìm m để bất phương trình $x^2 - m(m^2 + 1)x + m^4 < 0$ có nghiệm và mọi nghiệm của bất phương trình đó đều thoả mãn bất phương trình $x^2 + 4x + 3 > 0$.

6.6 Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 8 \le 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương Tp. HCM, khối D, năm 1999)

6.7 Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 \\ x^2 + (m+2)x + 2m < 0. \end{cases}$$

(Trích đề thi Học viện quan hệ Quốc tế, năm 1997)

6.8 Tìm các giá trị của m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 8 < 0 \\ m^2x + 1 > (2m-1)x + 3. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Dược Hà Nội, năm 1997)

6.9 Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - 1 \le 0 & (1) \\ (m - x^2)(x + m) < 0. & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội, năm 1997)

6.10 Giải hệ bất phương trình sau theo tham số m :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} < 4 & (1) \\ x^4 + 4x + m^2 - m + 4 > 0. & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

Chương 2.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

§ 7. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ (I)

Đặt : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$; $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$;

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2.$$

1) $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $(x ; y)$ với : $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$.

2) $D = 0$:

- $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$. Hệ (I) vô nghiệm.
- $D_x = D_y = 0$: Hệ (I) có thể vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm (nên thay giá trị cụ thể của tham số vào hệ phương trình (I) rồi kết luận).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1. \end{cases}$ (I)

a) Giải và biện luận hệ (I).

b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất $(x_0 ; y_0)$, tìm các giá trị nguyên của m sao cho x_0 và y_0 là những số nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = (1-m)(1+m)$;

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m & m \\ 2m+1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 2m^2 = 2m(1-m) \ ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3m \\ m & 2m+1 \end{vmatrix} = -3m^2 + 2m + 1 = (1-m)(3m+1)$$

Biện luận :

- $m \neq -1$ và $m \neq 1 \Rightarrow D \neq 0$: Hệ (I) có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{2m}{m+1} \\ y_0 = \dfrac{3m+1}{m+1}. \end{cases}$$

- $m = -1 \Rightarrow D = 0$ và $D_x = -4$: Hệ (I) vô nghiệm.
- $m = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$. Khi đó $m = 1$, ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 3.$$

Do đó, hệ (I) có vô số nghiệm $(x\ ;\ y)$ với :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - x \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 - y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b) Với $m \neq 1$ và $m \neq -1$, ta có : $\begin{cases} x_0 = \dfrac{2m}{m+1} = 2 - \dfrac{2}{m+1} \\ y_0 = \dfrac{3m+1}{m+1} = 3 - \dfrac{2}{m+1}. \end{cases}$

Với m nguyên, x_0 và y_0 nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi :

$$m + 1 \in \{-2,\ -1, 1, 2\} \Leftrightarrow m \in \{-3,\ -2,\ 0, 1\}.$$

Do $m \neq 1$, nên $m = -3$ hoặc $m = -2$ hoặc $m = 0$.

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m+3)y = 2m + 3. \end{cases}$$

a) Với các giá trị nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y)$ thoả mãn điều kiện $x \ge y$?

b) Với các giá trị cua m đã tìm được, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $x + y$.

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1998)

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $D = m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m+4)$;

$D_x = m^3 + 3m^2 - 4m = m(m-1)(m+4)$;

$D_y = m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m+4)$.

Với $m \ne 1$ và $m \ne -4$, hệ có nghiệm duy nhất $(m\ ;\ 1)$. Do đó : $x \ge y \Leftrightarrow m \ge 1$. Đối chiếu với điều kiện có nghiệm duy nhất, ta được $m > 1$.

b) Ta có : $x + y = m + 1\ (m > 1)$. Hàm số $f(m) = m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1 : +\infty)$ và có miền giá trị là $(2 : +\infty)$. Do đó không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1 : +\infty)$. Vậy, với $m > 1$ thì tổng $x + y$ không đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} x(1 - \sin a) + y\cos a = \cos a \\ x\cos a + (1 - \sin a)y = \sin a. \end{cases} \qquad (I).$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $D = (1 - \sin a)^2 - \cos^2 a = 2\sin a(\sin a - 1)$;

$D_x = \cos a(1 - \sin a) - \cos a.\sin a = \cos a(1 - 2\sin a)$;

$D_y = (1 - \sin a)\sin a - \cos^2 a = \sin a - 1$.

Biện luận :

1) $\sin a \neq 0$ và $\sin a \neq 1 \Rightarrow D \neq 0$: Hệ (I) có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos a(1 - 2\sin a)}{2\sin a(\sin a - 1)} \\ y = \dfrac{1}{2\sin a}. \end{cases}$$

2) $\sin a = 0 \Rightarrow D = 0$ và $D_y = -1 (\neq 0)$: Hệ (I) vô nghiệm.

3) $\sin a = 1 \Rightarrow \cos a = 0 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$. Khi đó :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases} \text{: Vô nghiệm.}$$

Tóm lại :

- $a \neq k\pi$ và $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$: Hệ (I) có nghiệm duy nhất :

$$\left(x = \frac{\cos a(1 - 2\sin a)}{2\sin a(\sin a - 1)}\ ;\ y = \frac{1}{2\sin a}\right).$$

- $a = k\pi$ hoặc $a = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$: Hệ (I) vô nghiệm.

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của b sao cho mọi $a \in \mathbb{R}$ thì hệ phương trình $\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1 - a)y = b^2 \end{cases}$ (I) có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Công đoàn, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Ta có : $D = 1 - a - 2a^2 = (1 + a)(1 - 2a)$.

- Nếu $a \neq -1$ và $a \neq \dfrac{1}{2}$ thì hệ (I) có nghiệm với mọi b.

- $a = -1 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = b \\ x - 2y = -b^2. \end{cases}$ Hệ (I) có nghiệm (có vô số nghiệm) khi : $b = -b^2 \Leftrightarrow b^2 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ hoặc $b = -1$.

- $a=\dfrac{1}{2}:(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=b\\x+y=2b^2.\end{cases}$ Hệ (I) có nghiệm (có vô số nghiệm)

khi : $b=2b^2\Leftrightarrow 2b^2-b=0\Leftrightarrow b=0$ hoặc $b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy, với $b=0$ thì hệ (I) có nghiệm với mọi $a\in\mathbb{R}$.

C. LUYỆN TẬP

7.1 Giải và biện luận phương trình : $\begin{cases}(a^2-1)x+(a-1)y=a^3-1\\(a^2+1)x+(a+1)y=a^3+1.\end{cases}$

7.2 a) Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases}6ax+(2-a)y=3\\(a-1)x-ay=2.\end{cases}$

b) Khi hệ có nghiệm $(x\,;y)$, tìm hệ thức giữa x và y độc lập đối với a.

7.3 Cho hệ phương trình : $\begin{cases}ax+y=b\\x+ay=c^2+c.\end{cases}\quad(I)$

a) Giải và biện luận hệ (I) khi $b=0$.

b) Tìm b sao cho với mọi a, luôn tìm được c để hệ (I) có nghiệm.

§ 8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 1

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hệ phương trình đối xứng loại 1 là hệ có dạng :

$$(I)\begin{cases}f(x,y)=0 & (1)\\g(x,y)=0, & (2)\end{cases}$$

trong đó $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là các biểu thức đối xứng theo x và y.

1. Cách giải. Dùng ẩn phụ S và P :

- Đặt : $S = x + y$; $P = xy$.
- Từ (I) suy ra hệ phương trình ẩn S và P :

$$(II)\begin{cases} h(S,P) = 0 & (3) \\ k(S,P) = 0. & (4) \end{cases}$$

- Nếu $(S_0 \,;\, P_0)$ là một nghiệm của hệ (II) thì nghiệm tương ứng $(x \,;\, y)$ của hệ (I) chính là nghiệm của hệ : $(III)\begin{cases} x + y = S_0 \\ xy = P_0. \end{cases}$

Như vậy, x và y là nghiệm của phương trình : $t^2 - S_0 t + P_0 = 0$.$(*)$

2. Điều kiện để hệ (I) có nghiệm $(x \,;\, y)$

Điều kiện cần và đủ để hệ (I) có nghiệm là hệ (II) có nghiệm $(S_0 : P_0)$ sao cho $S_0^2 - 4P_0 \geq 0$.

- Nếu $S_0^2 - 4P > 0$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt :

$$t_1 = \frac{S_0 - \sqrt{S_0^2 - 4P_0}}{2} \;;\; t_2 = \frac{S_0 + \sqrt{S_0^2 - 4P_0}}{2}.$$

Khi đó, hệ (I) có hai nghiệm tương ứng là $(t_1 \,;\, t_2)$ và $(t_2 : t_1)$.

- Nếu $S_0^2 - 4P = 0$ thì hệ (I) có nghiệm tương ứng là $\left(\frac{S_0}{2} : \frac{S_0}{2}\right)$.

3. Chú ý

- Đôi khi phải sử dụng ẩn phụ trước khi tiến hành các bước nêu trên.
- Do tính đối xứng cho nên nếu $(x_0 : y_0)$ là một nghiệm của hệ thì $(y_0 : x_0)$ cũng là một nghiệm của hệ. Do đó, nếu hệ có nghiệm duy nhất thì nghiệm này phải có dạng $(x_0 : y_0)$ (điều kiện cần).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Mỏ - Địa chất, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$(I)\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ (x+y)(x^2+y^2-xy) = 35. \end{cases}$$

- Đặt $x+y=S$, $xy=P$. Từ (I) suy ra :

$$(II)\begin{cases} SP = 30 \\ S(S^2-3P) = 35. \end{cases}$$

- Ta có : $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 - 90 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6. \end{cases}$

- Vậy : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$

Tóm lại, hệ (I) có hai nghiệm phân biệt là $(2\ ;\ 3)$ và $(3\ ;\ 2)$.

Ví dụ 2. a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, hệ phương trình sau luôn có nghiệm : $(I)\begin{cases} x+xy+y = 2m+1 \\ x^2y + xy^2 = m^2+m. \end{cases}$

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

a) • Đặt $x+y=S$, $xy=P$. Từ (I) suy ra :

$$(II)\begin{cases} S + P = 2m + 1 \\ SP = m^2 + m. \end{cases}$$

- S và P là nghiệm của phương trình :

$$u^2 - (2m + 1)u + m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = m \\ u = m + 1. \end{array}\right.$$

Vậy, hệ (II) có hai nghiệm :

$$(S_1 : P_1) = (m : m + 1) \text{ và } (S_2 : P_2) = (m + 1 ; m).$$

- Ta có : $S_2^2 - 4P_2 = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0$. Vậy hệ (I) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì ta phải có $S_2^2 - 4P_2 = 0 \Rightarrow m = 1$.

Đảo lại, với $m = 1$, ta có :

- $\begin{cases} x + y = S_1 = 1 \\ xy = P_1 = 2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

- $\begin{cases} x + y = S_2 = 2 \\ xy = P_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Vậy khi $m = 1$, hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(1 : 1)$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của a để hệ sau có đúng hai nghiệm :

$$(I)\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ (x + y)^2 = 4. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Y - Dược Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

- Đặt $x + y = S$, $xy = P$. Từ (I) suy ra :

$$(II)\begin{cases} S^2 = 4 \\ S^2 - 2P = 2 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 4 \\ P = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S_1 = 2 \\ P = 1 - a \end{cases} \\ \begin{cases} S_2 = -2 \\ P = 1 - a. \end{cases} \end{array}\right.$$

• Ta có : $S_1^2 - 4P = S_2^2 - 4P = 4a$.

Nếu $a > 0$ thì mỗi nghiệm $(S_1 ; P)$ và $(S_2 ; P)$ cho tương ứng hai nghiệm phân biệt của hệ (I), như vậy hệ (I) có 4 nghiệm phân biệt.

Nếu $a = 0$ thì hệ (I) có đúng hai nghiệm là $(1 ; 1)$ và $(-1 ; -1)$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình :

$$(I)\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Điều kiện ban đầu : $x \neq 0,\ y \neq 0$.

• Đặt : $X = x + \dfrac{1}{x}\ (|X| \geq 2)$; $Y = y + \dfrac{1}{y}\ (|Y| \geq 2)$. Từ (I) suy ra :

$$(I')\begin{cases} X + Y = 5 \\ X^2 + Y^2 = 13. \end{cases}$$

• Đặt : $X + Y = S$; $XY = P$. Từ (I') suy ra :

$$(II)\begin{cases} S = 5 \\ S^2 - 2P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6. \end{cases}$$

• Ta lần lượt có : $(I') \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} X = 3 \\ Y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$;

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ y + \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 3 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

• Tóm lại, hệ (I) có 4 nghiệm phân biệt là :

$$\left(1\,;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(1\,;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right),\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,1\right)$$

C. LUYỆN TẬP

8.1 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=6-m^2. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm.

(Trích đề thi Phân viện Báo chí và Tuyên truyền, năm 1998)

8.2 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=2m^2-m-3. \end{cases}$

a) Giải hệ với m = 3

b) Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình trên luôn có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Quy Nhơn, năm 1999)

8.3 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1998)

8.4 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=12$.

b) Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm ?

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, năm 1997)

8.5 Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49.\end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Ngoại thương, khối A, năm 1999)

8.6 Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases}x+y=a\\x^4+y^4=a^4.\end{cases}$

§ 9. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ có dạng : $(I)\begin{cases}f(x,y)=0 & (1)\\f(y,x)=0. & (2)\end{cases}$

1. Nếu $f(x,y)$ là đa thức theo hai biến x và y, ta giải hệ (I) như sau :

- Hệ (I) tương đương với : $\begin{cases}f(x,y)-f(y,x)=0 & (3)\\f(y,x)=0.\end{cases}$

- Nhận xét : Phương trình (3) được thoả mãn với $x=y$, do đó :

$$f(x,y)-f(y,x)=0 \Leftrightarrow (x-y)g(x,y)=0.$$

Như vậy, hệ (I) tương đương với :

$$(II)\begin{cases}x-y=0\\f(x,y)=0\end{cases} \text{ hoặc } (III)\begin{cases}g(x,y)=0\\f(x,y)=0.\end{cases}$$

2. **Chú ý**

Hệ (III) tương đương với (III') $\begin{cases}g(x,y)=0\\f(x,y)+f(y,x)=0.\end{cases}$

Hệ (III') là hệ đối xứng loại 1.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y}. \end{cases}$ (I)

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, khối B, năm 1999)

Hướng dẫn giải

• Với điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$, hệ (I) tương đương với :

$$\begin{cases} 2x^2y + x - 3y = 0 \\ 2y^2x + y - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy(x-y) + 4(x-y) = 0 \\ 2xy(x+y) - 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(xy+2) = 0 \\ (x+y)(xy-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y = 0 \\ (x+y)(xy-1) = 0 \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} xy + 2 = 0 \\ (x+y)(xy-1) = 0 \end{cases} & (III) \end{array}\right.$$

• Giải hệ (II) :

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x(x^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

• Giải hệ (III) : $(III) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$

• Vậy hệ (I) có nghiệm là :

$$(1 ; 1),\ (-1 ; -1),\ (\sqrt{2} ; -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2} ; \sqrt{2}).$$

Ví dụ 2. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my. \end{cases} \qquad (I)$$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 6\left(x^2 - y^2\right) - m\left(x - y\right) \\ x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - y\right)\left[x^2 + y^2 + xy - 6\left(x + y\right) + m\right] = 0 \\ x^3 - 7x^2 - y^2 + mx = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^3 - 7x^2 - y^2 + mx = 0 \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 6\left(x + y\right) + m = 0 \\ x^3 - 7x^2 - y^2 + mx = 0. \end{cases} & (III) \end{array}\right.$$

• Giải (II) : $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x\left(x^2 - 8x + m\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 8x + m = 0. \end{array}\right. \end{cases}$

Hệ (II) đã có một nghiệm là $(0 ; 0)$. Do đó, hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hội đủ hai điều kiện sau :

1) Hệ (II) có nghiệm duy nhất $(0 ; 0)$;

2) Hệ (III) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất $(0 ; 0)$.

• 1) Hệ (II) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 8x + m = 0$ vô nghiệm, tức là $m < 16$.

2) Với $m > 16$, xét phương trình thứ nhất của hệ (III) :

$$x^2 + y^2 + xy - 6\left(x + y\right) + m = 0. \qquad (1)$$

Xem (1) là phương trình bậc hai theo y, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow y^2 + (x - 6)y + x^2 - 6x + m = 0.$$

$$\Delta = (x - 6)^2 - 4\left(x^2 - 6x + m\right) = -3x^2 + 12x + 36 - 4m$$

$$= -3\left(x^2 - 4x + 4\right) + 48 - 4m$$

$$= -3(x - 2)^2 - 4(m - 12) < 0 \text{ (vì } m > 16\text{)}.$$

Do đó, (1) vô nghiệm, suy ra hệ (III) vô nghiệm khi $m > 16$.

• Vậy, hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(0\,;\,0)$ khi $m > 16$.

Ví dụ 3. Cho phương trình : $x + 3(m - 3x^2)^2 = m$. (1)
Với giá trị nào của m thì phương trình trên có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Thái Nguyên, năm 1998)

Hướng dẫn giải

• Đặt $t = m - 3x^2$. Từ (1) suy ra $x + 3t^2 = m$. Ta được hệ :

$$(I)\begin{cases} 3x^2 + t = m \\ 3t^2 + x = m. \end{cases}$$

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (1). Đặt $t_0 = m - 3x_0^2$ thì $(x_0\,;\,t_0)$ là nghiệm của hệ (I). Đảo lại, nếu hệ (I) có nghiệm $(x_0\,;\,t_0)$ thì x_0 là nghiệm của (1). Do đó phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (I) có nghiệm. Ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2 - t^2) - (x - t) = 0 \\ 3(x^2 + t^2) + (x + t) = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - t)[3(x + t) - 1] = 0 \\ 3(x^2 + t^2) + x + t - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - t = 0 \\ 3(x^2 + t^2) + x + t - 2m = 0 \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} 3(x + t) - 1 = 0 \\ 3(x^2 + t^2) + x + t - 2m = 0 \end{cases} & (III) \end{array}\right.$$

• Giải (II) : $\qquad (II) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ 3x^2 + x - m = 0. \end{cases}$

Hệ (II) có nghiệm khi $\Delta = 1 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{12}$.

• Giải (III) : Đặt $S = x + t\,;\; P = xt$, ta được :

$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{3} \\ 3(S^2 - 2P) + S - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \dfrac{1}{3} \\ P = \dfrac{1}{9} - \dfrac{m}{3}. \end{cases}$$

Hệ (III) có nghiệm khi :

$$S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{4m}{3} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

• Tổng hợp kết quả trên, ta được : $m \geq -\frac{1}{12}$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất :

$$(I)\begin{cases} xy + x^2 = m(y-1) \\ xy + y^2 = m(x-1). \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1997)

Hướng dẫn giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+m) = 0 \\ (x+y)^2 = m(x+y) - 2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - mx + m = 0 \end{cases} \quad (II) \\ \begin{cases} x + y = -m \\ (x+y)^2 = m(x+y) - 2m. \end{cases} \quad (III) \end{array}\right.$$

Nhận xét hệ (III) : $(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -m \\ m(x+y) = m^2 + 2m. \end{cases}$

Do đó, hệ (III) vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm (khi $m = 0$ hoặc $m = -1$). Vậy, hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ (II) có nghiệm duy nhất và hệ (III) vô nghiệm.

• Hệ (II) có nghiệm duy nhất khi : $\Delta = m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8. \end{array}\right.$

Với $m = 0$, hệ (III) có vô số nghiệm $(x\ ;\ y)$ với $x + y = 0$.

Với $m = 8$, ta có : $(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -8 \\ x + y = -6 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất khi $m = 8$.

C. LUYỆN TẬP

9.1 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1998)

9.2 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - 3y = 4 \cdot \dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4 \cdot \dfrac{x}{y}. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1997)

9.3 Hãy xác định a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1996)

§ 10. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đa thức đẳng cấp bậc n

• Đa thức hai biến x và y có dạng :

$$P(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_1 xy^{n-1} + a_0 y^n,$$

trong đó n là số nguyên dương và các hệ số a_i không đồng thời bằng 0 được gọi là đa thức đẳng cấp bậc n.

• Mọi hằng số được coi như một đa thức đẳng cấp bậc 0.

2. Hệ phương trình đẳng cấp

Hệ phương trình đẳng cấp là hệ có dạng : $(I)\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y). \end{cases}$

trong đó $f_1(x,y)$ và $f_2(x,y)$ là hai đa thức đẳng cấp cùng bậc, $g_1(x,y)$ và $g_2(x,y)$ cũng là hai đa thức đẳng cấp cùng bậc.

3. Cách giải

- Giải hệ (I) với $x = 0$ (hoặc với $y = 0$).
- Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$ (hoặc $x = ty$ với $y \neq 0$). Từ hệ (I) suy ra hệ phương trình theo x và t : $(II)\begin{cases} F(x,t) = 0 & (1) \\ G(x,t) = 0. & (2) \end{cases}$
- Khử x giữa (1) và (2), ta được phương trình : $\varphi(t) = 0$. (3)
- Giải (3) để tính t, từ đó suy ra x và y.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Nhận xét : $x = 0$ không thoả mãn hệ (I).

Với $x \neq 0$, đặt $y = tx$. Từ hệ (I) suy ra : $(II)\begin{cases} x^3\left(1 - t^3\right) = 7 & (1) \\ x^3 t(1 - t) = 2. & (2) \end{cases}$

Do $x = y$ không thoả mãn hệ (I) nên $t \neq 1$. Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{t(1 - t)}{1 - t^3} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1/2. \end{array}\right.$$

Thay các giá trị vừa tìm vào phương trình (1), ta được :

- $t = 2 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$.
- $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Vậy hệ (I) có nghiệm là $(-1\ ;-2)$ và $(2\ ;\ 1)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases}2y(x^2-y^2)=3x\\x(x^2+y^2)=10.\end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Mỏ - Địa chất, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Nhận xét $(0\ ;\ 0)$ là một nghiệm của hệ (I). Ta tìm nghiệm $(x\ ;\ y)$ của hệ (I) với $x\neq 0$ và $y\neq 0$. Đặt $y=tx\Rightarrow t\neq 0$. Từ hệ (I), suy ra :

$$(II)\begin{cases}2x^3(t-t^3)=3x\\x^3(1+t^2)=10tx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2(t-t^3)=3 & (1)\\x^2(1+t^2)=10t & (2)\end{cases}\ (\text{do } x\neq 0).$$

Từ phương trình (2) suy ra $t>0$. Khử x^2, ta được :

$$\frac{2(t-t^3)}{1+t^2}=\frac{3}{10t}\Leftrightarrow 20t^4-17t^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2=\dfrac{1}{4}\\t^2=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\t=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\quad (do\ \ t>0).\end{array}\right.$$

- $t=\dfrac{1}{2}:(2)\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow y=\pm 1.$
- $t=\sqrt{\dfrac{3}{5}}:(2)\Rightarrow x^2=\dfrac{25}{4}\sqrt{\dfrac{3}{5}}\Rightarrow x=\pm\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}\Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}.$

Tóm lại, hệ (I) có nghiệm là :

$$(0\ ;\ 0),\ (2\ ;\ 1),\ (-2\ ;-1),\ \left(\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\ ;\ \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right),\ \left(-\frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\ ;\ -\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right).$$

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình : $\begin{cases}3x^2+2xy+y^2=11\\x^2+2xy+3y^2=17+m\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=0$.

b) Với những giá trị nào của m thì hệ có nghiệm ?

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

a) $$(I)\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=17 \end{cases}$$

$x=0$ không thoả mãn hệ (I). Đặt : $y=tx$, ta được :

$$(II)\begin{cases} x^2\left(3+2t+t^2\right)=11 & (1) \\ x^2\left(1+2t+3t^2\right)=17. & (2) \end{cases}$$

Do đó : $\dfrac{1+2t+3t^2}{3+2t+t^2}=\dfrac{17}{11} \Leftrightarrow 4t^2-3t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$

- $t=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 2$.
- $t=-\dfrac{5}{4} \Rightarrow x^2=\dfrac{16}{3} \Rightarrow x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\pm\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Vậy hệ (I) có nghiệm là :

$$(1\ ;2),\ (-1\ ;\ -2),\ \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\ ;\ -\frac{5}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

b) $$(I)\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=17+m. \end{cases}$$

Nhận xét : Với $x=0$, hệ có nghiệm $\left(0\ ;\ \pm\sqrt{11}\right)$ khi $m=16$.

Xét $m\neq 16$, khi đó cặp số $(0\ ;\ y)$ không là nghiệm của hệ (I). Đặt

$y=tx$, ta được : $(II)\begin{cases} x^2\left(3+2t+t^2\right)=11 & (1) \\ x^2\left(1+2t+3t^2\right)=17+m & (2). \end{cases}$

Suy ra : $$\frac{1+2t+3t^2}{3+2t+t^2}=\frac{17+m}{11}$$

$$\Leftrightarrow (m-16)t^2+2(m+6)t+3m+40=0 \qquad (3)$$

Nếu phương trình (3) có nghiệm t thì phương trình (1) có nghiệm x vì $3 + 2t + t^2 > 0$, từ đó tính được y ($y = tx$).

Tóm lại với $m \neq 16$ thì hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm.

Xét phương trình (3). Ta có :

$\Delta' = (m + 6)^2 - (m - 16)(3m + 40) = 2(m^2 - 10m - 338)$.

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m - 338 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 11\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 11\sqrt{3}$.

Các giá trị trên của m bao hàm giá trị $m = 16$.

Vậy điều kiện cần tìm là : $5 - 11\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 11\sqrt{3}$.

C. LUYỆN TẬP

10.1 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$

10.2 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = a \\ y^2 - 3xy = 4. \end{cases}$

a) Giải hệ khi $a = 4$;

b) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi a.

§ 11. CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cách giải : Một cách tổng quát, ta dùng phép biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho về hệ đơn giản hơn. Thường gặp các trường hợp sau :

- Nếu biểu thị được một ẩn theo các ẩn còn lại, ta dùng phép thế.
- Nếu biến đổi được một phương trình của hệ thành phương trình tích số, ta phân tích hệ đã cho thành nhiều hệ đơn giản.
- Nếu phát hiện trong hệ có những biểu thức đồng dạng, ta có thể dùng ẩn phụ.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình :

$$(I)\begin{cases} x + y = m & (1) \\ (x+1)y^2 + xy = m(y+2) & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ (I) khi $m = 4$.

b) Tìm các giá trị của m để hệ (I) có nhiều hơn hai nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1997)

Hướng dẫn giải

Thay $x = m - y$ vào phương trình (2), ta được :

$$(m - y + 1)y^2 + (m - y)y = my + 2m$$

$$\Leftrightarrow my^2 - y^3 + y^2 + my - y^2 = my + 2m$$

$$\Leftrightarrow y^3 - my^2 + 2m = 0. \qquad (3)$$

a) Khi $m = 4$, ta có : $(I)\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ y^3 - 4y^2 + 8 = 0. & (3) \end{cases}$

Giải (3), ta được $y = 2$, $y = 1 \pm \sqrt{5}$. Từ (1), suy ra các giá trị tương ứng của x là : $x = 2$, $x = 3 \pm \sqrt{5}$.

Vậy, khi $m = 4$, hệ (I) có nghiệm là :

$$(2\ ;2),\ (3-\sqrt{5}\ ;1+\sqrt{5}),\ (3+\sqrt{5}\ ;\ 1-\sqrt{5}).$$

b) Trong trường hợp tổng quát, ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m & (1) \\ y^3 - my^2 + 2m = 0. & (3) \end{cases}$$

Phương trình (3) có nhiều nhất ba nghiệm phân biệt. Do đó, hệ (I) có nhiều hơn hai nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt. Để biện luận số nghiệm của phương trình (3), ta dùng phương pháp đồ thị.

Xét hàm số : $f(y) = y^3 - my^2 + 2m$. Ta có :

$$f'(y) = 3y^2 - 2my = y(3y - 2m)\ ;$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{2m}{3}. \end{array}\right.$$

Lại có : $f(0) = 2m\ ;\ f\left(\dfrac{2m}{3}\right) = \dfrac{2}{27}m(27 - m^2)$.

Điều kiện cần và đủ để phương trình (3) có ba nghiệm phân biệt là :

$$f(0).f\left(\frac{2m}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow m^2(27 - m^2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{3\sqrt{6}}{2} \\ m > \dfrac{3\sqrt{6}}{2}. \end{array}\right.$$

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a & (1) \\ x^2 + y^2 + bxy = 3. & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ (1) khi $a = b = 1$;

b) Xác định tất cả các giá trị của a và b để hệ (I) có nhiều hơn bốn nghiệm phân biệt.

(Trích đề thi Học viện KTQS, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Nhận xét : Phương trình (1) tương đương với :

$$(x+y)(x - y + a) = x - y + a \Leftrightarrow (x - y + a)(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y + a = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{array}\right.$$

a) Khi $a = b = 1$, ta có : $(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases} & (III) \end{array}\right.$

• Giải hệ (II) : Thay $y = x + 1$ vào phương trình còn lại, ta được :

$$x^2 + (x+1)^2 + x(x+1) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}.$$

Suy ra : $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{6}$.

• Giải (III), ta được hai nghiệm $(2\,;-1)$ và $(-1\,;\,2)$.

Tóm lại, hệ (I) có 4 nghiệm phân biệt là :

$(2\,;-1), (-1\,;\,2), \left(\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}\,;\,\dfrac{3+\sqrt{33}}{6}\right), \left(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}\,;\,\dfrac{3-\sqrt{33}}{6}\right)$.

b) Trong trường hợp tổng quát, ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} y = x + a \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases} & (III) \end{array}\right.$$

• Giải hệ (II) : Đặt $S = x + y$, $P = xy$, ta được : $\begin{cases} S = 1 \\ (b-2)P = 2. \end{cases}$

Ta tìm được nhiều nhất một nghiệm $(S\,;\,P)$, do đó hệ (II) có nhiều nhất hai nghiệm phân biệt.

• Giải hệ (III) : Thay $y = x + a$ vào phương trình còn lại, ta được :

$$x^2 + (x+a)^2 + bx(x+a) = 3$$

$$\Leftrightarrow (b+2)x^2 + a(b+2)x + a^2 - 3 = 0 \quad (3)$$

1) Nếu $b + 2 \neq 0$, phương trình (3) có nhiều nhất hai nghiệm phân biệt, do đó hệ (III) có nhiều nhất hai nghiệm phân biệt. Vậy $b \neq -2$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

2) Nếu $b = -2$ và $a^2 = 3$ thì phương trình (3) được thoả mãn với mọi x, do đó hệ (III) có vô số nghiệm số.

Tóm lại, yêu cầu bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi $b = -2$ và $a = \pm\sqrt{3}$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33. & (2) \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Nhận xét : $(2) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 38$.

Đặt $u = x - 1$, $v = y - 2$. Từ (I) suy ra : $(II)\begin{cases} uv - (u + v) = 21 \\ u^2 + v^2 = 38. \end{cases}$

Đặt $S = u + v$, $P = uv$, ta được :

$$(III)\begin{cases} P - S = 21 \\ S^2 - 2P = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 21 \\ S^2 - 2S - 80 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -8 \\ P = 13. \end{cases} \end{array}\right.$$

- $S = 10$ và $P = 31$ không thoả mãn điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ (loại).
- Với $S = -8$ và $P = 13$, ta được :

$$\begin{cases} u + v = -8 \\ uv = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -4 + \sqrt{3} \\ v = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u = -4 - \sqrt{3} \\ v = -4 + \sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 + \sqrt{3} \\ y = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

C. LUYỆN TẬP

11.1 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + 3x^2y + y^2 = 5 \\ 2x^2 + y = 3. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Hồng Đức, năm 1999)

11.2 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x+y)\left(2-\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{9}{2} \\ (x-y)\left(2+\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Dân lập Hải Phòng, năm 1998)

11.3 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội, năm 1999)

11.4 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0 \\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Xây dựng, năm 1997)

11.5 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=3. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Thuỷ sản, năm 1998)

Chương 3.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

§ 12. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giá trị tuyệt đối. Ta nhắc lại định nghĩa và các tính chất cơ bản của giá trị tuyệt đối của số thực a, kí hiệu $|a|$.

a) Định nghĩa : $$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a > 0 \\ 0 & \text{nếu } a = 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

b) Hệ quả : Với mọi số thực a, ta có :

1) $|a| \geq 0$; 2) $|-a| = |a|$;

3) $|a|^2 = a^2$; 4) $-|a| \leq a \leq |a|$;

5) $a = |a| \Leftrightarrow a \geq 0$; 6) $a = -|a| \Leftrightarrow a \leq 0$.

c) Tính chất :

1) $|ab| = |a|.|b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

2) $|a+b| \leq |a| + |b|$. Đẳng thức xảy ra khi $ab \geq 0$.

3) $|a-b| \leq |a| + |b|$. Đẳng thức xảy ra khi $ab \leq 0$.

4) Nếu $a > 0$ thì ta có : $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

2. Phương trình chứa giá trị tuyệt đối :

a) Dạng cơ bản

- $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

- $|A| = B$. Có hai cách giải :

i) $|A| = B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases} \end{array}\right.$; ii) $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B. \end{array}\right. \end{cases}$

b) Các dạng khác. Thường giải bằng các phương pháp sau :

- *Phương pháp khoảng.* Ta thường dùng phương pháp sau đây được gọi là phương pháp khoảng : Khử dấu trị tuyệt đối bằng cách xét dấu biểu thức bên trong dấu trị tuyệt đối. Như vậy ta chia tập xác định của phương trình thành nhiều khoảng, trên mỗi khoảng ta giải phương trình không chứa giá trị tuyệt đối.

- *Phương pháp đồ thị.* Nếu phương trình đã ho có dạng $f(x) = m$ (1) thì có thể dùng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình (1). Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và d là đường thẳng có phương trình $y = m$. Số nghiệm của phương trình (1) là số điểm chung của d và (C).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải phương trình : $\dfrac{3}{|x-4|-1} = |x+3|$. (1)

(Trích đề thi Đại học Thuỷ sản, năm 1998)

Hướng dẫn giải

- Điều kiện : $|x-4| \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 5. \end{cases}$

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow |x+3|(|x-4|-1) = 3$. (2)

- Lập bang xét dấu $(x+3)$ và $(x-4)$:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-4$		·		$-$	0	$+$	

1) $x < -3$: $(2) \Leftrightarrow -(x+3)(-x+4-1) = 3 \Leftrightarrow x^2 = 12$

$\Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$ (nghiệm $x = 2\sqrt{3}$ không thích hợp).

2) $-3 \le x < 4$ và $x \ne 3$:

$(2) \Leftrightarrow (x+3)(-x+4-1) = 3 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}.$

3) $x \ge 4$ và $x \ne 5$:

$(2) \Leftrightarrow (x+3)(x-4-1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 18 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{19}$ ($x = 1 - \sqrt{19}$ không thích hợp).

* Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là :

$$X = \left\{-2\sqrt{3},\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ 1+\sqrt{19}\right\}.$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình :

$$3|x| + mx - 2m + 1 = 0. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

- $$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ (m+3)x = 2m-1 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} x < 0 \\ (m-3)x = 2m-1 \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

- Giải hệ (I) với $m \ne -3$, ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \dfrac{2m-1}{m+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m \ge \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x = \dfrac{2m-1}{m+3} = x_1 \end{cases}$$

- Giải hệ (II) với $m \ne 3$, ta có :

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \dfrac{2m-1}{m-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < m < 3 \\ x = \dfrac{2m-1}{m-3} = x_2. \end{cases}$$

Kết luận về tập nghiệm X của phương trình (1) :

- $-3 \leq m \leq \frac{1}{2}$: $X = \varnothing$.

- $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m = \frac{1}{2} \\ m \geq 3 \end{array}\right.$: $X = \left\{\frac{2m-1}{m+3}\right\}$.

- $\frac{1}{2} < m < 3$: $X = \left\{\frac{2m-1}{m+3}, \frac{2m-1}{m-3}\right\}$.

Ví dụ 3. Tìm m sao cho phương trình $\left|-2x^2 + 10x - 8\right| = x^2 - 5x + m \, (1)$ có 4 nghiệm phân biệt.

(Trích đề thi Đại học Thái Nguyên, năm 1999)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow 2\left|x^2 - 5x + 4\right| = x^2 - 5x + 4 + m - 4.$$

Đặt $t = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow t \geq -\frac{9}{4}$. Từ (1) suy ra :

$$2|t| = t + m - 4. \qquad (2)$$

Nhận xét : Ứng với mỗi nghiệm $t > -\frac{9}{4}$ của phương trình (2), ta được hai nghiệm phân biệt của phương trình (1) (thông qua $x^2 - 5x + 4 = t$). Do đó, điều kiện cần tìm là phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $-\frac{9}{4}$.

1) $t \geq 0$: $(2) \Leftrightarrow t = m - 4$, thích hợp nên $m \geq 4$.

2) $-\frac{9}{4} < t < 0$: $(2) \Leftrightarrow t = \frac{4-m}{3}$, thích hợp nếu :

$$-\frac{9}{4} < \frac{4-m}{3} < 0 \Leftrightarrow 4 < m < \frac{43}{4}.$$

Vậy yêu cầu bài toán được thoả mãn khi $4 < m < \frac{43}{4}$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$x|x-2| = m. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Cách 1. $$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x - m = 0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x < 2 \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

Nhận xét : Các tập nghiệm của hệ (I) và hệ (II) là hai tập hợp không giao nhau. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi trong hai hệ trên có một hệ vô nghiệm, hệ kia có nghiệm duy nhất.

1) Hệ (I) vô nghiệm và hệ (II) có nghiệm duy nhất.

Đặt $f(x) = x^2 - 2x - m$, nghiệm của $f(x)$, nếu có, kí hiệu là x_1, x_2 :

$g(x) = x^2 - 2x + m$, nghiệm của $g(x)$, nếu có, kí hiệu là x_3, x_4.

- Hệ (I) vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x)$ vô nghiệm hoặc $f(x)$ có nghiệm $x_1 \leq x_2 < 2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l} \Delta'_f < 0 \\ \begin{cases} \Delta'_f \geq 0 \\ (x_1 - 2) < 0 \\ (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_f < 0 \\ \begin{cases} \Delta'_f \geq 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_f < 0 \\ \begin{cases} \Delta'_f \geq 0 \\ x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + m > 0 \\ \begin{cases} 1 + m \geq 0 \\ -m > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ -1 \leq m < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m < 0.$$

• Khi $m < 0$, ta có $g(2) = m < 0 \Rightarrow x_3 < 2 < x_4$. Suy ra hệ (II) có nghiệm duy nhất $x = x_3$.

Vậy $m < 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

2) Hệ (II) vô nghiệm và hệ (I) có nghiệm duy nhất.

• Hệ (II) vô nghiệm khi và chỉ khi $g(x)$ vô nghiệm hoặc $g(x)$ có nghiệm $2 \leq x_3 \leq x_4$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

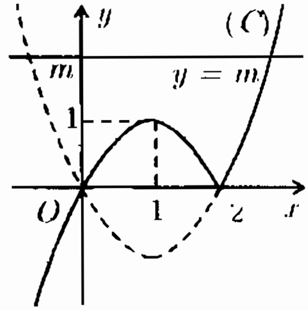
$$\left[\begin{array}{l} \Delta'_g < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta'_g \geq 0 \\ (x_3 - m) \geq 0 \\ (x_4 - m) \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_g < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta'_g \geq 0 \\ (x_3 - m)(x_4 - m) \geq 0 \\ (x_3 - m) + (x_4 - m) \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_g < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta'_g \geq 0 \\ x_3 x_4 - m(x_3 + x_4) + m^2 \geq 0 \\ (x_3 + x_4) - 2m \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$$

• Khi $m > 1$, ta có $f(2) = -m < 0 \Rightarrow x_1 < 2 < x_2$. Suy ra hệ (I) có nghiệm duy nhất $x = x_2$.

Vậy $m < 1$ thoả mãn yêu cầu bài toán.



Tóm lại : Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi $m < 0$ hoặc $m > 1$.

Cách 2. Xét hàm số : $f(x) = x|x - 2|$.

Ta có : $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{khi } x < 2. \end{array}\right.$

Đồ thị (C) của hàm số là đường vẽ nét liền ở hình trên. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại một điểm duy nhất. Điều này xảy ra khi $m < 0$ hoặc $m > 1$.

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$|x^2 - 3x + m| = x^2 - 2x + m - 1. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow |x^2 - 3x + m| = (x^3 - 3x + m) + (x - 1)$.

Phương trình (1) có dạng $|A| = A + B$. Ta có :

$$|A| = A + B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} A \geq 0 \\ B = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ B = -2A \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} A \geq 0 \\ B = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B > 0 \\ B = -2A \end{cases}\end{array}\right.$$

Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x = 1 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 5x + 2m - 1 = 0. \end{cases} & (II)\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán được thoả mãn khi hệ (I) có nghiệm $x = 1$ và hệ (II) có hai nghiệm phân biệt.

