JIRI SEDLACEK
Biên dịch: Nguyễn Mận Vị - Phó tiến sĩ toán học

KHÔNG SỢ TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN HẢI PHÒNG

Ô TOÁN HỌC

JIRI SEDLACEK

KHÔNG SỢ TOÁN HỌC

Người dịch : NGUYỄN MẬU VỊ
Phó tiến sĩ toán học

(sách tái bản)

NHÀ XUẤT BẢN HẢI PHÒNG

LỜI GIỚI THIỆU

*Tập sách "**Không sợ toán học**", được dịch từ bản tiếng Đức "KEINE ANGST VOR MATHEMATIK" do nhà xuất bản VEBFACHBUCHVERLAG LEIPZIG thực hiện. Đây là tập sách rất nổi tiếng ở Đức, đã tái bản đến lần thứ 5.*

*Chúng tôi hy vọng rằng, với nội dung phong phú, sinh động của nhiều ngành toán học: lý thuyết đồ thị và tô màu, lý thuyết quy hoạch, tôpô, lý thuyết số,... **Không sợ toán học** sẽ mang lại cho bạn đọc một sự giải trí tích cực, bổ ích và nhất là đánh thức trí thông minh tiềm ẩn trong mỗi con người.*

...Nhân đây, chúng tôi xin cảm ơn anh Lê Xuân Lít- người bạn từ tuổi học trò, đã có những khích lệ đáng quí. Chúng tôi cũng xin cảm ơn trước bạn đọc gần xa về những góp ý kiến cho tập sách.

Người dịch: PTS NGUYỄN MẬU VỊ

LỜI NÓI ĐẦU

Nhiều năm trước đây, khi công tác ở trường phổ thông, tôi đã cố gắng, làm cho các bạn trẻ tin cậy ở tôi, thấu hiểu tính chất quan trọng của toán học.Tôi đã nói với họ: "Không nên xem toán học đơn thuần như sự khó hiểu cần thiết". Một học sinh đã trả lời tôi: ":Không, chúng tôi xem nó là sự khó hiểu vô ích".

Thật đáng tiếc, một bộ phận thanh niên của chúng ta tiếp nhận một cách hoàn toàn bị động và không hứng thú những kiến thức toán học mà họ cần phải có được ở trường phổ thông. Điều đáng tiếc này có hại không chỉ cho những bạn trẻ đó mà còn cho toàn xã hội của chúng ta. Nếu thời kỳ phổ thông đi đến kết thúc và học sinh tốt nghiệp cần phải chọn nghề tương lai cho mình, ta thường nghe: "Chúng tôi không vào trường đại học có toán học quá nhiều". Một thanh niên suy nghĩ để xây dựng tương lai của mình với một quan điểm như thế, có lẽ sau vài năm sẽ phải nhận ra rằng, quan điểm của họ là sai lầm. Toán học không phải là sự thông minh sách vở khô khan được cho là độc đáo để chọc tức những học sinh và sinh viên ít quan tâm, cũng không phải là kho tính toán ngốc nghếch chỉ đem lại kết quả là thuộc lòng một tóm tắt công thức. Hơn tất cả, toán học là một công cụ vĩ đại, giảm nhẹ công việc trong các lĩnh vực khác nhau và trong thời gian gần đây, toán học cũng đã xâm nhập vào trong những nghề nghiệp mà có lẽ chưa bao giờ chúng ta tìm thấy toán học. Một công nhân chuyên ngành, một người bán hàng thương nghiệp và một nhân viên ngân hàng không thể không tính toán số: một sự tiến bộ của khoa học kinh tế không thể không có những nghiên cứu mà cơ sở của những nghiên cứu đó được tạo nên bởi thống kê toán học. Nếu chúng ta kê ra trong những tạp chí chuyên ngành y học thì thấy rằng, toán học đã tìm được con đường đi vào lĩnh vực này. Trong thời kỳ đầu của các nhà máy điện nguyên tử, của vệ tinh nhân tạo của quả đất và tên lửa vũ trụ, những tính toán số phong phú đã được thực hiện một cách triệt để bởi những máy tính điện tử những chương trình cho những tính toán này phải do con người xác định. Khắp nơi cần những con người tài năng, và không có nghi ngờ gì cả, sự nghiên cứu cơ bản của toán học trong những thập kỷ gần đây vốn là một bộ phận không tách rời của nền giáo dục toàn dân.

Khó mà trả lời câu hỏi, vì sao nhiều người rất sợ toán. Một quan điểm vô nghĩa lý thống trị ở đây là, để có thể *hoàn thành có kết quả các tài liệu toán học ở nhà trường*, đòi hỏi một tài năng bẩm sinh, khác thường ít hạnh phúc. Chắc chắn là không phải người nào cũng có thể trở thành giáo sư toán học ở trường đại học nhưng sự khác nhau giữa toán học và các khoa học còn lại mà cơ sở của chúng, qua nghiên cứu trong nhà trường, là không lớn. Một học sinh đạt điểm tốt trong tất cả các chuyên môn khác nhưng kém trong môn toán, cần phải nghĩ đến không chỉ phụ huynh và thầy giáo mà trước hết là bản thân mình. Nhưng có khi. một sự thay đổi nhỏ trong phương pháp dạy học, nắm chắc một số các quan hệ cơ bản của tư liệu trình bày là đủ để khơi dậy. Trước hết, một tia lửa nhỏ sự yêu thích và để cuối cùng làm cho một học sinh yếu thành một học sinh có thành tích.

Nguyên nhân của những khó khăn trong nghiên cứu toán học nằm trong phương pháp diễn đạt đặc biệt mà chúng tôi gọi là ngôn ngữ toán học. Với những ngôn ngữ đó, cách phát biểu trở thành ngắn gọn và rõ ràng, các nhà toán học đã tìm ra hàng loạt ký hiệu và cách viết tắt gần như các ký hiệu tốc ký. Ví dụ như, các số được ký hiệu bằng chữ cái Lamã; các quan hệ giữa các số thường không được diễn đạt bằng lời nói mà thường sử dụng các ký hiệu qui ước (ví dụ như, đáng lẽ viết câu "số a nhỏ hơn số b" thì người ta lại viết gọn a<b)v.v...

Cần đặc biệt nhấn mạnh, phần lớn từng từ riêng lẽ trong bài khoá kèm theo của các ký hiệu toán học này là quan trọng. Giải thích sai và hiểu lầm có thể xảy ra nếu chúng ta bỏ sót dù chỉ một từ duy nhất. Từ đó, một bài toán học phải đọc chậm hơn nhiều so với một bài thông thường: Chúng ta liên kết không phải hàng với hàng, từ với từ mà là nghiên cứu một cách chu đáo câu với câu. Nhưng, những từ ngữ và lối nói dân gian cũng xâm nhập vào toán học, bằng cách đó, đôi khi chúng ta có thể làm cho tình hình rõ ràng hơn. Chúng ta nói với một người quen: "Hai thanh niên này lớn gần bằng nhau". Lối nói "lớn gần bằng" sẽ được nhận ra trong toán học bằng ký hiệu ≈, tức là, xấp xỉ, gần bằng, khoảng chừng (xem trình bày về xấp xỉ bằng ở trang). Nếu, ngược lại, các liên kết từ xuất hiện trong bài của chúng ta mà không mâu thuẫn với sự chính xác toán học thì chúng ta sẽ thay chúng thành ký hiệu đã dẫn ra trong quyển sách này.

Phương pháp của toán học khác với phương pháp của các khoa học còn lại, có trong chương trình học tập của nhà trường. Trong vật lý, *thí nghiệm* tạo nên một bộ phận rất quan trọng của nghiên cứu. Ví dụ như, nếu chúng ta đun nóng một số thanh kim loại, quan sát sự thay đổi kích thước của các thanh này; căn cứ vào một số lượng hạn chế các thí nghiệm, chúng ta đưa đến định lý tổng quát: Kim loại giãn nở khi bị nung nóng. Phương pháp nhận thức là những trường hợp đặc biệt đạt tới kết luận tổng quát, gọi là phép qui nạp. Từ đó, chúng ta gọi vật lý là một khoa học qui nạp. Nhưng phương pháp qui nạp này không được áp dụng vào toán học và cái đó phân biệt khoa học này với các khoa học còn lại. Toán học đi ngay vào tư duy tổng quát, chính là từ tổng quát đến đặc biệt; phương pháp của nó gọi là suy diễn. Nhưng trong toán học phương pháp qui nạp cũng rất phong phú, như là trong việc thành lập những qui luật và những quan hệ mới. Nếu trong toán học, một khẳng định nào đó được đưa ra, đúng cho những trường hợp đặc biệt riêng lẽ, vẫn không thể công nhận khẳng định đó là đúng cho tổng quát, chừng nào mà chưa mang lại cho nó một sự chứng minh toán học: một số lớn trường hợp công nhận sự đúng đắn hoàn toàn vẫn chưa đủ là một chứng minh.

Trong quyển sách này chúng tôi hướng vào bạn đọc đã tốt nghiệp trường 8 năm, chỉ ở một vài chỗ chúng tôi giả thiết bạn đọc đã nắm vững các kiến thức của trường phổ thông trung học kỹ thuật tổng hợp 10 năm. Tuy nhiên chúng tôi xin lưu ý rằng, đây không phải là một quyển sách giáo khoa toán học cũng không phải là một sưu tập các công thức và định lý. Quyển sách này xuất phát từ những báo cáo cho hội phổ biến kiến thức chính trị và khoa học Tiệp Khắc và theo sự uỷ nhiệm của hội Toán học và vật lý học Tiệp Khắc. Tư liệu được trình bày trong bảy chương có quan hệ rất rời rạc. Tôi muốn khuyên bạn đọc trẻ - trong hứng thú riêng của mình - hãy nghiên cứu nghiêm túc toán học và tin rằng, con đường thông dụng nhất dẫn tới điều đó là "toán học vui". Trò chơi toán học, tiêu khiển toán học hoặc câu đố, trong những thập kỷ gần đây đã giành được quyền tự tồn tại bên cạnh những ngành toán học cổ điển. Trong đại hội toán học quốc tế lần thứ V ở Cambridge năm 1912, nhà toán học HyLạp N.Hatzidakis đã đọc một báo cáo với tiên đề "Giáo trình có hệ thống của toán học vui ở trường trung học"; diễn giả đã thuyết trình về sự mở đầu của "toán học vui" trong các giờ học, qua đó , như ông nói, khơi dậy sự thích thú to lớn của học sinh vào lĩnh vực quan trọng này và sẽ tránh được một gánh nặng của học trò. Tiếc rằng, những suy nghĩ phong phú này, cho tới nay, người ta tiếp tục theo đuổi không nghiêm túc

Trong quyển sách này chúng tôi xuất phát từ trò chơi toán học, nhưng cần phải nhấn mạnh rằng có nhiều "hạt cứng " và trò chơi toán học không chỉ là phương tiện để "rút ngắn sự buồn tẻ" mà là dẫn tới những bài toán nghiêm túc và để ứng dụng toán học trong vào ngành giao thông,vào ngành kỹ thuật ,vào các khoa học tự nhiên và vào cuộc sống hàng ngày rất có giá trị .Tinh chất mở đầu này của toán học vui đã không được nhấn mạnh một cách đầy đủ trong các bài viết tương tự .Những bài toán đệm đã tạo thành sự quá độ giữa trò chơi toán học và các bài toán học nghiêm túc. Trong quyển sách này chúng tôi cũng giành cho những bài toán đó sự chú ý; trong chương cuối cùng, chương bảy, chúng tôi chỉ giành cho các bài toán đệm với chủ đề kỹ thuật tổng hợp. Tôi nghĩ rằng, trong công bố của chúng tôi không được thiếu một sự mô tả nguyên nhân lịch sử làm xuất hiện những bài toán nhỏ thú vị của các nhà toán học danh tiếng .

Bạn đọc muốn làm toán có kết quả, không được thoả mãn với một sự thu nhận bị động mà phải tự suy nghĩ về các bài tập tương ứng. Tuy rằng trong việc nghiên cứu giải các bài toán có nhiều khó khăn nhưng lại đảm bảo một sự bổ ích rất lớn. Trong quyển sách này chúng tôi sử dụng một phần các tư liệu luận giải vào các bài tập ở cuối mỗi chương. Lời giải các bài tập này tìm thấy ở cuối quyển sách, nhưng xin đề nghị bạn đọc . hãy dùng nó để so sánh với kết quả của bản thân mình tự giải. Nếu bạn đọc nào không biết bắt đầu với bài toán như thế thì khi đó hãy nhìn qua lời giải trước.

Chúng tôi mong rằng,bạn đọc nào đã đi trước cũng tìm được thú vị với tập sách này và xin lưu ý; những bài toán khó được ký hiệu bằng một dấu sao (*), bài toán đặc biệt khó được ký hiệu bằng hai dấu sao(**). Bạn đọc nào chưa khắc phục được những khó khăn như thế thì trước hết có thể bỏ qua đoạn đó và để sau sẽ quay lại.

Cuối cùng, chúng tôi xin cảm ơn ngài Phó giáo sư J.Holubár, đã đọc toàn bộ bản thảo của tập sách nhỏ này kỹ lưỡng và ở nhiều chỗ đã góp phần cải tiến công trình của tôi.

JIRI SEDLACEK.

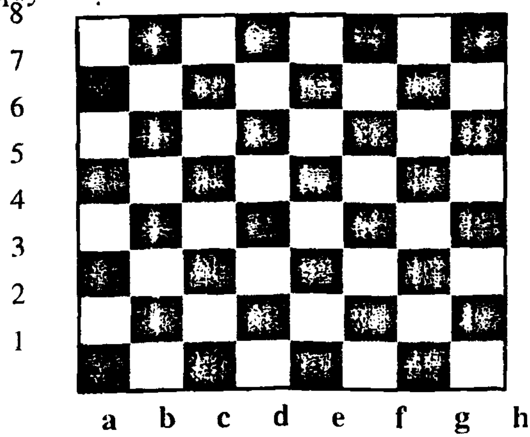
(xin dịch giả liên hệ lại số máy 0903288649)

CHƯƠNG I

CHÚNG TA HÃY BẮT ĐẦU BẰNG MỘT TRÒ CHƠI

1.1 Những bài toán từ bàn cờ

Khi ngồi trước bàn cờ, có khi nào bạn suy nghĩ thử xem mỗi quân cờ, ví dụ như con Mã có thể lang thang khắp bàn cờ được không? Khi nào thì thứ tự các bước đi của nó trên mỗi ô vuông của bàn cờ tạo thành một hình vuông qủy thuật?



Hình 1

Không chỉ chơi cờ mà cả bàn cờ cũng luôn luôn có sức hấp dẫn lớn lao; 64 ô của bàn cờ đã kích thích sự tìm tòi của nhiều nhà toán học.

Cách ghi chép các ván cờ (ghi cờ) cũng gợi một ấn tượng của cách ghi chép toán học. Trong thư lịch cờ người ta thường dùng cái gọi là cách ghi đại số, trong đó từng ô riêng lẻ của bàn cờ được đánh dấu như ở hình 1. Các chữ cái viết thường từ a đến h sắp thứ tự cho các hàng đứng và các chữ số từ 1 đến 8 sắp thứ tự cho các hàng ngang. Mỗi ô của bàn cờ được xem như giao điểm của hàng ngang và hàng đứng ta ký hiệu bằng chữ cái gặp phải và con số thuộc vào đó. Ô a1 luôn luôn ở về phía bên trái của đấu thủ đi quân trắng. Về nguyên tắc, một nhà toán học giỏi cũng là người chơi cờ tốt, và nhiều danh thủ cờ vua nếu không làm nghề về toán thì cũng là người yêu thích toán học.Thật là thú vị, hai nhà vô địch thế giới về cờ vua.Emanuel Lasker và Max Euwe là hai nhà toán học. Vả lại, chúng ta không cần phải tìm những thí dụ ở nước ngoài: đại kiện tướng cờ vua của chúng ta, Miroslav Katetov là giáo sư toán trường đại học tổng hợp Karls ở Praha.

Vậy thì, có thể nói một cách không nghi ngờ rằng chơi cờ là một trò chơi toán học theo nghĩa, phải vận dụng những định lý toán học ở phổ thông. Nhưng trước vài thế kỷ, bàn cờ đã tìm được con đường gián tiếp đi vào nhiều sách giáo khoa toán học. Nhà toán học nổi tiếng Leonhard

Euler[1] rất quan tâm tới những bài toán mà cơ sở là bàn cờ và luật cờ; và một vài bài toán trong số đó chúng ta sẽ nêu ra ở đây.

Trước hết, chúng ta hãy sử dụng một quân cờ, con mã. Luật cờ qui định nước đi cho nó rất thú vị. Nếu con mã ở ô A (xem hình 2) thì được phép chiếm lĩnh tất cả những ô có dấu chấm. Năm 1759 Euler viết:

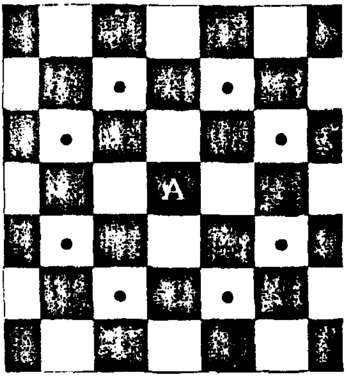
"Một hôm tôi đi đến một hội, ở đó người ta chơi cờ.Một người nào đó đã hỏi về khả năng, con mã xuất phát từ một ô cho trước có thể đi dạo khắp bàn cờ sao cho mỗi ô chỉ bị con mã đến một lần". Qua đó, chứng tỏ rằng, cho đến lúc bấy giờ Euler chưa biết về bài toán con mã. Chúng tôi xin tiết lộ với độc giả rằng, trước Euler đã có nhiều tác giả ở những nước khác nhau tìm cách giải bài toán này với thành công chút ít. Nguồn gốc cổ nhất của bài toán ở Châu Âu là vào nửa đầu của thế kỷ XIV. Nhưng công lao không có nghi ngờ gì của Euler là đã phát triển một lý thuyết toán học cho bài toán này.

---

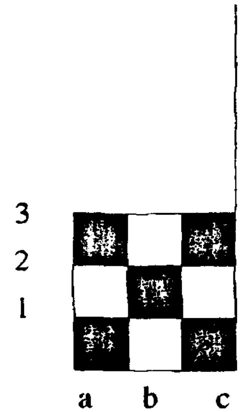
(1) L.Euler là một trong những tên tuổi nổi tiếng nhất trong lịch sử toán học. Vì chúng ta sẽ còn gặp nhà toán học toàn năng này nhiều lần trong tập sách nhỏ này nên chúng tôi lược trích một ít về tiểu sử của ông:

L.Euler sinh năm 1707 ở Basel và chết năm 1783 ở Peterbug. Năm 23 tuổi. Euler là viện sĩ hàn lâm khoa học Peterbug. Năm 1735 ông bị mù một mắt và năm 1766 bị mù mắt thứ hai. Mặc dù vậy , ông vẫn tiếp tục nghiên cứu ,qua đó đọc cho viết các công trình của mình. và vẫn làm công việc khoa học cho đến khi chết. Euler đã xuất bản một khối lượng công trình khoa học đồ sộ. Những công trình của ông về phép tính tích phân. số và lý thuyết đường cong , lượng giác và chuỗi vô hạn tạo thành cơ sở mà một bộ phận lớn của toán học ngày nay được xây dựng trên đó. Hơn nữa. Euler cũng có công lao không phải là không có ý nghĩa nhằm đưa vào ký hiệu toán học rõ ràng . Ví dụ như. gọi tên một số khái niệm toán (e.π.i) bắt nguồn từ Euler.

Đương nhiên không thể khẳng định một cách đại khái là. có ít nhất một cách đi dạo khắp lượt bàn cờ như bài toán đòi



Hình 2



Hình 3

hỏi. Giả dụ, chúng ta thay bàn cờ bình thường[1] bằng một bàn cờ nhỏ hơn chỉ có 9 ô(xem hình 3) thì khả năng đi dạo của con mã theo như đòi hỏi ở trên là không có được. Ví dụ như, nếu con mã đứng ở ô b2 thì không thể di chuyển đi đâu được .Và nếu từ một ô nào khác của bàn cờ này, con mã cũng không thể đến được ô b2. Vậy thì, bài toán đặt ra là không giải được đối với bàn cờ nhỏ đã xét.

Ngược lại, bài toán được giải dễ dàng đối với bàn cờ bình thường. Hơn nữa, có rất nhiều khả năng cho con mã

[1] Chúng ta hiểu, bàn cờ bình thường là bàn cờ vuông có 64 ô

đi dạo theo như yêu cầu của bài toán. Mỗi độc giả có thể đạt được kết quả sau vài lần thử. Điều đó có cơ sở chắc chắn. bởi vì các nhà toán học và những người chơi cờ còn mở rộng bài toán này và đặt thêm những điều kiện cho nước đi của con mã. Chẳng hạn, Euler đề nghị , trước tiên con mã phải đi dạo hết tất cả các ô của nửa dưới của bàn cờ, rồi sau đó được làm sáng tỏ trong hình 4, trong đó, các ô được đánh số theo thứ tự của nước đi của con mã.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Hình 4

Lời giải của "bài toán bước nhảy mã" sẽ khó khăn hơn nếu thêm điều kiện, thứ tự các bước nhảy phải tạo nên hình vuông qủy thuật. Trước khi dẫn ra sơ đồ đã được phát hiện trước đây hàng thế kỷ, chúng tôi xin nói đôi điều cần thiết về hình vuông quỷ thuật này. Trò chơi mà bước nhảy của mã phải được hoàn toàn định hướng đòi hỏi gán cho mỗi ô trong số n^2 ô của hình vuông một con số; sao cho tổng theo hàng đứng và tổng theo hàng ngang (đôi khi, cả tổng theo đường chéo) phải bằng nhau. Ta nhận thấy rằng, tổng đó bằng $1/2n(1+n^2)$. Con số này tạo nên cái gọi là hằng số của hình vuông quỷ thuật. Ví dụ như, với $n=3$ thì hằng số đó là:

$$. 3. (1+3^2) = 15$$

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Tên gọi "quỷ thuật" được gán cho trò chơi từ thời trung đại. (Về mặt khoa học, trò chơi này thuộc vào cái gọi là định lý cộng số). Hình vuông này nói lên sức mạnh quỷ thần: Thầy phù thuỷ dùng hình vuông này để trừ bệnh tật cho trẻ con, trừ tai nạn cho ngựa, trừ rắn cắn cho người đi rừng v.v... Ngày nay chúng ta nực cười về những tưởng tượng ngớ ngẩn của tổ tiên; và đối với chúng ta, hình vuông quỷ thuật còn lại như một trò chơi.

Chúng ta trở lại nước đi của con mã . Chúng ta có thể chọn bàn cờ bình thường làm cơ sở của hình vuông quỷ thuật, các con số ghi trong các ô theo thứ tự nước đi của con mã trên bàn cờ. Điều này được minh hoạ trên hình 5, trên đó ta thấy ngay rằng . hằng số của hình vuông quỷ thuật là:

$.8.(1+8^2)=260$. Các nước đi được mô tả trong hình 5 là

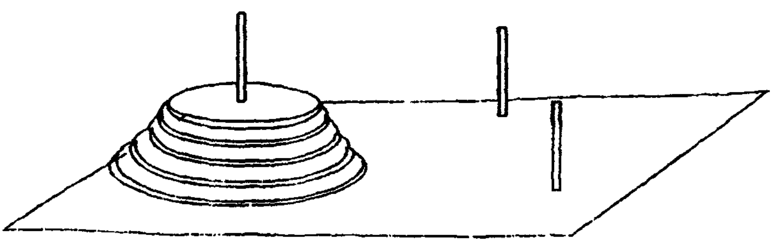
khép kín (tức là con mã có thể từ ô cuối cùng quay về ô xuất phat)

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Hình 5

1.2.Tháp Hà Nội

Vào đầu thế kỷ này xuất hiện tác phẩm "trò vui toán học" của một người Pháp tên Ed.Lucas. Loại toán này "tràn ngập" trong những tạp chí ảnh của thế kỷ trước với những bài viết hóm hỉnh, một số ít trong số đó ngày nay vẫn còn phổ biến. Lucas thích cho biên tập ở nước ngoài những câu đố của mình và ký tên dưới bài báo bằng bí danh "Manda-rin Clauss". Một bài báo trong tạp chí Pháp "Cos-mos" năm 1890 cũng mang bút danh này. Trong bài



Hình 8

báo đó. Lucas đã trình bày cho độc giả một câu đố toán học mới. Bài toán này được truyền bá nhanh chóng ra toàn thế giới và ngày nay dưới tên gọi nổi tiếng "tháp Hà Nội".

Chúng ta hãy tưởng tượng một tấm ván mỏng với ba cọc gỗ A,B,C như biểu diễn trong hình 6. Một trong ba cọc này được cắm vào một chồng đĩa tròn có đục lỗ tạo thành một loại tháp (trong hình 6, cọc này được ký hiệu bằng chữ A).

Bài toán như sau: Hãy chuyển tất cả đĩa từ cọc A sang cọc B bằng cách chuyển từng đĩa một sao cho đĩa nhỏ bao giờ cũng nằm trên đĩa lớn (nhất thiết không được làm ngược lại) và quyền sử dụng tất cả ba cọc A,B,C.

Cho đến bây giờ, chúng ta chưa nói có bao nhiêu đĩa cắm vào cọc A. Trên hình 6, số đĩa là 5; nhưng bài toán có thể giải với một số tuỳ ý các đĩa. Nếu độc giả thử tìm lời giải thì sẽ thấy ngay rằng, số lần đổi chỗ tăng nhanh nếu tăng số đĩa ban đầu cắm vào cọc A. Ví dụ như, nếu ta giải bài toán này với 5 đĩa, thì rõ ràng, ta phải chuyển 4 đĩa kia vào cọc C; vì cọc A và cọc B phải để không để di chuyển đĩa lớn nhất. Vậy thì như ta thấy , sinh ra bài toán chuyển chỗ cho 4 đĩa. Dễ dàng thấy rằng, số lần chuyển chỗ trong trò chơi từ W lúc đầu tăng lên 2W+1 nếu số đĩa cắm ở cọc A tăng thêm một. Ta lập một bảng kê, cho thấy số lần di chuyển cực tiểu ứng với số đĩa cho trước .

Số lượng	
Đĩa	Chuyển chỗ
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Từ bảng này,suy ra kết luận: Nếu tháp Hà Nội có n đĩa thì trong trong trò chơi phải chuyển chỗ 2^n-1 lần. Ở đây không chứng minh; chúng tôi chỉ tiết lộ với độc giả là, có thể dùng phép quy nạp toán học để chứng minh.

1.3 Trò chơi bói số

Hai đấu thủ A và B, tiêu khiển bằng thuật bói số. Đấu thủ A chọn một số bất kỳ trong các số 1,2,3,...10. Sau đó, đến lượt đấu thủ B cũng làm như vậy và cộng số của B vào số của A; sau đó, lại đến lượt A. Bằng phương thức đó , hai đấu thủ thay phiên nhau; phải luôn luôn chú ý cộng số mà đấu thủ chọn tuỳ ý trong các số đã qui định ở trên vào tổng sau cùng có được. Người đầu tiên đạt tới một số T được thoả thuận trước (ví dụ, T=100) sẽ là người thắng cuộc. Vậy bí quyết nào giúp cho đấu thủ thắng cuộc trong trò chơi này?

Trò chơi này, thoạt nhìn rất đơn giản, nhưng thực tế muốn giúp một đấu thủ thắng cuộc chắc không dễ như ta nghĩ. Với trường hợp T=100. Đấu thủ đạt đến số 89 sẽ là người thắng cuộc, bởi vì đối phương của anh ta không thể đạt được số 100 bằng một lần cộng. Tương tự, người nào giành được số 78 sẽ tạo khả năng đạt được số 89; và với hai lần chọn anh ta sẽ thắng cuộc. Nếu chúng ta phát triển cách suy luận này thì thấy rằng, đấu thủ chiếm được các số liên tiếp 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 tất sẽ là người thắng cuộc. Các số này được gọi là các số chiến lược. Từ dãy số chiến lược đã chỉ ra, ta nhận thấy rằng, đấu thủ đi đầu tiên có thể đảm bảo thắng cuộc bằng cách chọn số 1. Thế nhưng, nếu đấu thủ đi đầu tiên không nhận biết quy luật của trò chơi và chọn một số khác thì đối thủ của anh ta có thể thắng cuộc bằng cách giành được số 12 trước tiên. Các số chiến lượcđã nêu ra luôn luôn giữ tính hợp lý của nó.

Trên đây là hình thức thông dụng nhất của trò chơi bói số. Bạn đọc có thể đưa ra những phương án khác. Ví dụ, nếu mỗi đấu thủ được quyền chọn một trong các số 1, 2, 3, 4,...13 và thắng T=144 thì các số chiến lược phải là 4, 18, 32, 46, 60, 74, 88, 102, 116, 130. Theo phương án này, người thắng cuộc là người chẳng những đi trước mà còn nhận biết được ý nghĩa của các số chiến lược. Và đấu thủ đi trước tiên phải nắm lấy số 4.

Nhưng, nếu mỗi đấu thủ được quyền chọn một trong các số 1, 2, 3,..., 7 và số thắng T=80 thì người thắng cuộc không phải là người đi đầu tiên mà là người đi thứ hai. Các số chiến lược ở đây là 8, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72. (tức là bội của 8): đấu thủ đi đầu tiên không thể giành được số chiến lược 8 và phải từ bỏ khả năng thắng cuộc.

Thuật bói số sẽ phức tạp hơn nếu thêm vào những hạn chế nhất định . Ví dụ, ta quyết định rằng, mỗi đấu thủ được phép lặp lại con số đã chọn trong quá trình chơi nhiều nhất là 3 lần. Với luật bổ sung này trò chơi sẽ hấp dẫn hơn và căng thẳng hơn; một lý thuyết đầy đủ cho phương án này rất là khó khăn. Cũng không dễ gì khẳng định, đấu thủ bắt đầu hoặc đấu thủ đi thứ hai có lợi hơn.

Một phương án khác; đấu thủ A chọn một trong các số 1, 2, 3,...9 và đấu thủ B chọn một trong các số 1, 2, 3,...10 (khoảng các số để chọn là khác nhau). Người đầu tiên đạt được số T=100 là người thắng cuộc. Theo phương án này, đấu thủ B [1] có thể giành được thắng lợi, nếu tiến hành như sau:

Nếu A chọn số 2 hoặc một số lớn hơn 2 thì đấu thủ B phải chọn một số sao cho, khi cộng số đó vào số của A phải được tổng là 12. Và như vậy, B tiếp tục giành được các số chiến lược 23, 34, 45,...89 và chắc chắn thắng cuộc. Nếu A chọn số 1 thì B, để đạt được số chiến lược 12, phải chọn ngay số 1 (để cho tổng là 2). Trong lần chọn thứ hai, A được quyền chọn một số bất kỳ trong các số 1, 2, 3,...,9

[1] ở đây qui ước, đấu thủ B là người đi thứ hai và đấu thủ A là người đi đầu tiên : (ND)

nên B chắc chắn giành được số 12 và qua đó, có thể thắng cuộc!

Lại có một phương án khác nữa của trò chơi: Các đấu thủ chọn các số thuộc các khoảng rời nhau; (ví dụ, một đấu thủ được phép chọn một trong các số 1, 2...., 5; đấu thủ kia được phép chọn một trong các số 7,8,...12). Đây là một trường hợp phức tạp, có thể dẫn tới khả năng không phân thắng bại vì không ai đạt được đúng số thắng T. Để loại trừ khả năng này, ta cần sửa đổi qui tắc chơi một ít. Theo qui tắc đó, người thắng cuộc đầu tiên vượt quá số qui ước .

Những năm trước, trò chơi bói số đã truyền bá rất rộng. Năm 1624, nó đã được Banchet de Meziriac mô tả thành những phương án khác nhau. Người chơi có thể thay con số bằng những thẻ chơi (như que diêm, đồng xu) sắp thành đống nhỏ, trong đó người thắng cuộc là người lấy thẻ cuối cùng. Tất nhiên, trò chơi bói số trong những dạng biến đổi tương ứng, có thể có hai hoặc nhiều người chơi.

1.4 Thể thao trong trò chơi số

Trong những năm gần đây trò chơi cá độ và đánh cá ngựa được phổ biến rộng rãi. Ở nước ngoài,trò chơi này được ưa thích và dưới những tên gọi khác nhau. Người ta nhận thấy sự tương tự của hai trò chơi ở chỗ ,cả hai đều liên quan với toán học; và như vậy, điều hợp lý trước hết là cần thông báo cho người chơi về sự liên quan này, ít ra cũng phải trên những nét đại thể. Vả lại, cá độ và cá ngựa chẳng qua là những "hệ thống trò chơi" được lưu hành, phần lớn thuộc về chỉ dẫn trò chơi, mà những chỉ dẫn này lại không dựa trên cơ sở toán học.

Trước hết, chúng tôi đưa ra một số chi tiết thú vị đụng chạm đến sự ước đoán trong trò chơi cá độ. Từ những qui tắc chơi trong cá độ mà đa số bạn đọc biết rõ, chúng tôi xin nhắc lại những qui tắc quan trọng sau đây:

Mỗi tuần lễ người ta đánh cuộc về kết quả 12 trận đấu, mỗi trận đấu chiếm một hàng của tíckê. (Chúng ta được xem 2 trận đấu dự bị, vì rất hiếm khi có một trong chúng được chuyển vào những trận đấu dự bị, vì rất hiếm khi có một trong chúng được chuyển vào những trận đấu để thắng cuộc). Chữ số Một dùng cho ước đoán về chiến thắng của đội đứng ở vị trí thứ nhất của hàng, chữ số thứ Hai dùng cho ước đoán về chiến thắng của đội đứng ở vị trí thứ hai củ hàng; chữ số thập có nghĩa là trận đấu hoà. Trận đấu được ước đoán đúng mà trong tickê ghi chữ số Một thì tính một điểm, ghi chữ số Hai, được tính hai điểm và ghi chữ thập được tính ba điểm. Nếu người chơi đoán đúng kết quả của tất cả các trận đấu thì đạt yêu cầu thắng cuộc hạng nhất. Người nào chỉ thiếu hai điểm số so với ước đoán đúng thì thắng cuộc hạng ba v.v...

Để xác định có bao nhiêu khả năng dự đoán khác nhau trong cá độ, ta tiến hành như sau: Trên mỗi hàng xác định một trong ba ký hiệu 1, 2, x; vì có tất cả 12 hàng nên con số cần tìm bằng

$$\underbrace{3.\ 3.\ 3.\ 3.}_{12} \ldots = 3^{12} = 531441$$

Người chơi điền hết tất cả chừng ấy khả năng, chắc chắn thắng cuộc hạng nhất; ngoài ra còn thắng cuộc ở một loạt hạng nhì, ba và bốn. Tổng số thắng cuộc của người chơi phụ thuộc vào chỗ: ước đoán đúng chứa bao nhiêu số Một, Hai và chữ thập ở trong tuần. Nếu ta ký hiệu y là con số của chữ số Một có trong một ước đoán đúng. thì dễ dàng tính được, một người chơi như thế đạt được bao nhiêu thắng cuộc hạng hạng nhì. Nếu y= 0 thì người đó không được cuộc. Nếu y> 0 thì số thắng cuộc hạng nhì cho bởi số ước đoán, trong đó thiếu một chữ số Một và thay thế ở vị trí của nó là một chữ số Hai hoặc một chữ thập; tất cả có 2y thắng cuộc. Tính toán một cách tương tự cho số thắng cuộc hạng ba và bốn.

Tất nhiên không một người chơi nào điền được tất cả ước đoán để chắc chắn thắng cuộc hạng nhất. Một ước đoán giá 1 đồng [1]; vậy thì một lần thử như thế tốn hơn nửa triệu đồng. Ngoài ra, không có đủ thời gian cần thiết để điền vào một số rất lớn ticke đối với một lần thử như vậy.

Bên cạnh trò chơi cá độ, có một loại xổ số quen thuộc dưới tên gọi cá ngựa cũng được ưa chuộng nhiều. Mỗi tuần lễ cần phải xác định 6 loại trong số 49 loại thể thao khác nhau (được đánh số từ 1, 2, 3, 4,..., 48,49) bằng một vé số

[1] ở đây là một đồng Cuaron. đơn vị tiền tệ của nước CHXHCN Tiệp Khắc (N.D)

số. Tíckê nào đánh đúng tất cả 6 loại thể thao này sẽ được cuộc hạng nhất. Tickê nào đánh dấu đúng chỉ 5 loại, được cuộc hạng nhì, đúng chỉ 4 loại thì được cuộc hạng 3 v.v... Để có thể nghiên cứu chi tiết hơn trò chơi cá ngựa, chúng ta hãy nhớ lại khái niệm giai thừa và hệ số nhị thức, (số tổ hợp). Nếu n là số nguyên dương, ta ký hiệu tích tất cả các số nguyên từ 1 đến n là n! Và đọc " n giai thừa". Vậy thì, ta có:

$$n! = 1.2.3.4...(n-1).n$$

Ngoài ra, ta đặt $0! = 1$.

Ví dụ : $5! = 1.2.3.4.5 = 120$

Nếu ta tăng n thì giá trị của n! tăng nhanh và việc tính giai thừa với n lớn, có nhiều khó khăn. Trong những bảng số, thỉnh thoảng có cho một cách đại khái giá trị n! với 10 số tự nhiên đầu tiên. Có những công thức gần đúng để giảm nhẹ việc tính n! với n lớn

Nếu ta có các số nguyên k, n sao cho $0 < k \leq n$, thì ta hiểu hệ số nhị thức

$\binom{n}{k}$ (đọc là "n trên k") là phân số

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ta chứng minh dễ dàng

$\binom{n}{0}=1$. Nếu k dương thì có thể viết phân số dẫn xuất ở dạng $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1.2.3...k}$ trong đó, tử và mẫu có cùng số lượng thừa số (bằng k). Hơn nữa, ta đặt một cách hợp lý $\binom{n}{k}=0$ nếu $0<n<k$. Vídụ:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!5!}=\frac{8.7.6}{1.2.3.}=8.7=56$$

Hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$ cho biết rõ khả năng chọn được k phần tử trong số n phần tử khác nhau (trong đó không chú ý đến thứ tự của các phần tử được chọn [1]

Bây giờ, chúng ta quay lại bài toán cá ngựa. Trước tiên ta hãy quan tâm đến số lần có thể lấy ra 6 loại trong số 49 loại thể thao khác nhau. Số lần như thế được cho bởi hệ số nhị thức.

---

[1] Tên gọi hệ số nhị thức gợi nhớ . con số dạng $\binom{n}{k}$ đóng vai trò quan trọng trong cái gọi là định lý nhị thức . Định lý này chỉ ra rằng, một số có hai số hạng (nhị thức) (a+b) được nâng lên luỹ thừa bậc n như thế nào hoặc tính luỹ thừa (a+b) như thế nào.

