TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2013 Số 438

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 50

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN DÃY SỐ CÓ QUY LUẬT

NGUYỄN THỊ MINH CHÂU
(GV Trường THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Hà Nội)

Với dạng bài tập về dãy các số, dãy các phân số có quy luật, ta thường dùng các phương pháp sau:

- Phương pháp phân tích số hạng tổng quát rồi khử liên tiếp để tính tổng các số hạng của dãy số, dãy phân số có quy luật, giải toán tìm x, và các bài toán có liên quan.

Để tính tổng hữu hạn $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, ta biểu diễn $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ qua hiệu hai số hạng liên tiếp của một dãy số khác. Chẳng hạn $a_1 = b_1 - b_2$; $a_2 = b_2 - b_3$; …; $a_n = b_{n-1} - b_n$

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = b_1 - b_n$.

Để tính tích hữu hạn $P_n = a_1.a_2.a_3....a_n$, ta biến đổi $a_i\ (i=\overline{1,n})$ về thương của hai số hạng liên tiếp nhau $a_1 = \frac{b_1}{b_2}$; $a_2 = \frac{b_2}{b_3}$; …; $a_n = \frac{b_{n-1}}{b_n}$

$$\Rightarrow P_n = a_1.a_2.a_3....a_n = \frac{b_1}{b_2}.\frac{b_2}{b_3}.....\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_1}{b_n}.$$

- Phương pháp làm trội để chứng minh bất đẳng thức và các bài toán liên quan. Ta thường dùng tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

Dạng 1. TÍNH TỔNG CỦA DÃY SỐ HỮU HẠN CÓ QUY LUẬT

★ **Thí dụ 1.** *Tính tổng*

$$S = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + ... + \frac{2n+1}{\left(n(n+1)\right)^2} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{2i+1}{\left(i(i+1)\right)^2} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \text{ với } i \in \mathbb{N}^*.$$

Thay lần lượt $i = 1, 2, ..., n$, ta có

$$S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \square$$

★ **Thí dụ 2.** *Với $n \in \mathbb{N}^*$ và $a_n = (-1)^n.\frac{n^2+n+1}{n!}$.*

Tính tổng $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2013}$.

Lời giải. Ta tính được $a_1 = -3$.

$$a_n = (-1)^n.\left(\frac{n^2}{n!} + \frac{n+1}{n!}\right) = (-1)^n.\left(\frac{n}{(n-1)!} + \frac{n+1}{n!}\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thay lần lượt $n = 2, 3, ..., 2013$ ta có

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2013} =$$

$$-3 + \left(\frac{2}{1!} + \frac{3}{2!}\right) - \left(\frac{3}{2!} + \frac{4}{3!}\right) + ... - \left(\frac{2013}{2013!} + \frac{2014}{2013!}\right)$$

$$= -3 + \frac{2}{1!} - \frac{2014}{2013!} = -1 - \frac{2014}{2013!}. \square$$

Chú ý. Có thể biểu diễn

$$a_n = (-1)^n.\left(\frac{n}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right)$$

để tính tổng S nói trên theo cách khác.

★ **Thí dụ 3.** *Tính tổng $S_n = \sum_{i=1}^{n} i.(3i-1)$.*

Lời giải. Ta có

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i.(3i-1) = \sum_{i=1}^{n}\left(3i^2 - i\right) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Do $3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$;

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ nên

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

Suy ra $S_n = n^2(n+1)$. □

★**Thí dụ 4.** *Tìm tỉ số của A và B, biết A là tích có $(n-1)$ thừa số (với $n \geq 2$).*

$$A = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3+4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{1+2+\ldots+n}\right)$$

và $B = \frac{n+2}{n}$.

Lời giải. Nhận thấy, với $i \in \mathbb{N}^*$ thì

$$1 - \frac{1}{1+2+\ldots+i} = 1 - \frac{2}{i(i+1)} = \frac{(i-1)(i+2)}{i(i+1)}.$$

Thay lần lượt $i = 2, 3, \ldots, n$ ta được

$$A = \frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}\ldots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}.$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1).4.5.6\ldots..(n+2)}{2.3\ldots(n-1).n.3.4.5.6\ldots..(n+1)} = \frac{n+2}{3n}.$$

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{n+2}{3n} : \frac{n+2}{n} = \frac{1}{3}$. □

Dạng 2. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN BẤT ĐẲNG THỨC

★**Thí dụ 5.** *Chứng minh rằng*

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{101}{3^{101}} < \frac{3}{4}.$$

Lời giải. Ta có $2A = 3A - A$

$$= \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \ldots + \frac{100}{3^{99}} + \frac{101}{3^{100}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{101}{3^{101}}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{100}}$$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Do đó $A < \frac{3}{4}$. □

Tổng quát

Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ và $a > 1$ ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \ldots + \frac{n}{a^n} < \frac{a}{(a-1)^2}.$$

★**Thí dụ 6.** *Cho tổng*

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}.$$

Tìm số hữu tỉ a nhỏ nhất để $S_n < a$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Với $k \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\frac{1}{1+2+3+\ldots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Thay lần lượt $k = 1; 2; 3; \ldots; n$, ta được

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1} < 2.$$

Vậy $S_n < 2$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $a = 2$ là số hữu tỉ nhỏ nhất để $S_n < 2$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy, giả sử tồn tại số hữu tỉ $b < 2$ sao cho $S_n < b$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $S_n = 2 - \frac{2}{n+1} < b$

$\Leftrightarrow 2 - b < \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow n < \frac{b}{2-b}$ (do $b < 2$) với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Điều này không xảy ra khi ta chọn n là số nguyên sao cho $n > \frac{b}{2-b}$.

Vậy số hữu tỉ cần tìm là $a = 2$. □

Dạng 3. TOÁN VỀ CHIA HẾT

★**Thí dụ 7.** *Viết tổng* $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n}$ *với* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 4$ *dưới dạng phân số tối giản* $\frac{P}{S}$. *Chứng minh rằng P chia hết cho 8.*

Lời giải. *Nhận xét.* Nếu phân số tối giản $\frac{a}{b}$ là tổng của những phân số tối giản mà tử số của mỗi phân số đó chia hết cho 2^k thì a cũng chia hết cho 2^k (1). Thật vậy, do 2^k và mẫu số của các phân số tối giản nguyên tố cùng nhau nên 2^k và mẫu số chung b của chúng cũng nguyên tố cùng nhau. Lấy 2^k làm thừa số chung, suy ra a chia hết cho 2^k.

Với $n=4$ ta có $\dfrac{P}{S}=\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\dfrac{2^3}{3}+\dfrac{2^4}{4}=\dfrac{32}{3}$ nên $P=32\,\vdots\,8$.

Với $n=5$ ta có $\dfrac{P}{S}=\dfrac{32}{3}+\dfrac{2^5}{5}=\dfrac{256}{15}$ nên $P=256\,\vdots\,8$.

Với $n\ge 6$ ta có $\dfrac{P}{S}=\dfrac{256}{15}+\dfrac{2^6}{6}+\dfrac{2^7}{7}+...+\dfrac{2^n}{n}$.

Đặt $\dfrac{2^6}{6}+\dfrac{2^7}{7}+...+\dfrac{2^n}{n}=\dfrac{x}{y}$ với $x,y\in\mathbb{N}^*$ và $(x;y)=1$.

Các phân số của tổng trên đều có dạng $\dfrac{2^k}{k}=\dfrac{2^3.2^{k-3}}{k}$. Với $k\ge 6$ ta luôn có $2^{k-3}>k$.

Do đó phân số $\dfrac{2^k}{k}$ sau khi rút gọn thành phân số tối giản thì tử số của nó chia hết cho 2^3. Theo nhận xét trên suy ra $x\,\vdots\,2^3$, đặt $x=2^3.k$.

Ta có $\dfrac{P}{S}=\dfrac{256}{15}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{256}{15}+\dfrac{2^3k}{y}=2^3\left(\dfrac{32}{15}+\dfrac{k}{y}\right)$

Do đó $P\,\vdots\,2^3$ hay $P\,\vdots\,8$. Với $\forall n>3$. □

Dạng 4. TOÁN TÌM x

★ **Thí dụ 8.** *Tìm x, biết rằng*

a) $\left(\dfrac{1}{11.13}+\dfrac{1}{13.15}+...+\dfrac{1}{19.21}\right):\dfrac{0,75x+4}{x}=\dfrac{4}{231}$;

b) $\dfrac{1}{5.8}+\dfrac{1}{8.11}+...+\dfrac{1}{x(x+3)}=\dfrac{101}{1540}$.

Lời giải

a) Ta có $\dfrac{1}{11.13}+\dfrac{1}{13.15}+...+\dfrac{1}{19.21}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{15}+...+\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{21}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{21}\right)$. Do đó

$\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{21}\right):\dfrac{0,75x+4}{x}=\dfrac{8}{231}\Leftrightarrow\dfrac{0,75x+4}{x}=\dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 0,75x+4=1,25x\Leftrightarrow 0,5x=4\Rightarrow x=8.$

b) Ta có $\dfrac{1}{a(a+3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+3}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{5.8}+\dfrac{1}{8.11}+\dfrac{1}{11.14}+...+\dfrac{1}{x(x+3)}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{14}+...+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{x+3}\right).$

Dẫn đến $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{x+3}\right)=\dfrac{101}{1540}$. Tìm được $x=305$.

BÀI TẬP

1. Tính tổng $S=a_1+a_2+a_3+...+a_{2013}$.

Biết rằng $a_k=\dfrac{3k^2+3k+1}{(k+k^2)^3}$ với mọi $k=\overline{1;2013}$.

2. Tính tổng

$$S=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}.$$

3. Chứng minh rằng

$$S=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+...+\frac{2013}{3^{2014}}<\frac{1}{4}.$$

4. Cho tổng $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{18}=\dfrac{a}{b}$ với $(a;b)=1$.

Chứng minh rằng b chia hết cho 2431.

5. Tìm x, biết rằng

a) $\left(\dfrac{17}{13}-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{52}\right)\right)\left(x-\dfrac{66}{44}\right)=\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\dfrac{1}{10.13}$;

b) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+...+\dfrac{1}{x(x+1):2}=1\dfrac{1991}{1993}$.

6. Tính $\dfrac{A}{B}$, biết rằng

$$A=\frac{1}{2.32}+\frac{1}{3.33}+...+\frac{1}{n(n+30)}+...+\frac{1}{1973.2003};$$

$$B=\frac{1}{2.1974}+\frac{1}{3.1975}+...+\frac{1}{n(n+1972)}+...+\frac{1}{31.2003}.$$

Mong rằng có thật nhiều bạn đọc yêu thích môn toán và tiếp tục tìm tòi phát hiện thêm nhiều các bài tập hay cùng chuyên đề này giới thiệu cho chúng ta cùng thưởng thức.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH THÁI BÌNH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 437, tháng 11 năm 2013)

Bài 1. Ta có

$$x=\sqrt{\frac{1}{2(\sqrt{3}-1)}-\frac{3}{2(\sqrt{3}+1)}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$ nên

$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2+2x-1$.

Do đó $A=\frac{2x^{2012}(2x^2+2x-1)+2x+1}{(2x^2+2x-1)+x}$

$$=\frac{2x+1}{x}=\left(2.\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1\right):\frac{\sqrt{3}-1}{2}=3+\sqrt{3}.$$

Bài 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left((2x+3)-2\sqrt{x^2+x+2}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=\sqrt{x^2+x+2}\\x+2=\sqrt{x^2+x+2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{2}{3}.\end{array}\right.$$

Tập nghiệm của phương trình là $\{1;-\frac{2}{3}\}$.

Bài 3. Ta có

$$2y(2x^2+1)-2x(2y^2+1)+1=x^3y^3$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y)(2xy-1)=x^3y^3-1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 16(x-y)=4x^2y^2+2xy+1-\frac{7}{2xy-1} \quad (2)$$

Do x, y nguyên nên vế trái của (2) nguyên, suy ra vế phải của (2) nguyên. Từ đó

$$2xy-1\in\{-1;1;-7;7\}$$

$\Rightarrow xy\in\{0;1;-3;4\}$.

Từ (1) ta có xy lẻ, suy ra $xy\in\{1;-3\}$.

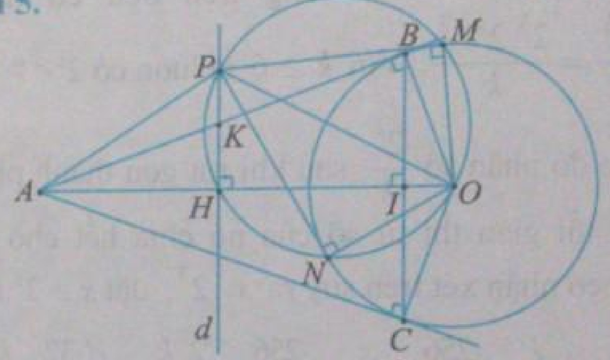
- Với $xy=1$, thay vào (1) ta có $x-y=0$, suy ra $x=y=1$ hoặc $x=y=-1$;
- Với $xy=-3$, thay vào (1) ta có $x-y=2$, suy ra $x=y+2$ nên $(y+2)y=-3$, hay $y^2+2y+3=0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn bài toán là $(1;1), (-1;-1)$.

Bài 4. Do $P(x)>0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ và $a>0$ nên $P(-1)>0; P(-2)>0$. Suy ra

$$\frac{P(-1)+P(-2)}{P(-1)}>1\Leftrightarrow\frac{5a-3b+2c}{a-b+c}>1.$$

Bài 5.



Vì M và N nằm trên đường tròn đường kính OP nên $OM\perp PM$ và $ON\perp PN$. Suy ra PM, PN là hai tiếp tuyến của (O) và $PM=PN$.

Ta sẽ chứng minh $PA=PM$. Thật vậy:

Từ giả thiết ta có $OA\perp BC$, suy ra $OA\perp d$. Gọi I là giao điểm của OA và BC; H, K lần lượt là giao điểm của OA, AB với d.

Từ giả thiết ta có K là trung điểm của AB, nên H là trung điểm của AI. Do đó

$$\begin{aligned}PA^2&=AH^2+HP^2=AH^2+(OP^2-OH^2)\\&=OP^2-(OH^2-AH^2)\\&=OP^2-(OH-AH)(OH+AH)\\&=OP^2-(OH-IH).OA\\&=OP^2-OI.OA=OP^2-OB^2\\&=OP^2-OM^2=PM^2.\end{aligned}$$

($OI.OA=OB^2$ do tam giác ABO vuông tại B, có đường cao BI). Suy ra $PA=PM$.

Vậy $PM=PN=PA$.

Bài 6. Đặt $AD=x$; $CD=y$; $AB=2R$. Từ giả thiết ta có $BC=R$; $AC=R\sqrt{3}$.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 9 TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1 *(4 điểm)*. Cho ba số a, b, c khác 0 thoả mãn điều kiện $a+b+c=0$.