- Hệ (I) có nghiệm $x = 1$ khi $m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

- Đặt : $f(x) = 2x^2 - 5x + 2m - 1$. Ta có : $\Delta = 33 - 16m$.

Hệ (II) có hai nghiệm phân biệt khi $x_1 > x_2 > 1$, tức là khi :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 < m < \dfrac{33}{16}. \\ (x_1 + x_2) - 2 > 0 \end{cases}$$

Vậy, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi : $2 < m < \dfrac{33}{6}$.

C. LUYỆN TẬP

12.1 Giải phương trình : $|x^2 - x| + |2x - 4| = 3.$

(Trích đề thi Cao đẳng Hải quan, năm 1999)

12.2 Giải phương trình : $2|x^2 + 6x + 8| + |x^2 - 1| = 30.$

(Trích đề thi Đại học Lâm nghiệp, năm 1999)

12.3 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $|x|(x^2 - 3) = m.$ (1)

(Trích đề thi Mĩ thuật Công nghiệp, năm 1998)

12.4 Tìm m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$|x^2 - 4mx + m^2 + 2m| = x^2 - 2x + m^2.$$

12.5 Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$|x^2 - 3x + 2| = m - x - x^2.$$

12.6 Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt :

$$x^2 - x = 3|x - 1| + m.$$

§ 13. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cách giải thông thường

Ta dùng *phương pháp khoảng*, hoặc áp dụng các kết quả sau :

- $|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2$;
- $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$;
- $|A| > B \Leftrightarrow A < -B$ hoặc $A > B$.

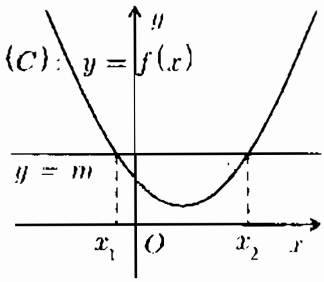
2. Phương pháp đồ thị

a) Nếu bất phương trình đã cho có dạng $f(x) < m$ hoặc $f(x) > m$ thì có thể dùng phương pháp đồ thị để xác định tập nghiệm các bất phương trình trên.

Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và d là đường thẳng có phương trình $y = m$.

- Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < m$ là tập hợp các số thực x_0 với x_0 là hoành độ của điểm thuộc đồ thị (C) và nằm dưới đường thẳng d.

- Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > m$ là tập hợp các số thực x_0 với x_0 là hoành độ của điểm thuộc đồ thị (C) và nằm trên đường thẳng d.



Chẳng hạn, với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ trong hình vẽ bên, thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < m$ là $X = (x_1 ; x_2)$.

Chú ý

a) Có thể thay đồ thị (C) bằng *bảng biến thiên* của hàm số $y = f(x)$.

b) Cũng có thể dùng phương pháp đồ thị để giải các bất phương trình $f(x) < g(x)$ (1) hoặc $f(x) > g(x)$ (2).

Gọi (C_1) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. (C_2) là đồ thị của hàm số $y = g(x)$.

- Tập nghiệm của bất phương trình (1) (hoặc (2)) là tập hợp các số thực x_0 với x_0 là hoành độ của điểm thuộc (C_1) và nằm dưới (hoặc nằm trên) (C_2).

- Để xác định tập nghiệm, còn phải tính hoành độ giao điểm (nếu có) của (C_1) và (C_2).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải bất phương trình : $3x^2 - |x - 3| > 9x - 2$. (1)

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x^2 - 10x + 5 > 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} x < 3 \\ 3x^2 - 8x - 1 > 0. \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$

• $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{5 - \sqrt{10}}{3} \\ x > \dfrac{5 + \sqrt{10}}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

• $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{4 - \sqrt{19}}{3} \\ x > \dfrac{4 + \sqrt{19}}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{4 - \sqrt{19}}{3} \\ \dfrac{4 + \sqrt{19}}{3} < x < 3. \end{array}\right.$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{4 - \sqrt{19}}{3} \\ x > \dfrac{4 + \sqrt{19}}{3}. \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình : $|x^2 - 2x - 3| \leq 3x - 3.$ (1)

(Trích đề thi Đại học Văn hoá Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Áp dụng kết quả $|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B$, ta được :

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 3x - 3 \\ x^2 - 2x - 3 \geq -3x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ x^2 + x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình :

$|x^2 - mx + m + 1| < x^2 - mx.$ (1)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx + m + 1 < x^2 - mx \\ x^2 - mx + m + 1 > -x^2 + mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x > m + 1 & (2) \\ 2x^2 - 2mx + m + 1 > 0. & (3) \end{cases}$$

Gọi X_2 và X_3 lần lượt là tập nghiệm của (2) và (3).

Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $X = X_2 \cap X_3$.

Nhận xét : • $m \geq -1 \Rightarrow X_2 = \varnothing \Rightarrow X = \varnothing$;

• $m < -1 \Rightarrow X_2 = \mathbb{R} \Rightarrow X = X_3$.

Giải (3) với $m < -1$: $\Delta' = m^2 - 2(m+1) > 0$ (do $m + 1 < 0$). Do đó $X_3 = (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)$, với :

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 2m - 2}}{2} \ ; \ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 2m - 2}}{2}.$$

Kết luận : • $m \geq -1 : X = \varnothing$;

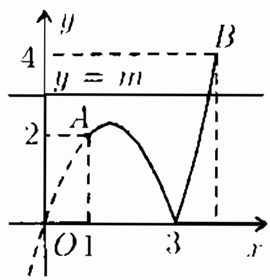
• $m < -1 : X = (-\infty ; x_1) \cup (x_2 ; +\infty)$.

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của m sao cho bất phương trình $x|x-3| < m$ (1) được thoả mãn với mọi x thuộc đoạn $[1 ; 4]$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số :

$$f(x) = x|x-3| = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{nếu } x \geq 3 \\ -x^2 + 3x & \text{nếu } x < 3. \end{cases}$$



Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, $A(1 ; 2)$ và $B(4 ; 4)$ là hai điểm thuộc (C).

"Mọi $x \in [1 ; 4]$ đều là nghiệm của bất phương trình $f(x) < m$" có nghĩa là : "Mọi điểm thuộc cung AB đều nằm dưới đường thẳng $y = m$". Điều này xảy ra khi và chỉ khi điểm B nằm dưới đường thẳng $y = m$, tức là $m > 4$.

C. LUYỆN TẬP

13.1 Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau được thoả mãn với mọi số thực x : $|x^2 - 2x - 2m| \geq |x^2 + mx|$.

13.2 Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau được thoả mãn với mọi số thực x : $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0$.

13.3 Cho bất phương trình : $mx^2 - |3x + 2| + m < 2$. (1)

Tìm các giá trị của m sao cho :

a) Bất phương trình (1) có nghiệm

b) Bất phương trình (1) được thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

13.4 Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{|x - m| + x}{x + 2} < 2$.

§ 14. HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Hệ bất phương trình một ẩn chứa giá trị tuyệt đối.** Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy phần giao.

2. **Hệ phương trình, hệ bất phương trình nhiều ẩn chứa giá trị tuyệt đối.** Tìm cách biến đổi đưa hệ đã cho về những hệ đơn giản hơn.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$(I)\begin{cases} x^2 - 2mx \le 0 & (1) \\ |x - 1 + m| \le 2m. & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Thuỷ lợi, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Gọi X_1, X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2).

Nhận xét : • $m < 0 \Rightarrow X_2 = \varnothing \Rightarrow (I)$ vô nghiệm.

• $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \{0\} \\ X_2 = \{1\} \end{cases} \Rightarrow (I)$ vô nghiệm.

• Giải hệ (I) với $m > 0$. Ta được : $X_1 = [0 ; 2m]$.

Ta có : $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + m \le 2m \\ x - 1 + m \ge -2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 + m \\ x \ge 1 - 3m. \end{cases}$

Do đó : $X_2 = [1 - 3m ; 1 + m]$.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi : $2m = 1 - 3m \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 & (1) \\ x^3 - 3x|x| - m^2 - 15m \ge 0. & (2) \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Thương mại, năm 1998)

Hướng dẫn giải

• Ta có : $(1) \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$. Do đó, điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm là bất phương trình (2) có ít nhất một nghiệm $x \in [-1 ; 4]$.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x|x|$, $k = m^2 + 15m$. Ta có:

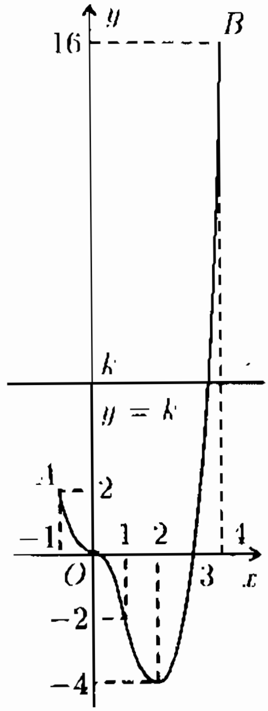
$$(2) \Leftrightarrow f(x) \geq k.$$

Ta tìm k sao cho bất phương trình $f(x) \geq k$ có ít nhất một nghiệm $x \in [-1 ; 4]$.

• Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x|x|$, $x \in [-1 ; 4]$. Ta có :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & \text{nếu } 0 \leq x \leq 4 \\ x^3 + 3x^2 & \text{nếu } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số là một cung AB với $A(-1 ; 2)$ và $B(4 ; 16)$.



• Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $f(x) \geq k$ có ít nhất một nghiệm $x \in [-1 ; 4]$ là : Cung AB có ít nhất một điểm nằm trên hoặc thuộc đường thẳng $y = k$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$k \leq y_B \Leftrightarrow m^2 + 15m \leq 16$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 15m - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -16 \leq m \leq 1.$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 + |y| = 1. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

1) $y \geq 0 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Rightarrow |x^2 - 2x| = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \; ; \; x = 1 \Rightarrow y = 0.$$

Ta được hai nghiệm $(0 ; 1)$ và $(1 ; 0)$.

2) $y < 0 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 2x| + y = 1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow |x^2 - 2x| + x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \quad \text{(đã xét).} \end{array}\right.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = x^2 - 1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Tóm lại, hệ (I) có ba nghiệm $(0\ ;\ 1)$, $(1\ ;\ 0)$ và $\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

C. LUYỆN TẬP

14.1 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0 \\ 2x - |y| - 7 = 0. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1998)

14.2 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = 2. \end{cases}$$

14.3 Tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} y + |x^2 - 1| - 4 \geq 0 \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Chương 4.

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

MỞ ĐẦU

1. Ta nhắc lại các điều kiện và tính chất của $\sqrt{a}$ **và** $\sqrt[3]{a}$.

a) Về $\sqrt{a}$: • $a \geq 0$; • $\sqrt{a} \geq 0$; • $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

b) Về $\sqrt[3]{a}$: • $a \in \mathbb{R}$; • $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$; • $\sqrt[3]{a}$ cùng dấu với a ;

• $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

2. Tổng quát

• $\sqrt[n]{a}$ với n chẵn có điều kiện và tính chất như $\sqrt{a}$.

• $\sqrt[n]{a}$ với n lẻ có điều kiện và tính chất như $\sqrt[3]{a}$.

3. Để khử dấu căn trong phương trình hay bất phương trình ta phải luỹ thừa hai vế của phương trình hay bất phương trình đó.

4. Những điều cần nhớ

• Nếu $ab \geq 0$ ta có : $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$;

• Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ ta có : $a > b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$;

• Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có :

♦ $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$; ♦ $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.

• Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ ta có :

♦ $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$; ♦ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$;

♦ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2(a+b)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$; ♦ $\sqrt{a^2} = |a|$;

♦ $\sqrt{a^2} = \left[\begin{array}{ll} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a \leq 0 \end{array}\right.$; ♦ $\sqrt[3]{a^3} = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

§ 1 5. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Dạng cơ bản :**

• $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$;   • $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{array}\right. \\ A = B. \end{cases}$

2. **Các dạng khác :**

• Thông thường ta bình phương hai vế của phương trình đã cho để khử dấu căn, đưa phương trình đó về phương trình mới đơn giản hơn. Cần nêu các điều kiện cần thiết sao cho trong hệ điều kiện này phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

• Đôi khi phép bình phương có thể dẫn đến phương trình bậc cao phức tạp. Trong trường hợp này ta tìm cách biến phương trình đã cho thành phương trình tích số hoặc dùng ẩn phụ.

3. **Ghi chú :**

Giả sử ta đã có hằng số C sao cho với mọi x thuộc miền xác định của phương trình đã cho, ta có : $\begin{cases} f(x) \leq C \\ g(x) \geq C. \end{cases}$

Khi đó : $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = C \\ g(x) = C. \end{cases}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải phương trình : $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$.   (1)

(Trích đề thi Đại học Huế, khối A, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có : $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ \left(x^2 - 1\right)^2 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \\ x^4 - 2x^2 + 1 = x + 1. \end{cases}$ (2) (3)

$$(3) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^3 - 2x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Theo điều kiện (2) ta chỉ nhận các nghiệm $x = -1$ và $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình : $\sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2x+4}$. (1)

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, khối D, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} x + 9 \geq 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -9 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$.

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} = 5$

$$\Leftrightarrow x + 9 + 2x + 4 + 2\sqrt{(x+9)(2x+4)} = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 22x + 36} = 12 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 3x \geq 0 \\ 4\left(2x^2 + 22x + 36\right) = (12 - 3x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 160x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình : $\sqrt{16-x} + \sqrt{9+x} = 7$. (1)

(Trích đề thi Đại học Đà Lạt, khối A + B, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} 16 - x \geq 0 \\ 9 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 \geq x \\ x \geq -9 \end{cases} \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 16$. (2)

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{16-x}+\sqrt{9+x}\right)^2 = 49$

$$\Leftrightarrow 16-x+9+x+2\sqrt{-x^2+7x+144} = 49$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+7x+144} = 12 \Leftrightarrow -x^2+7x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 7 \end{array}\right. \text{(thoả mãn điều kiện (2))}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0 ; 7\}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình : $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6} = 3.$ (1)

(Trích đề thi Đại học Thương mại Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Đặt : $t = x^2-3x+3$. Ta có : $t = \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t}+\sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow 2t+3+2\sqrt{t(t+3)} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+3t} = 6-2t \Leftrightarrow \sqrt{t^2+3t} = 3-t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-t \geq 0 \\ t^2+3t = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4} \leq t \leq 3 \\ 9t-9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow x^2-3x+3 = 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $\{1 ; 2\}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{3x^2+3x+19}. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Công nghệ Dân lập, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Đặt : $t = x^2+x+2$. Ta có : $t = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4} \geq \dfrac{7}{4}$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t+5}+\sqrt{t}=\sqrt{3t+13} \Leftrightarrow 2\sqrt{t(t+5)}=t+8$$

$$\Leftrightarrow 4\left(t^2+5t\right)=(t+8)^2 \qquad (t+8>0)$$

$$\Leftrightarrow 3t^2+4t-64=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-\dfrac{16}{3}\ (\text{loại}). \end{array}\right.$$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow x^2+x+2=4 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $\{1\,;-2\}$.

C. LUYỆN TẬP

15.1 Giải phương trình : $\sqrt{4-x^2}=x+2$.

15.2 Giải phương trình : $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$.

15.3 Giải phương trình : $x^2+\sqrt{x+1}=1$.

(Trích đề thi Đại học Xây dựng, năm 1998)

15.4 Giải phương trình : $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$.

15.5 Giải phương trình : $1+\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=\sqrt{x+1}$.

15.6 Giải phương trình : $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$.

15.7 Giải phương trình : $x-4=\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}$.

15.8 Giải phương trình : $\sqrt{x^2+3}=x+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}}$.

15.9 Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$.

15.10 Giải phương trình : $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=\sqrt{(3+x)(6-x)}+3$.

§ 16. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC BA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Dạng cơ bản :

- $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A = B$;   • $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$.

2. Các dạng khác :

Giả sử giải phương trình : $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$. (1)

Tam thừa hai vế của (1) và thay $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ bởi $\sqrt[3]{C}$ ta được phương trình : $A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C$. (2)

Cần nhớ là (2) là phương trình hệ qua của (1). Do đó, phải thử lại nghiệm của (2) đối với phương trình (1).

3. Chú ý :

Ta có kết quả sau :

$$(1)\ \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C & (2) \\ (A - B)^2 + (B + C)^2 + (C + A)^2 \neq 0. & (3) \end{cases}$$

Kết quả này là do hằng đẳng thức :

$$a^3 + b^3 - c^2 + 3abc = \frac{1}{2}(a + b - c)\left[(a - b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\right].$$

Điều kiện (3) xảy ra khi và chỉ khi hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$(*)\begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -C(x). \end{cases}$$

Từ đó có thể phát biểu kết quả trên như sau : Nếu hệ phương trình sau vô nghiệm thì phương trình (2) tương đương với phương trình (1) :

$$(*)\begin{cases} A(x) = B(x) \\ A(x) = -C(x). \end{cases}$$

Trường hợp hệ $(*)$ có nghiệm x_0, ta cần xét riêng nghiệm x_0 này.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$ (1)

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Tp. HCM, năm 1996)

Hướng dẫn giải

$(1)\Leftrightarrow(x+34)-(x-3)-3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\left[\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}\right]=1.$

Thay $\sqrt[3]{(x+34)}-\sqrt[3]{(x-3)}$ bởi 1 ta được :

$$(1)\Rightarrow(x+34)-(x-3)-3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=1$$

$$\Rightarrow 36=3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\Rightarrow 12=\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}$$

$$\Rightarrow 1728=(x+34)(x-3)\Rightarrow x^2+31x-1830=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=30\\x=-75.\end{array}\right.$$

Thế vào (1) thử lại ta thấy phương trình thoả. Vậy các nghiệm của phương trình là : $x=30$ và $x=-75.$

Ghi chú : Hệ phương trình sau vô nghiệm $\begin{cases}x+34=x-3\\x+34=-1.\end{cases}$

Ví dụ 2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-3}=1.$ (1)

Hướng dẫn giải

Tam thừa hai vế rồi thay $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-3}$ bởi 1 ta được :

$$x-2+2x-3+3\sqrt[3]{(x-2)(2x-3)}=1. \quad (2)$$

Ta có : (2) $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-2)(2x-3)}=6-3x$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^2-7x+6}=2-x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-7x+6=8-12x+6x^2-x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-3x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2(x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$$

Thử lại : $x = 1$ không nghiệm đúng phương trình (1).

$x = 2$ nghiệm đúng phương trình (1).

Vậy nghiệm của (1) là $x = 2$.

Ghi chú : Hệ phương trình $\begin{cases} x - 2 = 2x - 3 \\ x - 2 = -1 \end{cases}$ có nghiệm $x = 1$.

C. LUYỆN TẬP

16.1 Giải phương trình : $\sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{9x}$.

16.2 Giải phương trình : $\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{x^2 - a^2} = 2\sqrt[3]{(x-a)^2}$ $(a \neq 0)$.

16.3 Giải phương trình : $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}$.

16.4 Giải phương trình : $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3$.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1999)

§ 17. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Giải và biện luận phương trình chứa căn thức cũng giống như giải và biện luận các phương trình khác. Cần giải giải quyết ba vấn đề :

1) Điều kiện có nghiệm ?

2) Có bao nhiêu nghiệm ?

3) Nghiệm số bằng bao nhiêu ?

• Với bài toán "Biện luận số nghiệm của phương trình" ta chỉ cần giải quyết hai vấn đề 1) và 2) ở trên.

• Nếu phương trình đã cho có dạng $f(x) = k$ (k không phụ thuộc vào x). Ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}=m. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Y - Dược Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Đặt : $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Ta có : $x\in[1;3]$.

$t'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}=\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{(x-1)(3-x)}}$; $t'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên của t theo x :

x	1		2		3
$t'(x)$		+	0	−	
$t(x)$	$\sqrt{2}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}$

Suy ra : $t\in[\sqrt{2};2]$.

Ta có : $t^2=x-1+3-x+2\sqrt{(x-1)(3-x)}$

nên $\sqrt{(x-1)(3-x)}=\dfrac{t^2-2}{2}$. Vậy :

$$(1)\Leftrightarrow t-\left(\frac{t^2-2}{2}\right)=m\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2+t+1=m. \qquad (2)$$

t	$\sqrt{2}$		2
$f'(t)$		−	
$f(t)$	$\sqrt{2}$	↘	1

Đặt $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+t+1$ với $\sqrt{2}\le t\le 2$. Ta có $f'(t)=-t+1$.

Dựa vào bảng biến thiên của f theo t suy ra (1) có nghiệm x khi và chỉ khi (2) có nghiệm $1\le m\le\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a :

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=a. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, khối B, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện :
$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ a\geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có :

$$(1)\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2\geq 0 & (3)\\ 4\left(1-x^2\right)=\left(a^2-2\right)^2. & (4)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2\geq 2 \\ x^2=\dfrac{4a^2-a^4}{4}. \end{cases}$$

Để phương trình có nghiệm ta phải có :

$$\begin{cases} \dfrac{4a^2-a^4}{4}\geq 0 \\ \dfrac{4a^2-a^4}{4}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\left(4-a^2\right)\geq 0 \\ a^4-4a^2+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq a^2\leq 4. \qquad (5)$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có : $2\leq a^2\leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}\leq a\leq 2 \ (a>0)$.

Khi đó (1) có nghiệm : $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2-a^4}$.

Kết luận :

a	Nghiệm của phương trình (1)
$+\infty$	
	Vô nghiệm
2	$x_1=x_2=0$
	$x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2-a^4}$
$\sqrt{2}$	$x_1=-1\,;\ x_2=1$
	Vô nghiệm
$-\infty$	

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=a. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Học viện Quan hệ Quốc tế, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} a \ge 0 \\ x-a \ge 0 \\ x+a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ x \ge a. \end{cases}$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow x-a+x+a+2\sqrt{x^2-a^2}=a^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-a^2}=a^2-2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2x \ge 0 \\ 4x^2-4a^2=a^4+4x^2-4a^2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{a^2}{2} \\ 4a^2x=4a^2+a^4 \end{cases}$

Nếu $a=0$: (1) có nghiệm $x=0$.

Nếu $a>0$: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \le x \le \dfrac{a^2}{2} & (2) \\ x_0=\dfrac{4+a^2}{4} & (3) \end{cases}$

x_0 nhận được $\Leftrightarrow a \le \dfrac{4+a^2}{4} \le \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow a \ge 2$.

Kết luận :

a	Nghiệm của phương trình (1)
$+\infty$	$x = x_0$
2	$x = 2$
	Vô nghiệm
0	$x = 0$
$-\infty$	Vô nghiệm

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}=m. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Thuỷ sản, năm 1998)

Hướng dẫn giải

- Khi $m<0$: (1) vô nghiệm ;
- Khi $m=0$: (1) có nghiệm $x=0$;
- Khi $m>0$: (1) chỉ có thể có nghiệm $x\in[-m\,;\,m]$.

Khi đó : $(1)\Leftrightarrow 2m+2\sqrt{m^2-x^2}=m^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-x^2}=m^2-2m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(m-2)\geq 0 \\ 4(m^2-x^2)=m^4-4m^3+4m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 2 \\ x^2=\dfrac{4m^3-m^4}{4} \end{cases}$$

(1) có nghiệm khi và chỉ khi : $\begin{cases} \dfrac{m^3(4-m)}{4}\geq 0 \\ \dfrac{4m^3-m^4}{4}\leq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\leq m\leq 4 \\ (m-2)^2\geq 0. \end{cases}$

Vậy (1) có nghiệm khi và chỉ khi $2\leq m\leq 4$ hay $m=0$.

C. LUYỆN TẬP

17.1 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $2\sqrt{x+1}=x+m$.

17.2 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x+3=m\sqrt{x^2+1}$.

17.3 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$2\sqrt{(2+x)(4-x)}+x^2-2x+m=0.$$

17.4 Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x^4+4x+m}+\sqrt[4]{x^4+4x+m}=6.$$

17.5 Tìm m sao cho phương trình : $\sqrt{4x - x^2} = x + m$

a) Có nghiệm ;

b) Có hai nghiệm phân biệt.

17.6 Tìm điều kiện của m để phương trình sau đây có nghiệm :

$$\sqrt{3x + x} + \sqrt{6 - x} - \sqrt{(3 + x)(6 - x)} = m.$$

17.7 Tìm điều kiện có nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m.$$

17.8 Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{x} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}.$$

17.9 Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = m\left(\sqrt{5 - x} + \sqrt{4 - x}\right).$$

(Trích đề thi Đại học Bưu chính Viễn thông, năm 1999)

17.10 Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m :

$$m - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x.$$

(Trích đề thi Đại học Thương mại Hà Nội, năm 1999)

§ 18. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Dạng cơ bản :

- $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$ • $\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$

- $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \end{array}\right.$ • $\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B > 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \end{array}\right.$

2. Các dạng khác :

Cách giải cũng giống như giải phương trình chứa căn thức, ta thường làm theo các bước sau :

- *Bước 1 :* Đặt điều kiện để các biểu thức chứa căn có nghĩa.
- *Bước 2 :* Luỹ thừa hai vế để khử căn thức.
- *Bước 3 :* Đưa về bất phương trình cơ bản.

Chú ý :

- Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì ta có : $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.
- Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta có : $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 2 - \frac{x^2}{4}. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Cao đẳng Sư phạm Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 2 - \dfrac{x^2}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 1 + x + 1 - x + 2\sqrt{1-x^2} \leq \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} \leq 4 + \frac{x^4}{16} - x^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 - 2\sqrt{1-x^2} + 1 + \frac{x^4}{16} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{1-x^2} - 1\right)^2 + \frac{x^4}{16}. \qquad (2)$$

(2) đúng với mọi $x \in [-1 ; 1]$. Vậy tập nghiệm của (1) là $[-1 ; 1]$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình : $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3.$ (1)

(Trích đề thi Đại học Ngoại ngữ Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases}1-4x^2\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\\ x\ne 0.\end{cases}$ Ta có :

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1-\left(1-4x^2\right)}{x\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}<3\Leftrightarrow\frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}}<3$$

$$\Leftrightarrow 4x<3\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)\Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2}>4x-3. \qquad (2)$$

Ta đã có $x\le\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}\Rightarrow 4x-3<0\le 3\sqrt{1-4x^2}$. nên (2) đúng với mọi $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\setminus\{0\}$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình : $\dfrac{9x^2}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)^2}>2x+1.$ (1)

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases}1+3x\ge 0\\ \sqrt{1+3x}\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{1}{3}\\ x\ne 0.\end{cases}$ Khi đó ta có :

$$(1)\Leftrightarrow\frac{9x^2\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2}{9x^2}>2x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+3x}+1\right)^2>2x+1$$

$$\Leftrightarrow 1+3x+1+2\sqrt{1+3x}>2x+1\Leftrightarrow 2\sqrt{1+3x}>-x-1. \qquad (2)$$

Ta có : $x \geq -\frac{1}{3} > -1 \Rightarrow -x-1<0 \Rightarrow (2)$ đúng với mọi $x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18} \leq \sqrt{2x+7}. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Mĩ thuật, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} 7x+1 \geq 0 \\ 3x-18 \geq 0 \\ 2x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x+1} \leq \sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}$$

$$\Leftrightarrow 7x+1 \leq 2x+7+3x-18+2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}$$

$$\Leftrightarrow 2x+12 \leq 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)}$$

$$\Leftrightarrow x+6 \leq \sqrt{(2x+7)(3x-18)}. \qquad (2)$$

Ta có : $x+6>0$ do đó :

$$(2) \Leftrightarrow x^2+12x+36 \leq 6x^2-15x-126 \Leftrightarrow 5x^2-27x-162 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{18}{5}\ (\text{loại}) \\ x \geq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 9.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[9\,;+\infty)$.

C. LUYỆN TẬP

18.1 Giải bất phương trình : $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}$.

18.2 Giải bất phương trình : $\sqrt{3x^2+6x+4}<2-2x-x^2$.

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1998)

18.3 Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}\le\sqrt{x^2+4x-5}.$$

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1998)

18.4 Giải bất phương trình : $\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x}<2.$

18.5 Giải bất phương trình : $\dfrac{1}{1-x^2}>\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1.$

18.6 Giải bất phương trình : $(x-3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9.$

18.7 Giải bất phương trình : $4(x+1)^2<(2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$

18.8 Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge2\sqrt{x^2-5x+4}.$$

18.9 Giải bất phương trình : $\sqrt{5x^2+10x+1}\ge7-x^2-2x.$

18.10 Giải bất phương trình : $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}>3.$

§ 19. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Để giải và biện luận một bất phương trình chứa căn thức ta thường thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Đặt các điều kiện để các biểu thức chứa căn có nghĩa.

Bước 2 : Biến đổi tương đương để tìm x.

Bước 3 : Kiểm tra các điều kiện.

Bước 4 : Lập bảng tổng kết.

• Đối với bài toán chỉ yêu cầu biện luận theo tham số số nghiệm của bất phương trình ta nên dùng đồ thị.

• Để tránh đưa về các phương trình bậc quá cao ta nên tìm cách đặt ẩn phụ nếu có thể và khi đó phải lưu ý miền giá trị của ẩn phụ để việc biện luận được chính xác.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình : $\sqrt{2x-m} \geq x$. (1)

Hướng dẫn giải

Ta có : $$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - m \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} x > 0 \\ 2x - m \geq x^2 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

Giải (I) : $$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{m}{2} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

• $m > 0$: (I) vô nghiệm ; • $m \leq 0$: $(I) \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} \leq x \leq 0$.

Giải (II) : $$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + m \leq 0. \end{cases}$$

Đặt : $f(x) = x^2 - 2x + m$. Ta có : $\Delta' = 1 - m$.

• $m > 1$: $\Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (II)$ vô nghiệm.

• $m \leq 1$: $\Delta' \geq 0 \Rightarrow f(x)$ có nghiệm : $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-m}$ $(x_1 \leq x_2)$.

Do đó : $$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x_1 \leq x \leq x_2. \end{cases}$$ Ta có : $P = m,\ S = 2 > 0$.

1) $x_1 \leq 0 \leq x_2 \Leftrightarrow m \leq 0$: $(II) \Leftrightarrow 0 < x \leq x_2$.

2) $0 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 1 : (II) \Leftrightarrow x_1 \le x \le x_2$.

Kết luận

m	Tập nghiệm của bất phương trình (1)
$+\infty$	
	$\varnothing$
1	$\{1\}$
	$[x_1 ; x_2]$
0	$[0 : 2]$
	$\left[\frac{m}{2} : x_2\right]$
$-\infty$	

Với $x_1 = 1 - \sqrt{1-m}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1-m}$.

Ví dụ 2. Giải và biện luận bất phương trình :

$$\sqrt{x-m} + 2m \le \sqrt{x+2m}. \qquad (1)$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} x - m \ge 0 \\ x + 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ x \ge -2m. \end{cases} \qquad (2)$

1) $m = 0 : (1) \Leftrightarrow \sqrt{x} \le \sqrt{x}$. Đúng với mọi $x \ge 0$.

2) $m > 0$: $(2) \Leftrightarrow x \ge m$. Khi đó :

$(1) \Leftrightarrow x - m + 4m^2 + 4m\sqrt{x-m} \le x + 2m$

$\Leftrightarrow 4m\sqrt{x-m} \le 3m - 4m^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-m} \le 3 - 4m$ (do $m > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m \ge 0 \\ x - m \le \left(\dfrac{3-4m}{4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \le \dfrac{3}{4} \\ x \le m + \left(\dfrac{3-4m}{4}\right)^2. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq m$, ta được : Với $0 < m \leq \dfrac{3}{4}$ bất phương trình (1) có nghiệm : $m \leq x \leq m + \left(\dfrac{3-4m}{4}\right)^2$.

3) $m < 0$: (2) $\Leftrightarrow x \geq -2m$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-m} \leq \sqrt{x+2m} - 2m$$

$$\Leftrightarrow x - m \leq x + 2m + 4m^2 - 4m\sqrt{x+2m}$$

$$\Leftrightarrow -4m\sqrt{x+2m} \geq -m(3+4m) \Leftrightarrow 4\sqrt{x+2m} \geq 3+4m \ (\text{do } -m > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq -\dfrac{3}{4} \\ x \geq -2m \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{3}{4} < m < 0 \\ x \geq -2m + \left(\dfrac{3+4m}{4}\right)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Tổng hợp 3 trường hợp trên ta có kết quả sau :

m	Tập nghiệm của bất phương trình (1)
$+\infty$	$\varnothing$
$\dfrac{3}{4}$	$\left[\dfrac{3}{4} ; x_1\right]$
	$[m ; x_1]$
0	$[0 ; +\infty)$
	$[x_2 ; +\infty)$
$-\dfrac{3}{4}$	$\left[-\dfrac{3}{2} ; +\infty\right)$
$-\infty$	$[-2m ; +\infty)$

Trong đó : $x_1 = m + \left(\dfrac{3-4m}{4}\right)^2$; $x_2 = -2m + \left(\dfrac{3+4m}{m}\right)^2$.

C. LUYỆN TẬP

19.1 Giải và biện luận bất phương trình : $\sqrt{m+\sqrt{x}} + \sqrt{m-\sqrt{x}} \le 2$.

19.2 Giải và biện luận bất phương trình : $\sqrt{x+m} - \sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}} < \sqrt{x+2m}$.

19.3 Định m để bất phương trình sau có nghiệm : $\sqrt{x} + \sqrt{x+m} < m$.

19.4 Cho bất phương trình : $2x + \sqrt{5-x^2} > m$. Định m sao cho bất phương trình

a) có nghiệm ; b) nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\right]$.

§ 20. HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để giải các hệ phương trình và bất phương trình chứa căn thức ta lưu ý các thao tác sau :

1. Đặt các điều kiện để các biểu thức chứa căn có nghĩa.
2. Dùng các phép thế khử biến để đưa về phương trình và bất phương trình.
3. Đặt ẩn số phụ để đưa hệ về các hệ đơn giản đã biết cách giải.
4. Kiểm tra sự tương đương giữa các hệ.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình : $(I)\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\\ x+y-\sqrt{xy}=a.\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $a=4$;

b) Định a để hệ có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Y - Dược Tp. HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ a\geq 0.\end{cases}$ Đặt : $S=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $P=\sqrt{x}.\sqrt{y}$. Khi đó :

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}S=a\\ S^2-3P=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=a\\ P=\dfrac{a^2-a}{3}.\end{cases}$$

Theo Định lí Viét đảo ta có $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$ là nghiệm của phương trình :

$$X^2-SX+P=0\Leftrightarrow X^2-aX+\frac{a^2-a}{3}=0. \qquad (1)$$

a) Với $a=4$: $(1)\Leftrightarrow X^2-4X+4=0\Leftrightarrow X=2$. Vậy :

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=4.\end{cases}$$

b) Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm dương, tức là :

$$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ S\geq 0\\ P\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-4a\leq 0\\ a\geq 0\\ a^2-a\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq a\leq 4\\ a\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}a\leq 0\\ a\geq 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\leq 0\\ 1\leq a\leq 4.\end{array}\right.$$

Vậy hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi $a \in (-\infty ; 0] \cup [1 ; 4]$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình :

$$(I)\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \\ x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học Hàng hải, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 + \sqrt{xy} \\ (x+y)\sqrt{xy} = 78 \\ x > 0 \\ y > 0. \end{cases} \qquad (II)$$

Đặt : $u = x + y > 0$; $v = \sqrt{xy} > 0$.

Khi đó : $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 7 \\ uv = 78. \end{cases}$

Ta có u và $(-v)$ là nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 7t - 78 = 0.$$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 13 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9 \\ y = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

C. LUYỆN TẬP

20.1 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 \end{cases}$$

(Trích đề thi Đại học An ninh, năm 1999)

20.2 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35. \end{cases}$

20.3 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

20.4 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-y=3m \\ 2y+\sqrt{xy}=0. \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Đà Nẵng, năm 1998)

20.5 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=4 \\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=2. \end{cases}$

Chương 5.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

MỞ ĐẦU

1. Khái niệm mũ

- $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: $a^0 = 1 (a \neq 0)$; $a^1 = a$; $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n}$

- $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

- $a > 0$; $m, n \in \mathbb{N}$: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$; $a^{-\frac{n}{m}} = \dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$.

- $a > 0,\ x \in \mathbb{R},\ x_n \in \mathbb{Q}$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$; $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n}$.

2. Khái niệm lôgarit

- $\begin{cases} \log_a M = x \Leftrightarrow a^x = M \\ a > 0,\ a \neq 1 \\ M > 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} \log_{10} M = \lg M & (\text{lôgarit thập phân}) \\ \log_e M = \ln M & (\text{lôgarit Nêpe}) \\ e \cong 2,71828. \end{cases}$

3. Tính chất của mũ

- $a^m.a^n = a^{m+n}$;
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $(a^n)^m = a^{n.m}$;
- $(ab)^n = a^n.b^n$;
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

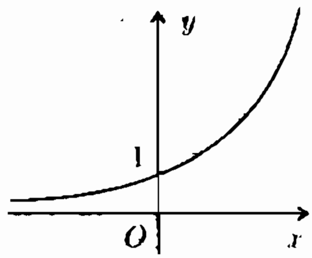
4. Tính chất của lôgarit

- $\log_a a^M = M$;
- $a^{\log_a M} = M$;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$;
- $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;
- $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$;
- $\log_{a^\alpha} M = \dfrac{1}{\alpha} \log_a M$;
- $\log_a M = \log_a b . \log_b M$;
- $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$;
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

5. Đồ thị hàm mũ $y = a^x$

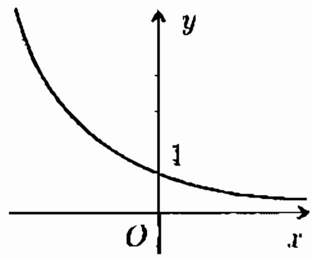
- $a > 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'			$+$		
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- $0 < a < 1$:

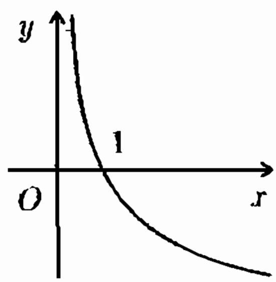
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'			$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



6. Đồ thị hàm lôgarit $y = \log_a x$

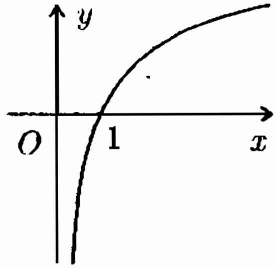
- $a > 1$:

x	0		1		$+\infty$
y'			$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



• $0 < a < 1$:

x	0	1	$+\infty$
y'	||	$+$	
y	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$



7. **Đạo hàm của hàm mũ và hàm lôgarit**

• $(a^x)' = a^x \ln a$; • $(e^x)' = e^x$;

• $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; • $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

§ 21. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Để giải một phương trình mũ ta thường dùng các cách sau :

• Đưa về cùng cơ số : $\begin{cases} a^{f(x)} = a^{g(x)} \\ a > 0,\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

• Lấy log hai vế : $\begin{cases} a^{f(x)} = g(x) \\ a > 0,\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \log_a g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$

• Đặt ẩn số phụ để đưa về phương trình cơ bản :

$$f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0. \end{cases}$$

2. Để giải một bất phương trình mũ ta cũng có thể đưa về cùng cơ số rồi dùng tính tăng, giảm của hàm số mũ.

• Nếu $a > 1$ thì ta có : $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

- Nếu $0 < a < 1$ thì ta có : $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

- Tổng quát ta có : $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] \geq 0. \end{cases}$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho phương trình : $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0.$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = 2$

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

(Trích đề thi Đại học Cần Thơ, năm 1998)

Hướng dẫn giải

a) Khi $m = 2 : (1) \Leftrightarrow 4^x - 2.2^{x+1} + 4 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4.2^x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2^x - 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

b) Định m để (1) có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 = 3$.

Đặt : $t = 2^x > 0$. Khi đó : $(1) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m = 0.$ (2)

Ta có : $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^{x_1 + x_2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 8 \Leftrightarrow t_1.t_2 = 8$.

Do đó, (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 = 3$ nếu và chỉ nếu (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thoả mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \\ t_1.t_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình : $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$. (1)

(Trích đề thi Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $x \neq 0$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)} \Leftrightarrow 5^{x-3} = 2^{\frac{3-x}{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 5 = \frac{3-x}{x} \Leftrightarrow (x-3)\left(x\log_2 5 + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{\log_2 5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\log_5 2. \end{array}\right.$$

Ví dụ 3. Giải bất phương trình : $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1$. (1)

(Trích đề thi Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6.$$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình : $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$. (1)

(Trích đề thi Đại học Giao thông Vận tải, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Vì : $\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{10} - 3 = \dfrac{1}{\sqrt{10}+3} = \left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$.