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49.48.47.46.45.44}{1.2.3.4.5.6} = 13983816.$$

Nếu tất cả công dân, trẻ con đến tuổi đi học và trẻ sơ sinh của nước Tiệp khắc đều chơi cá ngựa và mỗi người ghi 6 loại thể thao khác nhau vào tickê thì vẫn còn lại gần một triệu ước đoán chưa được sử dụng. Từ đó cho ta thấy, không một cá nhân nào có thể đảm bảo thắng cuộc trong cá ngựa bằng cách ghi tất cả các ước đoán đã được nghĩ ra. Một ước đoán giá 3 đồng, một tickê giá 0,20 đồng; một người chơi muốn sử dụng tất cả các ước đoán sẽ phải chi :

$$3{,}20 \text{ đ}. \binom{49}{6} = 3{,}20 \text{ đ}.\ 13983816 = 44\ 748\ 211.20 \text{ đ}$$ tức

là gần 45 triệu đồng. Nhờ tính toán số tổ hợp $\binom{49}{6}$ mà ta có thể giải thích nguyên nhân, vì sao rất hiếm có một người trong số những người chơi cá ngựa đạt được thắng cuộc hạng nhất. Trong hầu hết các tuần lễ đánh cá ngựa, ta thường nghe thông báo, không có thắng cuộc hạng nhất và mới chỉ có một vài thắng cuộc hạng nhì.

Một vài người chơi đã thử, phân chia một cách cân nhắc các tickê của họ để đạt được thắng cuộc ít nhất là hạng tư. Nhưng hầu hết những người đó vẫn gặp rủi ro. Họ theo dõi những số mà nhiều tuần trước đã trúng. Họ khẳng định rằng đánh vào số nào mà trong thời gian dài không trúng sẽ có lợi thế. Ngược lại, một số người chơi khác lại ưa thích những loại thể thao mà trong thời gian cuối thường trúng số. Đứng trên quan điểm của lý thuyết xác xuất, cần khẳng định rằng , những người say mê chẳng những cái này mà cả cái kia đều có lý. Kết quả của những cuộc xổ số riêng lẻ là hoàn toàn độc lập với nhau. Sự tưởng tượng của một số người chơi không đúng là ở chỗ, sự gặp may trong việc chọn 6 loại trong số 49 loại thể thao khác nhau là có qui luật hoặc không có qui luật nào. Hầu hết người chơi không thích đánh các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mặc dù nhóm sáu số này có thể được cuộc hạng nhất với cùng một số xác xuất như những nhóm 6 số khác.

Chúng ta còn quay lại trò chơi cá độ và cá ngựa với một vài bài toán ở cuối chương.

1.5. Những hình lập phương màu của thiếu tá Mac Mahon.

Trò chơi của thiếu tá Mac Mahon gồm 30 hình lập phương giống hệt nhau, các mặt của nó có 6 màu; mỗi hình lập phương có một mặt trắng, một mặt xám, một mặt xanh, một mặt vàng, một mặt đỏ và một mặt đen. Từng cặp hình lập phương khác nhau bởi vị trí tương hỗ của các mặt màu.

Tại sao trò chơi lại cần đến 30 hình lập phương?

Bởi vì, có thể có 30 cách phân phối 6 màu cho các mặt của hình lập phương sao cho, cứ 2 màu kề nhau phải khác nhau. Ta có thể hiểu rõ điều đó hơn bằng cách sau: Ta hình dung một hình lập phương đặt trên bàn, trước mắt chúng ta . một trong 6 mặt của nó là mặt màu trắng (ta gọi nó là mặt đáy). vậy thì. về màu của mặt đối (gọi là mặt boong) có 5 khả năng (có thể màu xám. màu xanh. màu vàng. màu đỏ hoặc màu đen). Nếu ta chọn một trong 5 màu này cho mặt boong thì còn lại cho "mặt tường" thẳng đứng 4 màu. Nếu ta ký hiệu 4 màu này bằng A, B, C,D thì còn phải quyết định xem có bao nhiêu cách phân phối các màu này cho 4 mặt tường. Một trong các mặt đó phải có màu A : ta đặt hình lập phương trên bàn sao cho có lợi cho chúng ta. Với màu của mặt tường phía sau, tồn tại 3 khả năng (màu B hoặc C hoặc D). Nếu ta quyết định về một màu, nào đó thì sẽ còn lại 2 màu cuối cùng X,Y và 2 mặt tường của hình lập phương (mặt tường trái và mặt tường phải). Vậy thì, mặt tường phải nhận màu X và mặt tường trái nhận màu Y và ngược lại (chúng ta có toàn bộ 2 khả năng).

Nếu tóm tắt lại những tư duy này thì ta nhận ra rằng, trước tiên ta tính đến 5 khả năng mà mỗi khả năng trong đó được tách thành 3 trường hợp và mỗi trường hợp được tách thành 2 màu có thể có. Vậy thì, số của những sắp xếp màu khác nhau là 5.3.2 = 30 như ở trên đã đề cập đến.

Với 30 hình lập phương của Mac Mahon, nhiều trò chơi khác nhau đã được ước định; ở đây chúng tôi muốn giới thiệu trò chơi quen biết nhất.

Chọn trong số 30 hình lập phương một hình bất kỳ mà ta gọi là mẫu. Trong số 29 hình còn lại ta chọn 8 hình và ghép chúng lại thanh một hình lập phương lớn mà hình naỳ có phân bố màu giống hệt mẫu. Nếu không có đòi hỏi gì tiếp nữa thì bài toán tương đối dễ. Nhưng Mac Mahon đã thêm vào vài đòi hỏi khác đối với việc thành lập hình lập phương lớn từ 8 hình lập phương riêng lẻ. Ông đã đòi hỏi là. trong hình lập phương lớn chỉ có những hình lập phương với những mặt cùng màu mới đặt tiếp giáp nhau. Ví dụ như, nếu một hình lập phương riêng lẻ có mặt boong màu trắng và ta đặt tiếp lên đó một hình lập phương thì mặt đáy của hình lập phương này phải màu trắng.

Như ta thấy, để hiểu biết trò tiêu khiển này, cần đến không phải là những kiến thức toán học sơ đẳng của trường phổ thông. Một lý thuyết của trò chơi này đã được hoàn thành, nhưng những người thật sự tiêu khiển với những hình lập phương này không dùng lý thuyết này là bao nhiêu. Chính là lý thuyết đã chứng minh về căn bản rằng, bài toán có lời giải nhưng việc hướng dẫn để đạt đến mục đích là khá phức tạp. Một người chơi tuy không nắm được lý thuyết, sau một ít luyện tập sẽ tự tìm được lời giải cho từng trường hợp riêng lẻ.

BÀI TẬP

1.1* Trên một bàn cờ bình thường [1], rỗng a) một con mã; b) con Hậu có thể có bao nhiêu nước đi ?

1.2. Hãy xác định số vua ít nhất (hay nhiều nhất) chiếm đóng trên một bàn cờ bình thường, rỗng sao cho mỗi

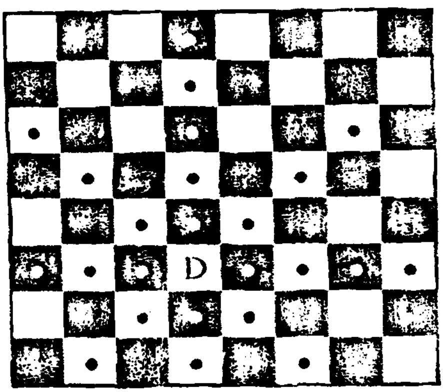
[1] Bàn cờ bình thường   vuông 64 ô đó không có quân

vua có một ô tự do và ngoài ra không có vua này đe doạ vua kia.

1.3. Trên một bàn cờ rỗng đặt 5 quân Hậu sao cho chúng khống chế tất cả các ô không bị chiếm của bàn cờ.

1.4* Trên bàn cờ bình thường, rỗng đặt 4 quân Hậu sao cho chúng khống chế tất cả các ô của bàn cờ trừ các ô a1, a2, b1,b2.

1.5.* Hai người chơi trò chơi bói số biến dạng như sau: A chọn một số bất kỳ trong mười số 1, 2, 3,..., 10 B chọn một số bất kỳ trong mười số 6, 7, 8,..., 15. Người nào vượt quá số 100 trước thì thắng cuộc . Đấu thủ A là người mở đầu cuộc chơi, hỏi A có nắm chắc phần thắng hay không ?



Hình 7

1.6.* Hai đấu thủ A và B thoả thuận với nhau một trò chơi như sau: Có một số xác định thẻ chơi (que diêm đồng xu v.v...) đặt thành 2 đống nhỏ. A lấy một số bất kỳ thẻ chơi từ một (và chỉ một, đống nhỏ bất kỳ sau đó đấu thủ B cũng lại lấy một số bất kỳ thẻ chơi từ một đống nhỏ bất kỳ, sau tiếp đến A v.v... Người nào nhặt được thẻ chơi cuối cùng là người thắng cuộc'.Nếu A là người đi đầu tiên thì có thể thắng cuộc được không ? Anh ta phải đi trước như thế nào ?

1.7. Các qui tắc của bài toán 1.6 được thay đổi như sau : người lấy thẻ chơi cuối cùng là người thua cuộc. Đấu thủ đi đầu tiên có thể thắng cuộc không ?

1.8. x chữ số Một, y chữ số hai và z chữ thập (x + y+ z = 12) hình thành một nước cờ trong cá độ. Bao nhiêu ước đoán như thế nào có thể đạt tới thắng cuộc hạng ba và hạng tư.

1.9. 4 con Một. 6 con Hai và 2 chữ thập đã tạo thành một nước cờ trong cá độ. Bao nhiêu ước đoán có thể đạt được thắng cuộc hạng nhất, hạng nhì, hạng ba và hạng tư? (Hãy sử dụng kết quả của bài toán trước)

1.10. Phân phối con Một, con Hai và chữ thập như thế nào làm xuất hiện trong cá độ số lớn nhất các ước đoán hạng ba ?

1.12. Có bao nhiêu thắng cuộc khác nhau của hạng nhì, ba và hạng tư trong cá độ ?

1.13. Có bao nhiêu cách có thể ký hiệu các góc của một tứ giác đều phẳng ABCD bằng các số 1,2,3,4 sao cho không có 2 tứ giác "được đánh số" có thể chồng lên nhau qua một sự dịch chuyển thích hợp ? [1]

1.14. Thử xây dựng một hình vuông quỷ thuật với 16 ô

[1] So sánh một sự suy nghĩ tương tự, suy nghĩ đã phát hiện ra số lượng hình lập phương Mac Mahon.

CHƯƠNG II

THẬT VÀ GIẢ

2.1.Ảnh có khi đánh lừa.

Một quyển tiểu thuyết có ảnh được đọc tốt hơn một quyển sách không có ảnh. Trong một quyển sách giáo khoa địa lý không thể khong có đủ sơ đồ và bản đồ. Ta không thể tưởng tượng được một quyển sách về sinh vật học hoặc thực vật học lại không có tư liệu ảnh. Tác giả có thể kèm theo bài viết và tác phẩm của mình minh hoạ. Ảnh giúp người đọc xâm nhập phần lớn kinh nghiệm về vào tài liệu, làm sáng tỏ các khái niệm và tăng thêm tính biểu hiện. Nói chung, chúng ta thu nhận phần lớn kinh nghiệm về ngoại cảnh hàng ngày quan sát. Ngay cả trong những sách giáo khoa toán học cũng thấy hàng loạt những minh hoạ, và không một người làm hình học nào lại không có công cụ vẽ như bút chì, thướckẻ, compa, thước đo độ và thước cong. Nhưng cần đặc biệt nhấn mạnh rằng, những hình vẽ toán học có hình dáng và vai trò hoàn toàn khác với tranh ảnh tiểu thuyết và ảnh trong sách giáo khoa thực vật học.

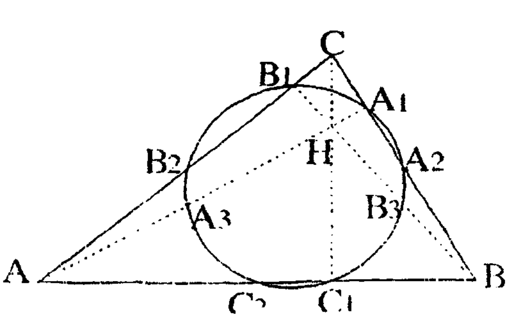
Một hình có ý nghĩa như thế nào trong những suy nghĩ toán học? Đó là một công cụ hỗ trợ vô giá làm sáng tỏ những điều đã có và giúp cho trí nhớ của chúng ta. Nếu chúng ta làm việc không có hình ảnh thì giống như những đấu thủ cờ vua chơi ván cờ "mù" - không có quân cờ và không có bàn cờ. Có những đấu thủ cờ như thế và tôi không nghi ngờ gì rằng nhiều độc giả có kinh nghiệm có thể giải những bài toán hình học mà không cần hình vẽ phác. Nhưng cái đó phải có sự rèn luyện công phu và năng lực tưởng tượng tốt. Mặt khác, không được đánh giá quá cao ý nghĩa của một hình vẽ. Ngay tính chất hiển nhiên của hình vẽ đôi khi có thể dẫn chúng ta tới những kết luận hoàn toàn sai lầm. Ngoài ra không bao giờ được hoàn toàn tin chắc rằng, hình vẽ không có sự không chính xác sự không chính xác có thể ảnh hưởng tiêu cực đến kết quả. Cả đến người vẽ tốt nhất cũng không thể chứng minh mà không có suy luận toán học rằng, ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Cũng như, nếu đã làm việc rất thận trọng thì cũng không bao giờ loại trừ trường hợp, có những kết luận dường như được rút ra từ một hình vẽ hoàn hảo là chính là do sự không chính xác ngẫu nhiên gây ra.

Bên cạnh đó, bạn đọc nên hiểu rằng, sự thiếu tin tưởng vào một hình vẽ đôi khi rất có lý. Chúng tôi xin dẫn ra một thí dụ có tên gọi quen thuộc *vòng tròn điểm Feuerbach*

Xét tam giác ABC ở hình 8.Ba đoạn $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ trong hình vẽ nét đứt; là đường cao của tam giác này. Từ khi còn ở trường phổ thông độc giả đã biết, 3 đường cao cắt nhau tại một điểm (H trong hình 8). Điểm giữa của cạnh $\overline{BC}$ là A_2 của cạnh $\overline{CA}$ là B_2 và của cạnh $\overline{AB}$ là C_2. Điểm A_3 chia đôi cạnh $\overline{AH}$, điểm B_3 chia đôi cạnh $\overline{BH}$ và điểm C_3 chia đôi cạnh $\overline{CH}$ .Bây giờ chúng ta xét chi tiết mỗi chín điểm mà ta ký hiệu là A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3. Hình vẽ gợi cho ta ý nghĩ, tất cả 9 điểm đều nằm trên một vòng tròn hoặc trên một đường cong rất "tương tự" một vòng tròn. Chúng tôi xin tiết lộ ngay rằng, sự phỏng đoán được rút ra từ hình vẽ trong trường hợp này là đúng đắn. Các điểm được xây dựng thực sự nằm trên chu vi của vòng tròn.

Ta hiểu rõ vòng tròn này bằng một chứng minh toán học chính xác (nhưng việc chứng minh khá khó khăn nên chúng tôi bỏ qua). Việc xây dựng 9 điểm đã nói đến khá phức tạp, hầu như phải thường xuyên vượt qua cái sai của hình vẽ. Nếu vòng tròn 9 điểm Feuerbach thật sự phải đi qua tất cả những điểm đã nói, như hình 8 cho thấy thì đòi hỏi phải vẽ hết sức khéo léo.

2.2. Lừa dối quang học là gì ?



Hình 8

Thí dụ về vòng tròn Feurbach chỉ ra điều quan trọng đối với nhà toán học là phải làm quen với nhưngx sự khéo léo khác nhau có thể dắt dẫn sức tưởng tượng hoặc sức trực quan. Một nhà toán học không bao giờ được tin vào những thông tin được rút ra từ những hình vẽ ít nhiều không hoàn hảo và chỉ nên xem chúng như lời khuyên (đôi khi rất có giá trị) để suy nghĩ về cái mới và cái cơ bản. Một bức ảnh chỉ ra rằng, cái nhìn và sự tưởng tượng của chúng ta không phải luôn luôn là người chỉ đường đúng đắn có thể tin được và chỉ ra rằng, đôi khi ngược lại với sự thật, một sự trái ngược mà chúng ta không có ý thức mong đợi . Hình ảnh như thế người ta gọi (không hoàn toàn vừa ý) là một sự *lừa dối quang học*. Học thuyết của những sự lừa dối quang học đã được hoàn thiện cơ bản đến từng chi tiết. Chúng ta xét cặn kẽ mỗi một sự lừa dối quang học có quan hệ trực tiếp với toán học và áp dụng nó. Trước hết, chúng ta làm rõ một số khái niệm của một lĩnh vực khá xa xôi này.

Từ vật lý học chúng ta biết rằng, mắt tương tự như một cái máy ảnh. Ở đây, thay thế cho thấu kính của máy ảnh là thuỷ tinh thể của mắt: một tấm nhạy ánh sáng. Mắt tốt có thể chỉ ra được một loạt sai sót quang học gồm cả quang hình và quang học y học. Nhà vật lý Đức Helmholtz đã biểu thị về sự thiếu sót của mắt người như sau: nếu một nhà quang học bị ràng buộc bởi việc bán một công cụ có những khuyết tật như những khuyết tật của mắt chúng ta thì anh ta gánh sự quở trách nặng nề về chất lượng công việc của anh ta, bị lên án, bị trả lại công cụ. Điều đó không cường điệu một tý nào. Chúng ta không có căn cứ để buộc tội sự phản bội của mắt chúng ta. Nếu giả dụ, không có những sự lừa dối quang học thì chúng ta sẽ bị thiệt hại về tất cả châu báu của nghệ thuật hội hoạ và không xem được những buổi chiếu phim cũng không theo dõi được những chương trình truyền hình.

Năm 1774 Leonhard Euler viết: "Nếu chúng tôi bị buộc phải nhận xét về những sự việc chỉ theo sự thật thì đối với chúng tôi, nghệ thuật hội hoạ nói chung không tồn tại và sự tồn tại của nghệ thuật hội hoạ càng chứng tỏ rằng, chúng tôi như là người mù. Người hoạ sĩ uổng công sử dụng tất cả nghệ thuật của mình cho sự pha màu. Chúng tôi sẽ nói: trên tấm này, đây là một mụn vá đỏ, đây là mụn vá xanh, kia là một đường trắng và đó là một vài đường đen. Tất cả ở trong cùng một mặt phẳng; người ta nhìn nó không có sự phân biệt về khoảng cách. Người ta không phản ánh một đối tượng duy nhất nào. Tất cả xảy ra trên một tấm ảnh giống như một bài viết trên giấy. Tất cả dẫn đến kết cục, chúng ta mất đi sự vui thích cho nền nghệ thuật hội hoạ dễ chịu và có ích mang lại cho chúng ta".

Những sự lừa dối quang học đôi khi rất khó giải thích. Ví dụ như việc ước lượng khoảng cách và độ dài là một quá trình phức tạp, trong đó kinh nghiệm và sự rèn luyện đóng vai trò có ý nghĩa. Phần lớn dẫn tới sự lừa dối không phải gây ra do sai lầm của mắt mà là do kết luận sai lầm trên cơ sở những ý nghĩa không chính xác. Từ đó, chúng ta phải nói tới những kết luận giả dối đúng hơn là nói sự giả dối quang học. Nhưng tên gọi "sự giả dối quang học" đã được tiếp nhận một cách tự nhiên.

2.3. Ước lượng sai về độ dài và khoảng cách

Khoảng cách của những đồ vật thường được đánh giá theo "sự mệt mỏi của mắt": mắt phải chạy qua cả đoạn thẳng bắt gặp. Từ đó xuất hiện hiện tượng, một đoạn thẳng vẽ thẳng đứng trên bảng dài hơn một đoạn thẳng thực sự có cùng độ dài nhưng được vẽ nằm ngang. Nếu ta thử vẽ không dùng thước ở trên bảng một hình vuông với cạnh đáy nằm ngang và sau đó kiểm bằng kiểm tra lại hình vẽ bằng thước thì thường xảy ra là hình vuông này thấp hơn hình vuông cần phải có.

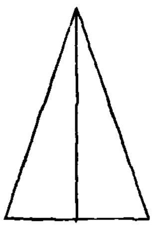
Một số chữ cái in được giữ một cách máy móc để cho đối xứng đối với trục nằm ngang.

Người vẽ các chữ cái B, H, S hoặc chữ số 8 đã chú ý đến sự lừa dối quang học và đã thiết kế phần trên và phần dưới của những chữ cái này không lớn như nhau. Độc giả hầu như không nhận ra sự chênh lệch nhỏ này. Nhưng nếu như các chữ cái này bị tình cờ in ngược thì ta sẽ ngạc nhiên về sự chênh lệch này:

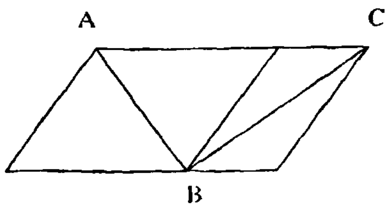
B H S 8 8 S H B

Một thầy giáo đã làm thử nghiệm sau đây với những học sinh 15 tuổi: Thầy giáo cho học sinh ước lượng bề dài và bề rộng của một giảng đàn, cái mà học sinh nhìn thấy mỗi ngày, và ghi chép kết quả ước lượng đó. Khi đánh giá kết quả đã rút ra rằng: đa số học sinh ước lượng độ dài hoàn toàn chính xác, trong khi đó hầu như tất cả ước lượng sai chiều cao (theo hướng thẳng đứng).

Một nghệ sĩ tạc tượng phải tính đến những sai số ước lượng như thế nào trong việc chọn các kích thước của các tượng sao cho mặc dù chúng được đặt vào những độ cao khác nhau vẫn tác dụng một cách tự nhiên. Một sự vô nghĩa khác trong ước lượng độ dài có thể bị gây ra do người ta thay một cách máy móc việc ước lượng độ dài bằng ước lượng diện tích.



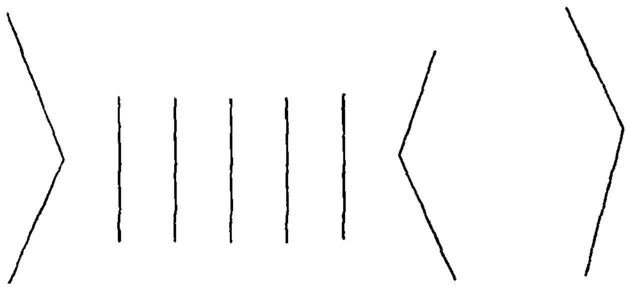
Hình 9



Hình 10

Nếu chia đôi đường cao của tam giác cân trong hình 9 nhờ một cái thước thì người ta sẽ ngạc nhiên vì điểm chia đooi (dường như) quá cao. Người ta nhìn thấy hình như diện tích của nửa hình phía dưới lớn hơn diện tích của nửa hình phía trên.

Nhờ cái thước ta có thể tin rằng, trong hình 10 đoạn AB không dài hơn đoạn BC. Ở đây người ta lại ước lượng một cách máy móc diện tích của hình bình hành mà đường chéo của chúng được biểu diễn bởi các đoạn thẳng cần ước lượng.



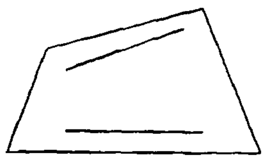
Hình 11

Một hiện tượng tương tự người ta nhìn thấy ở hình 11 : trên một đường thẳng nằm ngang (không vẽ) cho 3 điểm. Ba điểm này không có ký hiệu gì đặc biệt nhưng được biểu diễn bằng đỉnh của 3 góc (có dạng <, >) và như vậy làm xuất hiện 2 đoạn thẳng trên đường thẳng. Đoạn thẳng bên trái được chia thành 6 phần bằng nhau bằng 5 vạch đứng. Hãy ước lượng xem đoạn thẳng bên phải ngắn hơn đoạn thẳng bên trái bao nhiêu phần như trên. Trước tiên là ước lượng, cuối cùng là đo bằng kích thước.

Trong một số trường hợp, hai lừa dối quang học cùng lộ ra, chúng tương trợ lẫn nhau. Thật ra, điều đó chúng ta đã thấy ở hình 11. Ở đó, việc ước lượng độ dài được bỏ sung thêm việc ước lượng diện tích (bị ám ảnh của giới hạn bằng các cạnh), đoạn thẳng bị chia dường như dài hơn đoạn thẳng cùng độ dài mà không bị chia.

Mỗi người quan tâm về ăn mặc theo thị hiếu đều biết rằng, người ta cho phép thể hiện một cá nhân hoặc đầy đặn hoặc thanh thanh bằng những mẫu thích hợp.

Một sự lừa dối khác dẫn tới việc định giá độ dài hoặc độ lớn không đúng là do người ta so sánh mọt cách máy móc các đại lượng này với độ lớn hoặc độ dài khác.

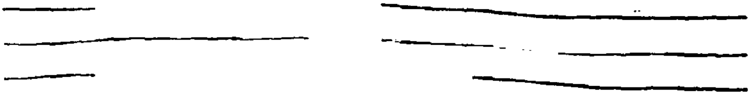


Hình 12

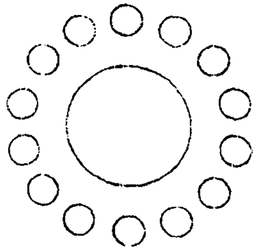
Hình 12 vẽ một tứ giác mà cạnh không bằng nhau. Bên trong tứ giác này có 2 đoạn thẳng cách không xa các cạnh. Cần khẳng định, đoạn thẳng nào ngắn hơn.

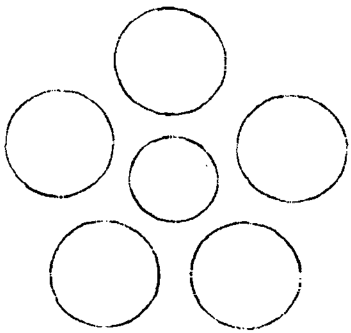
Cần đánh giá độ dài của đoạn thẳng ở giữa trong hình 13, trong đó một đoạn ở giữa hai đoạn ngắn hơn và một đoạn ở giữa hai đoạn dài hơn. Đoạn thẳng ở phía bên trái của hình vẽ dường như dài hơn đoạn thẳng ở phía bên phải của hình vẽ .

Nếu ta gặp ở một cầu thang hẹp những người đàn ông mang Klavier thì dường như những cái kèn này rất to lớn. Trên một sân khấu quay rộng thì ta lại thấy những kèn này



Hình 13

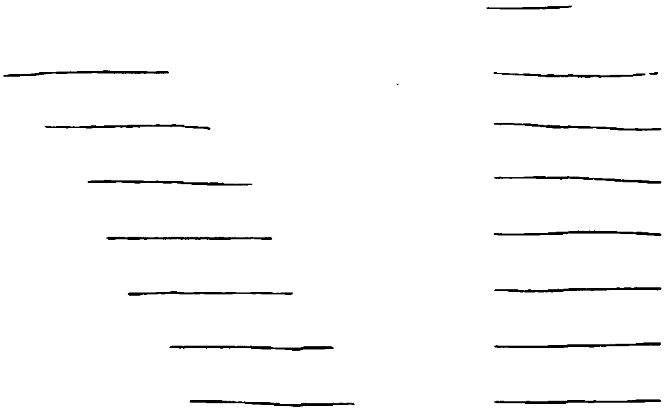




Hình 14

nhỏ hơn nhiều. Một ôtôbus hàng ngày chạy qua chỗ ở của ta thì ta thấy nó không rộng lớn lắm. Nhưng ta sẽ rất ngạc nhiên về độ lớn của nó nếu thấy nó ở trong xưởng sửa chữa.

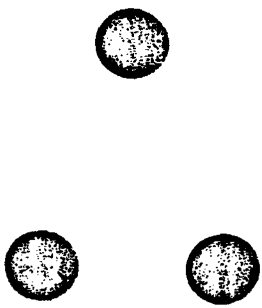
Hình 15 gợi nhớ đến hai chồng giấy cao như nhau, nhưng do bị xô lệch đi nên chồng bên trái thành nhiều hơn, chồng bên phải thành ít tờ hơn. Hãy quyết định xem những đoạn thẳng nào dài hơn, những đoạn thuộc phần trái hoặc



Hình 15

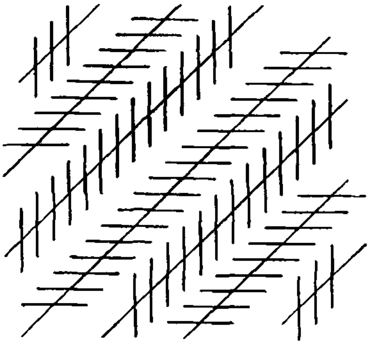
phần phải của hình vẽ. Kết quả hình như này là đánh lừa các đoạn này thực sự dài bằng nhau.

Nếu màu trắng và màu đen tương phản nhau thì ta có một minh hoạ thú vị. Ba vòng tròn màu đen trong hình 16 lớn như nhau. Chúng tạo nên 3 đỉnh của một tam giác cân

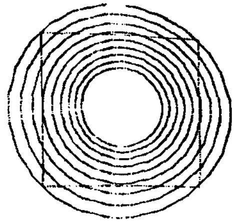


Hình 16

(không vẽ hình). Ta ước lượng có bao nhiêu vòng tròn như thế có thể đặt vừa khoảng trống ở giữa 2 vòng tròn dưới và vòng tròn trên. Ta không dám chắc có đặt được 4 hay 5 vòng tròn hay không. Nhưng khi đo ta được kết quả rất ngạc nhiên : có đủ chỗ cho 3 vòng tròn như thế. Vậy giải thích sự lừa dối này như thế này như thế nào ? Vấn đề nằm ở trong cái gọi là sự



Hình 17

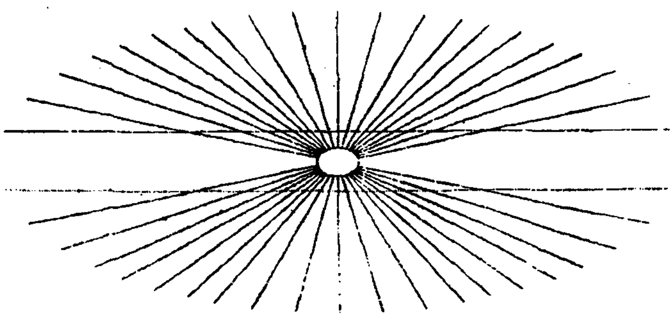


Hình 19

chói. Nhìn những đồ vật màu đen bị chói dường như nhỏ hơn những đồ vật màu trắng có cùng độ lớn.

2.4. Sự kỳ quái từ sự song song và sự thẳng đứng

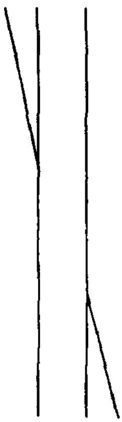
Người ta dễ dàng ước lượng các ường thẳng song song hoặc đường thẳng đứng hoặc độ lớn của góc. *Sự song song thuế quan* (hình 17) cho một hình dáng trong cái nhìn



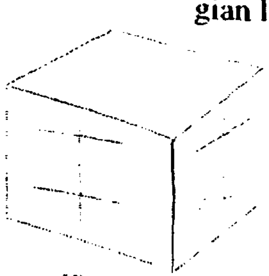
Hình 18

thoáng qua của những đường cắt nhau.

Trong hình 18 đường như các đương song song bị cong đi, trong hình 19 do ảnh hưởng của những đường tròn đồng tâm nên hình vuông có vẻ bị biến dạng một ít. Trong hình 20 hai đường song song cắt một đường thẳng : phải chăng đó thật sự là một đường thẳng hoặc là "phần" dưới bị dịch chuyển? Góc mà đường thẳng trong hình 20 tạo với hai đường song song khoảng chừng 15^0. Nếu ta xây dựng một hình tương tự với một góc 45^0 hoặc lớn hơn thì không xuất hiện sự lừa dối. Trong 4 trường hợp cuối sự lừa dối xuất hiện bằng cách đánh lạc hướng sự chú ý của chúng ta qua một vài chi tiết của cấu hình. Trên những hàng vải mẫu với nhiều chi tiết li ti người ta đã khám phá một loạt lừa dối quang học do sự ngẫu nhiên. Mỗi người cần phải rất chú ý rằng, ví dụ: một khăn trải bàn với mẫu hơi bé dù rất ít, đôi khi lại gây tác dụng khó chịu (lối nói dân gian là "mắt để nơi khác"). Người chào hàng và người sản xuất các mặt hàng vải phải rất chú ý đến các tính chất này của mẫu hàng và đồ trang sức nếu họ muốn làm vừa ý khách hàng.



Hình 20



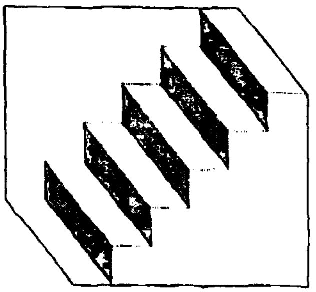
Hình 21

2.5. Từ cái nhìn không gian

Trước đây ít lâu, một thí nghiệm

lý thú đã được tiến hành. Các trẻ con của lớp một được giao cho vẽ một vài đồ đạc mà chúng đã nhìn thấy. một cái bàn, một quả bóng ở trên mặt đất, một viên gạch v.v.. Kết quả thí nghiệm đã chỉ ra rằng, cả đến trẻ con trong độ tuổi mẫu giáo cũng có những ý niệm về các đồ vật ba chiều xung quanh chúng và thử phac hoạ các đồ vật này một cách vụng về trong phép chiếu xiên góc. Cho lại các đồ vật ba chiều trên một bức vẽ phẳng là một bài toán tương đối khó; một ngành đặc biệt của toán học, hình học hoạ hình, nghiên cứu bài toán này. Nhiều người đã không học hình học hoạ hình nhưng có khả năng phác hoạ rành mạch một đồ vật không gian.

Chúng ta quay lại với bài toán ngược: Trước hết chúng ta phải học cách nhìn một đồ vật: trong không gian trên hình vẽ và không có các đường kẻ ca rô. Việc "học" diễn ra một cách tự do và phần lớn là tự phát, vì rằng nhiều hình vẽ biểu diễn những đồ vật "ba chiều" trong sách , báo hoặc trên các placat.



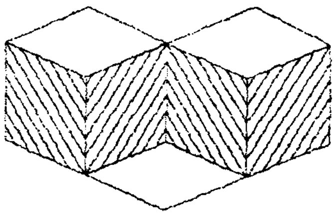
Hình 22

Chúng tôi xin nêu ra ở đây một vài sự đánh lừa mà sự xuất hiện liên quan với cách biểu diễn các đồ vật trong không gian. Trong hình 21 chúng ta nhìn thấy hình vẽ của một hình lập phương mà trên 2 mặt tường phía trước có vẽ một số có đoạn thẳng . Nếu chúng ta tưởng tượng thật sự chuẩn xác nét vẽ biểu diễn hình lập phương thì ta không có khả năng đánh giá chính xác vị trí tương hỗ của các đoạn thẳng trên mặt tường của hình lập phương. Ta sẽ giải thích đoạn thẳng phía dưới ở tường bên phải hoàn toàn "lệch" tương đối so với đoạn thẳng đứng tương ứng (mặc dù cặp đường thẳng này tạo thành một góc vuông). Đoạn thẳng phía trên của tường bên trái vuông góc với đường thẳng đứng (và không phải là lệch). Mặt khác, chúng ta sẽ quả quyết rằng, hai đoạn thẳng còn lại ở các mặt tường (đoạn thẳng phía trên ở mặt tường phải và đoạn thẳng phía dưới ở mặt tường trái) không vuông góc với đường thẳng đứng mặc dù trong hình vẽ chúng tạo với đường thẳng đứng một góc vuông.

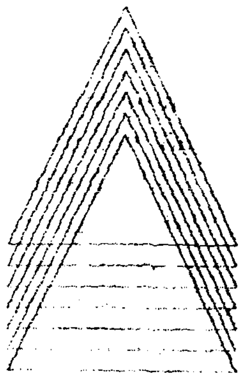
Hình 22 biểu diễn một cầu thang 5 bậc mà chúng ta đã xét ở trên: nhưng nếu chúng ta nhìn thoáng hình vẽ thì có cảm tưởng là nhìn cầu thang từ dưới lên.

Ta xét 2 hình lập phương nhỏ (hình 23), mặt boong của chúng được chiếu sáng cực mạnh, mặt tường trước bên trái ở trong nửa tối và mặt tường trước bên phải ở trong bóng tối. Nhưng cũng sẽ dễ dàng không dám chắc: có thực sự là hai hìnhlập phương không?. Có lẽ chỉ là một hình lập phương, mặt đáy của nó bị chiếu sáng, mặt tường phía trước bên phải trong nửa tối và mặt tường trước bên trái trong bóng tối.

Hình 24 miêu tả 7 khăn ăn đặt chồng lên nhau, tam giác lề nào nằm trên và tam giác lề nào nằm dưới?



Hình 23



Hình 24

CHƯƠNG III

NÓI CHUYỆN VỀ SỐ

3.1. Số vĩ đại- Sự vĩ đại của số

Trong thiên nhiên bao quanh chúng ta, chúng ta thường gặp những loại thảo mộc hoặc những loại động vật to lớn mà người ta mệnh danh có phần phóng đại là "người khổng lồ" của thiên nhiên. Vài triệu năm trước, loại thằn lằn hai óc [1] đã sống ở vùng đầm lầy Bắc Mỹ, từ đầu đến đuôi dài 27 m. Nó là loại động vật trên cạn lớn nhất. Giống cá voi ngày nay có thể dài 30m, trội hơn tất cả các động vật đã sống trên trái đất về chu vi và khối lượng. Cây cù tùng [2] ngày nay còn phát triển ở California, cao đến 100m và thân của nó có chu vi hơn 25m. Nhiều cây gần 5 triệu tuổi, là những nhân chứng của thời cổ đại, chứng thư của loài người. Nhưng, chương này không nói về sự khổng lồ đó, sự khổng lồ mà chúng ta gặp trong thiên nhiên sống.

---

[1] *Còn có tên gọi là lôi long hoặc khổng long, thuộc loại bò sát, lớp thằn lằn* (N.D)

[2] Cây cù tùng là loại cây lá nhọn, luôn luôn xanh tươi, mọc trong vùng rừng ven biển của Califolia và NamOregon (Mỹ). Gỗ được dùng cho các công trình xây dựng dưới nước (N.D).