1) Chứng minh $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2) Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3}{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+abc}.$$

Bài 2 *(4 điểm)*. Giải các phương trình

1) $(x^2-x-1)(3x^2+x-3)=4x^2$;

2) $4x^2+\dfrac{3}{4}=2\sqrt{x}$.

Bài 3 *(3 điểm)*. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x^2-2x)(y^2-2y)=45\\(x-1)(y-1)=8.\end{cases}$$

Bài 4 *(3 điểm)*. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1) $(3a+b)(2c+a+b)\le(2a+b+c)^2$;

2) $$\frac{a^3b}{3a+b}+\frac{b^3c}{3b+c}+\frac{c^3a}{3c+a}\ge\frac{a^2bc}{2a+b+c}+\frac{b^2ca}{2b+c+a}+\frac{c^2ab}{2c+a+b}.$$

Bài 5 *(4 điểm)*. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), có tia AB cắt tia DC tại E và tia AD cắt tia BC tại F. Gọi M là giao điểm thứ hai (khác C) của hai đường tròn (BCE) và (CDF). Chứng minh rằng

a) Ba điểm E, M, F thẳng hàng.

b) M thuộc đường tròn (ADE).

c) OM vuông góc với EF.

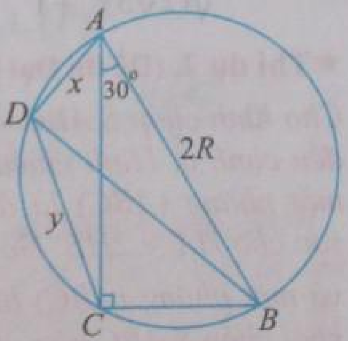
Bài 6 *(2 điểm)*. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho biểu thức

$$\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$$

có giá trị nguyên.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta có $AC.BD = AD.BC + AB.CD$



$\Leftrightarrow R\sqrt{3}.BD = xR+2Ry$

$\Leftrightarrow BD=\dfrac{x+2y}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow 3BD^2=x^2+4xy+4y^2.$

Suy ra $3BD^2=5AD^2+5CD^2$

$\Leftrightarrow x^2+4xy+4y^2=5x^2+5y^2$

$\Leftrightarrow (2x-y)^2=0 \Leftrightarrow y=2x \Leftrightarrow DC=2DA.$

Bài 7. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{a^2(1-b)}{b}+b(1-b)\ge 2a(1-b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(1-b)}{b}-a^2\ge 2a-b-2ab+b^2-a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(1-2b)}{b}\ge 2a-b-2ab+b^2-a^2$$

(đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$).

Hoàn toàn tương tự với

$$\frac{b^2(1-2c)}{c};\ \frac{c^2(1-2a)}{a}.$$

Suy ra $P\ge a+b+c-2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow P\ge a+b+c-2.$

Mặt khác, ta có

$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=3$

$\Rightarrow a+b+c\ge\sqrt{3}\Rightarrow P\ge\sqrt{3}-2.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3}-2$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN
(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

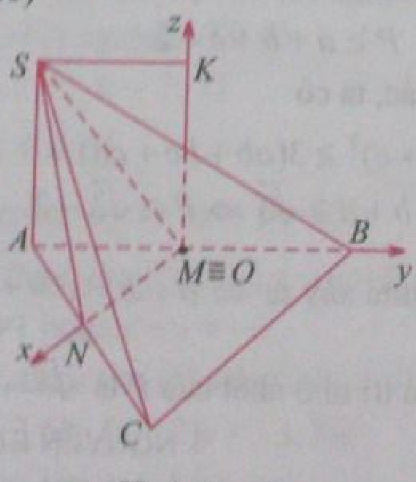
SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

NGUYỄN VĂN VƯƠNG
(GV THPT Nga Sơn, Thanh Hoá)

Trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng, bài toán tính thể tích khối đa diện tuy không được đánh giá là bài khó của đề nhưng nó lại luôn gây không ít khó khăn cho học sinh khi tư duy hình vẽ, đặc biệt là việc kẻ thêm đường phụ. Thực tế cho thấy, nhiều học sinh không làm được bài toán này nhưng vẫn làm được bài hình toạ độ trong không gian. Vậy tại sao chúng ta lại không chuyển bài toán tính thể tích sang toạ độ, kết hợp cùng lúc cả hai mảng kiến thức đó, có thể giúp chúng ta đơn giản hơn khá nhiều vấn đề khó. Dưới đây là một số thí dụ cho bạn đọc tham khảo.

★Thí dụ 1. (Đề thi Đại học khối A năm 2011) *Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.*

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Ta có $SA = AB\tan 60^o = 2a\sqrt{3}$, $MN = \frac{1}{2}BC = a$.

$$V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}SA.S_{BCNM} = \frac{1}{3}SA.\frac{MB}{2}(MN + BC)$$
$$= a^3\sqrt{3} \text{ (đvtt).}$$

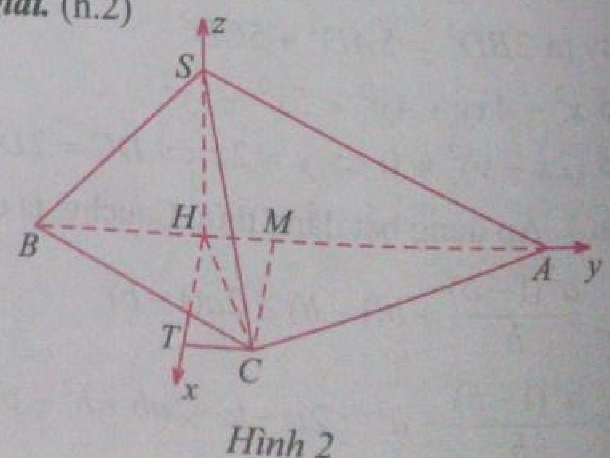
Kẻ $MK // SA$; $MK = AS$, khi đó $SAMK$ là hình chữ nhật. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$, với $M \equiv O(0;0;0)$, N thuộc tia Ox, B thuộc tia Oy, K thuộc tia Oz. Ta có $N(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $S(0;-a;2a\sqrt{3})$, $A(0;-a;0)$, $\overrightarrow{AB} = a(0;2;0)$, $\overrightarrow{SN} = a(1;1;-2\sqrt{3})$, từ đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SN}\right] = -2a^2(2\sqrt{3};0;1)$.

Mặt phẳng (P) qua AB song song với SN, nhận $\vec{n}(2\sqrt{3};0;1)$ làm VTPT, có PT $2\sqrt{3}x + z = 0$. Từ đó $d(AB,SN) = d(N,(P))$

$$= \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}. \square$$

★Thí dụ 2. (Đề thi Đại học khối A năm 2012) *Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Gọi M là trung điểm AB, ta có $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $HT // CM$ sao cho $HT = CM$, $HM = MB - HB = \frac{a}{6}$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$, với $H \equiv O(0;0;0)$, T thuộc tia Ox, A thuộc tia Oy, S thuộc tia Oz. Khi đó

$A\left(0; \frac{2a}{3}; 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{6}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{-a}{3}; 0\right)$,

$$HC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3},$$

$SH = HC.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{21}}{3}$, $S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{21}}{3}\right)$.

Từ đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}SH.AB.CM = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$ (đvtt).

$\overrightarrow{SA} = a\left(0; \frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{21}}{3}\right)$, $\overrightarrow{BC} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right] = -a^2\left(\frac{\sqrt{21}}{6}; -\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

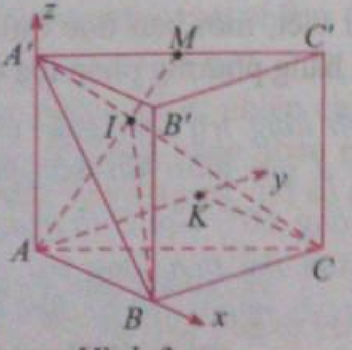
Mặt phẳng (P) đi qua BC và song song với SA nhận $\vec{n}\left(\frac{\sqrt{21}}{6}; -\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ làm VTPT có PT $\sqrt{21}x - 3\sqrt{7}y + 2\sqrt{3}z - a\sqrt{7} = 0$.

Từ đó $d(SA, BC) = d(A, (P))$

$$= \frac{\left|-2a\sqrt{7} - a\sqrt{7}\right|}{\sqrt{(\sqrt{21})^2 + (3\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{8}. \square$$

★Thí dụ 3. (Đề thi Đại học khối D năm 2009) *Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác ABC vuông tại B. Giả sử $AB = a$, $AA' = 2a$, $AC' = 3a$, gọi M là trung điểm $A'C'$ và I là giao điểm của AM và $A'C$. Tìm thể tích tứ diện $I.ABC$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).*

Lời giải. (h.3)



Hình 3

Ta tính được $AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = a\sqrt{5}$; $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$; $S_{ABC} = a^2$.

Kẻ AK song song và bằng BC, khi đó $AK \perp AB$; $AK = 2a$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$, với $A \equiv O(0;0;0)$, B thuộc tia Ox, K thuộc tia Oy, A' thuộc tia Oz.

Ta thấy $B(a; 0; 0)$, $C(a; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$, $M\left(\frac{a}{2}; a; 2a\right)$. Lại có $\overrightarrow{AM} = a\left(\frac{1}{2}; 1; 2\right)$, $\overrightarrow{A'C} = a(1; 2; -2)$, $\overrightarrow{A'B} = a(1; 0; -2)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B}\right] = -2a^2(2; 0; 1)$.

Đường thẳng AM có PT $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Mặt phẳng $(A'BC)$ đi qua B, nhận $\vec{n}(2; 0; 1)$ làm VTPT, có PT $2x + z - 2a = 0$. Mặt phẳng (ABC) trùng với mp(Oxy) có PT $z = 0$. Giao điểm I của AM và $A'C$ chính là giao điểm của AM và mp$(A'BC)$ nên $I\left(\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{4a}{3}\right)$.

Ta có $d(I, (ABC)) = \frac{4a}{3}$.

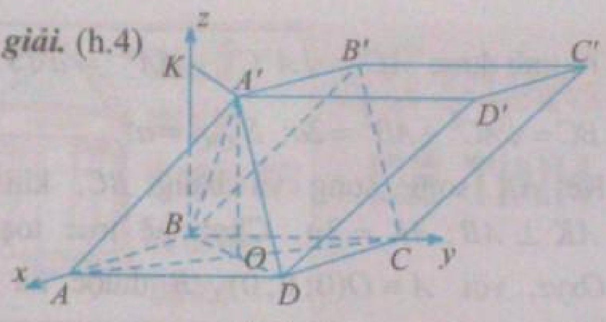
$V_{IABC} = \frac{1}{3}d(I, (ABC)).S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}$ (đvtt).

Từ đó $d(A, (IBC)) = d(A, (A'BC))$

$$= \frac{|-2a|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \square$$

★Thí dụ 4. (Đề thi Đại học khối B năm 2011) *Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A)$ và $(ABCD)$ bằng 60^o. Tính thể tích hình lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.*

Lời giải. (h.4)



Hình 4

Kẻ $BK // OA'$, $BK = OA' = b$ $(b > 0)$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$, với $B(0; 0; 0)$, A thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, K thuộc tia Oz. Ta có $A(a; 0; 0)$, $C(0; a\sqrt{3}; 0)$, $D(a; a\sqrt{3}; 0)$, $A'\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right)$, $\overrightarrow{AD} = a(0; \sqrt{3}; 0)$, $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right)$, $\overrightarrow{BD} = (a; a\sqrt{3}; 0) = a(1; \sqrt{3}; 0)$

$\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right] = \sqrt{3}a\left(b; 0; \frac{a}{2}\right)$. Mặt phẳng $(ADD'A')$ chứa AD và AA' nhận $\vec{n}\left(b; 0; \frac{a}{2}\right)$ làm một VTPT. Mặt phẳng $(ABCD)$ (trùng với mp(Oxy)) nhận $\vec{k}(0; 0; 1)$ làm một VTPT. Vì góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60°, nên

$$\cos 60^{\circ} = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $A'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Từ đó

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O.AB.BC = \frac{3a^3}{2} \text{ (đvtt).}$$

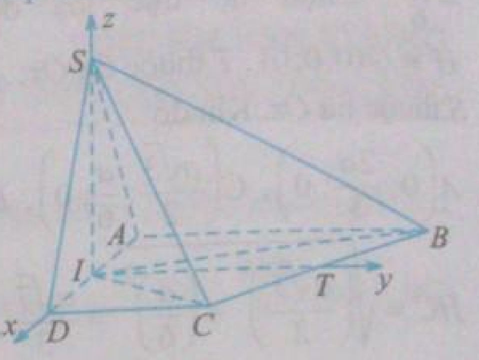
Mặt phẳng $(A'BD)$ đi qua B, nhận $\left[\overrightarrow{BD}, \vec{k}\right] = a(\sqrt{3}; -1; 0)$ làm VTPT, có phương trình $\sqrt{3}x - y = 0$. Ta có $B'C // (A'BD)$ nên

$$d\left(B', (A'BD)\right) = d\left(C, (A'BD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \ \square$$

★ Thí dụ 5. (Đề thi Đại học khối A năm 2010)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. AB = AD = 2a, CD = a. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60°. Gọi I là trung điểm của cạnh AD, biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Gọi T là trung điểm của BC, khi đó $IT \perp AD$, đặt $SI = b$. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$, với $I \equiv O(0; 0; 0)$, D thuộc tia Ox, T thuộc tia Oy, S thuộc tia Oz. Ta có $T\left(0; \frac{3a}{2}; 0\right)$, $S(0; 0; b)$, $C(a; a; 0)$, $B(-a; 2a; 0)$, $\overrightarrow{SC}(a; a; -b)$, $\overrightarrow{BC} = a(2; -1; 0)$. Từ đó $\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BC}\right] = -a(b; 2b; 3a)$.

Mặt phẳng (SBC) nhận $\vec{n}(b; 2b; 3a)$ làm một VTPT, mặt phẳng $(ABCD)$ nhận $\vec{k}(0; 0; 1)$ làm VTPT. Vì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° nên

$$\cos 60^{\circ} = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3a}{\sqrt{b^2 + (2a)^2 + (3a)^2}}$$

$\Leftrightarrow b = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$ do đó $SI = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$. Mặt khác

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD.(AB + DC) = 3a^2 \text{ (đvdt).}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$ (đvtt). $\square$

Cuối bài viết, mời bạn đọc thử giải quyết bài toán sau bằng phương pháp toạ độ:

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60°. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện G.ABC theo a.

(Đề thi Đại học khối B năm 2010)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 4

(*Thời gian làm bài: 180 phút*)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (*2 điểm*). Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (H)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số đã cho.