Do đó : $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{10}+3\right)^{-\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-1} < -\dfrac{x+1}{x+3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10}{x^2+2x-3} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

C. LUYỆN TẬP

21.1 Cho phương trình : $\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + a\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$

a) Giải phương trình khi $a = 7$.

b) Biện luận theo a số nghiệm của phương trình.

(Trích đề thi Học viện Chính trị Quốc gia Tp.HCM, năm 1999)

21.2 Giải bất phương trình : $2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1$

(Trích đề thi Đại học Y khoa Hà Nội, năm 1999)

21.3 Giải phương trình : $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1998)

21.4 Giải phương trình : $\left(2-\sqrt{3}\right)^x + \left(2+\sqrt{3}\right)^x = 4^x$

(Trích đề thi Học viện Bưu chính Viễn thông, năm 1998)

21.5 Giải bất phương trình : $2^x + 2^{3-x} \le 9$.

§ 22. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Để giải một phương trình lôgarit ta thường dùng các cách sau :

• Đưa về cùng cơ số : $\begin{cases}\log_a f(x) = \log_a g(x)\\ 0 < a \ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0\\ g(x) > 0\\ f(x) = g(x).\end{cases}$

• Mũ hoá hai vế : $\begin{cases}\log_a f(x) = g(x)\\ 0 < a \ne 1\end{cases} \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}.$

• Đặt ẩn số phụ để đưa về phương trình cơ bản :

$$f\left[a^{g(x)}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0\\ f(t) = 0.\end{cases}$$

2. Để giải một bất phương trình lôgarit ta cũng có thể đưa về cùng cơ số rồi dùng tính tăng, giảm của hàm số lôgarit :

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] \geq 0. \end{cases}$$

• Nếu đã có $a > 1$ thì :

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x). \end{cases}$$

• Nếu đã có $0 < a < 1$ thì :

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$$

• Ta cũng có thể dặt ẩn số phụ rồi đưa về bất phương trình cơ bản :

$$f\left[\log_a g(x)\right] \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a g(x) \\ f(t) \geq 0. \end{cases}$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 > 0 \\ x^2 + 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x > -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -4 \\ x > -3 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty ; -4) \cup (-3 ; -2) \cup (-1 ; +\infty). \qquad (2)$$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = \log_2 24$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=24$$

$$\Leftrightarrow x(x+5)(x^2+5x+10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện (2). Vậy phương trình (1) có hai ghiệm là $x=0$ và $x=-5$.

Ví dụ 2. Giải phương trình : $\log_a(ax).\log_a(ax)=\log_{a^2}\dfrac{1}{a}$. (1)

Hướng dẫn giải

Diều kiện : $\begin{cases} 0<a\neq 1 \\ 0<x\neq 1. \end{cases}$ (2)

$$(1)\Leftrightarrow(\log_a a+\log_a x)(\log_x a+\log_x x)=\frac{1}{2}(-\log_a a)$$

$$\Leftrightarrow (1+\log_a x)\left(\frac{1}{\log_a x}+1\right)=-\frac{1}{2}.$$

Đặt : $t=\log_a x$, ta có :

$$(1)\Leftrightarrow(1+t)\left(\frac{1}{t}+1\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2(t+1)^2=-t$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \log_a x=-2 \\ \log_a x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=a^{-2} \\ x=a^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{a^2} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}. \end{array}\right.$$

Cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện (2). Vậy, với $0<a\neq 1$ phương trình (1) có hai nghiệm $x=\dfrac{1}{a^2}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình :

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}}>\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}. \qquad (1)$$

(Trích đề thi Đại học Quốc gia Tp. HCM, năm 1999)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} 2x^2-3x+1>0 \\ 2x^2-3x+1\neq 1 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -1<x<\dfrac{1}{2} \\ x>1 \end{array}\right. \\ x\neq 0. \end{cases}$

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}} < \dfrac{1}{\log_3(x+1)}$.

- $\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}>0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}>1$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

- $\log_3(x+1)>0 \Leftrightarrow x+1>1 \Leftrightarrow x>0$.

Từ đó ta có bảng xét dấu sau :

x	$-\infty$ -1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}$		+	−		−	+
$\log_3(x+1)$		−	+		+	+

Dựa vào bảng xét dấu ta được :

- $-1<x<0$: Bất phương trình vô nghiệm.
- $\left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{2} \\ 1<x<\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$: Bất phương trình luôn nghiệm đúng.
- $x>\dfrac{3}{2}$: Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \log_3(x+1)<\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}$

$$\Leftrightarrow x+1<\sqrt{2x^2-3x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 < 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 < 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \quad (\text{loại}) \\ x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 5.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :

$$\left(0 ; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1 ; \frac{3}{2}\right) \cup \left(5 ; +\infty\right).$$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình : $\log_x \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq 2.$ (1)

(Trích đề thi Đại học Huế, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x - \dfrac{1}{4} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{4} \\ x \neq 1. \end{array}\right.$ (2)

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \log_x \left(x - \frac{1}{4}\right) \geq \log_x x^2 \Leftrightarrow (x-1)\left(x - \frac{1}{4} - x^2\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^2 - 4x + 1\right) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 \leq 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Kết hợp với (2) ta được nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{4} < x < 1.$

C. LUYỆN TẬP

22.1 Giải phương trình : $\log_5 \left(5^x - 1\right).\log_{25} \left(5^{x+1} - 5\right) = 1.$

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Hà Nội, năm 1998)

22.2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất : $\dfrac{\lg(mx)}{\lg(x-1)} = 2$.

(Trích đề thi Đại học Y - Dược Hà Nội, năm 1998)

22.3 Giải phương trình : $2\left(\log_9 x\right)^2 = \log_3 x \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$.

(Trích đề thi Đại học Thuỷ lợi, năm 1999)

22.4 Giải bất phương trình : $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-3}{1-x}} < 1$.

(Trích đề thi Đại học Sư phạm Vinh, năm 1998)

22.5 Giải bất phương trình : $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$.

(Trích đề thi Đại học Ngân hàng Tp. HCM, năm 1998)

22.6 Giải bất phương trình :

$$\log_3 \sqrt{x^2-5x+6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x-2} > \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x-3).$$

(Trích đề thi Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1999)

§ 23. HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để giải một hệ phương trình hay bất phương trình mũ - lôgarit ta thường dùng các phương pháp sau :

1. Phép thế. Giải một phương trình hay bất phương trình của hệ rồi thế kết quả vào các phương trình hay bất phương trình còn lại.
2. Đặt ẩn số phụ. Đưa hệ về hệ cơ bản đã biết cách giải (hệ bậc nhất, tổng - tích, v.v...)
3. Biến đổi tương đương hệ đã cho về một hệ khác đơn giản hơn rồi áp dụng phương pháp 1 hoặc phương pháp phương pháp 2.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\sqrt[y]{9} = 9^{\frac{x}{2y}} & (1) \\ \dfrac{x+3y}{x} = \dfrac{2x}{y} - 4. & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{-\frac{1}{2}}.9^{\frac{1}{y}} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ y \neq 0 \\ y \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\frac{2-y}{2y}} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ y \neq 0 \\ y \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-y \\ y \neq 0 \\ y \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Thế vào (2) ta được :

$$\frac{2-y+3y}{2-y} = \frac{4-2y}{y} - 4 \Leftrightarrow \frac{2+2y}{2-y} = \frac{4-6y}{y}$$

$$\Leftrightarrow y(1+y) = (2-y)(2-3y)$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = \dfrac{1}{2} \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với : $y = 4 \Rightarrow x = -2$. Vậy hệ có nghiệm : $(-2 ; 4)$.

Ví dụ 2. Giải hệ bất phương trình : $(I)\begin{cases} 4^x + 4^y \leq 1 & (1) \\ x + y \geq -1. & (2) \end{cases}$

(Trích đề thi Đại học Y - Dược Tp.HCM, năm 1998)

Hướng dẫn giải

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có :

$$4^x + 4^y \geq 2\sqrt{4^x.4^y} = 2\sqrt{4^{x+y}} \geq 2\sqrt{4^{-1}} = 1.$$

Do đó : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 4^y \\ 4^x + 4^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = \dfrac{1}{2} \\ 4^y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

C. LUYỆN TẬP

23.1 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2^x.3^y = 12 \\ 2^y.3^x = 18. \end{cases}$

23.2 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x > 0 \\ x^{y-2} = 4 \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases}$

23.3 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln\left(y^2 + 2x\right) = 0. \end{cases}$

23.4 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + 2^y \leq 1 \\ x + y \geq -2. \end{cases}$

23.5 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg\left(2^{x+1} + 1\right) < \lg\left(7.2^x + 12\right) \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$

Chương 6.

SỐ PHỨC

§ 24. SỐ PHỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm số phức

Định nghĩa 1. Một số phức là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và số i thoả mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.

i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.

• Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Chú ý :

• Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $a + 0i = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (còn gọi là số thuần ảo) : $z = 0 + bi$ $(b \in \mathbb{R})$; $i = 0 + 1i = 1i$.

• Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

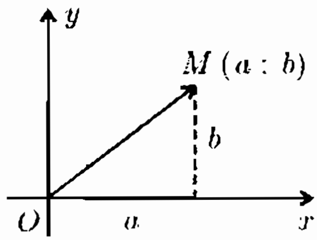
Định nghĩa 2. Hai số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ và $z' = a' + b'i$ $(a', b' \in \mathbb{R})$ gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo tương ứng của chúng bằng nhau, tức là :

$$z = w \Leftrightarrow a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = a' \\ b = b'. \end{array}\right.$$

2. Biểu diễn hình học số phức

Mọi số phức $z = a + bi$ đều có thể biểu diễn trên mặt phẳng Oxy dưới dạng điểm $M(a ; b)$ với hoành độ a và tung độ b, và ngược lại, mọi điểm $M(a ; b)$ của mặt phẳng Oxy đều có thể xem như là ảnh của số phức $z = a + bi$. Ta còn viết : $M(a + bi)$ hay $M(z)$.

Vì vậy, mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức như thế được gọi là mặt phẳng phức.



Gốc toạ độ O biểu diễn số 0.

Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox còn được gọi là trục thực.

Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy còn được gọi là trục ảo.

3. Phép cộng và phép trừ số phức

a) Tổng của hai số phức

Định nghĩa 3. Tổng của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

b) Tính chất của phép cộng số phức

- Tính kết hợp : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$, với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- Tính giao hoán : $z + z' = z' + z$, với mọi $z, z' \in \mathbb{C}$.
- Cộng với 0 : $z + 0 = 0 + z$, với mọi $z \in \mathbb{C}$.
- Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có : $z + (-z) = (-z) + z = 0$. Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z.

c) Phép trừ hai số phức

Định nghĩa 4. Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z với $-z'$, tức là : $z - z' = z + (-z')$.

Nếu $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ thì

$$z - z' = a - a' + (b - b')i.$$

d) Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Trong mặt phẳng phức, ta đã coi điểm $M(a ; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Ta cũng coi mỗi vectơ $\vec{u}(a ; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Khi đó, nói điểm M biểu diễn số phức z cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

Dễ thấy rằng, nếu $\vec{u}$, $\vec{u}'$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì $\vec{u}+\vec{u}'$ biểu diễn số phức $z+z'$; $\vec{u}-\vec{u}'$ biểu diễn số phức $z-z'$.

4. Phép nhân số phức

a) Tích của hai số phức

Tích của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức $zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$

Nhận xét. Với mọi số thực k và mọi số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có :

$k(a+bi) = (k+0i)(a+bi) = ka + kbi$. Đặc biệt $0z = 0$ với mọi số phức z.

b) Tính chất của phép nhân số phức

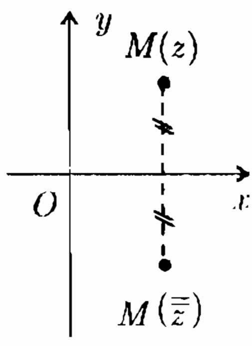
- Tính giao hoán : $zz' = z'z$, với mọi $z, z' \in \mathbb{C}$.
- Tính kết hợp : $(zz')z'' = z(z'z'')$, với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- Nhân với 1 : $1.z = z.1 = z$, với mọi $z \in \mathbb{C}$.
- Tính chất phân phối (của phép nhân đối với phép cộng) :

$$z(z' + z'') = zz' + zz'', \text{ với mọi } z, z', z'' \in \mathbb{C}.$$

5. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

Định nghĩa 6. Số phức liên hợp của $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $a - bi$ và được kí hiệu là $\bar{z}$. Như vậy : $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.



Rõ ràng $\bar{\bar{z}} = z$ nên người ta còn nói z và $\bar{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau (gọi tắt là hai số phức liên hợp).

Hai số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng với nhau qua trục Ox.

b) Môđun của số phức

Định nghĩa 7. Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$. Như vậy :

Nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Nhận xét.

- Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.

6. **Phép chia cho số phức khác 0**

Định nghĩa 8. Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

Thương $\dfrac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z, tức là $\dfrac{z'}{z} = z'.z^{-1}$. Như vậy :

$$\text{Nếu } z \neq 0 \text{ thì } \frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2}.$$

Chú ý. Do $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$ nên để tính $\dfrac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử số và mẫu số với $\overline{z}$.

Nhận xét.

- Với $z \neq 0$, ta có $\dfrac{1}{z} = 1.z^{-1} = z^{-1}$.
- Dễ thấy rằng thương $\dfrac{z'}{z}$ là số phức w sao cho $zw = z'$. Từ đó có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Xác định phần thực, phần ảo của số phức :

a) $z = \dfrac{5}{3}i$.　　　　b) $z = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

a) Số phức luôn có dạng $z = a + bi$, trong đó a là phần thực ; b là phần ảo. Vậy số phức $z = \dfrac{5}{3}i$ có phần thực là $a = 0$, phần ảo là $\dfrac{5}{3}$.

b) Nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của mẫu ta được :

$$z = \frac{\left(2 - i\sqrt{3}\right)^2}{7} = \frac{1 - 4i\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{7} - \frac{4\sqrt{3}}{7}i.$$

Vậy phần thực và phần ảo của số phức z theo thứ tự là $\frac{1}{7}$ và $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Ví dụ 2. Xác định m $(m \in \mathbb{R})$ để $z = (2m^2 - m - 1) + (4m^2 - 1)i$ là số thuần ảo và khác 0.

Hướng dẫn giải

Để z là số thuần ảo khác 0 ta phải có :

$$\begin{cases} 2m^2 - m - 1 = 0 \\ 4m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 1$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng phức, A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 7i - 5$. Hãy biểu diễn trọng tâm G của tam giác ABC dưới dạng số phức.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết, ta có : $A(2 ; -3)$, $B(0 ; 2)$, $C(-5 ; 7)$. Gọi $G\left(x_G ; y_G\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2 - 5}{3} = -1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-3 + 2 + 7}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(-1 ; 2).$$

Vậy trọng tâm G của tam giác ABC được biểu diễn dưới dạng số phức là : $z = -1 + 2i = 2i - 1$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng phức cho $A(-3 ; 2)$, $B(-2 ; -1)$. Hãy biểu diễn trung điểm M của đoạn thẳng AB dưới dạng số phức.

Hướng dẫn giải

Trung điểm M của đoạn AB có toạ độ $M\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ nên được biểu diễn dưới dạng số phức như sau : $z=\frac{i-5}{2}$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng phức, hãy xác định các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $(iz-1)(z+3i)(\overline{z}-2+3i)=0$ (1)

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}iz-1=0\\z+3i=0\\\overline{z}-2+3i=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\frac{1}{i}\\z=-3i\\\overline{z}=2-3i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-i\\z=-3i\\z=2+3i.\end{array}\right.$

Vậy các điểm biểu diễn các nghiệm cua phương trình đã cho là : $A(0\,;-1)$, $B(0\,;-3)$, $C(2\,;3)$.

Ví dụ 6. Cho hai số phức $z_1=3i-1$ và $z_2=4+5i$. Tìm số phức z sao cho $z-z_2+2z_1=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $z-z_2+2z_1=0\Leftrightarrow z=z_2-2z_1$

$$\Rightarrow z=4+5i-2(3i-1)=6-i.$$

Vậy số phức cần tìm : $z=6-i$.

Ví dụ 7. Với mọi số ảo z, số $z^2+|z|^2$ là số nào ?

Hướng dẫn giải

Ta có : $z=a+bi$, với $i^2=-1$. Với z là số ảo nên suy ra :

$$a=0\Rightarrow z=bi\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z^2=-b^2\\|z|^2=|bi|^2=\left|-b^2\right|=b^2\end{array}\right.\Rightarrow z^2+|z|^2=0.$$

Ví dụ 8. Cho hai số phức $z_1 = (a^2 + a + 1) + (2a^2 + 3a - 4)i$ và $z_2 = 3 - 2i$. Tính a $(a \in \mathbb{R})$ để $z_1 = z_2$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + 1 = 3 \\ 2a^2 + 3a - 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -2.$

Ví dụ 9. Tìm số phức z, biết $z.\overline{z} + z^2 - (z - 2\overline{z}) = 10 + 3i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có : $\overline{z} = a - bi$; $z.\overline{z} = a^2 + b^2$;

$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Do đó :

$$z.\overline{z} + z^2 - (z - 2\overline{z}) = a^2 + b^2 + a^2 - b^2 + 2abi - [(a + bi) - 2(a - bi)]$$

$$= (2a^2 + a) + (2ab - 3b)i.$$

Vậy :

$$z.\overline{z} + z^2 - (z - 2\overline{z}) = 10 + 3i \Leftrightarrow (2a^2 + a) + (2ab - 3b)i = 10 + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 + a = 10 \\ 2ab - 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ 2ab - 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\dfrac{5}{2} \\ b = -\dfrac{3}{8} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + 3i \\ z = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{8}i. \end{array}\right.$$

Ví dụ 10. Tìm số phức z thoả hệ phương trình : $\begin{cases} \left|\dfrac{z - 1}{z - i}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z - 3i}{2 + i}\right| = 1. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có :

- $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq i \\ |z-1|=|z-i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq i \\ |(a-1)+bi|=|a+(b-1)i| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\neq i \\ (a-1)^2+b^2=a^2+(b-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq i \\ a=b. \end{cases}$$

- $\left|\dfrac{z-3i}{2+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-3i|=|2+i| \Leftrightarrow |a+(b-3)i|=|2+i|$

$$\Leftrightarrow a^2+(b-3)^2=4+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-6y+4=0.$$

Do đó : $\begin{cases} \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1 \\ \left|\dfrac{z-3i}{2+i}\right|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+bi\neq i \\ a=b \\ a^2+b^2-6b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+bi\neq i \\ a=b \\ 2a^2-6a+4=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=2. \end{array}\right.$$

Vậy, có hai số phức thoả mãn đề bài là : $z=1+i$, $z=2+2i$.

Ví dụ 11. Cho số phức $z\neq i$. Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z biết $\dfrac{z+i}{z-i}$ là một số thực dương.

Hướng dẫn giải

Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$, ta có :

- $\dfrac{z+i}{z-i}=\dfrac{a+(b+1)i}{a+(b-1)i}=\dfrac{[a+(b+1)i][a-(b-1)i]}{a^2+(b-1)^2}$

$$=\frac{a^2-a(b-1)i+a(b+1)i+(b^2-1)}{a^2+(b-1)^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2}+\left[\frac{2a}{a^2+(b-1)^2}\right]i.$$

• $\dfrac{z+i}{z-i}$ là số thực dương khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a^2+(b-1)^2 \neq 0 \\ a=0 \\ a^2+b^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \neq 1 \\ b^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ |b|>1. \end{cases}$$

Vậy, tập hợp các đểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z để $\dfrac{z+i}{z-i}$ là một số thực dương là hai phần của trục ảo Oy với $y>1$ hoặc $y<-1$.

Ví dụ 12. Cho số phức w. Chứng minh rằng với mọi số phức z ta đều có : $z.\overline{z}+\overline{w}.z+w.\overline{z}=|z+w|^2-w.\overline{w}$. Từ đó tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn $z.\overline{z}+\overline{w}.z+w.\overline{z}=k$, trong đó $k \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $|z+w|^2-w.\overline{w}=(z+w)\left(\overline{z+w}\right)-w.\overline{w}$

$$=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})-w.\overline{w}=z.\overline{z}+\overline{w}.z+w.\overline{z}.$$

Khi $z.\overline{z}+\overline{w}.z+w.\overline{z}=k$, ta có :

$$|z+w|^2-w.\overline{w}=k \Leftrightarrow |z+w|^2=w.\overline{w}+k. \qquad (*)$$

Gọi $z=a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $w=a_0+b_0i$ $(a_0, b_0 \in \mathbb{R})$. Ta có :

$$(*) \Leftrightarrow (a+a_0)^2+(b+b_0)^2=a_0^2+b_0^2+k.$$

• Khi $k>-\left(a_0^2+b_0^2\right)$ thì tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số phức $-w=-a_0-b_0i$ và có bán kính $R=\sqrt{a_0^2+b_0^2+k}$.

• Khi $k=-\left(a_0^2+b_0^2\right)$ thì tập hợp các điểm cần tìm là một điểm biểu diễn số phức $-w=-a_0-b_0i$.

• Khi $k<-\left(a_0^2+b_0^2\right)$ thì tập hợp các điểm cần tìm là tập rỗng $(\varnothing)$.

C. LUYỆN TẬP

24.1 Tìm phần thực, phần ảo, số phức đối và số phức liên hợp của các số phức sau :

a) $z = i - (2 + 4i) - (1 + 2i)$;

b) $z = \left(\sqrt{3} - 2i\right)^2$;

c) $z = (3 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3$;

d) $z = \dfrac{1}{2i}\left(i^9 - \dfrac{1}{i^9}\right)$.

24.2 Thực hiện các phép tính sau :

a) $\dfrac{4 + 3\sqrt{3} + \left(4\sqrt{3} - 3\right)i}{1 + i\sqrt{3}}$;

b) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$.

24.3 Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Tìm phần thực, phần ảo của các số phức sau :

a) $w = z^2 - 3z + 5i$; b) $w = \dfrac{\overline{z} + i}{iz - 2}$.

24.4 Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Các số sau là số thực hay ảo ?

a) $w = \dfrac{z + \overline{z}}{z^3 + \left(\overline{z}\right)^3}$; b) $w = \dfrac{z^2 + \left(\overline{z}\right)^2}{1 + z\overline{z}}$.

24.5 Xác định tập hợp điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn mỗi điều kiện sau :

a) $\left|z - \overline{z} + 5 - 2i\right| = 4$; b) $\left|z^2 - \left(\overline{z}\right)^2\right| = 9$;

c) $|2z - 1| = |z + 2i - 3|$; d) $|z| = \left|\overline{z} - 3 + 4i\right|$.

§ 25. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Căn bậc hai của số phức

Định nghĩa. Cho số phức w. Mỗi số phức z thoả mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w.

- Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.
- Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$; số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\, i$ và $-\sqrt{-a}\, i$.

2. Phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai : $Az^2 + Bz + C = 0$ (*), trong đó A, B, C là những số phức, $A \neq 0$. Để giải (*) ta thực hiện như sau :

- Lập biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$.
- Nếu $\Delta \neq 0$ thì (*) có hai nghiệm phân biệt là $z_1 = \dfrac{-B+\delta}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\delta}{2A}$, trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.
- Nếu $\Delta = 0$ thì (*) có nghiệm kép là $z_1 = z_2 = -\dfrac{B}{2A}$.

Đặc biệt :

Khi Δ là số thực dương thì hai nghiệm của (*) là :

$$z_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A},\ z_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}\ ;$$

Khi Δ là số thực âm thì hai nghiệm của (*) là :

$$z_1 = \frac{-B+\sqrt{-\Delta}\, i}{2A},\ z_2 = \frac{-B-\sqrt{-\Delta}\, i}{2A}.$$

Chú ý. Người ta còn chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n : $A_0z^n + A_1z^{n-1} + \cdots + A_{n-1}z + A_n = 0$ (trong đó n là một số nguyên dương, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ là $n+1$ số phức cho trước, $A_0 \neq 0$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

a) $z = 2$; b) $z = -9$;

c) $z = i$; d) $z = -i$.

Hướng dẫn giải

Số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của số phức z khi và chỉ khi : $w^2 = z$.

a) $z = 2$. Ta có :

$$(a+bi)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2 + 2abi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy $z = 2$ có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{2}$.

b) $z = -9$. Ta có :

$$(a+bi)^2 = -9 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 9 + 2abi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 9 = 0 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 3. \end{cases}$$

Vậy $z = -9$ có hai căn bậc hai là $\pm 3i$.

c) $z = i$. Ta có :

$$(a+bi)^2 = i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + (2ab-1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $z = i$ có hai căn bậc hai là $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ và $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

d) $z = -i$. Ta có :

$$(a + bi)^2 = -i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + (2ab + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $z = i$ có hai căn bậc hai là $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ và $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Ví dụ 2. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

a) $z = -3 + 4i$;

b) $z = (2 + 6i)(2 - 6i)$;

c) $z = \frac{1 - 2i}{2 + i}$;

d) $z = -(1 + i)^8$;

e) $z = -1 - 2\sqrt{6}\, i$;

f) $z = (1 + 5i)^2$.

Hướng dẫn giải

Số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của số phức z khi và chỉ khi : $w^2 = z$.

a) $z = -3 + 4i$. Ta có :

$$(a + bi)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \frac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $z = -3 + 4i$ có hai căn bậc hai là $1 + 2i$ và $-1 - 2i$.

b) $z = (2 + 6i)(2 - 6i) = 4 - 36i^2 = 40$.

Làm tương tự như Ví dụ 1. a), ta được : Số phức $z = (2 + 6i)(2 - 6i)$ có hai căn bậc hai là $\pm 2\sqrt{10}$.

c) $z = \dfrac{1 - 2i}{2 + i} = \dfrac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = -\dfrac{5i}{5} = -i$.

Làm tương tự như Ví dụ 1. d), ta được : Số phức $z = \dfrac{1 - 2i}{2 + i}$ có hai căn bậc hai là $\pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} i$.

d) $z = -(1 + i)^8 = -\left[(1 + i)^2\right]^4 = -(2i)^4 = -2^4\left(i^2\right)^2 = -16$.

Làm tương tự như Ví dụ 1. b), ta được : Số phức $z = -(1 + i)^8$ có hai căn bậc hai là $\pm 4i$.

e) $z = -1 - 2\sqrt{6}\, i = 2 - 3 - 2\sqrt{2}.\sqrt{3}\, i = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\, i\right)^2$. Ta có :

$$z^2 = -1 - 2\sqrt{6}\, i \Leftrightarrow z^2 - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\, i\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[z - \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\, i\right)\right]\left[z + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\, i\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{2} - \sqrt{3}\, i \\ z = -\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\, i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}\, i. \end{array}\right.$$

f) $z = (1 + 5i)^2 = 1 + 10i + 25i^2 = -24 + 10i$.

Làm tương tự như Ví dụ 2. a), ta được : Số phức $z = (1 + 5i)^2$ có hai căn bậc hai là $1 + 5i$ và $-1 - 5i$.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$ (ẩn z) :

a) $z^2 - 2(2 + i)z + (7 + 4i) = 0$;

b) $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$;

c) $z^2 + (1 + i)z - (1 - i) = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $z^2 - 2(2+i)z + (7+4i) = 0$.

Ta có : $\Delta' = (2+i)^2 - (7+4i) = 4 + i^2 + 4i - 7 - 4i = -4 = 4i^2$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm :

$$z_1 = (2+i) - 2i = 2 - i \ ; \ z_2 = (2+i) + 2i = 2 + 3i.$$

b) $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$.

Ta có : $\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i = (1+i)^2$.

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm :

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-1 + 3i + (1+i)\right] = 2i \ ; \ z_2 = \frac{1}{2}\left[-1 + 3i - (1+i)\right] = -1 + i.$$

c) $z^2 + (1+i)z - (1-i) = 0$.

Ta có : $\Delta = (1+i)^2 + 4(1-i) = 4 - 2i$.

Số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của Δ khi và chỉ khi :

$$w^2 = \Delta \Leftrightarrow (a+bi)^2 = 4 - 2i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 4 - 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 2\sqrt{5} \\ ab = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \sqrt{5} - 2 \\ b^2 = \sqrt{5} + 2 \\ ab = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \sqrt{\sqrt{5} + 2} \\ b = -\sqrt{\sqrt{5} - 2} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\sqrt{\sqrt{5} - 2} \\ b = \sqrt{\sqrt{5} + 2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt :

$$z_1 = \frac{-(1+i) + \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} - i\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{\sqrt{5}+2} - 1 + \left(\sqrt{\sqrt{5}-2} + 1\right)i}{2};$$

$$z_2 = \frac{-(1+i) - \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} - i\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{\sqrt{5}+2} - 1 + \left(\sqrt{\sqrt{5}-2} - 1\right)i}{2}.$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$ (ẩn z) :

a) $(z^2 - z)^2 + 3(z^2 - z) - 4 = 0$;

b) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$;

c) $z^3 + 4z^2 + 6z + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) $\left(z^2 - z\right)^2 + 3\left(z^2 - z\right) - 4 = 0$.

Đặt $t = z^2 - z$, phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2 - z = 1 & (1) \\ z^2 - z = -4. & (2) \end{array}\right.$$

• Giải (1) : $z^2 - z = 1 \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0$. Ta có $\Delta = 1 + 4 = 5$. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

• Giải (2) : $z^2 - z = -4 \Leftrightarrow z^2 - z + 4 = 0$.

Ta có : $\Delta = 1 - 16 = -15 = \left(\sqrt{15}\, i\right)^2$.

Do đó, (2) có hai nghiệm : $z_3 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$ và $z_4 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$.

Tóm lại, phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ z_3 = \frac{1+i\sqrt{15}}{2},\ z_4 = \frac{1-i\sqrt{15}}{2}.$$

b) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Đặt $t = z^2$, phương trình đã cho trở thành : $t^2 + 2t + 4 = 0$. (*)

Ta có $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2$. Do đó :

$(*) \Leftrightarrow t = -1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow z^2 = -1 \pm i\sqrt{3}$.

Sau khi tìm các căn bậc hai của các số $-1 + i\sqrt{3}$ và $-1 - i\sqrt{3}$ ta được 4 nghiệm của phương trình đã cho là : $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) $z^3 + 4z^2 + 6z + 3 = 0$. (*)

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \left(z^3 + 1\right) + 4\left(z^2 - 1\right) + 6(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)\left(z^2 + 3z + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z + 1 = 0 \\ z^2 + 3z + 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^2 + 3z + 3 = 0. \end{array}\right. \qquad (**)$$

Phương trình (**) có $\Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2$ nên có hai nghiệm là $z = -\frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm là : $z = -1$, $z = -\frac{3}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$ (ẩn z) :

a) $2z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0$;

b) $(z-1)(z+5)(z-3)(z+7) = 297$; c) $(z+3)^4 + (z+5)^4 = 16$.

Hướng dẫn giải

a) $2z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 2\left(z - \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$. (1)

Đặt $t = z - \frac{1}{z} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 + 2$. Phương trình (1) trở thành :

$$2\left(t^2+2\right)-2t+1=0 \Leftrightarrow 2t^2-2t+5=0. \qquad (2)$$

Ta có : $\Delta' = 1-10=-9=(3i)^2$ nên (2) có hai nghiệm :

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1+3i}{2} \\ t=\dfrac{1-3i}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1+3i}{2} & (3) \\ z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1-3i}{2}. & (4) \end{array}\right.$$

- $(3) \Leftrightarrow z^2-\left(\dfrac{1+3i}{2}\right)z-1=0 \Leftrightarrow 2z^2-(1+3i)z-2=0. \qquad (*)$

Ta có : $\qquad \Delta=(1+3i)^2+16=8+6i.$

Số phức $w=a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của Δ khi và chỉ khi :

$$w^2=8+6i \Leftrightarrow (a+bi)^2=8+6i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=8+6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ 2ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{9}{a^2}=8 \\ b=\dfrac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-8a^2-9=0 \\ b=\dfrac{3}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b=\dfrac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 3 \\ b=\dfrac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 ; b=1 \\ a=-3 ; b=-1. \end{array}\right.$$

Do đó có hai căn bậc hai của Δ là $3+i$ và $-3-i$, nên $(*)$ có hai nghiệm là : $z_1=\dfrac{1+3i+3+i}{4}=1+i$, $z_2=\dfrac{1+3i-3-i}{4}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i.$

- $(4) \Leftrightarrow z^2-\left(\dfrac{1-3i}{2}\right)z-1=0 \Leftrightarrow 2z^2-(1-3i)z-2=0. \qquad (**)$

Giải hoàn toàn tương tự như trường hợp trên, ta có được hai nghiệm của phương trình $(**)$ là $z_3=1-i$ và $z_4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

Tóm lại, phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

$$z_1=1+i,\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ z_3=1-i \text{ và } z_4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

b) $(z-1)(z+5)(z-3)(z+7)=297$

$$\Leftrightarrow \left(z^2+4z-5\right)\left(z^2+4z-21\right)=297. \qquad (1)$$

Đặt $t=z^2+4z-5$. Phương trình (1) trở thành :

$$t(t-16)=297 \Leftrightarrow t^2-16t-297=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=27 \\ t=-11 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2+4z-5=27 & (2) \\ z^2+4z-5=-11. & (3) \end{array}\right.$$

- $(2) \Leftrightarrow z^2+4z-32=0$. Ta có $\Delta'=36$ nên phương trình có hai nghiệm $z_1=4$, $z_2=-8$.

- $(3) \Leftrightarrow z^2+4z+6=0$. Ta có $\Delta=4-6=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$ nên phương trình có hai nghiệm $z_3=-2+i\sqrt{2}$, $z_4=-2-i\sqrt{2}$.

Tóm lại, phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

$$z_1=4,\ z_2=-8,\ z_3=-2+i\sqrt{2},\ z_4=-2-i\sqrt{2}.$$

c) $(z+3)^4+(z+5)^4=16. \qquad (*)$

Đặt $t=z+\dfrac{3+5}{2}=z+4$. Phương trình $(*)$ trở thành :

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16 \Leftrightarrow t^4+6t^2-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2=1 \\ t^2=-7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\pm 1 \\ t=\pm i\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+4=\pm 1 \\ z+4=\pm i\sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3 \\ z=-5 \\ z=-4+i\sqrt{7} \\ z=-4-i\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$z_1=-3,\ z_2=-5,\ z_3=-4+i\sqrt{7},\ z_4=-4-i\sqrt{7}.$$

Ví dụ 6. Giải các hệ phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} x + y = 2 + 3i \\ x^2 + y^2 = 5 - 4i \end{cases}$; b) $\begin{cases} xy = 1 + 7i \\ x^2 + y^2 = -5 - 10i. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} x + y = 2 + 3i \\ x^2 + y^2 = 5 - 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + 3i \\ (x + y)^2 - 2xy = 5 - 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + 3i \\ xy = -5 + 8i. \end{cases}$

Do đó x, y là hai nghiệm của phương trình :

$$z^2 - (2 + 3i)z - 5 + 8i = 0. \qquad (*)$$

Vì $\Delta = (2 + 3i)^2 - 4(-5 + 8i) = 15 - 20i = \left[\sqrt{5}(2 - i)\right]^2$ nên $(*)$ có hai nghiệm : $z_1 = \dfrac{2 + 3i + 2\sqrt{5} - i\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} + \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}i$;

$$z_2 = \frac{2 + 3i - 2\sqrt{5} + i\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}i.$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm :

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} + \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}i \\ y = 1 - \sqrt{5} + \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}i \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 - \sqrt{5} + \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}i \\ y = 1 + \sqrt{5} + \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}i. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} xy = 1 + 7i \\ x^2 + y^2 = -5 - 10i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 + 7i \\ (x + y)^2 - 2xy = -5 - 10i \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 + 7i \\ (x + y)^2 = -3 + 4i \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} xy = 1 + 7i \\ x + y = 1 + 2i \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} xy = 1 + 7i \\ x + y = -(1 + 2i). \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

- Giải (1) : Từ (1) suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình :

$$z^2-(1+2i)z+1+7i=0. \qquad (*)$$

Vì $\Delta=(1+2i)^2-4(1+7i)=-7-24i=(3-4i)^2$ nên $(*)$ có hai nghiệm : $z_1=\dfrac{1+2i+3-4i}{2}=2-i, z_2=\dfrac{1+2i-3+4i}{2}=-1+3i$.

• Giải (2) : Từ (2) suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình :

$$z^2+(1+2i)z+1+7i=0. \qquad (**)$$

Vì $\Delta=(1+2i)^2-4(1+7i)=-7-24i=(3-4i)^2$ nên $(**)$ có hai nghiệm : $z_3=1-3i$, $z_4=-2+i$.

Tóm lại, hệ đã cho có 4 nghiệm :

$$(2-i:-1+3i), (-1+3i:2-i),$$

$$(1-3i:-2+i), (-2+i:1-3i).$$

Ví dụ 7. Giải các hệ phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases}(3-i)x+2(2+i)y-2(1+3i)=0\\ 2(2+i)x-(2+3i)y-(5+4i)=0\end{cases}$; b) $\begin{cases}x^2+10=3x-y\\ y^2+10=3y-x.\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases}(3-i)x+2(2+i)y-2(1+3i)=0\\ 2(2+i)x-(2+3i)y-(5+4i)=0.\end{cases}$

Ta có : $$D=\begin{vmatrix}3-i & 2(2+i)\\ 2(2+i) & -(2+3i)\end{vmatrix}=-21-23i;$$

$$D_x=\begin{vmatrix}2(1+3i) & 2(2+i)\\ 5+4i & -(2+3i)\end{vmatrix}=2-44i;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3-i & 2(1+3i)\\ 2(2+i) & 5+4i\end{vmatrix}=23-21i.$$

Do đó, hệ đã cho có nghiệm : $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = 1 + i \\ y = \dfrac{D_y}{D} = i. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 10 = 3x - y & (1) \\ y^2 + 10 = 3y - x. & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế, ta được :

$$x^2 - y^2 = 4(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4 - y. \end{array}\right.$$

- $x = y$: Thay $x = y$ vào (1) ta được phương trình :

$$x^2 - 2x + 10 = 0. \qquad (*)$$

Do $\Delta' = 1 - 10 = -9 = (3i)^2$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $x = 1 \pm 3i (= y)$.

- $x = 4 - y$: Thay $x = 4 - y$ vào (2) ta được phương trình :

$$y^2 - 2y + 14 = 0. \qquad (**)$$

Do $\Delta' = 4 - 14 = -10 = \left(i\sqrt{10}\right)^2$ nên phương trình (*) có hai nghiệm $y = 2 \pm i\sqrt{10}$.

Tóm lại, hệ đã cho có 4 nghiệm : $(1 - 3i ; 1 - 3i)$, $(1 + 3i ; 1 + 3i)$, $\left(2 + i\sqrt{10} ; 2 - i\sqrt{10}\right)$, $\left(2 - i\sqrt{10} ; 2 + i\sqrt{10}\right)$.

Ví dụ 8. Giải các hệ phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} x + y + z = 4 + 2i \\ 2x + y - z = 2 + 5i \\ x + 2y + 3z = 9 + 2i \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + iy - 2z - 10 = 0 \\ x - y + 2iz - 20 = 0 \\ i(x + 3y) - (1 + i)z - 30 = 0. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} x + y + z = 4 + 2i & (1) \\ 2x + y - z = 2 + 5i & (2) \\ x + 2y + 3z = 9 + 2i. & (3) \end{cases}$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được : $3x + 2y = 6 + 7i$. (4)

Nhân (2) với 3 rồi cộng với (3), ta được : $7x + 5y = 15 + 17i$. (5)

Từ đó ta có hệ phương trình tương đương :

$$\begin{cases} x + y + z = 4 + 2i & (1) \\ 3x + 2y = 6 + 7i & (4) \\ 7x + 5y = 15 + 17i. & (5) \end{cases}$$

Giải hệ gồm (4) và (5) ta được : $x = i$; $y = 3 + 2i$.

Thay $x = i$; $y = 3 + 2i$ vào (1) ta được : $z = 1 - i$.

Vậy, hệ đã cho có nghiệm $(i ; 3 + 2i ; 1 - i)$.

b)
$$\begin{cases} x + iy - 2z - 10 = 0 & (1) \\ x - y + 2iz - 20 = 0 & (2) \\ i(x + 3y) - (1 + i)z - 30 = 0. & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (3) với $-i$, ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} x + iy - 2z = 10 & (4) \\ x - y + 2iz = 20 & (5) \\ x + 3y + (-1 + i)z = -30i. & (6) \end{cases}$$

Lấy (4) trừ (5) và lấy (6) trừ (5), ta có hệ :

$$\begin{cases} (1 + i)y - 2(1 + i)z = -10 & (7) \\ 4y - (1 + i)z = -20 - 30i. & (8) \end{cases}$$

Ta có : $$D = \begin{vmatrix} 1 + i & -2(1 + i) \\ 4 & -(1 + i) \end{vmatrix} = 2(4 + 3i) \ ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -10 & -2(1 + i) \\ -20 - 30i & -(1 + i) \end{vmatrix} = 30(1 - 3i) \ ;$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 + i & -10 \\ 4 & -20 - 30i \end{vmatrix} = 50(1 - i).$$

Do đó, nghiệm của hệ (7) và (8) là : $\begin{cases} y = \dfrac{D_y}{D} = -3 - 9i \\ z = \dfrac{D_z}{D} = 1 - 7i. \end{cases}$

Thay y, z vừa tìm được vào (1), ta được : $x = 3 - 11i$.