Chúng ta muốn nói về sự to lớn của con số trong khoa học hiện đại, trong kỹ thuật và trước hết là trong toán học.

Thiên văn học và khoa hàng không vũ trụ (học thuyết về bay vào vũ trụ) được "nổi tiếng" bởi những con số khổng lồ. Trong các khoa học này các con số về kích thước, khoảng cách và tốc độ được sử dụng hơn tất cả. Chẳng hạn, một vệ tinh nhân tạo muốn đạt được đường bay vòng tròn quanh quả đất phải có "tốc độ vũ trụ cấp một" (7,9km/sec).

Để hình dung được tốc độ này lớn như thế nào, ta biểu diễn ra kilômét cho mỗi giờ như cách cho tốc độ thông thường. Ta nhận được:

7.9.60.60 km/giờ=7.9.3600 km/giờ=26440 km/giờ

Tốc độ vũ trụ cấp một là 28440 km/giờ. Và nói gì về những khoảng cách thiên văn? Láng giềng gần nhất hành tinh của chúng ta - mặt trời - cách quả đất gần 384000 km. Khoảng cách từ quả đất đến mặt trăng xấp xỉ 149500000km. Để đo khoảng cách giữa hai ngôi sao cố định riêng lẻ thì kilômét là đơn vị quá bé. Ở đây, người ta chọn đơn vị là năm ánh sáng, tức là, đoạn đường mà ánh sáng đi trong một năm. Nếu ta chú ý rằng trong một giây ánh sáng đi được 300000km, một năm ánh sáng tương ứng gần 9500 000.000.000km. Ngôi sao cố định gần nhất (Prexima Centauri) cách quả đất chừng 4 năm ánh sáng.

Trong việc sử dụng những số lớn (cả trong đa số tính toán kỹ thuật khác) phần lớn không cần thiết viết số ấy hoàn toàn chính xác. Trong thực tế, giá trị cần tìm được xác định bởi những dụng cụ đo cho trước hoàn toàn không chính xác và không phải tất cả chữ số của số gặp phải đều là quan trọng. Ở các viện nghiên cứu, ở các nhà máy và ở trường học người ta sử dụng trong trường hợp cái gọi là số không hoàn toàn đầy đủ. Phải là một người kỹ thuật giàu kinh nghiệm và phải có những dụng cụ đo đặc biệt, nếu muốn xác định nhiều hơn 4 chữ số của một số được nghiên cứu. Để biểu diễn sự gần đúng người ta dùng ký hiệu ≈. Chẳng hạn, nếu muốn biết rằng, khoảng cách D từ quả đất đến mặt trăng gần 384000 km thì viết D≈384000km.

Chúng ta chỉ có thể hình dung được sự to lớn của con số bằng sự cố gắng lớn lao. Nếu phải quyết định bằng một sự đánh giá trần trụi (không một sự tính toán), chẳng hạn, thì sẽ bắt gặp phải sai lầm có ý nghĩa (câu trả lời chính xác là 11 ngày rưỡi). Trong khi đó số một triệu viết trong hệ thập phân rất dễ dàng với 7 chữ số: 1000000.

Nghìn triệu là một tỉ (1.000.000.000), một billion (1.000000000000) là một triệu triệu. Còn những tên tương tự cho những số lớn hơn (Trillion, Quadrillion, Quintillion v.v..) không hay sử dụng vì chúng rất vụng về và làm việc với những con số lớn như thế không có đòi hỏi gì đặc biệt. ở đây thường có sự hiểu sai, vì rằng đối với những con số lớn thì một vài tiếng nước ngoài (ví dụ như tiếng Nga và tiếng Pháp) gọi tên khác với tiếng Đức. Tốt nhất, ta nhìn sự khác nhau trong bảng sau đây:

Bảng 1:

Số	Tên Đức	Tên Nga	Tên Việt
1.000.000	Million	Million	Triệu
1.000.000.000	Milliasde	Milliasde hoặc Billion	Tỷ [1]
1.000.000.000.000	Billion	Trillion	Nghìn tỷ
1000000000000000	Billiasde	Quadrillion	Triệu tỷ

Từ bảng này, dễ dàng nhận thấy rằng, sự không chú ý của người dịch có thể dẫn tới sai lầm nghiêm trọng, đặc biệt trong bài viết kinh tế hoặc kỹ thuật quan trọng. Vì rằng sự phát triển bằng lời có thể bị hiểu lầm, người ta viết các số này thường chỉ bằng những chữ số hệ thập phân (không có lời) hoặc cách viết ngắn hơn và dễ nhìn hơn, bằng luỹ thừa của 10. Cách viết này dùng trước hết trong kỹ thuật và khoa học. Vậy thì, ta viết một triệu 10^6, một tỷ là 10^9, một nghìn tỷ là 10^{12} v.v... Luỹ thừa 10^n biểu diễn một số rất lớn mà n tương đối nhỏ, n phải viết nhỏ lại tuy rằng ít ký hiệu thoả mãn.

[1] Theo từ số của tiếng Việt, thì tỷ lại là triệu triệu (nghìn tỷ) (ND)

Sự biểu diễn bằng luỹ thừa thập phân người ta cũng dùng cho các số làm tròn mà việc biểu diễn theo các chữ số bất tiện. Chúng tôi muốn đưa ra ví dụ về số Avogadro có ý nghĩa lớn trong vật lý và trong hoá học. Số Avogadro N_A chỉ số phân tử trong một phân tử khối của một chất khí. Nó là một số thực lớn, ta có thể nhìn thấy qua biểu diễn:

$N_A \approx 602\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Theo cách so sánh của giáo sư F.Nachtikal ta có thể hình dung ít ra là gần với độ lớn của số này như sau:

"Nếu mỗi người trong 2 tỷ người [1] sống trên quả đất, sưu tập chân dung của tất cả người cùng thời, trong đó những ảnh riêng lẻ 6 cm dài và 4cm rộng được in lại bằng cách chia thành những điểm sao cho khoảng cách giữa các điểm gần nhau là 1/8 mm thì số điểm trên tất cả chân dung và trong tất cả sưu tập gần bằng số Loschmidt (nay gọi là số Avogadro)". Độc giả có thể hiểu rõ bằng tính toán về cái đó.

Đối với sự to lớn của số như số Avogadro chúng ta thiếu sức tưởng tượng, sự biểu diễn nó theo các chữ số trong hệ thập phân rất không rõ ràng vì cần dùng tới 24 chữ số. Để tránh sự không rõ ràng này, người ta viết số Avogadro ở dạng $N_A \approx 6,02.10^{23}$; luỹ thừa 10^{23} tương ứng với số :

100 000 000 000 000 000 000 000

---

(1)

Và từ đó dễ dàng nhìn thấy ngay cách biểu diễn gọn số N_A là chính xác. Tương tự ta biểu diễn các số khác các số đã nói ở trước: khoảng cách từ quả đất tới mặt trời chừng $1.5.10^8$ km, một năm ánh sáng là $9.5.10^{12}$ km v.v...

Sự to lớn của số cũng xảy ra trong lịch sử chơi cờ. Theo truyền thuyết, vua ấn Độ Shehram rất vui lòng về trò chơi cờ, đã yêu cầu Sessa, người phát minh ra trò chơi, chọn một phần thưởng tuỳ ý. Sessa, yêu cầu, người ta đặt cho ông vào ô thứ nhất của bàn cờ một hạt thóc và trong mỗi ô tiếp theo nhiều gấp đôi của ô liền trước nó. Shehram nực cười về yêu cầu này và ra lệnh cho những người quản lý kho của nhà vua phát thưởng cho nhà phát minh. Nhưng khi trả thưởng thì mới nhận ra rằng, Sessa đã đòi hỏi một khối lượng lúa rất lớn. Chẳng những số lúa chứa trong tất cả kho của vua không đủ trả mà khối lượng lúa ấy-như chúng ta biết ngày nay- cònvượt hơn thu hoạch lúa của toàn quả đất nếu như trên toàn thể đất liền chỉ có trồng lúa chứ không trồng gì khác.

Chúng ta kiểm tra lại bằng tính toán kết quả rất ngạc nhiên này. Sessa đã đòi số thóc nhiều như tổng

$$x = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63}$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với 2, ta được :

$$2x = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{64}$$

Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất theo vế:

$2x-x = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63})$

Đơn giản cả 2 vế ta được:

$x = 2^{64} - 1$

Nhân hết các luỹ thừa của 2 được

$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$

Số cần tìm sẽ là

$x = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 5521\ 615 \approx 1{,}8.10^9$

Để có một hình dung nhất định về số x các hạt thóc, chúng ta biểu thị nó ra hectôlit. Một hectôlit chứa khoảng 3 000 000 hạt (tuỳ theo chất lượng và loại lúa). Tính toán đơn giản đưa tới kết quả. Sessa đòi nhận 6149 tỷ hectôlit.

Ngày nay trên toàn quả đất thu hoạch hàng năm khoảng 2 tỷ hectôlit thóc. Nếu cứ như thế thì toàn thế giới phải trồng trọt gần 3100 năm mới đủ cho đòi hỏi phi thường của nhà phát minh cờ. Trên 3 000 năm người làm bánh mỳ không có bột, không được làm mất mát một hạt thóc nào và phải sau khoảng thời gian như thế Sessa mới có thể nhận được phần thưởng về ông ta đã tặng cho loài người trò chơi cờ.

Trong thực tế thì đòi hỏi của Sessa vẫn không giải quyết được. Giả thiết của chúng ta, hàng năm thu hoạch 2 tỷ hectôlit thóc là tương ứng với tình trạng ngày nay của thu hoạch mùa màng của thế giới. Nhưng chắc chắn rằng, sản lượng ngũ cốc ở thế kỷ trước thấp hơn nhiều. Chúng ta cần phải nhớ rằng: như Liên Xô hoặc Canadda thì trước đây không lâu còn chưa sản xuất được tốt như bây giờ. Và dân số thế giới trước đây 100 hoặc 200 năm thì chỉ bằng một nửa ngày nay. Nếu ta xét đến tất cả những cái đó thì đi đến kết luận sau đây: Từ sự hồi tưởng quả đất đã sản xuất thóc không đủ để có thể đáp ứng yêu cầu "chất phác" của Sessa.

3.2. Từ hệ nhị phân

Tất cả những người cùng sống với chúng ta, kể cả những người không làm toán học đều biết biểu diễn một số tự nhiên gặp hàng ngày nhờ mười chữ số 0, 1, 2, 3,..., 9. Loại và cách, như người ta thực hiện sự biểu diễn này, gọi là *hệ thập phân* (hệ decade) vì cơ sở của hệ 10. Từ khi còn ở trường học chúng ta đã biết rằng, chẳng hạn như biểu diễn 4705 trong hệ thập phân là số $4.1000 + 7.100 + 0.10 + 5$ hoặc $4.10^3 + 7.10+2^2 + 0.10^1 + 5.10^0$. Ngoài hệ thập phân, còn giữ lại những hệ đếm đã dùng trước đây. Cho đến ngày nay người ta vẫn bán khăn mặt đóng gói 12 chiếc (một tá) và bộ đồ ăn cho 12 người. Trước đây người ta bán nhiều hàng hoá nhỏ trong một "Gros": một Gros là 12 tá hoặc 144 cái. Một đơn vị buôn bán thông thường khác ở thời cổ đại là Schock. Cho đến ngày nay ở nhiều nơi người ta đếm trứng theo Schock. Một Schock chứa 60 cái. Hệ đếm với cơ số 60 chỉ còn dùng trong hệ thời gian và đo góc. Đơn vị cơ sở của hệ này là giây (giây thời gian hoặc giây góc) 60 giây tạo thành một phút thời gian hoặc một phút góc. 60 giây tạo thành một giờ hoặc một độ. Ví dụ như 5h27ph35s có nghĩa là 5giờ, 27 phút, 35 giây; $128^0 17' 43''$ cho độ lớn của góc 128 độ, 17 phút và 43 giây.

Nếu ta muốn biểu diễn số liệu của ví dụ thứ nhất ra giây thì phải chú ý rằng cơ sở của hệ là số 60. Từ đó 5h27ph35s là

$$5.60^2 + 27.60 + 35 = 18000 + 1620 + 35 = 19655 \text{ giây.}$$

Mỗi số tự nhiên bất kỳ lớn hơn 1 đều có thể dùng làm cơ sở cho một hệ đếm. Nếu không có chỉ dẫn người ta tính trong hệ đếm nào thì luôn luôn giả thiết, đó là hệ thập phân. Ngoài ra cần nói rõ người ta dùng cơ sở nào. Ở đây, chúng tôi muốn giới thiệu *hệ nhị phân*, hệ này lấy số 2 làm cơ sở. Để có thể đưa một số tự nhiên cho trước vào trong hệ nhị phân, trước hết chúng tôi chỉ ra một vài luỹ thừa của 2:

$2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$.

Hệ nhị phân chỉ sử dụng 2 chữ số, đó là 0 và 1. Nếu chẳng hạn ta phải đưa số 29 vào hệ nhị phân thì tiến hành như sau: ta thấy rằng $2^4=16$ (nhỏ hơn 29) và $2^5=32$ (lớn hơn 29). Ta trừ $29-2^4=29-16=13$, và tiến hành tương tự với số dư 13. Ta thấy, $2^3=8$ (nhỏ hơn 13) và $2^4=16$ (lớn hơn 13). Ta trừ $13-2^3=13-8=5$. Ta lại thấy, $2^2=4$ (nhỏ hơn 5) và $2^3=8$ (lớn hơn 5). Ta trừ $5-2^2=5-4=1$. Như vậy ta có :

$29-2^4-2^3-2^2=1$ hoặc $29=2^4+2^3+2^2+2^0$

Ta có thể viết được dưới dạng :

$29=1.2^4+1.2^3+1.2^2+0.2^1+1.2^0$

Số 29 biểu diễn trong hệ nhị phân bằng 11101. Ngược lại, số ở hệ nhị phân có thể đưa vào hệ thập phân. Ví dụ như, biểu diễn 100110 có nghĩa là số :

$1.2^5+0.2^4+0.3^3+1.2^2+1.2^1+0.2^0=32+4+2=38.$

Trong hệ nhị phân người ta cộng rất đơn giản vì nó thoả các tổng sau đây (gọi là qui tắc cơ bản của phép cộng).

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=10. Lấy ví dụ về tổng của các số có nhiều chữ số, ta cộng 29+38. Chúng ta đã biết cách biểu diễn số 29 và số 38 trong hệ nhị phân. Cách ghi tổng được thực hiện tương tự với hệ thập phân:

$$\begin{array}{r} 11101 \\ 100110 \\ \hline 1000011 \end{array}$$

Vậy tổng cần tìm là 1000011 (trong hệ nhị phân). Số này có nghĩa là:

$1.2^6+0.2^5+0.2^4+0.2^3+0.2^2+1.2^1+1.2^0=64+2+1=67$

Sự việc là 38+29=67

Phép nhân trong hệ nhị phân cũng rất đơn giản, bởi vì "bảng cửu chương nhỏ" gồm những tích sau [1] 0.0=0, 0.1=0, 1.0=0, 1.1=1.

Ví dụ, ta nhân số 29 và 38 trong hệ nhị phân. Bản ghi

$$\begin{array}{r}
\underline{11101.100110}\\
11101\\
11101\\
\underline{11101}\\
10001001110
\end{array}$$

tương tự như bản ghi của hệ thập phân:

Vậy tích cần tìm là 10001001110 (trong hệ nhị phân): chúng ta viết trong hệ nhị phân:

$1.2^{10}+0.2^{9}+0.2^{8}+0.2^{7}+1.2^{6}+0.2^{5}+0.2^{4}+1.2^{3}+1.2^{2}+1.2^{1}+0.2^{0}=1024+64+8+4+2=1102$

Kiểm tra phép nhân trong hệ thập phân: 29.38=1102

Nhược điểm của hệ nhị phân là con số chiếm tương đối nhiều chỗ. Chúng ta đã thấy, chẳng hạn số 1102, trong hệ thập phân có 4 chữ số, trong hệ nhị phân phải biểu diễn 11 chữ số. Nhưng khó khăn này không là trở lực cho việc sử dụng hệ nhị phân trong kỹ thuật hiện đại. Hệ này được ứng dụng hơn cả trong máy tính điện tử hiện đại. Máy tính như thế chứa một số lượng lớn những mạch điện nối buộc lẫn nhau. Mỗi mạch có nghĩa là một chữ số. Mạch ngắt có

---

[1] Chúng được gọi là các qui tắc cơ bản của phép nhân

nghĩa là chữ số 0, mạch đóng có nghĩa là chữ số 1. Khoa học và kỹ thuật hiện đại luôn luôn sử dụng nhiều những máy như thế. Đó là những máy đã làm thay đổi cơ bản việc thực hiện các phép tính số học, trước hết là rút ngắn cơ bản thời gian cần thiết cho những phép toán riêng lẻ. Trong khi, trước đây đòi hỏi tính toán một triệu phép toán là đã làm lay động giới hạn của khả năng thực tế, thì ngày nay, máy tính điện tử hiện đại thường giải những bài toán với vài tỉ phép toán số học. Những máy này được sử dụng trong ngành khoa học và kỹ thuật rất khác nhau. Chẳng hạn, trong khí tượng học, những phương pháp toán được dùng cho việc dự báo thời tiết, thường trong một hạn thời gian hẹp:công việc không được nhiều ngày vì sau đó thì báo cáo thời tiết không còn giá trị, đã quá muộn. Máy tính rút ngắn thời gian cần thiết cho tính toán từng phút. Nghiên cứu vũ trụ không thể không có những thiết bị tính toán phức tạp. Chúng có thể thực hiện việc tính toán kiểm tra đường bay của tên lửa trong một thời gian rất ngắn, theo dõi thường xuyên chuyển động của vệ tinh nhân tạo và xử lý các số liệu khoa học do các dụng cụ đặt trong vệ tinh và tên lửa vũ trụ truyền đi gần như trong chốc lát.

3.3. Những phân số gốc

Ai cập cổ đại nổi lên qua nền văn minh vĩ đại của nó, trong đó sản sinh ra vô số tượng đài kỷ niệm còn lưu lại đến ngày nay. Lẽ tất nhiên, sự phát triển của nền nông nghiệp, của nghệ thuật kiến trúc và của toàn bộ kỹ thuật lúc bấy giờ đã dựa vào những kiến thức toán học nhất định. Toán học thời ấy có tính chất khác mục đích khác và phương pháp làm việc khác với ngày nay. Nhưng, những thành tựu của nó, ít ra là một số thành tựu đó, luôn gợi ra sự cảm phục lớn lao cho những nhà sử học, những người nghiên cứu nền văn minh Ai Cập cổ đại. Trong số những người hiểu biết tốt nhất lịch sử Ai Cập phải kể đến nhà toán học Đức O.Neugebauer. Những công trình của ông trong nửa đầu của thế kỷ này đã phát hiện nhiều thú vị trong lịch sử toán học Ai Cập.

Neugebauer đã dành sự chú ý đặc biệt cho việc tính phân số Ai Cập, trong đó những phân số thường xuất hiện nhất trong thực tế hàng ngày chiếm một vị trí quan trọng. Ngoài ra các số tự nhiên 1,2,3,4...Người ta thường sử dụng các khái niệm "một nửa", "phần ba" "phần tư". Các khái niệm này, đôi khi theo một nghĩa xác định, đạt tới gần như ý nghĩa của những khái niệm mới. Đối với các phân số này, cách viết của Ai Cập cổ đại có ký hiệu đặc biệt. Người Ai Cập cũng dùng các ký hiệu đặc biệt này để "bổ sung" cho các phân số, tức là , cho các phân số 2/3 và 3/4.

Các nhà toán học Ai Cập đã dành sự chú ý lớn cho cái gọi là *những phân số gốc*, đó là những phân số dạng.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Thuật ngữ ngày nay hiểu phân số gốc là mỗi phân số (dương) mà tử số là 1 và mẫu số là một số tự nhiên bất kỳ.

Khái niệm phân số gốc có lịch sử tương đối dài, sinh ra tình trạng, một số ngôn ngữ hiện đại có tên gọi đặc biệt cho phân số gốc (tiếng Pháp: Fraction, primaire, tiếng Anh: Unit fraction, tiếng Ba Lan: uxamek prosty, tiếng Tiệp: Kmennyzlomek). Neugebauer đã đưa vào toán học hiện đại một cách viết hợp lý cho phân số gốc. Cách viết đó chúng ta cũng sử dụng trong chương này. Ở chỗ của phân số $\frac{1}{n}$ chúng ta sẽ viết là $\overline{n}$ (đọc là "n ngang" n chẳng hạn, có:

$$\overline{6}+\overline{3}+\overline{2}=1 \qquad (1)$$

Chúng ta có thể hiểu rõ về điều này theo cách viết bóng bẩy:

$$(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=1$$

Các nhà toán học Ai Cập cổ đại đã biết một loạt công thức tương tự công thức (1). Trong các ký hiệu của hệ, người ta tìm thấy ngoài phương trình (1) còn có những công thức sau đây:

$$\overline{30}+\overline{42}=\frac{2}{35} \qquad \overline{20}+\overline{124}+\overline{155}=\frac{2}{31}$$

$$\overline{42}+\overline{86}+\overline{129}+\overline{301}=\frac{2}{43}$$

$$\overline{60}+\overline{356}+\overline{534}+\overline{890}=\frac{2}{89}$$

$$\overline{101}+\overline{202}+\overline{303}+\overline{606}=\frac{2}{101}$$

Những người tính toán thời ấy đã giải thích những công thức đưa ra không có tính qui luật tổng quát. Một điều thú vị là trong thời gian gần đây, khái niệm phân số gốc lại gây ra sự chú ý của một số nhà toán học; nhiều kết quả đã được tìm ra. Những kết quả này tạo nên trong toàn bộ của nó gần như một ngành toán học mới mà một loạt vấn đề như đã được giải quyết, nhưng cũng còn một số vấn đề đến nay vẫn chưa được giải quyết. Nghiên cứu về lĩnh vực này trong mười năm gần đây, đặc biệt có nhà toán học Ba Lan W.Sierpinski và A.Schinzel và nhà toán học Hunggari P.Erdos. Chúng tôi muốn trích một số trong những kết quả của họ ít nhất là lướt qua.

Một số là tổng của s phân số gốc, ta sẽ gọi là số dạng A_S. Ví dụ như, tất cả phân số gốc là số dạng A_1 phân số $\frac{2}{3}$ không có dạng A_{S-1}. Từ cái mà chúng ta đã nói về A_S, suy ra rằng, đó là *số hữu tỷ*, tức là, chúng được biểu diễn như là phân số với tử số nguyên và mẫu số nguyên. Ngược lại, nếu cho một số hữu tỷ dương $\frac{m}{n}$ thì người ta có thể đặt vấn đề, số này có dạng A_S không ($s=1,2,3,...$). Vì số dạng A_1 hoàn toàn không thú vị (người ta biết rằng, chúng thật sự là phân số gốc), nên vấn đề đặt ra, có thể nhìn nhận những số dạng A_2 mà không là dạng A_1 như thế nào. Thuộc vào loại này, ví dụ như, tất cả phân số có tử số là 2 và mẫu số là một số tự nhiên lẻ bất kỳ:

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7} \dots \quad (1)$$

Xét tiếp phân số dạng $\frac{3}{n}$, trong đó n là một số tự nhiên. Nếu n chia hết cho 3 (tức là n=3,6,9,12...) thì có thể rút gọn cho 3. Như vậy, trường hợp này dẫn tới số dạng A_1 (tới phân số gốc). Nếu n không chia hết cho 3 thì sự việc sẽ phức tạp hơn. Có thể chứng minh rằng , phân số $\frac{3}{7}$, không là số dạng A_2, trong khi đó các phân số, ví dụ như $\frac{3}{5}$ và $\frac{3}{8}$ lại là số dạng A_2, như phương trình sau đây chỉ rõ:

$$\frac{3}{5} = \overline{2} + \overline{10} \qquad\qquad \frac{3}{8} = \overline{3} + \overline{24}$$

Sau khi chúng ta đã làm quen với các số dạng A_S chúng ta chuyển sang một cách ngắn gọn các số dạng A_3. Từ những suy nghĩ trước chúng ta biết rằng, mỗi phân số $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ (trong đó n là một số tự nhiên bất kỳ) là một dạng A_3. Các nhà toán học đã giành sự quan tâm nhiều cho phân số dạng $\frac{4}{n}$. Nhà toán học Hunggari P.Erdos, trước đây ít lâu, đã phỏng đoán rằng, đối với mỗi số tự nhiên n>1 phân số $\frac{4}{n}$ là một số dạng $\frac{4}{n}$. Phỏng đoán này cho đến nay không được chứng minh mà cũng không được cải chính, nhưng sự đúng đắn của nó được xác nhận đối với tất cả số tự nhiên n<141649. Ví dụ như, với n=5:

$$\frac{4}{5} = \overline{2} + \overline{5} + \overline{10}$$

số $\frac{4}{5}$ thực sự có dạng A_3. Chúng ta không đi vào chi tiết vấn đề này, vì vấn đề đó đòi hỏi những kiến thức toán học to lớn vượt quá phạm vi kiến thức chúng ta. Kết thúc, chúng tôi muốn lưu ý rằng, nhờ phân số gốc mà nhiều kết quả nổi tiếng đã được sáng tỏ. Ví dụ như, các nhà vật lý đã đo độ dài sóng của đường vạch n của phổ khinh khí. Cần nhấn mạnh rằng, đối với tần số sóng v (tức là đối với giá trị ngược lại của độ dài sóng) công thức

$$v = R(\overline{s^2} - \overline{n^2})$$

đúng, trong đó R là hằng số và s, n là những số tự nhiên thích hợp.

BÀI TẬP

3.1. Một quyển sách có 498 trang, được đánh số trang ở góc phía trên. Bao nhiêu chữ số được sử dụng cho việc đánh số này. Chữ số 0 được sử dụng bao nhiêu lần trong việc đánh số đó ?

3.2.Một nữ nhân viên đánh máy một dãy số tự nhiên (không có khoảng trống ở giữa) 12345678910111213... Chữ số nào sẽ được đánh thứ 100 ?

3.3. Ta tưởng tượng, ở ô thứ nhất của bàn cờ bình thường đặt một xu và ở mỗi ô tiếp theo đặt nhiều hơn ô đứng liền nó một xu. Bạn hãy tính có bao nhiêu xu trên bàn cờ.

3.4.Qua cái gì mà bài toán nhân sau đây thú vị: 142857.264513

3.5* Một bài toán nhân (trong hệ thập phân) đã được viết lên bảng nhưng người nào đó đã xoá đi các chữ số, chỉ còn lại bốn số 1 còn đọc được. Hỏi rằng, có thể bổ sung các chữ số thiếu ở vị trí dấu sao không ?

$$\begin{array}{r}
\underline{1{*}{*}{*}{*}\quad} \\
{*}{*}{*}1\ \\
\underline{{*}{*}{*}1\ \ \ } \\
{*}{*}{*}1{*}\ \
\end{array}$$

3.6* Số 5^{100} lớn không tưởng tượng được. Mặc dù vậy, người ta có thể cho xấp xỉ giá trị của nó mà không có máy tính. Bạn hãy tính xem, có bao nhiêu chữ số của 5^{100} viết trong hệ thập phân. Bạn hãy chỉ ra một vài chữ số đầu và cuối trong biểu diễn đó.

3.7. Hệ thập phân có bao nhiêu số tự nhiên a) 3chữ số, b) n chữ số ?

3.9. Nếu chỉ được phép sử dụng các chữ số 5, 6, 7, 8 thì có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên 3 chữ số (trong hệ thập phân) ? trong số đó có bao nhiêu số chẵn?

3.10. Có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên 3 chữ số nếu chỉ được phép dùng các chữ số 0,1,2,3?

3.11. a) Hãy chuyển 333 từ hệ thập phân sang hệ nhị phân.

b) Hãy chuyển số 1111 từ hệ nhị phân sang hệ thập phân.

3.12. Số tự nhiên nào được biểu diễn trong hệ nhị phân giống như trong hệ thập phân (chữ số như nhau và thứ tự chữ số như nhau)?

3.13. ngài hãy nêu yêu cầu người bạn của ngài nghĩ về một con số bất kỳ nhỏ hơn 64 và cho biết; số đó ở trong những cột nằm ngang nào của sáu cột nằm ngang:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43
45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	

2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	22
23	26	27	30	31	34	35	38	39	42	43
46	47	50	51	54	55	58	59	62	63	

4	5	6	7	12	13	14	15	20	21	22
23	28	29	30	31	36	37	38	39	44	45
46	47	52	53	54	55	60	61	62	63	
8	9	10	11	12	13	14	15	24	25	26
27	28	29	30	31	40	41	42	43	44	45
46	47	56	57	58	59	60	61	62	63	
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	

Ta dễ dàng tìm được số được nghĩ tới, bằng cách cộng các số đầu tiên trong các cột nằm ngang đã cho. Giải thích khả năng đó.

3.14. Ta có thể "rút gọn" phân số $\frac{16}{64}$ bằng cách vứt bỏ chữ số 6 ở tử số và mẫu số; ta nhận được phân số $\frac{1}{4}$.

Điều thú vị là ta đạt được cùng kết quả như vậy, nếu tử số và mẫu số chia hết cho 16 (cách rút gọn này đã học ở trường phổ thông). Hãy tìm những ví dụ khácvề phân số mà người ta có thể "rút gọn" bằng cách bỏ đi các chữ số giống nhau ở tử số và mẫu số

3.15. Đôi khi chúng ta ngạc nhiên về kết quả của một bài tính và không biết được, đó là ngẫu nhiên hay là có quy luật sâu sắc. Thí dụ như, các quan hệ khai căn sau đây rất thú vị:

$$\sqrt{3\frac{3}{8}}=3.\sqrt{\frac{3}{8}}\ ,\ \sqrt{4\frac{4}{15}}=4.\sqrt{\frac{4}{15}}$$

$$\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\ ,\ \sqrt[4]{2\frac{2}{15}}=2\sqrt[4]{\frac{2}{15}}$$

$$\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$$

Tại sao trong những phân số này sự đơn giản hoá lại rất "đơn giản"?

3.16. Hãy chỉ ra rằng, phân số $\frac{3}{11}$ có thể biểu diễn như tổng của hai phân số gốc.

3.17. Hãy chỉ ra rằng, số hai có thể biểu diễn như tổng của một số hữu hạn phân số gốc khác nhau mà mẫu của chúng là số lẻ.

3.18. Kết thúc còn 2 vấn đề mà chúng ta yêu cầu trả lời không triệt để:

a) Có thể viết số 10 mà sử dụng tất cả 10 chữ số 0,1,2,3,...9 trong đó mỗi chữ số chỉ xuất hiện một lần. Trong cách viết có thể sử dụng phép cộng và phân số.

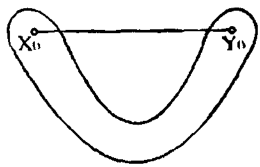
b) Cũng câu hỏi như thế đối với số 100.

CHƯƠNG IV

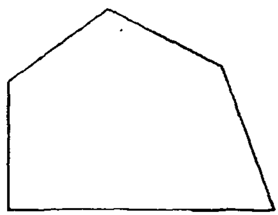
ĐA GIÁC

4.1. Cấu hình lồi trong mặt phẳng

Nếu ta xem xét, những cấu hình nào trong mặt phẳng thường hay xuất hiện trong học tập ở trường phổ thông, trong những bản vẽ của kỹ sư và trong thực tế hàng ngày, thì ta khẳng định rằng, những cấu hình gọi là lồi (vòm cong ra ngoài) có ý nghĩa to lớn.



Hình 25



Hình 26

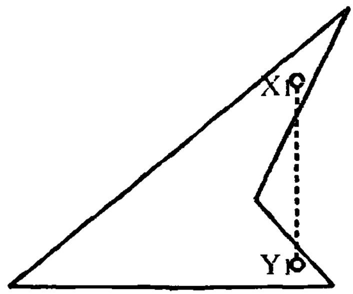
Một cấu hình trong mặt phẳng được gọi là lồi, nếu hai điểm bất kỳ X và Y ở bên trong của cấu hình nối với nhau bằng đoạn thẳng $\overline{XY}$ thì đoạn thẳng này nằm hoàn toàn trong cấu hình đó. Một đường thẳng, một đoạn thẳng hoặc một vòng tròn là những ví dụ của cấu hình lồi trong mặt phẳng. Ngược lại, cấu hình được biểu diễn ở hình 25 là không lồi; vì các điểm X_0, Y_0 thuộc nó nhưng đoạn $\overline{X_0Y_0}$ không nằm hoàn toàn trong cấu hình đã cho.

Trong chương này chúng ta giành sự chú ý cho một loại xác định của cấu hình lồi trong mặt phẳng; đó là đa giác lồi (vòm cong ra ngoài).

Dễ dàng nhận thấy rằng, mỗi tam giác là một đa giác lồi. Nhưng trong những đa giác ta có thể tìm được chẳng những cấu hình lồi (hình 28) mà cả cấu hình không lồi (trong hình 27) cặp điểm, ví dụ như X_1, Y_1, "làm rối ren")

Ta xét tương tự với những đa giác khác.

Bạn đọc đã gặp đa giác, rất nhiều trong toán học nên đã biết rõ một số khái niệm cơ bản (như đỉnh, cạnh, đường chéo, góc trong của đa giác). Ngược lại, chúng ta cần dừng lại ở chỗ cần thiết, ở định nghĩa của diện tích đa giác vì một định nghĩa toán học cho khái niệm không đơn giản chút nào, mặc dù cấu hình trong mặt phẳng dường như đã rất rõ. Chúng ta nhớ lại những ý chính.



Hình 27

Trước khi tính diện tích người ta phải biết. hình vuông nào được xác định là hình vuông đơn vị hoặc hình vuông nào có diện tích 1. Đối với hình vuông đơn vị người ta chọn, ví dụ như, $1m^2$ (hình vuông có cạnh dài 1m) hoặc $1cm^2$ và những đơn vị khác. Trong tính toán người ta xuất phát từ hai *tính chất cơ bản sau:*

1) Những cấu hình mà có thể đặt chồng khít lên nhau, có cùng một diện tích.

2)Nếu một cấu hình tạo thành từ một số cấu hình không chồng lên nhau, thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của các cấu hình thành phần.

Ngay từ thời cổ đại, từ những công bố bằng văn bản, con người đã có khả năng đo các độ lớn của đồng ruộng của họ và các đồ án của các toà lâu đài. Phần lớn trong đó là diện tích của đa giác lồi- hình chữ nhật, hình vuông, tam giác. Người ta đã phát hiện rất sớm biểu thức tính diện tích: Diện tích hình chữ nhât cạnh a, b là A=a.b, diện tích tam giác có cạnh a và đường cao tương ứng h_a là $A=\frac{1}{2}ah_a$ và những hình khác. Về sau rất lâu người ta mới xây dựng và chứng minh được các công thức toán học đó.

Để không làm gián đoạn dòng suy nghĩ trong những trình bày tiếp chúng tôi xin nhắc lại ở đây một số khái niệm cần thiết:

Muốn biểu thị rằng, một đa giác có n góc, ta nói gọn, một n-giác (n phải là số nguyên và lớn hơn 2).

Chúng ta đã biết, tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^0. Có thể chứng minh rằng, tổng các góc trong của một n-giác lồi bằng $(n-2).180^0$.

Một trường hợp đặc biệt của đa giác lồi là đa giác dây cung. Một n-giác lồi $A_1A_2....A_n$ gọi là một đa giác dây cung, nếu có thể dựng được một vòng tròn k qua tất cả cácđỉnh $A_1A_2A_3....A_n$. Đường tròn k gọi là đường tròn ngoại tiếp của n- giác, các cạnh của n-giác là các dây cung của vòng tròn k (từ đó có tên n-giác dây cung). Như đã biết, mỗi tam giác có một vòng tròn ngoại tiếp, nên tam giác là đa giác dây cung. Trong tứ giác lồi có tứ giác dây cung(ví dụ, hình chữ nhật) và cả tứ giác không là tứ giác dây (bạn đọc sẽ tự tìm các ví dụ).

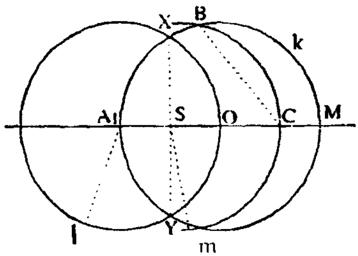
Một đa giác dây cung, cạnh của nó dài bằng nhau, gọi là đa giác đều. Nhưng "tam giác đều" người ta nói là tam giác cạnh bằng nhau, "tứ giác đều gọi là hình vuông.

4.2. Đa giác đều

Trong đa giác đều thì tam giác cạnh bằng nhau, hình vuông, ngũ giác đều và lục giác đều đã thu hút sự chú ý của con người trước tiên. Ngay nhà toán học Hy Lạp cổ đại rất nổi tiếng Pythagoras (thế kỷ thứ 6 trước công nguyên) đã biết, 4 đa giác này có thể dựng được bằng compa và thước kẻ. Người Hy Lạp thời cổ đã nghiên cứu phép dựng đa giác đều. Một bằng chứng là họ đã dùng các cấu hình này trong nghề thủ công, trong nghệ thuật kiến trúc và trong công việc hàng ngày của họ. Nhưng những cấu hình

hình học này được sử dụng không chỉ cho đồ trang sức và các đồ án xây dựng. Con người của thời cổ đại và thời trung cổ để dưới những hình dạng này một ý nghĩa tín ngưỡng và cho chúng sức mạnh quỷ thuật. Đặc biệt nổi tiếng là hình vẽ ngũ giác ("bàn chân quỷ") đã trở thành biểu tượng của "thầy phù thuỷ" và của "những thế lực đen tối".

Ngược lại, giá trị của chúng còn giữ được đến ngày nay là những kết quả mà các nhà bác học của những thế kỷ trước đã đạt được trong việc dựng hình này bằng thước kẻ và compa. Chúng ta nêu ra ở đây ví dụ về dựng ngũ giác đều bằng thước kẻ và compa.



Hình 28

Vòng tròn k với tâm O, bán kính r được dựng trong hình 28. Chọn một đường kính A_1OM, dựng vòng tròn phụ l với tâm A_1 bán kính r. Hai vòng tròn k và l cắt nhau tại các điểm X và Y mà XY là đường trung trực của đoạn thẳng A_1O. Vẽ vòng tròn m có tâm S và qua điểm B (B là một trong các mút của đường kính thẳng góc với đường kính A_1OM. Nếu ta ký hiệu giao điểm của vòng tròn m và bán kính OM là C thì có thể chứng minh rằng, đoạn thẳng $\overline{BC}$ là cạnh của ngũ giác đều cần tìm.