2) Viết phương trình tiếp tuyến với (H), biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(-2;4)$ và $B(4;-2)$.

Câu 2 (*1 điểm*). Giải phương trình

$$3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x.$$

Câu 3 (*1 điểm*). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 12y^2 + x + 2 = 8y^3 + 8y \\ \sqrt{x^2 + 8y^3} + 2y = 5x. \end{cases}$$

Câu 4 (*1 điểm*). Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{5^{\frac{x}{2}}}{(5^x - 9)\sqrt{6 - 5^{1-x}}}\,dx.$$

Câu 5 (*1 điểm*). Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. Gọi M, N theo thứ tự là các điểm thuộc cạnh AD, CD sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$; $2\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Lấy điểm P thuộc cạnh BB_1 sao cho $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PB_1}$. Tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương.

Câu 6 (*1 điểm*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y^2 z} + \frac{y}{z^2 x} + \frac{z}{x^2 y} + \frac{x^5}{y} + \frac{y^5}{z} + \frac{z^5}{x},$$

trong đó x, y, z là các số dương thoả mãn điều kiện $x + y + z \le \dfrac{3}{2}$.

PHẦN RIÊNG

(*Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần A hoặc B*)

A - Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (*1 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ có tiêu điểm F_1, F_2. M là điểm trên (E) sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^o$. Xác định bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2.

Câu 8a (*1 điểm*). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có đỉnh $A_1(\sqrt{3};-1;1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$ (C không trùng O). Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

Câu 9a (*1 điểm*). Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn, mỗi số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau mà tổng ba chữ số cuối nhỏ hơn tổng ba chữ số đầu là 3 đơn vị?

B - Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (*1 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn

$$(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{2}.$$

Lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông, biết các cạnh của hình vuông tiếp xúc với đường tròn (C) tại trung điểm mỗi cạnh và một đỉnh hình vuông thuộc đường thẳng $d: 3x + 4y + 20 = 0$.

Câu 8b (*1 điểm*). Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $2x + y - 2z - 12 = 0$ và các điểm $A(2;-1;4)$; $B(1;-1;3)$. Chứng minh rằng điểm M thuộc (P) sao cho diện tích tam giác MAB nhỏ nhất thuộc một đường thẳng cố định. Viết phương trình tham số của đường thẳng đó.

Câu 9b (*1 điểm*). Trong mặt phẳng phức cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự biểu diễn các số phức $4-(3+\sqrt{3})i$; $2-(3+\sqrt{3})i$; $1-3i$; $3-i$. Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

NGUYỄN THANH GIANG
(*GV Trường THPT chuyên Hưng Yên*)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 3

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Từ giả thiết ta có $AB // OI$ và $AB = 3\sqrt{2}.$
PT $AB: y = -x + m.$

PT hoành độ giao điểm của AB và đồ thị hàm số có dạng $\frac{x}{1-x} = -x + m \quad (x \neq 1)$ hay $x^2 - (m+2)x + m = 0$ (*). Từ $AB = 3\sqrt{2}$ và định lí Viète tìm được $m = \sqrt{5};\ m = -\sqrt{5}$. Thay vào (*) ta được các cặp điểm $(A; B)$ cần tìm là

$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Câu 2. ĐK $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

Đưa PT đã cho về dạng

$$(\sin x + 1)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2) = 0.$$

Đáp số. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3. ĐK $x \geq -3;\ x \neq 0;\ y > 0.$

Đặt $\sqrt{y} = kx \Leftrightarrow \begin{cases} kx > 0 \\ y = k^2x^2. \end{cases}$

PT thứ nhất của hệ trở thành

$$\frac{1}{2x} + \frac{x}{k^2x^2} = \frac{3x + 3kx}{4x^2 + 2k^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (k-2)^2(k^2 + k + 1) = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

$\Rightarrow y = 4x^2$, nên PT thứ hai của hệ trở thành

$$4x^2 + 8x = \sqrt{2x+6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x - 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1.$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1$, ta thu được hệ

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x - 1 = t \\ 2t^2 + 4t - 1 = x \\ x > 0;\ t \geq -1. \end{cases}$$

Từ hệ này ta thấy $x = t$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4}; \frac{13-3\sqrt{17}}{2}\right).$

Câu 4. Ta có $I = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x+2)^2} + \int_1^2 \frac{\ln(x^2e^x)dx}{(x+2)^2}$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)^2 dx + \int_1^2 \ln(x^2e^x) d\left(\frac{-1}{x+2}\right)$$

$$= \frac{7}{6} + 4\ln 3 - \frac{17}{2}\ln 2.$$

Câu 5. Gọi H là trung điểm AB, I là trung điểm HD thì $MI \perp (ABCD)$. Kẻ $IK \perp AC$ $(K \in AC)$, suy ra $\widehat{MKI} = 60^o.$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}SH.AC.BD = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

$$d(SB, MC) = d(SB, (AMC)) = d(S, (AMC))$$

$$= d(D, (AMC)) = 4d(I, (AMC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 6. Từ giả thiết đề bài có

$$(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2 = -x^2 - 3x^2y^2.$$

Ta thấy $-x^2 - 3x^2y^2 \leq 0$. Đặt $t = x^2 + y^2$ thì $t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2.$

Khi đó $P = f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t+1}$, $t \in [1; 2]$. Khảo sát hàm số $f(t)$ trên $[1; 2]$ ta thu được

$\min\limits_{1 \leq t \leq 2} f(t) = 1$, khi $t = 1$; $\max\limits_{1 \leq t \leq 2} f(t) = \frac{4}{3}$; khi $t = 2$.

Suy ra $\min P = 1$ khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

$\max P = \frac{4}{3}$ khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$

Câu 7a. PT đường tròn (C) cần tìm là

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Câu 8a. $C(5; 9; -11)$ hoặc $C(-3; -7; 13)$.

Câu 9a. $z_1 = 1 + i;\ z_2 = 4 + (4 - 2^{1007})i.$

Giải đáp MỘT SỐ DANH THẮNG Ở VIỆT NAM

(Đề đăng trên chuyên mục Câu lạc bộ, Tạp chí TH&TT số 434 tháng 8 năm 2013)

Dòng chữ của các ô sẫm màu là

PHONG CẢNH THẦN TIÊN

1							**P**	**H**	**O**	**N**	**G**	N	H	A	K	Ẻ	B	À	N	G	
2	T	R	À	N	G	A	N	T	A	M	**C**	Ó	C	B	Í	C	H	Đ	Ộ	N	G
3						Q	U	Ầ	N	Đ	**Ả**	O	C	Á	T	B	À				
4									G	À	**N**	H	Đ	Á	Đ	Ĩ	A				
5							V	Ị	N	H	**H**	Ạ	L	O	N	G					
6					N	Ú	I	Y	Ê	N	**T**	Ử									
7											**H**	Ồ	B	A	B	Ể					
8										Đ	**À**	M	Ô	L	O	A	N				
9				N	Ú	I	Đ	Á	D	Ự	**N**	G									
10				V	Ư	Ờ	N	C	Á	T	**T**	**I**	**Ê**	**N**							

Các bạn có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm là:

1. *Hoàng Thị Thu Uyên*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.
2. *Vũ Văn Quý*, 11A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, **Gia Lai**.
3. *Nguyễn Văn Cường*, 10A6, THPT Ba Chúc, Tri Tôn, **An Giang**.

AN MINH

Câu 7b. $B(\sqrt{65}-2;3)$ và $C(-\sqrt{65}-2;3)$

hoặc $B(-\sqrt{65}-2;\ 3)$ và $C(\sqrt{65}-2;\ 3)$.

Câu 8b. Từ giả thiết bài ra ta có

$$C(0;\ 0;\ \sqrt{3});\ B(4;\ 4\sqrt{3};\ 0);\ G\left(\frac{8}{3};\ \frac{4\sqrt{3}}{3};\ 0\right).$$

Dựa vào điều kiện $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{GM}=0,$ ta tìm được hai điểm thoả mãn đề bài là

$$M_1\left(\frac{58}{57};\ 0;\ \frac{40\sqrt{3}}{57}\right);\ M_2\left(\frac{14}{57};\ 0;\ \frac{107\sqrt{3}}{114}\right).$$

Câu 9b. ĐK: $2-y\neq 0;\ \dfrac{x}{2-y}>0.$

Với $x<0,\ 2-y<0$ thì vế trái PT thứ hai luôn dương. Với $x>0,\ 2-y>0$, khi đó PT thứ nhất trở thành $3^x+\log_2 x=3^{2-y}+\log_2(2-y)$.

Hàm số $f(t)=3^t+\log_2 t$ đồng biến với $t>0$, suy ra $x=2-y$. Từ đó tìm được

$$(x;\ y)=(5;-3),\ (x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{-1}{2}\right).$$

HOÀNG GIA HỨNG

(GV THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà, Thái Bình)

ÁP DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TỨ DIỆN VUÔNG ĐỂ PHÁT TRIỂN THÊM MỘT SỐ BÀI TOÁN

PHẠM PHƯƠNG LIÊN
(GV THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương)

I. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA KHỐI TỨ DIỆN VUÔNG

Cho tứ diện vuông $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Khi đó

1. Tam giác ABC có ba góc nhọn.

2. Hình chiếu vuông góc của điểm O lên mặt phẳng (ABC) là trực tâm H của tam giác ABC và

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

3. $S_{OBC}^2 = S_{HBC}.S_{ABC}$; $S_{OAC}^2 = S_{HAC}.S_{ABC}$;

$S_{OAB}^2 = S_{HAB}.S_{ABC}$.

4. $S_{OBC}^2 + S_{OAC}^2 + S_{OAB}^2 = S_{ABC}^2$.

5. $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$. Nếu M, N, P là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA khi đó tứ diện $OMNP$ là tứ diện gần đều và

$$V_{OMNP} = \frac{1}{4}V_{OABC} = \frac{1}{24}abc.$$

6. Gọi α, β, γ thứ tự là các góc tạo bởi OH với OA, OB, OC thì $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

II. THÊM MỘT SỐ BÀI TOÁN CHO KHỐI TỨ DIỆN VUÔNG

Bài toán 1. *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một, OA = a, OB = b, OC = c.*

1) Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng $a^2\tan A = b^2\tan B = c^2\tan C$.

2) Vẽ các đường phân giác của các góc AOB, BOC, COA theo thứ tự là Ox, Oy, Oz. Chứng minh rằng $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOx} = 60^o$.

Lời giải

1) Gọi giao điểm của CH với AB là D.

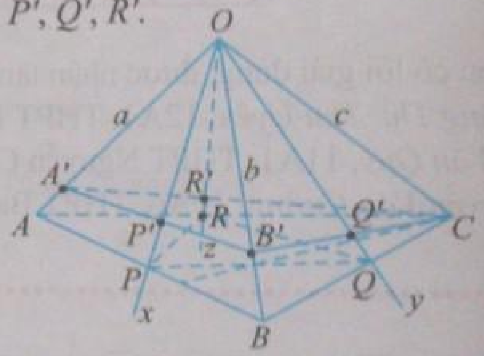
Ta có $\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{CD.AB}{AD.AB} = \frac{2S_{ABC}}{OA^2}$

từ đó suy ra $2S_{ABC} = a^2\tan A$,

tương tự $2S_{ABC} = b^2\tan B = c^2\tan C$,

suy ra đpcm.

2) (h.1) Giả sử Ox, Oy, Oz cắt AB, BC, CA lần lượt ở P, Q, R. Không giảm tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó ta đặt $OA' = OB' = OC = c$; Ox, Oy, Oz cắt $A'B'$, $B'C$, CA' lần lượt tại P', Q', R'.



Hình 1

Dễ dàng chứng minh tứ diện $OP'Q'R'$ là tứ diện đều nên $\widehat{P'OQ'} = \widehat{Q'OR'} = \widehat{R'OP'} = 60^o$, hay $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOx} = 60^o$. □

Bài toán 2. *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi* O_1 *là điểm nằm trong tam giác ABC. Khoảng cách từ* O_1 *đến ba mặt phẳng OBC, OAC, OAB lần lượt là* a_1, b_1, c_1. *Tính a, b, c theo* a_1, b_1, c_1 *sao cho*

1) Thể tích khối tứ diện OABC nhỏ nhất.

2) Tổng a + b + c nhỏ nhất.

Lời giải

1) Theo tính chất 5 ta có $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$

và $V_{OABC} = V_{O_1OBC} + V_{O_1OAC} + V_{O_1OAB}$

$= \frac{1}{6}bca_1 + \frac{1}{6}acb_1 + \frac{1}{6}abc_1$. Suy ra

$abc = bca_1 + acb_1 + abc_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1.$

Áp dụng BĐT Canchy cho ba số dương ta có

$$1 \geq 27.\frac{a_1b_1c_1}{abc} \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}abc \geq \frac{9}{2}a_1b_1c_1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của V_{OABC} là $\frac{9}{2}a_1b_1c_1$ khi

$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3a_1; b = 3b_1; c = 3c_1.$

2) Theo BĐT Bunyakovsky, ta có

$$\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right)^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c}\right).$$

Từ đó ta có $a + b + c \geq \left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right)^2$,

đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{a_1}}{a} = \frac{\sqrt{b_1}}{b} = \frac{\sqrt{c_1}}{c} = \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}}{a+b+c}$$

$$= \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}}{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a + b + c$

là $\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right)^2$ khi

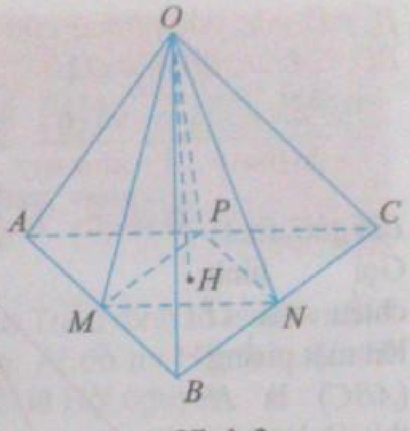
$$\begin{cases} a = \sqrt{a_1}\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right) \\ b = \sqrt{b_1}\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right) \\ c = \sqrt{c_1}\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1} + \sqrt{c_1}\right). \square \end{cases}$$

Bài toán 3. *Tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một.*

1) Gọi M, N, P lần lượt trung điểm của các cạnh AB, BC, CA; α, β, γ lần lượt là góc phẳng của các nhị diện (MN), (NP), (PM) của tứ diện OMNP. Chứng minh rằng $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

2) Cho OA + OB = OC. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh C của tứ diện OABC bằng 90^o.

Lời giải



Hình 2

1) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) thì H là trực tâm của tam ABC có ba góc nhọn, do đó H nằm trong tam giác ABC.