Vậy, nghiệm của hệ đã cho là : $(3 - 11i ; -3 - 9i ; 1 - 7i)$.

Ví dụ 9. Với điều kiện nào thì phương trình

$$z^2 + (a + bi)z + c + di = 0 \ \ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

có nghiệm thực ?

Hướng dẫn giải

Gọi w là một nghiệm thực của phương trình đã cho. Khi đó ta có :

$$w^2 + (a + bi)w + c + di = 0 \Leftrightarrow (w^2 + aw + c) + (bw + d)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w^2 + aw + c = 0 \\ bw + d = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nghiệm thực là : $b^2c - abd + d^2 = 0$.

Ví dụ 10. Tìm các số b, $c \in \mathbb{R}$ để phương trình (ẩn z) $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm nghiệm.

Hướng dẫn giải

$z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi :

$$(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = 0 \Leftrightarrow b + c + (2 + b)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2 + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2. \end{cases}$$

Ví dụ 11. Chứng minh rằng nếu số phức z_0 là một nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ thì số phức liên hợp $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình trên.

Hướng dẫn giải

Giả sử $z_0 = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $\overline{z_0} = x - yi$.

Vì z_0 là một nghiệm của phương trình đã cho nên ta có :

$$a\left(x^2 - y^2\right) + bx + c + \left(2axy + by\right)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(x^2 - y^2\right) + bx + c = 0 \\ 2axy + by = 0. \end{cases}$$

Do đó : $a\overline{z_0}^2 + b\overline{z_0} + c = a\left(x^2 - y^2\right) + bx + c - \left(2axy + by\right)i$

$$= a\left(x^2 - y^2\right) + bx + c = 0.$$

Vậy, $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình nói trên.

Ví dụ 12. Cho phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ (1) $(a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0)$.

a) Chứng minh z_1, z_2 là hai nghiệm cua phương trình (1) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

b) Tìm hai số biết tổng của chúng là $1 + 8i$ và tích của chúng là $-\dfrac{29}{2} + i$.

Hướng dẫn giải

a) z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi :

$$az^2 + bz + c = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right) = az^2 - a\left(z_1 + z_2\right)z + az_1z_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a\left(z_1 + z_2\right) = b \\ az_1z_2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\ z_1z_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

b) Gọi hai số cần tìm là z_1, z_2 thì hai số đó là nghiệm của phương trình :

$$z^2 - (1 + 8i)z - \frac{29}{2} + i = 0. \qquad (*)$$

Vì $\Delta = (1+8i)^2 - 4\left(-\dfrac{29}{2} + i\right) = -5 + 12i = (2+3i)^2$ nên Δ có hai căn bậc hai là $2+3i$ và $-2-3i$. Do đó, (*) có hai nghiệm là $z_1 = \dfrac{1+8i+2+3i}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2}i$, $z_2 = \dfrac{1+8i-2-3i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

Vậy, hai số cần tìm là : $z_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2}i$ và $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

Ví dụ 13. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình

$$2z^2 - (1-2i)z + 3 + 5i = 0.$$

Tính : a) $A = z_1^3 + z_2^3$; b) $B = \dfrac{1}{z_1^4} + \dfrac{1}{z_2^4}$.

Hướng dẫn giải

z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 - (1-2i)z + 3 + 5i = 0$

nên ta có : $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{1-2i}{2} \\ z_1 z_2 = \dfrac{3+5i}{2}. \end{cases}$

Từ đó suy ra :

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = \left(\frac{1-2i}{2}\right)^2 - (3+5i) = -\frac{15}{4} - 6i.$$

a) $A = z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2)$

$$= \left(\frac{1-2i}{2}\right)\left(-\frac{15}{4} - 6i - \frac{3+5i}{2}\right) = \left(\frac{1-2i}{2}\right)\left(\frac{-21-34i}{4}\right)$$

$$= \frac{-89+12i}{8} = -\frac{89}{8} + \frac{3}{2}i.$$

b) $B = \dfrac{1}{z_1^4} + \dfrac{1}{z_2^4} = \dfrac{z_1^4 + z_2^4}{(z_1z_2)^4} = \dfrac{(z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2z_2^2}{(z_1z_2)^4}$

$$=\frac{\left(-\frac{15}{4}-6i\right)^2-2\left(\frac{3+5i}{2}\right)^2}{\left(\frac{3+5i}{2}\right)^4}=\frac{(15+6i)^2-8(3+5i)^2}{(3+5i)^4}$$

$$=\frac{(189+180i)-8(-16+30i)}{(-16+30i)^2}=\frac{317-60i}{-644-960i}$$

$$=\frac{(317-60i)(-644+960i)}{644^2+960^2}=\frac{-146548+342960i}{1336336}$$

$$=-\frac{146548}{1336336}+\frac{342960}{1336336}i=-\frac{36637}{334084}+\frac{21435}{83521}i.$$

C. LUYỆN TẬP

25.1 Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

a) $1+4\sqrt{3}\,i$; b) $17+20\sqrt{2}\,i$;

c) $-8+6i$; d) $46-14\sqrt{3}\,i$.

25.2 Giải các phương trình bậc hai sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $z^2-4z+7=0$; b) $2z^2+z+3=0$;

c) $z^2-2(2+i)z+7+4i=0$; d) $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$.

25.3 Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $z^3-2(1+i)z^2+3iz+1-i=0$;

b) $z^4+4(2+i)z^2+43-4i=0$;

c) $z^4-z^3+\frac{z^2}{2}+z+1=0$;

d) $z^6-9z^3+8=0$.

25.4 Giải các hệ phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $\begin{cases} x+y=4+i \\ x^2+y^2=5-2i \end{cases}$; b) $\begin{cases} xy=-5(1+i) \\ x^2+y^2=-5+2i. \end{cases}$

25.5 Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng $4 - i$ và tích của chúng bằng $5(1 - i)$.

25.6 Giả sử phương trình $z^2 + az + 3i = 0$ $(a \in \mathbb{C})$ có nghiệm. Tìm số phức a để tổng bình phương của hai nghiệm nói trên bằng 8.

25.7 Tìm các số a, b, $c \in \mathbb{R}$ để phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ và $z = 2$ làm nghiệm.

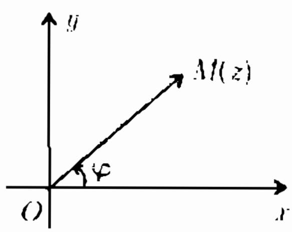
§ 26. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số phức dưới dạng lượng giác

a) Acgumen của số phức $z \neq 0$

Định nghĩa 1. Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.



Chú ý : Nếu φ là acgumen của z thì mọi acgumen cua z có dạng $\varphi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Dạng lượng giác của số phức. Xét số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

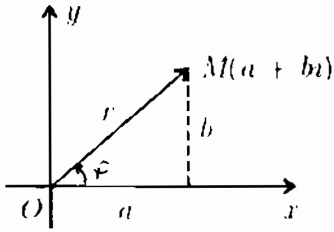
Kí hiệu r là môđun của z và φ là một acgumen của z thì dễ thấy rằng : $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Vậy :

$$z = a + bi = (r\cos\varphi) + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Định nghĩa 2. Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là dạng lượng của số phức $z \neq 0$. Còn dạng $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được gọi là dạng đại số của số phức z.

Chú ý :

1) Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước, ta thực hiện như sau :



• Tìm r : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ là môđun cua z và cũng chính là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

• Tìm φ : φ là một acgumen của z ; φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

2) $|z| = 1 \Leftrightarrow z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

3) Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tuỳ ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$).

4) Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Định lí. Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$; $r \geq 0$, $r' \geq 0$ thì :

• $zz' = rr'\left[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\right]$;

• $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\left[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')\right]$, khi $r' > 0$.

3. Công thức Moivre và ứng dụng

a) Công thức Moivre. Với mọi số n nguyên dương, ta có :

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Đặc biệt : Khi $r = 1$, ta có : $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

b) Ứng dụng vào lượng giác

Ta có : $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi(i\sin\varphi) +$

$$+3\cos\varphi(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3\ ; \qquad (1)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

- $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$;
- $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

c) Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ có hai căn bậc hai là :

- $\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$;
- $-\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2} + \pi\right)\right]$.

d) Căn bậc n của số phức dưới dạng lượng giác

Định lí. Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là số phức với $r > 0$ và $\varphi \in [0 ; 2\pi)$. Căn bậc n của z gồm n số phân biệt, cho bởi :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right],\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

B. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Biểu diễn dưới dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $z = -3$; b) $z = 2$;

c) $z = i$; d) $z = -2i$.

Hướng dẫn giải

a) $z=-\sqrt{3} \Rightarrow r=|z|=\sqrt{3}$; Điểm M biểu diễn số phức $z=-\sqrt{3}$ trên mặt phẳng phức có toạ độ $M\left(-\sqrt{3}\,;0\right)$ nên suy ra z có một acgumen là $\varphi=\pi$. Vậy : $z=\sqrt{3}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$.

b) $z=2 \Rightarrow r=|z|=2$; Điểm M biểu diễn số phức $z=2$ trên mặt phẳng phức có toạ độ $M(2\,;0)$ nên suy ra z có một acgumen là $\varphi=0$. Vậy : $z=2\left(\cos 0+i\sin 0\right)$.

c) $z=i \Rightarrow r=|z|=1$; Điểm M biểu diễn số phức $z=i$ trên mặt phẳng phức có toạ độ $M(0\,;1)$ nên suy ra z có một acgumen là $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Vậy : $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

d) $z=-2i \Rightarrow r=|z|=2$; Điểm M biểu diễn số phức $z=-2i$ trên mặt phẳng phức có toạ độ $M(0\,;-2)$ nên suy ra z có một acgumen là $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. Vậy : $z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Ví dụ 2. Biểu diễn dưới dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $z=1-\sqrt{3}\,i$; b) $z=\sqrt{3}+i$.

Hướng dẫn giải

a) $$z=1-\sqrt{3}\,i \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2 \\ \cos\varphi=\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ \varphi=-\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Cách khác. $z=1-\sqrt{3}\,i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

b) $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow z = 2\left[\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right].$

Ví dụ 3. Biểu diễn dưới dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$; b) $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$;

b) $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(-\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left[\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).$

Ví dụ 4. Biểu diễn dưới dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$; b) $z = (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$.

Hướng dẫn giải

a) $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \dfrac{(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)}{3 - i^2} = \dfrac{-4i}{4} = -i = 1(0 - i)$

$= 1\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right].$

b) • $1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$;

• $1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right].$

$$z = \left(1 - i\sqrt{3}\right)(1 + i)$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

Ví dụ 5. Biểu diễn dưới dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $z = \sin\varphi + 2i\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$; b) $z = \cos\varphi + i(1 + \sin\varphi)$;

c) $z = \dfrac{1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1 + \cos\varphi + i\sin\varphi}$.

Hướng dẫn giải

a) $z = \sin\varphi + 2i\sin^2\dfrac{\varphi}{2} = 2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right).$ (1)

- $\sin\dfrac{\varphi}{2} = 0$: acgumen của z không xác định.

- $\sin\dfrac{\varphi}{2} > 0$: (1) là dạng lượng giác của z .

- $\sin\dfrac{\varphi}{2} < 0$: $z = -2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2} + \pi\right)\right].$

b) $z = \cos\varphi + i(1 + \sin\varphi) = \sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right) + i\left[1 - \cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 2i\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad (2)$$

- $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$: acgumen của z không xác định.

- $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$: (2) là dạng lượng giác của z.

- $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0: r=-2\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

c) $z=\dfrac{1-\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}=\dfrac{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}=-i\tan\frac{\varphi}{2}.$$

- $\tan\frac{\varphi}{2}=0$: acgumen của z không xác định.

- $\tan\frac{\varphi}{2}>0$: $z=\tan\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right]$.

- $\tan\frac{\varphi}{2}<0$: $r=-\tan\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 6. Tìm một acgumen của mỗi số phức sau :

a) $r=-2+2\sqrt{3}\,i$;

b) $r=\sqrt{3}-i$;

c) $z=(a+2i)^3+(a-2i)^3$, $(a\in\mathbb{R})$;

d) $z=\dfrac{1-(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}$.

Hướng dẫn giải

a) Số phức $r=-2+2\sqrt{3}\,i$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là $M\left(-2\,;\,2\sqrt{3}\right)$ nên suy ra $(Ox, OM)=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Do đó z có một acgumen là $\frac{2\pi}{3}$.

b) $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Vậy z có một acgumen là $-\frac{\pi}{6}$.

c) $z = (a + 2i)^3 + (a - 2i)^3 = 2a(a^2 - 12)$, $a \in \mathbb{R}$.

- $2a(a^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \pm 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow$ acgumen của z không xác định.

- $2a(a^2 - 12) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} < a < 0 \\ a > 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow z$ có một acgumen là 0.

- $2a(a^2 - 12) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 2\sqrt{3} \\ a < -2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow z$ có một acgumen là π.

d) $$z = \frac{1 - (\cos\varphi - i\sin\varphi)}{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}$$

$$= \frac{\left[(1 - \cos\varphi) + i\sin\varphi\right]\left[(1 + \cos\varphi) + i\sin\varphi\right]}{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{1 - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi}i.$$

- $\frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} > 0 \Rightarrow z = \frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

  $\Rightarrow z$ có một acgumen là $\frac{\pi}{2}$.

- $\frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} < 0 \Rightarrow z = -\frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

  có m ột acgumen là $-\frac{\pi}{2}$.

- $\frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = 0 \Rightarrow$ acgumen của z không xác định.

Ví dụ 7. Tìm một acgumen cua số phức $w = z - (1 + i\sqrt{3})$ biết một acgumen cua z bằng $\dfrac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Vì z có một acgumen bằng $\dfrac{\pi}{3}$ nên $z = |z|\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. Do đó ta có :

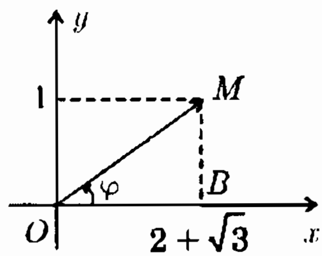
$$w = z - (1 + i\sqrt{3}) = |z|\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - (1 + i\sqrt{3}) = (|z| - 2)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

- $|z| > 2$: w có một acgumen là $\dfrac{\pi}{3}$.
- $0 < |z| < 2$: w có một acgumen là $\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$.
- $|z| = 2$: acgumen cua w không xác định.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng số phức $z = 2 + \sqrt{3} + i$ có acgumen là $\dfrac{\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

Trên mặt phẳng phức, số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(2 + \sqrt{3} ; 1)$.



Đặt $(OB, OM) = \widehat{BOM} = \varphi$, ta có :

$$\tan\varphi = \frac{MB}{OH} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Do đó : $\sin 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi} = \dfrac{2(2 - \sqrt{3})}{1 + (2 - \sqrt{3})^2} = \dfrac{2(2 - \sqrt{3})}{8 - 4\sqrt{3}}$

$$= \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Tương tự : $\cos 2\varphi = \dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $2\varphi = \dfrac{\pi}{6} + l2\pi \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{12} + l\pi,\ \ l \in \mathbb{Z}$. Do $\sin\varphi > 0$ nên chọn $\varphi = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, acgumen của $z = 2 + \sqrt{3} + i$ là $\varphi = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 9. Cho số phức $z = 1 - \cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}$. Tính môđun, acgumen của z và viết z dưới dạng lượng giác.

Hướng dẫn giải

Ta có : $|z| = \sqrt{\left(1-\cos\dfrac{\pi}{7}\right)^2 + \sin^2\dfrac{\pi}{7}} = \sqrt{2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{7}\right)}$

$$= \sqrt{2\left(1+\cos\frac{8\pi}{7}\right)} = -2\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Gọi φ là acgumen của z, thì :

$$\tan\varphi = \frac{-\sin\dfrac{\pi}{7}}{1-\cos\dfrac{\pi}{7}} = \frac{\sin\dfrac{8\pi}{7}}{2\cos^2\dfrac{4\pi}{7}} = \tan\frac{4\pi}{7} \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{7} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vì z có phần thực $1-\cos\dfrac{\pi}{7} > 0$, phần ảo $-\sin\dfrac{\pi}{7} < 0$ nên chọn một acgumen của z là $\dfrac{11\pi}{7}$. Vậy : $z = -2\cos\dfrac{4\pi}{7}\left(\cos\dfrac{11\pi}{7} + i\sin\dfrac{11\pi}{7}\right)$.

Ví dụ 10. Viết dưới dạng lượng giác của số phức z sao cho $|z| = \dfrac{1}{3}$ và một acgumen của $\dfrac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết $|z| = \frac{1}{3}$ nên suy ra số phức z có dạng lượng giác là :

$$z = \frac{1}{3}(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi \text{ là một acgumen của } z. \qquad (1)$$

Từ đó : $\bar{z} = \frac{1}{3}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{3}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. $\qquad (2)$

Ta có : $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. $\qquad (3)$

Từ (2) và (3) ta có :

$$\frac{\bar{z}}{1+i} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)}{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\left(-\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{4} - i^2\sin^2\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left[\pi + \left(-\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\varphi + \frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

Từ đó suy ra : $\varphi + \frac{\pi}{4} = -\varphi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2\varphi = \frac{2\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Thay $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vào (1), ta được : $z = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 11. Cho các số phức $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

a) Viết z_1, z_2, z_3 dưới dạng lượng giác.

b) Dựa vào kết quả câu a), tính $\cos\frac{7\pi}{12}$ và $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

$$z_2 = 2(-1 - i) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right];$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}. \qquad (1)$$

b) Ta lại có : $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-2 - 2i} = \frac{\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)(-2 + 2i)}{(-2 - 2i)(-2 + 2i)}$

$$= \frac{-2\sqrt{6} + i2\sqrt{6} + i2\sqrt{2} - 2i^2\sqrt{2}}{(-2)^2 - (2i)^2} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + 2\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)i}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i. \qquad (3)$$

Từ (3), đồng nhất phần thực và phần ảo của số phức z_3 ta được :

$$\begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$$

Ví dụ 12. Tính :

a) $\left(\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$; b) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \dfrac{\left(5+3i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)}{\left(1-2i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{-13+13i\sqrt{3}}{13}$

$$= -1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Do đó : $\left(\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21} = 2^{21}\left(\cos\dfrac{42\pi}{3} + i\sin\dfrac{42\pi}{3}\right) = 2^{21}$.

b) Ta có :

- $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

  $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15} = 2^{15}\left(\cos 10\pi + i\sin 10\pi\right) = 2^{15}$.

- $-1-i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$;

  $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15} = 2^{15}\left(\cos 20\pi + i\sin 20\pi\right) = 2^{15}$.

- $(1-i)^{20} = \left[(1-i)^2\right]^{10} = (-2i)^{10} = 2^{10}\left(i^2\right)^5 = -2^{10}$.

- $(1+i)^{20} = \left[(1+i)^2\right]^{10} = (2i)^{10} = 2^{10}\left(i^2\right)^5 = -2^{10}$.

Vậy : $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}=\dfrac{2^{15}}{-2^{10}}+\dfrac{2^{15}}{-2^{10}}=-2.2^{5}=-64$.

Ví dụ 13. Viết mỗi số phức sau dưới dạng đại số :

a) $z=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^{7}$; b) $z=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2009}$;

c) $z=\dfrac{\left(i-\sqrt{3}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}{1-i}$; d) $z=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{8}$.

Hướng dẫn giải

a) $z=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^{7}=\left(\sqrt{2}\right)^{7}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$=8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)=-4\sqrt{6}-i4\sqrt{2}$.

b) $z=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2009}=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^{2009}$

$=\cos\left(669.2\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(669.2\pi+\dfrac{4\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

c) Ta có : $i-\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$=\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$;

$1-i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Do đó : $z=\dfrac{\left(i-\sqrt{3}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}{1-i}$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{2}\,.$$

d) Ta có : $2\cos^2\dfrac{\pi}{8} = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;

$$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Do đó : $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}i\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Vậy : $z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^8 = 2^8\left(\cos\dfrac{8\pi}{8} + i\sin\dfrac{8\pi}{8}\right) = -256$

Ví dụ 14. Tìm căn bậc hai của mỗi số phức sau :

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$; b) $z = 1 - i\tan\dfrac{5\pi}{8}$; c) $z = \sin\varphi - \cos\varphi$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

Vậy $z = 1 - i\sqrt{3}$ có hai căn bậc hai là :

$$w_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}\right)\right],\ k \in \{0, 1\}.$$

- $k = 0$: $w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$
- $k = 1$: $w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

b) Ta có : $z = 1 - i\tan\frac{5\pi}{8} = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$

$$= \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)\right].$$

Vậy $z = 1 - i\tan\frac{5\pi}{8}$ có hai căn bậc hai là :

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{5\pi}{8}}}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{16}\right)\right];$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{5\pi}{8}}}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right].$$

c) Ta có : $z = \sin\varphi - \cos\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $z = \sin\varphi - \cos\varphi$ có hai căn bậc hai là :

$$w_1 = \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Ví dụ 15. Viết dạng lượng giác và tìm căn bậc hai của số phức z, biết $|z| = \frac{1}{3}$ và một acgumen của $\frac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi φ là một acgumen của z thì $-\varphi$ là một acgumen của $\overline{z}$.

Ngoài ra, dễ thấy một acgumen của số phức $1+i$ là $\frac{\pi}{4}$.

Vậy, một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\varphi - \frac{\pi}{4}$.

Nhưng theo giả thiết, một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1+i}$ là $-\frac{3\pi}{4}$. Do đó, ta có :

$$-\varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, dạng lượng giác của z là : $z = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó suy ra z có hai căn bậc hai là :

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ và } w_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Ví dụ 16. Cho số phức $z = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Viết dạng lượng giác của z^2, từ đó suy ra dạng lượng giác của số phức z.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$z^2 = \left[(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})\right]^2 = -8\sqrt{3} - 8i = 16\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 16\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 16\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

z là một căn bậc hai của z^2 nên $z = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$.

Ví dụ 17. Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $3z^3 - 24 = 0$; b) $2z^4 + 16 = 0$; c) $z^5 - 1 - i\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $3z^3 - 24 = 0 \Leftrightarrow z^3 = 8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$. Do đó phương trình đã cho có ba nghiệm là ba căn bậc ba của z :

$$w_k = 2\left(\cos\frac{k2\pi}{3} + i\sin\frac{k2\pi}{3}\right),\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

- $k = 0$: $w_0 = 2$;

- $k = 1$: $w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\left[-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3};$$

- $k = 2$: $w_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\left[-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

b) Ta có : $2z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm là 4 căn bậc 4 của z :

$$w_k = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi + k2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + k2\pi}{4}\right)\right],\ k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

$w_0 = \sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$, $\qquad w_1 = -\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$,

$w_3 = -\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$. $\qquad w_4 = \sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$.

c) Ta có : $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow z^5 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Do đó phương trình đã cho có 5 nghiệm là 5 căn bậc 5 của z :

$$w_k = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \sqrt[5]{2}\left[\cos\frac{(6k+1)\pi}{15} + i\sin\frac{(6k+1)\pi}{15}\right],\ k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm là :

$$w_0 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right), \qquad w_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right), \qquad w_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right),$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0 & (1) \\ z^{2008} + z^{2009} + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $(1) \Leftrightarrow (z+1)(z^2+z+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z^2 + z + 1 = 0. \end{array}\right.$ (3)

Phương trình (3) có biệt thức $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ nên có hai nghiệm là : $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$.

- Với $z = -1$, thì (2) không nghiệm đúng. Vậy $z = -1$ không là nghiệm của hệ đã cho.

- Với $z = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$, ta có :

$$z^{2008} + z^{2009} + 1 = \cos\left(2008\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2009\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\pm i\left[\sin\left(2008\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\right]\left(2009\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + 1$$

$$= 2\cos(1339\pi)\cos\frac{\pi}{3} \pm 2i\sin(1339\pi)\sin\frac{\pi}{3} + 1$$

$$= 2(-1)\frac{1}{2} \pm i.0 + 1 = 0.$$

Do đó (2) được nghiệm đúng khi $z = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là : $z = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ví dụ 19. Chứng minh hệ thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\left(\dfrac{1 + \sin x + i\cos x}{1 + \sin x - i\cos x}\right)^n = \cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right] + i\sin\left[n\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right]$;

b) $\left(\dfrac{1 + i\tan x}{1 - i\tan x}\right)^n = \dfrac{1 + i\tan nx}{1 - i\tan nx}$.

Hướng dẫn giải

a) $1 + \sin x + i\cos x = 1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right];$$

$$1 + \sin x - i\cos x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right];$$

$$\frac{1 + \sin x + i\cos x}{1 + \sin x - i\cos x} = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\left(\frac{1 + \sin x + i\cos x}{1 + \sin x - i\cos x}\right)^n = \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] + i\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right].$$

b) $$\frac{1 + i\tan x}{1 - i\tan x} = \frac{1 + \dfrac{i\sin nx}{\cos nx}}{1 - \dfrac{i\sin nx}{\cos nx}} = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x};$$

$$\left(\frac{1 + i\tan x}{1 - i\tan x}\right)^n = \left(\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}\right)^n = \frac{\cos nx + i\sin nx}{\cos nx - i\sin nx} = \frac{1 + \dfrac{i\sin nx}{\cos nx}}{1 - \dfrac{i\sin nx}{\cos nx}}$$

$$= \frac{1 + i\tan nx}{1 - i\tan nx}.$$

Ví dụ 20. Cho số phức $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có :

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi \text{ và } z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\varphi.$$

b) Chứng minh rằng :

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3);$$

$$\sin^5\varphi = \frac{1}{16}(\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi).$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $z = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow \overline{z} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\Rightarrow z.\overline{z} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi).$$

a) $\begin{cases} z = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \dfrac{1}{z} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \\ \dfrac{1}{z^n} = \cos[n(-\varphi)] + i\sin[n(-\varphi)] \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \\ \dfrac{1}{z^n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi \\ z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin n\varphi. \end{cases}$$

b) $\begin{cases} z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi \\ z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin n\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\varphi \\ z - \dfrac{1}{z} = 2i\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \end{cases}$

- $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \Rightarrow \cos^4\varphi = \left[\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right]^4.$

Sử dụng công thức Nhị thức Newton, ta có :

$$\cos^4\varphi = \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^4 = \frac{1}{2^4}\left[\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + C_4^1\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + C_4^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4\varphi + 4.2\cos 2\varphi + 6) = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$$

- $\sin\varphi = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \Rightarrow \sin^5\varphi = \left[\dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right]^5.$

Sử dụng công thức Nhị thức Newton, ta có :

$$\sin^5\varphi = \left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^5 = \frac{1}{32i}\left[\left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - C_5^1\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + C_5^2\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{32i}\left(2i\sin 5\varphi - 5.2i\sin 3\varphi + 10.2i\sin\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin\varphi\right).$$

Ví dụ 21. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Hướng dẫn giải

Đặt : $\begin{cases} T = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \\ S = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx. \end{cases}$

Xét số phức $z = \cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}$, ta có :

$$S + iT = z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n} = z^2\cdot\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} = z^2\cdot\frac{z^n\left(z^n - z^{-n}\right)}{z\left(z - z^{-1}\right)}$$

$$= z^{n+1}\cdot\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}.$$

Ta lại có :

$$z^n - z^{-n} = \cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2} - \left[\cos\left(-\frac{nx}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{nx}{2}\right)\right] = 2i\sin\frac{nx}{2};$$

$$z - z^{-1} = \cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2} - \left[\cos\left(-\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = 2i\sin\frac{x}{2};$$

$$\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$z^{n+1} = \cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

Vậy : $S + iT = \left[\cos\dfrac{(n+1)x}{2} + i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\right]\cdot\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

Từ đó suy ra phần ảo của số phức $S + iT$ là :

$$T = \sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}. \qquad (1)$$

Theo cách đặt ở trên : $T = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$. (2)

Từ (1) và (2) cho ta :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cdot\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Ví dụ 22. Tính : $M_1 = C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - \cdots + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$

$M_2 = C_{19}^1 - C_{19}^3 + C_{19}^5 - \cdots + C_{19}^{17} - C_{19}^{19}$.

Hướng dẫn giải

- Theo công thức Nhị thức Newton, ta có :

$$(1+i)^{19} = C_{19}^0 + C_{19}^1 i + C_{19}^2 i^2 + \cdots + C_{19}^{17} i^{17} + C_{19}^{18} i^{18} + C_{19}^{19} i^{19}.$$

Ta lại có : $i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = i^{18} = -1$;

$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = i^{19} = -i$;

$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = 1$;

$i^5 = i^9 = i^{13} = i^{17} = i$.

Do đó : $(1+i)^{19} = C_{19}^0 + C_{19}^1 i - C_{19}^2 - C_{19}^3 i + C_{19}^4$

$\cdots + C_{19}^{16} + C_{19}^{17} - C_{19}^{18} - C_{19}^{19} i$

$= \left(C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - \cdots + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}\right)$

$+\left(C_{19}^1 - C_{19}^3 + C_{19}^5 - \cdots + C_{19}^{17} - C_{19}^{19}\right)i$. (1)

• Ta có : $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Từ đó suy ra :

$$(1+i)^{19}=\left(\sqrt{2}\right)^{19}\left(\cos\frac{19\pi}{4}+i\sin\frac{19\pi}{4}\right)$$

$$=2^9\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+4\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4\pi\right)\right]$$

$$=512\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=512\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-512+512i. \qquad (2)$$

• Đồng nhất phần thực và phần ảo của số phức $(1+i)^{19}$ ở (1) và (2), ta được : $M_1=C_{19}^0-C_{19}^2+C_{19}^4-\cdots+C_{19}^{16}-C_{19}^{18}=-512$;

$$M_2=C_{19}^1-C_{19}^3+C_{19}^5-\cdots+C_{19}^{17}-C_{19}^{19}=512.$$

Ví dụ 23. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n\geq 6$, ta có :

$$1+C_n^3+C_n^6+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Hướng dẫn giải

• Theo công thức Nhị thức Newton, ta có :

$$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+C_n^5+C_n^6+\cdots ;$$

$$(1+z)^n=C_n^0+C_n^1z+C_n^2z^2+C_n^3z^3+C_n^4z^4+C_n^5z^5+C_n^6z^6+\cdots ;$$

$$(1+z^2)^n=C_n^0+C_n^1z^2+C_n^2z^4+C_n^3z^6+C_n^4z^8+C_n^5z^{10}+C_n^6z^{12}+\cdots .$$

Do đó : $2^n+(1+z)^n+(1+z^2)^n$

$$=3C_n^0+C_n^1\left(1+z+z^2\right)+C_n^2\left(1+z^2+z^4\right)$$

$$+C_n^3\left(1+z^3+z^6\right)+C_n^4\left(1+z^4+z^8\right)$$

$$+C_n^5\left(1+z^5+z^{10}\right)+C_n^6\left(1+z^6+z^{12}\right)+\cdots$$

• Chọn $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có :

$$z^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \Rightarrow \begin{cases} z^1 = z^7 = \cdots = z \\ z^5 = z^8 = \cdots = z^2 \\ z^6 = z^9 = \cdots = 1 \end{cases};$$

$$z^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$1 + z = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3};$$

$$(1+z)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3};$$

$$1 + z^2 = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$(1+z^2)^n = \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Khi đó :

$$1 + z + z^2 = 0;$$

$$1 + z^2 + z^4 = 1 + z^2 + z = 0 \text{ (vì } z^4 = z\text{)};$$

$$1 + z^3 + z^6 = 3 \text{ (vì } z^3 = z^6 = 1\text{)};$$

$$1 + z^5 + z^{10} = 1 + z^2 + z = 0 \text{ (vì } z^5 = z^2 \text{ và } z^{10} = z\text{)};$$

$$1 + z^6 + z^{12} = 3 \text{ (vì } z^6 = z^{12} = 1\text{)}.$$

• Từ các kết quả trên, ta được :

$$2^n + \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$= 3C_n^0 + 3C_n^3 + 3C_n^6 + \cdots$$

Do đó : $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$

C. LUYỆN TẬP

26.1 Xác định dạng lượng giác của các số phức sau :

a) $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$; b) $z = \sin\dfrac{\pi}{17} + i\cos\dfrac{\pi}{17}$;

c) $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

26.2 Xác định phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a) $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)i^9\left(\sqrt{3} + i\right)^5$;

b) $z = \dfrac{\left(\sqrt{2} - i\sqrt{6}\right)^{2008}}{\left(\sin\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)^{2009}}$.

26.3 Tính :

a) $(1 - i)^4\left(\sqrt{3} + i\right)^6$; b) $\dfrac{(1 + i)^{10}}{\left(\sqrt{3} + i\right)^9}$;

c) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$; d) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$.

26.4 Cho số phức $z = \dfrac{i - \sqrt{3}}{2}$. Rút gọn biểu thức :

$$P = z^{2008} + z^{2009} + z^{2010}.$$

26.5 Xác định $\alpha \in (0 ; 2\pi)$ sao cho $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$. Suy ra các căn bậc ba của $z = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$.

26.6 Tính các tổng sau khi $n = 4k + 1$:

$$S = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 - \cdots + C_{2n+1}^{2n-2} - C_{2n+1}^{2n} ;$$

$$S' = C_{2n+1}^1 - C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 - \cdots + C_{2n+1}^{2n-1} - C_{2n+1}^{2n+1}.$$

Phần II.

HƯỚNG DẪN GIẢI – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

Chương 1.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1.1 Lưu ý $m = 2$ thoả mãn bài toán. Đáp số : $m < -2$ hoặc $m > 1$.

1.2 $a = -1$ và $b = 1$.

1.3 $1 < m < 9$.

1.4 Với $a \neq 0$ và $b \neq 0$, phương trình cho được biến đổi thành :

$$x\left[(a+b)x - 2\right] = 0.$$

Đáp số : $a^2 \neq b^2$: $x = 0$ và $x = \dfrac{2}{a+b}$; $a^2 = b^2$: $x = 0$.

2.1 Gọi X là tập nghiệm của bất phương trình : $mx > 2m + 1$ (1). Ta tìm m sao cho $(-1 ; 1) \subset X$ (2).

Điều kiện cần. Nếu mọi $x \in (-1 ; 1)$ đều thoả mãn (1) thì $x = 0$ thoả mãn (1), suy ra $2m + 1 < 0$ hay $m < -\dfrac{1}{2}$.

Đảo lại, với $m < -\dfrac{1}{2}$ (do đó $m < 0$) thì $X = \left(-\infty ; \dfrac{2m+1}{m}\right)$.

Điều kiện (2) được thoả mãn khi và chỉ khi : $\dfrac{2m+1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

2.2 $0 \leq m \leq 1$ hoặc $m \geq 4$.

2.3 $a = -1 - \sqrt{2}$.

3.1 $\Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq 2a_1a_2 - 4(b_1 + b_2)$

$$= [a_1a_2 - 2(b_1 + b_2)] \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_2 \geq 0.$$

3.2 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{5} \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -\dfrac{28}{5} \end{cases}$ ta được $m = -13$ hoặc $m = \dfrac{19}{2}$.

3.3 $\Delta' = 2k^2 - 4k + 3 = 2(k-1)^2 + 1 > 0$ với mọi $k \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1x_2 = -k^2 + 4k - 3. \end{cases}$

Thay vào vế trái của hệ thức (2), hệ thức (2) được thoả mãn.

3.4 $x^2 - 2kx + 2k^2 + \dfrac{4}{k^2} - 5 = 0$ (1).

a) $\Delta' = k^2 - 2k^2 - \dfrac{4}{k^2} + 5 = -\dfrac{1}{k^2}(k^4 - 5k^2 + 4)$;

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow k^4 - 5k^2 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq k^2 \leq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq k \leq -1 \\ 1 \leq k \leq 2. \end{array}\right.$$

b) $E = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]$

$$= 2k\left(4k^2 - 4k^2 - \frac{8}{k^2} + 10\right) = 4k\left(5 - \frac{4}{k^2}\right).$$

Suy ra $E = 4\left(5k - \dfrac{4}{k}\right)$. Đặt $f(k) = 4\left(5k - \dfrac{4}{k}\right)$, $k \in [-2;-1] \cup [1;2]$.

Ta có : $f'(k) = 4\left(5 + \dfrac{4}{k^2}\right) > 0$ với mọi $k \neq 0$. Suy ra $f'(k)$ đồng biến trên mỗi đoạn $[-2;-1]$ và $[1;2]$. Ta có $f(-2) = -32$, $f(-1) = -4$, $f(1) = 4$, $f(x) = 32$. Vậy :

a) E đạt giá trị lớn nhất là 32 khi $k = 2$;

b) E đạt giá trị nhỏ nhất là -32 khi $k = -2$.

3.5 $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$.

1) $\Delta' = (m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$.

2) Phương trình có nghiệm $x \geq 1$ trong các trường hợp sau :

a) $f(1) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 7 \leq 0 \Leftrightarrow -3 - \sqrt{2} \leq m \leq -3 + \sqrt{2}$ (1)

b) $$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f(1) \leq 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m \leq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 - \sqrt{2} \\ m > -3 + \sqrt{2} \end{array}\right. \\ m < -3 \end{cases}$$

Tổng hợp các kết quả (1) và (2), ta được : $-5 \leq m \leq -3 + \sqrt{2}$.

3) Với $-5 \leq m \leq -1$, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 1 \\ x_1 x_2 = \dfrac{1}{2}(m^2 + 4m + 3). \end{cases}$

Suy ra : $A = \left|x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)\right| = \dfrac{1}{2}\left|m^2 + 8m + 7\right|$.

Nhận xét : $-5 \leq m \leq -1 \Rightarrow m^2 + 8m + 7 \leq 0$. Do đó :

$$A = \frac{1}{2}(-m^2 - 8m - 7) = \frac{1}{2}\left[-(m^2 + 8m + 16) + 9\right]$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(m+4)^2 \leq \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $m = -4$ (thích hợp). Vậy, biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{9}{2}$ khi $m = -4$.

4.1 $2x^2 + 8x - 7\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 20 = 0$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 + 4x + 7) - 7\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 6 = 0.$$

• Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4x + 7} \Rightarrow t = \sqrt{(x+2)^2 + 3} \geq \sqrt{3}$.

• $(1) \Rightarrow 2t^2 - 7t + 6 = 0 \ (2)$

• $(2) \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$ (loại) hoặc $t = 2$.

• Do đó : $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 7} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 7 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -3.$$

4.2 $(x+1)^4 + (x-3)^4 = 82 \quad (1)$

• Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Suy ra :

$$(t+2)^2 + (t-2)^2 = 82 \Leftrightarrow t^4 + 24t^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

• Do đó : $\quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0. \end{array}\right.$

4.3 a) Giải : $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$. Ta có $t^2 + 5t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -7$. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = 2 \\ x + \dfrac{1}{x} = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 7x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

b) Giải : $x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16 = 0 \quad (1)$

• ***Nhận xét :*** $x = 0$ không phải là nghiệm của (1). Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow (x^4 + 16) - 9(x^3 + 4x) + 28x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{4}{x}\right) + 28 = 0.$$

• Đặt $t = x + \dfrac{4}{x} \Rightarrow |t| \geq 4$. Ta được phương trình :

$$t^2 - 8 - 9t + 28 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 5. \end{array}\right.$$

• Do đó : $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{4}{x} = 4 \\ x + \dfrac{4}{x} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 4. \end{array}\right.$

4.4 $(x^2 - 2x + 2)^2 - 2(m - 3)(x^2 - 2x + 2) + m^2 - 6m = 0$ (1)

• Đặt $t = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow t = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$

• $(1) \Rightarrow t^2 - 2(m - 3)t + m^2 - 6m = 0$ (2)

• Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm là phương trình (2) có nghiệm $t \geq 1$. Ta có : $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = m \\ t = m - 6. \end{array}\right.$ Do đó, điều kiện cần tìm là : $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m - 6 \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq 1.$

4.5 $(m - 4)x^4 - 2(m - 2)x^2 + m - 1 = 0.$ (1)

• Đặt : $t = x^2 > 0$, ta được phương trình :

$$(m - 4)t^2 - 2(m - 2)t + m - 1 = 0. \quad (2)$$

• Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt là phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt, tức là :

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \dfrac{m - 1}{m - 4} > 0 \\ \dfrac{m - 2}{m - 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ 0 < m < 1. \end{array}\right.$$

5.1 $12x^3 + 4x^2 - 17x + 6 = 0$ (1).

Nhận xét : (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{2}$.