Một 7-giác đều đã là một cấu hình được Archimedes (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) nghiên cứu cách dựng hình. Mãi về sau, sự cố gắng to lớn của một loạt các nhà toán học đã chỉ dẫn rằng thước kẻ và compa. Người ta đã tìm lời giải gần đúng cho bài toán này (ví dụ như, trong hình 28, đoạn thẳng $\overline{SX}$ là bằng xấp xỉ bằng độ dài của cạnh ngũ giác đều ứng vòng tròn k). Nhà toán học Đức C.FGauss (1777-1855) đã đưa nghiên cứu này đến kết thúc, bằng cách, ông đã chứng minh, đa giác đều nào có thể dựng được bằng thước kẻ và compa và đa giác đều nào không thể dựng được. Ta có định lý sau đây:

Một n-giác đều có thể dựng được bằng thước kẻ và compa, nếu n là một số có dạng.

$n=2.p_1.p_2...p_k$

Trong đó s là một số nguyên dương hoặc số không và $p_1, p_2, ..p_k$ là những số nguyên tố khác nhau dạng 2^n+1.

Từ định lý này, suy ra rằng, một 7-giác đều không thể dựng được bằng thước kẻ và compa, ví dụ số nguyên tố 7 không có dạng 2^m+1. Ngược lại, một 17-giác đều có thể dựng được nhờ hai dụng cụ vẽ này, vì $17=2^4+1$. C.FGauss đã nêu ra cách dựng này năm 19 tuổi. Chúng ta sẽ tiến hành như thế nào, nếu cần phải dựng một giác đều (như một bộ phận cấu tạo hoặc đồ trang sức) với số cạnh lớn?

Tốt nhất chúng ta phải chọn một phương pháp tính toán, bởi vì phép dựng hình học chứa đựng kết quả với những sai nhỏ. Những sai phạm này do sự không hoàn hảo của các máy vẽ gây ra. Ngược lại, người ta có thể thực hiện tính toán với một sự xấp xỉ bất kỳ

Bảng III

n	r : a	n	r : a	n	r : a
3	0,577	9	1,462	15	2,405
4	0,707	10	1,618	16	2,563
5	0,851	11	1,775	17	2,721
6	1,000	12	1,932	18	2,879
7	1,152	13	2,089	19	3,038
8	1,307	14	2,247	20	3,196

Bảng III làm cho nhiệm vụ của chúng ta nhẹ nhàng hơn, ta có thể sắp đặt như sau:

Cột thứ nhất của bảng III là số cạnh của một n-giác đều, cột thứ hai là giá trị gần đúng của phân số r/a, trong đó r là bán kính của vòng tròn ngoại tiếp n-giác và a là cạnh của n-giác [1]

Nếu bây giờ cần dựng, ví dụ như một 17-giác đều với cạnh a=4cm thì chúng ta sẽ tiến hành như sau:

Rút từ bảng III ra r: a ≈2,721. Bán kính vòng tròn ngoại tiếp của 17-giác đều là r ≈ 4.2.721 = 10,884 cm. Qui tròn ta được r ≈10,9cm. Vậy thì ta dựng một vòng tròn với bán kính 10,9cm và đặt lên chu vi của vòng tròn này độ dài

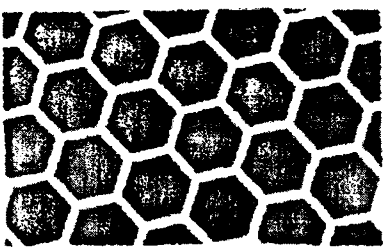
[1] Dành riêng cho vấn đề sắp xếp của bảng III các bài tập 4.9 và 4.10

4cm 17 lần. Bằng cách đó, chúng ta dựng được gần đúng một 17- giác đều.

4.3. Hình học của tổ ong

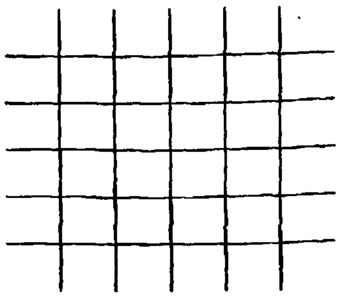
Hình học của loài ong? Vâng, có một sinh vật nhỏ nhoi như con ong cũng làm việc với hình học: những con ong "cấu tạo" chỗ ở của chúng theo cấu hình hình học, mà tính đều đặn của cấu hình đến mức ngạc nhiên. Nhìn lướt qua một tổ ong ta thấy những lỗ nhỏ hình lục giác. Cắt vuông góc với trục dài của một buồng nhỏ ta được một lục giác đều (hình 29a, 29b) với độ dài cạnh là 2,71mm. Độ chính xác rất lớn, đến nỗi Réaumur đã có lần đề nghị, lấy kích thước của buồng ong làm cơ sở của hệ đo chiều dài

Hình 29a

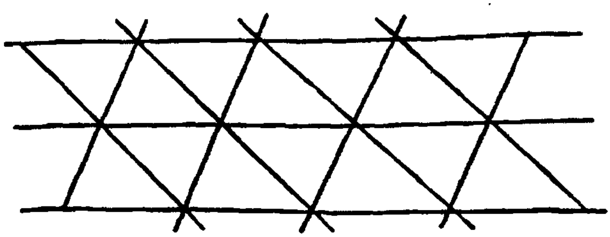


Hình 29a

Bạn đọc sẽ nghĩ rằng, vì sao các buồng ở của ong lại có dạng hình lục giác. Phải chăng như vậy là để tạo dáng cho tổ ong hay là để xây được một toà nhà có sức chứa lớn nhất với một số nhất định các nguyên vật liệu, như vậy, tiết kiệm được sự canh phòng. Nhưng mà, để phủ một mặt phẳng bằng những đa giác đều bằng nhau, người ta có thể chọn một cấu hình khác hình lục giác.



Hình 30



Hình 31

Hình 30 làm sáng rõ những hình vuông bằng nhau. Trong hình 31, mặt phẳng bị phủ bằng những tam giác cạnh bằng nhau.

Vấn đề đặt ra là, có thể tìm được những loại khác với loại đã đưa ra để choán hết mặt phẳng.

Các n-giác đều bằng nhau phải choán hết mặt phẳng không có kẽ hở. Độ lớn của một góc trong của n-giác đều là.

$$\frac{(n-2).180^0}{n}$$

Để từ mỗi đỉnh của n-giác, mặt phẳng bị chiếm hoàn toàn thì số 360^0 (tức là độ lớn của một góc đầy) chia cho số $\frac{(n-2).180^0}{n}$ không dư. Ta được tỷ số:

$$360^0 : \frac{(n-2).180^0}{n} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Tỉ số này phải là một số nguyên. Số $2+\frac{4}{n-2}$ sẽ là số nguyên nếu ta lấy n=3,4,6. Nhưng nếu như n>6 thì mẫu số n-2 lớn hơn 4, và do đó $\frac{4}{n-2}$ là một phân số thực sự. Từ đó, người ta chỉ có thể tìm được 3 cách choán mà ta thấy ở các hình 29a 30 và 31. Có lẽ sẽ kinh tế hơn, nếu buồng ong có, dạng vuông chéo hoặc dạng tam giác cạnh bằng nhau? Chúng ta muốn giải đáp vấn đề này qua tinhs toán.

Diện tích của một tam giác cạnh bằng nhau với cạnh là s_3 là : $\frac{s_3^2}{4}\sqrt{3}$. Diện tích của một hình vuông với cạnh s_4

là s_4^2 và diện tích của một lục giác đều với cạnh s_4 bằng 6 lần số $\frac{s_3^2}{4}\sqrt{3}$ (vì lục giác này có thể tạo thành từ 6 tam giác đều không chồng lên nhau), vậy thì

$$6.\frac{s_6^2}{4}.\sqrt{3} = \frac{3s_6^2}{2}.\sqrt{3}$$

Ta lấy diện tích làm đơn vị diện tích và tính chu vi của đa giác tương ứng. Nhưng trước đó, ta phải tính độ lớn của các cạnh s_3, s_4 và s_6. Đối với tam giác đều ta có:

$$s_3^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}309 \text{ hoặc } s_3 \approx 1{,}52$$

Đối với hình vuông ta có $s_4^2 = 1$ hoặc $s_4 = 1$.

Đối với hình lục giác đều ta có:

$$s_6^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0{,}385 \text{ hoặc } s_6 \approx 0{,}62$$

Ta tính chu vi của các n-giác này.

Chu vi của tam giác đều là:

$u_3 = 3s_3 \approx 3.1{,}52 = 4{,}56$

Chu vi của hình lục giác đều là

$u_6 = 6s_6 \approx 6.0{,}62 = 3{,}72$

Ta thấy rằng u_6 là nhỏ nhất trong 2 số u_3, u_4 và u_6.

Tóm lại, chúng ta có thể khẳng định: Bao một diện tích có độ lớn 1 bằng một lục giác là kinh tế nhất. Đó đồng thời là câu trả lời cho vấn đề đã đặt ra

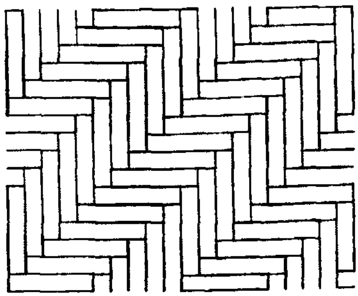
4.4. Từ việc lát sàn.

Nếu ta cần phải làm dự trù lát một con đường thì ta cần phải có không chỉ quan điểm thựctế mà cả quan điểm thẩm mỹ. Vì thế, mong muốn sao cho việc sản xuất đá lát đơn giản (ta chọn hình dạng không phức tạp lắm) và con đường được lát mang lại cảm giác ưa thích (cho nên đá lát có dạng đa giác đều).

Trước khi người ta tìm thấy sự ưa thích ở nền nhà được lát những loại khác nhau, như chúng ta còn nhìn thấy ở một số ngôi nhà lịch sử. Trong quá trình tiếp tục của các sách đọc của chúng ta, chúng ta được gặp những điển hình của những nền nhà lát như thế, chúng tạo nên những vật trang trí thú vị và đẹp.

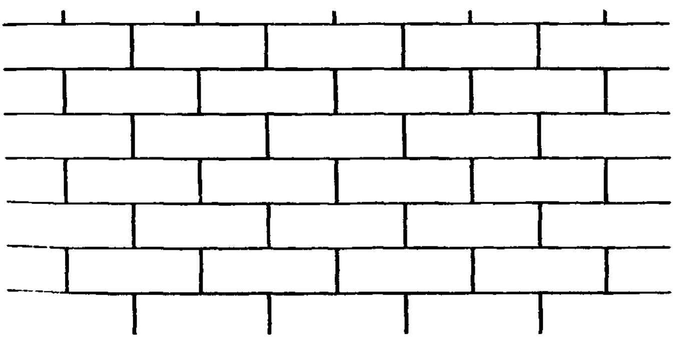
Chúng ta cần lấp đầy một mặt phẳng bằng những đa giác mà không một phần nào của mặt phẳng còn trống và không có hai đa giác nào chồng lên nhau. Các đòi hỏi đã đặt ra bởi chúng ta là phác thảo vấn đề tổng quát; đa phần yêu cầu là đa giác đều hoặc các đa giác bằng nhau hoặc các đa giác đều bằng nhau.

Chúng ta đã được gặp một ví dụ của việc lát sàn bằng những đa giác đều và bằng nhau trong đoạn "hình học của loài ong" (hình 29a, 29b, 30,31). Ngoài ba thể hiện đã nêu ra, ta không thể tìm được loại lát sàn khác.



Hình 32

Trong những nhà ở, gỗ lát sàn thường được chắn như hình 32 chỉ rõ; ở đây thực hiện việc lấp đầy mặt phẳng bằng những hình chữ nhật bằng nhau (chúng tạo nên cái gọi là "hình mẫu xương cá"). Những hình chữ nhật bằng



Hình 33

nhau có thể phủ mặt phẳng theo cách khác như hình 33 chỉ rõ; hình mẫu này gợi nhớ đến lát cắt thẳng đứng qua bức tường gạch.

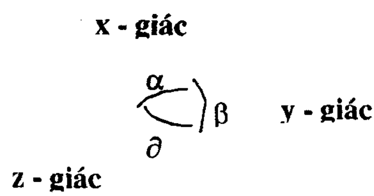
4.5. Sàn lát ván-đa dạng được lựa chọn

Ta thấy ở hình 29a, tại những điểm góc của mỗi lục giác, 3 đa giác chạm nhau. Chúng ta muốn tìm kiếm tất cả cách lấp đầy mặt phẳng bằng những đa giác đều (không nhất thiết bằng nhau), trong đó mỗi đỉnh của đa giác là điểm chung của 3 cấu hình này.

Ta ký hiệu số cạnh của 3 đa giác theo thứ tự là x, y, z (hình 34). Độ lớn của góc trong ở trong x-giác (theo đo độ) được cho bởi:

$$\alpha = \frac{(x-2).180^0}{x}$$

Tương tự có công thức đối với x-giác và y-giác (độ lớn của các góc trong được ký hiệu bằng β, δ).



Hình 34

Có $\alpha + \beta + \delta = 360^0$ hoặc.

$$\frac{(x-2).180^0}{x} + \frac{(y-2).180^0}{y} + \frac{(z-2).180^0}{z} = 360^0$$

Nếu chia cả 2 vế phương trình này cho 180^0, ta nhận được :

$$\frac{x-2}{x}+\frac{y-2}{y}+\frac{z-2}{z}=2 \text{ hoặc}$$

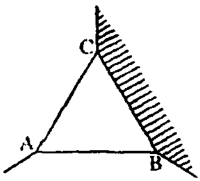
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

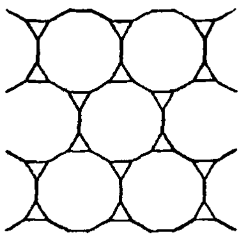
Vậy thì, nếu x-giác, y-giác, và z-giác tiếp giáp nhau tại một đỉnh thì phương trình (1) thoả đối với x, y, z. Bài toán này chuyển thành bài toán; xác định 3 số thương x, y, z sao cho thoả phương trình (1). Một phương trình với nhiều ẩn, trong đó người ta chỉ tìm nghiệm số nguyên gọi là phương trình không, xác định (phương trình dicphan). Nhiệm vụ lát sàn, của chúng ta trở thành nhiệm vụ giải phương trình không xác định (1). Có thể chứng minh phương trình (1) có những nghiệm sau:

(x=3, y=7, z=42)	(x=3, y=8, z=24)
(x=3, y=9, z=18)	(x=3, y=10, z=15)
(x=3, y=12, z=12)	(x=4, y=5, z=20)
(x=4, y=6, z=12)	(x=4, y=8, z=8)
(x=5, y=5, z=10)	(x=6, y=6, z=6)

Ngoài 10 bộ số đã đưa ra không có bộ số nào khác thoả phương trình (1) không kể việc hoán vị các số trong bộ, ví dụ bộ x=3, y=5, 5=42 hoán vị thành x=42, y=3, z=7 v.v...)

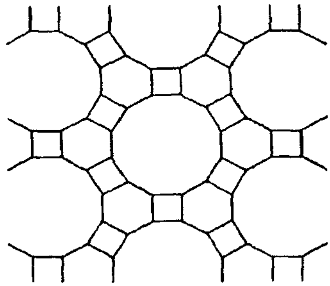
Vấn đề là, bộ ba số x=3, y=7, z=24 có thích hợp với cách lấp đầy đã nêu ra không? Nếu thích hợp, chúng ta cần đưa ra xét tam giác ABC theo cách lấp đầy này (hình 35). Đỉnh A đồng thời là một đỉnh xác định của 7-giác (bên cạnh) và một đỉnh xác định của 42-giác (bên cạnh).Ta chọn ký hiệu các đỉnh như hình 35 (cạnh $\overline{AB}$ thuộc 7-giác, cạnh $\overline{AC}$ thuộc 42-giác). Phần gạch trong hình 35 không thuộc 7-giác mà cũng không thuộc 42-giác (vì nếu không thì có hai 7-giác tiếp giáp nhau tại đỉnh B hoặc có 42-giác tiếp giáp nhau tại đỉnh C). Vậy thì bộ số x=3, y=7, z=42 không thích hợp



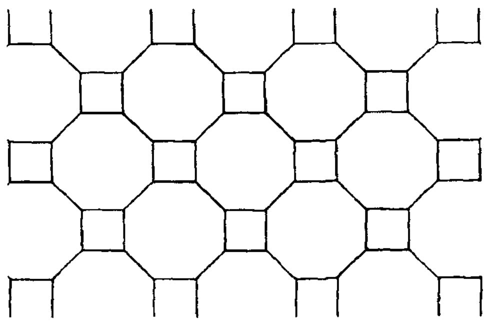


Tương tự, có thể chỉ ra rằng, các bộ số (x=3, y=8, z=24), (x=3, y=9, z=18) và (x=3, y=10, z=15) không đưa đến kết quả mong muốn. Nhưng bộ số (x=3, y=12, z=12) cho kết quả mà hình 36 cho thấy.

Bộ số x=4, y=5, z=20 không dẫn tới lơif giải vì hình ngũ giác không thể bao phủ vong quanh mặt phẳng một hình vuông luôn luôn thay thế một 20-giác. Bộ số x=5, y=5, z=10 không dẫn tới lời giải. Ngược lại, các bộ số (x=4, y=6, z=12), (x=4, y=8, z=8) và (x=6, y=6, z=6) phù hợp yêu cầu lấp đầy mặt phẳng, như nhìn thấy ở hình 37, 38 và 29a



Hình 37



Hình 38

Tóm lại, có thể nói rằng bài toán lát sàn có tổng cộng 4 lời giải cho thấy ở các hình 36, 37 và 29a.

BÀI TẬP

4.1. Hãy tưởng tượng, một ngũ giác đều cho trước ABCDE bị cắt dọc theo đường chéo $\overline{AC}$. Hãy diễn tả chi tiết các tam giác và tứ giác xuất hiện bởi việc cắt này và tính độ lớn các góc trong của các hình đó.

4.2. Một ngũ giác đều cho trước ABCDE bị cắt dọc theo hai đường chéo $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Hãy mô tả chi tiết 4 phần xuất hiện và tính độ lớn các góc trong của các phần đó.

4.3. Một ngũ giác đều cho trước ABCDE vẽ hai đường chéo $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$. Hãy mô tả chính xác 6 phần xuất hiện và tính các góc trong của chúng.

4.4*. Trong ngũ giác đều cho trước ABCDE vẽ hai đường chéo $\overline{AC}$ và $\overline{BD}$; giao điểm của hai đường chéo này ký hiệu là X, hay tính tỷ lệ $\overline{AX} : \overline{XC}$.

4.5.Một mô hình của một ngũ giác đều được cắt từ giấy ra. Chia mô hình theo tất cả đường chéo của nó. Một trong những phần xuất hiện lại có dạng của một ngũ giác đều. Diện tích của ngũ giác nhỏ này chiếm bao nhiêu phần trăm của diện tích của ngũ giác ban đầu.

4.6. Những phiến đá lát sàn thấy ở hình 37 được tô thành 3 màu (ví dụ: đỏ, vàng và đen) sao cho cứ mỗi hai viên đá cạnh có màu khác nhau.

4.7. Hãy xác định các đường chéo của hình lục giác đều cắt nhau tại bao nhiêu điểm.

4.8. Trong tất cả các hình lục giác lồi hãy tìm một hình lục giác mà các đường chéo cắt nhau tại nhiều điểm hơn cả. Tính số giao điểm đó.

4.9* Cho n-giác đều $A_1A_2A_3...A_n$. Ký hiệu a là độ lớn của cạnh r là đường kính của vòng tròn ngoại tiếp n-giác đó. Hãy tính tỷ số $\frac{r}{a}$

4.10. Hãy tính tỷ số $\frac{r}{a}$ đối với một 7-giác đều.

4.11. Độ dài của đoạn thẳng $\overline{SX}$ trong hình 28 xấp xỉ độ dài của cạnh của một 7-giác nội tiếp vòng tròn k. Hãy tính trị gần đúng của hình này.

4.12. Cho 7-giác lồi $A_1A_2A_3...A_7$. Có thể tìm được bao nhiêu tam giác mà đỉnh nằm trong 7-giác nội tiếp và cạnh là đường chéo của 7-giác.

4.13. Tìm tất cả đa giác đều mà độ lớn của góc trong (theo độ) là số nguyên.

4.14** Hãy xác định tất cả số nguyên dương x,y,z thoả phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$$ (1)

4.15. Có bao nhiêu lần mở ngoặc cho tổng a-b-c-d sao cho trong mỗi vòng móc có 2 số hạng, trong đó số hạng có thể là một số bất kỳ trong các số a,b,c,d hoặc một tổng trong vòng móc. Thứ tự các số a,b,c,d không được thay đổi. Hãy chỉ ra, bài toán này liên quan như thế nào với việc tách một ngũ giác lồi thành đa giác (nhờ đường chéo).

---

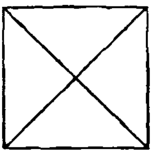
(1) Đó là phương trình mà nghiệm đã nêu trong bài chính (trang 78) của chương này chuyển thành bài tậpj. Với bài tập này mỗi bạn đọc hiểu được cách tính bằng bất đẳng thức. Ta thấy rằng đúng ra là đi vào phân tích số $\frac{1}{2}$ thành tổng của 3 phân số gốc (xem phân số gốc)

CHƯƠNG V

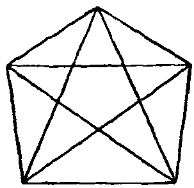
HÌNH HỌC KHÔNG CÓ THƯỚC KẺ

5.1. Bài toán bảy -chiếc cầu

Đa số bạn đọc chắc đã gặp bài toán; vẽ một hình cho trước (cái nhà, dáng người, vật trang sức) bằng một nét, sao cho mỗi đường chỉ đi qua một lần. Tất nhiên hình mà



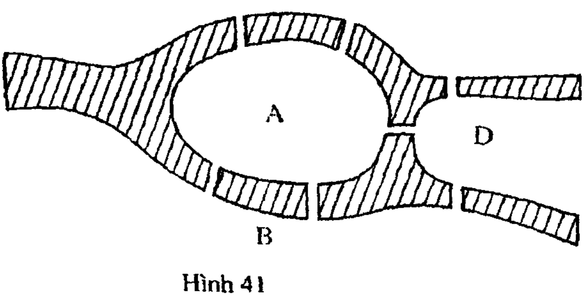
Hình 40



Hình 39

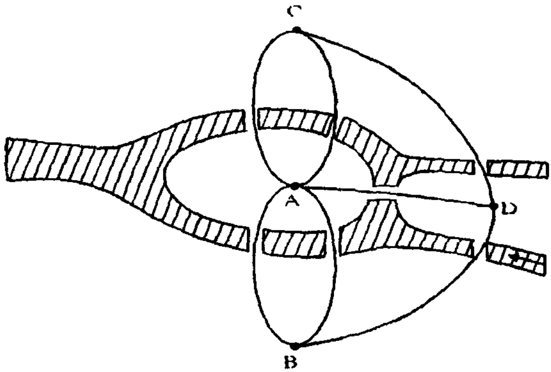
chúng ta vẽ phải là một hình "liên thông". giữa mỗi hai điểm của hình phải có thể có một đường nối. Ví dụ 4 đoạn thẳng tạo nên chu vi của một tứ giác biểu diễn một hình liên thông; trong khi đó, 2 đường tròn đồng tâm không cho một hình liên thông, chương này chỉ làm việc với những hình liên thông , ví dụ như các hình vẽ 39, 40. Nếu ta thử vẽ một ngũ giác kể cả các đường chéo bằng nhau một nét thì thấy không có khó khăn. Nhưng một hình vuong tưởng chừng "đơn giản" cùng với hai đường chéo (hình 40) không thể vẽ bằng một nét được. Vậy thì, cái gì là cơ bản cho vấn đề này. Trước khi trả lời câu hỏi ấy, chúng ta lướt qua lịch sử. Bài toán vẽ hình bằng một nét có chừng 250 năm nay. Đã không có một ai thành công như Leonhard Euler danh tiếng, người mà từ năm 1736 đã bận rộn với "những hình trên một nét". Trong một công trình của ông " bài toán bẩy chiếc cầu của thành phố Konisberg" (nay là Kaliningrad) nổi lên thành bài toán nổi tiếng.

Vào thời Euler một khúc sông đào ở Konigsberg một hòn đảo. Người ta có thể đến đảo trên 7 chiếc cầu như hình vẽ 41. Dòng chảy được chỉ qua mũi tên, hòn đảo ký hiệu bằng chữ cái A, bờ trái bằng chữ B, bờ phải bằng chữ C và vùng đất giữa hai nhánh sông (ở bên phải trong hình vẽ) bằng chữ D. Ngày nay khó có thể nói được, ai là người đầu tiên đặt câu hỏi: người ta có thể dạo bước qua tất cả 7 chiếc cầu mà không bỏ sót cầu nào và cũng không có cầu nào đi qua quá một lần.

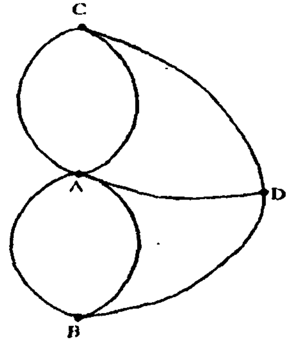


Hình 41

Hình 43



Hình 42



Hình 43

Có lẽ, một trong những người anh em nghiện rượu vui tính, những người thường qua các chiếc cầu này để về nhà vào đêm hôm khuya khoắt, đã là tác giả của bài toán này. Nhiều người đã thử giải bài toán này nhưng không một người nào đạt kết quả. Euler cũng đã nghe bài toán này, và trong chốc lát, từ một chuyện vui đùa của các bạn rượu Konigsberg đã trở thành một Chúng ta thấy những sự kiện bên lề của bài toán để có thể tìm được dễ dàng hơn câu trả lời. Thay cho một vùng đất A.B,C,D ta chọn trong mặt phẳng một điểm (bằng cách ký hiệu ngay chữ cái đã gặp. Vì từ hòn đảo A tới bờ B có 2 chiếc cầu, ta nối 2 điểm A và B bằng 2 cung. Cũng như vậy, từ đảo A tới bờ C có 2 chiếc cầu ta nối 2 điểm A và C bằng 2 cung. Một chiếc cầu nối vùng đất A với đảo A, ta nối A,D chỉ bằng một cung. Như đã thấy, giữa hai bờ B và C không có cung nào nối B và C. Nếu ta cũng thực hiện một cấu trúc như thế cho các cặp còn lại BD và CD thì ta nhận được kết quả nhìn rõ qua đường đen trong hình 42. Nếu có thể đi qua tất cả 7 chiếc cầu như bài toán yêu cầu thì người ta nhất định vẽ được hình 42 bằng một nét (tất nhiên trừ các nhánh sông và các cầu).

Để chú ý đến phần cung vẽ đen trong hình 42, chúng ta vẽ riêng nó trong hình 43. Ta thấy rằng, hình 43 không thể vẽ bằng một nét. Trong một báo cáo khoa học đọc ở viện hàn lâm khoa học Petersburg năm 1736 Euler đã chứng minh rằng, bài toán bảy chiếc cầu không giải được người ta không thể đi qua từng chiếc cầu trong 7 chiếc cầu đó như bài toán yêu cầu. Hơn nữa, Euler đã trình bày công trình của mình một định lý, mà theo định lý này, người ta có thể khẳng định ngay rằng, một hình có thể vẽ được bằng một nét hay không. Chúng tôi muốn giới thiệu chi tiết định lý này. Trong các hình 39, 40 và 43 hãy chú ý đến những điểm mà có ít nhất là 3 đường từ đó đi ra. Trong hình 39, những điểm đó là các đỉnh của ngũ giác và các giao điểm của các đường chéo (tất cả 10 điểm). Chúng ta gọi những điểm này là điểm nút của hình. Chúng ta cũng gọi những điểm mà từ đó một đường thẳng ra, là điểm nút. Vậy thì, điểm nút, ví dụ như, mút của một đoạn thẳng. Số đường đi ra từ một điểm nút ở trên hình gọi là cấp của điểm nút [1]. Ví dụ, ở hình 39 có 10 điểm nút đều có cấp 4.

Bây giờ ta có thể phát biểu định lý về vẽ hình bằng một nét: điều kiện cần và đủ để một hình liên thông vẽ được bằng một nét là, hình này có đúng 2 điểm nút cấp lẻ hoặc không có điểm nút cấp lẻ nào. Trong trường hợp thứ nhất, nét vẽ bắt đầu lại một trong hai điểm nút cấp lẻ và kết thúc tại điểm nút kia. Vậy thì, đó là lý do vì sao, bài toán 7 chiếc cầu ở Konigberg không giải được. Nếu ta nhìn kỹ phần vẽ nét đen trong hình 42 thì sẽ phát hiện 4 điểm nút cấp lẻ.

Bạn đọc chăm chú sẽ nhận xét rằng, đối với bài toán vẽ hình bằng một nét thì các đường (cung) ta vẽ thẳng hay cong, dài hay ngắn là hoàn toàn không cơ bản. Nếu ví dụ như trong hình 39 ta thay các đoạn thẳng bằng các cung cong thì cũng không làm thay đổi tính chất được nghiên cứu. Ta có thể lại vẽ được hình 39 biến dạng bằng một nét được. Bài toán này thuộc một ngành toán học, được phát triển đặc biệt trong hàng chục năm gần đây, có tên gọi là *Topo*. Topo (tên gọi cũ là analysis situs) nghiên cứu những tính chất của cấu hình hình học hoàn toàn khác với những

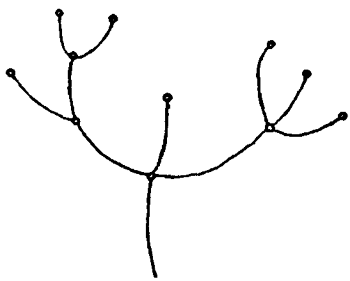
---

[1] ở đây chúng ta giới hạn những hình có một số hữu hạn điểm nút và có thể tạo nên được qua một số hữu hạn đường

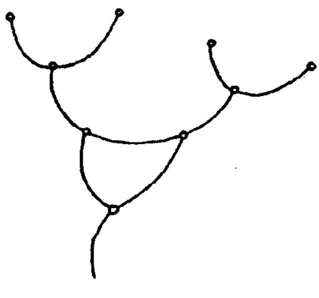
tính chất mà bạn đọc đã quen thuộc ở trường phổ thông. Ta có thể đặc trưng ngắn gọn là "hình học không có thước kẻ".

5.2. Cây là cái gì?

Bây giờ chúng ta giành sự chú ý đặc biệt cho những hình đơn giản được gọi là cây. Chọn tên này rất hợp lý, bởi vì một hình như thế tương tự hình vẽ phác của một cây, mà hình vẽ phác này do một em bé con vẽ . Gọi là "cây", một hình liên thông, mà tính liên thông bị mất nếu ta "cắt" một trong những "cành"của nó . Ví dụ như, hình 44 biểu diễn một cây; hình 45 không phải là cây. Vì ta làm "đứt" một cành như hình 46 cho thấy thì hình này trở lại là một hình liên thông.



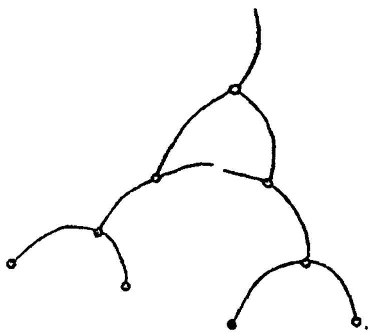
Hình



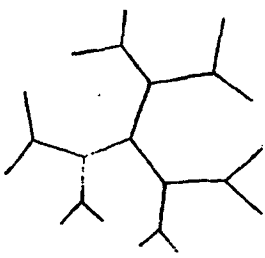
Hình

Người ta cũng xem là cây (từ quan điểm toán học), những hình nói chung là không giống hoặc giống rất ít một cây theo khái niệm thực vật học. Ví dụ như những cây ta nhìn thấy trong hình 47a, 47b.

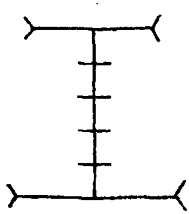
Cây của hình 44 có 12 điểm nút và 11 cành (mỗi cành nối 2 điểm nút), như vậy số điểm nút nhiều hơn số cành là một . Tương tự, số điểm nút trong các hình 47a và 47b nhiều hơn số cành là một (22=21+1 và 26=25+1)



Hình 46



Hình 47a



Hình 47b

Có thể chứng minh định lý sau bằng qui nạp toán học: Đối với mỗi cây thì số điểm nút nhiều hơn số cành là một. Ngược lại, nếu trên một hình liên thông mà số điểm nút nhiều hơn 1 so với số cành thì hình đó là một cây.

Một điều thú vị là, trong quá khứ vừa mới đây, vô số nhà toán học đã bận rộn với sự nghiên cứu về cây . Ta phải nói thêm ngay rằng, đó là việc làm rất nghiêm túc và có những cơ sở quan trọng cho thực tế, những cơ sở dẫn tới sự nghiên cứu này. Năm 1847 G. Kirchhoff đã dẫn tới việc xem xét về cây khi ông nghiên cứu những khả năng phân nhánh dòng điện và sau đó khá lâu (nửa sau thế kỷ 19) A. Cayley đã viết nhiều bài báo nghiên cứu vận dụng khái niệm này vào hoá hữu cơ. Chúng ta xem xét chi tiết các vấn đề này.

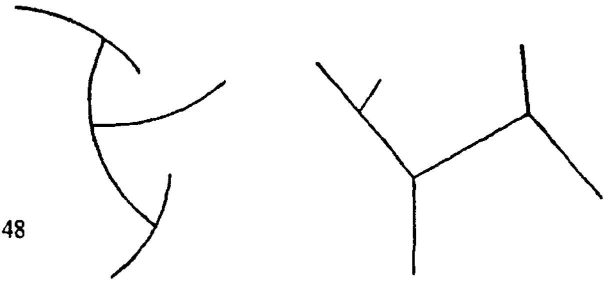
Từ ở trường phổ thông chúng ta biết, phân tử của chất hữu cơ có thể được biểu diễn bằng công thức thực nghiệm hoặc bằng công thức cấu tạo. Ví dụ như, công thức thực nghiệm của parafin C_nH_{2n-2}, trong đó C là nguyên tử cacbon, H là nguyên tử hydrô và n là một số tự nhiên bất kỳ. Vậy thì, ta nhận được đối với n=1, 2, 3... theo thứ tự là méthan CH_4, ethan C_2H_6, propan C_5H_8 v.v... Ta có thể đưa việc tìm công thức cấu tạo đã gặp quay về bài toán, cấu tạo một hình liên thông mà điểm nút là nguyên tử của cacbon, của hydrô và các cung là "gạch hoá trị:. Ví dụ như, công thức cấu tạo của methan

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H & & \\
 & & | & & \\
H & - & C & - & H \\
 & & | & & \\
 & & H & &
\end{array}
$$

Dễ dàng chỉ ra rằng, công thức cấu tạo của mỗi một paafin biểu diễn một cây:

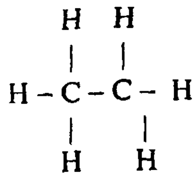
Số điểm nút hình được cấu tạo là n+(2n+2)=3n+2. Hơn nữa, ta biết rằng , các bon C có hoá trị 4, hydrô H có hoá trị 1. Số 4n+1.(2n+2) là gấp đôi số cung (2mút của mỗi cung là 2 điểm nút). Vậy thì số cung thực số là $\frac{1}{2}(6n-2)=3n-1$. Số điểm nút lớn hơn số cung và điều kiện đối với một cây được thoả. Nhà toán học quan tâm về vấn đề, có thể cho ứng với dạng C_nH_{2n+2} (n là số cho trước) bao nhiêu cây "khác nhau". Việc giải thích cái mà ta hiểu "những cây khác nhau" gây nên những khó khăn nhất định . Ở đây, chúng ta cần bằng lòng với việc minh hoạ thay cho định nghĩa toán học chính xác. Minh hoạ này làm hiểu rất tốt (ít nhất là cho mục đích của sự suy nghĩ của chúng ta) khái niệm . Chúng ta hình dung mô hình cây sau đây: Điểm nút của cây là vòng kim loại nhỏ, các nhánh được biểu thị qua những dây cao su nối mỗi hai vòng lại. Để phù hợp với mục đích của chúng ta là quan sát hai mô hình về "sự bằng nhau", ta chuyển các mô hình vào nhau bằng cách kéo cang một số dây nối cao su, trong đó không có dây nối bị đứt và không được có liên kết khác, cũng như không được thêm vào những vòng kim loại mới (điểm nút của cây). Hai mô hình cây không bằng nhau thì gọi là khác nhau. Đề nghị bạn đọc suy nghĩ về hai cây biểu diễn trong hình 48 bằng nhau.

Chúng ta quay lại công thức C_nH_{2n+2} và câu hỏi, có bao nhiêu cây tương ứng nó. Chúng ta nghiên cứu những ví dụ về công thức cấu tạo, trong đó n là số bé.

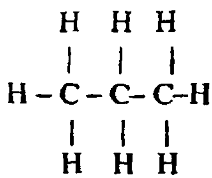


Hình 48

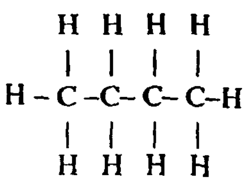
Ba thành phần đầu tiên của dãy parafin (n=1,2,3) chỉ ở trong một dạng duy nhất đã biết. Ta biết chỉ một methan duy nhất CH_4 một methan duy nhất C_3H_8. Với thành phần C_4H_{10} ta gặp một hiện tượng mà trong hoá học gọi là đồng phân: có hai butan đều có công thức thực nghiệm C_4H_{10} nhưng lại khác nhau qua tính chất hoá học và công thức cấu tạo (butan thường và butan đồng đẳng). Đối với những thành phần tiếp tục của chuỗi paafin các quan hệ còn phức tạphơn. Những sự kiện này, làm nhớ lại những giờ hoá học, trùng với lý thuyết của cây chúng ta. Dạng cấu tạo đối với methan CH_4 chúng ta đã đưa ra và dễ dàng tìm ra rằng, không thể cho một dạng khác đối với CH_4. ứng với ethan C_2H_6 là một công thức cấu tạo duy nhất

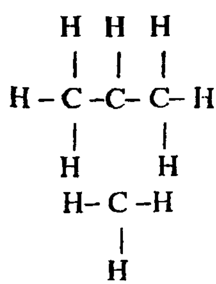


Đối với propan C_3H_8 ta tìm ra tính duy nhất của công thức cấu tạo



Nhưng công thức của butan C_4H_{10} có thể được biểu diễn bởi 2 cây khác nhau:





Có thể chứng minh rằng, ngoài 2 trật tự đã đưa ra của công thức C_4H_{10} thì không còn một cây nào khác. Trong suy nghĩ của mình, chúng ta xuất phát từ một trò chơi toán học và dẫn đến một ngành toán học rất ích lợi đối với thực tế.