• *Trường hợp 1.*

H nằm trong tam giác MNP (h.2). Khi đó

$$S_{HMN} + S_{HNP} + S_{HPM} = S_{MNP}$$

$$\Leftrightarrow S_{OMN}\cos\alpha + S_{ONP}\cos\beta + S_{OPM}\cos\gamma = S_{MNP}.$$

Ta chứng minh được

$$\Delta OMN = \Delta ONP = \Delta OPM = \Delta MNP \text{ (c.c.c)}$$

nên $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$.

• *Trường hợp 2.* H không nằm trong tam giác MNP. Giả sử H nằm trong tam giác AMP, khi đó

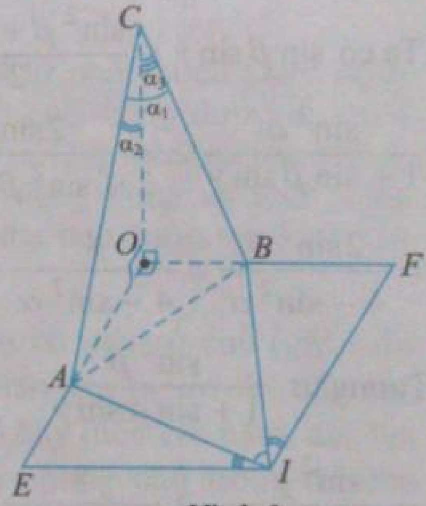
$$S_{HMN} + S_{HNP} - S_{HPM} = S_{MNP}$$

$$\Leftrightarrow S_{OMN}.\cos\alpha + S_{ONP}.\cos\beta - S_{OPM}.\cos(\pi - \gamma) = S_{MNP}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\pi - \gamma) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

2) Đặt $\widehat{ACB} = \alpha_1$, $\widehat{ACO} = \alpha_2$, $\widehat{BCO} = \alpha_3$.



Hình 3

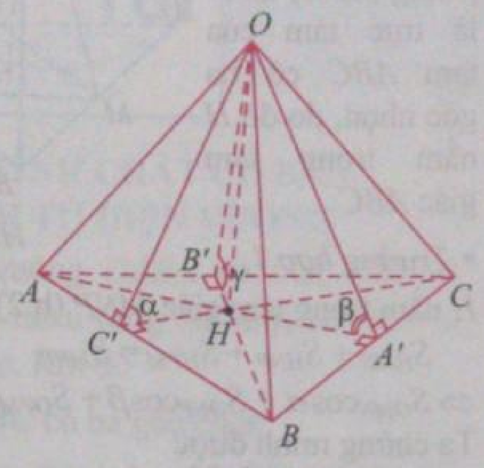
Trong mặt phẳng (OAB), trên tia đối của AO đặt $AE = OB$, trên tia đối của BO đặt $BF = OA$. Dựng hình vuông $OEIF$ (h.3). Ta có hai tam giác vuông COA và IFB bằng nhau nên $\alpha_2 = \widehat{BIF}$ và $CA = IB$. Tương tự hai tam giác vuông COB và IEA bằng nhau nên $\alpha_3 = \widehat{AIE}$ và $CB = IA$. Do $CA = IB$, $CB = IA$ và AB chung nên $\Delta CAB = \Delta IBA$ (c.c.c), do đó $\alpha_1 = \widehat{AIB}$.

Vậy $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \widehat{AIB} + \widehat{BIF} + \widehat{AIE} = 90^o$. □

Bài toán 4. *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi α,* *β, γ là các góc phẳng của nhị diện cạnh AB, BC, CA của tứ diện OABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{1+\sin\alpha\sin\gamma}+\frac{\sin^2\gamma}{1+\sin\alpha\sin\beta}\ge\frac{6}{5}.$$

Lời giải. (h.4) Gọi hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC) là H thì H là trực tâm tam giác ABC. Gọi giao điểm của AH với BC là A', theo định lí ba đường vuông góc thì $OA' \perp BC$ nên $\widehat{OA'H}=\beta$. Tương tự $\widehat{OC'H}=\alpha$, $\widehat{OB'H}=\gamma$.



Hình 4

Do $OA \perp (OBC)$ nên tam giác AOA' vuông tại O có OH là đường cao nên $\beta=\widehat{AOH}$, tương tự $\alpha=\widehat{COH}$, $\gamma=\widehat{BOH}$. Theo tính chất 6 thì

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2.$$

Ta có $\sin\beta\sin\gamma \le \dfrac{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{2}$ nên

$$\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin\beta\sin\gamma}\ge\frac{2\sin^2\alpha}{2+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha}{4-\sin^2\alpha}=\frac{8}{4-\sin^2\alpha}-2.$$

Tương tự $\dfrac{\sin^2\beta}{1+\sin\alpha\sin\gamma}\ge\dfrac{8}{4-\sin^2\beta}-2$;

$\dfrac{\sin^2\gamma}{1+\sin\alpha\sin\beta}\ge\dfrac{8}{4-\sin^2\gamma}-2$. Từ đó

$$VT\ge 8\left(\frac{1}{4-\sin^2\alpha}+\frac{1}{4-\sin^2\beta}+\frac{1}{4-\sin^2\gamma}\right)-6$$

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{9}{x+y+z}$ (với $x>0, y>0, z>0$). Ta có

$$VT+6\ge 8.\frac{9}{12-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}=\frac{36}{5}.$$

Vậy $VT\ge\dfrac{36}{5}-6=\dfrac{6}{5}$ (đpcm). □

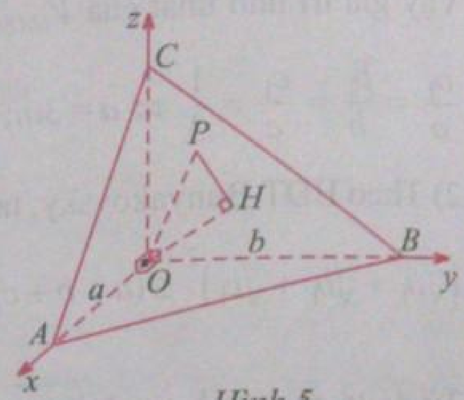
★**Bài toán 5.** *Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi H trực tâm tam giác ABC. Bên trong tam giác ABC lấy điểm P (P ≠ H). Chứng minh rằng*

$$\frac{AP^2}{AO^2}+\frac{BP^2}{BO^2}+\frac{CP^2}{CO^2}=\frac{HP^2}{HO^2}+2.$$

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như (h.5), đặt $OA=a, OB=b, OC=c$.

Phương trình mp (ABC):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$



Hình 5

Gọi $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$, do $P\in$ mp (ABC) nên $\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}+\dfrac{z_0}{c}=1$. Ta có

$$\frac{AP^2}{AO^2}=\frac{(a-x_0)^2+y_0^2+z_0^2}{a^2}$$

$$=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{a^2}-\frac{2x_0}{a}+1=\frac{OP^2}{a^2}-\frac{2x_0}{a}+1 \quad (1)$$

Tương tự $\dfrac{BP^2}{BO^2}=\dfrac{OP^2}{b^2}-\dfrac{2y_0}{b}+1 \quad (2)$

$$\frac{CP^2}{CO^2}=\frac{OP^2}{c^2}-\frac{2z_0}{c}+1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) có $\dfrac{AP^2}{AO^2}+\dfrac{BP^2}{BO^2}+\dfrac{CP^2}{CO^2}$

$$=OP^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}\right)+3.$$

Theo tính chất 2 thì $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{OH^2}$

nên $\dfrac{AP^2}{AO^2}+\dfrac{CP^2}{BO^2}+\dfrac{CP^2}{CO^2}=\dfrac{OP^2}{OH^2}+1$

$$=\frac{HP^2+OH^2}{OH^2}+1=\frac{HP^2}{HO^2}+2 \text{ (đpcm).} \ □$$

(Xem tiếp trang 30)

Vài nét về các cuộc thi Nho học
Ở NƯỚC VIỆT XƯA

Nhu cầu tìm những người có kiến thức rộng về kinh thư, thơ phú, lịch sử, viết văn, viết biểu sớ,... để tham gia các công việc triều chính, đòi hỏi các triều đại vua nước Việt mở trường học chữ Hán và tổ chức thi tuyển.

Cuộc thi Nho học đầu tiên được tổ chức năm ... (1) dưới triều *Vua Lý Nhân Tông*, chọn được 10 người, Thủ khoa là *Lê Văn Thịnh*, sau làm đến chức Thái sư. Thời nhà Lý chỉ tổ chức 7 cuộc thi chọn người vào làm ở Triều đình, trong 66 năm từ năm... (2) không thấy cuộc thi nào. Trong thời Lý Trần từ năm ... (3) nội dung cuộc thi có hỏi về Tam giáo là đạo Nho, đạo Phật và đạo Lão, về sau chỉ hỏi về Nho học. Trong các cuộc thi đều dùng chữ Hán (chữ Nho), riêng có hai cuộc thi đời nhà Mạc và nhà Tây Sơn là dùng chữ Nôm.

Vào năm Đinh Mùi ... (4) đời *Vua Trần Thái Tông*, Triều đình mở khoa thi Tam khôi đầu tiên chọn ba người đỗ đầu, gọi là ... (5), ... (6), ... (7). Các kì thi Đại tỷ (cuộc thi lớn) do Triều đình tổ chức từ năm ... (8), khoảng 7 năm một lần. Năm ... (9), *Vua Trần Thuận Tông* mới ban hành quy định rõ ràng về việc thi tuyển gồm ba kì thi: thi Hương, thi Hội và thi Đình.

Thi Hương được tổ chức ba năm một lần, lần đầu vào năm ... (10). Các sĩ tử thuộc ba hoặc bốn trấn hoặc tỉnh, sau khi trải qua cuộc sát hạch ở địa phương, đến thi chung ở một trường thi. Thi Hương có bốn kì với nội dung sau: Kì thứ nhất thi Kinh nghĩa, Thư nghĩa. Kì thứ hai thi Chiếu, Chế, Biểu. Kì thứ ba thi Thơ phú. Kì thứ tư thi Văn sách. Ai thi được ba kì đầu là ... (11), (dân gian gọi là ... (12); về sau gọi là Tú tài, dân gian gọi là... (13). Ai thi đỗ kì thứ tư là ... (14), dân gian gọi là ... (15); về sau gọi là Cử nhân, dân gian gọi là ... (16). Tỉ lệ đỗ kì thứ tư so với kì thứ ba vào khoảng một phần mười. Người đỗ đầu thi Hương là Giải nguyên. Năm ... (17) dưới triều *Vua Hồ Hán Thương* yêu cầu thi thêm viết văn và toán sau kì thứ tư.

Thi Hội do Bộ Lễ của Triều đình tổ chức sau kì thi Hương một năm. Ai đỗ thi Hội là ... (18). Người đỗ đầu thi Hội là Hội nguyên.

Thi Đình được tổ chức tại sân đình ở Hoàng cung. Nhà Vua ra đề và tự tay phê duyệt lấy đỗ sau khi Hội đồng Giám khảo đã chấm bài thi. Người đỗ đầu thi Đình là Đình nguyên. Những người đỗ (dân gian gọi là ... (19), có thời kì người vào thi Đình cũng gọi bằng tên này) xếp theo ba bậc (Tam giáp). Ba người đỗ bậc nhất là Tiến sĩ đệ nhất giáp, xếp từ cao nhất trở xuống là ... (20), ... (21), ... (22) (có kì thi không có bài đạt một loại nào đó). Ai đỗ bậc nhì là Tiến sĩ đệ nhị giáp hay là ... (23). Ai đỗ bậc ba là Tiến sĩ đệ tam giáp (hay là Đồng tiến sĩ xuất thân).

Từ năm ... (24) *Vua Minh Mạng* bỏ bậc đệ nhất giáp. Thời nhà Nguyễn còn lấy thêm một số người gần đạt Tiến sĩ và gọi là Ất Tiến sĩ, hay là ... (25).

Năm ... (26) các sĩ tử phải thi cả Quốc ngữ. Kì thi Hội, thi Đình cuối cùng được tổ chức năm ... (27). Năm ... (28) mở Trường Thông ngôn Hà Nội, dạy tiếng Pháp và chữ Quốc ngữ. Ảnh hưởng Nho học được thay thế dần bởi văn hóa Pháp.

Trong bài viết trên có một số chỗ (ghi năm Dương lịch hoặc tên gọi người thi đỗ) còn bỏ trống (...). Bạn hãy điền các năm, các tên ghi dưới đây vào những chỗ trống đó cho phù hợp.

a) 1086 đến 1152, b) 1195 đến 1247, c) 1304 đến 1374, d) 1075, đ) 1247, e) 1396 (hai lần), f) 1404, g) 1809, h) 1828, i) 1886, k) 1919, m) *Bảng nhãn* (hai lần), n) *Hoàng giáp*, p) *Hương cống*, q) *ông Cống*, r) *ông Cử*, s) *ông Đồ*, t) *ông Nghè*, u) *ông Tú*, v) *Phó bảng*, w) *Sinh đồ*, x) *Thám hoa* (hai lần), y) *Thái học sinh*, z) *Trạng nguyên* (hai lần).

VÂN KHANH

CÁC LỚP THCS

Bài T1/438 (Lớp 6). Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c (có thể bằng nhau) biết rằng

$$a(a+1)+b(b+1)=c(c+1).$$

HOÀNG TIẾN TRUNG
(SV lớp X18, K49, ĐH Xây dựng Hà Nội)

Bài T2/438 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của cạnh AC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại D. Chứng minh rằng $AD = 2ED$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/438. Tìm các số nguyên dương x, y, t với $t \le 6$ thỏa mãn phương trình sau

$$x^2+y^2-4x-2y-7t-2=0.$$

NGUYỄN HÀO LIỄU
(GV THPT Nguyễn Huệ, Thừa Thiên Huế)

Bài T4/438. Tìm phần nguyên của A biết rằng

$$A=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2013}}.$$

NGÔ QUANG HÙNG
(SV lớp KTD, K54, ĐH Nông Nghiệp Hà Nội)

Bài T5/438. Cho tam giác ABC nhọn có hai đường cao BE và CF. Kẻ FI và EJ cùng vuông góc với BC (I, J thuộc BC). Các điểm K, L lần lượt thuộc AB, AC sao cho $KI \parallel AC$, $LJ \parallel AB$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EI, FJ và KL đồng quy.

NGUYỄN DŨNG
(GV THCS Bắc Bình I, Bình Thuận)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/438. Giải phương trình

$$13\sqrt{2x^2-x^4}+9\sqrt{2x^2+x^4}=32$$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Bài T7/438. Xét các số x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases} \text{ và } \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3}=27.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của x.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T8/438. Cho tam giác ABC. Gọi m_a, l_b, l_c và p theo thứ tự là độ dài đường trung tuyến kẻ từ A, độ dài các đường phân giác trong kẻ từ B, C và nửa chu vi của tam giác.