Do đó : $(1) \Leftrightarrow (2x - 1)(6x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

5.2 Đặt : $x = 2\cos t\,(0 \le t \le \pi)$. Từ (1) suy ra :

$$8\cos^3 t - 6\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{9} \\ t = \dfrac{5\pi}{9} \\ t = \dfrac{7\pi}{9}. \end{array}\right.$$

Vậy (1) có nghiệm là : $x = 2\cos\frac{\pi}{9}$, $x = 2\cos\frac{5\pi}{9}$, $x = 2\cos\frac{7\pi}{9}$.

5.3 $x^3 - 3x^2 + (3 - m)x + m - 1 = 0\ (1)$.

Nhận xét : $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (1).

Do đó : $(1) \Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 - 2x - m + 1\right) = 0$.

Giải và biện luận, ta được kết quả :

$m \le 0 : (1) \Leftrightarrow x = 1$; $m > 0 : (1) \Leftrightarrow x = 1,\ x = 1 \pm \sqrt{m}$.

5.4 $P(x) = x^3 + 2(k - 1)x^2 + (2 - 3k)x - 2(k + 2)$

a) $P(2) = 8 + 8k - 8 + 4 - 6k - 2k - 4 = 0$

b) $P(x) = (x - 2)\left(x^2 + 2kx + k + 2\right)$

Đặt : $f(x) = x^2 + 2kx + k + 2$. Ta có :

$$\Delta' = k^2 - k - 2 = (k + 1)(k - 2) : f(2) = 5k + 6$$

$P(x)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0$ hoặc $f(2) = 0$

$$\Leftrightarrow k = -1,\ k = 2,\ k = -\frac{6}{5}.$$

5.5 Nếu $x^3 - x + m = 0$ có ba nghiệm a, b, c thì :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = -1 \\ abc = -m \end{cases} \text{ và } \begin{cases} a^3 = a - m \\ b^3 = b - m \\ c^3 = c - m. \end{cases}$$

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 2$;

$$a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c - 3m = -3m.$$

Suy ra : $S = a^4 + b^4 + c^4 = a(a-m) + b(b-m) + c(c-m)$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - m(a+b+c) = 2 \ ;$$

$$T = a^8 + b^8 + c^8 = (a^2 - am)^2 + (b^2 - bm)^2 + (c^2 - cm)^2$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 - 2m(a^3 + b^3 + c^3) + m^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 2 + 6m^2 + 2m^2 = 8m^2 + 2.$$

5.6 $x^4 - 4x - 1 = x^4 + (2x^2+1) - (2x^2+1) - 4x - 1$

$$= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2(x^2 + 2x + 1)$$

$$= (x^2+1)^2 - 2(x+1)^2$$

$$= (x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1).$$

Vậy : $\qquad x^4 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$

5.7 Ta tìm 4 số a, b, x_1, x_2 sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2. \qquad (*)$$

Ta có : $\quad (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 = x^4 - 2(x_1 + x_2)x^3 +$

$$+ (x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2)x^2 - 2x_1x_2(x_1 + x_2)x + x_1^2x_2^2.$$

Các số a, b, x_1, x_2 phải thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = -3 \\ -2x_1x_2(x_1 + x_2) = a \\ x_1^2 x_2^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -2 \\ a = -4 \\ b = 4. \end{cases}$$

Với $a = -4$ và $b = 4$, hai nghiệm kép là $x_1 = 1$ và $x_2 = -2$.

5.8 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

5.9 Giải phương trình : $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = 0 (1)$.

Nhận xét : Ta chưa thấy được nghiệm đặc biệt nào của phương trình (1). Ta tìm cách phân tích vế trái của (1) thành thừa số. Ta thử tìm ba số a, b, m sao cho :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 3x + a)^2 - m(x+b)^2.$$

Ta có : $(x^2 - 3x + a)^2 - m(x+b)^2 =$

$$= x^4 - 6x^3 + (9 + 2a - m)x^2 - (6a + 2mb)x + a^2 - mb^2$$

Các số a, b, m phải thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 9 + 2a - m = 12 \\ 6a + 2mb = 14 \\ a^2 - mb^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2a - 3 & (2) \\ b = \dfrac{7 - 3a}{2a - 3} & (2) \\ a^2 - mb^2 = 3. & (3) \end{cases}$$

Thay giá trị của m và b vào (4), ta được :

$$a^2 - \frac{(7 - 3a)^2}{2a - 3} = 3 \Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 18a - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^2 - 4a + 10) = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Suy ra : $m = 1, b = 1$. Vậy :

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)^2 - (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

6.1 a) *Đáp số :* $m < 0 : X = \left(-\infty ; \dfrac{1}{m}\right) \cup (1 ; +\infty)$;

$$m = 0 : X = (1 ; +\infty) ;$$

$$0 < m < 1 : X = \left(1 ; \frac{1}{m}\right) ;$$

$$m = 1 : X = \varnothing ;$$

$$m > 1 : X = \left(\frac{1}{m} ; 1\right).$$

b) Giải và biện luận : $mx^2 - (m - 2)x - 1 \geq 0$. Ta có :

$$\Delta = (m - 2)^2 + 4m = m^2 + 4 > 0 .$$

Đáp số : $m < 0 : X = [x_2 ; x_1]$;

$$m = 0 : X = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right) ;$$

$$m > 0 : X = (-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty).$$

6.2 Bất phương trình : $(m + 1)x^2 - 3(m + 1)x + 2m + 1 \geq 0$ vô nghiệm khi : $-5 < m \leq -1$.

6.3 *Đáp số :* $m \geq \dfrac{4}{3}$.

6.4 Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là : $X = [m ; m + 2]$. Điều kiện : $[0 ; 1] \subset X \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

6.5 $\begin{cases} x^2 - m(m^2 + 1)x + m^4 < 0 & (1) \\ x^2 + 4x + 3 > 0 & (2) \end{cases}$

Tìm m sao cho (1) có nghiệm và mọi nghiệm của nó đều thoả (2).

- $X_2 = (-\infty ; -3) \cup (-1 ; +\infty)$.

- Tam thức ở vế trái của (1) có hai nghiệm là m và m^3.

Với $m \notin \{-1, 0, 1\}$, bất phương trình (1) có tập nghiệm không rỗng là $X_1 = (m ; m^3)$ hoặc $X_1 = (m^3 ; m)$. Ta tìm m sao cho $X_1 \subset X_2$.

a) $m > -1$ (và $m \neq 0$, $m \neq 1$) $\Rightarrow m^3 > -1 \Rightarrow X_1 \subset X_2$.

b) $m < -1 \Rightarrow m^3 < m \Rightarrow X_1 = (m^3 ; m)$. Do đó :

$$X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow m \leq -3.$$

Vậy, m phai thoả mãn điều kiện : $\left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ \begin{cases} m > -1 \\ m \neq 0 \\ m \neq 1. \end{cases} \end{array}\right.$

6.6 $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ m \leq x \leq m+1. \end{cases}$ Hệ có nghiệm

khi và chỉ khi : $\begin{cases} m + 1 \geq 1 \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 7$.

6.7 *Đáp số :* $m < 0$.

6.8 Tìm m sao cho hệ : $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 < 0 & (1) \\ m^2x + 1 > (2m-1)x + 3 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm.

- $X_1 = (-1 ; 8)$;
- $(2) \Leftrightarrow (m-1)^2 x > 2$.

$m = 1$: (2) vô nghiệm, suy ra hệ vô nghiệm.

$m \neq 1$: (2) có tập nghiệm $X_2 = \left(\dfrac{2}{(m-1)^2} ; +\infty\right)$.

$$X_1 \cap X_2 = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \leq \dfrac{2}{(m-1)^2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(m-1)^2 \leq 1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)(2m-3) \leq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2} \\ m \neq 1. \end{cases}$$

Tổng hợp các kết quả trên, ta được : $\dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{3}{2}$.

6.9 Tìm m sao cho hệ sau vô nghiệm : $\begin{cases} x^2 - 1 \le 0 & (1) \\ (m - x^2)(x + m) < 0. & (2) \end{cases}$

Gọi X_1, X_2 lần lượt là tập nghiệm của (1) và (2). Tìm m sao cho : $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Ta có : $X_1 = [-1; 1]$.

Điều kiện cần : Nếu hệ vô nghiệm thì $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình (2). Do đó :

$$(m - 1)(1 + m) \ge 0 \Rightarrow m \le -1 \text{ hoặc } m \ge 1.$$

Đảo lại :

- $m \le -1$: (2) $\Leftrightarrow x + m > 0 \Leftrightarrow x > -m \Rightarrow X_2 = (-m; +\infty)$. Vì $-m \ge 1$ nên $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Vậy $m \le -1$ thích hợp.

- $m \ge 1$: (2) $\Leftrightarrow (x^2 - m)(x + m) > 0$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m})(x + m) > 0.$$

Bảng xét dấu vế trái của (2) với $m \le 1$:

x	$-\infty$		$-m$		$-\sqrt{m}$		-1		1		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$(m - x^2)(x + m)$		+	0	+	0	−		//////		−	0	+	

Nhận xét : mọi $x \in [-1 ; 1]$ đều không thoả mãn bất phương trình (2). Do đó, với $m \ge 1$ thì hệ vô nghiệm. Vậy $m \ge 1$ thích hợp. Kết luận : $m \le -1$ hoặc $m \ge 1$.

6.10 Đặt $f(x) = x^4 + 4x + m^2 - m + 4$. Ta có :

$$f(x) = (x^4 + 4x + 3) + (m^2 - m + 1)$$

$$= (x + 1)^2(x^2 - 2x + 3) + m^2 - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ chính là tập nghiệm của bất phương trình (1), tức là : $X = \left(-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right)$.

Chương 2.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

7.1 $D = 2a(a-1)$; $D_x = 2a(a^2-1)$; $D_y = -2a^2(a-1)$.

- $a \neq 0$ và $a \neq 1$: $(x\ ;\ y) = (a+1;\ -a)$.

- $a = 0 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1.$

Hệ (*I*) có vô số nghiệm $(x\ ;\ y)$ với $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x. \end{cases}$

- $a = 1 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 - x. \end{cases}$

7.2 a) Giải và biện luận : $\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x - ay = 2 \end{cases} \quad (I)$

$D = -(a+1)(5a-2)$; $D_x = -(a+4)$; $D_y = 3(3a+1)$.

- $a = -1$ hoặc $a = \dfrac{2}{5}$: Hệ vô nghiệm.

- $a \neq -1$ và $a \neq \dfrac{2}{5}$: Hệ có nghiệm $(x\ ;\ y)$ với

$$x = \frac{a+4}{(a+1)(5a-2)}\ ;\ y = \frac{-3(3a+1)}{(a+1)(5a-2)}.$$

b) Giả sử $(x\ ;\ y)$ là nghiệm của hệ (*I*). Thế thì : $\begin{cases} a(6x - y) = 3 - 2y \\ a(x - y) = x + 2. \end{cases}$

Suy ra : $\quad (x-y)(3-2y) - (6x-y)(x+2) = 0.$

7.3 a) $\begin{cases} ax + y = 0 \\ x + ay = c^2 + c. \end{cases}$ $D = a^2 - 1$; $D_x = -(c^2 + c)$; $D_y = a(c^2 + c)$.

- $a \neq 1$ và $a \neq -1$: Hệ có nghiệm duy nhất : $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$
- $a = \pm 1$ và $c^2 + c \neq 0$: Hệ vô nghiệm.
- $a = \pm 1$ và $c^2 + c = 0$: Hệ trở thành :

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$ Hệ có vô số nghiệm số.

b) $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c. \end{cases}$ (I) Tìm b sao cho với mọi a, luôn tìm được c để hệ có nghiệm.

Nhận xét : Hệ luôn có nghiệm khi $a \neq \pm 1$. Chỉ cần giải bài toán khi $a = \pm 1$.

- $a = 1 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = b \\ x + y = c^2 + c \end{cases}$ (II)

Hệ (*II*) có nghiệm (có vô số nghiệm) khi và chỉ khi :

$$c^2 + c = b \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0\ (1)$$

(1) có nghiệm $c \Leftrightarrow \Delta_1 = 1 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}$.

- $a = -1 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -b \\ x - y = c^2 + c \end{cases}$ (III)

Hệ (*III*) có nghiệm (có vô số nghiệm) khi và chỉ khi :

$$c^2 + c = -b \Leftrightarrow c^2 + c + b = 0\ (2)$$

(2) có nghiệm $c \Leftrightarrow \Delta_2 = 1 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị của b thoả mãn yêu cầu bài toán là : $-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$.

8.1 a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$: $(-1 : 2)$ và $(2 : -1)$.

b) $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 6 - m^2 \end{cases}$ có nghiệm khi $-2 \le m \le 2$.

8.2 a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy(x + y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ xy = 3 \end{cases}$: $(1 ; 3)$ và $(3 ; 1)$.

b) $(I)\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 2m^2 - m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy(x + y) = (m + 1)(2m - 3) \end{cases}$

• $m = -1 \Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm $(x ; y)$ thoả mãn $x + y = 0$.

• $m \neq -1 : (I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = 2m - 3 \end{cases}$

$S^2 - 4P = (m + 1)^2 - 4(2m - 3) = m^2 - 6m + 13 > 0, \forall m \neq -1.$

Vậy hệ (I) có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

8.3 $(I)\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$

• Đặt : $X = x^2 \geq 0$, $Y = y^2 \geq 0$. Từ (I), suy ra :

$$(I')\begin{cases} X + Y = 5 \\ X^2 + Y^2 - XY = 13. \end{cases}$$

• Đặt : $S = X + Y$, $P = XY$. Từ (I'), suy ra :

$$(II)\begin{cases} S = 5 \\ S^2 - 3P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 4. \end{cases}$$

• Do đó : $(I') \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} X = 1 \\ Y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} X = 4 \\ Y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

• Vậy :
$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \pm 1\\ y = \pm 2\end{cases}\\ \begin{cases}x = \pm 2\\ y = \pm 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Tóm lại, hệ (*I*) có 8 nghiệm là : $(1 ; 2)$, $(1 ; -2)$, $(-1 ; 2)$, $(-1 ; -2)$, $(2 ; 1)$, $(-2 ; 1)$, $(2 ; -1)$, $(-2 ; -1)$.

8.4 $(I)\begin{cases}x + y + x^2 + y^2 = 8\\ xy(x+1)(y+1) = m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x+1) + y(y+1) = 8\\ x(x+1).y(y+1) = m\end{cases}$

• Đặt : $X = x(x+1) \geq -\frac{1}{4}$, $Y = y(y+1) \geq -\frac{1}{4}$.

Từ (I) suy ra :
$$(II)\begin{cases}X + Y = 8\\ XY = m\end{cases}$$

a) Khi $m = 12$, ta lần lượt có :

$$\begin{cases}X + Y = 8\\ XY = 12\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}X = 2\\ Y = 6\end{cases}\\ \begin{cases}X = 6\\ Y = 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2 + x - 2 = 0\\ y^2 + y - 6 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2 + x - 5 = 0\\ y^2 + y - 2 = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Tóm lại, hệ (*I*) có 8 nghiệm là : $(1 ; 2)$, $(1 ; -3)$, $(-2 ; 2)$, $(-2 ; -3)$, $(2 ; 1)$, $(-3 ; 1)$, $(2 ; -2)$, $(-3 ; -2)$.

b) Tìm m để hệ (*I*) có nghiệm : Xét hệ $(II) : \begin{cases}X + Y = 8\\ XY = m\end{cases}$ với $X \geq -\frac{1}{4}$, $Y \geq -\frac{1}{4}$. Ta có X và Y là nghiệm của phương trình : $t^2 - 8t + m = 0$ (1). Điều kiện để hệ (*I*) có nghiệm là (1) có hai nghiệm t_1, t_2 :

$$-\frac{1}{4} \le t_1 \le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ \left(t_1 + \frac{1}{4}\right)\left(t_2 + \frac{1}{4}\right) \ge 0 \\ \left(t_1 + \frac{1}{4}\right) + \left(t_2 + \frac{1}{4}\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \le m \le 16.$$

8.5 $\begin{cases} (x + y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2} = 49. \end{cases}$

Cách giải tương tự như ở Ví dụ 4. Đặt : $X = x + \frac{1}{x}$, $Y = y + \frac{1}{y}$. Ta

tính được : $\begin{cases} X = -2 \\ Y = +7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} X = +7 \\ Y = -2. \end{cases}$ Suy ra hệ có nghiệm là :

$$\left(-1 ; \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} ; -1\right).$$

8.6 $\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = a^4 \end{cases} (I)$.

Ta có : $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \left[(x + y)^2 - 2xy\right]^2 - 2x^2y^2$

$$= (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2.$$

• Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$. Từ (I) suy ra : $(II) \begin{cases} S = a \\ P(P - 2a^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = a \\ P = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} S = a \\ P = 2a^2. \end{cases} \end{array}\right.$

a) $\begin{cases} S = a \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \\ \begin{cases} x = a \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

b) $\begin{cases} S = a \\ P = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow S^2 - 4P = -7a^2 \le 0 \Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm tương ứng

khi và chỉ khi $a = 0$. Nghiệm tương ứng là $(0 ; 0)$. Vậy :

- $a \neq 0$: Hệ (I) có hai nghiệm $(0 ; a)$ và $(a ; 0)$.
- $a = 0$: Hệ (I) có nghiệm duy nhất $(0 ; 0)$.

9.1 Hệ tương đương với :

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2+xy+5) = 0 \\ x^3 = 3x + 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^3 = 3x + 8y \end{cases}$$

Đáp số : $(0 ; 0)$, $\left(\sqrt{11} ; \sqrt{11}\right)$, $\left(-\sqrt{11} ; -\sqrt{11}\right)$.

9.2 Với điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$, hệ tương đương với :

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+4) = 0 \\ x^2 + y^2 - 6xy - 4(x+y) = 0. \end{cases} \quad \textit{Đáp số} : \left(-2 ; -2\right).$$

10.2 $(I)\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = a \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

a) $a = 4$: Hệ (I) có nghiệm là $(0 ; \pm 2)$.

b) $y = 0$ không thoả mãn hệ (I). Đặt $x = ty$, ta được :

$$\begin{cases} y^2\left(t^2 - 4t + 1\right) = a & (1) \\ y^2(1 - 3t) = 4. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $t > \frac{1}{3}$. Khử y giữa (1) và (2), ta được :

$$4t^2 + (3a - 16)t + 1 - a = 0. \quad (3)$$

Nếu phương trình (3) có nghiệm $t > \frac{1}{3}$ thì phương trình (2) có nghiệm y, từ đó tính được x, do vậy hệ (I) có nghiệm.

Đặt : $f(t) = 4t^2 + (3a - 16)t + 4 - a$. Ta có :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} + a - \frac{16}{3} + 4 - a = -\frac{8}{9} < 0.$$

Suy ra phương trình (3) có một nghiệm $t > \frac{1}{3}$.

Vậy, hệ (I) luôn có nghiệm với mọi a.

11.1 $\begin{cases} x^2 + 3x^2y + y^2 = 5 & (1) \\ 2x^2 + y = 3 & (2). \end{cases}$ Thay $y = 3 - 2x^2$ vào (1), ta được :

$$x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Đáp số : $(1\ ;\ 1)$, $(-1\ ;\ 1)$.

11.2 Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} \left(2x - \frac{1}{x}\right) + \left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{9}{2} \\ \left(2x - \frac{1}{x}\right) - \left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{x} = \frac{7}{2} \\ 2y - \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Đáp số : $(2\ ;\ 1)$, $\left(2\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ 1\right)$, $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

11.3 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3x) + (y^2 + 4y) = 1 \\ 3(x^2 - 3x) - 2(y^2 + 8y) = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -4. \end{array}\right. \end{cases}$$

11.4 Đặt $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2x - y \end{cases}$, ta được :

$$\begin{cases} u^2 - 5uv + 6v^2 = 0 \\ u + \dfrac{1}{v} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2v)+(u-3v)=0 \\ uv+1=3v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2v \\ 2v^2 - 3v + 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3v \\ 3v^2 - 3v + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ta còn có : $x = \dfrac{u+v}{4}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$.

11.5 $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz + zx = 12 & (2) \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = 3. & (3) \end{cases}$ Bình phương hai vế của (1) rồi kết hợp với (2), ta được : $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Rightarrow x = y = z = 2$. Kiểm tra, các giá trị này thoả mãn hệ. *Đáp số* : (2 ; 2 ; 2).

Chương 3.

PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

12.1 Dùng phương pháp khoảng. *Đáp số* : $X = \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} ; \dfrac{\sqrt{29}-1}{2}\right\}$.

12.2 Dùng phương pháp khoảng. *Đáp số* : $X = \{1 ; -5\}$.

12.3 Dùng phương pháp đồ thị. Kết quả biện luận :

- $m < -2$: (1) vô nghiệm ;
- $m = -2$: (1) có 2 nghiệm ;
- $-2 < m < 0$: (1) có 4 nghiệm ;
- $m = 0$: (1) có 3 nghiệm ;
- $m > 0$: (1) có 2 nghiệm.

12.4 $\left|x^2 - 4mx + m^2 + 2m\right| = x^2 - 2x + m^2$ (1). Ta tìm m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt.

Nhận xét : Nếu $x^2 - 2x + m^2 = 0$ thì (1) có nhiều nhất hai nghiệm. Do đó, phai có điều kiện : $x^2 - 2x + m^2 > 0$ (*). Khi đó ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}(2m-1)x = m & (2)\\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0. & (3)\end{array}\right.$$

Để ý rằng trong điều kiện (*), nghiệm của phương trình (2) khác với các nghiệm của phương trình (3). Do đó, ta tìm m sao cho phương trình (2) có nghiệm duy nhất và phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt, cả ba nghiệm đều thoả mãn điều kiện (*).

Với $m \neq \frac{1}{2}$, phương trình (2) có nghiệm $x_1 = \frac{m}{2m-1}$. Phương trình (3) luôn có hai nghiệm phân biệt : $x_2 = m$ và $x_3 = m + 1$.

Đặt : $f(x) = x^2 - 2x + m^2$. Phải có điều kiện :

$$\begin{cases} f(m) > 0\\ f(m+1) > 0\\ f\left(\dfrac{m}{2m-1}\right) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0\\ 2m^2 - 1 > 0\\ (m^2 - m)(2m^2 - 1) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ m > 1.\end{array}\right.$$

12.5 Phương trình đã cho tương đương với :

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| + x^2 + x = m. \qquad (1)$$

Xét hàm số : $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| + x^2 + x$. Ta có :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 & \text{nếu } x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 2\\ 4x - 2 & \text{nếu } 1 < x < 2.\end{cases}$$

Gọi (C) là đồ thị hàm số $f(x)$ (Học sinh tự vẽ). Đường thẳng $y = m$ và đồ thị (C) có duy nhất một điểm chung khi và chỉ khi $m = \frac{3}{2}$. Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$.

12.6 Phương trình đã cho tương đương với : $x^2 - x - 3|x-1| = m$. (1)

Xét hàm số : $f(x) = x^2 - x - 3|x-1|$. Ta có :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{nếu} \quad x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{nếu} \quad x < 1. \end{cases}$$

Gọi (C) là đồ thị hàm số. (Học sinh tự vẽ). Đường thẳng $y = m$ và đồ thị (C) có hai điểm chung khi và chỉ khi $-4 < m < -1$ hoặc $m > 0$.

13.1 $|x^2 - 2x - 2m| \geq |x^2 + mx| \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2m)^2 \geq (x^2 + mx)^2$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2m)^2 - (x^2 + mx)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow [2x^2 + (m-2)x - 2m][-(m+2)x - 2m] \geq 0.$ (1)

Điều kiện cần : (1) được thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra nhị thức $-(m+2) - 2m$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$, suy ra $m = -2$.

Đảo lại : Với $m = -2$, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 4(2x^2 - 4x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0.$$

Bất phương trình này được thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy : $m = -2$.

13.2 $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0$. (1) Ta tìm m để (1) được thoả mãn với mọi số thực x. Đặt $t = |x - m| \geq 0$. Từ (1) suy ra :

$$t^2 + 2t - m^2 + 2 > 0. \quad (2)$$

Ta tìm m sao cho bất phương trình (2) được thoả mãn với mọi $t \geq 0$. *Đáp số :* $|m| < \sqrt{2}$.

13.3 • Bất phương trình $mx^2 - |3x + 2| + m < 2$ tương đương với :

$$m(x^2 + 1) < |3x + x| + 2 \Leftrightarrow \frac{|3x + 2| + 2}{x^2 + 1} > m. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{|3x + 2| + 2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Ta tìm miền giá trị của $f(x)$, từ đó suy ra các yêu cầu mà tập nghiệm của bất phương trình (1) phải thoả mãn.

• Ta có : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{-3x}{x^2+1} & \text{nếu } x < -\dfrac{2}{3} \\ f_2(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1} & \text{nếu } x \geq -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

$$f_1'(x) = \frac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \ : \ f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \left(x < -\frac{2}{3}\right).$$

$$f_2'(x) = \frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2} \ : \ f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \left(x > -\frac{2}{3}\right).$$

• Bang biến thiên :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{18}{13}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0
	$f_1(x)$					$f_2(x)$			

Suy ra miền giá trị của hàm số là : $f(\mathbb{R}) = \left(0\ ;\ \frac{9}{2}\right]$.

• Kết luận :

1) $f(x) > m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m < \frac{9}{2}$;

2) $f(x) > m$ được thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m \leq 0$.

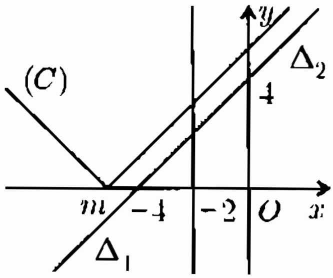
13.4 Giải và biện luận bất phương trình : $\dfrac{|x-m|+x}{x+2} < 2.$ (1)

Với điều kiện $x \neq 2$, ta có :

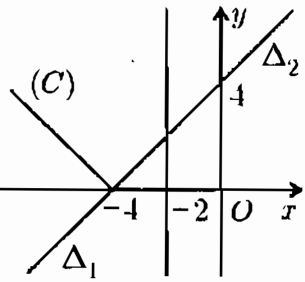
$$(1) \Leftrightarrow \frac{|x-m|-(x+4)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < -2 \\ x+4 < |x-m| \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} x > -2 \\ x+4 > |x-m| \end{cases} & (II) \end{array}\right.$$

Ta dùng phương pháp đồ thị.

Gọi Δ là đường thẳng $y = x + 4$ và (C) là đồ thị của hàm $y = |x - m|$; Δ_1 là phần của Δ nằm dưới đồ thị (C) ; Δ_2 là phần của Δ nằm trên đồ thị (C). Thế thì :



• Tập nghiệm X_1 của hệ (I) là hình chiếu của Δ_1 trên $(-\infty ; -2)$;

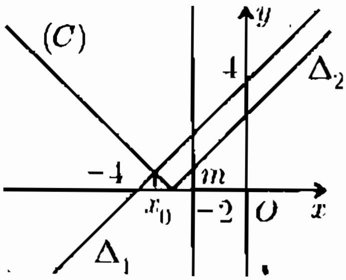


•Tập nghiệm X_2 của hệ (II) là hình chiếu của Δ_2 trên $(-2 ; +\infty)$.

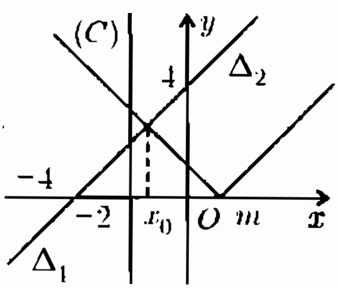
• Hoành độ giao điểm của Δ và (C) là nghiệm của phương trình :

$$x + 4 = |x - m| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} 0x = m + 4 \\ x = -2 + \dfrac{m}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 + \frac{m}{2} \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -4.$$



Do đó, khi $m > -4$, Δ cắt (C) tại điểm I có hoành độ $x_0 = -2 + \dfrac{m}{2}$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C), ta có 4 trường hợp sau :



1) $m < -4$: $X_1 = (-\infty ; -2)$; $X_2 = \varnothing$

Suy ra : $X = (-\infty ; -2)$.

2) $m = -4$: $X_1 = (-\infty ; -4)$; $X_2 = \varnothing$. Suy ra : $X = (-\infty ; -4)$.

3) $-4 < m < 0$: $X_1 = (-\infty ; x_0)$; $X_2 = (-2 ; \infty)$. Suy ra: $X = X_1 \cup X_2$.

4) $m \geq 0$: $X_1 = (-\infty ; -2)$.

$X_2 = (x_0 ; +\infty)$. Suy ra : $X = X_1 \cup X_2$

Kết luận :

- $m < -4$: $X = (-\infty ; -2)$;
- $m = -4$: $X = (-\infty ; -4)$;
- $-4 < m < 0$: $X = (-\infty ; x_0) \cup (-2 ; +\infty)$;
- $m \geq 0$: $X = (-\infty ; -2) \cup (x_0 ; +\infty)$.

14.1 $\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0 & (1) \\ 2x - |y| - 7 = 0 & (2) \end{cases}$

Nhận xét : $(1) \Rightarrow y < 0$, $(2) \Rightarrow x > 0$.

Với $x > 0$ và $y < 0$, ta được : $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{44}{7} \\ y = -\dfrac{39}{7} \end{cases}$

14.2 Ta có $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x - y)(x + 3y)$. Do đó hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases} x - y = 0 \\ x|x| + y|y| = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x|x| + y|y| = 2. \end{cases}$

Đáp số : $(1 ; 1)$; $\left(\dfrac{3}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

14.3 Tìm nghiệm của hệ : $\begin{cases} y + |x^2 - x| \geq 4 & (1) \\ |y - 2| + |x + 1| \leq 1. & (2) \end{cases}$

Nhận xét : $(2) \Rightarrow |x+1| \le 1$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên :

$$|x+1| = 0 \text{ hoặc } |x+1| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \; ; \; x = 0 \; ; \; x = -2.$$

Suy ra bất phương trình (2) có các nghiệm nguyên sau :

$$(-1 ; 2), (-1 ; 1), (-1 ; 3), (0 ; 2), (-2 ; 2).$$

Thay vào bất phương trình (1), ta được nghiệm của hệ là :

$$(-1 ; 2), (-1 ; 3), (-2 ; 2).$$

Chương 4.

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

15.1 $\sqrt{4-x^2} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 4-x^2 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ 4-x^2 = x^2+4x+4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2+2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

15.2 $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$. (1)

Điều kiện : $x \ge -\dfrac{1}{2}$ (2)

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3}$

$$\Leftrightarrow 3x+4 = 2x+1+x+3+2\sqrt{(2x+4)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(2x+1)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ (loại)} \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{1}{2}$.

15.3 $(1)\, x^2+\sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \ge 0 \\ x+1=\left(1-x^2\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 & (2) \\ x^4-2x^2-x=0. & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow x(x+1)\left(x^2-x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Theo (2) ta chỉ nhận nghiệm : $x=0$; $x=-1$; $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

15.4 $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \ge 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 & (2) \\ x\sqrt{x+5}=-2(x+2). & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) \le 0 \\ x^2(x+5)=4(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 0 & (4) \\ x^3+x^2-16(x+1)=0. & (5) \end{cases}$$

$$(5) \Leftrightarrow x^2(x+1)-16(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-16\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm 4. \end{array}\right.$$

Theo điều kiện (2) và (4) ta chỉ nhận nghiệm $x=-1$.

15.5 $1+\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=\sqrt{x+1}$. (1)

Giả sử $x \le 0 \Rightarrow x-\sqrt{x+8}<0$: (1) không thỏa.

Vậy : $\quad x>0 \Rightarrow \sqrt{x+1}>1 \Rightarrow \sqrt{x+1}-1>0$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-\sqrt{x+8}}=\sqrt{x+1}-1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x+8}=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x+8}=x+2-\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+8}=2\left(\sqrt{x+1}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x+8=4\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow 8\sqrt{x+1}=3x$$

$$\Leftrightarrow 64(x+1)=9x^2 \Leftrightarrow 9x^2-64x-64=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-\dfrac{8}{9} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

15.6 $(4x-1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)=2x^2+2x+1.$ (1)

Do $2x^2+2x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện ban đầu là :

$$4x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}.$$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow \left(16x^2-8x+1\right)\left(x^2+1\right)=\left(2x^2+2x+1\right)^2$

$$\Leftrightarrow 12x^4-16x^3+9x^2-12x=0$$

$$\Leftrightarrow 12x^3-16x^2+9x-12=0 \text{ (do } x>\frac{1}{4}>0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow\left(4x^2+3\right)(3x-4)=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \text{ (thoả mãn } x>\frac{1}{4}\text{).}$$

15.7 $x-4=\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}.$ (1)

Điều kiện : $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. (2)

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow x-4=\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2}{(1+x-1)^2} \Leftrightarrow x-4=\left(\sqrt{1+x}-1\right)^2$

$$\Leftrightarrow x-4=2+x-2\sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}=3 \Leftrightarrow x=8 \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

15.8 $\sqrt{x^2+3} = x + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}}$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 & (2) \\ x + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}} > 0 & (3) \\ x^2 + 3 = \left(x + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2-1}}\right)^2 & (4) \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow x^2 + 3 = x^2 + \frac{1}{2x^2-1} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2x^2-1} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 3 = 1 + 2x\sqrt{2x^2-1} \Leftrightarrow x\sqrt{2x^2-1} = 3x^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(3x^2-2\right) > 0 & (5) \\ x^2\left(2x^2-1\right) = \left(3x^2-2\right)^2. & (6) \end{cases}$$

$$(6) \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 9x^4 - 12x^2 + 4 \Leftrightarrow 7x^4 - 11x^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = \dfrac{4}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{7}}. \end{array}\right.$$

Theo các điều kiện (2), (3), (5) ta chỉ nhận các nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{-2}{\sqrt{7}}$.

15.9 $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2}$. (1)

Điều kiện : $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x - 1 \Rightarrow x = t^2 + 1$. Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = \dfrac{t^2+4}{2}$

$$\Leftrightarrow t+1+|t-1|=\frac{t^2+4}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t \geq 1 \\ t^2-4t+4=0 \end{cases} \\ \begin{cases} t<1 \\ t^2=0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=0. \end{array}\right.$$

Vậy : $$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1. \end{array}\right.$$

15.10 $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=\sqrt{(3+x)(6-x)}+3.$ (1)

Điều kiện : $$\begin{cases} 3+x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6.$$

Đặt : $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}$. Áp dụng kết quả :

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$$

ta có : $$3 \leq t \leq 3\sqrt{2}.$$

Khi đó : $t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Rightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)}=\dfrac{t^2-9}{2}$

(1) trở thành : $t=\dfrac{t^2-9}{2}+3 \Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=3. \end{array}\right.$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3 \Leftrightarrow \sqrt{3+x}.\sqrt{6-x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=6. \end{array}\right.$

16.1 $\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{9x}.$ (1)

$$(1) \Rightarrow 2x+2+x-2+3\sqrt[3]{(2x+2)(x-2)9x}=9x$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{18x(x+1)(x-2)}=6x \Rightarrow \sqrt[3]{18x(x^2-x-2)}=2x$$

$$\Rightarrow 18x(x^3-x^2-2x)=8x^3 \Rightarrow 9(x^3-x^2-2x)-4x^3=0$$

$$\Rightarrow x\left(5x^2-9x-18\right)=0 \Rightarrow x(x-3)(5x+6)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=-\dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Thử lại, các nghiệm này đều thoả mãn phương trình (1). Vậy nghiệm của (1) là : $x=0,\ x=3,\ x=-\dfrac{6}{5}$.

Ghi chú : Hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+2=x-2 \\ 2x+2=9x \end{cases}$ vô nghiệm.

16.2 $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}=2\sqrt[3]{(x-a)^2} \quad (a \neq 0).$ (1)

Ta có :

$(1) \Rightarrow (x+a)^2+x^2-a^2+6\sqrt[3]{(x+a)^2(x^2-a^2)(x-a)^2}=8(x-a)^2$

$\Leftrightarrow (x+a)^2+x^2-a^2+6\left(x^2-a^2\right)=8(x-a)^2$

$\Leftrightarrow (x+a)^2+7\left(x^2-a^2\right)=8(x-a)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2+7x^2-7a^2=8(x-a)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2+7x^2-7a^2=8x^2-16ax+8a^2$

$\Leftrightarrow 18ax=14a^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{7a}{9} \quad (a \neq 0).$

Thử lại $x=\dfrac{7a}{9}$ nghiệm đúng phương trình (1).

16.3 $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}.$ (1)

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^3}$

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} x-1=x+1 \\ x-1=-2x^3. \end{cases}$ Hệ này vô nghiệm nên ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 + x + 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)2x^3} = 2x^3$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2x^3(x^2-1)} = 2(x^3 - x) \Leftrightarrow 54x^3(x^2-1) = 8x^3(x^2-1)^3$$

$$\Leftrightarrow 4x^3(x^2-1)^3 - 27x^3(x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x^2-1)^3\left[4(x^2-1)^2 - 27\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}}. \end{array}\right.$$

16.4 $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = 3.$ (1)

Đặt : $t = \sqrt[6]{1-x^2}$. Ta có : $-1 \le x \le 1$ và $0 \le t \le 1$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 3t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[6]{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

17.1 Biện luận theo m số nghiệm phương trình : $2\sqrt{x+1} = x + m$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - x = m.$$

Đặt : $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$. Miền xác định : $D = [-1 ; +\infty)$.

Ta có : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{-x}{\sqrt{x+1}\left(1 + \sqrt{x+1}\right)}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

$f(0) = 2$; $f(-1) = 1$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Bảng biến thiên :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có ngay bảng biện luận sau :

m	Số nghiệm của phương trình
$+\infty$	0
2	1
	2
1	2
$-\infty$	1

17.2 $x+3=m\sqrt{x^2+1}$. (1) Ta có : (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=m$.

Đặt : $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$. Miền xác định : $D=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+3)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1-3x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}};$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$;

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\sqrt{10}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có bảng biện luận theo m số nghiệm của phương trình sau :

m	Số nghiệm của phương trình
$+\infty$	0
$\sqrt{10}$	1
	2
1	1
	1
-1	1
$-\infty$	0

17.3 $2\sqrt{(2+x)(4-x)} + x^2 - 2x + m = 0.$ (1)

Điều kiện : $-2 \le x \le 4$. Đặt : $t = \sqrt{(2+x)(4-x)} \ge 0$. Theo Côsi ta có :

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le \frac{2+x+4-x}{2} = 3.$$

Vậy : $0 \le t \le 3$.

Ta có : $t^2 = (2+x)(4-x) = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x = 8 - t^2$.

$$(1) \Leftrightarrow 2t + 8 - t^2 + m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = m. \quad (2)$$

Ta biện luận theo m số nghiệm $t \in [0 ; 3]$ của phương trình. Đặt :

$$f(t) = t^2 - 2t - 8 \text{ với } t \in [0 ; 3].$$

Ta có : $f'(t) = 2t - 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$;

$$f(1) = -9 ; f(0) = -8 ; f(3) = -5.$$

Bảng biến thiên :

t	0		1		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-8	↘	-9	↗	-5

Từ bảng biến thiên, ta suy ra số nghiệm $t \in [0\ ;\ 3]$ của phương trình (1).

m	Số nghiệm t của phương trình
$+\infty$	0
-5	1
	1
-8	2
	2
-9	1
$-\infty$	0

Xét phương trình : $x^2 - 2x - 8 - t^2 = 0\ (3)$. Ta có : $\Delta' = 9 - t^2$.

Với $t \in [0\ ;\ 3]$, ta có $\Delta' \geq 0$ do đó (3) có nghiệm x_1, x_2. Cụ thể là :

$t = 3$: (3) có nghiệm $x = 1$.

$0 \leq t \leq 3$: (3) có nghiệm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9 - t^2}$.

(2) có nghiệm $t = 3 \Leftrightarrow m = -5$.