Chúng ta đã khẳng định rằng, có thể xác định số lớn nhất của công thức cấu tạo của một chất hữu cơ qua suy nghĩ hình học. Một câu hỏi là: những liên kết được "tiên đoán" có tồn tại thực sự trong tự nhiên hoặc ít nhất là chúng có thể được chế tạo ra trong phòng thí nghiệm bởi các nhà hoá học hay không.

Xuất phát từ quan điểm này, dẫn xuất parafin là rượu $C_nH_{2n+1}OH$ mà công thức cấu tạo lại có dạng cây, có một lịch sử thú vị. Ví dụ như, tương ứng với công thức CH_3OH là cây

$$\begin{array}{ccccc} & & OH & & \\ & & | & & \\ H & - & C & - & H \\ & & | & & \\ & & H & & \end{array}$$

Năm 1874 Cayley dựa vào tư duy toán đã biết rằng, về lý thuyết người ta có thể hình dung 8 dẫn xuất của pentan, pentanol với công thức thực nghiệm $C_5H_{11}OH$. Nhưng trong thời của ông, chỉ có hai chất trong số đó được biết. Năm 1901, nhà toán học Đức W.Ahrens, tác giả của một tập sách rất phong phú về toán học giải trí, đã bình luận về tiên đoán của Cayley. Ông nói: "Trong số 8 liên kết có thể có về mặt lý thuyết thì 7 đã được biết". Nhưng mà, các sách giáo khoa mới về hoá hữu cơ đã đưa ra danh mục của tất cả 8 pentanol. Đó là một ví dụ có sức thuyết phục về sự hợp tác giữa hoá học và toán học.

BÀI TẬP

5.1. Bạn hãy vẽ một hình chữ nhật ABCD và đường chéo AC trong hình đó. Có thể vẽ hình này bằng một nét được không?

5.2. Bạn hãy vẽ 2 vòng tròn đồng tâm. Trong vòng tròn lớn dựng 2 đường kính vuông góc nhau. Có thể vẽ hình này bằng một nét được không?

5.3. Hãy vẽ một hình lục giác đều cùng tất cả các đường chéo của nó. Có thể vẽ hình này bằng một nét được không?

5.4 n-giác đều nào ($n>6$) cùng với tất cả đường chéo của nó có thể vẽ được bằng một nét và cái nào không vẽ được?

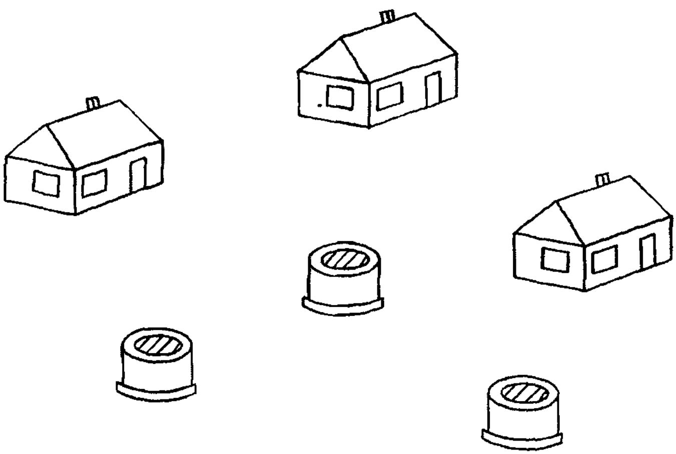
5.5* Trong một hình cho trước số điểm nút cấp lẻ luôn luôn bằng một số chẵn. Bạn hãy nêu lý do vì sao có trường hợp này?

5.6 Như ta đã biết, một hình vuông cùng với 2 đường chéo của nó nhìn thấy ở hình 40 là không thể vẽ được bằng một nét. Hãy tìm số ít nhất các nét vẽ để có thể vẽ được hình này

5.7. Hãy tìm số ít nhất các nét vẽ có để có thể vẽ được hình của bài toán 5.2

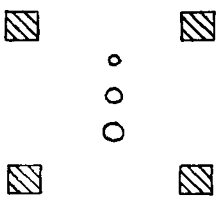
5.8. Có bao nhiêu công thức cấu tạo tương ứng với pentan C_5H_{12}?

5.9. Hình 49 biểu diễn sơ đồ gồm có cái nhà và 3 giếng nước. Những người cư trú ở đây đã đi những con đường không cắt nhau để đến các giếng sao cho mỗi nhà có liên hệ với cả 3 giếng này. Hãy chứng minh rằng, không thể xây dựng tối đa là 8 con đường nếu chúng không cắt nhau. Hãy vẽ 8 con đường đó.

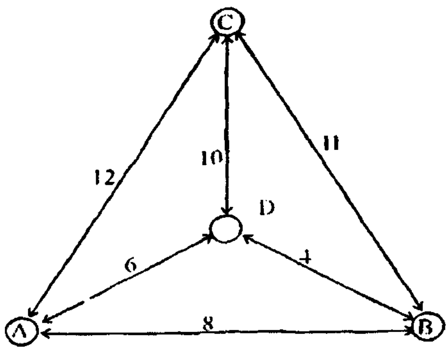


Hình 49

5.10. Trong một trại gạch có 3 trung tâm sản xuất và bốn kho. Một con đường nhỏ dẫn từ mỗi trung tâm (trong hình 50 vẽ một vòng tròn) đến nỗi mỗi kho (trong hình 50 vẽ một hình vuông). Nếu hai đường gặp nhau tại 1 điểm xác định thì sẽ dẫn tới khó khăn kỹ thuật, dẫn qua ngã tư này còn một đường nữa. Với những giả thiết này, cần chỉ ra số tối thiểu các ngã tư trong sơ đồ để chỉ dẫn. Chứng minh rằng, xuất hiện ít nhất là 2 ngã tư; đề nghị một sơ đồ thẳng phù hợp với 2 ngã tư này.



Hình 50



Hình 51

5.11. Hình 51 vẽ phác 4 làng A,B,C,D trong đó cho cả khoảng cách của các làng này (bằng kilômét). Tất cả 4 làng này được nối vào lưới điện, sao cho cứ mỗi 2 làng được nối trực tiếp hoặc qua một làng còn lại và có độ dài tổng cộng của lưới có thể nhỏ nhất. Hãy thiết kế đường dây dẫn này.

5.12. Cho 3 thùng. Thùng thứ nhất chứa 8 lít và đựng đầy nước cho đến mép. Thùng thứ hai chứa 5 lít và thùng thứ 3 chứa 3 lít. Thùng thứ hai và thứ 3 là thùng rỗng. Hãy đổ thùng thứ nhất sang thùng thứ hai sao cho mỗi thùng đều chứa 4 lít. Ta phải làm như thế nào nếu không có chai lít?

CHƯƠNG VI

NGHỊCH LÝ VÀ CÂU ĐỐ TOÁN HỌC

6.1. Vắt óc trong một quán ăn

Nhiều câu đố, về hình thức, dường như là những vấn đề toán học nhưng thực sự chỉ là những "cái bẫy" đối với những bạn đọc không chú ý. Chúng tôi xin dẫn ra ở đây một ví dụ đã quen biết dưới những dị bản khác nhau: Tuy vậy, đôi khi kể cả người giải đố có kinh nghiệm cũng không giải thích được "vấn đề"

Trong quán ăn, hai người bạn thanh toán:

Chủ quán đã tính cho họ 50 đồng. Nhưng sau khi khách hàng đã đi khỏi mới khẳng định rằng, họ chỉ phải trả 45 đồng. Để sửa sai, chủ quán đã cho người học việc mang trả lại cho khách 5 đồng. Cả hai người bạn rất bằng lòng về sự quan tâm của chủ quán thưởng cho người học việc 1 đồng làm tiền uống nước và chia nhau 4 đồng còn lại. Như thế mỗi người trong 2 người bạn đã trả lúc đầu hai lăm đồng. Nhưng sau đó nhận lại 2 đồng nên chỉ phải trả là 23 đồng. Vậy thì cả 2 bạn cùng trả 46 đồng. Vì cho người học việc 1 đồng nên phải chi là 46 đồng + 1đồng=47đồng. Vậy 3 đồng kia ở đâu?

Bài khoá của câu đố được trình bày hấp dẫn, nhiều người lầm lẫn và uổng công suy nghĩ về cái gì gây ra việc trả tiền sai. Có thể nói ngay rằng, câu chuyện trên đưa vào làm chuyện kế toán hơn là đưa vào làm chuyện vui toán học như ta sẽ thấy ngay sau đây.

Chúng ta lập một "danh sách tiền lương", từ danh sách này nhìn thấy rõ hơn "hoạt động *lưu thông tiền tệ*" được mô tả đã xảy ra như thế nào. Bên cạnh đó, cần chú ý, trên mỗi hàng của "danh sách" thì tổng của "phần thu" và tổng của "phần chi" phải bằng nhau. Mỗi hàng biểu diễn một hoạt động lưu thông và hàng cuối cùng là kế toán.

Bảng IV

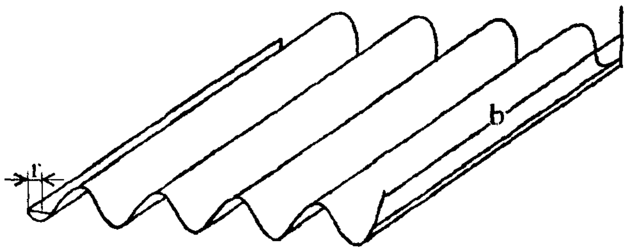
Người bạn 1		Người bạn 2		Chủ quán		Người học việc	
Thu	Chi	Thu	Chi	Thu	Chi	Thu	Chi
-	25	-	25	50	-	-	-
-	-	-	-	-	5	5	-
2,50	-	2,50	-	-	-	-	5
-	0,50	-	0,50	-	-	1	-
-	23	-	23	45	-	1	-

Bài khoá của câu đố đã đánh lừa chúng ta bằng cách tính gộp phần chi của 2 bạn với phần thu của người học việc và so sánh tổng này với 5 đồng lúc ban đầu. Phần thu của người học việc cũng như phần thu của người chủ quán phải ở trong số tiền chi của 2 bạn.

6.2. Tấm lượn sóng-thế này hoặc thế này

Bản cắt ngang của tấm lượn sóng nhìn thấy ở hình 52 tạo nên một đường sóng. Đường sóng này gồm những nửa đường tròn bằng nhau bán kính r (đo bằng cm). Các tấm này được chia thành 2 loại: một loại có nửa vòng tròn bán kính r_1=2cm, loại kia có nửa vòng tròn bán kính r_2=1cm. Cả hai loại tấm có cùng bề rộng (trong hình 52 ký hiệu bằng chữ b). Hãy xác định loại nào tiêu thụ vật liệu nhiều

Hình 52



hơn?

Ta kiểm tra tiêu thụ vật liệu bằng cách tính xem cần bao nhiêu mét tấm phẳng cùng bề rộng như tấm lượn sóng (trong cả hai trường hợp) để sản xuất tấm lượn sóng cùng độ dài (ví dụ như 100cm).

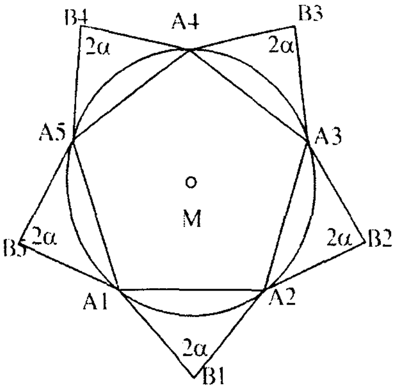
Trên 100cm chiều dài có $\frac{100}{2r_1}$ nửa vòng tròn bán kính r_1 và $\frac{100}{2r_2}$ nửa vòng tròn bán kính r_2. Mỗi một nửa vòng tròn có bán kính r_1 hay r_2 nên độ dài tổng cộng của vật liệu phẳng $\frac{100}{2r_1}\pi r_1$ hay $\frac{100}{2r_2}\pi r_2$. Ta thấy rằng, các đại lượng r_1, r_2 bị vứt bỏ trong tính toán. Kết quả nhận được là $50\pi \approx 157$. Kết quả này độc lập với các bán kính r_1, r_2.

Để sản xuất 100cm tấm lượn sóng cần khoảng 157cm tấm phẳng trong cả hai trường hợp. Tiêu thụ vật liệu cho cả hai loại là bằng nhau.

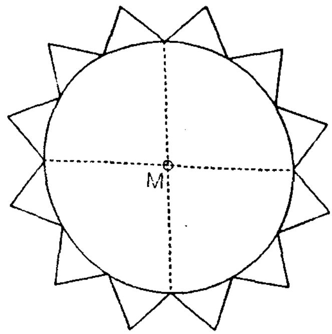
6.3. Bánh xe răng(cưa)

Chúng tôi muốn giới thiệu một tính chất rất thú vị của bánh xe răng (cưa). Nhưng, trước hết chúng tôi xin mô tả bánh xe răng (cưa) theo nghĩa chúng ta phải có. (Tôi xin lưu ý rằng, chương này dành cho bạn đọc nắm chắc tính toán với các hàm lượng giác).

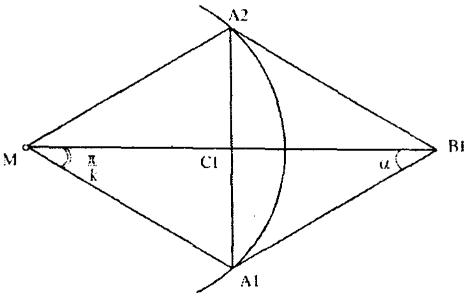
Trong một mặt phẳng cho một vòng tròn (phụ trợ) tâm M, bán kính r. Nội tiệp trong vòng tròn một k-giác đều $A_1A_2...A_k$. Lấy mỗi cạnh $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3} ... \overline{A_{k-1}A_k}$, $\overline{A_kA_1}$ làm cơ sở ta dựng một tam giác đều "về phía ngoài" với góc là 2α, đỉnh chính B_1, $B_2...B_k$. Các đều A_1B_1 A_2B_2 $A_3B_3...$ A_kB_k thuộc một đa giác xác định, không lồi. Đa giác này gần với dạng của một bánh răng (cưa) và ký hiệu đa giác đó là V_k (Đa giác dựng trong hình 53a, với $\alpha=40^0$ là đa giác V_5 và hình 53b với $\alpha=40^0$ là đa giác V_{12})



Hình 53a



Hình 53b



Hình 54

Để có thể tính diện tích và chu vi của cấu hình V_k ta cần xác định các độ dài $\overline{MB_1}$, $\overline{AB_1}$. Hình 54 làm rõ một phần của đa giác V_k, trong đó C_1 là chân đường cao qua M của tam giác MA_1A_2. Góc ở tâm A_1MA_2 tương ứng với phần thứ k của góc đầy. Ta biểu diễn độ lớn góc theo đo cung góc đầy là 2π và độ lớn của góc A_1MA_2 là $\frac{2\pi}{k}$. Vậy

$A_1MC_1=\frac{\pi}{k}$, tức là $\overline{C_1A_1}=\sin\frac{\pi}{k}$, $\overline{MC_1}=\cos\frac{\pi}{k}$. Từ tam giác đều $A_1C_1B_1$ ta tính

$$\overline{A_1B_1} = \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\sin\alpha}, \overline{B_1C_1} = \sin\frac{\pi}{k}.\cot g\alpha$$

Diện tích của tam giác A_1MA_2 là $\sin\frac{\pi}{k}.\cos\frac{\pi}{k}$ diện tích của tam giác $A_1B_1A_2$ là $\sin^2\frac{\pi}{k}.\cot g\alpha$. Từ đó, diện tích của đa giác V_k:

$$k(\sin\frac{\pi}{k}.\cos\frac{\pi}{k} + \sin^2\frac{\pi}{k}.\cot g\alpha) =$$

$$k\sin\frac{\pi}{k}.\cos\frac{\pi}{k}.(1 + \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\cos\frac{\pi}{4}}.\cot g\alpha) =$$

$$\frac{1}{2}k.\sin\frac{2\pi}{k}.(1 + tg\frac{\pi}{k}.\cot g\alpha) =$$

$$\pi\frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{k}}(1 + tg\frac{\pi}{k}\cot g\alpha)$$

Ta dự đoán rằng, khi tăng k thì diện này xích gần lại diện tích của vòng tròn đơn vị, tức là xích gần lại số π. Các răng của bánh răng như thế sẽ (cùng với tăng k) ngày càng nhỏ đi và toàn bộ bánh xe răng "gần giống" một vòng tròn. Sự "tương tự" này có thực như toán học cao cấp đã chứng minh nhờ khái niệm giới hạn. Chúng tôi không trình bày ở đây một sự chứng minh toán học chính xác, chúng ta hài lòngvới cách giải gần đúng.

Ta nhớ lại từ ở phổ thông, với một góc rất bé thì $\sin\alpha = \text{arc}\alpha$ [1] và do đó $(\sin\alpha/\text{arc}\alpha)=1$ vậy với k đủ lớn, số $\left(\sin\frac{2\pi}{k}\right):\frac{2\pi}{k}$ trong biểu thức diện tích của cấu hình V_k, "gần bằng" 1. Với k như thế, $\frac{\pi}{k}$ rất bé, $tg\frac{\pi}{k}$ gần bằng 0. Đến đây, dễ dàng nhận thấy, dự đoán của ta hoàn toàn có lý, diện tích của cấu hình V_k xấp xỉ số π.

Bây giờ ta tính chu vi của đa giác V_k. Về chu vi này, ta có:

$$2k.\overline{A_1B_1} = 2k.\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\alpha}$$

Ta có cảm tưởng rằng k tăng thì chu vi này gần đến chu vi của vòng tròn đơn vị, tức là gần đến số 2π. Để có kết luận, có thể, hoặc là đi theo cách tư duy ở trên hoặc là dùng khoảng cách

$$\overline{MB_1} = \cos\frac{\pi}{k} + \sin\frac{\pi}{k}.\cot g\alpha$$

[1] Theo bản tính 4 chữ số thập phân thì, ví dụ, sin0°10'=arc0°10'=0,0029; sin0°20'=arc0°20'=0,0058; sin0°30'=arc0°30'=0,0087 v.v...

Khi k tăng thì $\overline{MB_1}$ sẽ "dẫn tới" số 1. Nhưng, giả thử rằng kết luận này sai. Vậy thì cần phải chứng minh, các chu vi của các cấu hình V_k "gần" với số $\frac{2\pi}{\sin\alpha}$

Ta có thể viết con số biểu diễn chu vi của cấu hình V_k ở dạng

$$\frac{2\pi}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}}$$

trong đó, phân số $\left(\sin\frac{\pi}{k}\right) : \frac{\pi}{k}$ "dẫn tới" số 1 như đã biết. Toàn bộ con số "gần" với số $\frac{2\pi}{\sin\alpha}$.

Với mỗi số L lớn hơn 2π, ta có thể tìm được góc nhọn α bằng cách cho các chu vi của đa giác V_3, V_4, V_5..."dẫn tới" số L (mặc dù diện tích của các đa giác này dần tới diện tích vòng tròn đơn vị). Chúng tôi muốn giải thích kết quả này bằng một thí dụ tính toán.

Ta hãy chọn một vòng tròn đơn vị, bán kính 1m; sau đó hãy xác định một góc α sao cho, nếu ta đi vòng quanh cấu hình V_k (với một số "đủ lớn" các đỉnh) thì cũng gần bằng con đường mà ta đã đi, ví dụ như từ Praha đến Bratislava (396km). Tất cả độ dài đó được tính ra thành mét (m).

Ta đi đến giải phương trình $\frac{2\pi}{\sin\alpha} = 396000$ hoặc:

$$\sin\alpha = \frac{\pi}{198.10^3}$$

Giá trị sin ở đây rất bé, vì thế nói chung không thể sử dụng bảng tính các hàm lượng giác được. Nhưng như đã biết, ta có thể tính gần đúng sinα=arcα và nhận được

$$\text{arc}\alpha = \frac{\pi}{198.10^3}$$

Với α (theo độ) ta có $\frac{\pi}{198.10^3}.\frac{180^0}{\pi} = \frac{1^0}{1100}$;

tính ra giây là $\frac{3600''}{1100}$ hoặc khoảng cách chừng $3\frac{1}{4}$ giây.

Nếu với góc này ta xây dựng một đa giác V_k với k đủ lớn, thì chu vi của đa giác dài gần bằng con đường từ Praha đến Bartislava. Ví dụ như, với k=20 thì chu vi này là

$$\frac{2.20.\sin 9^0}{\sin\alpha} = 40.0{,}1564 : \frac{\pi}{198.10^3} \approx 394000$$

số này khá gần với khoảng cách Praha- Bratislava. Cuối cùng, cần chú ý, những vấn đề mà chúng ta đã giải quyết ở đây trong mặt phẳng cũng có thể được nghiên cứu một cách tương tự ở trong không gian. Ta xuất phát từ việc thay một vòng tròn bằng một trụ thẳng đứng như nhà toán học Đức G.A.Schwarz đã giải quyết vào gần cuối thế kỷ trước. Các tính toán gặp tất nhiên khó khăn hơn những ví dụ trong mặt phẳng mà chúng ta đã đưa ra.

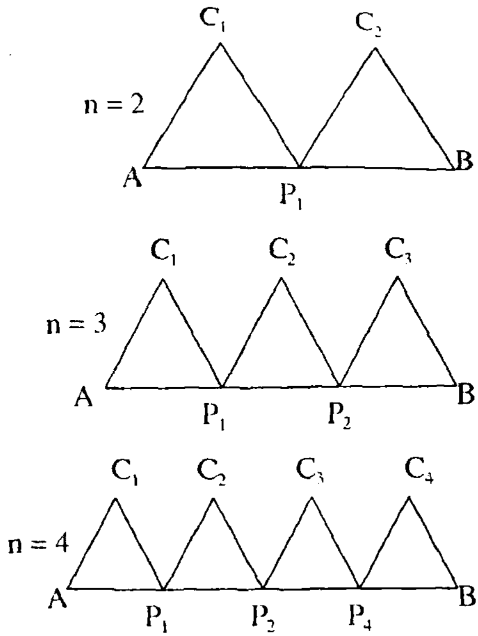
BÀI TẬP

6.1. Để đơn giản ta tưởng tượng quả đất như một hình cầu trơn, một dây cáp ngầm được đặt quanh xích đạo của nó. Dây kim loại này được đặt tiếp giáp với mặt đất và độ dài của nó bằng độ dài của xích đạo, tức là 40 000 km. Hãy đánh giá xem, người ta phải kéo dài dây dẫn này bao nhiêu mét, nếu muốn cách điện nó ở độ cao 10cm.

6.2. Cho đoạn thẳng $\overline{AB}$ chiều dài l. Chia đoạn này làm n phần bằng nhau $\overline{AP_1}, \overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, ... \overline{P_{n-1}B}$ và dựng các tam giác đều AP_1C_1, $P_1P_2C_2$, $P_2P_3C_3$, ...$P_{n-1}BC_n$ (hình 55). Hãy tính tổng chu vi các tam giác này. Tổng này phụ thuộc vào n như thế nào?

6.3. Tính tổng các diện tích của các tam giác đã được mô tả ở bài trước và khẳng định tổng này phụ thuộc vào n như thế nào?

6.4.* Trên mặt bàn hình vuông với các góc ABCD lượn một chiếc nơ. Hãy mô tả cung cong như thế nào nếu đối với trọng tâm S của nó không thay đổi hệ thức $\overline{AS}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{SD}^2$



Hình 55

6.5.Emin, Giôhan, Các và Rudôn đá bóng trên sân và đánh vỡ một cửa kính. Thẩm tra trường hợp này, các em khai như sau:

Emin: "Các hoặc Rudôn đánh vỡ cửa kính"

Giôhan: "Rudôn đánh vỡ"

Cac : "Em không đánh vỡ cửa kính"

Rudôn: "Em cũng không".

Thầy giáo của các em, biết rõ các em, nói: "Ba trong số các em luôn luôn nói sự thật". Vậy thì ai là người đánh vỡ cửa kính?

6.6. Con người có tối đa là 150.000 sợi tóc ở trên đầu. Hỏi rằng: có thể có hai người ở Praha cùng một số tóc hay không? (Praha có khoảng một triệu dân)

6.7.Trong một lớp có 40 học sinh. Có thể khẳng định mà không cần biết trước gì cả, rằng có ít nhất là 4 học sinh trong lớp đó cùng được sinh cùng một tháng hay không?

6..8. Một thiếu niên có 7 nút bấm dường như hoàn toàn bằng nhau, từng đôi có khối lượng khác nhau. Hãy chỉ ra rằng, người ta có thể tìm được nút bấm nặng nhất bằng một cái cân mà không có quả cân hay không? Có thể đạt được kết quả với 6 lần cân hay không?

6.9. Có 3 con xúc xắc dường như nhau đặt trên một chiếc bàn, trong đó có một con (sai) có khối lượng khác với hai con còn lại. Người ta không biết được nó nặng hơn hay nhẹ hơn 2 con kia. Người ta sử dụng một cái cân không có quả cân và được phép cân tối đa là hai lần. Hỏi có thể tìm được con xúc xắc sai hay không?

6.10. Có 7 con xúc xắc dườngnhư nhau đặt trên một chiếc bàn. Một xúc xắc (sai) trong số đó có khối lượng khác với các xúc xắc còn lại. Tương tự như bài toán 6.9, hãy tìm con xúc xắc sai với số lần cân là 3 lần.

6.11. Toán học cũng đã can thiệp vào văn học một cách đặc biệt như bài toán sau đây chỉ ra:

Nhà thơ của Sec [1] Jaroslav Vrchlicky đã đưa vào nền thơ ca của Sec hình thức thơ trữ tình của bài thơ thuộc xứ Pro-văng-xơ gọi là Sestine. Ở Đức, Sestine đã được vun trồng ngay từ thời đại barôc [2] và thế kỷ 19, phải kể đến trước hết là công lao của Friedrich Ruc ket. Sestine là bài thơ không vần trong 6 tiết thơ với 3 nhịp kèm. Mỗi tiết thơ có 6 câu thơ. Nếu ta ký hiệu các từ ở cuối câu trong tiết thứ nhất theo thứ tự 1,2,3,4,5,6 thì tiết thơ thứ hai ở cuối câu thơ cùng những từ đó nhưng theo thứ tự 6,1,5,2,4,3; tương tự người ta tìm thứ tự của các từ cuối cùng trong những tiết thơ tiếp theo. Vậy thì sơ đồ chung của một Sestine là:

1,2,3,4,5,6;	6,1,5,2,4,3;	3,6,4,1,2,5
5,3,2,6,1,4;	4,5,1,3,6,2;	2,4,6,5,3,1

Nếu ta vận dụng trở lại cách biến hoá như thế cho thứ tự 2,4,6,5,3,1 trong tiết thơ thứ 6 thì ta quay lại thứ tự ban đầu 1,2,3,4,5,6 (một tiết thơ thứ bảy không có trong một Sestine). Vấn đề đặt ra cho bạn đọc là: Hãy sắp xếp một "sơ đồ Sestine" 8 câu thơ (hay 10) trong một tiết thơ. "Sestine" như thế có bao nhiêu tiết thơ?

---

[1] Sec là một trong hai dân tộc của nước CHXHCN Tiệp Khắc. Hiện nay Tiệp Khắc gồm có 2 nước cộng hoà là Sec và Slôvac (ND)

[2] Barôc là nghệ thuật và kiến trúc cầu kỳ vào thế kỷ 17-18 (N.D)

CHƯƠNG VII

KHÔNG SỢ NHỮNG BÀI TOÁN BẰNG LỜI

7.1. Một bài toán không thích hợp là cái gì?

Một điều không có gì nghi ngờ là hoàn cảnh xung quanh đã biếu cho chúng ta một loạt sự thúc đẩy tới những vấn đề toán học. Xuất hiện những bài toán trong sách giáo khoa gọi là những bài toán bằng lời quan trọng và ít quan trọng, khó và dễ. Có một học thuyết về các bài toán này, trong đó, các bài toán được chia thành những nhóm (những kiểu), phần theo nội dung, phần theo cách giải. Với cách phân chia này chúng ta không bàn tiếp ở đây, nhưng cần chú ý rằng, về căn bản thì các bài toán bằng lời được tách thành hai nhóm.

Nhóm thứ nhất gồm những bài toán bằng lời có liên quan trực tiếp với các lĩnh vực kỹ thuật và khoa học, và liên quan với sản xuất và giao thông, tài liệu chính v.v... Những bài toán này được gọi là những bài toán với đặc điểm kỹ thuật tổng hợp. Trong nhóm thứ hai chúng ta tìm thấy tất cả những bài toán còn lại: những trò chơi khác nhau, như những lời khuyên lứa tuổi của những cá nhân xác định, của sự thứ tự, của một số đã được nghĩ đến dưới những điều kiện cho trước v.v... Trong chương này chúng ta làm việc với nhóm thứ nhất.

Mỗi bài toán gồm có những điều kiện và đặt câu hỏi. Điều kiện ta hiểu là cho biết số liệu và mô tả sự phụ thuộc lẫn nhau của các số liệu đó. Trong những bài toán với đặc điểm kỹ thuật tổng hợp người ta đòi hỏi rằng câu hỏi được trình bày gần với hiện thực và quá trình được mô tả là thực tế và có nghĩa.

Để làm ví dụ chúng tôi dẫn ra một bài toán mà đòi hỏi của nó không thực hiện được mặc dù bài toán tưởng chừng như được rút ra "từ thực tế".

Một bể nước dạng hình hộp cao và chứa được 100 hl được làm đầy bởi ống nước vào, trong $8\frac{3}{4}$ giờ. Ở đất có một ống nước ra, làm cạn bể trong 11 giờ. Khi nào thì bể đầy nếu ta mở đồng thời cả ống dẫn vào và ống dẫn ra?

Bài toán này có (với sự sai lệch nhỏ) trong tuyển tập toán học của thế kỷ trước và được giải thông thường như sau: Ta chia

$$100\text{hl} : 8\frac{3}{4}\text{h} = 100\text{hl} : \frac{35}{4}$$

$$= \frac{400\text{hl}}{35\text{h}} = \frac{80\text{hl}}{7\text{h}} = 11\frac{3}{7}\text{hl}/\text{h}$$

Tương tự, tính bao nhiêu nước chảy ra trong một giờ:

$$100hl : 11h = 9\frac{1}{11} hl/h$$

Vậy thì, lượng chảy vào còn lại trong bể trong 1 giờ là:

$$11\frac{3}{7} hl/h - 9\frac{1}{11} hl/n = 2\frac{26}{27} hl/h$$

Bể được làm đầy trong khoảng thời gian

$$100hl : 2\frac{26}{77} hl/h = 100hl : \frac{189}{77} hl/h$$

$$= \frac{7700h}{180} = \frac{385h}{9} = 42\frac{7}{9} h$$

Bài toán và lời giải có 2 thiếu sót có ý nghĩa (gần đây, nhà toán học người SlôVac Pavel Bartos đã chỉ ra các thiếu sót đó). Thứ nhất là hành động mà bài toán nói là không có ý nghĩa thực tế và thứ hai là kết quả mà bài toán đã tính hoàn toàn không xảy ra. Bể thực sự, trong những điều kiện bài toán đã nói, mở đồng thời cả ống dẫn vào và dẫn ra, không bao giờ đầy được. Khi giải bài toán người ta đã quên mất một kiến thức vật lý quan trọng: nước chảy ra khỏi bể càng nhanh nếu bể càng đầy (cái gọi là công thức Torrcelli, mô tả chính xác tốc độ chảy ra của một chất lỏng).Từ đó, kết quả cuối cùng bị ảnh hưởng về cơ bản [1].

---

[1] *Lời giải một cách toán học có chú ý đến công thức Torricelli rất phức tạp, vì thế, lời giải đó không đưa ra ở đây.*

Việc xác định sự liên quan giữa các dữ liệu cho trước, giữa câu hỏi và dữ liệu và sự quyết định những phương pháp tính toán nào dẫn tới câu trả lời cho vấn đề đặt ra, là các giai đoạn riêng lẻ mà việc khắc phục nó trong khi giải các bài toán bằng lời là khá phức tạp. Cái đó, phần lớn đòi hỏi sự chú ý, giác quan sắc bén và hiểu biết có phê phán toàn bộ chi tiết của bài toán. Chúng ta không thể "tìm hết" được những vấn đề xảy ra trong thực tế. Trong một số sách giáo khoa và tuyển tập bài tập nhiều khi những vấn đề này bị chia cắt ra, ta phải nhận ra ngay như việc giải bài toán này. Bài toán được rút ra từ thực tế càng khó thì việc giải nó, thông thường, càng quan trọng đối với kinh tế hoặc kỹ thuật. Vì vậy, nhiều cải tiến trong kỹ thuật và sản xuất đã thành công, vì một vấn đề toán học khó khăn đã có thể được giải quyết.

Những bài toán ở trong chương cuối này chứng minh những hiện tượng hàng ngày bao quanh chúng ta tạo cho việc đặt những bài toán nghiêm túc như thế nào.

7.2. Chúng ta đóng gói các hộp diêm.

Một hộp diêm có các cạnh a=17mm, b=37mm, c=52mm. Hãy thiết kế cách đóng gói các hộp diêm sao tiêu tốn giấy gói là ít nhất.

Một gói hộp diêm có dạng hình hộp. Mỗi bạn đọc đều đã từng có một gói các hộp diêm như thế nên cũng đã biết, các hộp diêm trong gói được sắp xếp như thế nào (từng đôi bao diêm gần nhau thì tiếp giáp bằng các mặt hộp tương ứng bằng nhau). Ta ký hiệu các cạnh của nó là A, B, C; trong đó xa- độ dài của cạnh A (tức là A=a.x), yb - độ dài của cạnh B (tức B=y.b) và zc - độ dài của cạnh C (tức C=c.z). Thể tích của cả gói là là ABC=abcxyz; vì ký hiệu abc là thể tích của một hộp, nên tích x.y.z là số hộp trong một gói. Vậy thì x.y.z=10. Vì x,y,z chỉ có thể là số nguyên, dương nên có 9 khả năng ghi một cách rõ ràng trong bảng sau:

Bảng V

x	1	1	10	1	1	2	3	5	5
y	1	12	1	2	5	1	5	1	2
z	10	1	1	5	2	5	1	2	1

Tiêu tốn giấy cho một gói được biểu thị qua diện tích toàn phần của hình hộp gồm 10 hộp diêm (không kể mép biện). Diện tích toàn phần của hình hộp là

2AB + 2AC + 2BC =2(abxy + ac +bcyz)

Vì diện tích toàn phần cần phải nhỏ nhất thì số

W= abxy +ac +bcxz phải nhỏ nhất.

Ta tính số W trong 9 trường hợp đã nêu ra.

Với x=1, y=1, z=10 thì

W= 17.37.1.1+17.52.1.10+37.52.1.10 =

= 620 + 8840 + 19240 =28709

Với x=1, y=10, z=1 thì

W= 17.37.1.10+17.52.1.1+37.52.10.1 =

= 6190 + 884 + 19240 =26414

Với x=10, y=1, z=1 thì

W= 17.37.10.1+17.52.10.1+37.52.1.1 =

= 6290 + 8840 + 1924 =17054

Với x=1, y=2, z=5 thì

W= 17.37.1.2+17.52.1.5+37.52.2.5 =

= 1258 + 4420 + 19240 =24918

Với x=1, y=5, z=2 thì

W= 17.37.1.5+17.52.1.2+37.52.5.2 =

= 3145 + 1768 + 19240 =24153

Với x=2, y=1, z=5 thì

W= 17.37.2.1+17.52.2.5+37.52.1.5 =

= 1258 + 8840 + 9620 =19718

Với x=2, y=5, z=1 thì

W= 17.37.2.5+17.52.2.1+37.52.5.1 =

$= 6290 + 1768 + 9620 = 17678$

Với x=5, y=1, z=2 thì

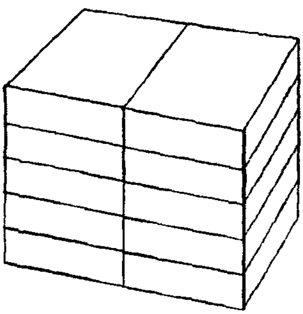
$W = 17.37.5.1 + 17.52.5.2 + 37.52.1.2 =$

$= 3145 + 8840 + 3848 = 15833$

Với x=5, y=2, z=1 thì

$W = 17.37.5.2 + 17.52.5.1 + 37.52.2.1 =$

$= 6290 + 4420 + 4848 = 14558$



Hình 56

Rõ ràng, kết quả W =14558, kết quả cuối cùng ta đã tìm ra, nhỏ hơn tất cả những kết quả trước đó. Vậy thì, bằng cách này ta đã tìm ra cách gói kinh tế nhất. Bạn đọc biết rõ rằng, diêm được bán cho chúng ta thực sự được đóng gói như hình 56 cho thấy. Ngoài ưu điểm tiêu thụ ít giấy, cách đóng gói này còn có một loại ưu điểm khác (bề mặt được khoá tương đối kín).

7.3. Chúng ta pha trộn các chất lỏng

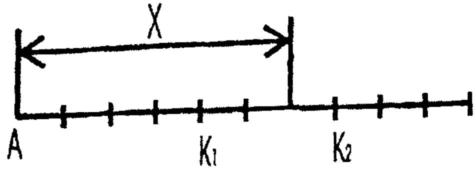
Trong vật lý học, hoá học và thực tế hàng ngày ta thường gặp bài toán, trộn các chất khác nhau theo khối lượng xác định, những qui tắc tính toán để giải những bài toán như thế đã được nghĩ ra, chúng xuất hiện đôi khi dưới tên ghép "phép tính hỗn hợp". Nhưng đối với người nghiên cứu thì tốt hơn là tự giải từng bài toán. Một qui tắc tính toán hoặc một chỉ dẫn tính toán, ta có thể quên hoặc làm mất một cách dễ dàng, trong khi đó, một bài toán mà ta đã một lần tự giải, sau một thời gian dài có thể giải lại được.

Chúng ta lấy ví dụ sau:

Như đã biết, rượu và nước trộn lẫn nhau theo một tỷ lệ bất kỳ. Ta sẽ nhận được rượu bao nhiêu phần trăm nếu như pha 300g rượu 40 phần trăm và 700g rượu 70 phần trăm?