Chứng minh rằng $m_a+l_b+l_c \le p\sqrt{3}$.

TRẦN TUẤN ANH
(GV khoa Toán-Tin, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/438. a) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số hữu tỉ. Chứng minh rằng, nếu với mọi số nguyên dương m mà $a_1^m+a_2^m+\dots+a_n^m$ là số nguyên thì $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên.

b) Bài toán trên còn đúng không nếu chỉ giả thiết rằng $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số thực?

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang)

Bài T10/438. Tìm hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn (với mọi số thực x, y):

$$f(x)+f(y)+2=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong 2, Yên Trung, Bắc Ninh)

Bài T11/438. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\right)\frac{MA}{a}+\left(\frac{m_c}{c}+\frac{m_a}{a}\right)\frac{MB}{b}+\left(\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}\right)\frac{MC}{c}\ge 3$

b) $\left(\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)\frac{MA}{a}+\left(\frac{c}{m_c}+\frac{a}{m_a}\right)\frac{MB}{b}+\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}\right)\frac{MC}{c}\ge 4.$

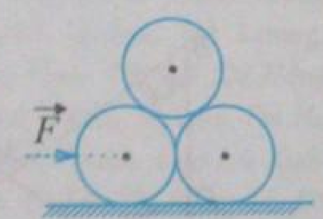
NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T12/437. Cho tam giác ABC cân tại A. Một đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC và cắt cạnh BC lần lượt tại K, L. Đoạn thẳng AK cắt đường tròn ω tại M. Gọi P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của K qua B, C. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Chứng minh rằng các điểm M, O và tâm đường tròn ω thẳng hàng.

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/438. Ba xi lanh giống hệt nhau được xếp trên một mặt sàn như hình vẽ. Mặt sàn và các xi lanh đều không có ma sát. Tác dụng vào xi lanh trái



một lực $\vec{F}$ nằm ngang hướng vào trục của xi lanh. Hỏi lực $\vec{F}$ nhỏ nhất và lớn nhất bằng bao nhiêu để cho cả ba xi lanh luôn tiếp xúc với nhau khi chuyển động?

TÔ GIANG
(Hà Nội) sưu tầm

Bài L2/438. Trong không gian có trọng trường đều với gia tốc $\vec{g}$ và điện trường thẳng đứng hướng lên từ mặt đất, có độ lớn phụ thuộc vào độ cao x theo biểu thức $E_x = E\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Một quả cầu nhỏ khối lượng m mang điện tích q ($q > 0$) được thả không vận tốc ban đầu từ độ cao h. Hãy tìm vận tốc cực đại của quả cầu trong quá trình chuyển động. Bỏ qua sức cản của không khí.

PHẠM XUÂN THI
(GV ĐH Nguyễn Huệ, Biên Hoà, Đồng Nai)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/438 (For 6th grade). Determine all triples of (not necessarily distinct) prime numbers a, b and c such that

$$a(a+1) + b(b+1) = c(c+1).$$

T2/438 (For 7th grade). In an isosceles right triangle ABC, right angle at vertex A, let E be the midpoint of side AC. The line perpendicular to BE through A meets BC at D. Prove that $AD = 2ED$.

T3/438. Find all positive integers x, y, and t such that $t \le 6$ and the following equation is satisfied:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7t - 2 = 0.$$

T4/438. Find the greatest integer not exceeding A, where

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}}.$$

T5/438. Let ABC be an acute triangle with altitudes BE and CF. The line segments FI and EJ are perpendicular to BC (I, J belong to BC). Points K, L on AB, AC respectively such that $KI \parallel AC$, $LJ \parallel AB$. Prove that the lines EI, FJ and KL are concurrent.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/438. Solve for x

$$13\sqrt{2x^2 - x^4} + 9\sqrt{2x^2 + x^4} = 32.$$

T7/438. Given that x, y satisfy the conditions

$$\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases} \text{ and } \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 27.$$

Find the smallest possible value of x.

T8/438. In a triangle ABC, let m_a, l_b, l_c and p denote the median length from A, the lengths of the internal angle bisectors from B, C and its semiperimeter.

Prove that $m_a + l_b + l_c \le p\sqrt{3}$.

(Xem tiếp trang 27)

★ Bài 1/434. *Tìm số chính phương lớn nhất có dạng $4^{27}+4^{1020}+4^x$, với x là số tự nhiên.*

Lời giải. Ta sẽ chứng tỏ rằng với $x \geq 27$ thì tồn tại số chính phương $A = 4^{27}+4^{1020}+4^x$.

Ta có $A = 4^{27}(1+4^{993}+4^{x-27}) = (2^{27})^2.B$

trong đó $B = 1+4^{993}+4^{x-27}$

$$= 1+2.2^{1985}+2^{2(1985+x-2012)}.$$

• *Trường hợp 1.* Với $x = 2012$ thì

$$B = 1+2.2^{1985}+2^{1985.2} = (1+2^{1985})^2.$$

Lúc đó $A = (2^{27})^2(1+2^{1985})^2$ là số chính phương.

• *Trường hợp 2.* Với $x > 2012$.

Đặt $x - 2012 = y > 0$, thì có

$$B = 1+2.2^{1985}+2^{2(1985+y)}$$

$$< 1+2.2^{1985+y}+2^{2(1985+y)} = (1+2^{1985+y})^2.$$

Mặt khác $B > 2^{(1985+y)^2}$. Nếu $B = b^2$ với số b nguyên thì $2^{1985+y} < b < 1+2^{1985+y}$.

Điều này không xảy ra, do đó số B không thể là số chính phương.

Vậy số $A = 4^{27}+4^{1020}+4^x$ là số chính phương lớn nhất khi $x = 2012$. □

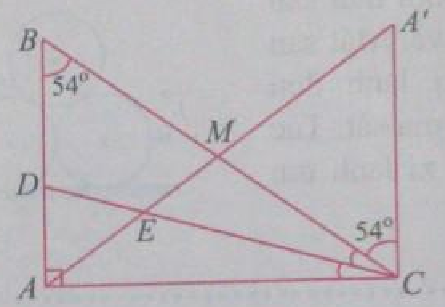
➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng, lập luận chặt chẽ:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Khánh Linh*, 6A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Văn Toàn, Ngô Trí Phương, Tống Văn Minh Hùng, Trần Thế Hiệp*, 6A, *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

VIỆT HẢI

★ Bài T2/434. (Lớp 7) *Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ABC} = 54^o$. Đường trung tuyến AM và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E. Chứng minh rằng CE = AB.*

Lời giải. (Theo bạn *Phạm Thiên Trang*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**)



Trên tia đối của tia MA lấy A' sao cho $MA' = MA$. Khi đó $\Delta MCA' = \Delta MBA$ (c.g.c), suy ra

$$CA' = AB\ (1)\ ;\ \widehat{MCA'} = \widehat{MBA} = 54^o.$$

Do đó $\widehat{ACA'} = \widehat{ACB} + \widehat{BCA'} = 36^o + 54^o = 90^o$,

Từ $\Delta ABC = \Delta CA'A$ (c.g.c) $\Rightarrow AA' = BC$;

$$MC = MA = \frac{1}{2}BC,\ \widehat{MAC} = \widehat{MCA} = 36^o.$$

Mặt khác, CD là phân giác $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ECA} = 18^o$, $\widehat{A'EC}$ là góc ngoài của tam giác AEC nên $\widehat{A'EC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} = 36^o + 18^o = 54^o = \widehat{EAC}$, suy ra tam giác ECA' cân tại C, nên $CE = CA'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CE = AB$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây cũng có lời giải ngắn gọn:

Thái Nguyên: *Hà Hải Ninh*, 7A3, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Khánh*, 7A3, *Lê Ngọc Lan, Nguyễn Quang Hào*, 7A2, THCS Lâm Thao, *Phạm Kim Hùng*, 7C, THCS Phong Châu, TX. Phú Thọ, *Nguyễn Dương Hoàng Anh, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, Trần Minh Hiếu, Nguyễn Phương Thảo A, Nguyễn Dương Hoàng Anh*, 7C, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Tùng, Nguyễn Kim Đức*, 7A5, *Nguyễn Minh Hiếu*, 7A6, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thành Vinh*, 7A1, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Trần Hoàng, Nguyễn Khải Hưng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 6A, *Hoàng Thái Sơn*, 7A, *Bùi Duy Thành*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Duy Khương, Thái Anh Tú, Dương Xuân Long, Nguyễn Thuỳ Linh, Tăng Thế Toàn, Hoàng Văn Nam*, 7E, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Trần Nghĩa Bảo Phúc*, 7B, *Võ Thị Hồng Kiều*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thị Hạ Vy, Vũ Thi Thi*, 7A, THCS Hành Phước, *Cao Nữ Xuân Lan, Nguyễn Lê Hoàng Duyên, Huỳnh Thị Hồng Lê, Đỗ Thị Mỹ Lan*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, *Nguyễn Đại Dương*, 7B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài 3/434. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho hai số $p-1$ và $p+1$ cùng có 6 ước số tự nhiên.*

Lời giải. (Theo bạn *Hoàng Thị Minh Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**).

Rõ ràng $p=2$ và $p=3$ không thoả mãn yêu cầu đề bài.

Với $p>3$ thì p lẻ nên $p-1$ và $p+1$ chẵn. Trong ba số tự nhiên liên tiếp $p-1$, p, $p+1$ có một số chia hết cho 3. Do p nguyên tố, $p>3$ nên p không chia hết cho 3. Vậy $p-1 \vdots 3$ hoặc $p+1 \vdots 3$.

• Nếu $p-1 \vdots 3$ thì do $p-1$ có 6 ước tự nhiên nên $p-1=2.3^2$ hoặc $p-1=2^2.3$.

– Với $p-1=2.3^2=18$ thì $p=19$; $p+1=20$ có 6 ước tự nhiên (thoả mãn).

– Với $p-1=2^2.3=12$ thì $p=13$; $p+1=14$ có 4 ước tự nhiên (loại).

• Nếu $p+1 \vdots 3$ thì do $p+1$ có 6 ước tự nhiên nên $p+1=2.3^2$ hoặc $p+1=2^2.3$.

– Với $p+1=2.3^2=18$ thì $p=17$; $p-1=16$ có 5 ước tự nhiên (loại).

– Với $p+1=2^2.3=12$ thì $p=11$; $p-1=10$ có 4 ước tự nhiên (loại).

Vậy số nguyên tố p cần tìm là 19. □

➢**Nhận xét.** 1) Lời giải trên đã sử dụng kết quả: Nếu một số nguyên $n>1$ có phân tích chính tắc: $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_K^{\alpha_K}$ ($p_1, p_2, ..., p_K$ là các số nguyên tố phân biệt; $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K \in \mathbb{N}^*$) thì n có $(\alpha_1+1).(\alpha_2+1)...(\alpha_K+1)$ ước số tự nhiên.

Trong phân tích chính tắc của $p-1$ và $p+1$ sẽ không thể có quá 2 ước nguyên tố phân biệt, vì nếu không thì số ước tự nhiên của $p-1$ và $p+1$ sẽ không ít hơn $(1+1).(1+1).(1+1)=8$ ước.

2) Ngoài bạn *Minh Anh*, các bạn sau cũng có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Trần Đức Duy*, 7A5, *Chu Mai Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Bùi Duy Hoàng, Nguyễn Thảo Chi, Trần Quang Đại, Nguyễn Hải Dương, Hoàng Công An*, 7A3, *Phạm Đức Duy, Khổng Xuân Bách*, 8A1; *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hoá:** *Phạm Tuấn Linh*, 9B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Nguyễn Văn Toàn*, 7A, *Trần Lê Hiệp*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/434. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}+\sqrt{z}=\dfrac{1}{6}\sqrt{xyz} \\ 6\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+3\sqrt{xz}=108+18\sqrt{x+4}+12\sqrt{y+9}+6\sqrt{z+36} \end{cases}$$

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Hải Toán*, 9A, THCS Tây Vinh, Tây Sơn, **Bình Định**).

• Trước hết, từ các bất đẳng thức

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$;

$a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \ge 0$, ta có

$$3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 \quad (1)$$

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra ở (1) và (2) khi và chỉ khi $a=b=c$.

• Trở lại bài toán. Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = 2a; \sqrt{y} = 3b;$

$\sqrt{z} = 6c\ (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0)$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+b+c=abc & (3) \\ ab+bc+ca=3+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} & (4) \end{cases}$$

Từ (4) và (1) ta có

$$(ab+bc+ca-3)^2=(\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2})^2$$
$$\leq 3(1+a^2+1+b^2+1+c^2)=3(a^2+b^2+c^2+3)$$
$$\leq 3\left((a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+3\right)$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2-6(ab+bc+ca)+9$$
$$\leq 3(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)+9$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 \leq 3(a+b+c)^2 = 3abc(a+b+c)$$

(do (3))

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^2 \leq 3abc(a+b+c) \quad (5)$$

Từ (2) và (5) suy ra

$$(ab+bc+ca)^2=3abc(a+b+c) \Leftrightarrow a=b=c.$$

Thay vào (3) ta được $a=b=c=\sqrt{3}$, suy ra $x=12;\ y=27;\ x=108$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (12; 27; 108)$. □

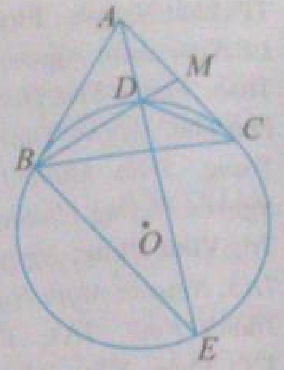
➢ **Nhận xét.** Chỉ có ba bạn có lời giải đúng. Ngoài bạn *Toán*, còn có hai bạn ở **Thanh Hoá:** *Nguyễn Hữu Hùng*, 9B, THCS Trần Phú, Nông Cống; *Lê Quang Dũng*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá.

NGUYỄN ANH QUÂN

★**Bài T5/434.** *Cho đường tròn (O). Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường trung tuyến BM của tam giác ABC cắt (O) ở D. Chứng minh rằng BE // AC.*

Lời giải

Từ $\widehat{MCD} = \widehat{MBC}$ suy ra $\Delta MCD \backsim \Delta MBC$ (g.g), ta được $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{MD}{MC}$.



Vì $MC = MA$, nên $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MD}{MA}$.

Suy ra $\Delta AMD \backsim \Delta BMA$ (c.g.c), nên $\widehat{MAD} = \widehat{MBA}$.

Mặt khác $\widehat{AEB} = \widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BD}$.