Tổng hợp các kết quả trên ta có bảng biện luận sau :

m	Số nghiệm x của phương trình
$+\infty$	0
-5	1
	2
-8	4
	1
-9	2
$-\infty$	0

17.4 $\sqrt{x^4 + 4x + m} + \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} = 6\ (1)$. Đặt : $t = \sqrt[4]{x^4 + 4x + m}$

Ta có : $\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = \sqrt{x^4 + 4x + m} \end{cases}$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 + 4x + m} = 2$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x + m = 16 \Leftrightarrow -x^4 - 4x + 16 = m.$$

Đặt : $f(x) = -x^4 - 4x + 16$; $f'(x) = -4x^3 - 4 = -4(x^3 + 1)$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ; } f(-1) = 19 \text{ ; } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$: Từ bảng biến thiên ta có bảng biện luận theo m số nghiệm của (1) như sau :

m	Số nghiệm của phương trình (1)
$+\infty$	0
19	1
$-\infty$	2

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	19	$\searrow$	$-\infty$

17.5 $\sqrt{4x - x^2} = x - m.(1)$ Ta có : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{4x - x^2} - x = m.$

Đặt : $f(x) = \sqrt{4x - x^2} - x,\ x \in [0 : 4].$

Ta có : $f'(x) = \dfrac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} - 1 = \dfrac{2 - x - \sqrt{4x - x^2}}{\sqrt{4x - x^2}}$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x - x^2} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}.$

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		$2 - \sqrt{2}$		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2} - 2$	$\searrow$	-4

Theo bảng biến thiên ta có :

a) (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$-4 \leq m \leq 2\sqrt{2} - 2.$$

b) (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi :

$$0 \le m \le 2\sqrt{2} - 2.$$

17.6 Tìm điều kiện của m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m. \qquad (1)$$

Đặt : $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$, $x \in [-3 ; 6]$.

$$t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} + \frac{-1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{3+x}}{2\sqrt{(6-x)(3+x)}};$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 3 + x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên của t theo x :

x	-3	$\frac{3}{2}$	6
$t'(x)$	$+$	0	$-$
$t(x)$	$3 \nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow 3$

Vậy : $t \in \left[3 ; 3\sqrt{2}\right]$. Ta có :

$$t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$$

Suy ra :

$$\sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{t^2 - 9}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow t - \frac{t^2-9}{2} = m \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2} = m.$$

Đặt : $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}$ với $t \in \left[3 : 3\sqrt{2}\right]$. Ta có :

$$f'(t) = -t + 1 < 0 \;;\; f(3) = 3 \;;\; f\left(3\sqrt{2}\right) = \frac{6\sqrt{2} - 9}{2}.$$

Bảng biến thiên của f theo t :

t	3	$3\sqrt{2}$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$3 \searrow$	$\frac{6\sqrt{2}-9}{2}$

(1) có nghiệm x khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t \in \left[3 : 3\sqrt{2}\right]$, tức là :

$$\frac{6\sqrt{2} - 9}{2} \le m \le 3.$$

17.7 $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$. (1)

Đặt : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$. Miền xác định : $D=\mathbb{R}$.

Ta tìm miền giá trị $f(\mathbb{R})$ của hàm số $f(x)$. Ta có :

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Nhận xét : $|2x|=\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\le\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|$

$$\Rightarrow |2x|\le\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-1+1}$$

$$\Rightarrow |f(x)|<1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -1<f(x)<1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Mặt khác : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

$f(x)$ là hàm liên tục nên suy ra $f(\mathbb{R})=(-1\,;1)$.

Kết luận : (1) có nghiệm khi và chỉ khi $-1<m<1$.

17.8 $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$.(1) Điều kiện : $0\le x\le 9$. Khi đó :

$$(1)\Leftrightarrow x+9-x+2\sqrt{x(9-x)}=-x^2+9x+m$$

$$\Leftrightarrow -(9x-x^2)+2\sqrt{9x-x^2}+9=m.$$

Đặt : $t=\sqrt{9x-x^2}$. Ta có $t\in\left[0\,;\frac{9}{2}\right]$: $(1)\Leftrightarrow -t^2+2t+9=m.(2)$

Đặt : $f(t)=-t^2+2t+9$ với $t\in\left[0\,;\frac{9}{2}\right]$. Ta có :

$$f'(t)=-2t+2\ ;\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Bảng biến thiên của f theo t :

t	0		1		$\frac{9}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	9	↗	10	↘	$-\frac{9}{2}$

(1) có nghiệm x khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t\in\left[0\,;\frac{9}{2}\right]$, tức là : $-\frac{9}{4}\le m\le 10$.

17.9 $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = m\left(\sqrt{5-x} + \sqrt{4-x}\right)$. (1) Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\sqrt{(5-x)} + \sqrt{4-x}} = m.$$

Đặt : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}{\sqrt{(5-x)} + \sqrt{4-x}}$. Ta thấy $f(x)$ đồng biến trên miền xác định $D = \left[0\ ;\ 1\right]$. Do đó :

$$\min f(x) = f(0) = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 2\right)$$

$$\max f(x) = f(4) = 12.$$

Vậy, (1) có nghiệm khi và chỉ khi : $2\sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 2\right) \le m \le 12$.

17.10 $m - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x.(1)$ Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = m - x \Leftrightarrow \begin{cases} m - x \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 = (m - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge x & (2) \\ (2m - 3)x = m^2 - 2. & (3) \end{cases}$$

Khi $m = \dfrac{3}{2}$: (1) vô nghiệm.

Khi $m \ne \dfrac{3}{2}$: $(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{m^2 - 2}{2m - 3}$. (1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\frac{m^2 - 2}{2m - 3} \le m \Leftrightarrow \frac{m^2 - 3m + 2}{2m - 3} \ge 0 \Leftrightarrow m \in \left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right] \cup \left[2\ ;\ +\infty\right).$$

18.1 $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} < \sqrt{x-2}$. (1) Điều kiện : $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ x - 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$

Khi đó ta có : $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1}$ nên :

$$(1) \Leftrightarrow x+3+x-1-2\sqrt{(x+3)(x-1)} < x-2$$

$$\Leftrightarrow x+4 < 2\sqrt{(x+3)(x-1)} \Leftrightarrow x^2+8x+16 < 4\left(x^2+2x-3\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 < 3x^2-28 \Leftrightarrow x^2 > \frac{28}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{28}{3}} \ \ (\text{do } x \geq 2).$$

18.2 $\sqrt{3x^2+6x+4} < 2-2x-x^2.(1)$ Đặt $t = x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3t+1} < 3-t \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 0 \\ 3t+1 < (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > t \geq 0 \\ 3t+1 < t^2-6t+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > t \geq 0 \\ t^2-9t+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > t \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0.$$

18.3 $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} \leq \sqrt{x^2+4x-5}.(1)$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{(x-1)(x+3)} \leq \sqrt{(x-1)(x+5)}$$

Điều kiện : $\begin{cases} (x-1)(x+2) \geq 0 \\ (x-1)(x+3) \geq 0 \\ (x-1)(x+5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -5 \\ x \geq 1. \end{array}\right.$

- *Trường hợp* $x \geq 1$:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+5}.$$

Với $x = 1$: (1) thoả mãn.

Với $x > 1$: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+5}$

$$\Leftrightarrow x + 2 + x + 3 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq x + 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq -x < -1 \text{ vô nghiệm .}$$

• *Trường hợp* $x \leq -5$:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{-x+1}\cdot\sqrt{-x-2} + \sqrt{-x+1}\cdot\sqrt{-x-3} \leq \sqrt{-x+1}\cdot\sqrt{-x-5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-3} \leq \sqrt{-x-5}$$

$$\Leftrightarrow -x - 2 - x - 3 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq -x - 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(x+3)} \leq x \leq -5 \text{ vô nghiệm .}$$

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x = 1$.

18.4 $\dfrac{\sqrt{-3x^2 + x + 4} + 2}{x} < 2.(1)$ Điều kiện :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -3x^2 + x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1 ; 0\right) \cup \left(0 ; \dfrac{4}{3}\right].$$

Trường hợp $x \in \left[-1 ; 0\right)$: Khi đó (1) đúng.

Trường hợp $x \in \left(0 ; \dfrac{4}{3}\right]$:Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 + x + 4} < 2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -3x^2 + x + 4 < 4x^2 - 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 7x^2 - 9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{7}.$$

Kết hợp với $x \in \left(0 ; \dfrac{4}{3}\right]$ ta được $x \in \left(\dfrac{9}{7} ; \dfrac{4}{3}\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $\left[-1 ; 0\right) \cup \left(\dfrac{9}{7} ; \dfrac{4}{3}\right]$.

18.5 $\dfrac{1}{1-x^2} > \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$(1) Điều kiện : $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 1 > 3x\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2 \Leftrightarrow 3x\sqrt{1-x^2} < 2 - x^2. \qquad (2)$$

Trường hợp $-1 < x \leq 0$: (2) thoả mãn.

Trường hợp $0 < x \leq 1$: Khi đó

$(2) \Leftrightarrow 9x^2(1-x^2) < 4 - 4x^2 + x^4 \Leftrightarrow 10x^4 - 13x^2 + 4 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 < \dfrac{1}{2} \\ x^2 > \dfrac{4}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 1. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là : $\left(-1 ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} ; 1\right)$.

18.6 $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2 - 9.$(1)

$$(1) \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2-4} \leq (x-3)(x+3).$$

Điều kiện : $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$. Ta xét 3 trường hợp :

Trường hợp $x = 3$: (1) thoả mãn.

Trường hợp $x > 3$: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \leq x + 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 \leq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 6x + 13 \geq 0$ (đúng với mọi $\forall x > 3$).

Trường hợp $x \leq -2$ hoặc $2 \leq x < 3$: Ta có $x - 3 < 0$. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \geq x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 6x + 13 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ -3 \leq x \leq -\dfrac{13}{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{13}{6}.$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $\left(-\infty ; -\frac{13}{6}\right] \cup \left[3 ; +\infty\right)$.

18.7 $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.(1) Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)(x+1)^2.4}{\left(\sqrt{3+2x}+1\right)^2}. \qquad (2)$$

Nhận xét : $x = -1$ không thoả (2).

Với $x \neq -1$: (2) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3+2x}+1\right)^2 < 2x+10$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+2x} < 3 \Leftrightarrow 3+2x < 9 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $\left[-\frac{3}{2} ; 3\right] \setminus \{-1\}$.

18.8 $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$. (1)

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \geq 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$.

Xét 3 trường hợp :

1) $x \geq 4$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$ thoả với mọi $x \geq 4$.

2) $x = 1$: (1) thoả mãn.

3) $x < 1$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$ không thoả với $x < 1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $x = 1$ hay $x \geq 4$.

18.9 $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7 - x^2 - 2x$. (1)

Điều kiện : $5x^2+10x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1-\frac{2}{\sqrt{5}} \\ x \geq -1+\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{array}\right.$ (2)

Đặt : $t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = 5x^2 + 10x + 1$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = \frac{t^2 - 1}{5}.$$

$$(1) \Leftrightarrow t \geq 7 - \frac{t^2 - 1}{5} \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (t + 9)(t - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t - 4 \geq 0 \ \ (\text{do}\, t \geq 0) \Leftrightarrow t \geq 4.$$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 4 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x - 15 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 1. \end{array}\right. \ \text{(thoả điều kiện (2))}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $(-\infty\, ; -3] \cup [1\, ; +\infty)$.

18.10 $\dfrac{x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} > 3.$ (1) Điều kiện : $\dfrac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 0. \end{array}\right.$

Đặt : $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} - 2t > 3 \Leftrightarrow 1 - 2t^3 > 3t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(2t^2 + t - 1) < 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2 (2t - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1) < 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $t > 0$ ta được $0 < t < \dfrac{1}{2}$. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{x+1}{x}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x+1}{x} < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x} > 0 \\ \dfrac{x+1}{x} < \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x < -1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $\left[-\frac{4}{3}\,;\,-1\right]$.

19.1 $\sqrt{m+\sqrt{x}}+\sqrt{m-\sqrt{x}} \le 2.(1)$ Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \le m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ 0 \le x \le m^2. \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow m+\sqrt{x}+m-\sqrt{x}+2\sqrt{m^2-x} \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-x} \le 2-m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m^2 - x \le 4-4m+m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 4(m-1). \end{cases}$$

Như vậy : $$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le m \le 2 \\ 0 \le x \le m^2 \\ x \ge 4(m-1). \end{cases}$$

Ta có : $m^2-4m+4 \ge 0 \Leftrightarrow m^2 \ge 4(m-1)$. So sánh $4(m-1)$ với 0 ta có kết quả sau :

m	Tập các nghiệm của (1)
$+\infty$	$\varnothing$
2	$\{4\}$
	$\left[4(m-1)\,;\,m^2\right]$
1	$[0\,;\,1]$
	$\left[0\,;\,m^2\right]$
0	$\{0\}$
$-\infty$	$\varnothing$

19.2 $\sqrt{x+m}-\sqrt{\dfrac{m^2}{x+m}} < \sqrt{x+2m}.$ (1)

Điều kiện : $\begin{cases} x+m>0 \\ x+2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -m \\ x \ge -2m. \end{cases}$ (2)

Ta xét 3 trường hợp :

1) $m = 0$: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x}$: vô nghiệm .

2) $m > 0$: $(2) \Leftrightarrow x > -m$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+m} - \frac{m}{\sqrt{x+m}} \leq \sqrt{x+2m}$$

$$\Leftrightarrow x + m - m < \sqrt{(x+m)(x+2m)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3mx + m^2} > x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > -m \\ x < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 3mx + m^2 > 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m < x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x > -\dfrac{m}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m < x < 0 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > -m .$$

Vậy khi $m > 0$ bất phương trình (1) có nghiệm $x > -m$.

3) $m < 0$: $(2) \Leftrightarrow x \geq -2m$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+m} + \frac{m}{\sqrt{x+m}} < \sqrt{x+2m}$$

$$\Leftrightarrow x + 2m < \sqrt{(x+m)(x+2m)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4mx + 4m^2 < x^2 + 3mx + 2m^2 \Leftrightarrow m(x+2m) < 0$$

$$\Leftrightarrow x > -2m .$$

Kết luận :

m	Tập các nghiệm của (1)
$+\infty$	$\left[-m ; +\infty\right)$
2	$\varnothing$
$-\infty$	$\left[-2m ; +\infty\right)$

19.3 $\sqrt{x} + \sqrt{x+m} < m.(1)$ Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + m \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ m > 0. \end{cases}$

Đặt : $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+m}$ với $\begin{cases} x \geq 0 \\ m > 0. \end{cases}$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+m}} > 0$; $f(0) = \sqrt{m}$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\sqrt{m}$ $\nearrow$ $+\infty$

Điều kiện để $f(x) < m$ có nghiệm :

$$\sqrt{m} < m \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m > 1$.

19.4 $2x + \sqrt{5 - x^2} > m.(1)$ Điều kiện : $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$.

Đặt : $f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2}$. (1) có dạng : $f(x) > m$. Ta tìm miền giá trị của hàm $f(x) = 2x + \sqrt{5 - x^2}$. Miền xác định $D = \left[-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\right]$.

Ta có : $$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{5 - x^2}} = \frac{2\sqrt{5 - x^2} - x}{\sqrt{5 - x^2}}.$$

- $-\sqrt{5} < x \leq 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

- $0 < x \leq \sqrt{5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4(5 - x^2) - x^2}{\sqrt{5 - x^2}\left(2\sqrt{5 - x^2} + x\right)}$

$$= \frac{5(4 - x^2)}{\sqrt{5 - x^2}\left(2\sqrt{5 - x^2} + x\right)}.$$

Bảng biến thiên $f'(x)$ có dấu của $5(4 - x^2)$.

x	$-\sqrt{5}$		2		$\sqrt{5}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2\sqrt{5}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$2\sqrt{5}$

Vậy miền giá trị của hàm số là : $f(D) = \left[-2\sqrt{5}\ ;\ 5\right]$.

a) $f(x) > m$ có nghiệm khi và chỉ khi $5 > m$.

b) $f(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left[-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\right]$ khi và chỉ khi $-2\sqrt{5} > m$

20.1 $$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2. \end{cases} \qquad (I)$$

Đặt : $$\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + x + y + 1} \\ v = \sqrt{y^2 + x + y + 1}. \end{cases}$$

Ta có hệ : $\begin{cases} u + v + x + y = 18 \\ u + v - x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9} = 10 & (1) \\ x + y = 8. & (2) \end{cases}$$

Đặt $p = xy$ thì (1) trở thành :

$$\sqrt{p^2 - 18p + 9.64 + 81} = p + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq -9 \\ 36p = 9.64 \end{cases} \Leftrightarrow p = 16.$$

Vậy : $$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x.y \quad = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4. \end{cases}$$

20.2 $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases}$ (I) Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Nhận xét : $x = 0$ hay $y = 0$ không thoả (I). Vậy : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$

Đặt : $u = \sqrt{x} > 0$; $v = \sqrt{y} > 0$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} u^2v + v^2u = 30 \\ u^3 + v^3 \quad = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u + v) = 30 \\ (u + v)(u^2 + v^2 - uv) = 35. \end{cases}$$

Lại đặt : $s = u + v > 0$; $p = uv > 0$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} s.p = 30 \\ s\left(s^2 - 3p\right) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s.p = 30 \\ s^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 5 \\ p = 6. \end{cases}$$

Như vậy ta có : $\begin{cases} u + v = 5 \\ u.v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9 \\ y = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

20.3 $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. & (2) \end{cases}$ Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 2y^2} + 2\sqrt{xy} = 16 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4. \end{cases}$$

20.4 $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = m & (1) \\ 2y + \sqrt{xy} = 0. & (2) \end{cases}$ Điều kiện : $\begin{cases} xy \geq 0 \\ y \leq 0. \end{cases}$ Khi đó :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3m \\ 2y + \sqrt{y(3m + y)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3m \\ \sqrt{y(3m + y)} = -2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3m \\ y(3m + y) = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 3m \end{cases} \\ \begin{cases} y = m \\ x = 4m. \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết luận :

m	Nghiệm của hệ
$+\infty$	$(3m\,;0)$
0	$(0\,;0)$
$-\infty$	$(3m\,;0),\ (4m\,;m)$

20.5
$$\begin{cases}\left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=4\\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}\ \ =2.\end{cases}\qquad (I)$$

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}3-\dfrac{5}{y+42x}=\dfrac{4}{\sqrt{2y}}\\ 3+\dfrac{5}{y+42x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}=\dfrac{5}{y+42x} & (1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}=3. & (2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=\frac{15}{y+42x}\Leftrightarrow (y-2x)(y+42x)=15xy$$

$$\Leftrightarrow y^2-84x^2+25xy=0$$

$$\Leftrightarrow (y-3x)(y+28x)=0$$

Do : $y+28x>0\Rightarrow y=3x$. Thế vào (2) ta được nghiệm của hệ là :

$$\begin{cases}x=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{27}\\ y=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{9}.\end{cases}$$

Chương 5.

PHƯƠNG TRÌNH
BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

21.1 $\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + a\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8\,(1)$ Đặt : $t = \left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0$.

Ta có : $(1) \Leftrightarrow t + \dfrac{a}{t} = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t + a = 0$.

a) Khi $a = 7$: $(1) \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 7 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} 7. \end{array}\right.$$

b) Ta có : $(1) \Leftrightarrow a = -t^2 + 8t\ (t > 0)$. Đặt : $f(t) = -t^2 + 8t\ (t > 0)$

Ta có : $f'(t) = -2t + 8$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(t)$ và đường thẳng $y = a$

Theo đồ thị ta có :

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	$-\infty$

m	Số nghiệm của (1)
$+\infty$	0
16	1
	2
0	1
$-\infty$	1

21.2 $2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1.(1)$

$$(1) \Leftrightarrow 2.2^x + 3.3^x + 1 > 6^x \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1.$$

Đặt : $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$. Ta có $f(x)$ là hàm số nghịch biến và $f(2) = 1$. Vậy : $(1) \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2$. Tập hợp các nghiệm của (1) là : $(-\infty\ ;\ 2)$.

21.3 $125^x + 50^x = 2^{3x+1}.(1)$

$$(1) \Leftrightarrow 125^x + 50^x = 2.8^x \Leftrightarrow \left(\frac{125}{8}\right)^x + \left(\frac{50}{8}\right)^x = 2.$$

Đặt $f(x) = \left(\frac{125}{8}\right)^x + \left(\frac{50}{8}\right)^x$. Ta có $f(x)$ là hàm số tăng và $f(0) = 2$.

Vậy phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

21.4 $\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 4^x.\ (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)^x = 1.$$

Đặt $f(x) = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right)^x + \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right)^x$. Ta có $f(x)$ là hàm số giảm và $f(1) = 1$. Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

21.5 $2^x + 3^{3-x} \le 9.(1)$

$$(1) \Leftrightarrow 2^x + \frac{8}{2^x} \le 9 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 9.2^x + 8 \le 0 \quad \left(2^x > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \le 2^x \le 8 \Leftrightarrow 2^0 \le 2^x \le 2^3 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3.$$

22.1 $\log_5\left(5^x - 1\right).\log_{25}\left(5^{x+1} - 5\right) = 1.$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5\left(5^x - 1\right)\log_5 5\left(5^x - 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(5^x - 1\right)\left[\log_5 5 + \log_5\left(5^x - 1\right)\right] = 2.$$

Đặt $t = \log_5\left(5^x - 1\right)$.

$$(1) \Leftrightarrow t(1+t) = 2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5\left(5^x - 1\right) = -1 \\ \log_5\left(5^x - 1\right) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 6 \\ 5^x = \dfrac{26}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 6 \\ x = \log_5 \dfrac{26}{25}. \end{array}\right.$$

22.2 $\dfrac{\lg(mx)}{\lg(x-1)} = 2.(1)$ Điều kiện : $\begin{cases} mx > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m > 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \lg(mx) = 2\lg(x-1) \Leftrightarrow \lg(mx) = \lg(x-1)^2$

$$\Leftrightarrow mx = (x-1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$ ($x > 1$ và $x \neq 2$). Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} > 0$

Bảng biến thiên của f theo x :

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$

Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

22.3 $2\left(\log_9 x\right)^2 = \log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right).(1)$ Điều kiện : $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\log_3 x\right)^2 = \log_3 x.\log_3\left(\sqrt{2x+1} - 1\right).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x\left[2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)-\log_3 x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_3 x = 0 & (2)\\ 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=\log_3 x. & (3)\end{array}\right.$$

$(2) \Leftrightarrow x = 1$;

$(3) \Leftrightarrow \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 = \log_3 x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2 = x$

$\Leftrightarrow 2x+1+1-2\sqrt{2x+1} = x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} = x+2\,(x>0) \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x = 1$ và $x = 4$.

22.4 $\sqrt{\log_3\dfrac{2x-3}{1-x}}<1 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\dfrac{2x-3}{1-x}<1\\ \log_3\dfrac{2x-3}{1-x}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x-3}{1-x}<3\\ \dfrac{2x-3}{1-x}\geq 1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5x-6}{1-x}<0\\ \dfrac{3x-4}{1-x}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1\\ x>\dfrac{6}{5}\end{array}\right.\\ 1<x\leq\dfrac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{5}<x\leq\frac{4}{3}.$$

22.5 $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1 \Leftrightarrow 5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<5^0 \Leftrightarrow \log_3\dfrac{x-2}{x}<0$

$$\Leftrightarrow \log_3\frac{x-2}{x}<\log_3 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-2}{x}>0\\ \dfrac{x-2}{x}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>2\end{array}\right.\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>2.$$

22.6 $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}>\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x-3).\ (1)$

Điều kiện : $\begin{cases}x^2-5x+6>0\\ x-2>0\\ x-3>0\end{cases} \Leftrightarrow x>3$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)-\frac{1}{2}\log_3(x-2) > -\frac{1}{2}\log_3(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-5x+6\right)+\log_3(x-3) > \log_3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-5x+6\right)(x-3) > \log_3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)(x-3) > (x-2) \Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2 > x-2 \quad (2)$$

(2) thoả với mọi $x > 3$. Vậy nghiệm của (1) là $x > 3$.

23.1 $(I)\begin{cases}2^x.3^y=12 & (1)\\ 2^y.3^x=18 & (2)\end{cases}$ Nhân từng vế, chia từng vế của (1) và (2) ta được

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases}2^{x+y}.3^{x+y}=216\\ 2^{x-y}.3^{y-x}=\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6^{x+y}=6^3\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=3\\ x-y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$$

23.2 $(I)\begin{cases}x>0\\ x^{y-2}=4\\ x^{2y-3}=64\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x^{y-2}=\log_2 2^2\\ \log_2 x^{2y-3}=\log_2 2^6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-2)\log_2 x=2\\ (2y-3)\log_2 x=6\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y-2)\log_2 x=2\\ \dfrac{y-2}{2y-3}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x=2\\ y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=3.\end{cases}$$

23.3 $(I)\begin{cases}\left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} & (1)\\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0. & (2)\end{cases}$ Đặt : $t=2x-y$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \left(1+4^t\right).5^{1-t}=1+2^{t+1} \Leftrightarrow 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]=1+2.2^t. \qquad (3)$$

Đặt : $f(t)=5\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^t+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\right]$; $g(t)=1+2.2^t$. Ta có $f(t)$ là hàm số giảm, $g(t)$ là hàm số tăng và $f(1)=g(1)$. Do đó :

$$(3) \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 2x-y=1.$$

Vậy : $\quad (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + 1 \\ y^3 + 2y + 3 + \ln\left(y^2 + y + 1\right) = 0. \end{cases}$

Đặt : $h\left(y\right) = y^3 + 2y + 3 + \ln\left(y^2 + y + 1\right)$. Ta có :

$$h'\left(y\right) = 3y^2 + 2 + \frac{2y + 1}{y^2 + y + 1} = 3y^2 + \frac{2y^2 + 4y + 3}{y^2 + y + 1}$$

$$= 3y^2 + \frac{2\left(y + 1\right)^2 + 1}{y^2 + y + 1} > 0.$$

$h'\left(y\right) > 0 \Rightarrow h\left(y\right)$ là hàm số tăng và $h\left(-1\right) = 0$. Vậy :

$$\left(I\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

23.4 $(I)\begin{cases} 2^x + 2^y \leq 1 \\ x + y \geq -2 \end{cases} \Rightarrow 1 \geq 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^x . 2^y} = 2\sqrt{2^{x+y}}$

$$\Rightarrow 1 \geq 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{-2}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 1 \\ 2^x = 2^y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2} \\ 2^y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{-1} \\ 2^y = 2^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Thế lại vào (I) thoả. Vậy hệ (I) có nghiệm $(-1 ; -1)$.

23.5 $(I)\begin{cases} (x - 1)\lg 2 + \lg\left(2^{x+1} + 1\right) < \lg\left(7.2^x + 12\right) & (1) \\ \log_x (x + 2) > 2. & (2) \end{cases}$

Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \lg\left[2^{x-1}\left(2^{x+1} + 1\right)\right] < \lg\left(7.2^x + 12\right) \Leftrightarrow 2^{2x} + \frac{1}{2}2^x < 7.2^x + 12$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - \frac{13}{2}2^x - 12 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < 2^x < 8 \Leftrightarrow 2^x < 2^3 \Leftrightarrow x < 3.$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_x (x+2) > \log_x x^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+2-x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-2) < 0 \quad (x>0) \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy : $$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Chương 6.

SỐ PHỨC

24.1 a) $z = -3-5i$; $-z = 3+5i$; $\overline{z} = -3+5i$;

b) $z = -1-4\sqrt{3}\,i$; $-z = 1+4\sqrt{3}\,i$; $\overline{z} = 1-4\sqrt{3}\,i$;

c) $z = 2+44i$; $-z = -2-44i$; $\overline{z} = 2-44i$;

d) $z = 1+0i$; $-z = -1$; $\overline{z} = 1$.

24.2 a) $$\frac{4+3\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-3)i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\left[4+3\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-3)i\right](1-i\sqrt{3})}{4} = 4-3i$$

b) $$\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} = \frac{-1+6i}{-12+42i} = \frac{22}{159} - \frac{5}{318}i.$$

24.3 a) $w = z^2 - 3z + 5i = (a^2-3a-b^2) + (2ab-3b+5)i$;

b) $$w = \frac{\overline{z}+i}{iz-2} = \frac{-a(2b+1)+(b^2+b-a^2-2)i}{(b+2)^2+a^2}.$$

24.4 a) $$w = \frac{z+\overline{z}}{z^3+(\overline{z})^3} = \frac{1}{a^2+b^2}$$: số thực ;

b) $$w = \frac{z^2+(\overline{z})^2}{1+z\overline{z}} = \frac{2(a^2+b^2)}{1+a^2+b^2}$$: số thực.

24.5 a) Tập hợp các điểm cần tìm là hai đường thẳng $y = \pm\dfrac{3}{5}$;

b) Tập hợp các điểm cần tìm là hai hypebol $y = \pm\dfrac{9}{4x}$;

c) Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $I\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ và bán kính $R = \dfrac{\sqrt{41}}{3}$;

d) Tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$.

25.1 a) $2 + i\sqrt{3}$ và $-2 - i\sqrt{3}$; b) $5 + i2\sqrt{2}$ và $-5 - i2\sqrt{2}$;

c) $1 + 3i$ và $-1 - 3i$; d) $7 - i\sqrt{3}$ và $-7 + i\sqrt{3}$.

25.2 a) $z = 2 \pm i\sqrt{3}$; b) $z = -\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{\sqrt{23}}{4}i$;

c) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + 3i$; d) $z_1 = 2i$, $z_2 = -1 + i$.

25.3 a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau :

$$(z-1)\left[z^2 - (1+2i)z - 1 + i\right] = 0.$$

Nghiệm là : $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = i$.

b) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = 1 - 3i$, $z_4 = -1 + 3i$.

c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

d) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = 2$, $z_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}$.

25.4 a) Hệ đã cho có 2 nghiệm $(3 - i ; 1 + 2i)$ và $(1 + 2i ; 3 - i)$;

b) Hệ đã cho có 4 nghiệm $(2 - i ; -1 - 3i)$, $(-1 - 3i ; 2 - i)$, $(-2 + i ; 1 + 3i)$ và $(1 + 3i ; -2 + i)$.

25.5 $1-2i$ và $3+i$.

25.6 $a=\pm(3+i)$.

25.7 $a=-4$, $b=6$, $c=-4$.

26.1 a) $z=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$;

b) $z=1\left(\cos\dfrac{15\pi}{34}+i\sin\dfrac{15\pi}{34}\right)$;

c) $z=2\left(\cos\dfrac{39\pi}{28}+i\sin\dfrac{39\pi}{28}\right)$.

26.2 a) $z=-16\sqrt{3}-16i$; b) $z=-2^{3012}i$.

26.3 a) 256 ; b) $-\dfrac{1}{16}$;

c) $2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$; d) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{12}$.

26.4 $P=\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

26.5 $\alpha=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; Các căn bậc ba :

$$w_0=\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18},$$

$$w_1=\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18},$$

$$w_2=\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}.$$

26.6 $S=-2^n$ và $S'=2^n$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

A. CÂU HỎI

1. Giải phương trình : $7-2x+\dfrac{5}{x-2}=11+\dfrac{5}{x-2}-4x$.

a) $x=2$.	b) $x=5$.

c) $x=-10$.	d) Vô nghiệm.

2. Giải phương trình : $5+2x+\dfrac{5}{x-2}=26+\dfrac{5}{x-2}-x$.

a) $x=7$.	b) $x=1$.

c) Vô định.	d) Vô nghiệm.

3 Giải phương trình : $\dfrac{1-2x}{3-|x-1|}=1$.

a) $x=-3$.	b) $x=-\dfrac{1}{3}$.

c) $x=-\dfrac{3}{2}$.	d) Đáp số khác.

4. Giải phương trình : $\left|x-|4-x|\right|-2x=4$.

a) $x=10$.	b) $x=-4$.

c) $x=0$.	d) Cả a), b), c) đều sai.

5. Giải phương trình : $|2x-4|=2x-4$.

a) x tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$.	b) $x\geq 2$.

c) $4\leq x\leq 2$.	d) Một đáp số khác.

6. Giải phương trình : $|3x-6|=6-3x$

a) $x=2$.	b) x tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$.

c) $2<x<4$.	d) $x\leq 2$.

7. Giải phương trình : $|x^2 - 4x + 3| = x^2 - 4x + 3$.

a) $x \leq 1$.
b) $x \geq 3$.
c) $1 < x \leq 2$.
d) Cả a) và b) đều đúng.

8. Giải phương trình : $|x^2 - 5x + 6| = 5x - x^2 - 6$.

a) $2 \leq x \leq 3$.
b) x tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}$.
c) $0 < x < 2$.
d) $x > 3$.

9. Giải phương trình : $|x - 1| = 3 - x$.

a) $x = 1$.
b) $x = 2$.
c) $x > 1$.
d) $x < 3$.

10. Giải phương trình : $|x| = -3x - 5$.

a) $x = 0$.
b) $x = -\dfrac{5}{3}$.
c) $x = -\dfrac{5}{2}$.
d) $-3 < x < -\dfrac{5}{2}$.

11. Cho phương trình $|x - 1| = x - m$. Phương trình có nghiệm khi :

a) $m \leq 1$.
b) $m < 1$.
c) $0 < m < 1$.
d) $m \leq 0$.

12. Giải phương trình : $|x - 1| + |x - 3| = 2$.

a) $x = 2$.
b) $1 \leq x \leq 3$.
c) $x < 1$.
d) $x > 4$.

13. Giải phương trình : $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 2$.

a) $x = 2$.
b) $x = 1$.
c) $1 < x < 2$.
d) Cả a), b), c) đều sai.

14. Giải phương trình : $|3x - 8| + |3x - 2| = 6$.

a) $x = \dfrac{8}{3}$.
b) $\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{8}{3}$.
c) $x \leq \dfrac{2}{3}$.
d) Cả a), b), c) đều đúng.

15. Giải phương trình : $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| = 4$.

a) $0 < x < 2$.

b) $x = 2$.

c) $2 < x < 7$.

d) Vô nghiệm.

16. Giải phương trình : $\left|x - |4 - x|\right| - 2x = 4$.

a) $x = 9$.

b) $x = 4$.

c) $0 < x < 4$.

d) Một đáp số khác.

17. Giải phương trình : $\dfrac{1 - 2x}{3 - |x - 1|} = 1$.

a) $x = \dfrac{1}{3}$.

b) $x = \dfrac{1}{2}$.

c) $x = -\dfrac{1}{3}$.

d) Một đáp số khác.

18. Cho phương trình $|x^2 - 1| = x + m$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

a) Với mọi m, phương trình không thể có nghiệm âm.

b) Phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

c) Phương trình có nhiều nhất hai nghiệm phân biệt.

d) Khi $m = -1$, phương trình có nghiệm duy nhất.

19. Giải phương trình : $|x| = x^2 + x - 2$.

a) $x = \sqrt{2}$; $x = -1 - \sqrt{3}$.

b) $x = 1$.

c) $x = \sqrt{2}$; $x = 1 + \sqrt{3}$.

d) Một đáp số khác.

20. Giải phương trình : $(x + 2)^2 = 2|x + 2| + 3$.

a) $x = 1$.

b) $x = -5$.

c) $x = -2$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

21. Giải phương trình : $x^2 - 4|x| + 3 = 0$.

a) $x \in \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}$.

b) $-1 < x < 1$.

c) $1 < x < 3$.

d) Một đáp số khác.

22. Giải phương trình : $(x^2-5x+6)^2+|x^2-5x+6|-6=0$.

a) $x=1$; $x=4$. b) $x=3$.

c) $x=0$. d) Một đáp số khác.

23. Giải phương trình : $x^2+3x+|x+3|=0$.

a) $x=-1{,}5$. b) $x=3$; $x=1$.

c) $x=-1$; $x=-3$. d) Một đáp số khác.

24. Giải phương trình : $2x^2-5|x|+3=0$.

a) $x=2$. b) $0<x<2$.

c) $x=\pm1$; $x=\pm3$. d) $x=\pm1$; $x=\pm\dfrac{3}{2}$.

25. Giải phương trình : $|9-x^2|=16$.

a) $x=3$. b) $x=25$.

c) $x=-25$. d) Một đáp số khác.

26. Giải phương trình : $x^2-6x+|x-4|+8=0$.

a) $x=\pm1$. b) $0<x<1$.

c) $x=3$; $x=4$. d) $3<x<4$.

27. Cho phương trình $|2-x-x^2|=x^2+|x-2|$. Tập nghiệm của phương trình là :

a) $S=\{0\,;2\}$. b) $S=\{0\}\cup[2\,;+\infty)$.

c) $S=[0\,;2]$. d) $S=(2\,;+\infty)$.

28. Giải phương trình : $\dfrac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

a) $x=-\sqrt{5}$; $x=2+\sqrt{5}$. b) $x=\sqrt{5}$; $x=-2-\sqrt{5}$.

c) $x=-1$; $x=-2$. d) Một đáp số khác.

29. Giải phương trình : $\dfrac{3}{|x+3|-1} = |x+3|$.

a) $x = -3$; $x = -5$.

b) $x = 5$.

c) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

d) Một đáp số khác.

30. Giải phương trình : $\dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x-5|} = 1$.

a) $x = 5$.

b) $x \in \left\{-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{2} ; 2\right\}$.

c) $x \in \{2 ; 4\}$.

d) Một đáp số khác.

31. Giải bất phương trình : $|x-3| \geq 1$.

a) $3 \leq x < 4$.

b) $2 < x < 3$.

c) $\left[\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq 4 \end{array}\right.$.

d) $x = 3$.

32. Giải bất phương trình : $|2x-5| \leq 3$.

a) $1 \leq x \leq 4$.

b) $x = \dfrac{5}{2}$.

c) $x < 1$.

d) $x > 4$.

33. Giải bất phương trình : $|x-1| \geq x-1$.

a) $x \in (-\infty ; +\infty)$.

b) Nghiệm duy nhất $x = 1$.

c) $\forall x \geq 1$.

d) Vô nghiệm.

34. Giải bất phương trình : $|x-3| \geq 3-x$.

a) $x \in (-\infty ; +\infty)$.

b) Nghiệm duy nhất $x = 3$.

c) $\forall x \geq 3$.

d) Vô nghiệm.

35. Giải bất phương trình : $|x-2| \leq |x+4|$.

a) $x = -6$. b) $x < -1$.

c) Vô nghiệm. d) Một đáp số khác.

36. Giải bất phương trình : $2|x+1| > x+4$.

a) $|x| > 2$. b) $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2. \end{array}\right.$

c) $-1 \leq x \leq 1$. d) Cả a) và b) đều đúng.

37. Cho bất phương trình : $2|x| < x + m$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

a) Bất phương trình luôn có nghiệm với mọi x.

b) Tập nghiệm của bất phương trình là một khoảng.

c) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-m\ ;\ +\infty\right)$.

d) Bất phương trình luôn có nghiệm với mọi $m > 0$.

38. Giải bất phương trình : $|x+2| - |x-1| < x - \dfrac{3}{2}$.

a) $x = 1$. b) $x > \dfrac{9}{2}$.

c) $0 < x \leq \dfrac{9}{2}$. d) Vô nghiệm.

39. Giải bất phương trình $|x+1| + |x-4| > 7$. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của x thoả bất phương trình :

a) $x = 9$. b) $x = 8$.

c) $x = 7$. d) $x = 6$.

40. Tìm giá trị x nguyên nhỏ nhất thoả phương trình :

$$|x-3| + 2|x+1| = 4.$$

a) $x = 3$. b) $x \geq 3$.

c) $x < -1$. d) Một đáp số khác.

41. Cho bất phương trình $(m^2-2)x \le m(x+1)+1$. Bất phương trình vô nghiệm khi :

a) $m = \pm\sqrt{2}$.　　　　b) $m = 2$.

c) $m = -1$.　　　　d) $m = 0$.

42. Cho bất phương trình $m^2x + 1 > m(x+1)$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Bất phương trình được thoả mãn với mọi x khi $m = 0$

b) Bất phương trình được thoả mãn với mọi $x > 0$ khi $m < 0$.

c) Bất phương trình được thoả mãn với mọi $x > 1$ khi $m > 1$.

d) Cả a), b), c) đều đúng.

43. Tìm giá trị x nguyên lớn nhất của bất phương trình :

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 1.$$

a) $x = -4$.　　　　b) $x = -2$.

c) $x = -1$.　　　　d) $x = 1$.

44. Giải bất phương trình : $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} \le \dfrac{2}{x+2}$.

a) $\left[-2 ; \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup (0 ; 2) \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} ; +\infty\right)$.

b) $x \notin \{-2;0;2\}$.

c) $-2 < x < 0$.

d) Một đáp số khác.

45. Tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình : $\dfrac{x+1}{x-1} \ge \dfrac{x+5}{x-1}$.

a) $[1 ; +\infty)$.　　　　b) $(-\infty ; 1) \cup (1 ; 3]$.

c) $(3 : 5) \cup (6 : 16)$.　　　　d) Một đáp số khác.

46. Giải bất phương trình : $|x-1|-|x+2|+3 \geq |2x-5|-|3-x|$.

a) $[0 ; +\infty)$.

b) $[-4 ; 0) \cup \left[2 ; \frac{8}{3}\right]$.

c) $[-4 ; +\infty)$.

d) Một đáp số khác.

47. Giải bất phương trình : $|x-1|-|x-2|+|x+1| > |x+2|+|x|-3$.

a) $[1 ; +\infty)$.

b) $[-3 ; -1] \cup [-1 ; 1] \cup [1 ; 3]$.

c) $(-3 ; 1) \cup (-1 ; 1) \cup (1 ; 3)$.

d) $x \geq -2$.

48. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$

a) $x = 2 ; y = -3$.

b) $x = 2 ; y = 3$.

c) $x = -2 ; y = 3$.

d) Hệ vô định.

49. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 3. \end{cases}$

a) $x = 4 ; y = 0$.

b) $x = 8 ; y = 6$.

c) $x = 8 ; y = -6$.

d) Hệ vô nghiệm.

50. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y-2}{3} = 2 \\ \frac{x-3}{3} + \frac{y+2}{2} = 2. \end{cases}$

a) $x = 3 ; y = 2$.

b) $x = 3 ; y = -2$.

c) $x = 1 ; y = 5$.

d) $x = -3 ; y = 2$.

51. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12. \end{cases}$

a) $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{3}$.

b) $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$.

c) $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$.

d) Hệ vô nghiệm.

52. Giả sử hệ phương trình : $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ với $a, b, c > 0$, có nghiệm duy nhất. Hãy tìm một hệ thức giữa a, b, c.

a) $a^2 = b^2 + c^2$.

b) $a^3 = b^3 + c^3$.

c) $a = b + c$.

d) Một hệ thức khác.

53. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} ax + y = 2001 \\ x + ay = 7002. \end{cases}$$

a) $a = 1$.

b) $a \neq 1$.

c) $a \neq -1$.

d) Cả b) và c) đều đúng.

54. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình sau có vô số nghiệm :

$$\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

a) $a = 0$.

b) $a = 2$.

c) $a = -1$.

d) Một đáp số khác.

55. Tìm tất cả các giá trị của m, n, p để phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} x + py = n \\ px + y = m. \end{cases}$$

a) $p = 1, n - m \neq 0$.

b) $p = -1, n + m \neq 0$.

c) $n = m$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

56. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x - ay = 2. \end{cases}$ Tìm mọi a để hệ có nghiệm duy nhất.

a) $a \neq 0$.

b) $\begin{cases} a \neq \pm 12 \\ a \neq \frac{1}{5}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \frac{2}{5}. \end{cases}$

d) Một đáp số khác.

57. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2y} + y = 2 \\ \dfrac{y}{2y+x} = -3. \end{cases}$

a) $(-7\ ;\ 3), \left(\dfrac{7}{3}\ ;\ -1\right)$.

b) $(1\ ;\ 0)$.

c) $(2\ ;\ 3)$.

d) $(3\ ;\ 2)$.

58. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + x = 1 \\ \dfrac{x}{x-y} + 2 = 0. \end{cases}$

a) $(1\ ;\ 0)$.

b) $(2\ ;\ 3)$.

c) $\left(-1\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right), (2\ ;\ 3)$.

d) Một đáp số khác.

59. Tìm mọi $a \in \mathbb{R}$ để hệ sau đây có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2a. \end{cases}$

a) $a \neq 0$.

b) $a \neq \pm 1$.

c) $a \neq \pm 3$.

d) Một đáp số khác.

60. Với những giá trị nào của a thì hệ sau đây có vô số nghiệm :

$$\begin{cases} (a-2)x + 27y = \dfrac{9}{2} \\ 2x + (a+1)y = -1. \end{cases}$$

a) $a = 10$. b) $a = -8$.

c) $a = -7$. d) Cả a), b), c) đều sai.

61. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ |y| - x - 1 = 0. \end{cases}$

a) $x = 1$; $y = 0$. b) $x = -3$; $y = 4$.

c) $x = 0$; $y = 1$. d) Một đáp số khác.

62. Tìm tập hợp nghiệm của hệ : $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ |x - 3| - y = 0. \end{cases}$

a) $(0 ; 3), (4 ; 1)$. b) $(3 ; 0)$.

c) $(2 ; 1)$. d) Một đáp số khác.

63. Giải hệ : $\begin{cases} x + y - x = 2 \\ 2x - y + 4z = 1 \\ -x + 6y + z = 5. \end{cases}$

a) $x = 0$; $y = 1$; $z = -1$. b) $x = 1$; $y = 1$; $z = 0$.

c) $x = 2$; $y = -1$; $z = 1$. d) Một đáp số khác.

64. Giải hệ : $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

a) $(0 ; 11)$. b) $(11 ; 0)$.

c) $(1 ; 5), (5 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2)$. d) $(1 ; 15)$.

65. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = 9,\ y > x. \end{cases}$

a) $(1 ; 8)$. b) $(2 ; 7)$.

c) $(4 ; 5), (5 ; 4)$. d) $(4 ; 5)$.

66. Tìm nghiệm của hệ : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x - y = -1. \end{cases}$

a) $(4 ; 5)$.

b) $(3 ; 4)$.

c) $(5 ; 6)$.

d) Một đáp số khác.

67. Cho hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = a + 2 \\ x^2y + xy^2 = a + 1. \end{cases}$ Định tất cả các giá trị của a để hệ có nghiệm :

a) $\left[\begin{array}{l} a \le -1 \\ a \ge 2. \end{array}\right.$

b) $\left[\begin{array}{l} a \le -\dfrac{3}{4} \\ a \ge 1. \end{array}\right.$

c) $\left[\begin{array}{l} a \le -2 \\ a \ge 3. \end{array}\right.$

d) $\left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{3}{4} \\ a = 1. \end{array}\right.$

68 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$. Định mọi giá trị của a để hệ có và chỉ có 2 nghiệm.

a) $a = 1$.

b) $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2. \end{array}\right.$

c) $a = 0$.

d) Một đáp số khác.

69. Tìm nghiệm của hệ : $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-4} - \dfrac{x-1}{y+4} + \dfrac{16}{y^2 - 16} = 0 \\ 11x - 3y = 1. \end{cases}$

a) $x = 0$; $y = -\dfrac{1}{3}$.

b) $x = \dfrac{1}{11}$; $y = 0$.

c) $x = -1$; $y = -4$.

d) Hệ vô nghiệm.

70. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{1}{4y^2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

a) $x = \frac{8}{13}$; $y = \frac{12}{5}$.
b) $x = 1$; $y = 1$.
c) $x = -1$; $y = 1$.
d) $x = 1$; $y = -1$.

71. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x - 2y} + x + 2y = 5 \\ \frac{x + 2y}{x - 2y} = a \end{cases}$. Tìm mọi giá trị của a để hệ có nghiệm.

a) $a = 1$.
b) $a = 5$.
c) $a \leq 1$.
d) $a \leq \frac{25}{4}$.

72. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y + 1} = \frac{1}{x} \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

a) $(4 ; 3)$.
b) $(3 ; 4)$.
c) $\left(1 ; \sqrt{6}\right)$
d) $(4 ; -3), (4 ; 3)$.

73. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0. \end{cases}$

a) $x = 1$; $y = 2$.
b) $x = -1$; $y = -2$.
c) $x = -2$; $y = -1$.
d) Một đáp số khác.

74. Tìm tất cả các cặp số $(x ; y)$ thoả hệ : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3y^3 = -8. \end{cases}$

a) $(2 ; -1), (-1 ; 2)$.
b) $(-1 ; -2)$.
c) $\left(1 ; \sqrt[3]{6}\right)$.
d) Một đáp số khác.

75. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ x - y = 2. \end{cases}$

a) $(3\ ;\ 0)$.	b) $(5\ ;\ 2)$.

c) $(3\ ;\ 1), (-1\ ;-3)$.	d) Một đáp số khác.

76. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 \\ \dfrac{xz}{x+z} = 2 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 3. \end{cases}$

a) $x = \dfrac{12}{7}\ ;\ y = \dfrac{12}{5}\ ;\ z = -12$.	b) $x = 2\ ;\ y = 1\ ;\ z = 1$.

c) $x = 1\ ;\ y = 2\ ;\ z = 1$.	d) Một đáp số khác.

77. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 91 \\ y^2 = xz. \end{cases}$

a) $(2\ ;\ 3\ ;\ 8), (8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.	b) $(1\ ;\ 2\ ;\ 4), (4\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

c) $(3\ ;\ 4\ ;\ 6)$.	d) $(1\ ;\ 3\ ;\ 9), (9\ ;\ 3\ ;\ 1)$.

78. Xác định mọi giá trị a để hệ có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 2x + 2(a-1)y = a - 1 \\ 2x + ay = 1. \end{cases}$$

a) $\dfrac{4}{3} \leq a \leq 3 - \sqrt{5}$.	b) $5 - \sqrt{5} < a \leq 2$.

c) $-2 \leq a \leq 0$.	d) Cả a), b), c) đều sai.

79. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ và α là số thực bất kì. Điều kiện để $f(x)$ có đúng một nghiệm lớn hơn α là :

a) $af(\alpha) \leq 0$.	b) $af(\alpha) < 0$.

c) $af(\alpha) < 0$ hoặc $\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0. \end{cases}$

d) $af(\alpha) \leq 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0. \end{cases}$

80. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ và α là số thực bất kì. Điều kiện để bất phương trình $f(x) > 0$ được thoả mãn với mọi $x > \alpha$ là :

a) $\Delta < 0$.

b) $\Delta < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha \geq 0. \end{cases}$

c) $\Delta < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha \leq 0. \end{cases}$

d) $\Delta < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha < 0. \end{cases}$

81. Tìm mọi giá trị của b để phương trình $x^2 - 2bx - 9 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

a) $b = 3$.

b) $b > 3$.

c) $b \leq 3$.

d) Một đáp số khác.

82. Tìm mọi giá trị của k để phương trình :

$$(k-1)x^2 + 1(k+4)x + k + 8 = 0.$$

a) $k \neq 1$.

b) $k = -12$.

c) $k = 24$.

d) Một đáp số khác.

83. Với giá trị nào của m thì phương trình sau vô nghiệm trên $\mathbb{R}$:

$$x^2 - x + m = 0.$$

a) $m = \dfrac{1}{4}$.

b) $0 < m < \dfrac{1}{4}$.

c) $m > \dfrac{1}{4}$.

d) Một đáp số khác.

84. Định m để phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

a) $m = 0$. b) $m = -\dfrac{1}{3}$.

c) $m \neq 0$. d) Cả a) và b) đều đúng.

85. Tìm giá trị thực của a để phương trình : $x^2 + 2a\sqrt{a^2 - 3}.x + 4 = 0$ có nghiệm số kép.

a) $a = 2$. b) $a = -2$.

c) Cả a) và b) đều đúng. d) Cả a), b), c) đều sai.

86. Giải phương trình : $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 - 5.\dfrac{x+1}{x} + 6 = 0$.

a) $x = 2$. b) $x = 1$.

c) $x = \dfrac{1}{2}$. d) Cả b) và c) đều đúng.

87. Giải phương trình $\left(\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x}\right)^2 + 3\left(\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x}\right) - 10 = 0$.

a) $x = -2$. b) $x = \dfrac{1}{2}$.

c) $x = 2$. d) Một đáp số khác.

88. Tìm mọi a để phương trình $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ có hai nghiệm đối nhau.

a) $a = 0$. b) $a = 1$, $a = -2$.

c) $-2 < a < 1$. d) Một đáp số khác.

89. Tìm k nguyên nhỏ nhất để phương trình :

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

có hai nghiệm thực phân biệt.

a) $k = -2$. b) $k = 1$.

c) $k = 3$. d) $k = 4$.

90. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0. \end{cases}$

a) $x = -2$.
b) $x = 2$.
c) $x = 4$.
d) Một đáp số khác.

91. Tìm điều kiện của tham số a để cả hai phương trình sau đều vô nghiệm :

$$x^2 - ax + 1 = 0; \quad (1)$$

$$x^2 + 2(a-2)x + a = 0. \quad (2)$$

a) $0 < a < 1$.
b) $1 < a < 2$.
c) $2 < a < 3$.
d) Cả a), b), c) đều sai.

92. Cho phương trình $x^4 + (a-1)x^3 + x^2 + (a-1)x + 1 = 0$. Tìm mọi $a \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình có không ít hơn 2 nghiệm âm.

a) $a = 3$.
b) $a < \dfrac{7}{2}$.
c) $a \geq 2$.
d) $a > \dfrac{5}{2}$.

93. Tìm các cặp số nguyên $(a\,;b)$ sao cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 mà $x_1 \in (-5\,;-4)$, $x_2 \in (2\,;3)$ và $a+b$ chia hết cho 2.

a) $(2\,;-10)$.
b) $(2\,;-12)$.
c) $(2\,;-14)$.
d) Cả a), b), c) đều đúng.

94. Cho phương trình $x^2 - 4ax + 1 = 0$. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để phương trình có nghiệm thực x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 \geq a$, $x_2 \geq 0$.

a) $a \geq \dfrac{1}{2}$.
b) $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 3$.
c) $-1 < a < 3$.
d) Một đáp số khác.

95. Tìm mọi $a \in \mathbb{R}$ để phương trình $ax^2 + x + a - 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thoả điều kiện : $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| > 1$.

a) $\left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ a > 1. \end{array}\right.$

b) $\left[\begin{array}{l} 1 < a < \dfrac{6}{5} \\ a > 2. \end{array}\right.$

c) $\vee \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ 1 < a < \dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$

d) Một đáp số khác.

96. Tìm mọi giá trị của k để ta có $x^2 - (k-3)x - k + 6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) $0 \leq k < -3$.

b) $-3 \leq k \leq 5$.

c) $5 \leq k \leq 7$.

d) Một đáp số khác.

97. Với các giá trị nào của a để ta có $2ax^2 + 4ax + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

a) $a = \frac{1}{2}$.

b) $a \leq -2$.

c) $0 \leq a < \frac{1}{2}$.

d) Cả a), b), c) đều sai.

98. Tìm k nguyên để ta có :

$$x^2 - 2(4k-1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) $k = 2$.

b) $k = 3$.

c) Cả a), b) đều đúng.

d) Các câu trên đều sai.

99. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để bất phương trình $a(x^2 - x + 1) \leq x^2 + x + 1$ có nghiệm $x \in [0 ; 1]$.

a) $a \leq 3$.

b) $4 < a \leq 5$.

c) $a \in (0 ; +\infty)$.

d) Các câu trên đều sai.

100. Với những giá trị $a \in \mathbb{R}$ nào thì miền giá trị của hàm $y = \frac{x+1}{x^2 + a}$ sẽ chứa đoạn $[0 ; 1]$?

a) $\left[\begin{array}{l} a < -1 \\ -1 < a \le \dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$ b) $2 < a < 3$.

c) $\left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 2. \end{array}\right.$ d) $\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ 1 < a < 4. \end{array}\right.$

101. Với những giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì miền giá trị của hàm $y = \dfrac{x+1}{-x^2+1-a}$ không chứa giá trị nào trong đoạn $[-1\ ;\ 1]$?

a) $a \in \varnothing$. b) $a \in [0\ ;1]$.

c) $a \in [-1\ ;1]$. d) Một đáp số khác.

102. Tìm mọi giá trị a để tồn tại, dù chỉ một nghiệm chung của các bất phương trình $x^2 + 4ax + 3a^2 > 1 + 2a$ và $x^2 + 2ax \le 3a^2 - 8a + 4$.

a) $a > 2$. b) $\left[\begin{array}{l} a < \dfrac{1}{2} \\ a > \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

c) $a < 1$. d) Một đáp số khác.

103. Tìm a để mỗi nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3a^2 - 1 \ge 2a(2x-1)$ cũng là nghiệm của bất phương trình $x^2 - (2x-1)a + a^2 \ge 0$.

a) $a < 0$. b) $a \le -1$.

c) $a \ge 2$. d) $a \ge -1$.

104. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 < 0 \\ x^3 + 3mx + 1 < 0. \end{cases}$ Định m để hệ có nghiệm.

a) $m < -\dfrac{28}{27}$. b) $-\dfrac{28}{27} \le m < -3$.

c) $3 < m < 5$. d) Một đáp số khác.

105. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm ?

$$\begin{cases} x^2 - (m-2)x + 2m < 0 \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0. \end{cases}$$

a) $0 < m < 1$. b) $m < 0$.

c) $1 < m < 3$. d) Cả b) và c) đều đúng.

106. Định $a \in \mathbb{R}$ để điểm $M(a\,;\,a^2)$ thuộc miền trong tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $y = x + 1$, $y = -x + 3$, $y = -2x$.

a) $a \geq -1$. b) $a \leq 3$.

c) $-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} < a < -2$. d) $-1 < a < 2$.

107. Tìm các giá trị của a để hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-a}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases}$$

a) $a < -1$. b) $a \geq 2$.

c) $a \leq -2$. d) $a \in \varnothing$.

108. Tìm các giá trị của a để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x + 6a \leq 0. \end{cases}$$

a) $a_1 = 0,\ a_2 = 1$. b) $a = 2$.

c) $a_1 = -2,\ a_2 = -1$. d) $a = \dfrac{1}{2}$.

109. Tìm mọi $a < 0$ để các bất phương trình sau có nghiệm chung :

$$\begin{cases} 2\sqrt{ax} < 3a - x \\ x - \sqrt{\dfrac{x}{a}} > \dfrac{6}{a}. \end{cases}$$

a) $-\frac{2}{3} < a < 0$.

b) $-2 < a < -1$.

c) $1 \leq a \leq 2$.

d) $a \in \varnothing$.

110. Với những giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì đường thẳng $y = \frac{x}{a}$ cắt parabol $(P) : y = x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt mà hoành độ x_1, x_2 thoả bất đẳng thức $\left|x_1^2 - x_2^2\right| > \frac{1}{a}$.

a) $\left(-\frac{1}{2} ; 0\right) \cup \left(0 ; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

b) $(-1 ; 0)$.

c) $(-1 ; 0) \cup (0 ; 1)$.

d) $\left(-\frac{2}{3} ; 0\right) \cup \left(0 ; \frac{1}{5}\right)$.

111. Tìm tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ để bất phương trình :

$$x^2 - (4a + 3)x + 3a(a + 3) < 0$$

nghiệm đúng với mọi $x \in [1 ; 3]$.

a) $0 < a < \frac{1}{3}$.

b) $a = 1$.

c) $-2 < a < 1$.

d) Một đáp số khác.

112. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $m \in \varnothing$.

b) $m \in (-7 ; 1)$.

c) $m \in [-1 ; 0]$.

d) $m > 1$.

113. Tìm các giá trị của tham số a để bất phương trình $\frac{x^2 + a^2}{a(x + 6)} \geq 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1 ; 1)$.

a) $a \leq 1$.

b) $a \in \varnothing$.

c) $a \geq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$.

d) $a \geq 0$.

114. Giải bất phương trình : $\left|\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}\right| < 3$.

a) $-2 \le x \le -1$.　　b) $x \ge 3$.

c) $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -1. \end{array}\right.$　　d) $x \in \mathbb{R}$.

115. Tìm tập nghiệm của bất phương trình : $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$.

a) $(-5\,;-2)\cup(2\,;\,3)\cup(3\,;\,5)$.　　b) $(0\,;\,2)\cup(5\,;+\infty)$.

c) $(-\infty\,;-5)\cup(-2\,;\,2)$.　　d) Một đáp số khác.

116. Định a để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$|10x-2x^2-8| = x^2-5x+a.$$

a) $a = 1$.　　b) $a \in (1\,;\,10)$.

c) $a \in \left[4\,;\,\dfrac{45}{4}\right]$.　　d) $4 < a < \dfrac{43}{4}$.

117. Định tất cả các giá trị thực của m để hai phương trình sau có nghiệm chung : $x^2+mx+1=0$; $x^2+x+m=0$.

a) $m = 1$.　　b) $m = -4$.

c) $m = -2$.　　d) Một đáp số khác.

118. Định a sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$|2x^2-3x-2| = 5a-8x-2x^2.$$

a) $a = 15$.　　b) $a = -12$.

c) $a = -\dfrac{56}{79}$.　　d) $a = -\dfrac{57}{80}$.

119. Giải phương trình : $\sqrt{2x-4} = 0$.

a) $x \ge 2$.　　b) $0 < x < 2$.

c) $x < 0$.　　d) Một đáp số khác.

120. Cho phương trình $\sqrt{x^2-1} = x - m$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Phương trình có nhiều nhất một nghiệm.

b) Phương trình có ít nhất một nghiệm.

c) Phương trình không thể có nghiệm dương với mọi m.

d) Phương trình có nhiều nhất hai nghiệm.

121. Cho phương trình $\sqrt{x+1} = mx$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

a) Phương trình vô nghiệm khi $m < 0$.

b) Phương trình có nghiệm duy nhất với mọi m.

c) Phương tình có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 0$.

d) Cả a), b) và c) đều sai.

122. Cho phương trình $\sqrt{3x+1} = x^2 + 1$. Phương trình này có :

a) 1 nghiệm. b) 2 nghiệm phân biệt.

c) 3 nghiệm phân biệt. d) 4 nghiệm phân biệt.

123. Giải phương trình : $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$.

a) $x = 1$. b) $x \geq 1$.

c) $x \geq 2$. d) Các câu trên đều sai.

124. Giải bất phương tình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = -4$.

a) $x = 1$. b) $x \geq 1$.

c) $x \geq 2$. d) Các câu trên đều sai.

125. Giải bất phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 1$.

a) $x = 2$. b) $x \geq 2$.

c) $2 \leq x \leq 3$. d) Các câu trên đều sai.

126. Giải phương trình $x - \sqrt{x+1} = 1$.

a) $x = 3$. b) $x = 1$.

c) $x = 3$. d) Một đáp số khác.

127. Giải phương trình : $\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2}$.

a) $x = 2$. b) $x = 4$.

c) $x = 8$. d) Một đáp số khác.

128. Giải phương trình : $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0$.

a) $x = 3$ b) $x = -1$.

c) $x = 0$. d) Các câu trên đều sai.

129. Giải phương trình : $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x-3} - \sqrt{x-6}$.

a) $x = 22$. b) $x = 16$.

c) $x = 14$. d) Một đáp số khác.

130. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$.

a) $x = 1$. b) $x = 2$.

c) $x = \dfrac{3}{2}$. d) Các câu trên đều sai.

131. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$.

a) $x = 31$, $x = 60$. b) $x = 29$, $x = -60$.

c) $x = 30$, $x = -62$. d) $x = 30$, $x = -61$.

132. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$.

a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. b) $x_1 = -\dfrac{27}{8}$, $x_2 = 1$.

c) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 0$. d) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

133. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình : $\sqrt{2-x} + \dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$.

a) $\{0 ; 2\}$. b) $\{0\}$.

c) $\varnothing$. d) $\{1\}$.

134. Giải phương trình : $x\sqrt{x^2+15} - \sqrt{x}.\sqrt[4]{x^2+15} = 2$.

a) $x = 0$. b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

c) Vô nghiệm. d) Các câu trên đều sai.

135. Giải phương trình : $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4$.

a) $x_1 = 1, x_2 = -1$.

b) $x_1 = -\dfrac{3}{2}, x_2 = \dfrac{1}{2}$.

c) $x_1 = 0, x_2 = 2$.

d) Một đáp số khác.

136. Giải phương trình : $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$.

a) $x = 1$.

b) $x = -\dfrac{4}{3}$.

c) $x \in \varnothing$.

d) Một đáp số khác.

137. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$$

a) $x = 2$.

b) $x = 9$.

c) $x = -3$.

d) Vô nghiệm.

138. Giải phương trình : $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}-12=0$.

a) $x = 20$.

b) $x = 76$.

c) $x = -1$.

d) Một đáp số khác.

139. Tìm các nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}.$$

a) $x_1 = 2, x_2 = 4$.

b) $x = 6$.

c) $x = 1$.

d) Một đáp số khác.

140. Tìm tập nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

a) $[1 ; +\infty)$.

b) $(2 ; +\infty)$.

c) $[2 ; +\infty)$.

d) $1 \le x \le 2$.

141. Giải phương trình : $\dfrac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}=2\sqrt{2}$.

a) $x_1=-2,\ x_2=1+\sqrt{5}$. b) $x_1=1,\ x_2=1-\sqrt{5}$.

c) $x_1=0,\ x_2=-2$. d) Vô nghiệm.

142. Giải phương trình : $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}-\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$.

a) $x\neq 0$. b) $x\geq -20$.

c) $-20\leq x\leq 20,\ x\neq 0$. d) Cả a), b), c) đều sai.

143. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình : $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=\dfrac{5}{2}$.

a) $x>0$. b) $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

c) $x\leq 1$. d) Một đáp số khác.

144. Giải phương trình : $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

a) $x=1$. b) $x=\dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1$. d) Một đáp số khác.

145. Giải phương trình : $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$.

a) $x=1$. b) $x=\dfrac{3}{4}$.

c) $\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1$. d) Cả a), b), c) đều sai.

146. Giải phương trình : $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

a) $x\leq 2$. b) $x=0$.

c) $x=\dfrac{3}{2}$. d) $x=\dfrac{1}{2}$.

147. Giải phương trình : $\dfrac{2}{3}\sqrt{x+9} - \sqrt{\dfrac{x^2+8x}{x+9}} = \dfrac{3}{\sqrt{x+9}}$.

a) $x = -9$. b) $x = 1,8$.

c) $x = -1$. d) Một đáp số khác.

148. Giải phương trình : $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$.

a) $x = \dfrac{5}{4}$. b) $x = 2$.

c) $x = \dfrac{5}{4}$, $x = \dfrac{5}{3}$. d) Đáp số khác.

149. Giải phương trình : $\sqrt[4]{x+8} + \sqrt[4]{x-7} = 3$.

a) $x = -8$. b) $x = 7$.

c) $x = 24$. d) $x = 8$.

150. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm :

$$x + \sqrt{2x^2+1} = m.$$

a) $m \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. b) $m = \dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4} < m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. d) $0 < m < \dfrac{1}{2}$.

151. Xác định mọi giá trị $m \in \mathbb{R}$ để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = m.$$

a) $3 < m < 4$. b) $3\sqrt{2} - \dfrac{9}{2} \leq m \leq 3$.

c) $-2 \leq m \leq -1$. d) Một đáp số khác.

152. Xác định tất cả các giá trị của a để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{y+2} = a \\ x + y = 3a. \end{cases}$$

a) $\dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \le a \le \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$. b) $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2} \le a \le 5$.

c) $-2 \le a \le -1$. d) Một đáp số khác.

153. Định tất cả các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=m \\ \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1. \end{cases}$$

a) $(1\,;+\infty)$. b) $[1\,;100]$.

c) $[0\,;\,2]$. d) $\{1\}$.

154. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^2y+xy^2=-2 \\ x^3+y^3=7 \end{cases}$. Tập nghiệm của hệ là :

a) $\{(-1\,;-1),\ (2\,;-1)\}$. b) $\{(-2\,;\ 1),\ (-1\,;\ 2)\}$.

c) $\{(2\,;-1),\ (-1\,;\ 2)\}$. d) Một kết quả khác.

155. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 5(x+y)-4xy=4 \\ x+y-xy=1-m \end{cases}$. Hệ có nghiệm nếu m thoả mãn điều kiện :

a) $\dfrac{1}{4} \le m \le 1$. b) $m \le \dfrac{1}{4}$.

c) $m \ge 1$. d) $m \le \dfrac{1}{4}$ hoặc $m \ge 1$.

156. Định các giá trị của tham số m để hệ sau có : $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=m \\ x+y-\sqrt{xy}=m. \end{cases}$

a) $(1\,;\ 4)$. b) $\{1\}$.

c) $[0\,;\ 3]$. d) $[1\,;\ 4]$.

157. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \\ 2y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y} \end{cases}$. Tập nghiệm của hệ là :

a) $\{(1;1),(-1;-1)\}$.

b) $\left\{\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

c) $\left\{(1;1),(-1;-1),\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

d) Một kết quả khác.

158. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y=m \\ y^2+x=m \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi m thoả mãn điều kiện :

a) $m \geq \frac{3}{4}$.

b) $m \geq -\frac{1}{4}$.

c) $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$.

d) $m \geq -1$.

159. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=19 \\ xy(x-y)=6 \end{cases}$. Tập nghiệm của hệ là :

a) $\{(3;2),(-2;-3)\}$.

b) $\{(3;2),(2;3)\}$.

c) $\{(3;-2),(2;-3)\}$.

d) Một kết quả khác.

160. Tìm tập nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}$.

a) $[3;+\infty)$.

b) $\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$.

c) $\left[\frac{10}{3};3\right]$.

d) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3};+\infty\right)$.

161. Tìm tập nghiệm của bất phương trình : $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$.

a) $x>4$.

b) $x \leq -\frac{13}{6}$.

c) $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -\frac{13}{6} \end{array}\right.$.

d) $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -\frac{5}{6} \end{array}\right.$.

162. Giải bất phương trình : $1 - x < \sqrt{x^2 - 2x}$.

a) $1 \le x < 2$. b) $0 \le x \le 1$.

c) $x \ge 2$. d) $x < 0$.

163. Tìm tập nghiệm của bất phương tŕnh : $\sqrt{4 - x^2} + \frac{|x|}{x} \ge 0$.

a) $[-3\ ;\ 2] \setminus \{0\}$. b) $2 < x \le 4$.

c) $x \ne 0$. d) Một đáp số khác.

164. Cho bất phương trình $\sqrt{4x - 2} + \sqrt{16 - 4x} \le 4$. Định a để bất phương trình có nghiệm.

a) $a \ge \sqrt{14}$. b) $\frac{\sqrt{14}}{2} < a < \sqrt{14}$.

c) $0 < a \le 1$. d) $1 < a \le \frac{3}{2}$.

165. Cho bất phương trình $mx - \sqrt{x - 3} \le m + 1$. Định m để bất phương trình có nghiệm.

a) $1 \le m \le 2$. b) $\frac{\sqrt{3} + 1}{4} < m < 1$.

c) $m \le \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$. d) Một đáp số khác.

166. Cho bất phương trình $-4\sqrt{(4 - x)(2 + x)} \le x^2 - 2x + a - 18$. Xác định tất cả các giá trị của a để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-2\ ;\ 4]$.

a) $a \ge 10$. b) $8 < a < 10$.

c) $0 \le a \le 2$. d) Cả a), b), c) đều đúng.

167. Cho bất phương trình $\sqrt{(a + 2)x - a} \ge |x + 1|$. Tìm tất cả các giá trị của a để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0\ ;\ 2]$.

a) $0 \le a \le 2$.

b) $-1 < a < 0$.

c) $\left[\begin{array}{l} a \le -1 \\ a \ge 5. \end{array}\right.$

d) $3 \le a \le 4$.

168. Giải phương trình : $2^{2x-1}.4^{x+1} = 64.8^{x-1}$.

a) $x = 1$.

b) $x = 0$.

c) $x = 3$.

d) $x = 2$.

169. Giải phương trình : $9^{3x-1} = 3^{8x-2}$.

a) $x = 1$.

b) $x = 2$.

c) $x = -1$.

d) Một đáp số khác.

170. Giải phương trình : $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2-4x+3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$.

a) $x = 2$.

b) $x = \dfrac{3}{2}$.

c) $x = 1$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

171. Giải phương trình : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4x} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2x}$.

a) $x = 4$.

b) $x = 0$.

c) $x = 3$.

d) Cả b) và c) đều đúng.

172. Giải phương trình : $2^x.5^{x-1} = 0.2.10^{2-x}$.

a) $x = 3$.

b) $x = 2$.

c) $x = 1$.

d) Một đáp số khác.

173. Giải phương trình : $4^{x-1}.2^x = 16.2^x$.

a) $x = 0$.

b) $x = 1$.

c) $x = 2$.

d) $x = 3$.

174. Giải phương trình : $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$.

a) $x = 3$.

b) $x = 2$.

c) $x = -1$.

d) Một đáp số khác.

175. Giải phương trình : $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

a) $x = 3$. b) $x = 2$.

c) $x = -1$. d) Một đáp số khác.

176. Giải phương trình : $2^{x+1}.5^x = 200$.

a) Nghiệm duy nhất $x = 2$. b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

c) $x = 5$. d) $x = 3$.

177. Giải phương trình : $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x+\frac{3}{2}}$.

a) Nghiệm duy nhất $x = 1$. b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

c) $x = 4$. d) Một đáp số khác.

178. Giải phương trình : $5^{2x} - 7^x - 35.5^{2x} + 35.7^x = 0$.

a) $x = 2$. b) $x = -2$.

c) $x = -1$. d) $x = 0$.

179. Giải phương trình : $5^{x-1} = 10^x.2^{-x}.5^{x+1}$.

a) $x = 0$. b) $x = 2$.

c) $x = -2$. d) $x = -1$.

180. Giải phương trình : $3^{x^2-4x+3} = 1$.

a) $x = 4$, $x = 2$. b) $x = 0$.

c) $x = 1$, $x = 3$. d) Một đáp số khác.

181. Cho phương trình $\left(\sqrt{5}+1\right)^x + a\left(\sqrt{5}-1\right)^x = 2^x$. Để phương trình có nghiệm duy nhất, tham số a phải thoả mãn điều kiện :

a) $a = \dfrac{1}{4}$. b) $x < 0$.

c) $a = \dfrac{1}{4}$ hoặc $a \le 0$. d) $a = \dfrac{1}{4}$ hoặc $a < 0$.

182. Giải phương trình : $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-7x+3}$.

a) $x = 0$. b) $x = 1$.

c) $x = 3$. d) $x = -1$.

183. Giải phương trình : $\left(\frac{1}{8}\right).4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$.

a) $x = 4$. b) $x = 6$.

c) $x = \frac{38}{3}$. d) $x = \frac{34}{3}$.

184. Giải phương trình : $3^{x+1}.5^{\frac{2x-2}{x}} = 15$.

a) $x = 4$. b) $x = 3,\ x = \log_3 5$.

c) $x = 2,\ x = -\log_3 5$. d) Một đáp số khác.

185. Giải phương trình : $4^{\frac{2}{x}} - 5.4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$.

a) $x = 4$. b) $x = 3$.

c) $x = 2$. d) Một đáp số khác.

186. Giải phương trình : $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$.

a) $x = 3$. b) $x = 2$.

c) $x = 1$. d) $x = 0$.

187. Giải phương trình : $4^x - 10.2^{x-1} = 24$.

a) $x = 3$. b) $x = 2$.

c) $x = 1$. d) $x = -2$.

188. Giải phương trình : $4^{x^2+2} - 92^{x^2+2} + 8 = 0$.

a) Nghiệm duy nhất $x = 1$. b) $x_1 = 1,\ x_2 = -1$.

c) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$. d) Một đáp số khác.

189. Giải phương trình : $4^x - 6.2^x + 8 = 0$.

a) $x = 4, x = 3$. b) $x = -1,\ x = 0$.

c) $x = 1,\ x = 2$. d) Một đáp số khác.

190. Giải phương trình : $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

a) $x = 1$. b) $x = 2$.

c) $x = 3$. d) Cả a), b), c) đều sai.

191. Giải phương trình : $3^x + 4^x = 5^x$.

a) $x = 4$. b) $x = 3$.

c) $x = 1$, $x = -1$. d) Một đáp số khác.

192. Giải phương trình : $9^x + 6^x = 2.4^x$.

a) $x = 0$. b) $x = 2$.

c) $x = 3$. d) $x = -1$.

193. Giải phương trình : $4.2^{2x} - 6^x = 18.3^{2x}$.

a) $x = 0$. b) $x = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) $x = 3$. d) $x = -3$.

194. Giải phương trình : $64.9^x - 84.12^x + 27.16^x = 0$.

a) Nghiệm duy nhất $x = 1$. b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

c) $x = -2$. d) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

195. Giải phương trình : $2.4^{\frac{1}{x}} - 6^{-\frac{1}{x}} = 3.9^{-\frac{1}{x}}$.

a) $x = 3$. b) $x = 2$.

c) $x = -3$. d) $x = 1$.

196. Giải phương trình : $3.16^x + 2.81^x = 5.36^x$.

a) $x = 0$. b) $x = \frac{1}{2}$.

c) a) và b) đều đúng. d) Cả a), b), c) đều sai.

197. Định m để phương trình sau có nghiệm : $3^{1-x} + \frac{1}{3^{1-x}} + 2m = 0$.

a) $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. b) $m \geq 2$.

c) $m \leq -2$. d) $0 < m < -2$.

198. Định m để phương trình $4^x + m.2^{x+1} - m = 0$ có nghiệm.

a) $m > 0$. b) $m \leq -1$.

c) $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$. d) a), b) đều đúng.

199. Tìm tất cả các giá trị cua m để phương trình sau có nghiệm :

$$4^x - m.2^x + m + 3 = 0.$$

a) $m < -3$. b) $m \geq 6$.

c) a) và b) đều đúng. d) Cả a), b), c) đều sai.

200. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình sau vô nghiệm :

$$5.16^x + 2.81^x = a.36^x.$$

a) $a \leq -2\sqrt{10}$. b) $0 \leq a \leq 1$.

c) $2 \leq a \leq 3$. d) $a \geq 2\sqrt{10}$.

201. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2^x.2^{-y} = 2. \end{cases}$

a) $x = 3$; $y = 6$. b) $x = 4$; $y = 5$.

c) $x = 5$; $y = 4$. d) $x = 8$; $y = 1$.

202. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x + y).2^{y-x} = 1 \\ (x + y)^{x-y} = 2. \end{cases}$

a) $x = \frac{3}{2}$; $y = 1$. b) $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$.

c) $x = -\frac{1}{4}$; $y = \frac{3}{4}$. d) b) và c) đều đúng.

203. Giải bất phương trình : $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$.

a) $x < -2$. b) $-2 < x < 0$.

c) $0 < x < 1$. d) $x \in (0 ; +\infty)$.

204. Giải bất phương trình : $4^x - 2.5^{2x} - 10^x > 0$.

a) $x > 5$.

b) $3 < x \leq 5$.

c) $x < \log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$.

d) Một đáp số khác.

205. Giải bất phương trình : $4^x - 5.2^x + 4 > 0$.

a) $x = 0$.

b) $0 < x < 1$.

c) $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2. \end{array}\right.$

d) Một đáp số khác.

206. Giải bất phương trình : $2^x + 8.2^{-x} - 6 < 0$.

a) $x = 1$.

b) $1 < x < 2$.

c) $x \geq 2$.

d) Cả a), b), c) đều sai.

207. Cho bất phương trình : $2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1$. Nghiệm của bất phương trình là :

a) $x > -1$.

b) $-3 < x < 2$.

c) $x < 3$.

d) $x < 2$.

208. Với những giá trị nào của a thì phương trình :

$$x^2 - (2^a - 1)x - 3(4^{a-1} - 2^{a-2}) = 0.$$

có nghiệm thực ?

a) $a = -\frac{3}{2}$.

b) $a = -\frac{1}{2}$.

c) $\left[\begin{array}{l} a \leq -2 \\ a \geq 0. \end{array}\right.$

d) $-\frac{1}{2} < a < 0$.

209. Tìm tất cả các giá trị của m để ta có : $4^x + m.2^{x+1} - m > 0, \forall x$.

a) $-2 \leq m < -1$.

b) $-3 \leq m < -2$.

c) $-5 \leq m \leq -4$.

d) Một đáp số khác.

210. Tìm các giá trị của m để bất phương trình $4^x - m.2^x + m + 3 \leq 0$ có nghiệm.

a) $-3 \leq m \leq 0$. b) $m < -3$.

c) $m \geq 6$. d) Cả b) và c) đều đúng.

211. Cho bất phương trình $(m-1)4^x + 2^{x+1} + m + 1 > 0$. Ta tìm tất cả các giá trị của m để (1) thoả với mọi x.

a) $0 \leq m < 1$. b) $m \geq 1$.

c) $-1 < m \leq 0$. d) Cả a), b), c) đều đúng.

212. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình :

$$(3m+1).12^x + (2-m).6^x + 3^x < 0.$$

nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

a) $0 < m < 2$. b) $2 < m < 4$.

c) $m < -2$. d) $-1 < m < 0$.

213. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để mọi nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} \geq 12$ (1) cũng là nghiệm của bất phương trình $(m-2)^2 x^2 - 3(m-6)x - (m+1) \leq 0$.(2)

a) $-1 \leq m \leq 5$. b) $-2 < m < -1$

c) $-3 \leq m \leq -2$. d) $5 < m < 6$.

214. Cho bất phương trình $m.9^{2x^2-x} - (2m+1).6^{2x^2-x} + m.4^{2x^2-x} \leq 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thoả điều kiện $|x| \geq \frac{1}{2}$.

a) $6 < m < 9$. b) $m \geq 9$.

c) $m < 0$. d) $3 < m < 6$.

215. Giải phương trình : $\lg(x+5) + \lg(x-16) = 2$.

a) $x = 100$. b) $x = 10$.

c) $x = 20$. d) $x = 16$.

216. Giải phương trình : $\lg(3x + 25) - \lg(x - 15) = 1$.

a) $x = 15$. b) $x = 35$.

c) $x = 75$. d) Một đáp số khác.

217. Giải phương trình : $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$.

a) $x = 3$. b) $x = -1$.

c) $x \leq 1$. d) $x < 3$.

218. Giải phương trình : $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$.

a) $x \geq -1$. b) $x \geq -3$.

c) $x = 0$. d) $x = 2$.

219. Giải phương trình : $\log_3(x^2 - 3x - 1) = 2$.

a) $x = 3$. b) $x = 4,\ x = -1$.

c) $x = -5,\ x = -3$. d) $x = 5,\ x = -2$.

220. Giai phương trình : $\log_{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\right) = 2$.

a) $x = 2,\ x = \frac{3}{2}$. b) $x = 1$.

c) $x = \frac{1}{2}$. d) b) và c) đều đúng.