Trước hết, ta hình dung, rượu bốn mươi phần trăm chứa 40% rượu nguyên chất và 60% nước. Vậy thì, dung dịch thứ nhất (300g) chứa 120g rượu nguyên chất và 180 g nước. Dung dịch thứ hai là 70 phần trăm, như vậy chứa 70% rượu nguyên chất và 30% nước. Trong 700g có chứa 490g rượu nguyên chất và 210g nước. Nếu ta trộn cả hai dung dịch rượu thì nhận được 300g+700g=1000g dung dịch, trong đó có chứa 120g+490g=610g rượu nguyên chất và 180g+210g=390g nước. Đó gọi là sự cấu tạo dung dịch biểu thị thành phần phần trăm. Vì 1% của 1000g là 10g nên 610g là 61% của khối lượng toàn bộ, do đó rượu pha trộn 61 phần trăm

Ví dụ được minh hoạ qua một biểu đồ thú vị (hình 57), ta chọn đoạn thẳng $\overline{AB}$ độ dài 1. Điểm A ký hiệu



Hình 57

nước nguyên chất, điểm B ký hiệu rượu nguyên chất. Ta biểu diễn dung dịch a% nước và b% rượu qua một điểm K xác định trên đoạn $\overline{AB}$ như sau: Tưởng tượng A như là một đối tượng rất nhỏ (gọi là "chất điểm") tượng trưng một khối lượng a đơn vị (ví dụ: Gam) và xem ở B một chất điểm với b đơn vị (Gam); sau đó tìm điểm K như là một chất điểm trung bình hoặc trong điểm (theo nghĩa vật lý của từ này) của một hệ hai chất điểm [1]. Có thể nói rằng, đoạn $\overline{AK}$ là phần khối lượng nước. Ngược lại, mỗi điểm K trên đoạn $\overline{AB}$ biểu diễn một dung dịch xác định của nước và rượu mà tỷ lệ dễ dàng đọc được từ biểu đồ. Nếu chẳng hạn, cần phải biểu diễn rượu 40 phần trăm (trường hợp thứ nhất của chúng ta) ta tìm trên đoạn $\overline{AB}$ điểm K_1 mà $\overline{KA_1}$ bằng 40% của độ lớn đoạn $\overline{AB}$. Rượu 70 phần trăm được biểu diễn trên cùng một hình qua K_2. Tổng quát, đoạn $\overline{AB}$ trong hình 57 được chia ra 10 phần mỗi phần có có nghĩa là 10%. Bây giờ ta hình dung K_1 là điểm khối lượng của 300g (khối lượng của dung dịch thứ nhất) và K_2 là điểm khối lượng của 700g khối lượng của dung dịch thứ hai). Trong vật lý học, ta đã học, một hệ như thế được thay bằng một điểm khối lượng duy nhất K của 300 +

[1] Trong vật lý ta hiểu cái gọi là chất điểm trung bình (trọng điểm) của 2 chất điểm A.B là điểm K trên đoạn $\overline{AB}$, mà tích của khoảng cách $\overline{KA}$ và khối lượng và của khối lượng a bằng tích của khoảng cách $\overline{KB}$ và của khối lượng B, vậy thì $\overline{KA}.a - \overline{KB}.b$

700=1000. Vị trí điểm K ở bên trong của đoạn $\overline{K_1K_2}$ ta tìm nó như vị trí của trọng điểm, có:

$$\overline{KK_1}.300 = \overline{KK_2}.700$$

Nếu $\overline{AK} = x$ thì $\overline{KK_1} = x - 0{,}4, \overline{KK_2} = 0{,}7 - x$

ta nhận được phương trình

(x-4):300 =(0,7-x).700

Từ đó 3(x-0,4) = 7(0,7-x)

3x-1,2 = 4,9-7x

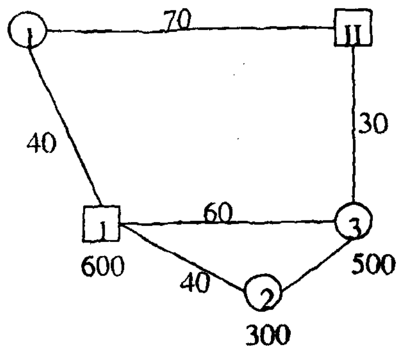
10x = 6,1 ⇒ x = 0,61 =61%

Bằng cách này chúng ta đã tính được sự cấu tạo của rượu xuất hiện qua pha trộn (so sánh dung dịch đã có trước). Có thể chứng minh, biểu đồ đã đưa ra có thể áp dụng cho hai dung dịch bất kỳ.

7.4. Bài toán vận tải

Các xí nghiệp vận tải của chúng ta đã giải quyết bài toán có tính chất trách nhiệm trong việc phân phối nguyên liệu, các hầm mỏ và những nơi khai thác khác cung cấp cho các nhà máy. Ta hình dung, trên một bản đồ có đánh dấu một số mỏ và một số nhà máy công nghiệp. Nhà máy nhận nguyên liệu (ví dụ than đá) từ các mỏ này. Số nguyên liệu được các nhà máy tiêu thụ nhiều như chúng được các mỏ sản xuất. Ta cần phải tổng hợp một kế hoạch phân phối, sau đó tổ chức sự phân phối nguyên liệu một cách kinh tế nhất. Để tiết kiệm nguyên liệu và phí vận chuyển thấp thì than không được vận chuyển vô ích đến những nơi tiêu thụ xa xăm.

Trong hình 58, 3 hầm mỏ được ký hiệu bằng vòng tròn, 2 nhà máy công nghiệp được ký hiệu bằng hình vuông. Các số bên cạnh vòng tròn là khối lượng khai thác tính theo tấn (cho một khoảng thời gian nhất định) và bên cạnh hình vuông là khối lượng tiêu thụ của nhà máy trong cùng một thời gian. Ta thấy, tổng khai thác của ba mỏ là 200+300+500 đúng bằng tổng tiêu thụ của hai nhà máy là 600+400. Trên kế hoạch, sơ đồ hoá các đường vận chuyển có thể được và các khoảng cách tương ứng (theo kilomet). Chúng ta làm dự án cho lãnh vực này một kế hoạch phân phối kinh tế nhất.



Hình 58

Ta ký hiệu x_{11} là hàng hoá, theo dự án, được chuyên chở từ mỏ thứ nhất đến nhà máy thứ nhất. x_{12} là hàng hoá được chuyên chở từ mỏ thứ nhất đến nhà máy thứ hai v.v... Tổng $x_{11}+x_{12}$ tương ứng tổng sản phẩm mỏ thứ nhất, vậy thì $x_{11}+x_{12}=200$. Tổng $x_{11}+x_{21}+x_{31}$ là tiêu thụ than của nhà máy thứ nhất, vậy thì $x_{11}+x_{21}+x_{31}=600$. Vậy ta tổng hợp thành hệ phương trình sau đây:

$$x_{11}+x_{12}=200$$

$$x_{21}+x_{22}=200$$

$$x_{31}+x_{32}=200 \qquad (1)$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{31}=200$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=200$$

Hệ này chứa 5 phương trình với 6 ẩn. Chúng ta không tìm tất cả nghiệm của hệ mà chỉ những nghiệm nào, trong đó, x_{11}, $x_{12},...,x_{32}$ là dương hoặc bằng không, Chúng ta mong muốn, biểu thức.

$W=40x_{11} + 70x_{12} + 40x_{21} + 60x_{22} + 60x_{31} +30x_{32}$ lấy giá trị nhỏ nhất. Nếu m là giá cả tính theo đồng (1), nó là cước phí vận chuyển một tấn trên khoảng cách 1km, thì ký hiệu, ví dụ như $40x_{11}$, m là cước phí vận chuyển x_{11} tấn từ mỏ thứ nhất, đến nhà máy thứ nhất, vậy thì wm là cước phí vận chuyển toàn bộ. Ta cố gàng tổ chức sao cho wm (cũng như w) là nhỏ nhất.

Ta cho w dạng:

$$w=40(x_{11}+x_{12})+30x_{12}+40(x_{21}+x_{22})+20x_{22}+60(x_{31}+x_{32})-30x_{32}$$

Thay các giá trị của hệ phương trình [1] vào các biểu thức trong vòng móc ta nhận được phương trình

$$w=40.200 +30x_{12}+40.300 +20x_{22} + 60.500 + 30x_{32}$$

Từ phương trình cuối của hệ (1), đạt được

$$x_{32}=400-x_{12} -x_{22}$$

và tiếp tục đơn giản hoá:

$$w=800 +30x_{12} +1200 +20x_{22} + 30\ 000 - 30(400- x_{12}-x_{22})=$$

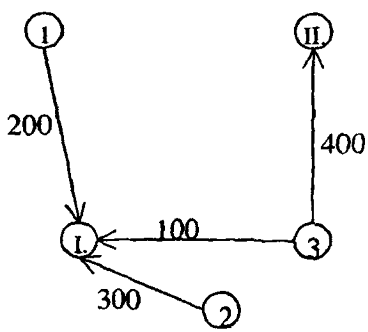
$$50000 + 30x_{12} +20x_{22} -12000 +30x_{12} +30x_{22}$$

$$=38000 +60xx_{12} + 50x_{22}$$

Biểu thức w sẽ nhỏ nhất khi $x_{12}=0$ và $x_{22}=0$.

Đương nhiên chúng ta còn phải biết rõ xem với các giá trị này thì các số $x_{11},x_{21},...,x_{32}$ trong hệ (1) có dương (hoặc bằng 0) hay không. Trường hợp này là thực tế:

$x_{12}=200$, $x_{21}=300$, $x_{31}=100$, $x_{32}=400$



Hình 59

Kế hoạch phân phối một cách kinh tế nhất mà chúng ta vừa tìm ra được biểu diễn

[1] 1 đồng ở đây là đơn vị tiền của CHDC Đức (Mark)(N.D)

trên hình 59 (ngược với hình 58, các số ghi ở đây là khối lượng than được vận chuyển). Nếu kế hoạch sản xuất và tiêu thụ nguyên liệu phức tạp hơn kế hoạch đã chỉ ra trong hình 58, thì phương pháp trình bày vừa rồi không giải quyết được. Về bài toán vận tải và giao thông có một thư tịch phong phú, trong đó nhiều phương pháp đã được kén chọn dẫn tới lời giải. Cần nhắc lại, trong những năm gần đây, trên lĩnh vực này, một số nhà toán học Tiệp Khắc đã có những thành tựu quan trọng.

7.5. Trung bình cộng

Không phải luôn luôn dễ dàng làm sáng tỏ một nhóm lớn dữ liệu đã được thu nhập ở một sự phân tích hoặc một thực nghiệm. Những biểu đồ và sơ đồ khác nhau cũng như những bản khái quát và một số biểu thức tính toán đặc trưng, dẫn tới sự giúp đỡ cho trí nhớ. Một trong những phương pháp quen biết nhất, trung bình cộng, giá trị cho sự chú ý xa hơn của chúng ta.

Việc đánh giá thống kê-đặc biệt trong quá trình của thập niên cuối - đã được đưa vào trường học của chúng ta: Học sinh và sinh viên theo dõi sự tiến bộ của họ trong các học kỳ riêng lẻ, triển vọng trong các chuyên ngành khác nhau được nghiên cứu và thầy giáo quan sát số các giờ học bị bỏ đối với thời kỳ đã qua của năm học. Đánh giá kết quả thi đua dựa trên tính toán trung bình cộng. Trong thư mục kỹ thuật, trung bình cộng thường rất có ý nghĩa. Chẳng hạn như ta được biết thời gian sống của một bóng đèn điện (loại dây tóc) trung bình là 1000 giờ, tiêu thụ than trung bình hàng năm cho một gia đình là 25dt v.v...

Ta hình dung, cho trước n số x_1, x_2,...,x_n. Gọi trung bình cộng của các số này, ta hiểu là một số

$$x= \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Chúng tôi muốn giải thích định nghĩa này qua một ví dụ: một nhóm học sinh năng khiếu đo bề dày của một tấm kim loại. Để nhận được kết quả có khả năng chính xác nhất, các học sinh này đã dùng một thước kẹp và đo lặp lại 10 lần với kết quả sau (theo milimet)

2,10; 2,15; 2,13; 2,21; 2,16; 2,17; 2,18; 2,12; 2,15; 2,13

Như ta thấy, kết quả thu được chênh lệch với nhau ít nhiều; cần phải lấy trung bình cộng của các giá trị này. nhằm mục đích đó, trước hết ta phải cộng

2,10 + 2,15 + 2,13 + 2,21 + 2,16 + 2,17 + 2,12 + 2,18 + 2,15 + 2,13 =21,50

và sau đó thưch hiện phép chia 21,50 : 10 =2,15

Vậy thì, trung bình cộng tìm được là

x=2,15

Những kinh nghiệm của những người thực hành (bên cạnh những tư duy lý thuyết) chỉ ra rằng, bề dày thực tế (cần tìm) của một tấm phẳng đa phần xấp xỉ bởi trung bình cộng này. Kết thúc thực nghiệm. các học sinh đã cho rằng, tấm phẳng ấy dày 2.15mm.

Bây giờ. chúng ta làm quen với một vài tính chất của trung bình cộng. Giả sử, ta xét trở lại dãy số $x_1, x_2,...x_n$ có trung bình cộng x. Lập các hiệu số

$x-x_1, x-x_2, x-x_3,..., x-x_n$

Ta gọi các hiệu này là các độ lệch với trung bình cộng là bằng không. Có:

$(x-x_1) + (x-x_2) (x-x_3) +... + (x-x_n)=$

$= nx-(x_1-x_2+x_3)+... +x_n$

Từ công thức (1) đạt được $nx= x_1-x_2+x_3+ ...+x_n$ nên ta nhận được

$(x_1+x_2x_3 + ... +x_n) - (x_1+ x_2+ x_3 + ...+ x_n)=$

Và như vậy ta đã tính được tổng của các độ lệch đã tìm được trong việc đo tấm kim loại. Độ lệch với trung bình cộng theo thứ tự là:

0,05; 0; 0,02; -0,06; -0,01

-0,02; -0,03; 0; 0,03; 0,02

Tổng của các độ lệch dương là:

0,05+0,02+0,03+0,02=0,12

Tổng của các độ lệch âm là:

-0,06-0,01-0,02-0,03=-0,12

Vậy thì tổng của tất cả các độ lệch với trung bình cộng thực sự bằng không. Đó, đồng thời là một sự kiểm tra về tính toán số x.

Một tính chất tiếp theo của trung bình cộng được dẫn xuất qua một tính toán đơn giản. Ta xuất phát từ các số $x_1, x_2, \ldots x_n$ và làm bé mỗi một trong các số bằng cùng một số p. Bằng cách đó ta được n số mới

$x_1-p, x_2-p, x_3-p, \ldots, x_n-p.$

Để tính trung bình cộng của các số đã cho, trước hết ta cộng.

$(x_1-p)+(x_2-p)+(x_3-p)+\ldots+(x_n-p)=$

$=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_3)-np=nx-np$

và chia cho n được:

$$\frac{nx-nx}{x}=\frac{n(x-p)}{n}=x-p$$

Có thể tóm tắt kết quả đã dẫn ra trong một định lý:

Nếu từng số một của một số cho trước bị làm bé đi bằng cùng một số p, thì trung bình cộng của các số đó cũng bị làm bé đi bằng cùng số p đó.

Chúng tôi muốn chỉ ra ích lợi của định lý trong những tính toán thực tế qua một ví dụ. Chẳng hạn nếu cần tính trung bình cộng của 10 số mà ta đã hai lần dùng đến, thì sẽ có lợi thế bằng cách, trước hết, lấy ra số nhỏ nhất trong các số đó, ở đây nó là số 2,10. Ta trừ số này vào tất cả giá trị đã đo được, nhận được kết quả:

0; 0,05; 0,03; 0,11; 0,06; 0,07; 0,08; 0,02; 0,05; 0,03:

ta tìm được rất dễ dàng (cả ở trong đầu) trung bình cộng.

$$\frac{0+0,05+0,03+0,11+0,06+0,07+0,08+0,02+0,05+0,03}{10}$$

$$=\frac{0,50}{10}=0,05$$

Trung bình cộng của 10 số lúc đầu là 2,10+0,05=2,15; và tất nhiên trùng với kết quả đã tính ở trước.

Chúng tôi nhường cho bạn đọc chứng minh một tính chất nữa của trung bình cộng (tương tự như cách chúng ta đã làm ở trên) mà tính chất đó được biểu thị trong định lý:

Nếu ta nhân từng số một của các số cho trước với cùng một số p, thì trung bình cộng của các số này cũng được nhân với cùng số p đó.

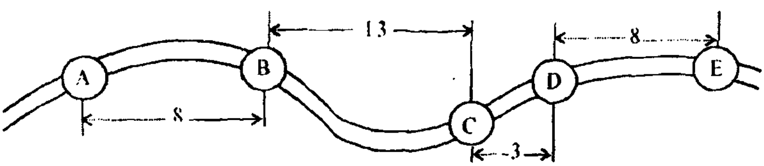
Tính chất này cũng sẽ được sử dụng một cách có lợi.

Chẳng hạn, nếu ta cần tính trung bình cộng của một số các số lẻ thập phân (như trường hợp mà ta đã lấy làm ví dụ tính toán) thì bằng cách vứt bỏ phần lẻ thập phân ta chuyển bài toán thành một bài toán với các số nguyên.

Tất cả các tính chất đã nêu ra của trung bình cộng nhằm làm dễ dàng việc tính biểu thức đó. Ngoài ra, công thức (1) cho thấy, ta tính trung bình cộng với 2 phép toán (cộng và chia). Điều đó có ý nghĩa rất lớn, bởi vì các phép toán này được thực hiện một cách dễ dàng, ví dụ như, bởi các máy tính thông thường. Nhưng, trung bình cộng có những nhược điểm đó là trung bình cộng bị ảnh hưởng khá mạnh của sai số ngẫu nhiên. Chúng tôi muốn làm sáng tỏ điều này bằng một thí dụ. Giả thiết rằng, trong lần đo cuối cùng học sinh đã phạm một sai số "thô" và giả sử kết quả nhận được là 1,93mm. Khi đó, trung bình cộng sẽ là 2,13mm. Vậy thì giá trị này nhỏ hơn giá trị đã tính trong bài khoá chừng 1%.

Trong thực hành thống kê người ta sử dụng cái gọi là *median*. Median có tính chất tương tự tính chất của trung bình cộng nhưng không bị ảnh hưởng mạnh của sai số ngẫu nhiên. Việc tính toán median được tiến hành như sau:

Nếu cho trước n số thì trước hết ta sắp xếp chúng theo độ lớn (từ nhỏ đến lớn). Nếu n lẻ thì median cần tìm là số ở giữa của dãy số được sắp thứ tự. Nếu n chẵn thì median cần tìm là trung bình cộng của 2 số ở giữa. Chúng ta hãy tìm median cho nhóm sắp thứ tự các giá trị đo được theo



Hình 60

độ lớn:

2,10; 2,12; 2,13; 2,15; 2,15; 2,16; 2,17; 2,18; 2,21.

Hai số ở giữa là 2,15 và 2,15 và trung bình của 2 số đó là 2,15. Đó là median cần tìm. Như ta thấy, sai số thô (1,93mm) mà ta nói đến đã không có ảnh hưởng gì đến median [1]

Nếu số lượng các giá trị mà ta dùng không lớn thì median tìm tương đối dễ. Nhưng median có nhiều nhược điểm mà bạn đọc đã biết trong các sách giáo khoa về vấn đề thống kê toán. Vì lẽ đó, vận dụng median rất bị hạn chế, và những bài toán mà chúng ta đã nói đến trong chương này đòi hỏi giữ lại trung bình cộng là rất có lý.

BÀI TẬP

7.1. Người ta cần pha trộn theo tỷ lệ nào rượu 40% với rượu 70% để được rượu 50%?

7.2.*Kim loại để làm chữ in (kim loại khắc chữ) sử dụng trong các nhà in là hợp kim của 3 kim loại-antimon, kẽm và chì. Tuỳ theo tỷ lệ của chúng mà ta có những loại kim loại in chữ khác nhau, phân biệt bởi điểm nung chảy, độ rắn, sự mòn khi in v.v... Từ hai loại kim loại in chữ đã được dùng trong một nhà in cần sản xuất một loại kim loại in chữ mới. Loại thứ nhất chứa 205 antimon, 5% kẽ và

---

[1] Tình trạng median trùng với trung bình cộng chỉ là trường hợp ngẫu nhiên. Trong nhiều trường hợp chúng ta phải làm việc với hai số khác nhau, nhưng sự sai khác này bình thường là nhỏ.

79% chì. Loại thứ hai chứa 14% antimon, 7% kẽm và 79% chì. Người ta pha trộn hai loại này theo tỷ lệ 2:3. kim loại in chữ mới có cấu tạo như thế nào?

7.3. Hai ô tô bus đi lại giữa hai thành phố A và B. Trên đoạn đường này chỉ có duy nhất một chỗ dừng tại C. tỷ lệ khoảng cách của các địa phương A,C và B,C là 4:5. Cả hai ôtô bus khởi hành đồng thời từ A và B, chạy ngược chiều nhau và đến trạm cuối cùng cũng một thời gian như nhau, sau $1\frac{1}{2}$ giờ; ngoài ra mỗi xe đều dừng lại ở làng C trong 10 phút. hãy xác định địa điểm gặp nhau của hai xe trên đoạn đường đó.

7.4. Trên một đường bộ có 5 làng (ký hiệu theo thứ tự là A,B,C,D,E) khoảng cách lẫn nhau 8 km, 13km, 3km, và 8km (hình 60). tại một trong các làng này xây dựng một kho hàng cung cấp cho tất cả 5 làng. Làng nào sẽ được chọn làm nơi đặt kho, nếu biết rằng, dân số của làng A là 450, của làng B là 600, của làng C là 150, của làng D là 900 và của làng E là 400? (Bạn đọc có thể tự quyết định về ý nghĩa của số dân trong bài toán này).

7.5. Công nhân của một Công đoàn vận tải đi một chiếc tàu thuỷ lớn ra biển. Sự vận tải của chiếc tàu, mà tàu được ưu tiên cập bến, đã gây sự chú ý lớn của một thiếu niên. Cuốc [1] quan tâm về chiều dài của tàu thuỷ, muốn đo boong tàu bao nhiêu bước. Em hy vọng, tàu sẽ dừng lại

[1] Cuốc (Kurt) tên của thiếu niên đó (N.D)

trong chốc lát và có thể đo được chiếc tàu không bình thường bằng các bước sải chân. Nhưng tàu lại di chuyển ở đường đậu tàu tuy rằng rất chậm nhưng không dừng. Cuốc, học trò giỏi toán nhất của lớp nhanh chóng biết được cách đo.

Trước hết, em đi bên lề đường theo hướng tàu từ đầu này đến đầu kia chiếc tàu và khẳng định rằng, em cần 120 bước; sau đó đi theo hướng ngược lại chiếc tàu và cần 30 bước. Hai số liệu này đủ để tính độ dài của chiếc tàu không? (Chú ý rằng, Cuốc không biết được tốc độ của tàu mà cũng không biết được các bước của em).

7.6*. Một nhà máy đường chế biến trong 8 tiếng đồng hồ chừng 6500 diện tích củ cải đường [1]; tiêu hao nước để rửa gần 150% khối lượng củ cải. Hãy quyết định xem, hai ống dẫn mỗi ống đường kính 20 cm có đủ nước rửa củ cải không (tốc độ nước là 1m/sec).

7.7. Than đá được khai thác chứa 2% nước. Sau một thời gian do ảnh hưởng của thời tiết, thành phần nước tăng lên 13%. Khối lượng than tăng lên bao nhiêu phần trăm?

7.8. Năm người thợ nề có tay nghề như nhau đã xây nửa bức tường nội trong 14 ngày. Để đảm bảo thời hạn kế hoạch, phải xây phần còn lại của bức tường trong 6 ngày. Cần phải thêm bao nhiêu thợ vẽ?

---

[1] ở châu Âu đường được chế biến từ một loại củ cải có tên là củ cải đường chứ không phải từ cây mía như ở Việt Nam hoặc Cuba (N.D)

7.9. Vở, sách và giấy viết thông thường được sản xuất theo một khổ tiêu chuẩn. Dạng cơ bản là hình chữ nhật với diện tích $1m^2$, khổ này ký hiệu là AO); từ đây xuất hiện các khổ A_1, A_2, A_3,...bằng cách chia đôi liên tiếp độ dài. Bên cạnh đó còn chữ đòi hỏi tỷ lệ (Độ dài/chiều rộng của tất cả các hình chữ nhật phải bằng nhau (hoặc các hình chữ nhật đồng dạng nhau). Hãy tính toán chiều dài và chiều rộng của các khổ riêng lẻ AO A_1, A_2...

7.10*. Một người hút thuốc chi hàng ngày 4 đồng cho thuốc lá. Hãy tính xem, người ấy phải chi bao nhiêu tiền trong 10 năm và người ấy sẽ tiết kiệm được bao nhiêu nếu số tiền chi ấy cho một quỹ tiết kiệm với lãi xuất 2% hàng nam.

7.11. Hai lớp đã giúp cho vụ thu hoạch huplôông[1] .Lớp thứ nhất có 31 học sinh làm việc trong 9 ngày, thu hoạch toàn bộ được 2242 góc. Lớp kia có 33 học sinh thu hoạch trong 8 ngày được 2115 góc, nhưng có một học sinh chỉ làm trong 4 ngày vì ốm. Lớp nào đạt năng suất tốt hơn?

7.12. Một nơi cung cấp thép đã nghiên cứu thành phần của nguyên liệu, 20 thí nghiệm cho kết quả sau đây:

0,06	0,07	0,07	0,07	0,09
0,08	0,06	0,09	0,08	0,07
0,08	0,08	0,08	0,06	0,08
0,06	0,10	0,06	0,13	0,11

[1].

Hãy tính xem, phép đo nào lệch với trung bình cộng lớn nhất.

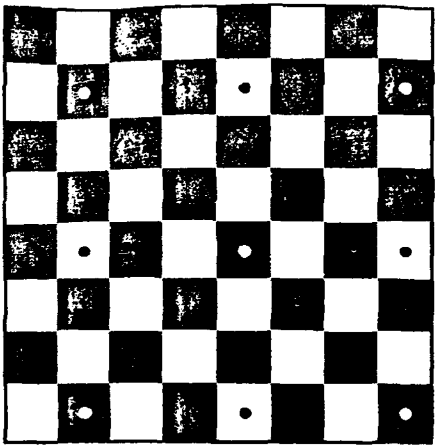
GIẢI CÁC BÀI TẬP

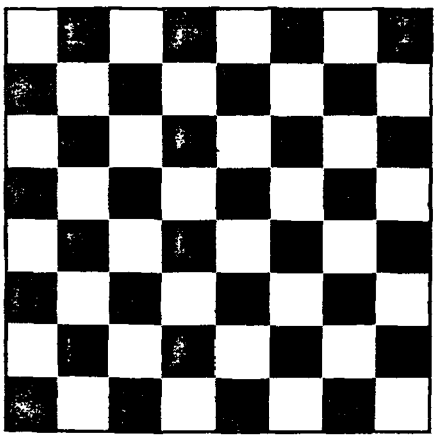
1.1. a) Ta viết trên mỗi ô của bàn cờ một số, số này chỉ rõ, con mã xuất phát từ đó có thể đi được bao nhiêu nước. Ta nhận được một sơ đồ hình vuông sau đây:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	9
4	6	8	8	8	8	8	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Số lượng nước cờ cần tìm được biểu diễn bởi tổng tất cả các số trong sơ đồ này, tức là, trungbìnhcộng của các số này, ta hiểu là một số trung bìnhcộng của các số này, ta hiểu là một số bởi số : $4.2+8.3+20.4+16.6+16.8=8+24+80+90+128=336$ vậy thì con mã có thể đi tất cả 336 nước.

b) Tương tự như phần a) ta khẳng định rằng, quân hậu có thể đi toàn bộ 1456 nước.





1.2. Cần chỉ ra rằng số quân cờ ít nhất cần để chiếm bàn cờ là 9 và nhiều nhất là 16. Ở hình 61, biểu diễn bàn cờ với 64 ô và được chia làm 9 phần bởi các đường nét đậm [1].

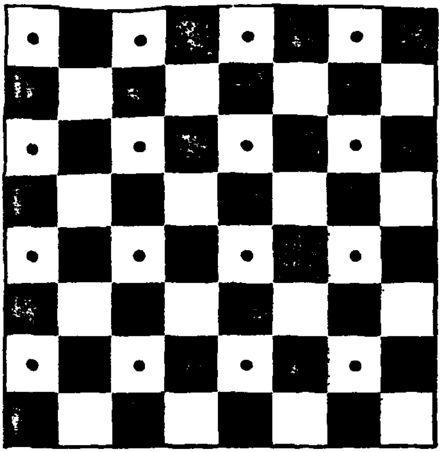
Nếu ta phân tích chi tiết hơn cách phân chia bàn cờ thì thấy rằng, trong mỗi phần của 9 phần, có thể tìm được (ít nhất) một ô mà vua có thể tấn công, ô này chỉ khi nào vua đứng ở ngay trong phần đó của bàn cờ (Trong hình 61 những ô "trong của tất cả 9 phần của bàn cờ được ký hiệu bằng một chấm đen). Từ đó suy ra, phải có ít nhất là 9 quân hậu. Nếu bây giờ, chẳng hạn, đặt 9 vua vào 9 ô có ký hiệu, thì thấy rằng ở vị trí này mỗi ô tự do, không có ký hiệu bị (ít nhất) một vua tấn công và không có vua này đe doạ vua kia.

Tương tự, ta khẳng định rằng, theo bài toán đã cho, có thể đặt nhiều nhất là 16 vua trên một bàn cờ

Trong hình 62 vẽ lại một bàn cờ và chia làm 16 phần bằng các đường đậm , mỗi phần chứa 4 ô. Có thể dễ dàng nhận ra rằng, trên mỗi ô trong chúng có thể đặt một vua nếu đòi hỏi, không có vua này đe doạ vua kia. Bằng cách này có thể đặt trên toàn bàn cờ tối đa 16 vua. Nếu, ví dụ như, đặt 16 vua như hình 63 chỉ, thì thấy rằng, điều kiện của bài toán được thực hiện.

---

[1] Toàn bộ cái "khéo léo" của lời giải dựa vào cách phân chia bàn cờ. Để cho tư duy hoàn toàn lôgic, hoàn toàn không cần phải mô tả như ta đã đạt đến lời giải, nếu chẳng hạn đòi hỏi một suy nghĩ nhất định để rút ra cách phân chia trong hình 91.



Hình 63

Chú thích: Dễ dàng chứng minh, cách đặt 9 hay 16 vua như vừa nói tới không là lời giải duy nhất của bài toán. Bạn đọc : có thể tự rút ra, trên bàn cờ bình thường có thể đặt 0, 11, 12, 13, 14, hoặc 15, vua mà mỗi ô trống bị một vua tấn công và không có vua này đe doạ vua kia.

1.13. Bài toán có một loạt lời giải. Ta có thể đặt con hậu ở ví dụ như, d6, e5, f4, g8, h7.

1.4. Ta đặt hậu, ví dụ như, trên các ô c6, e3, f8, h5.

1.5. Đấu thủ A có thể thắng, nếu chiếm được các số chiến lược 5, 21, 37, 63, 69, 85.

1.6. Nếu một đống có số thẻ nhiều hơn đống kia thì đấu thủ A có thể thắng, nếu A rút một số thẻ ở đống lớn sao cho cả 2 đống có số thẻ bằng nhau. Sau mỗi nước đi của B, đấu thủ A lại phải rút một số thẻ sao cho số thẻ ở hai đống trở lại bằng nhau. Nếu B lấy hết một đống A lấy hết số còn lại của đống kia và thắng cuộc.

Đương nhiên, nếu trước khi bắt đầu trò chơi mà cả hai đống có số thẻ bằng nhau thì đấu thủ A bị thất thế. B có thể thắng nếu nắm được cách đã nêu ở trên.

1.7. Nếu một trong các đống có số thẻ nhiều hơn các đống khác thì A có thể thắng, bằng cách lấy từ đống nhiều nhất một số thẻ sao cho cả hai đống bằng nhau. Đấu thủ A nắm chắc nguyên lý này sau mỗi nước đi của B cho đến khi, B hoặc lấy tất cả thẻ của một đống hoặc để lại một vài thẻ cho một đống. Trong cả hai trường hợp, đấu thủ A có trách nhiệm để lại cho đối thủ của mình một thẻ duy nhất.

Nếu cả hai đống có số thẻ bằng nhau (ít nhất là 2) thì A bị thất thế. B có thể thắng nếu nắm được chỉ dẫn đã đưa ra.

1.8.a) Trước hết, chúng ta xác định số được cuộc hạng ba. Đấu thủ đạt được hạng ba, ước đoán của họ khác với kết quả đúng hoặc bởi hai con Một bị thiếu (ở vị trí đó đặt một số Hai hoặc một chữ thập) hoặc bởi đáng lẽ số Hai đúng lại đặt số Một hoặc một chữ thập. Hai con Một mà đấu thủ đã không thể giải đúng có thể xuất hiện ở một vị trí x bất kỳ, tượng ứng $\binom{x}{2}$ khả năng. Thay thế cho nó ở trên tickê có thể là ước đoán 2 2 hoặc 2X hoặc X2 hoặc X

X, cho 4 khả năng. Số lượng các ước đoán trong hạng ba, khác với kết quả đúng bởi hai số Một, là

$$4\binom{x}{2} = 4.\frac{x(-x-1)}{}1.2 = 2x(x-1)$$

Ta tính số lượng các ước đoán trong hạng ba, khác với lời giải đúng bởi đấu thủ không giải được một con Hai. Số của con Hai trong ước đoán đúng là y, vậy thì ta có y khả năng chọn một con Hai sai. Thay chỗ của con Hai là con Một hoặc chữ thập, tương ứng với 2 khả năng. Vậy thì số lượng các ước đoán trong hạng ba, khác với ước đoán đúng bởi một con Hai là 2y.

Số lượng của tất cả khả năng được cuộc trong hạng ba là 2x(x-1)+2y

b) Bây giờ chúng ta xác định số lượng được cuộc ở hạng bốn. Người ta đạt được hạng bốn bởi không giải được 3 con Một, hoặc bởi thiếu một con Một và một con Hai, hoặc bởi mất một chữ thập.

Có thể có $\binom{x}{3}$ cách chọn 3 con Một bị giải sai; thay chỗ của chúng ở trên tickê có thể xuất hiện một trong 8 khả năng:

222; 22X; 2X2; X22; 2XX; X2X; XX2; XXX

Từ đó, số ước đoán trong đó làm mất 3 con Một là $8\binom{x}{3} = 8.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} = \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$

Ta khai thác số các ước đoán khác với ước đoán chính xác bởi một con Một và một con Hai. Có x cách chọn một con Một và y cách chọn một con hai. Vậy thì có xy cách làm mất con Một và con Hai. Thay chỗ con Một đúng có thể là một con Hai sai hoặc một chữ thập sai, (hai khả năng) và thay chỗ một con Hai đúng có thể là một con Một hoặc một chữ thập(2 khả năng). Nếu ta tổ hợp các trường hợp này thì được 2.2=4 khả năng, số lượng của tất cả ước đoán xuất hiện bởi tổn thất của con Một và của con Hai là 4xy.

Cuối cùng, ta tính số lượng các ước đoán xuất hiện bởi tổn thất một chữ thập. ta có thể chọn một chữ thập z cách và có thể thay được bởi một con Một hoặc một con Hai (2 khả năng. Vậy thì số lượng của các ước đoán này là 2z. Số lượng của tất cả khả năng được cuộc ở hạng bốn là:

$$\frac{4}{3}x(x-1)(x-2) + 4xy + 2z$$

1.9

Hạng	Con số của ước đoán
nhất	1
nhì	8

ba	36
tư	132

1.10. Trường hợp này xảy ra, nếu con Một chân thực được rút thăm. sau đó hạng nhì có thể đạt được 24 ước đoán.

1.11. Ta sử dụng các kết quả của bài toán 1.8, theo bài toán này, hạng ba có thể đạt được Q=2x(x-1)+2y ước đoán. Ta biết, các số x, y, z được liên kết lại bởi quan hệ x+y+z=12. Giả sử ta chọn liên tiếp nhất. Trị lớn nhất này y=12-x(tại z=0). Với y=12-x là $Q=2x^2+4x+24=2[(x-1)^2+11]$.

Từ đó, hiển nhiên là với x=12 thì Q lớn nhất.

Số lượng lớn nhất các ước đoán có khả năng xuất hiện ở hạng ba, nếu con Một chân thực đi khỏi. Có 264 ước đoán có thể đạt ở hạng ba.

1.12. Số được cuộc ở hạng nhì là:

$$\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1} = 6.43 = 258$$

ở hạng ba

$$\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = \frac{43.42.41}{1.2.3} = 5.4.43.7.41 = 246820$$

Các lý do của tính toán xin nhường cho bạn đọc.

1.13. Một góc của một tứ giác phẳng đều phải được ký hiệu bằng một số 4. Ta hãy tưởng tượng một tứ giác phẳng đặt trên một mặt phẳng nằm ngang (trên một cái bàn) sao cho góc ký hiệu bằng 4 ở về phía trên. Đối với việc ký hiệu 3 góc còn lại bằng các số 1,2,3 tồn tại 2 khả năng:

-Hoặc là ta đánh số các góc sao cho nhìn từ phía trên lên mặt bàn thì các số 1,2,3 liên tiếp nhau như các số trên mặt đồng hồ.

-Hoặc ngược lại

Theo đó, các góc của một tứ giác phẳng đều có thể được đánh số theo 2 cách.

Cần thiết bổ sung thêm, nhờ cách đánh số của một tứ giác phẳng đều mà hoá hữu cơ giải thích được tính chất quang học của một vài liên kết cacbon không đối xứng (ví dụ như sữa chua). Cacbon không đối xứng C^* là một cacbon, tạo thành qua 4 hoá trị của nó 4 phần tử (một trị) khác nhau hoặc nhóm phần tử. Để có giải thích, vì sao liên kết hoá học này lại xảy ra lần này trong dạng quay bên phải và lần khác trong dạng quay về bên trái, ta hãy tưởng tượng (theo van't Hoff và LeBel) cacbon không đối xứng ở giữa một tứ giác phẳng đều; hoá trị của nó có xu hướng theo các điểm góc của tứ giác này. Vì chỉ tồn tại 2 cách ký hiệu như đã biết, nên chỉ có 2 dạng liên kết-dạng quay bên phải và dạng bên trái-có thể có [1].

1.14 Một ví dụ của hình vuông quỉ thuật chỉ ở sơ đồ sau:

1	14	15	
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

3.1. Trong việc đánh số trang của quyển sách có 9 số một chữ số (tức 9 chữ số), 99 số hai chữ số cần chữ số 0 là 9 trường hợp (tức 9 số 0). Trong các số ba chữ số, ta lấy trước hết các số nhỏ hơn 110 là 9 số 0, các số lớn hơn 109 và nhỏ hơn 200 (9 số 0 tiếp). Để ghi tất cả số ba chữ số nhỏ hơn 500 cần: 4.(11+9)=80 chữ số 0. Vì số 499 không có trong đánh số, không chứa chữ số 0, nên số chữ số 0 cần tìm là 9+80=89.