Vậy $\widehat{MAD} = \widehat{AEB}$, nên $AC // BE$. □

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Quản Thị Thu Huyền, Lê Thị Minh Châu*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Hương Ly*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Thanh Hương*, 9A, THCS Yên Phong; **Đà Nẵng:** *Lê Quang Anh*, 9^4, THCS Nguyễn Khuyến, Cẩm Lệ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THPT Hành Phước; *Đoàn Tú Nhi*, 9A, THCS Trần Hưng Đạo; **Vĩnh Long:** *Đoàng Hoàng Gia Bảo*, 9/11, THCS Lê Quý Đôn, TP. Vĩnh Long.

NGUYỄN THANH HỒNG

★**Bài T6/434.** *Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2}+\sqrt{c^2-(a-b)^2}$$
$$\leq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leq a+b+c.$$

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}+\sqrt{(b+c-a)(b-c+a)}$$
$$+\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}$$
$$\leq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leq a+b+c. \quad (*)$$

Áp dụng các bất đẳng thức quen thuộc $|ax+by| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$ và với $a>0, b>0$ có $2\sqrt{ab} \leq a+b$. Ta có

$$\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}+\sqrt{(b+c-a)(b-c+a)}$$
$$\leq 2\sqrt{ab} \leq a+b.$$ Tương tự

$$\sqrt{(b+c-a)(b-c+a)}+\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}$$
$$\leq 2\sqrt{bc} \leq b+c;$$

$$\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}+\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}$$
$$\leq 2\sqrt{ca} \leq c+a.$$

Cộng theo vế ba BĐT trên và rút gọn, ta được BĐT (*). Suy ra điều phải chứng minh.

Các dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

➤**Nhận xét.**

1) Bạn *Nguyễn Văn Thế*, 10T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh** đưa ra BĐT tổng quát:

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác và $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ luôn có

$$\sqrt[n]{a^2-(b-c)^2}+\sqrt[n]{b^2-(c-a)^2}+\sqrt[n]{c^2-(a-b)^2}$$

$$\leq \sqrt[n]{ab}+\sqrt[n]{bc}+\sqrt[n]{ca} \leq \sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{b^2}+\sqrt[n]{c^2}.$$

Các bạn hãy thử chứng minh nhé.

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Thêm, Nguyễn Thị Thanh Huyền, Hoàng Thị Minh Anh, Chu Mai Anh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Khiêm*, 9B, THCS Yên Phong; **Nghệ An:** *Tăng Thế Toàn, Nguyễn Đình Dũng*, 8A, *Hoàng Văn Nam, Phạm Trần Anh, Nguyễn Thị Hằng, Võ Việt Anh, Dương Xuân Long*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vy*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9/1, THCS Kim Đồng, Hội An; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

NGUYỄN ANH DŨNG

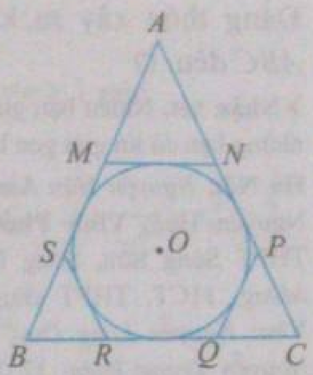
★Bài T7/434. *Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp tuyến của (O) song song với các cạnh của tam giác, cắt các cạnh của tam giác ABC tại 6 điểm M, N, P, Q, R và S ($M, S \in AB$; $N, P \in AC$; $Q, R \in BC$). Gọi l_1, l_2, l_3 lần lượt là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ các đỉnh A, B, C của các tam giác AMN, BSR, CPQ.*

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2} \geq \frac{81}{p^2}$$

với p là nửa chu vi tam giác ABC.

Lời giải. Giả sử l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác trong kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.



Khi đó

$$l_a=\frac{2AB.AC.\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}.$$

Kí hiệu p_1, p_2, p_3 lần lượt là nửa chu vi các tam giác AMN, BSR, CPQ.

Vì $MN \parallel BC$ nên

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}=\frac{p_1}{p}.$$

Suy ra $l_a=\dfrac{2\left(\frac{p}{p_1}\right)AM\left(\frac{p}{p_1}\right)AN.\cos\frac{A}{2}}{\frac{p}{p_1}(AM+AN)}=\dfrac{p}{p_1}l_1.$

Tương tự $l_b=\dfrac{p}{p_2}l_2$; $l_c=\dfrac{p}{p_3}l_3$.

Từ đó $\dfrac{l_a}{l_1}+\dfrac{l_b}{l_2}+\dfrac{l_c}{l_3}=p\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}\right).$

Từ tính chất tiếp tuyến ta có $p_1+p_2+p_3=p$.

Do đó $$\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3} \geq 9 \qquad (1)$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Bunyakovsky ta được

$$\left(\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3}\right)^2 \leq (l_a^2+l_b^2+l_c^2)\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right).$$

Lại thấy $l_a=\dfrac{2.bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\dfrac{2bc}{b+c}.\dfrac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{bc}}$

$(a=BC, b=AC, c=AB)$, suy ra

$$l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a) \leq p(p-a).$$

Tương tự có $l_b \leq p(p-b)$; $l_c^2 \leq p(p-c)$.

Vậy $l_a^2+l_b^2+l_c^2 \leq p(p-a+p-b+p-c)=p^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{l_a}{l_1}+\frac{l_b}{l_2}+\frac{l_c}{l_3}\right)^2 \leq p^2\left(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{l_1^2}+\dfrac{1}{l_2^2}+\dfrac{1}{l_3^2} \geq \dfrac{81}{p^2}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

➤**Nhận xét.** Nhiều bạn giải tốt bài toán này. Sau đây là những bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: *Nguyễn Hữu Khoẻ*, 11 Toán 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Cao*, 12A1, THPT Sáng Sơn, Sông Lô; **Hoà Bình:** *Đinh Chung Mừng*, 11CT, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Long Duy, Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, *Nguyễn Trung Hiếu*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Nguyễn Hồng Đăng, Nguyễn Tuấn Hưng*, 10 Toán 1, *Nguyễn Minh Hiếu, Bùi Ngọc Linh, Đào Việt Hoàng*, 10 Toán 2, *Vũ Tuấn Anh*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hoá:** *Trương Văn Cường*, 11A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá, *Lê Thế Sơn*, 12A8, THPT Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Tuấn Linh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thể*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Gia Lai:** *Vũ Văn Quý*, 12A1, THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku; **Long An:** *Phạm Minh Hậu, Nguyễn Minh Trí*, 11T1, *Chu Thị Thu Hiền*, 12T, THPT chuyên Long An; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

HỒ QUANG VINH

★Bài T8/434. *Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện* $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$. *Giải phương trình*

$$x^2+x-\cos A-\frac{1}{4}\cos(B-C)=0.$$

Lời giải. Ta có $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}.$

$\Rightarrow \cos^2\frac{B-C}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}$ (do $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$)

$\Leftrightarrow 1+\cos(B-C)=4(1-\cos A)$

$\Leftrightarrow 4\cos A+\cos(B-C)=3.$

Do đó PT đã cho trở thành

$$x^2+x-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ hoặc } x=-\frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của PT là $\left\{-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\}$. □

➤**Nhận xét.** 1) Bài này có rất nhiều bạn tham gia giải và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên một số bạn vận dụng các định lí sin, côsin trong tam giác để tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác rồi dựa vào đó giải phương trình nên phép biến đổi dài dòng hơn.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Quốc Trung*, 11 Toán, THPT Chu Văn An, *Trần Thị Quỳnh Hoa*, 11A1, THPT Yên Lãng, Mê Linh, *Trần Phương Anh*, 11A1, THPT Ngọc Hồi, Thanh Trì; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn An*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thái Nguyên:** *Phạm Thanh Bình*, 12A1, THPT Lương Phú; **Bắc Giang:** *Ngô Thị Hương*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Hoà Bình:** *Hoàng Bảo Linh*, 11 Toán, *Lê Đức Việt*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thái Bình:** *Hạ Thị Xuân*, 11 Tin, THPT chuyên Thái Bình; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, *Hoàng Thị Thu Uyên, Nguyễn Xuân Tùng*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Hà Nam:** *Hoàng Đức Mạnh*, 10 Toán, *Trịnh Ngọc Tú, Đặng Quang Huy*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hoà, *Đỗ Đăng Dương*, 10A1, THPT A Thanh Liêm; **Nghệ An:** *Đậu Hồng Quân*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Đặng Đình Lâm*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Thị Như Quỳnh*, 11T1, THPT Anh Sơn I, *Trần Văn Hùng*, 11A1, THPT Đô Lương III, **Thanh Hoá:** *Phạm Anh Thư*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, *Lê Văn Hải, Nguyễn Ngọc Thạch*, 11A7, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hoá, *Lê Thế Sơn*, 12A8, THPT Bỉm Sơn, *Trần Trung Đức*, 11A6, THPT Đào Duy Từ, *Lê Phương Linh*, 11A1, THPT Hoằng Hoá II; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thuỳ Linh*, 10A1, THPT Hương Khê, *Nguyễn Ly Na*, 11A1, THPT *Nguyễn Thị Minh Khai*, Nguyễn Văn Thể, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Phương Hoài*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, *Lâm Minh Triết*, 11T1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1; **Phú Yên:** *Đoàn Phù Thiện*, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà; **An Giang:** *Nguyễn Văn Cường*, 11A4, THPT Ba Chúc; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí*, 11T1, *Chu Thị Thu Hiền*, 12T, THPT chuyên Long An; **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Thành*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phương Ngọc*, 12T, *Dương Minh Chánh*, 11T, THPT Nguyễn Quang Diêu, *Lê Nhất Huy*, 12A8, THPT Cao Lãnh; **Quảng Nam:** *Bùi Ngọc Giao*, K04-07 THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try*, 12C3, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Pleiku; **Bình Định:** *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn; **Bến Tre:** *Nguyễn Vũ Thanh Mỹ*, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Như Thiệp*, 12A1, THPT Trần Quốc Toản, Eakar; **Cà Mau:** *Lê Minh Phương, Lưu Giang Nam*, 12 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T9/434. *Tìm tất cả các số thực x sao cho*

$$\left\{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\right\}=\frac{1}{2}$$

trong đó kí hiệu $\{a\}$ là phần lẻ của a, tức là $\{a\}=a-[a]$.

Lời giải. (Theo bạn *Đào Xuân Hiệp*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**)

Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$. Dễ thấy $0<a\le 2$.

Mà $\{a\}=\dfrac{1}{2}$ nên $a=\dfrac{1}{2}$ hoặc $a=\dfrac{3}{2}$.

• Nếu $a=\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=0$, phương trình này vô nghiệm.

• Nếu $a=\dfrac{3}{2}$ thì $\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. □

➤**Nhận xét.** Đây là một bài toán dành cho THCS, tuy nhiên số bạn ở bậc THCS tham gia giải còn ít. Sau đây là danh sách một số bạn THCS có lời giải tốt:

Thanh Hoá: *Nguyễn Hữu Hoàng*, 9B, THCS Trần Phú; **Quảng Nam:** *Lê Phước Định*, 9, THCS Kim Đồng; **Phú Thọ:** *Hoàng Đức An, Đinh Minh Hà*, 9A, THCS Lâm Thao; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 9A1, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T10/434. *Cho dãy số (x_n) được xác định bởi*

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}+\frac{2}{x_n^2}+\frac{3}{x_n^3}+\ldots+\frac{2011}{x_n^{2011}}+\frac{2012}{x_n^{2012}},$$

$(n\in\mathbb{N}^*)$ với $x_1>0$ cho trước. Tìm các số α để dãy (nx_n^α) có giới hạn và giới hạn là một số khác không.

Lời giải

Chú ý $x_{n+1}>x_n+\dfrac{1}{x_n}$, $\forall n\ge 1$ nên

$$x_{n+1}^2>\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2=x_n^2+2+\frac{1}{x_n^2}>x_n^2+2.$$

Bởi vậy $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 2$

$$x_n^2>x_{n-1}^2+2>x_{n-2}^2+4>\ldots>x_1^2+2(n-1).$$

Suy ra $x_n>1$, $\forall n\ge 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ (1)

Với $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta đặt $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}+k_n$,

$$k_n=\frac{2}{x_n^2}+\frac{3}{x_n^3}+\ldots+\frac{2011}{x_n^{2011}}+\frac{2012}{x_n^{2012}}.$$

Từ $x_n>1$, $\forall n\ge 2$ suy ra $0<k_n<\dfrac{t}{x_n^2}$,

trong đó $t=2+3+\ldots+2011+2012$ (2)

Do đó $x_{n+1}^2-x_n^2=\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}+k_n\right)^2-x_n^2$

$=\dfrac{1}{x_n^2}+k_n^2+2+2x_n.k_n+\dfrac{2k_n}{x_n}\to 2$ khi $n\to+\infty$.

Áp dụng Định lí trung bình Cesaro

$$\frac{x_n^2}{n}=\frac{(x_n^2-x_{n-1}^2)+(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2)+\ldots+(x_2^2-x_1^2)+x_1^2}{n}$$

$\to 2$ khi $n\to+\infty$. Tức là $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{x_n^2}=\dfrac{1}{2}$.

Nếu $\alpha>-2$ thì $n.x_n^\alpha=x_n^{\alpha+2}.n.x_n^{-2}\to+\infty$.

Nếu $\alpha<-2$ thì $n.x_n^\alpha=x_n^{\alpha+2}.n.x_n^{-2}\to 0$ khi $n\to+\infty$.

Vậy $\alpha=-2$ là số duy nhất thoả mãn bài toán. □

➤**Nhận xét**

1) Để chứng minh Định lí trung bình Cesaro, ta đặt

$$b_n=x_n^2-x_{n-1}^2-2,\ n=2,3,\ldots;\ b_1=x_1^2-2.$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$, nên $\forall\varepsilon>0$, $\exists m\in\mathbb{N}^*$

thoả mãn $|b_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n\ge m$. Xét $n\ge m$ ta có

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right|}{n} \le \frac{\left|\sum_{i=m}^{n} b_i\right|}{n} + \frac{\left|\sum_{i=1}^{m-1} b_i\right|}{n} < \frac{(n-m+1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} + \frac{\left|\sum_{i=1}^{m-1} b_i\right|}{n}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(Nếu $n \ge n_0 > m$, trong đó n_0 là số nguyên dương thoả mãn $\dfrac{\left|\sum_{i=1}^{m-1} b_i\right|}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$). Do đó theo định nghĩa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right|}{n} = 0.$$

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Hưng Yên: *Nguyễn Trung Hiếu,* 12T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nam:** *Lê Anh Tuấn,* 11T, THPT chuyên ban Hà Nam; **Thanh Hoá:** *Lê Thế Sơn,* 12A8, THPT Bỉm Sơn; **Quảng Trị:** *Trần Trọng Tiến,* 11T, *Trần Đức Anh,* 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T11/434. *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(xf(y) + 3y^2) + f(3xy + y) = f(3y^2 + x) + 4xy - x + y,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải (Theo đa số các bạn).