221. Giải phương trình : $\log_x(2x^2 - 4x + 3) = 2$.

a) $x = 1$. b) $x = 3$.

c) $x = 2$. d) $x = 4$.

222. Giải phương trình : $\log_{x+1}(x^2 + x + 4) = 2$.

a) $x = 1$. b) $x = 2$.

c) $x = 3$. d) $x = 4$.

223. Giải phương trình : $\log_2 x + \log_x 2 = 2$.

a) $x = 4$. b) $x = 3$.

c) $x = 8$. d) Một đáp số khác.

224. Giải phương trình : $\lg^2 x . \lg x^2 + 2 = 0$.

a) $x = 10$. b) $x = 100$.

c) $x = 1000$. d) Cả a) và b) đều đúng.

225. Giải phương trình : $1 + \log_2 (x - 1) = \log_{x-1} 4$.

a) $x = 3$. b) $x = \dfrac{5}{4}$.

c) $x = 4$. d) Cả a) và b) đều đúng.

226. Cho phương trình $\log_{\sqrt{5}} x + \log_3 x = \log_{\sqrt{5}} 3 . \log_9 225$. Tập nghiệm của phương trình là :

a) $\{3\}$. b) $\{5\}$.

c) $\left\{3 ; \dfrac{1}{3}\right\}$. d) Một kết quả khác.

227. Giải phương trình $\log_{\sqrt{5}} x + \log_3 x = 1$.

a) $x = 5$. b) $x = 3$.

c) $x = \dfrac{3}{5}$. d) $x = 5^{\log_{15} 3}$.

228. Giải và biện luận phương trình $\log^2_{a^2} (x - a) = 1$. Trong các kết luận sau đây, kết luận nào đúng ?

a) $a \notin \{0 ; -1 ; 1\}$, $x = a + a^2$.

b) $a \notin \{0 ; -1 ; 1\}$, $x = a + a^2$ và $x = a + \dfrac{1}{a^2}$.

c) $a > 0$, $a \neq 1$, $x = a + a^2$.

d) $a > 0$, $a \neq 1$, $x = a + a^{\sqrt{2}}$ và $x = a + \dfrac{1}{a^{\sqrt{2}}}$.

229. Giải phương trình : $2^{\log_2^4 x} = \dfrac{1}{64}$.

a) $x = 2$. b) $x = 4$.

c) $x = 8$. d) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

230. Giải phương trình : $(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1)$.

a) $x = 9$. b) $x = 999$.

c) $x = \dfrac{1}{9}$. d) $x = 99$, $x = -0{,}9$.

231. Giải phương trình : $3^{\log_3 \lg\sqrt{x}} - \lg x = 3 - \lg^2 x$.

a) $x = 1000$. b) $x = 10$.

c) $x = 2$. d) $x = 100$.

232. Giải phương trình : $x^{\lg x+1} = 10^6$.

a) $x = 10$. b) $x = 10^{-3}$.

c) $x = 10^2$. d) Cả b) và c) đều đúng.

233. Giải phương trình : $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$.

a) $x = 1$. b) $x = 3$.

c) $x = 4$. d) $x = 5$.

234. Giải phương trình : $\left(\dfrac{1}{2}\lg x\right)^{\lg^2 x+\lg^2-2} = \lg\sqrt{x}$.

a) $x = 10^{-3}$. b) $x = 10$.

c) $x = 10^{-2}$. b) $x = 10^{-1}$.

235. Giải phương trình : $x^{\frac{\lg x+7}{4}} = 10^{\lg x+1}$.

a) $x = 1$. b) $x = 10^{-1}$.

c) $x = 10^{-2}$. c) $x = 10$, $x = 10^{-1}$.

236. Giải phương trình : $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 4$.

a) $x = -3$. b) $x = -5$.

c) $x = -4$. c) $x = 5$.

237. Giải phương trình : $\log_3\left[5 + 4\log_3(x-1)\right] = 2$.

a) $x = 2$. b) $x = 3$.

c) $x = 4$. d) $x = 5$.

238. Giải phương trình : $\log_3\left[1 + \log_3\left(2^x - 7\right)\right] = 1$.

a) $x = 3$. b) $x = 5$.

c) $x = 6$. d) $x = 4$.

239. Giải phương trình: $\log_3\left(3^x - 8\right) = 2 - x$.

a) $x = 3$. b) $x = 4$.

c) $x = 5$. d) Một đáp số khác.

240. Giải phương trình : $\dfrac{\log_2\left(9 - 2^x\right)}{3 - x} = 1$.

a) $x = 2$. b) $x = 0$.

c) $x = 6$. d) Vô nghiệm.

241. Giải phương trình : $\log_7\left(2^x - 1\right) + \log_7\left(2^x - 7\right) = 1$.

a) $x = 5$. b) $x = 4$.

c) $x = 6$. d) $x = 3$.

242. Giải phương trình : $\log_2\left(9 - 2^x\right) = 10^{\lg(3-x)}$.

a) $x = 3$. b) $x = 2$.

c) $x = 1$. d) $x = 0$.

243. Giải phương trình : $\log_3\left[\log_2 x - 2 + 9^x\right) = 2x$.

a) $x = 2$. b) $x = 3$.

c) $x = 4$. d) $x = 1$.

244. Giải phương trình : $x^{1+\lg x} = 10x$.

a) $x = 10$. b) $x = \dfrac{1}{10}$.

c) $x = 1$. d) a) và b) đều đúng.

245. Giải phương trình : $x^{\log_3 x} = 9$.

a) $x = 3$. b) $x = 9$.

c) $x = 3^{1+\sqrt{2}}$. d) $x = 3^{\sqrt{2}}$, $x = 3^{-\sqrt{2}}$.

246. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

a) $x = 1$; $y = 1$. b) $x = 4$; $y = 1$.

c) $x = 4$; $y = 2$. d) Cả a) và c) đều đúng.

247. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^{\lg y} = 2 \\ xy = 20. \end{cases}$

a) $x = 2$; $y = 10$. b) $x = 10$; $y = 2$.

c) $x = 3$; $y = 3$. d) Cả a) và b) đều đúng.

248. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y - \log_3 x = 1 \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

a) $x = 4$; $y = 27$. b) $x = 27$; $y = 3$.

c) $x = 6$; $y = 4$. d) $x = 27$; $y = 4$.

249. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_2 x + 2\log_2 y = 3 \\ x^2 + y^4 = 16. \end{cases}$

a) $x = \sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$. b) $x = 2\sqrt{2}$; $y = \sqrt{8}$.

c) $x = 2\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$. d) Một đáp số khác.

250. Giải bất phương trình : $\log_2(3x + 1) \geq 2$.

a) $-\dfrac{1}{3} < x < 0$. b) $x = 0$.

c) $0 < x < 1$. d) $x \geq 1$.

251. Giải bất phương trình : $\log_3(x^2 - 3x - 1) \leq 2$.

a) $-2 < x < 5$. b) $-2 < x < \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$.

c) $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} < x < 5$. d) Cả b) và c) đều đúng.

252. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 4x + 4\right) > 0$.

a) $x = 0$. b) $x = 1$.

c) $x = 3$. d) $1 < x < 3$, $x \neq 2$.

253. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{2}{5}}\left(x^2 - 6x + 6\right) \leq 0$.

a) $a \geq 5$. b) $2 \leq x \leq 3$.

c) $x \leq 1$. d) Cả a) và c) đều đúng.

254. Giải bất phương trình : $\lg(3x + 1) + \lg(x - 4) > 2$.

a) $x \leq \frac{13}{3}$. b) $-\frac{13}{3} < x < 4$.

c) $4 < x < 8$. d) $x > 8$.

255. Giải bất phương trình : $\lg(7x + 9) - \lg(x - 3) < 1$.

a) $x = 4$. b) $3 < x < 4$.

c) $x > 13$. d) Một đáp số khác.

256. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right) > -1$.

a) $0 < x < 1$. b) $-1 < x < 0$.

c) $x \geq 4$. d) $1 < x < 4$.

257. Giải bất phương trình : $\log_3|3x - 4x| > 2$.

a) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{4}$. b) $x < -\frac{3}{2}$.

c) $x > 3$. d) Cả b) và c) đều đúng.

258. Giải bất phương trình : $\log_5\left(\frac{4x + 6}{x}\right) \geq 0$.

a) $x \leq -2$. b) $-1 < x \leq 0$.

c) $x > 0$. d) Cả a) và c) đều đúng.

259. Giải bất phương trình : $\log_7\left(\dfrac{2x-6}{2x-1}\right) > 0$.

a) $x < \dfrac{1}{2}$.

b) $0 < x < \dfrac{1}{2}$.

c) $1 < x < 2$.

d) Một đáp số khác.

260. Giải bất phương trình : $1 + \log_2(x-2) > \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

a) $1 < x < 2$.

b) $3 < x < 4$.

c) $2 < x < 3$.

d) $x \geq 4$.

261. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4(x^2 - 5)\right] > 0$.

a) $-3 < x < -\sqrt{5}$.

b) $\sqrt{5} < x < 3$.

c) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

262. Giải bất phương trình : $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6$.

a) $49 \leq x \leq 100$.

b) $27 \leq x \leq 36$.

c) $0 < x < 27$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

263. Giải bất phương trình : $\log_5 \sqrt{3x+4}.\log_x 5 > 1$.

a) $1 < x < 4$.

b) $0 < x < 1$.

c) $x > -1$.

d) $x > 4$.

264. Giải bất phương trình : $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

a) $-\dfrac{3}{2} < x < 1$.

b) $-1 < x < 3$.

c) $-1 < x \leq 3$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

265. Giải bất phương trình : $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$.

a) $0 < x < \dfrac{1}{5}$.

b) $x > 5\sqrt{5}$.

c) $x < 0$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

266. Giải bất phương trình : $\log_x\left(2x^2-4x+3\right)>2$.

a) $x>3$. b) $1<x<3$.

c) $x=3$. d) $x=1$.

267. Giải bất phương tình : $\log_x\left(2x^2-4x+3\right)\le 2$.

a) $3<x<5$. b) $\left[\begin{array}{l}1<x\le 3\\ 0<x<1.\end{array}\right.$

c) $\left[\begin{array}{l}5<x<6\\ 7<x<8.\end{array}\right.$ d) $x\in\varnothing$.

268. Giải bất phương trình : $\log_x\left(x^3-x^2-2x\right)<3$.

a) $0<x<\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{2}<x<1$.

c) $1<x<2$. d) Các câu trên đều sai.

269. Giải bất phương trình : $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)}>1$.

a) $-\sqrt{2}<x<-1$. b) $1<x<\sqrt{2}$.

c) $x>\sqrt{2}$. d) Cả a), b) đều đúng.

270. Giải bất phương trình : $\log_{x-3}\left(2x^2-20x+80\right)\ge\log_{x-3}\left(x^3-16\right)$.

a) $4<x<8$. b) $x>12$.

c) $9<x<11$. d) Cả a), b) đều đúng.

271. Giải bất phương trình : $\log_{x^2}\left(x+2\right)<1$.

a) $-2<x<-1$. b) $-1<x<1,\ x\ne 0$.

c) $x>2$. d) Cả a), b), c) đều đúng.

272. Giải bất phương trình : $\log_2\left(4^x-5.2^x+8\right)>x$.

a) $\left[\begin{array}{l}x<1\\ x>2.\end{array}\right.$ b) $1<x<\frac{3}{2}$.

c) $x=1$; $x=2$. d) Một đáp số khác.

273. Cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2+1} < \log_2(ax+a)$. Tìm tất cả các giá trị của a để bất phương trình có nghiệm.

a) $-1 < a < 0$. b) $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $a < -1$. d) Cả b) và c) đều đúng.

274. Cho bất phương trình $\log_2(x^2+ax) \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số a để cho $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình.

a) $\max a = 1$. b) $\max a = 4$.

c) $\max a = 2$. d) $\max a = 3$.

275. Giải hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7.2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$$

a) $1 < x < 2$. b) $0 < x < 1$.

c) $2 < x < 3$. d) $x \in \varnothing$.

276. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) $\min y = f(2) = -1$. b) $\min y = 0$.

c) $\min y = 1$. d) $\min y = 3$.

277. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $D = [3\ ;\ 4]$.

a) $\max y = f(4); \min y = f(3)$. b) $\max y = f(3)$: $\min y = f(0)$.

c) $\max y = f(2); \min y = f(1)$. d) $\max y = f\left(\frac{1}{2}\right); \min y = f(-1)$.

278. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ $= x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $D = [1\ ;\ 4]$.

a) $\max y = f(1); \min y = f(1)$. b) $\max y = f(3); \min y = f(4)$.

c) $\max y = f(4); \min y = f(0)$. d) $\max y = f(2); \min y = f(3)$.

279. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$z = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1.$$

a) $\min z = 0$. b) $\min z = 1$.

c) $\min z = -1$. d) $\min z = 2$.

280. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$T = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 16xz - 24yz.$$

a) $\min T = 0$. b) $\min T = 1$.

c) $\min T = 3$. d) $\min T = -1$.

281. Cho x và y là hai số thoả các điều kiện $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (1-x)(2-y)(4x+y)$.

a) $\max A = 3$. b) $\max A = 2$.

c) $\max A = -2$. d) $\max A$ không tồn tại.

282. Cho x, y thay đổi thoả điều kiện $xy + yz + zx = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4 + z^4$.

a) $\min A = 9$. b) $\min A = 4$.

c) $\min A = \dfrac{19}{3}$. d) $\min A = \dfrac{16}{3}$.

283. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$L = \frac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{abc} \text{ với } a \geq 3,\ b \geq 4,\ c \geq 2.$$

a) $\max L = \dfrac{3}{2}$. b) $\max L = 4$.

c) $\max L = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{1}{4}$. d) $\max L = \dfrac{\sqrt{2}}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} + 1$.

284. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $z = x^2 + y^2$ biết x và y thay đổi thoả hệ thức $3x + 5y = 7$.

a) $\min z = 34$. b) $\min z = \dfrac{34}{7}$.

c) $\min z = 0$. d) $\min z = \dfrac{49}{34}$.

285. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $y = \dfrac{1}{-x^2 + 6x - 10}$.

a) $\min y = -1$. b) $\min y = 1$.

c) $\min y = -\dfrac{1}{2}$. d) Một đáp số khác.

286. Tìm giá trị nhỏ nhất của b để phương trình sau có nghiệm :

$$x^4 - 2x^2 - 2b + 2 = 0.$$

a) $\min b = \dfrac{1}{2}$. b) $\min b = 1$.

c) $\min b = 0$. d) $\min b = 2$.

287. Xác định giá trị lớn nhất của tham số a để phương trình :

$$(a+1)x^2 - 2(a+2)x + 2a = 0$$

có ít nhất một nghiệm $x \geq 1$.

a) $\max a = 1 - \sqrt{5}$. b) $\max a = 1 + \sqrt{5}$.

c) $\max a = 1 + \sqrt{3}$. d) $\max a = 1 - \sqrt{3}$.

288. Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$$

trên đoạn $[-2 \,;\, 0]$ là bằng 2.

a) $a = -1$. b) $\min a = -2$.

c) $a = \sqrt{3} + 1$. d) Cả a) và c) đều đúng.

289. Cho $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^4 + b^4$.

a) $\min T = 2$. b) $\min T = 4$.

c) $\min T = 1$. d) Một đáp số khác.

290. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình :

$$x^4 + ax^3 + x^2 + ax + 1 = 0$$

có ít nhất 2 nghiệm âm.

a) $1 \le a \le \frac{3}{2}$.

b) $0 \le a < 1$.

c) $a = 0$.

d) Cả a), b), c) đều sai.

291. Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt nằm trong đoạn $[-3\ ;\ 0]$:

$$\left(x^2 + 2x\right)^2 - (m+1)\left(x^2 + 2x\right) + m + 1 = 0.$$

a) $-1 < m < 0$.

b) $-\frac{3}{2} < m < -1$.

c) $0 < m < 1$.

d) Cả a) và c) đều đúng.

292. Cho phương trình $x^2 + 2(a-3)x + a - 13 = 0$, với $a \ge 1$. Định a để nghiệm lớn của phương trình đạt giá trị lớn nhất.

a) $a = 3$.

b) $a = 2$.

c) $a = 1$.

d) Một đáp số khác.

293. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$ với x và y là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - y = 2 - a \\ x + 2y = a + 1. \end{cases}$$

a) $S = \frac{9}{17}$.

b) $S = 1$.

c) $S = \frac{16}{17}$.

d) Một đáp số khác.

294. Tìm mọi $k \in \mathbb{R}$ sao cho ta có $\frac{kx+1}{x^2+x+1} \le 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

a) $3 - 2\sqrt{6} \le k \le 3 + 2\sqrt{6}$.

b) $8 \le k \le 9$.

c) $3 + 2\sqrt{6} < k < 8$.

d) Cả b) và c) đều đúng.

295. Tìm a và b để hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

a) $a = 4$; $b = 23$.

b) $a = -4$; $b = 3$.

c) $a = 4$; $b = -3$.

d) Cả a) và b) đều đúng.

296. Cho hàm số $y = \dfrac{12x(x-m)}{x^2 + 36}$. Định m sao cho giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y là những số nguyên.

a) $m = 0$.

b) $m = 8$.

c) $m = -8$.

d) Cả a), b), c) đều đúng.

297. Cho $x > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = (1+x)^2\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} + 1\right)$.

a) $\min A = 16$.

b) $\min A = 9$.

c) $\min A = 25$.

d) $\min A = 4$.

298. Cho a, $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$f = \frac{a+b}{c} + \frac{c+a}{b} + \frac{b+c}{a}.$$

a) $\min f = 6$.

b) $\min f = 3$.

c) $\min f = \dfrac{3}{2}$.

d) $\min f = 9$.

299. Cho a, b, $c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$T = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

a) $\min T = 3$.

b) $\min T = 2$.

c) $\min T = \dfrac{3}{2}$.

d) $\min T = 1$.

300. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$K = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}$$

với a, b, $c > 0$, thay đổi và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

a) $\min K = 3$.

b) $\min K = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

c) $\min K = \dfrac{3}{2}$.

d) $\min K = 3\sqrt{3}$.

301. Viết dạng lượng giác của số phức z thoả mãn $|z| = 3$ và một acgumen của z là $\dfrac{5\pi}{4}$.

a) $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) $z = -3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

d) $z = 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

302. Viết dạng lượng giác của số phức $z = (-1 - i)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

a) $z = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$.

b) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

c) $z = \cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

d) $z = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

303. Rút gọn biểu thức $A = \left(\dfrac{1 + i\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}\right)^4$.

a) $\dfrac{1}{8}$.

b) $-\dfrac{1}{8}$.

c) $\dfrac{1}{2}$.

d) $-\dfrac{1}{2}$.

304. Dạng lượng giác của số phức $z = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)i$ là :

a) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

b) $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

c) $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

d) $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

305. Cho hai số phức $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ và $z_2 = \sqrt{3} - i$. Dạng lượng giác của số phức $(z_1 z_2)^2$ là :

a) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.   b) $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

c) $16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.   d) $16\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

306. Dạng lượng giác của số phức $z = -\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ là :

a) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.   b) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

c) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.   d) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

307. Các nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 2 = 0$ là :

a) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.   b) $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

c) $1 \pm i\sqrt{3}$.   d) $-1 \pm i\sqrt{3}$.

308. Hai số phức $3 + 2i$ và $-i$ là các nghiệm của phương trình :

a) $z^2 + (3 + i)z + 2 - 3i = 0$.   b) $z^2 + (3 + i)z + 3 - 2i = 0$.

c) $z^2 - (3 + i)z + 2 - 3i = 0$.   d) $z^2 - (3 + i)z + 3 - 2i = 0$.

309. Các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2(3 - i)z + 11 - 10i = 0$ là :

a) $4 + i$ và $2 - 3i$.   b) $4 + i$ và $3 - 2i$.

c) $4 - i$ và $2 - 3i$.   d) $4 - i$ và $3 - 2i$.

310. Các căn bậc hai của số phức $z = 48 + 14i$ là :

a) $\pm(7 + i)$.   b) $\pm(14 + i)$.

c) $\pm(7 + 2i)$.   d) $\pm(1 + 7i)$.

311. Các căn bậc hai của số phức $z = -40 - 42i$ là :

a) $\pm(3+7i)$.　　b) $\pm(3-7i)$.

c) $\pm(7+3i)$.　　d) $\pm(-40-42i)$.

312. Nếu số phức z có một căn bậc hai là $w = 5 - 2i$ thì :

a) $z = 21 + 20i$.　　b) $z = 21 - 20i$.

c) $z = 29 + 20i$.　　d) $z = 29 - 20i$.

313. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 + i \\ 3x + iy = 2 - 3i. \end{cases}$

a) $(1 - i\,;\, i)$.　　b) $(i\,;\, 1 - i)$.

c) $(1 + i\,;\, -i)$.　　d) $(-i\,;\, 1 + i)$.

314. Tìm số phức z thoả mãn $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$.

a) $z = -i, 0, i$.　　b) $z = -1, i, 1$.

c) $z = -1, 0, 1$.　　d) $z = -i, 1, i$.

315. Nếu $(1+2i)z = 3z - i$ thì :

a) $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$.　　b) $z = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$.

c) $z = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$.　　d) $z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$.

316. Phần thực của số phức $z = \dfrac{3-i}{1+i}$ là :

a) 1.　　b) 2.

c) 3.　　d) 0.

317. Thu gọn biểu thức $z = \dfrac{\sqrt{2} + 2i}{\sqrt{2} - 2i}$.

a) $z = \dfrac{1 + i2\sqrt{2}}{3}$.　　b) $z = \dfrac{1 - i2\sqrt{2}}{3}$.

c) $z = \dfrac{-1 - i2\sqrt{2}}{3}$.　　d) $z = \dfrac{-1 + i2\sqrt{2}}{3}$.

318. Tìm các số thực x, y sao cho $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

a) $x=\frac{4}{11}, y=\frac{5}{11}$. b) $x=-\frac{4}{11}, y=-\frac{5}{11}$.

c) $x=\frac{4}{11}, y=-\frac{5}{11}$. d) $x=-\frac{4}{11}, y=\frac{5}{11}$.

319. Cho $z=\frac{1+i}{1-i}$. Tính z^{100}.

a) i. b) $-i$.

c) 1. d) 0.

320. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $|z-i|+|z+2i|=5$ là :

a) Elip. b) Hypebol.

c) Parabol. d) Một điểm.

B. TRẢ LỜI

1d	2a	3b	4c	5b	6d	7d	8a	9b	10c
11a	12b	13a	14c	15d	16d	17c	18d	19a	20d
21a	22a	23c	24d	25d	26c	27b	28b	29c	30b
31c	32a	33a	34a	35d	36d	37d	38b	39d	40d
41b	42d	43c	44a	45b	46b	47c	48b	49c	50a
51b	52d	53d	54d	55d	56c	57a	58c	59b	60c
61c	62a	63b	64c	65d	66a	67b	68c	69d	70a
71d	72d	73d	74a	75c	76a	77d	78d	79c	80c
81b	82d	83c	84d	85c	86d	87c	88b	89c	90c
91b	92d	93d	94a	95c	96b	97c	98b	99a	100a
101a	102b	103d	104a	105b	106c	107a	108a	109a	110a
111a	112b	113c	114c	115a	116d	117d	118d	119d	120a
121b	122b	123d	124d	125d	126c	127d	128c	129d	130c

131d	132b	133d	134d	135b	136b	137a	138b	139c	140c
141a	142d	143b	144c	145d	146c	147b	148c	149d	150a
151b	152a	153d	154c	155d	156d	157c	158b	159a	160d
161d	162c	163a	164a	165c	166a	167c	168d	169d	170d
171d	172c	173d	174d	175d	176a	177b	178d	179c	180c
181c	182b	183c	184c	185d	186b	187a	188b	189c	190b
191d	192a	193b	194b	195d	196c	197c	198d	199c	200a
201c	202d	203d	204c	205c	206b	207d	208c	209d	210d
211b	212c	213a	214c	215c	216d	217b	218c	219d	220d
221b	222c	223d	224d	225d	226a	227d	228b	229d	230d
231d	232d	233d	234b	235d	236b	237c	238d	239d	240b
241d	242c	243c	244d	245d	246d	247d	248d	249b	250d
251d	252d	253d	254d	255c	256d	257d	258d	259a	260c
261d	262c	263a	264d	265d	266a	267b	268d	269d	270d
271d	272a	273d	274d	275a	276a	277a	278c	279c	280a
281b	282d	283c	284d	285a	286a	287b	288d	289a	290d
291d	292b	293c	294a	295a	296d	297d	298a	299a	300c
301d	302b	303d	304b	305d	306d	307b	308c	309a	310a
311b	312b	313a	314c	315a	316a	317d	318d	319c	320a

Phụ lục

TRÍCH GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC (2005 – 2008)

NĂM 2005

ĐỀ THI KHỐI A

***Câu II.* 1.** Giải bất phương trình : $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases}5x-1\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 2x-4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{5x-1}>\sqrt{2x-4}+\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 5x-1>3x-5+2\sqrt{(2x-4)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x+2>\sqrt{(2x-4)(x-1)}\Leftrightarrow x^2+4x+4>2x^2-6x+4$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x<0\Leftrightarrow 0<x<10.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta có $2\le x<10$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

ĐỀ THI KHỐI B

***Câu II.* 1.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 & (1)\\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3. & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases}x\ge 1\\ 0<y\le 2.\end{cases}$ Ta có :

$(2) \Leftrightarrow 3\left(1+\log_3 x\right)-3\log_3 y=3 \Leftrightarrow \log_3 x=\log_3 y \Leftrightarrow x=y.$

Thay $y=x$ vào (1) ta có :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1 \Leftrightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2. \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là : $(1\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ 2)$.

ĐỀ THI KHỐI D

***Câu II.* 1.** Giải phương trình : $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4.$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$2\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}-\sqrt{x+1}=4 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\sqrt{x+1}=4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

NĂM 2006

ĐỀ THI KHỐI A

***Bài 2.* 2.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$. Đặt $t=\sqrt{xy}$, $(t \geq 0)$. Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra : $x+y=3+t$.

Bình phương hai vế của phương trình thứ hai ta được :

$$x + y + 2 + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 16. \quad (2)$$

Thay $xy = t^2$, $x + y = 3 + t$ vào (2) ta được :

$$3 + t + 2 + 2\sqrt{t^2 + 3 + t + 1} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + t + 4} = 11 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 11 \\ 4\left(t^2 + t + 4\right) = (11 - t)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 11 \\ 3t^2 + 26t - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

Với $t = 3$ ta có $x + y = 6, xy = 9$. Suy ra, nghiệm của hệ là $(3 ; 3)$.

Bài 5b. **1.** Giải phương trình : $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương với :

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $(t > 0)$, phương trình (1) trở thành :

$$3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2(3t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \text{ (vì } t > 0).$$

Với $t = \frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ hay $x = 1$.

ĐỀ THI KHỐI B

Bài 2. **2.** Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt :

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1.$$

Hướng dẫn giải

Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt :

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1. \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - (m - 4)x - 1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

(2) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $-\dfrac{1}{2} \leq x_1 < x_2$, tức là :

$$\begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{m - 4}{6} > -\dfrac{1}{2} \\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{m - 4}{2} - 1 \geq 0, \left(f(x) = 3x^2 - (m - 4)x - 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{12}$$

***Bài 5b.* 1.** Giải bất phương trình :

$$\log_5\left(4^x + 144\right) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5\left(2^{x-2} + 1\right).$$

Hướng dẫn giải

Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\log_5\left(4^x + 144\right) - \log_5 16 < 1 + \log_5\left(2^{x-2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(4^x + 144\right) < \log_5 16 + \log_5 5 + \log_5\left(2^{x-2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(4^x + 144\right) < \log_5\left[80\left(2^{x-2} + 1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80\left(2^{x-2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4^x - 20.2^x + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

ĐỀ THI KHỐI D

***Bài 2.* 2.** Giải phương trình : $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \; (x \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{2x - 1} \; (t \geq 0) \Rightarrow x = \dfrac{t^2 + 1}{2}$. Phương trình đã cho trở thành :

$$t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2\left(t^2 + 2t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \sqrt{2} - 1. \end{array}\right.$$

Với $t = 1$, ta có $x = 1$.

Với $t = \sqrt{2} - 1$ ta có $x = 2 - \sqrt{2}$.

Bài 4. 2. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $\begin{cases} x > -1 \\ y > -1. \end{cases}$ Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0 & (1) \\ y = x + a. & (2) \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1 ; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x)$, $x > -1$.

Do $f(x)$ liên tục trong khoảng $(-1 ; +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1 ; +\infty)$. Mặt khác :

$$f'(x) = e^{x+a} - e^x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a+x}$$

$$= e^x\left(e^a - 1\right) + \frac{a}{(1+x)(1+a+x)} > 0, \ \forall x > -1.$$

Do đó $f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-1 ; +\infty)$, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1 ; +\infty)$. Vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 5b. 1. Giải phương trình : $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

- Phương trình đã cho tương đương với :

$$2^{2x}\left(2^{x^2-x}-1\right)-4\left(2^{x^2-x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^{2x}-4\right)\left(2^{x^2-x}-1\right)=0$$

- $2^{2x}-4=0 \Leftrightarrow 2^{2x}=2^2 \Leftrightarrow x=1$.

- $2^{x^2-x}-1=0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0, x=1$.

NĂM 2007

ĐỀ THI KHỐI A

Bài 2. 2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực :

$$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}.$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$-3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=m. \qquad (1)$$

Đặt $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, khi đó (1) trở thành : $-3t^2+2t=m$. $\qquad (2)$

Vì $t=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}$ và $x \geq 1$ nên $0 \leq t < 1$.

Hàm số $f(t)=-3t^2+2t,\ \ 0 \leq t < 1$ có bảng biến thiên (xem hình).

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t \in [0;1)$.

tức là $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

t	0		1/3		1
$f(t)$	0	↗	1/3	↘	-1

***Bài 5b.* 1.** Giải bất phương trình : $2\log_3(4x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)\le 2$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ \log_3\dfrac{(4x-3)^2}{2x+3}\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ (4x-3)^2\le 9(2x+3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ 16x^2-42x-18\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{3}{8}\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4}<x\le 3.$$

ĐỀ THI KHỐI B

***Bài 2.* 2.** Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt :

$$x^2+2x-8=\sqrt{m(x-2)}.$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\ge 2$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$(x-2)(x^3+6x^2-32-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^3+6x^2-32-m=0. \end{array}\right.$$

Ta chứng minh phương trình $x^3+6x^2-32=m$ (1) có nghiệm trong khoảng $(2;+\infty)$. Xét hàm $f(x)=x^3+6x^2-32$ với $x>2$. Ta có :

$$f'(x)=3x^2+12x>0, \forall x>2.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy với mọi $m > 0$, phương trình (1) luôn có một nghiệm trong khoảng $(2 ; +\infty)$. Vậy với mọi $m > 0$ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

x	2 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

***Bài 4.* 2.** Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = x\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{yz}\right) + y\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{xz}\right) + z\left(\dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{xy}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $\qquad P = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$.

Do $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + \dfrac{y^2 + z^2}{2} + \dfrac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx$ nên :

$$P \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z}\right).$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t}$ với $t > 0$.

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ ta suy ra $f(t) \geq \dfrac{3}{2}, \forall t > 0$. Suy ra $P \geq \dfrac{9}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{9}{2}$.

ĐỀ THI KHỐI D

***Bài 2.* 2.** Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực :

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \dfrac{1}{x^3} + y^3 + \dfrac{1}{y^3} = 15m - 10. \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=u,\ \ y+\dfrac{1}{y}=v\ \ \left(|u|\geq 2,\ \ |v|\geq 2\right)$. Hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m. \end{cases}$$

Vậy u, v là nghiệm của phương trình : $t^2-5t+8=m$. $\quad$ (1)

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $t=t_1,\ \ t=t_2$ thoả mãn $|t_1|\geq 2, |t_2|\geq 2$ ($t_1,\ \ t_2$ không nhất thiết phân biệt).

Xét hàm số $f(t)=t^2-5t+8$ với $|t|\geq 2$.

Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi : $\left[\begin{array}{l} \dfrac{7}{4}\leq m\leq 2 \\ m\geq 22. \end{array}\right.$

t	$-\infty$		-2		2		$5/2$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$				$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	22		2	$\searrow$	$7/4$	$\nearrow$	$+\infty$

Bài 5b. **1.** Giải phương trình :

$$\log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)+2\log_2\frac{1}{4.2^x-3}=0.$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $4.2^x-3>0$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\log_2\left(4^x+15.2^x+27\right)=\log_2\left(4.2^x-3\right)^2 \Leftrightarrow 5.\left(2^x\right)^2-13.2^x-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=-\dfrac{2}{5} \\ 2^x=3. \end{array}\right.$$

Do $2^x>0$ nên : $2^x=3 \Leftrightarrow x=\log_2 3$ (thoả mãn điều kiện).

NĂM 2008

ĐỀ THI KHỐI A

Bài 2. 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y+x^3y+x^2y+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

$(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+x^2y+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y+xy+xy(x^2+y)=-\dfrac{5}{4} \\ x^2+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4}. \end{cases} \qquad (*)$$

Đặt : $\begin{cases} u=x^2+y \\ v=xy. \end{cases}$ Hệ phương trình (*) trở thành :

$$\begin{cases} u+v+uv=-\dfrac{5}{4} \\ u^2+v=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-\dfrac{5}{4}-u^2 \\ u^3+u^2+\dfrac{u}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0,\ v=-\dfrac{5}{4} \\ u=-\dfrac{1}{2},\ v=-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

- $\begin{cases} u=0 \\ v=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}. \end{cases}$

- $\begin{cases} u=-\dfrac{1}{2} \\ v=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2}=0 \\ y=-\dfrac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+x-3=0 \\ y=-\dfrac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right)$ và $\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 4. 2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt :

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m,\ (m\in\mathbb{R}).$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $0\le x\le 6$.

Đặt $f(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$, $x\in[0;6]$. Ta có :

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),\ x\in(0;6).$$

Đặt : $u(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}$; $v(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$.

Ta thấy : $u(2)=v(2)=0\Rightarrow f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x)$, $v(x)$ cùng dương trên khoảng $(0:2)$ và cùng âm trên khoảng $(2;6)$. Từ bảng biến thiên trên, suy ra các giá trị cần tìm của m là :

$$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6.$$

x	0		2		6
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	↗	$3\sqrt{2}+6$	↘	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Bài 5b. **1.** Giải phương trình : $\log_{2x-1}(2x^2+x-1)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4$.

Hướng dẫn giải

Giải phương trình : $\log_{2x-1}(2x^2+x-1)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4$.

Điều kiện : $x>\dfrac{1}{2}$ và $x\neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\log_{2x-1}(2x-1)(x+1)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_{2x-1}(x+1)+2\log_{x+1}(2x-1)=4. \qquad (1)$$

Đặt : $t=\log_{2x-1}(x+1)$. Khi đó, (1) trở thành :

$$t+\frac{2}{t}=3\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=2.\end{array}\right.$$

- Với : $t=1\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1)=1\Leftrightarrow 2x-1=x+1\Leftrightarrow x=2$.
- Với : $t=2\Leftrightarrow \log_{2x-1}(x+1)=2\Leftrightarrow (2x-1)^2=x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\dfrac{5}{4}.\end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là : $x=2$ và $x=\dfrac{5}{4}$.

ĐỀ THI KHỐI B

Bài 2. **2.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9\\ x^2+2xy=6x+6\end{cases}$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$

Hướng dẫn giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 \\ xy = 3x + 3 - \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 3x + 3 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 13x^3 + 48x^2 + 64x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4. \end{array}\right.$$

- $x = 0$ không thoả mãn hệ phương trình.
- $x = -4 \Rightarrow y = \dfrac{17}{4}$.

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là : $\left(-4\,;\dfrac{17}{4}\right)$.

Bài 4. 2. Cho hai số thực x, y thay đổi và thoả mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $P = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + y^2 + 2xy + 2y^2}$.

- Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 1$. Suy ra : $P = 2$.
- Nếu $y \neq 0$. Đặt $x = ty$, khi đó :

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}$$

$$\Leftrightarrow (P-2)t^2 + 2(P-6)t + 3P = 0. \qquad (1)$$

– Với $P = 2$, phương trình (1) có nghiệm : $t = \dfrac{3}{4}$.

– Với $P \neq 2$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta' = -2P^2 - 6P + 36 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3.$$

$P = 3$ khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ hoặc $x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

$P = -6$ khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ hoặc $x = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Vậy, giá trị lớn nhất của P bằng 3, giá trị nhỏ nhất của P bằng -6.

***Bài 5b.* 1.** Giải bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2 + x}{x + 4}\right) < 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2 + x}{x + 4}\right) < 0 \Leftrightarrow \log_6 \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 6$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 3)(x - 8)}{x + 4} > 0.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là : $(-4\,; -3) \cup (8\,; +\infty)$.

ĐỀ THI KHỐI D

***Bài 2.* 2.** Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Hướng dẫn giải

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y. \end{cases}$

Điều kiện : $x \geq 1$, $y \geq 0$. Khi đó, hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} (x + y)(x - 2y - 1) = 0 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y. & (2) \end{cases}$$

Từ điều kiện, ta có $x+y>0$ nên : (1) $\Leftrightarrow x=2y+1$. (3)

Thay (3) vào (2) ta được :

$$(y+1)\sqrt{2y}=2(y+1)\Leftrightarrow y=2 \text{ (do } y+1>0)\Rightarrow x=5.$$

Vậy, nghiệm của hệ là : $(5;2)$.

***Bài 4.* 2.** Cho x, y là hai số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\dfrac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $|P|=\left|\dfrac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right|\le\dfrac{(x+y)(1+xy)}{[(x+y)+(1+xy)]^2}$

$$\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le P\le\frac{1}{4}.$$

- Khi $x=0$, $y=1$ thì $P=-\dfrac{1}{4}$.
- Khi $x=1$, $y=0$ thì $P=\dfrac{1}{4}$.

Vậy, $\min P=-\dfrac{1}{4}$; $\max P=\dfrac{1}{4}$.

***Bài 5b.* 1.** Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0\Leftrightarrow 0<\dfrac{x^2-3x+2}{x}\le 1$.

- $\dfrac{x^2-3x+2}{x}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2.\end{array}\right.$
- $\dfrac{x^2-3x+2}{x}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{x^2-4x+2}{x}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[2-\sqrt{2}\ ;\ 1\right)\cup\left(2\ ;\ 2+\sqrt{2}\right]$.

MỤC LỤC

Phần I.

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ ÁP DỤNG

Phần II.

HƯỚNG DẪN GIẢI – CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN

Phó Tổng biên tập HUỲNH THÔNG

Biên tập lần đầu :

TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :

ĐẶNG VĂN TRÍ

Trình bày bìa :

MINH THƯ

Đơn vị liên doanh in và phát hành :

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI VÀO ĐẠI HỌC

ĐẠI SỐ

Mã số : PTK33t9 - LKT

In 3.000 bản, khổ 16 x 24 cm. Tại **CÔNG TY CỔ PHẦN IN KHUYẾN HỌC PHÍA NAM**, Tp. HCM. Số QĐ xuất bản: **1102/QĐ-GD**, ngày 08/7/2009. Số ĐKKHXB: **32-2009/CXB/116-16/GD**. In xong và nộp lưu chiểu Tháng 8 – 2009.

SÁCH THAM KHẢO MÔN TOÁN, LÍ, HOÁ
DÀNH CHO HỌC SINH LỚP 12, ÔN THI VÀO ĐẠI HỌC

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN TOÁN (7 TẬP)

Tác giả : TRẦN VĂN HẠO (Chủ biên)

- ĐẠI SỐ
- GIẢI TÍCH - ĐẠI SỐ TỔ HỢP
- BẤT ĐẲNG THỨC
- KHẢO SÁT HÀM SỐ
- LƯỢNG GIÁC
- HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN VẬT LÍ (3 TẬP)

Tác giả : NGUYỄN THANH HẢI

- ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN, DAO ĐỘNG CƠ HỌC, SÓNG CƠ
- DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ, DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
- SÓNG ÁNH SÁNG, LƯỢNG TỬ ÁNH SÁNG, SƠ LƯỢC VỀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP, HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ, TỪ VI MÔ ĐẾN VĨ MÔ

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC - MÔN HOÁ (2 TẬP)

Tác giả : NGÔ NGỌC AN

- HOÁ HỮU CƠ
- HOÁ VÔ CƠ

TRUNG TÂM SÁCH KHUYẾN HỌC PHÍA NAM ẤN HÀNH
Số 41, đường 41, P. Thảo Điền, Quận 2 - TP. Hồ Chí Minh
Điện thoại : 08.38251527 - 08.38035929 Fax : 08.38227758

SKH
www.netbook.vn

CĐ LTĐH môn Toán - Đại số
8 935091 991444
Giá : 42.000 đ