3.2. Để ghi tất cả số một chữ số cần 9 gõ (đập vào phím). Còn lại 91 gõ dùng ghi các số hai chữ số. Có 91=2.45+1. Người nữ thư ký đánh máy sẽ viết 45 số 2 chữ số (số cuối cùng là 54) và lần gõ thứ 100 là viết chữ số đầu của số 55.

[1] Ký hiệu này biểu lộ năng lực của một vài hoá chất, mặt phẳng của tia cực quay về bên trái hoặc về bên phải.

3.3 Bạn đọc nào biết được cấp số cộng từ ở trường phổ thông thì giải bài toán này dễ dàng. Nhưng chúng tôi đề nghị, giải bài toán không được sủ dụng phần tìm kiến thức đó. Ta thấy, tổng

1+2+3+...+33+64

sẽ được tính dễ dàng, nếu sắp thứ tự các số hạng theo cách thích hợp và đặt từng cặp trong vòng móc. Ta nhận được: (1+64)+(2+63)+...+(31+34)+(32+33). Tổng trong

142 857.264 513
428 571
1428 57
71428 5
571428
857142
285714
37787533641

từng vòng móc bằng 65 nên tổng cần tìm là 65.32=2080.

Vậy thì trên toàn bộ bàn cờ có 20,80 đồng

3.4. Nếu ta viết phép nhân thì sẽ ghi biên bản như sau:

3.5. Do ta ký hiệu các vị trí riêng lẻ của sơ đồ bằng các chữ cái A,B,C,... nên viết gọn như sau:

1 AB.CD
EF G1
HIJ 1
KML IN

Ta thấy N=1 và do đó G=0. D không có thể bằng 1, vì trên hàng thứ hai có một số bốn chữ số. Tích BD kết thúc bằng chữ số 1 như trên hàng thứ hai cho thấy; từ đó suy ra B=9, D=9 hoặc B=7, D=3 hoặc B=3, D=7. Ta cần nghiên cứu từng trường hợp một:

a)Nếu B=9, D=9 thì BD=81. Vì G=0 nên tích AD hoặc 9A phải kết thúc bằng chữ số 2 (để cho 2+8 = 10). Tích 9A kết thúc bằng 2 chỉ với A=8. Vậy thì trên hàng thứ nhất là số 189. Khả năng của C như thế nào? Tích BC hoặc 9C kết thúc bằng chữ số 1; từ đó có C = 9. Bây giờ ta biết thừa số thứ hai nên dễ dàng bổ sung toàn bộ phép nhân.

b) Trường hợp B=7, D=3 không đưa tới lời giải. Số ở hàng thứ nhất bắt đầu bằng con một thì 3 lần của nó là số có 3 chữ số (nhỏ hơn 600). Nhưng ở hàng thứ hai lại phải là một số bốn chữ số.

c) Nếu B=3, D=7 thì BD=21. Tích AD hoặc 7A phải kết thúc bằng chữ số 8 (để cho 8+2=10); điều này chỉ xảy ra với A=4. Vậy thì trên hàng thứ hai là số 143. Tương tự như ở phần a) ta biết rõ rằng C7. Qua đó ta nhận được thừa số thứ hai.

Tóm lại: Bài toán có 2 lời giải.

189.99	143.77
1701	1001
1701	1001
18711	11011

3.6 Số lượng chữ số của 5^{100} được xác định nhờ bản logarit

$\lg 5^{100} = 100.\lg 5$. Nếu dùng bản logarit bốn số lẻ, có:

$\lg 5^{100} \approx 100.0,6990 = 69,90$.

Từ đây đạt được rằng số 5^{100} trong hệ thập phân có 70 chữ số. Logarit 4 số lẻ không đủ để tính (bằng cách lấy loga) ít nhất là chữ số thứ nhất của số 5^{100} (tính từ trái). Từ bản số này chỉ có thể biết được chữ số thứ 7 hoặc 8. Nếu ta muốn thu được kết quả chính xác thì phải tính loga của 5 bằng một bản có nhiều số lẻ hơn. Trong bản số với 9 số lẻ thập phân, có:

$\lg 5 \approx 0,698\ 970\ 004$, vậy thì $\lg 5^{100} \approx 69,8970$

và qua kiểm tra trong bản số 4 số lẻ thập phân thì lại khẳng định rằng số 5^{100} bắt đầu bằng chữ số 7; trong bản loga với 5 số lẻ thập phân thì 2 chữ số đầu tiên của số 5^{100} là 78. Có thể xấp xỉ số 5^{100} ở dạng $7,8.10^{69}$.

Nhóm chữ số kết thúc của số 5^{100} không thể dùng loga để xác định, nhưng giúp cho suy nghĩ ; nếu theo dõi các luỹ thừa $5^2, 5^3, 5^4, 5^5$,... thì ta thấy, tất cả đều kết thúc bằng 2 chữ số 25 (thật vậy, hãy hình dung ta nhận được số 5^{n-1} bằng cách nhân 5^n với 5). Vậy thì số 5^{100} được kết thúc bằng các chữ số 25. Có thể xác định được chữ số thứ ba tính từ bên phải, bởi vì các luỹ thừa $5^3, 5^4, 5^5, 5^6$, kết thúc bằng các chữ số 125 luỹ thừa lẻ và 625 luỹ thừa chẵn. Số

5^{100} là luỹ thừa chẵn nên kết thúc bằng dãy các chữ số 625. Bằng cách tương tự, có thể chỉ ra chỉ số thứ tư kể từ bên trái v.v...

3.7. a) 900; b) 9.10^{n-1}

3.8. a) 4 ; b) 2^{n-1}

3.9. Ở vị trí thứ nhất kể từ bên trái ta có thể thay một trong bốn chữ số 5, 6, 7, 8 (bốn khả năng) ở vị trí thứ hai cũng vậy (bốn khả năng) và cuối cùng, ở vị trí thứ ba cũng vậy (bốn khả năng). Vậy toàn bộ các khả năng là 4.4.4=64. Để xác định, trong 64 số đó có bao nhiêu số chẵn, trước hết ta hãy nhớ lại, trong hệ thập phân tất cả số tự nhiên chẵn kết thúc bởi một trong các chữ số 0, 2, 4, 6, 8.

Vậy thì, trước hết chúng ta hãy tính, có bao nhiêu số là đối tượng xét của chúng ta, kết thúc bằng chữ số 6.

Ở vị trí thứ nhất từ bên trái của mỗi số trong các số ta xét có thể là một chữ số bất kỳ trong các chữ số 4, 6, 7, 8 (bốn khả năng), ở vị trí thứ hai cũng vậy (bốn khả năng) và ở vị trí cuối cùng là chữ số 6 (một khả năng). Vậy tổng số các khả năng là 4.4.1=16. Vậy thì ta có thể tìm được 16 số kết thúc bằng chữ số 6. Rõ ràng, số lượng các số 3 chữ số kết thúc bằng chữ số 8 cũng bằng 16.

Toàn bộ các số chẵn trong bài toán của chúng ta là 32.

3.10. Ta tiến hành tương tự như bài toán trước. Trước hết, ta biết rằng, không một số ba chữ số nào được bắt đầu bằng số không. Đứng ở vị trí thứ nhất từ trái có thể một trong 3 chữ số 1, 2, 3 (3 khả năng) ở vị trí thứ hai, một trong bốn chữ số 0, 1, 2, 3 (bốn khả năng) ở vị trí cuối cùng cũng vậy (4 khả năng). Toàn bộ các khả năng là 3.4.4=48.

3.11. a) $333=2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$

tương ứng với số 333 trong hệ nhị phân là số 101 101 101.

b) Trong hệ nhị phân ta tìm được số

$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0=8 + 4 + 2+ 1=15$

3.12. Ta khẳng định số cần tìm có bao nhiêu chữ số

Gọi số lượng này là k. Số k chữ số lớn nhất trong hệ nhị phân là số.

$n = 1.2^{k-1} + 1.2^{k-2} + 1.2^{k-3} +... +1.2^k + 1.2^n.$

Qua phép toán đã mô tả ở trang 52 ta nhận được $a = 2^k - 1$. Số có k chữ số nhỏ nhất trong hệ thập phân là số $b = 10^{k-1}$. Với k =1 thì a=1, b=1, số 1 được biểu diễn trong hệ thập phân và trong hệ nhị phân là như nhau. Một số tự nhiên khác với tính chất nêu ra không thể tìm được, vì ta có thể chứng minh, với k khác thì số a nhỏ hơn số b . Thật vậy.

$a = 2^k-1<2^k=2^{k-1}.2<2^{k-1}.5^{k-1}= 10^{k-1}=b$

3.13. Nếu ta chuyển tất cả các số có trong bảng vào hệ nhị phân thì ta thấy rằng, đứng đầu mỗi bảng theo thứ tự là các số 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 và 2^5. trong bảng thứ nhất đó các số chứa thành phần 2^0 trong hệ nhị phân; trong bảng thứ hai có cá số chứa thành phần 2^1 v.v...; trong bảng cuối cùng, bảng thứ sáu có số chứa thành phần 2^5. Để khẳng định được số nghĩ tới chỉ cần cộng các số đầu tiên của các bảng đã gặp. Chúng ta giải thích "mẹo" này bằng một thí dụ. Người bạn của chúng ta đã nghĩ đến số 39 chẳng hạn. Số này ta tìm thấy ở trong các bảng thứ 1, 2, 3, và 6. Vậy thì ta cộng 1+2+4+32=39. Ta thấy rằng, tổng 1+2+4+32 hoặc $2^0+2^1+2^2+2^5$ hoặc $1.2^5+0.2^4+0.2^3+1.2^2+1.2^1+1.2^0$ là cách viết số 39 trong hệ nhị phân.

3.14. Tất nhiên, 9 phân số thoả bài toán:

$$\frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \frac{33}{33}, \ldots \frac{99}{99}$$

Các số tiếp tục mà ta có thể "giản lược" theo cách đó là:

$$\frac{26}{65}=\frac{2}{5}, \quad \frac{19}{95}=\frac{1}{5}, \quad \frac{49}{98}=\frac{4}{8}$$

Có thể chứng minh, cùng với trường hợp $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$ mà trong bài khoá của bài toán đã đưa ra, đây là các phân số duy nhất có tính chất đã mô tả trước.

Chú thích: Giả dụ rằng, ta tìm tiếp tục thì thấy, ví dụ như ở tử và mẫu của phân số $\frac{1212}{32118}$ có thể vứt bỏ nhóm số 21 khi đó ta nhận được phân số $\frac{12}{318}$

Phân số này sẽ nhận được bằng cách chia tử và mẫu của phân số ban đầu cho 101. Chúng tôi nhường cho bạn đọc tìm các ví dụ tiếp.

3.15. Đó là những trường hợp riêng của một công thức mà ta có thể chứng minh dễ dàng. Ta ký hiệu n, p là 2 số tự nhiên lớn hơn 1. Sau đó, có:

$$\sqrt[n]{p+\frac{p}{p^n-1}} = \sqrt[n]{\frac{p(p^n-1)+p}{p^n-1}} = \sqrt[n]{\frac{p^{n-1}}{p^n-1}} = p\sqrt[n]{\frac{p}{p^n-1}}$$

Với n=2, p=3 ta nhận được $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$ đó là ví dụ đầu tiên của bài khoá.

3.16. Ta sử dụng phương pháp của Neugebauer biểu diễn các phân số gốc.

$\frac{3}{11} = \overline{4} + \overline{44}$ (hoặc phân số $\frac{3}{11}$ là một số của dạng A_2).

3.17. Qua tính toán ta biết chắc sự đúng đắn của phương trình

$$2=\overline{1}+\overline{3}+\overline{5}+\overline{7}+\overline{9}+\overline{15}+\overline{21}+\overline{27}+\overline{35}+\overline{45}+\overline{105}+\overline{945}$$

Cần phải nhắc đến việc trả lời câu hỏi trong bài toán này là rất ngắn, nhưng tìm được kết quả là rất vất vả. Cái đó giành cho bạn đọc có kinh nghiệm, tự tìm lấy lời giải.

3.18. Chúng tôi đưa ra hai lời giải cho mỗi câu hỏi . Nhưng bạn đọc có thể tìm những câu trả lời khác

a) $10=8\frac{35}{70}+1\frac{46}{92}$; $10=2\frac{15}{30}+7\frac{48}{96}$

b) $100=0+1+2+3+4+5+6+7+8.9$

$100=0+93+5+1+\frac{6}{7}+\frac{4}{28}$

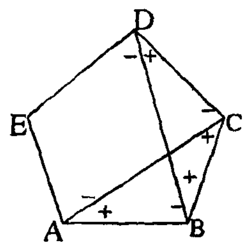
4.1. Trong một ngũ giác đều, độ lớn của góc trong (biểu diễn theo độ) là:

$$\alpha=\frac{(5-2).180^0}{5}=\frac{3.180^0}{5}=3.36^0=108^0$$

Qua việc cắt một ngũ giác ABCDE [1]xuất hiện tam giác ABC và tứ giác ACDE. Tam giác ABC là tam giác cân, nên các góc trong tại đỉnh A và C bằng nhau, ta tính được:

$$\frac{1}{2}(180^0-108^0)=\frac{1}{2}=72^0=36^0$$

(lẽ tất nhiên góc tại đỉnh B là 180^0). Tứ giác ACDE là một hình



Hình 64

[1] Bạn đọc tự vẽ hình

thang cân, cạnh đáy $\overline{AC}$, $\overline{DE}$. Ta khẳng định điều này bằng cách tính các góc trong của nó. Độ lớn của góc trong đỉnh A là 108^0-36^0=72^0 và bằng góc đỉnh C. Bây giờ xét các góc trong đỉnh A. Ta có 72^0+108^0=180^0 nên theo định lý đã biết về góc đồng vị, đường thẳng AC, DE song song nhau và ACDE là hình thang cân.

4.2. Ta ký hiệu giao điểm của đường chéo, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ (hình64) bằng X. Các góc mà trong bài toán 4.1 có độ lệch lớn 36^0 thì trong hình 64 ký hiệu bằng dấu cộng và góc có độ lớn 72^0 thì ký hiệu bằng dấu trừ. Tam giác DCX cân vì góc trong tại B và C là 36^0, góc trong tại X là 180^0-36^0=108^0. Tam giác ABX và CDX bằng nhau (" góc, cạnh, góc"), từ đó ta chỉ cần xét một trong chúng, ví dụ như, tam giác thứ nhất. Góc trong đỉnh X của tam giác này là 180^0-36^0-72^0=72^0. Tam giác ABX có 2 góc trong bằng 72^0 và do đó là tam giác cân và đoạn $\overline{AB}$ bằng đoạn $\overline{AX}$. Tứ giác AXDE là hình thoi. Độ lớn của 3 góc trong đã biết nên dễ dàng tính được góc trong đỉnh X của tứ giác này là 180^0. Và bài toán được giải xong.

4.3. Bạn đọc tự vẽ hình, ngoài ra kẻ $\overline{BE}$ và ký hiệu Y là giao điểm của AC và BE . Dễ dàng khẳng định rằng, tam giác ACY và BCX cũng như AYE và CXD là bằng nhau . Tam giác BEY là tam giác cân và tứ giác XDEY là một hình thang cân. Trong tất cả 6 phần xuất hiện do việc cắt sinh ra chỉ có các góc 36^0, 72^0 và 108^0

4.4. Chúng ta sử dụng hình do bạn đọc vẽ để giải bài toán trước. ký hiệu độ lớn đoạn $\overline{XY}$ bằng, đoạn $\overline{AY}$ bằng t. Nếu chúng ta xem kỹ tam giác ABX và BXY thì tìm được, chúng có hai góc trong bằng nhau. Vậy thì 2 tam giác này đồng dạng (theo định lý "góc- góc" của tam giác đồng dạng). Độ lớn của cạnh tam giác (cân) ABX là s+t, của cạnh tam giác (cân) BXY là t; tỷ lệ của chúng (gọi là tỷ lệ đồng dạng) là (s+t): t. Độ lớn của đáy tam giác ABX là t và tam giác BXY là s, tỷ số đồng dạng là t:s. Cả hai tỷ số này phải bằng nhau:

$$t : s = (s+t) : t \qquad (1)$$

Sau khi giản ước ta được

$$t^2 = s.(s+t)$$

$$t^2 = s^2 + st$$

$$s^2 + st - t^2 = 0$$

Nếu chia cả hai vế phương trình này cho t^2, được

$$\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right) - \ = 0$$

Đây là phương trình bậc hai mà ẩn là $\frac{s}{t}$. Biểu thức D = 1^2 -4.1.(-1) = 5. Nghiệm của phương trình là:

$$\left(\frac{s}{t}\right)_{1,2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Nghiệm thứ hai $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ âm nên không thể bằng tỷ số của 2 số dương được. Ta loại nghiệm này. Nghiệm thứ nhất dương:

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Vì $\sqrt{5} \approx 2,236$ nên

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{-1+2,236}{2} = \frac{1,236}{2} = 0,618$$

Vậy thì $\frac{s}{t} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ nên $s = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})t \approx 0,618t$

Để tính tỷ số của các đoạn thẳng AX và XC, ta đi từ

$$\overline{AX} : \overline{XC} = (s+t : t = \left[\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})t\right] : t -$$

$$= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})+1 = \frac{-1+\sqrt{5}+2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$$

$$\approx \frac{1+2,236}{2} = \frac{3,236}{2} = 1,618$$

Chú thích: tỷ số (1) biểu thị, rằng điểm Y chia đoạn $\overline{AX}$

thành 2 phần mà tương quan của độ lớn của phần lớn với phần nhỏ bằng tương quan của độ lớn của toàn đoạn với phần lớn. Một sự phân chia như thế của đoạn thẳng gọi là "vết cắt vàng". Trong quá khứ đã xuất hiện một loạt thư mục về "vết cắt vàng" do "sự quan trọng" của nó đối với cuộc sống con người. Các đại biểu của lý thuyết" của vết cắt vàng tuyên bố rằng, phong tục và điều lệ cổ xưa đã được thực hiện theo những nguyên lý của vết cắt vàng, rằng các hoạ sĩ nổi tiếng đã đoán trước với vết cắt vàng trong những bức hoạ của họ và nguyên tắc này cho phép theo dõi trong tự nhiên (cây cối và động vật). Nhưng việc đo chính xác chỉ ra rằng, các phỏng đoán thiếu một cơ sở khoa học; bởi vì phần lớn tỏ ra rằng có sự trùng hợp rất thô với vết cắt vàng. Ở đâu mà sự trùng hợp này xảy ra một cách chính xác (và cái này hạn chế một vài trường) thì ở đó rõ ràng chỉ là một ngẫu nhiên.

4.5. Chúng ta sử dụng tất cả ký hiệu của bài toán trước. Ngoài ra, chúng ta ký hiệu diện tích của hình ngũ giác đều lớn là A_1 và phần ngũ giác của nó là A_2. Vì cứ hai hình ngũ giác đều là đồng dạng nên ta có thể biểu diễn tỷ số giữa A_1 và A_2 như sau: chúng ta tính trước hết tỷ số đồng dạng là tỷ số của độ lớn của cạnh của hình ngũ giác đều đã cho và của cạnh của phần ngũ giác của nó. Nếu ký hiệu tỷ số đồng dạng này là k thì có:

$$k=(s+t):s=\left[\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})+t\right]:\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5}+2)}{\frac{1}{2}t(-1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} =$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$$

Từ định lý về đồng dạng của đa giác, ta biết rằng $A_1 = k^2A^2$, vậy thì $A_2 = \frac{1}{k^2}A_1$. Ta tính trước hết k^2:

$$k^2 = \left[\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right]^2 = \frac{1}{4}(9-6\sqrt{5}+5)$$

$$= \frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} = \frac{2}{7+3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{1}{2}(7-3\sqrt{5}) \approx \frac{1}{2}(7-3.2{,}236)$$

$$= \frac{1}{2}(7-6{,}708) = 0{,}146$$

Ta nhận thấy được tỷ số gần đúng $A \approx 0{,}146$. A : biểu diễn theo phần trăm, kết quả tìm được có nghĩa là diện tích A_2 cỡ khoảng 14,6% của diện tích A_1.

4.6. Các viên đá lát có thể tô màu ví dụ như sau: tất cả 12-giác tô màu đỏ, tất cả lục giác tô màu vàng và tất cả hình vuông tô màu đen.

4.7. Trên hình mà bạn đọc có thể tự vẽ, ta thấy các đường chéo có13 điểm cắt nhau.

4.8. Có thể có tối đa 15 giao điểm, như suy nghĩ sau chỉ rõ: Nếu 2 đường chéo cắt nhau tại một điểm (trong) thì các điểm biên của các đường chéo đó tạo nên các góc [1] của một tứ giác lồi. Ta có thể thực hiện $\binom{6}{4}$cách chọn 4 trong số 6 đỉnh của hình lục giác $\binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3}{4.3.2.1} = 15$, ta có thể tìm được tối đa 15 giao điểm.

4.9. Để giải bài tập này đòi hỏi phải có kiến thức về hàm lượng giác.

Gọi O là giao điểm giữa của vòng ngoại tiếp của một n-giác cho trước (chúng tôi nhường cho bạn đọc tự vẽ hình). Tam giác A_1A_2O là tam giác cân: cạnh của nó $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}$ là bán kính r. Độ lớn của góc A_1OA_2 là $\omega \frac{360^0}{n}$.

[1] Đúng ra là đỉnh chứ không phải góc (ND)

Ta dựng trong tam giác A_1OA_2 đường cao $\overline{OB}$; tam giác OBA_1 là tam giác vuông và có $\overline{OA_1} = r, \overline{A_1B} = \frac{a}{2}$ góc A_1OB $= \frac{1}{2}\omega$. Tỷ số $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{OA_1}}$ bằng sin của góc $\frac{1}{2}\omega$

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{2}\omega$$

Sau khi thay thế ta nhận được

$$\frac{\frac{a}{2}}{r} = \sin\frac{1}{2}\omega = \sin\frac{180^0}{n}$$

Từ đó

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2\sin\frac{180^0}{n}}$$

Bằng cách này ta tính được tỷ số cần tìm.

4.10. Ta xuất phát từ kết quả của bài tập trước và đặt n=17. Có $\frac{180^0}{17} \approx 10^0 35'18''$. Để tính tiếp ta dùng bảng loga 4 chữ số.

$$\lg\frac{r}{a} \approx -\lg 2 - \lg\sin 10^0 35'18''$$

$$\approx -0{,}3010-(9{,}642-10)=0{,}4348$$

Từ đó suy ra $\frac{r}{a} \approx 2,721$, trùng với số liệu trong bảng III.

4.11. Có thể lấy $\overline{SX}$ làm chiều cao của tam giác đều A_1OX và độ lớn của nó $\frac{r}{2}\sqrt{3} \approx r.0,8660$

Theo kết quả của bài tập 4.9, cạnh của một hình 7-giác đều nội tiếp trong vòng tròn bán kính r là:

$$2r\sin\frac{180^0}{17} \approx 2r\sin 25^0 43' \approx 2r.\ 0,4339 = r.\ 0,8678$$

Ta thấy, dựng gần đúng một cạnh nhỏ hơn cạnh cần phải có là r.0,0018. Đó là một *xấp xỉ tương đối tốt, vì khi* bán kính 1m thì cạnh được dựng nhỏ đi 2mm

4.12. Bài toán có 7 lời giải. Các tam giác cần tìm là $A_1A_3A_5$, $A_1A_3A_6$, $A_1A_4A_6$, $A_2A_4A_6$, $A_2A_4A_7$, $A_2A_5A_7$, $A_3A_5A_7$.

4.13. Trong một n-giác, độ lớn của góc trong(theo độ) cho bởi

$$\alpha_n = \frac{(n-2).180^0}{n} \text{ hoặc } \alpha_n = 180 - \frac{360^0}{n}$$

Số α_n là nguyên chỉ khi nếu $\frac{360^0}{n}$ là nguyên hoặc nếu 360^0 chia hết cho **n** (chia không có số dư). Từ đó, ta tìm tất cả các ước số của 360 (chỉ có thể là các số lớn hơn 2); ta có:

n=3,4,5,6,8,9,10,12.15,18,20,24,30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Chúng ta đã tìm ra tất cả 22 đa giác tương ứng.

4.14. Ta có thể giả thiết rằng, có thể chọn ký hiệu của các số bằng x,y,z sao cho $x \leq y \leq z$. Từ đó

$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ và $\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ hoặc $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x}$

hoặc $x \leq 6$.

Nhưng lại phải có $\frac{1}{2} > \frac{1}{x}$ hoặc x>2. Vậy đối với x ta có 4 khả năng x =3,4 5 và 6. Ta phân tích chi tiết từng khả năng một:

a) Nếu x=3 phương trình cho chuyển thành dạng

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ hoặc $\frac{1}{6} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Nhưng $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} = + \frac{1}{y}\frac{2}{y}$ vì thế

$\frac{1}{6} \leq \frac{2}{y}$

hoặc $y \le 12$. Nhưng lại phải có $\frac{1}{6} > \frac{1}{y}$ hoặc $y<6$. Vậy đối với y ta có (trong đó luôn x = 3) 6 khả năng, y =7, 8, 9, 10, 11, 12. Nếu thay x =3, y =7 vào phương trình (1) ta nhận được $\frac{1}{z} = \frac{1}{42}$ hoặc z=42; bộ ba số (3, 7, 42) thoả hệ thức (1). Nếu thay x=3, y=8 vào (1) ta được $\frac{1}{z} = \frac{1}{24}$ hoặc z=24; bộ ba số (3,8,24) là một nghiệm nữa của phương trình (1).

Nếu thay x=3, y=9 vào (1) ta được $\frac{1}{z} = \frac{1}{18}$ hoặc z=18; bộ ba số (3,9,18) thoả (1).

Nếu thay x=3, y=10 vào (1) ta được $\frac{1}{z} = \frac{1}{15}$ hoặc z=15; bộ ba số (3.10.15) thoả (1).

Nếu thay x=3, y=11 vào (1) ta được $\frac{1}{z} = \frac{5}{66}$ phân số này không có số nguyên z nào thích hợp.

Nếu thay x=3, y=12 vào (1) ta được $\frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ hoặc z=12; bộ ba số (3,12.12) là một nghiệm nữa của (1).

b) Ta tìm tất cả nghiêmjmà x=4. Thay x=4 vào (1) được $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ hoặc $\frac{1}{4}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Vì $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}$ nên $\frac{1}{4}\leq\frac{2}{4}$

hoặc $y\leq 8$. Đồng thời phải có $\frac{1}{4}>\frac{1}{y}$ hoặc y>4. Vậy thì đối với y ta xét các số 5,6,7,8.

Nếu x=4, y=5 được thay vào (1) thì ta có $\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$ hoặc z=20; bộ ba (4,5,20) là một nghiệm của (1).

Nếu thay x=4, y=6 vào (1), được $\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$ hoặc z=12. Bộ ba (4,6,12) là một nghiệm của (1).

Nếu thay x-4, y=7 vào (1), được $\frac{1}{z}=\frac{1}{38}$; không có số nguyên z nào tương ứng với phân số này.

Cuối cùng nếu thay x=4, y=8 vào (1), được $\frac{1}{z}=\frac{1}{8}$ hoặc z=8. Bộ ba (4,8,8) là nghiệm của (1).

c) Ta tìm tất cả nghiệm mà x=5. Thay x=5 vào (1), được $\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ hoặc $\frac{3}{10}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Vì $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}$ nên

$$\frac{3}{10}\leq\frac{2}{y}$$

hoặc $y\leq\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$. Nhưng vì $y\geq x=5$ nên chỉ có thể xét 2 số y=5 hoặc y=6.

Nếu thay x=5, y=5 vào (1) thì được $\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$ hoặc z=10. Bộ ba (5,5,10) thoả (1).

Nếu thay x=5, y=6 vào (1) thì được $\frac{1}{z}=\frac{2}{15}$; không có số nguyên z nào tương ứng với phân số này .

d) Cuối cùng ta xét trường hợp x=6. Thay x=6 vào (1) và nhận được $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ hoặc $\frac{1}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Vì $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}$ nên $\frac{1}{3}\leq\frac{2}{y}$ hoặc $y\leq 6$. Vì $y\geq 6=6$ nên chỉ có y=6.

Nếu thay x=6, y=6 vào (1) thì được $\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$ hoặc z=6. Bộ ba (6,6,0) là nghiệm cuối cùng của (1) mà ta đã tìm được ở đây.

Ta tóm tắt các tính toán trước đây thành kết luận sau:

Phương trình (1) có tất cả 10 lời giải, cụ thể là:

(3,7,42); (3,8,42); (3,9,18); (3,10,15); (3,12,12); (4,5,20); (4,6,12); (4,8,8); (5,5,10) và (6,6,6).

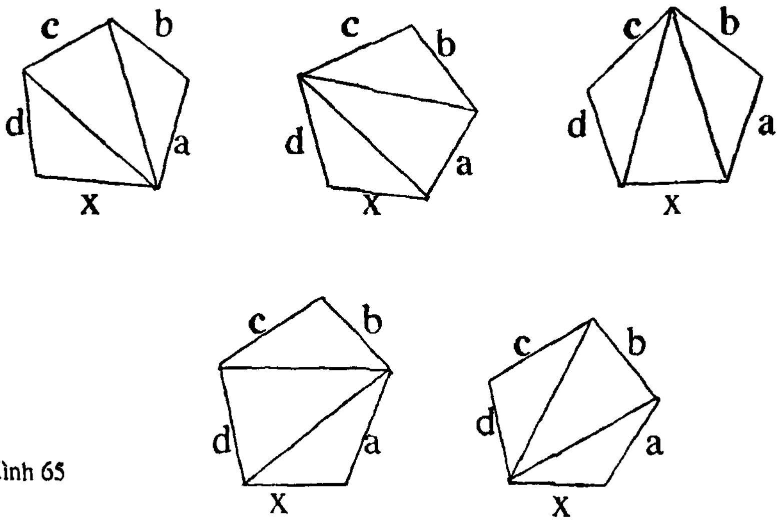
4.15. Có 5 cách nhóm tổng trên:

[(a+b)+c]-d; [a+(b+c)]+ d;

(a+b)+(c+d); a+[(b+c)+d];

a+[b+(c+d)].

Ta ký hiệu một cạnh của ngũ giác (phụ trợ) lồi bằng x, các cạnh còn lại *theo thứ tự* là a,b,c,d. Chia ngũ giác thành các tam giác bởi các đường chéo như hình 65 cho thấy. Sơ đồ thứ nhất của hình vẽ tương ứng với cách nhóm [(a+b)+c]+d; bốn hình vẽ còn lại theo thứ tự tương ứng với



Hình 65

bốn cách còn lại.

Chú thích: Năm 1833 Catanlan và Rodrigues đã cho trả lời tổng quát về câu hỏi đã nhắc tới ở trên. Họ đã khẳng định, số khả năng tách một đa giác lồi thành tam giác (bởi các đường chéo) được cho bởi công thức

$$U_n = \frac{1}{n-1}.\frac{2.6.10..(4n-14)(4n-10)}{1.2.3...(n-2)(n-1)}$$

5.1. Có thể được vì hình có 2 điểm nút cấp lẻ (điểm A,C).

5.2. Không thể được vì hình có 4 điểm nút cấp lẻ.

5.3. Không thể được vì hình chứa 5 điểm nút cấp (5) lẻ.

5.4. Nếu n là số chẵn thì ta không thể vẽ hình bằng một nét; hình chứa n điểm nút cấp (n-1), trong đó (n-1) lẻ. Nếu n là số lẻ thì ta có thể vẽ hình bằng một nét; ở đây tất cả các điểm nút là cấp chẵn.

5.5. Trên hình đã cho, ta ký hiệu số điểm nút cấp k bằng s_h Ta lập số

$x=1s_1+3s_3+4s_4+5s_5+6s_6+7s_7+...$ (1)

Ba điểm chấm ở cuối phương trình này có nghĩa là tiếp tục cộng chừng nào còn có thể tìm được một số s_k khác không. Dễ dàng thấy rằng, x là một số chẵn, vế phải của phương trình (1) được biểu diễn số các cung, đi từ các điểm nút cấp hai, ba, bốn, năm...một cách liên tiếp. Vậy thì x biểu diễn hai lần tất cả cung mà ta có thể tìm trên hình. Từ đó cho x=2y, y là một số tự nhiên thích hợp. Ta viết (1) dưới dạng

$2y = s_1+s_3+s_5+s_7+...)+(2s_3+4s_4+4s_5+6s_6+6s_7+...)$. từ đó có:

$$s_1+s_3+s_5+s_7+...=2y-(2s_3+4s_4+4s_5+6s_6+6s_7+...) \quad (2)$$

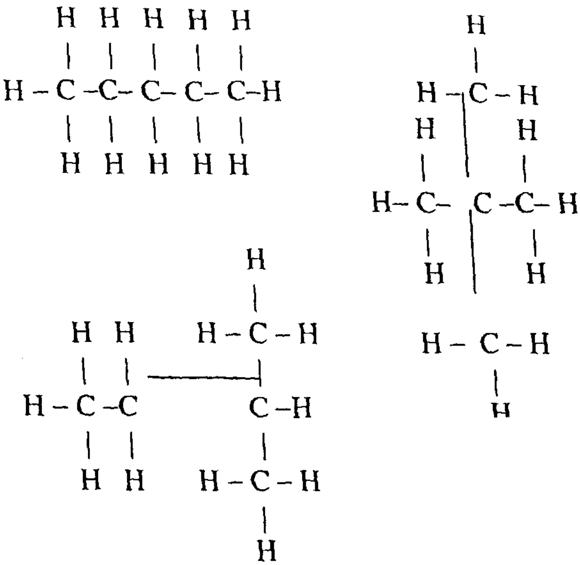
Con số $s_1+s_3+s_5+s_7+...$ biểu diễn số điểm nút cấp lẻ. Phương trình (2) biểu diễn con số là hiệu quả của 2 số chẵn; vì thế $s_1+s_3+s_5+s_7+...$ là một số chẵn.

Chú thích: Điều khẳng định mà chúng ta đã chứng minh, đã được Euler cho biết.

5.6. Hình có thể vẽ bằng hai nét. Nét thứ nhất dùng vẽ chu vi và một đường chéo, nét thứ hai vẽ các đường chéo còn lại. Tổng quát, số cực tiểu các nét vẽ hình cho trước đã được nhà toán học Đức J.Listing xác định trong thế kỷ trước. Định lý của ông như sau: nếu một hình cho trước có z điểm nút cấp lẻ thì có thể vẽ hình đó với số nét vẽ là $\frac{1}{2}z$, số nét vẽ ít hơn không đủ được.

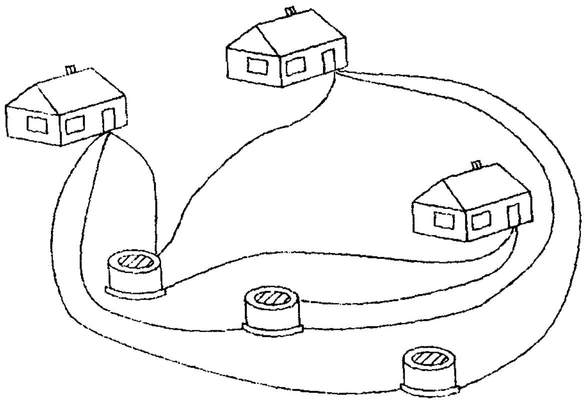
5.7. Hình có thể vẽ bằng 2 nét

5.8. Ta có thể tìm được 3 công thức cấu tạo:



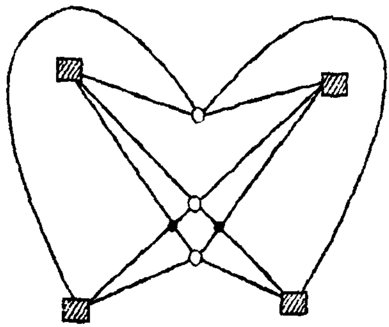
Nhà hoá học biết được 3 đồng đẳng của pentan: pentan thường, pentan đồng đẳng, tetramethyl - Methan

5.9. Có thể đi con đường, ví dụ như hình 66.

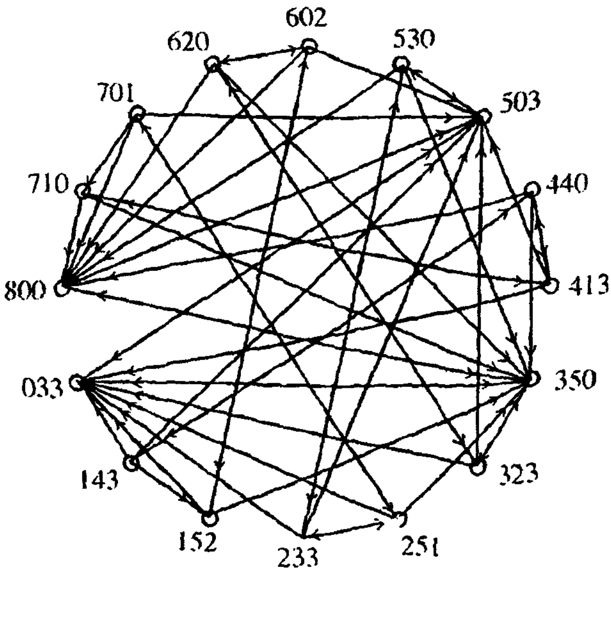


Hình 66

5.10. Có nhiều khả năng đối với đoạn dẫn, một trong chúng chỉ ra hình 67, trong đó hai ngã tư được đánh dấu đậm. Năm 1954 nhà toán học Balan K.Zarankiewicz đã giải quyết bài toán này (bài báo của ông được công bố trong tạp chí "Fundamenta Mathematical" (toán học cơ



Hình 67



Hình 68

bản), năm 1954, trang 134-145)

5.11. Ta nối làng D theo thứ tự với các làng A, B, C bằng cách này xuất hiện một dây dẫn dài 20 km. Ta sẽ phải chú ý rằng, dây dẫn này dạng một cây của hình đã nói. Nếu kế hoạch chứa nhiều hơn 4 làng thì bài toán nối các làng bằng một đường dây điện ngắn nhất là rất khó khăn. Năm 1926 giáo sư Boruvka đã giải quyết vấn đề này với những điều kiện hoàn toàn tổng quát. Trong những năm gần đây, một số kết quả toán học Tiệp Khắc đã có một số kết quả mới về bài toán này.