Thay $x = 0$ vào đẳng thức đã cho, ta được

$$f(3y^2) + f(y) = f(3y^2) + y,\ \forall y \in \mathbb{R},$$

hay $f(y) = y$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn điều kiện bài ra. □

➢Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Yên Bái: *Vũ Minh Quân,* 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hòa Bình:** *Lê Đức Việt,* 12T, *Hoàng Bảo Linh,* 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn An,* 11T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Nguyễn Đình Thịnh,* 12A1, THPT Thanh Oai; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu,* 12T1, *Trần Bá Trung,* 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hải Phòng:** *Lê Huỳnh Đạt,* 11 Tin, THPT chuyên Trần Phú, **Nam Định:** *Bùi Ngọc Linh, Nguyễn Minh Hiếu, Đào Việt Hoàng,* 10T2, *Ngô Tuấn Anh, Nguyễn Hồng Dũng,* 10T1, *Nguyễn Tuấn Hưng,* 10T1, *Bùi Minh Thông,* 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** *Lê Anh Tuấn, Đặng Quang Huy,* 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** *Phan Xuân Đức,* C4K17, THPT Nam Đàn 2, *Nguyễn Đình Tạo,* 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Phạm Trung Dũng,* 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Hà Tĩnh:** *Trần Bảo Trung,* 10T1, *Nguyễn Thị Việt Hà, Trần Hậu Mạnh Cường,* 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Võ Thế Duy,* 11A1, THPT Số 1 Phù Mỹ, **Gia Lai:** *Trần Nguyên Try,* 12C3A, THPT chuyên Hùng Vương; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Như Thiệp,* 12A1, THPT Trần Quốc Toản, Eakar; **Đồng Nai:** *Nguyễn Nam Bình,* 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** *Dương Minh Chánh,* 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bến Tre:** *Phạm Ngô Gia Bảo,* 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Long An:** *Nguyễn Minh Tú,* 11T1, THPT chuyên Long An; **Cà Mau:** *Lê Minh Phương,* 12T, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN VĂN MẬU

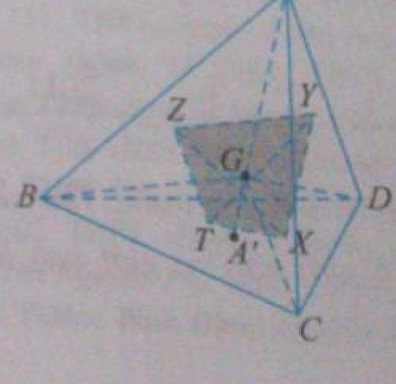
★Bài T12/434. *Cho tứ diện ABCD với trọng tâm G. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) sao cho XY, YZ, ZT, TX theo thứ tự song song với GA, GB, GC, GD. Tính tỉ số thể tích của các khối tứ diện ABCD và XYZT.*

Lời giải. Trong lời giải này, kí hiệu $\left[\dfrac{A_1}{\alpha_1}, ..., \dfrac{A_n}{\alpha_n}\right]$ chỉ tâm tỉ cự của hệ điểm $A_1, ..., A_n$ với các hệ số tương ứng là $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (xem bài *Các thuật toán biến đổi tâm tỉ cự trong hình học phẳng,* TH&TT số 403, 1/2011).

Giả sử $X = \left[\dfrac{B}{\beta}, \dfrac{C}{\gamma}, \dfrac{D}{\delta}\right]$ $(\beta + \gamma + \delta = 1)$ (1)

Gọi A' là giao điểm của AG và (BCD).

Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên A' là trọng tâm của tam giác BCD.



Điều đó có nghĩa là $A'=\left[\dfrac{B}{\beta},\dfrac{C}{\beta},\dfrac{D}{\beta}\right]$.

Do đó $\left[\dfrac{B}{\beta}\right]=\left[\dfrac{A'}{3\beta},\dfrac{C}{-\beta},\dfrac{D}{-\beta}\right]$.

Vậy $X=\left[\dfrac{A'}{3\beta},\dfrac{C}{\gamma-\beta},\dfrac{D}{\delta-\beta}\right]$.

Từ đó, qua phép chiếu song song phương GA xuống mặt phẳng (CDA), ta có

$$Y=\left[\frac{C}{\gamma-\beta},\frac{D}{\delta-\beta},\frac{A}{3\beta}\right].$$

Qua phép chiếu song song phương GB xuống mặt phẳng (DAB), ta có

$$Z=\left[\frac{D}{\delta-\gamma},\frac{A}{4\beta-\gamma},\frac{B}{3(\gamma-\beta)}\right].$$

Qua phép chiếu song song phương GC xuống mặt phẳng (ABC), ta có

$$T=\left[\frac{A}{4\beta-\delta},\frac{B}{4\gamma-3\beta-\delta},\frac{C}{3(\delta-\gamma)}\right].$$

Qua phép chiếu song song phương GA xuống mặt phẳng (BCD), ta có

$$X=\left[\frac{B}{4\gamma-7\beta},\frac{C}{4\delta-3\gamma-4\beta},\frac{D}{3(4\beta-\delta)}\right]\ (2)$$

Từ (1) và (2) chú ý rằng

$$(4\gamma-7\beta)+(4\delta-3\gamma-4\beta)+3(4\beta-\delta)$$
$$=\beta+\gamma+\delta=1$$

và các vectơ $\overrightarrow{XB},\overrightarrow{XC},\overrightarrow{XD}$ đôi một không cùng phương, suy ra

$$\begin{cases}\beta+\gamma+\delta=1\\ \beta=4\gamma-7\beta\\ \gamma=4\delta-3\gamma-4\beta\\ \delta=3(4\beta-\delta).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{1}{6};\gamma=\dfrac{1}{3};\delta=\dfrac{1}{2}\\ \gamma-\beta=\dfrac{1}{6};\delta-\beta=\dfrac{1}{3};3\beta=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Vậy $\begin{cases}\dfrac{1}{6}\overrightarrow{XB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{XC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{XD}=\vec{0}\\ \dfrac{1}{6}\overrightarrow{YC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{YD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{YA}=\vec{0}.\end{cases}$

Do đó $\dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YB}-\overrightarrow{YC}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YC}-\overrightarrow{YD}\right)$

$+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YD}-\overrightarrow{YA}\right)=\vec{0}$. Nghĩa là

$$\overrightarrow{XY}+\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GA}\right)=\vec{0}.$$

Kết hợp với $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{XY}+\dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}=\vec{0}$. Hay $\overrightarrow{XY}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{GA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}=\vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{XY}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GA}$.

Tương tự có $\overrightarrow{YZ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB};\overrightarrow{ZT}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

Vậy $V_{XYZT}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}\right].\overrightarrow{XT}\right|$

$=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{XY},\left(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}\right)\right].\overrightarrow{XT}\right|$

$=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{YZ}\right].\left(\overrightarrow{XZ}+\overrightarrow{ZT}\right)\right|$ (vì $\left[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XY}\right]=\vec{0}$)

$=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{YZ}\right].\overrightarrow{ZT}\right|$ (vì $\left[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{YZ}\right].\overrightarrow{XZ}=0$)

$=\dfrac{1}{6}\left|\left[\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GA},\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}\right].\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}\right|$

$=\dfrac{8}{27}.\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right].\overrightarrow{GC}\right|=\dfrac{8}{27}V_{GABC}=\dfrac{8}{27}.\dfrac{1}{4}V_{ABCD}$

$=\dfrac{2}{27}V_{ABCD}$. Vậy $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{XYZT}}=\dfrac{27}{2}$. □

➤**Nhận xét.** Bài toán này khó, không có bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN MINH HÀ

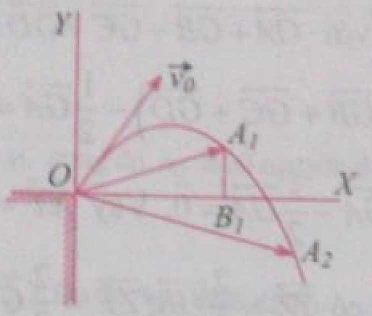
★Bài L1/434. *Hai hòn đá được ném từ cùng một điểm trên một ngọn tháp cao với cùng góc ném α so với phương ngang (ném chếch lên trên) và cùng vận tốc ban đầu v_0 nhưng ném cách nhau một khoảng thời gian là Δt. Xác định khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hòn đá và thời điểm đạt khoảng cách đó. Bỏ qua sức cản của không khí.*

Lời giải. Chọn gốc tọa độ tại điểm ném, gốc thời gian lúc ném hòn đá 2, ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp vectơ. Khi hòn đá 2 bắt đầu được ném đi thì hòn đá 1 có độ dời là

$$\Delta\vec{r_0}=\vec{v}_0\Delta t+\frac{\vec{g}\Delta t^2}{2}$$

và nó đang có vận tốc $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}\Delta t$.

Các phương trình xác định vectơ độ dời (vectơ vị trí) của hai hòn đá là



$$\Delta\vec{r}_1(t) = \vec{v}_0(t+\Delta t) + \frac{\vec{g}(t+\Delta t)^2}{2},$$

$$\Delta\vec{r}_2(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Vectơ độ dời của hòn đá 1 so với hòn đá 2 (tức là hệ quy chiếu gắn với hòn đá 2) là

$$\vec{S} = \Delta\vec{r}_1(t) - \Delta\vec{r}_2(t)$$

$$= \vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2} + \vec{g}\Delta t.t = \Delta\vec{r}_0 + \vec{g}\Delta t.t$$

Phương trình này cho thấy hòn đá 1 chuyển động thẳng đứng với vận tốc $\vec{g}\Delta t$ so với hòn đá 1.

• Với Δt sao cho khi ném hòn đá 2 mà hòn đá 1 chưa trở lại độ cao ban đầu (điểm ném) thì khoảng cách nhỏ nhất của hai hòn đá sẽ bằng

$$S_1 = \left(\Delta\vec{r}_0\right)_x = \left(\vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{g}\Delta t^2}{2}\right)_x = v_0\cos\alpha\Delta t.$$

Khoảng cách này đạt được khi hai hòn đá có cùng độ cao, tức là

$$S_y = 0 = \left(\Delta\vec{r}_0\right)_y - g\Delta t.t = v_0\sin\alpha\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2} - g\Delta t.t.$$

Suy ra $t = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g} - \dfrac{\Delta t}{2}.$

Điều kiện để xảy ra trường hợp này là $t > 0$ hay $\Delta t < \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}.$

• Ngược lại nếu $\Delta t \geq \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$ thì khoảng cách nhỏ nhất giữa hai hòn đá bằng

$$S_2 = \left|\Delta\vec{r}_0\right|$$

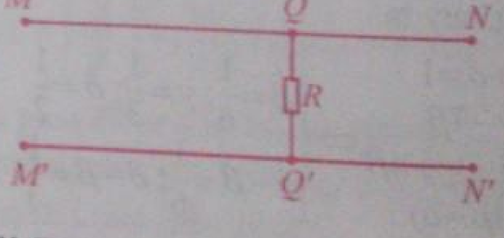
$$= \sqrt{\left(v_0\cos\alpha\Delta t\right)^2 + \left(v_0\sin\alpha\Delta t - \frac{g\Delta t^2}{2}\right)^2}$$

và đạt được lúc $t = 0$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Dũng, Nguyễn Mạnh Dân* 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hoài Nam* 12A1 THPT Dương Quảng Hàm; **Nghệ An:** *Lê Xuân Bảo*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/434.** *Từ một trạm phát điện đặt tại vị trí M, điện năng được truyền tải đến nơi tiêu thụ N, cách M 180km. Biết đường dây có điện trở tổng cộng 80Ω (coi dây tải điện là đồng chất có điện trở tỉ lệ thuận với chiều dài của dây). Do có sự cố, đường dây bị rò điện tại điểm Q (hai dây tải điện MN và M'N' bị nối tắt bởi một vật có điện trở với giá trị xác định R). Để xác định vị trí Q, trước tiên người ta ngắt đường dây khỏi máy phát và tải tiêu thụ sau đó dùng nguồn điện không đổi 12V, điện trở trong không đáng kể, nối vào hai đầu M và M' của hai dây tải điện. Khi hai đầu dây N và N' để hở thì cường độ dòng điện qua nguồn là 0,40A, còn khi hai đầu dây N và N' được nối tắt bởi một đoạn dây có điện trở không đáng kể thì cường độ dòng điện qua nguồn là 0,42A. Khoảng cách MQ bằng bao nhiêu?*



Lời giải. Điện trở đoạn dây MN và $M'N'$ là

$$R_{MN} = R_{M'N'} = \frac{80}{2} = 40\ (\Omega).$$

Gọi điện trở đoạn dây MQ và $M'Q'$ là R_1 thì $R_1 \leq 40\Omega$.

Điện trở đoạn dây QN và $Q'N'$ là

$$R_{QN} = R_{Q'N'} = R_{MN} - R_1 = 40 - R_1.$$

a) Khi để hở hai đầu N và N', ta có R_1 nt R nt R_1. Điện trở của đoạn mạch là $R_{MM'} = 2R_1 + R$.

Cường độ dòng điện qua nguồn

$$I_{MM'} = \frac{U}{R_{MM'}} = \frac{12}{2R_1 + R} = 0,4 \text{ (A)}$$

$$\Rightarrow R = 30 - 2R_1 \qquad (1)$$

b) Khi nối tắt hai đầu N và N', ta có

R_1 nt $[R//(40 - R_1)$ nt $(40 - R_1)]$ nt R_1.

Điện trở của đoạn mạch là

$$R_{td} = 2R_1 + \frac{R(80-2R_1)}{R+80-2R_1}.$$

Cường độ dòng điện qua nguồn

$$I_{td} = \frac{U}{R_{td}} = 0,42 \Rightarrow R_{td} = \frac{200}{7}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad 2R_1 + \frac{R(80-2R_1)}{R+80-2R_1} = \frac{200}{7} \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta thu được phương trình

$$7R_1^2 - 200R_1 + 1300 = 0 \qquad (3)$$

Giải phương trình (3) ta thu được hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} R_1 = 10\ (\Omega). \\ R_1 = \dfrac{130}{7}\ (\Omega). \end{array}\right.$$

Từ điều kiện của phương trình (1) để $R > 0$ thì $R_1 < 15\Omega$, với $R_1 = \frac{130}{7} \approx 18,57\Omega$ (loại).

Với $R_1 = 10\Omega$ thì khoảng cách MQ là

$$MQ = 180.\frac{R_1}{R_{MN}} = 180.\frac{10}{40} = 45 \text{(km)}. \ \square$$

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Thái Nguyên: *Tạ Văn Tuấn, Phạm Thanh Bình,* 12A1, THPT Lương Phú, Hương Sơn, Phú Bình; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Đức Thắng, Ngô Thị Nhung, Nguyễn Mạnh Dũng, Nguyễn Mạnh Dân,* 10A3, chuyên Lí, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hoài Nam,* 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa,* 10A2, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng; *Vũ Văn Dũng,* 11 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hoá:** *Phạm Ngọc Bách,* 12A4, THPT Tĩnh Gia II; **Quảng Ngãi:** *Bùi Vũ Hoàn,* 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết.