5.12. Ta ký hiệu số lít được chứa trong bình thứ nhất, thứ hai, thứ ba (trong một thời gian xác định) liên tiếp bằng x, y, z. Các số x, y, z nguyên và thoả

$x + y + z = 8$

$0 \leq x \leq 8$

$0 \leq y \leq 5$

$0 \leq z \leq 3$

Ta chỉ xét từng trạng thái có ít nhất một bình trống rỗng hoặc một bình hoàn toàn đầy. Vậy thì phải thoả ít nhất là một trong 6 phương trình:

$x=0$, $x=8$, $y=0$, $y=5$, $z=3$.

Ta dễ dàng biết rằng, các điều kiện đưa ra được thoả với 16 bộ ba sau[1] ; 800, 710, 701, 620, 602, 530, 503, 440, 413, 350, 323, 251, 233, 152, 143, 053

Bài toán đã trở thành đặc biệt rõ ràng nếu ta nhìn qua biểu đồ sau: Trong một mặt phẳng ta chọn 16 điểm (Trong hình 68, các điểm này do tính khái quát được biểu diễn nằm trên chu vi của một đường tròn không vẽ), một bộ ba cho ứng với một điểm. Ta vẽ một mũi tên từ điểm ký hiệu bộ ba xyz tới điểm ký hiệu bộ ba x'y'z' nếu trạng thái x'y'z' đạt được từ trạng thái xyz qua một lần sang, bằng cách đó, xuất hiện trong hình 68 toàn bộ 58 mũi tên.

Theo văn bản của bài toán, ta phải đạt được tình trạng 440 từ tình trạng 800, bên cạnh đó ta chỉ được phép hướng theo mũi tên.

Ta dễ dàng tìm được lời giải ngắn nhất của bài toán đặt ra, sử dụng 7 đoạn, lời giải này nhìn trong hình 68 bằng đường đậm. Nhưng cũng có những lời giải khác xin nhường cho bạn đọc tìm (chúng tôi xin tiết lộ, bài toán có tất cả 16 lời giải).

Chú thích: Bài toán này đã có trên 500 năm, lời giải đưa ra ở đây bằng đồ thị của nhà toán học Pháp G.Brunei, 1894.

---

[1] Bộ ba 800 có nghĩa là bình thứ nhất chứa 8 lít (đầy) trong khi đó bình thứ hai và thứ ba là rỗng. Bộ ba 710 có nghĩa là, bình thứ nhất chứa 7 lít, bình thứ haichứa 1 lít và bình thứ ba rỗng, các bộ ba còn lại có ý nghĩa tương tự.

6.1. Thoạt nhìn thì dường như phải kéo dài dây dẫn vài ba trăm hoặc ngàn mét để có thể nâng lên 10cm quanh đều xích đạo. Nhưng cần phải kiểm tra phỏng đoán này bằng tính toán [1].

Ký hiệu r là bán kính của quả đất, tính bằng cm. ($r \approx 638\ 000\ 000$ cm). Độ dài nguyên thuỷ của dây dẫn có thể biểu diễn bằng $2\pi r$ (với $\pi \approx 3,14$), độ dài của dây dẫn đó ở độ cao 10 cm trên mặt đất là $2\pi(r+10)$. Khác nhau giữa hai độ dài chính là phần kéo dài cần tìm:

$$2\pi(r+10) - 2\pi r = 20\pi \text{cm} \approx 62,8 \text{ cm}$$

Việc tính toán mang lại cho chúng ta một kết quả rất ngạc nhiên, ta chỉ cần kéo dài thêm 63 cm để thực hiện thí nghiệm có ý định.

6.2. Cạnh của mỗi tam giác là $\frac{1}{n}$, chu vi là $\frac{31}{n}$ và tổng các chu vi

$$n.\frac{31}{n} = 31$$

Như ta thấy, kết quả này không phụ thuộc vào n.

[1] Các điều kiện được mô tả trong bài toán của chúng ta có thể không thực tế một cách tự nhiên: nhưng trong bài toán này một kết quả nghịch lý của nó rất thú vị.

6.3. Ta hãy nhớ lại rằng, diện tích tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy thì một tam giác đều cạnh $\frac{1}{n}$ có diện tích

$$\frac{1^2\sqrt{3}}{4n^4}$$

Ta thấy, kết quả nhỏ hơn nếu tăng n và sẽ "dần tới" không.

6.4. Con bướm có thể bay theo những đường bất kỳ trên bàn, trên mặt bàn hoặc dưới bàn, bên cạnh đó, hệ thức:

$AS^2 + \overline{SC^2} = \overline{BS}^2 + \overline{SD^2}$ luôn được thực hiện.

Trước hết, chúng tôi muốn chứng minh cho một điểm S_0 nằm bất kỳ trong mặt bàn. Ký hiệu $\overline{AB} = a$ $\overline{BC} = b$ và chọn một hệ toạ độ vuông góc như hình 69 chỉ rõ.

Điểm S_0 có toạ độ là (x,y).

Có $\overline{AS^2{}_0} = x^2 + y^2$

$$\overline{S_0C^2} = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$\overline{AS^2{}_0} + \overline{S_0C^2} = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$$

Hơn nữa, có: $\overline{BS^2_0} = (x-a)^2 + y^2$

$\overline{S^2_0D^2} = x^2 + (y-b)^2$

$\overline{BS^2_0} + \overline{S_0D^2} = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2$

Từ đó có:

$\overline{AS^2_0} + \overline{S_0C^2} = \overline{BS^2_0} + \overline{S_0D^2}$

Nếu con bướm ở về phía trên (hoặc phía dưới) bàn một độ cao h tại một điểm S thì ta dẫn qua điểm S một đường thẳng đứng vuông góc với mặt bàn và ký hiệu chân đường thẳng đứng này là S_0. Có

$\overline{AS^2} = h^2 + \overline{AS^2_0}$

$\overline{SC^2} = h^2 + \overline{S_0C^2}$

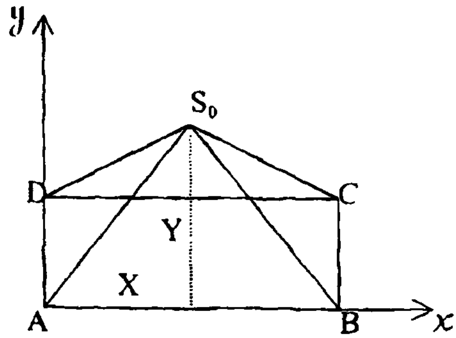
$\overline{BS^2} = h^2 + \overline{S_0B^2}$

$\overline{SD^2} = h^2 + \overline{S_0D^2}$

Từ đó dễ dàng đạt được đẳng thức:

$\overline{AS^2} + \overline{SC^2} = \overline{BS^2} + \overline{SD^2}$

6.5. Emil tố giác kẻ phạm tội là Karl và Rudolf, Johann lại cũng tố giác Karl và Rudolf và Karl tố giác Emil và Rudoft. Kẻ phạm tội không phải là ba thiếu niên, vì theo tuyên bố của thầy giáo, kẻ tội phạm phải được cả



Hình 69

ba người nhắc tới. Rudolf đã bị Emil, Johann và Karl buộc tội. Vậy thì nó chính là kẻ làm vỡ cửa kính.

6.6. Vì một con người có tối đa là 150 000 sợi tóc trên đầu nên ta có thể hình thành 150 001 nhóm. Nhóm thứ nhất gồm tất cả công dân của Praba không có tóc (số tóc bằng 0), nhóm thứ hai gồm những người có 3 sợi tóc. Cứ tiếp tục như vậy ta có nhóm cuối cùng gồm những người có 150 000 sợi tóc. Rất có khả năng, một trong các nhóm nêu trên không có một người nào. Vì rằng thành phố Praha có hơn 150 001 người nên phải có ít ra là một nhóm gồm ít nhất là 2 ngươì. Các người này sẽ có cùng một số tóc trên đầu [1].

6.7. Giả dụ nếu như có nhiều nhất là 2 học sinh được sinh trong tháng giêng, trong tháng hai, trong tháng ba

[1] Loại suy nghĩ dùng trong bài toán 6.6 và 6.7 được gọi nguyên lý nhóm con.

v.v... thì lớp đó có nhiều nhất là 3.12=36 học sinh. Nhưng vì lớp có 40 học sinh, ta có thể tìm được 4 (có thể nhiều hơn) học sinh được sinh cùng một tháng. Không biết cặn kẽ về lớp học đó thì không thể biết được là trường hợp này xảy ra vào tháng nào.

Nhưng ta không thể bảo đảm, trong lớp có 5 học sinh được sinh cùng tháng. Có thể xảy ra, ví dụ như, mỗi tháng trong số 10 tháng đầu, từ tháng giêng đến tháng mười, có 4 học sinh được sinh cùng một tháng, tháng 11 và tháng 12 không có học sinh nào.

6.8. Cậu bé có thể tiến hành như sau: đặt lên mỗi đĩa cân một nút bấm bất kỳ. Cân sẽ chỉ nút nào nhẹ hơn, bỏ nút nhẹ đó khỏi đĩa cân và thay vào đó một nút thứ ba. Trong lần cân này (lần thứ hai) lại thay nút nhẹ hơn bằng nút thứ tư. Cậu bé cứ tiếp tục đến khi hết cả 7 nút. Trong lần cân thứ sáu tìm được nút nặng nhất.

6.9. Để cho gọn, ta ký hiệu các khối lập phương theo thứ tự là A, B, C. Ta tiến hành như sau: Đặt A lên một đĩa cân B lên đĩa kia (cân lần thứ nhất). Nếu hai khối này nặng bằng nhau thì hình lập phương sai không phải là A, B mà là C (không cần phải cân tiếp, ta nói được là C nhẹ hoặc nặng hơn khối lập phương bình thường. Nếu trong lần cân thứ nhất, khối lượng không bằng nhau thì một trong hai khối A, B là sai. Từ đó khối C là không sai. Bỏ khối B khỏi đĩa cân và thay vào đó là khối C (cân lần thứ hai). Nếu xảy ra bằng nhau thì A bình thường và B sai. (Từ lần cân thứ nhất ta cũng biết B nhẹ hơn hoặc nặng hơn khối bình thường). Nếu không bằng nhau có nghĩa là A sai, từ kết quả đó cũng thấy được khối lượng sai là nhẹ hơn hoặc nặng hơn khối bình thường. Vậy ta đã chỉ ra, để tìm khối sai chỉ hai lần cân là đủ.

6.10. Để cho gọn, ta ký hiệu các khối lập phương theo thư tự là A, B, C, D, E, F, G. Việc cân có thể tiến hành, ví dụ như sau:

Trên một đĩa cân ta đặt A, B, trên đĩa khac ta đặt C, D (lần cân thứ nhất). Ta phân biệt 2 trường hợp a)nặng bằng nhau b) nặng khác nhau.

a) Nếu nặng bằng nhau điều đó có nghĩa A, B, C, D không sai. Ta lấy A, B, C, D khỏi cân và tách riêng. Tiến hành tiếp như sau: Trên một đĩa cân ta đặt A, trên đĩa cân kia đặt E (lần thứ hai). Nếu không bằng nhau thì E sai và kết thúc việc tìm. (Qua đó cũng biết được là khối sai nhẹ hoặc nặng hơn khối khối bình thường). Nhưng nếu như A và F nặng bằng nhau thì điều đó có nghĩa là F không sai và do đó C sai. Tuy nhiên không biết được khối sai là nặng hoặc nhẹ hơn khối bình thường, vì thế phải tiến hành cân lần thứ tư.

b) Ta quay lại lần cân thứ nhất và xảy ra trường hợp hai phía của cân không bằng nhau. Vậy thì một trong A, B, C, D là khối sai, E, F, G không sai và ta lấy một trong chúng, ví dụ như, E dùng cho các kiểm tra về sau. Ta lấy A khỏi một đĩa cân, đồng thời lấy C khỏi đĩa cân kia. Trên cân còn lại một bên là B và bên kia là D. Nếu không bằng nhau thì một trong hai khối B, D là sai. Ta chỉ cần, ví dụ như, bỏ B ra khỏi cân và thay E vào chỗ đó, và ta đã biết E không sai (cân lần thứ ba). Nếu E và D không bằng nhau thì D sai (đồng thời biết được khối sai nhẹ hơn hoặc nặng hơn khối bình thường). Trường hợp nếu B và D bằng nhau thì một trong A, C là sai. Lấy B, D khỏi cân và làm cho cân không còn khối nào. Sau đó, đặt Alên đĩa cân và E lên đĩa kia (cân lần thứ ba). Nếu A và E không bằng nhau thì A sai (và cũng biết ngay được khối sai nhẹ hoặc năng hơn khối bình thường). nếu A và E bằng nhau thì C sai . Vậy thì, ta đã chỉ rằng, để tìm khối sai chỉ cần 3 lần cân là đủ.

6.11. Giả dụ, tương ứng với một "Sestine" chứa 8 câu thơ trong mỗi tiết thơ là sơ đồ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 8, 1, 7, 2, 6, 3, 5, 4;

4, 8, 5,.1, 3, 7, 6, 2; 2, 4, 6, 8, 7, 5, 3, 1.

Một "Sestine" như thế có 4 tiết thơ.

Một cách tương tự, bạn đọc có thể biết rõ rằng, "Sestine" mà một tiết của nó có 10 câu thơ chứa 6 tiết thơ.

7.1. Gọi x là đơn vị khối lượng của rượu thứ nhất và y là đơn vị khối lượng của rượu thứ hai. Trong khối lượng thứ nhất có $\frac{40}{100}x$ đơn vị khối lượng rượu nguyên chất và $\frac{60}{100}x$ là đơn vị khối lượng nước. Trong khối lượng thứ hai có $\frac{70}{100}y$ đơn vị khối lượng rượu nguyên chất và $\frac{30}{100}y$ đơn vị khối lượng nước. Theo điều kiện của bài toán ta có

$$\frac{40x}{100}+\frac{70y}{100}=\frac{60x}{100}+\frac{30y}{100}$$

Sau khi giản ước, ta được:

$4x + 7y=6x + 3y$

$4y= 2x$

$2y=x$

$x : y=2 : 1$

Rượu pha tỷ lệ 2 : 1.

7.2. Nguyên liệu được pha trộn theo tỷ lệ 2 : 3 có nghĩa là, ta cần 2k đơn vị khối lượng của loại thứ nhất và 3k đơn vị khối lượng của loại thứ hai. Thành phần Antimon (theo đơn vị khối lượng) là:

Trong kim loại khắc chữ thứ nhất 0.20.2k = 0,40k

Trong kim loại khắc chữ thứ hai 0,14.3k = 0,42k

Trong hợp kim mới 0,82k

Khối lượng chung của hợp kim mới là 5k (đơn vị khối lượng). Bây giờ ta tính xem hợp kim kết quả chứa bao nhiêu phần trăm Antimon:

0,82k : 0,05k = 82 : 5 =16,4

Thành phần kẽm (theo đơn vị khối lượng) như sau:

Trong kim loại khắc chữ thứ nhất 0,05.2k = 0.10k

Trong kim loại khắc chữ thứ hai 0,07.3k = 0,21k

Trong hợp kim mới 0,31k

Bây giờ, ta tính hợp kim kết quả chứa bao nhiêu phần trăm kẽm:

.0,31 : 0,05k = 31 : 5 = 6,2

Thành phần chì (theo đơn vị khối lượng) là:

Trong kim loại khắc chữ thứ nhất 0,75.2k = 1,50k

Trong kim loại khắc chữ thứ hai 0,79.30 = 2,37k

Trong kim loại mới 3,87k

Ta tính, hợp kim kết quả chứa bao nhiêu phần trăm chì:

3,87 : 0,05k = 387 : 5 =77.4

Vậy thì ta đã tìm được, kim loại khắc chữ mới chứa 16,1% Antimon; 6,2% kẽm và 77,4% chì. Cuối cùng, chúng tôi muốn lưu ý rằng, chúng ta đã thực hiện tính toán cuối cùng (thành phần chì trong kim loại khắc chữ mới) chỉ để kiểm tra, vì ta biết rằng tổng 16,4+6,2+77,4=100.

7.3. Chúng ta chỉ ra rằng, hai ô tô bus này gặp nhau tại làng C (điều đó không có nghĩa là chúng đến đồng thời). Nếu trừ thời gian nghỉ tại C thì thời gian từ A đến B mất 80 phút. Trong đó. dùng $\overline{AC}$ là $\frac{4}{9}$ và đoạn còn lại $\overline{CB}$ là $\frac{5}{9}$.

ta tính

$$\frac{4}{9}.80 = \frac{320}{9} = 35\frac{5}{9}, \frac{5}{9}.80 = \frac{400}{9} = 44 - \frac{4}{9}$$

$$44 - \frac{4}{9} - 35\frac{5}{9} = 8\frac{8}{9}$$

Vậy thì ô tô bus đi từ B đến C muộn hơn ô tô bus đi từ A là $8\frac{8}{9}$ phút. Vì thời gian ở C lâu hơn $8\frac{8}{9}$ phút nên thực sự 2 ô tô này gặp nhau ở C.

7.4. Nếu ta muốn giải quyết vấn đề này thì trước hết phải làm rõ ý nghĩa các số liệu riêng lẻ có thể chỉ dẫn một cách gần đúng, sự tiêu thụ sản phẩm được hình thành như thế nào. giả thiết rằng, tỷ lệ số lần đi trong các làng riêng lẻ (đối với khoảng thời gian lớn nhất), chừng khoảng.

450 : 600 :150 : 900 : 40

Trong một năm, làng A đi 450 k lượt, các làng B, C, D, E, theo thứ tự 600k, 150k, 900k, 400k, ở đây k là một số dương, phụ thuộc vào kế hoạch hàng năm (tính theo đầu người) bao nhiêu sản phẩm.

Kho sẽ được xây dựng ở chỗ nào mà việc phân phối các sản phẩm theo kế hoạch là rẻ nhất.

Giả dụ kho được xây dựng tại A thì số kilômet đi - về trong một năm là

450k.0+600k.8+150k(8+13+3)+900k.(8+13+3)+400k.(8+13+3+8)= 480k +3150k + 21600k +12800k =42350k.

Nếu kho được xây dựng tại B thì số kilômét sẽ là

450k.8+600k.0+150k.13+900k.(13+3)+400k.(13+3+8)=3600k +1950k + 14400k+9600k =29550k.

Nếu xây kho tại C thì số kilômét là:

450k.(8+13)+600k.13+150k.0+900k.3+400k.(3+8)=9450k +7800k + 2700k+4400k =24350k

Nếu kho ở tại D thì số kilômet là:

450k.(8+13+3)+600k(13+3)+150k.3+900k.0+400k.8= 10800k +9600k + 450k+3200k =24050k.

Nếu kho ở tại E thì số kilômét là:

450k.(8+13+3)+600k.(13+3+8)+150k.(3+8)+900k.8+400k.0=14400k +14400k + 1650k+7200k =37650k.

Ta nhận được các kết quả theo thứ tự: 42350k, 29550k, 24350k, 37650k. Từ đó thấy ngay rằng, kho xây dựng tại làng D là tiện lợi hơn cả.

7.5. ta ký hiệu chiều dài của tàu (theo bước chân) bằng x. Trước khi Cuốc bước một bước thì tàu đã chạy về trước y bước của em dọc đường đậu tàu. Trước khi Cuốc bước được 120 bước thì đầu cuối của tàu đã dịch về phía trước 120y bước. Ta thấy: 120 bước của Cuốc phải bằng x+120y.

theo hướng ngược lại phải 30 bước dọc theo tàu. Nhưng, trong khi đó thì đầu cuối kia của tàu đã gần lại 30y, tức là x-30y=30. Vậy ta có hệ phương trình:

$x+120y=120$

$x-30y=30$

Ta có thể giải hệ này bằng cách, ví dụ như lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai theo từng vế, ta được:

$120y + 30y = 120 - 30$ hoặc $150y = 90$. Từ đó.

$$y = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$$

Nếu thay kết quả này vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $x - 30.\frac{3}{5} = 30$

hoặc $x=48$

Vậy ta khẳng định, tàu đo được 48 bước chân của Cuốc.

7.6. Ta tính khối lượng nước (theo decimet khối, dm^3) mỗi giờ chảy vào quá ống dẫn, tức là, ta xác định thể tích của một trụ tròn, bán kính đáy 1dm và cao 36000 dm:

$$V = \pi.1dm^2.36000dm = 36000\pi dm^2$$

Trong 8 giờ nước chảy vào qua 2 ống là 8.2.V, tức là khoảng 1.81000 lít. Để rửa chỉ cần khoảng 9750 dt tức là 975000 lít. Vậy thì cả 2 ống dẫn đủ nước.

7.7. Mỗi dexiton than thu được còn mới chứa 2kg nước thì khối lượng than khô hoàn toàn là 98 kg. Do ảnh hưởng của thời tiết, than chứa 13% nước, vậy thì có 87% than khô. Từ mỗi dexiton xuất hiện một khối lượng tương ứng với 87% 98kg. Ta tính 98 : 87 ≈ 1,126, đó là gần bằng 1%. Vậy thì khối lượng mỗi dexiton tăng lên gần 112,6 kg, tức là nó làm lớn hơn 12,6 %.

7.8. Nếu 5 thợ nề đã thực hiện nhiệm vụ trong 14 ngày được một nửa, một thợ nề trong 1 ngày làm được $\frac{1}{140}$ công việc. Trong 6 ngày 5 người thợ đóng góp $\frac{5.6}{140}\frac{3}{14}$ phần công việc, tính, phần lớn của công việc còn lại:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{3}{14}=\frac{14-7-3}{14}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$$

Vậy thì còn lại $\frac{2}{7}$ công việc. Số công nhân phải hoàn thành phần này trong 6 ngày, ta được, nếu chia:

$$\frac{2}{7}:\frac{6}{140}=\frac{2}{7}.\frac{140}{6}=6\frac{2}{3}$$

Vậy thì, phải thêm cho công trình 7 công nhân nữa thì ta hoàn toàn hy vọng, công việc được làm xong sớm hơn qui định.

Chú thích: Trong các bài toán loại này, ta cần đảm bảo rằng việc tính là gần đúng. Cái căn bản xuất hiện ở đây là khả năng làm việc của những thợ nề riêng lẻ (hầu như không bao giờ hoàn toàn như nhau) cũng như điều kiện làm việc trong các ngày riêng lẻ. Cần chú ý rằng, vấn đề đặt ra hoàn toàn có nghĩa. Nếu ví dụ như ta đòi hỏi trong câu hỏi của bài tập 7.8 rằng nửa thứ hai của bức tường phải xây xong trong 1 ngày, thì dễ dàng tính được là cần 65 thợ nề. Nhưng có lẽ 70 thợ nề không thực hiện được nhiệm vụ này trong 1 ngày, vì họ kéo dài.

7.9. Ta ký hiệu chiều dài của khổ tiêu chuẩn AO bằng a chiều rộng bằng b (theo milimet). Vậy thì khổ AI là hình chữ nhật cạnh $\frac{a}{2}$, b rõ ràng $\frac{a}{2}$ là bề rộng và b là chiều dài của khổ AI, vì nếu không thì yêu cầu đồng dạng không thực hiện được.

Ta có

$$a : b = b : \frac{a}{2}$$

hoặc $\frac{a^2}{2} = b^2$. Vì a, b là số dương nên $\frac{a}{\sqrt{2}} = b$ hoặc $a:b = \sqrt{2}$. Qua đó tính được tỷ lệ cạnh của khổ theo tiêu chuẩn.

Vì diện tích của khổ AO là 1 000 000 mm^2, ta được phương trình a.b = 1 000 000 mm^2. Thay $a = b\sqrt{2}$ thì được $b^2 . \sqrt{2} = 1\,000\,000\ mm^2$ hoặc

$$b = \frac{1000}{\sqrt{2}} mm$$

Bạn đọc biết logarit có thể tính được dễ dàng $b \approx 841$ mm. Có $\sqrt{2} \approx 841.\ 1,414$, $\sqrt[4]{2} \approx 1,414mm \approx 1,19$ và từ đó b ≈ 1000 mm : 1,19. Kích thước này quay lại gần đúng b ≈ 841 mm.

Hơn nữa ta tính $a = \sqrt{2} \approx 841.1,414 \approx 1189mm$. Vậy thì khổ theo tiêu chuẩn AC là một hình chữ nhật, rộng 841 mm dài 1189mm. Tỷ lệ cạnh của các khổ A_1, A_2, A_3 tính được một cách dễ dàng (làm tròn tới milimet). Khổ A_1 rộng 594 mm và dài 841 mm, khổ A_2 rộng 420 mm và dài 594 mm, khổ A_3 rộng 297 mm dài 420 mm v.v...

7.10. Trong 10 năm người nghiện thuốc chi khoảng chừng [1].

10.365.4 = 14600đồng [2]

Chúng ta còn tính, người nghiện thuốc tiết kiệm được bao nhiêu trong 10 năm nếu tiền chi hàng ngày được gửi vào quỹ tiết kiệm. Để đơn giản ta giả thiết rằng 10 năm dài anh ta luôn luôn gửi vào ngày 1 tháng giêng số tiền 1460 đồng, tương ứng số chi hàng năm của anh ta. Quỹ tiết kiệm lãi suất bằng 2% số gửi vào theo qui tắc tính lãi, tức là tính lãi cả số lãi của năm trước.

---

[1] Vì chỉ nói đến gần đúng nên ta không kể những năm chuyển biến.
[2] Đây là đồng Mark. đơn vị tiền tệ của CHCD Đức (N..D)

Vào cuối của năm thứ nhất lãi sẽ là:

$$\frac{2.1460}{100} = 0.02.1460 \text{ đồng}$$ [3]

Tổng tiền gửi vào thành

1460 đồng +0,02.1460 đồng = 1460 đồng. (1+0,02) = 1460 đồng.1,02 đồng

Vào đầu năm thứ hai, người gửi tiết kiệm sẽ gửi vào như vậy là 1460.1,02 đồng và số tiền này sẽ được tính lãi cho năm đó. Lãi đối với năm thứ hai là 0,02.(1460.1,02) đồng.

Số tiền gửi vào kể cả lãi ở cuối năm thứ hai, (1460đồng + 1460.1,02 đồng) + 0,02 (1460 + 1460.1,02) đồng = (1460 + 1460.1,02). (1 +0,02) = 1460.1,02 + $1460.1,02^2 = 1460\,(1,02 + 1,02^2)$

Tương tự, ta tính một cách dễ dàng số tiền gửi vào cuối năm thứ ba $1460\,(1,02 + 1,02^2 + 1,02^3)$

Vào cuối năm thứ tư $1460\,(1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + 1,02^4)$

Vào cuối năm thứ 10 tính được số tiết kiệm kể cả lãi $1467\,(1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + ... + 1,02^9 + 1,02^{10})$ đồng.

Bài toán bây giờ là, tính tổng

$x = 1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + ... + 1,02^9 + 1,02^{10})$ (1)

[3] Chúng tôi không thực hiện phép nhân đến kết thúc. Chúng tôi nhận thấy, tốt nhất là cho kết quả dưới dạng "không hoàn thành".

Bạn đọc nắm chắc định lý về cấp số nhân, tính tổng này dễ dàng theo một công thức đơn giản; người ta có thể giảm nhẹ tính toán nhờ cái gọi là bảng lãi xuất. Nhưng chúng tôi muốn tiến hành hoàn toàn độc lập với những kiến thức toán học có tính phổ thông này. Để thực hiện các luỹ thừa của 1,02 và lấy tổng kết quả một cách không mệt nhọc gì ta tiến hành như sau [1]: Nhân cả hai vế của phương trình (1) với 1,02 và nhận được

$1,02x = 1,02^2 + 1,02^3 + 1,02^4 + ... + 1,02^{10} + 1,02^{11})$ (2)

Lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) theo vế, được

$1,02x - x = (1,02^2 + 1,02^3 + 1,02^4 + ... + 1,02^{10} + 1,02^{11}) - (1,02 + 1,02^2 + 1,02^3 + ... + 1,02^{10})$

Giản ước cả hai vế, ta được

$0,02x = 1,02^{11} - 1,02$

hoặc $x = \dfrac{1,02^{11} - 1,02}{0,02}$ (3)

Ta tính luỹ thừa $1,02^{11}$ bằng cách nhân liên tiếp, lấy loga hoặc tra bảng lãi; kết quả là $1,02^{11} \approx 1,24337$. Nếu thay nó vào (3) sẽ được.

$$x \approx \frac{1,24337 - 1,02}{0,02} = \frac{0,22337}{0,02} = \frac{22,337}{2} \approx 11.168$$

---

[1] Hãy so sánh suy nghĩ tương tự trong chương "số vĩ đại- sự vĩ đại của số"

Bằng cách này ta đã tính được số x quay lại bài toán tiết kiệm. Vào cuối năm thứ 10 tiết kiệm được $1.460.x \approx 1460.11,168 = 16305,28$ đồng. Vậy tổng toàn bộ kể cả lãi, tính được trong mười năm khoảng chừng 16305 đồng và quỹ tiết kiệm đã trả lãi toàn bộ là 1705 đồng.

7.11. Ta tính, bình quân mỗi ngày học sinh thu được bao nhiêu phần tư. Ta chia số thu nhập 2242 phần tư cho $9.31 = 279$. Có $2242 : 279 \approx 8,03$. Mỗi học sinh của lớp thứ nhất đã thu được bình quân hàng ngày 8,03 phần tư. Lớp thứ hai đã làm việc như sau: 4 ngày có 33 học sinh và 4 ngày có 32 học sinh. Ta chia số thu nhập 2125 phần tư cho $433 + 432 = 260$. Có $2125 : 260 \approx 8,17$. Mỗi học sinh của lớp thứ hai thu được bình quân hàng ngày 8,17 phần tư. Năng suất của lớp thứ hai tốt hơn.

7.12. Không tính toán ta thấy rằng kết quả 13 trong nhóm các số liệu là đáng chú ý. Qua tính toán, ta dễ dàng tin chắc, thử nghiệm 0,13 lệch lớn nhất so với trung bình cộng. Nếu cộng tất cả 20 số liệu được 1,58: trung bình cộng như vậy là 0,09. Số đo 0,13 lệch với trung bình cộng thực sự lớn nhất; độ lệch tương ứng với trung bình cộng là $0,079-0,13 = -0,051$

7.13. Các độ lệch với trung bình cộng là 0,05; 0; 0,02; -0,16; -0,01; -0,02; -0,03; 0,03; 0,02. Bình phương của các độ lệch đó là 0,0025; 0; 0,0004 ; 0,0096; 0,0001; 0,0004; 0,0009; 0,0009; 0; 0,0004, tổng của các bình phương này là 0,0092 và trung bình cộng cần tìm là 0,00092.

Chú thích: các tính toán tương tự rất thường có trong thực tế, đặc biệt nếu ta muốn khẳng định sẽ "dồn đống" hoặc "vung vãi" quanh trung bình cộng. Kết quả của tính toán của chúng ta, các giá trị đo được "dồn đồng" quanh trung bình cộng 3,15 và sự tản mạn là bé(0,00092)

PHẦN THÊM VÀO CỦA TÁC GIẢ CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ BA

Kể từ khi xuất bản tập sách, tôi đã nhận được rất nhiều thư của bạn đọc. Lần xuất bản thứ ba này xin được kết thúc bằng trích từ hai bức thư.

Bạn Adolf Kodym ở Praha giải tỉ mỉ bài toán 3.6. Bài toán yêu cầu chỉ ra một số chữ số đầu tiên và cuối cùng của số 5^{100} trong hệ thập phân. Bạn Kodym đã tìm được biểu thức đầy đủ con số vĩ đại này:

5^{100}= 7 888 609 052 210 118 054 117 285 652 827 862 296

732 064 351 090 230 047 702 789 306 640 625.

Bạn nào ham thích tính toán số có thể tự kiểm tra kết quả này.

Bà Larissa Dressler ở Dresden đã chú ý đến bài toán 6.10 và đã viết trong thư của mình một lời giải khác, lời giải này có ưu điểm là, qua ba lần cân người ta có thể khẳng định,khối lập phương sai nhẹ hơn hoặc nặng hơn các khối lập phương còn lại. Chúng tôi xin được công bố bức thư này.

Trong số các khối A, B, C, D, E, F, G, chúng ta đặt, trong lần cân đầu tiên, các khối C, D lên đĩa kia. Chúng ta phân biệt ba trường hợp:

a) Nếu A, B nặng hơn C, D thì trong lần cân thứ hai chúng ta đặt A lên một đĩa cân B lên đĩa kia. Nếu A nặng hơn B thì A là khối lập phương cần tìm và chúng ta biết rằng. khối sai nặng hơn khối bình thường. Nếu A nhẹ hơn B thì B là khối sai và nặng hơn khối bình thường. Trong cả hai trường hợp này chúng ta thấy rằng để nhận được câu trả lời theo yêu cầu, chỉ cần cân hai lần là đủ. Còn lại trường hợp, trong lần cân thứ hai, A và B nặng bằng nhau. Chúng ta phải cân lần thứ ba. Trên một đĩa đặt khối C và đĩa kia đặt khối D. Bây giờ thì không xảy ra khả năng bằng nhau về khối lượng, vì trong lần cân thứ nhất đã chỉ ra rằng, cặp A.B nặng hon cặp C,D. Vậy thì, trong lần cân thứ ba này, hoặc là C nặng hơn D và D sai, tức là, khối sai nhẹ hơn khối bình thường; hoặc là C nhẹ hơn D, suy ra C sai và nhẹ hơn khối bình thường.

b)Chúng ta quay trở lại kết quả của lần cân đầu tiên va fxét trường hợp A, B nặng bằng C, D. Trong lần cân thứ hai, chúng ta đặt E lên một đĩa và F lên đĩa kia. Chúng ta nghiên cứu tất cả ba kết quả có thể có của lần cân này.

Nếu E nặng hơn F, thì lần cân thứ ba giữa E và G sẽ quyết định. Khối E không thể nhẹ hơn G vì theo kết quả của lần cân thứ hai, một trong các khối E, F, G có một khối lượng khác. Từ đó có, hoặc E nặng hơn G (E là khối nặng nhất) hoặc E và G nặng như nhau (thì F là khối nhẹ nhất).

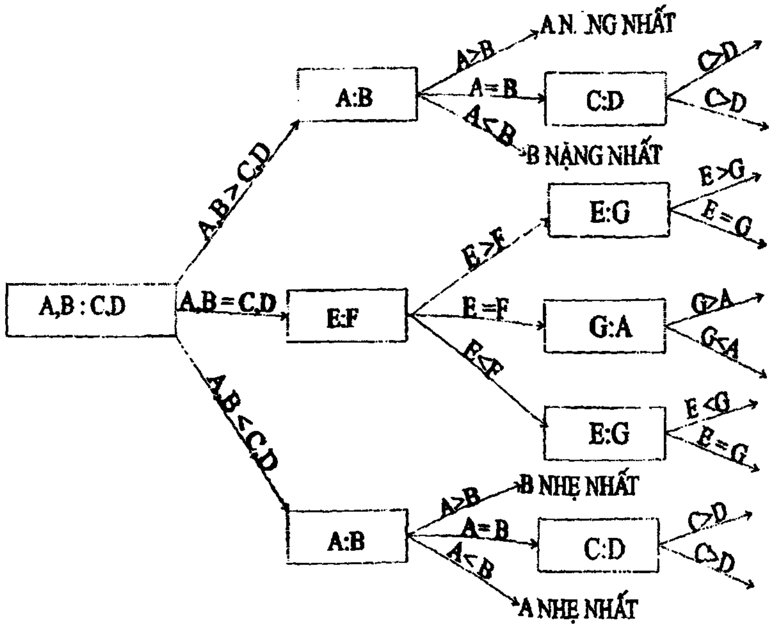
Nếu E và F trong lần cân thứ hai nặng như nhau thì chúng ta quyết định trong lần cân thứ ba giữa A và G (nhưng cũng có thể thay A bằng một khối khác chọn trong các khối đã kiểm tra). Nếu A nhẹ hơn G thì G là nhẹ nhất, nếu A nhẹ hơn G thì G là nặng nhất.

Bây giờ chúng ta còn phải quyết định xem, sẽ phải tiến hành tiếp như thế nào, nếu trong lần cân thứ hai rút ra rằng E nhẹ hơn F. Nhưng phương án này tương tự như phương án đã nói. Trong lần cân thứ ba chúng ta lại xét E và G. E không nặng hơn G và đồng thời nhẹ hơn F. Nếu E và G nặng như nhau thì F là nặng nhất. Nhưng nếu E nhẹ hơn G thì E là nhẹ nhất.

c) Nếu trong lần cân thứ nhất cặp A, B nhẹ hơn cặp C, D thì một phương án của trường hợp phía dưới a) là đúng. Trong lần cân thứ hai chúng ta so A và B. Nếu rút ra rằng A nặng hơn B thì B là khối nhẹ nhất và dương nhiên nếu A nhẹ hơn B thì phương pháp này kết thúc sau lần cân thứ hai. Vậy thì cuộc bàn luận giới hạn chỉ cho trường hợp, trong lần cân thứ hai xảy ra sự bằng nhau về khối lượng. Khi đó, lần cân thứ ba giữa C Và D là quyết định. Ở đây không thể có sự bằng nhau. Khối lập phương sai xuất hiện như là khối nặng nhất.

Ta thấy, sự mô tả khá phức tạp và rất mệt nhọc nếu người ta muốn theo dõi quá trình này. Vì vậy, tốt nhất là trực quan hoá lời giải bằng đồ thị như bà Dressler đã đề nghị (hình 70).

Mỗi hình chữ nhật tương ứng một lần cân. Ghi A,B:C, D trong hình chữ nhật bên trái có nghĩa là trên một đĩa cân đặt A, B và trên đĩa kia đặt C, D. Cách ghi A:B có nghĩa tương tự v.v...Ghi dọc mũi tên chỉ rằng, khối lập phương nào nặng hơn (>) hoặc nhẹ hơn(<) hoặc (=). Sơ đồ luôn



• Hình 70

luôn chỉ khối lập phương sai và nó nặng hơn, hoặc nhẹ hơn khối lập phương bình thường.

MỤC LỤC

www.facebook/otoanhoc2911

Chịu trách nhiệm xuất bản:

PHẠM NGÀ

Biên tập:

HÀ MẠNH CƯỜNG

Trình bầy bìa:

NGUYỄN MẠNH THẮNG

KHÔNG SỢ TOÁN HỌC

JIRI SEDLACEK

Giáo sư - Tiến sĩ Toán học Tiệp Khắc

Sách tập hợp có hệ thống những bài toán vui, những nghịch lý toán học thú vị của nhiều nhà toán học nổi tiếng thế giới.

Bạn đọc sẽ nâng cao được tư duy, kỹ năng phán đoán các tình huống toán học và cách giải quyết các dạng toán.

KHÔNG SỢ TOÁN HỌC còn mang lại cho bạn đọc sự giải trí tích cực, bổ ích và nhất là đánh thức trí thông minh tiềm ẩn trong mỗi người.

Chỉ cần một chút cố gắng làm quen với tập sách này cùng với quá trình học toán, chắc chắn bạn sẽ "không sợ toán học".