ĐẶNG THANH HẢI

PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/438. a) Let $a_1, a_2, ..., a_n$ be n rational numbers. Prove that if $a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m$ is an integer for all positive integers m, then $a_1, a_2, ..., a_n$ are integer numbers.

b) Does the conclusion above remain valid if one only assumes that $a_1, a_2, ..., a_n$ are real numbers?

T10/438. Find all continuous functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the following identity is satisfied for all x, y

$$f(x) + f(y) + 2 = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

T11/438. Let ABC be a triangle with side lengths $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ and median lengths m_a, m_b, m_c drawn from vertex A, B and C respectively. Prove that for any point M,

a) $\left(\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c}\right)\frac{MA}{a}+\left(\frac{m_c}{c}+\frac{m_a}{a}\right)\frac{MB}{b}+\left(\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}\right)\frac{MC}{c}\geq 3;$

b) $\left(\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)\frac{MA}{a}+\left(\frac{c}{m_c}+\frac{a}{m_a}\right)\frac{MB}{b}+\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}\right)\frac{MC}{c}\geq 4.$

T12/437. Let ABC be an isosceles triangle at vertex A. A circle ω which touches the sides AB, AC meets BC at K, L. AK meets ω at M. Let P, Q be the reflection points of K through points B, C respectively. Let O be the circumcenter of triangle MPQ. Prove that M, O and the center of circle ω are collinear.

Translated by LE MINH HA

DẠY TOÁN PHẢI BIẾT NHÌN BÀI TOÁN CƠ BẢN

VÕ HỮU HÀ
(GV THPT Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)

Giải bài toán là vấn đề không khó, người giáo viên cần làm cho học sinh thấy được những vấn đề hay, những điều thú vị khi học toán từ đó kích thích tính tư duy sáng tạo của học sinh; cần rèn luyện cho học sinh biết suy nghĩ đa dạng khi đứng trước vấn đề cần giải quyết. Qua kinh nghiệm giảng dạy, chúng tôi có hướng gợi suy nghĩ cho học sinh nhằm tập dượt cho học sinh nghiên cứu khoa học, xin trao đổi cùng độc giả thông qua một bài toán cụ thể.

I. BÀI TOÁN XUẤT PHÁT

(Thí dụ 3, trang 105 SGK Đại số 10 Nâng cao)

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc \quad (I)$$

Bất đẳng thức (I) không chỉ đúng với a, b, c là ba cạnh của một tam giác mà còn đúng với mọi a, b, c là các số không âm bất kì.

Thật vậy

- Nếu có một trong ba thừa số $(a+b-c)$, $(b+c-a),(c+a-b)$ âm, giả sử $a+b-c<0$ thì $(b+c-a),(c+a-b)$ là các số không âm, nên bất đẳng thức (I) đúng.
- Nếu $(a+b-c),(b+c-a),(c+a-b)$ đều không âm, ta có

$$a^2 \ge a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)\ge 0;$$

$$b^2 \ge b^2-(c-a)^2=(b-c+a)(b+c-a)\ge 0;$$

$$c^2 \ge c^2-(a-b)^2=(c-a+b)(c+a-b)\ge 0.$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức không âm, cùng chiều trên ta có

$$a^2b^2c^2 \ge (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2,$$

khai căn bậc hai của hai vế ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$; hoặc $a=0$, $b=c$ và các hoán vị; hoặc $a=b=0$, c tùy ý và các hoán vị.

II. MỘT SỐ KẾT QUẢ SUY RA TRỰC TIẾP TỪ BÀI TOÁN

Ta có BĐT

$$(I) \Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b \le a^3+b^3+c^3+3abc \quad (I.1)$$

Do $a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b+3abc$ $=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ nên

$$\text{BĐT } (I.1) \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) \le a^3+b^3+c^3+6abc \quad (I.2)$$

Do $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c$ $+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$

$$\text{nên BĐT } (I.2) \Leftrightarrow 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^3+9abc \quad (I.3)$$

Do $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ $=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ nên

$$\text{BĐT } (I.3) \Leftrightarrow 4(a+b)(b+c)(c+a) \le (a+b+c)^3+5abc \quad (I.4)$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \le (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+9abc \quad (I.5)$$

Điểm mạnh của các bất đẳng thức này là đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$; hoặc $a=0$, $b=c$ và các hoán vị; hoặc $a=b=0$, c tùy ý và các hoán vị. Tức là chúng ta có thể sử dụng các bất đẳng thức từ (I.1) đến (I.5) để chứng minh các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau; hoặc tại các đầu mút của các biến.

III. ÁP DỤNG

Bài toán 1. *Cho ba số thực không âm a, b, c thoả mãn $a^3+b^3+c^3=1$. Chứng minh rằng*

$$2\left(ab\sqrt{ab}+bc\sqrt{bc}+ca\sqrt{ca}\right)\le 1+3abc \quad (1)$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT (I.1) có

$$\mathrm{VT}(1)\le 2\left(ab.\frac{a+b}{2}+bc.\frac{b+c}{2}+ca.\frac{c+a}{2}\right)$$
$$=a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$
$$\le a^3+b^3+c^3+3abc\le 1+3abc=VP\ (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a=b=c=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.\ \square$$

Với cách giải bài toán 1, ta có kết quả bài toán 2 sau :

Bài toán 2. *Cho ba số thực không âm a, b, c thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$2(ab\sqrt{ab}+bc\sqrt{bc}+ca\sqrt{ca})\le 3+a^3+b^3+c^3 \quad (2)$$

Bài toán 3. (Olympic Toán học Quốc tế 1984)

Cho ba số thực không âm a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$0\le ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27} \quad (3)$$

Lời giải. Do $a+b+c=1$

- $ab+bc+ca-2abc$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-2abc$

$=a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b+abc\ge 0.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)=(0;0;1)$ và các hoán vị.

- Áp dụng BĐT (1.3) và BĐT Cauchy ta có

$4(ab+bc+ca)-8abc$

$=4(a+b+c)(ab+bc+ca)-8abc$

$\le(a+b+c)^3+abc$

$$\le(a+b+c)^3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{28}{27}$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. $\square$

Bài toán 4. (Olympic Toán học Quốc tế 2000) *Cho ba số thực dương x, y, z thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng*

$$\left(x-1+\frac{1}{y}\right)\left(y-1+\frac{1}{z}\right)\left(z-1+\frac{1}{x}\right)\le 1 \quad (4)$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$ (với a, b, c dương). Khi đó BĐT (4) trở thành

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$$

luôn đúng theo BĐT (I). Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$. $\square$

Bài toán 5. (Olympic Toán Ba Lan 2005) *Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge 9.$$

Lời giải. Theo BĐT (I.2), ta có

$a^3+b^3+c^3+6abc\ge(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$=3(a+b+c)\ge 3\sqrt{3(ab+bc+ca)}=9$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài toán 6. *Cho các số a, b, c không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=ab+bc+ca-kabc$.*

Lời giải. *a) Tìm giá trị nhỏ nhất*

Áp dụng BĐT Cauchy và $a+b+c=1$. Ta có

$ab+bc+ca=(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc$

$\Rightarrow F\ge(9-k)abc$.

- Nếu $k\le 9$ thì $F\ge(9-k)abc\ge 0$ nên $\min F=0$ tại $(a;b;c)=(0;0;1)$ và các hoán vị của nó.
- Nếu $k>9$ thì $F\ge(9-k)abc$

$$\ge(9-k).\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{9-k}{27}$$

nên $\min F=\frac{9-k}{27}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất

Với $a+b+c=1$, áp dụng BĐT (I.3) ta có

$4(ab+bc+ca)=4(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\le(a+b+c)^3+9abc=1+9abc.$

Khi đó $F\le\frac{1}{4}+\left(\frac{9}{4}-k\right)abc$.

• Nếu $k \le \frac{9}{4}$ thì

$$F \le \frac{1}{4} + \left(\frac{9}{4} - k\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} - \frac{k}{4}$$

nên $\max F = \frac{1}{3} - \frac{k}{27} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

• Nếu $k > \frac{9}{4}$ thì $F \le \frac{1}{4}$ nên $\max F = \frac{1}{4}$ tại $(a;b;c) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ và các hoán vị. □

Bài toán 7. *Cho a, b, c không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \ge 1.$$

Lời giải

Ta có $4\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 15abc \ge 1$

$$\Leftrightarrow 4\left((a+b+c)\left((a+b+c)^2 - 3ab - 3bc - 3ca\right) + 3abc\right) + 15abc - 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 9abc + 1 \ge 4(ab + bc + ca)$$

luôn đúng theo BĐT (I.3).

Đẳng thức xảy ra tại $(a;b;c) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ và các hoán vị. □

BÀI TẬP

1. Cho a, b, c không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

a) $4\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 24abc \ge 1$;

b) $7(ab + bc + ca) \le 2 + 9abc$;

c) $\frac{2}{9} \le a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \le 1$.

2. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{2}{9} \le a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \le \frac{1}{4}$.

3. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \ge (a+b+c)^2.$$

ÁP DỤNG TÍNH CHẤT...

(Tiếp trang 14)

Để kết thúc bài viết xin mời các bạn giải thêm một số bài tập liên quan đến khối tứ diện vuông

1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

1) $(AB + BC + CA)^2 \le 6(OA^2 + OB^2 + OC^2)$;

2) $S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} \le \sqrt{3}S_{ABC}$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một, H trực tâm tam giác ABC, O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{O_1H^2}{OH^2} + 2 = \frac{1}{4\cos A\cos B\cos C}$$

trong đó A, B, C là độ lớn ba góc của tam giác ABC.

3. Gọi α, β, γ là số đo các nhị diện cạnh AB, BC, AC của tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

1) $\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma \le \frac{\sqrt{2}}{4}$;

2) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \ge \frac{9}{2}$.

4. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi đường cao OH của tứ diện với OA, OB, OC. Chứng minh rằng

1) $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta} \ge 6\sqrt{3}$;

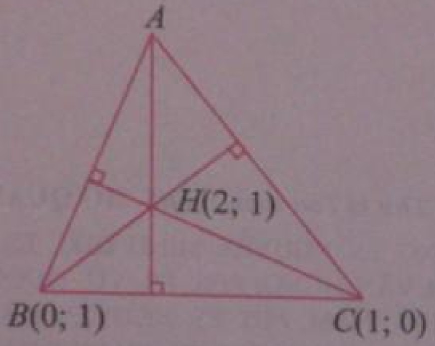
2) $(2\cot^2\alpha + 1)(2\cot^2\beta + 1)(2\cot^2\gamma + 1) \ge 64\cot^2\alpha\cot^2\beta\cot^2\gamma$.

Giải đáp bài

ĐỀ BÀI VÀ LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN

(Đề đăng trên TH&TT số 436, tháng 10 năm 2013)

Nhận thấy rằng đường thẳng AH đi qua điểm $H(2;\,1)$ và nhận $\overrightarrow{BC}(1;\,-1)$ làm vectơ pháp tuyến (VTPT) nên có phương trình $x-y-1=0$.



Đường thẳng AB đi qua điểm $B(0;\,1)$ và nhận $\overrightarrow{CH}(1;\,1)$ làm VTPT nên có phương trình $x+y-1=0$. Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0. \end{cases}$$

Suy ra $A(1;\,0)$. Từ đó ta thấy $A \equiv C$.

Vậy không tồn tại tam giác nào mà có $B(0;\,1)$, $C(1;\,0)$ và trực tâm $H(2;\,1)$.

Nghĩa là đề bài sai !

NGỌC HIÊN

NGHIỆM NGOẠI LAI XUẤT HIỆN DO ĐÂU ?

Có bài toán với nội dung:

Giải phương trình

$$\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3.$$

Một tài liệu đã giải phương trình trên như sau:

ĐK $\quad 4x^2+5x+1 \ge 0 \qquad (1)$

Đặt $\quad \sqrt{4x^2+5x+1}=a,\ 2\sqrt{x^2-x+1}=b$

$(a \ge 0,\, b \ge 0)$.

Ta có $a^2-b^2=9x-3$; mặt khác theo phương trình đã cho thì $a-b=9x-3$ (*), nên

$$a^2-b^2=a-b \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0.$$

Trường hợp 1. Nếu $a-b=0$ thì $a=b$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+5x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ (thoả mãn điều kiện (1)).}$$

Trường hợp 2. Nếu $a+b-1=0$ thì $b=1-a$ thay vào (*) ta có

$$2a=9x-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+5x+1}=9x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x-2 \ge 0 \\ 4(4x^2+5x+1)=(9x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{9} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{56}{65} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{56}{65} \text{ (thoả mãn điều kiện (1)).}$$

Vậy PT đã cho có tập nghiệm $T=\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{56}{65}\right\}$.

Tuy nhiên khi thay $x=\dfrac{56}{65}$ thì thấy không thoả mãn phương trình.

Vậy nghiệm ngoại lai xuất hiện do đâu ?

NGUYỄN ĐẮC ĐIỆP

(GV THPT Tứ Kỳ, Hải Dương)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 438 (12.2013)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Sinh viên trường Cao đẳng Sư phạm Hà Giang

NIỀM VINH DỰ CỦA NHÀ TRƯỜNG ĐƯỢC MANG TÊN
NHÀ BÁC HỌC LÊ QUÝ ĐÔN

NGƯT: Nguyễn Thị Mai Lan
Bí thư chi bộ - Hiệu trưởng

Trường THCS Lê Quý Đôn được thành lập ngày 1 tháng 7 năm 1995 với tên là Trường chuyên phổ thông THCS huyện Từ Liêm - Hà Nội. Tháng 9 năm 1997, trường đã được đổi tên thành Trường THCS Lê Quý Đôn - phường Nghĩa Tân - quận Cầu Giấy. Tháng 8 năm 2002, Trường THCS Lê Quý Đôn được sáp nhập với Trường THCS Nghĩa Đô và chuyển về địa điểm mới trên đường Nguyễn Văn Huyên - phường Nghĩa Đô - quận Cầu Giấy - Hà Nội.

Gần 20 năm xây dựng và phát triển là cả một chặng đường phấn đấu không mệt mỏi của tập thể cán bộ, giáo viên và học sinh. Nhà trường đã đạt được nhiều thành tích xuất sắc:

- Được nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba năm 2007, Huân chương Lao động hạng Nhì năm 2013.
- Được Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen về thành tích "Đơn vị hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ năm học" trong các năm học 2003 - 2004 ; 2004 - 2005 ; 2010 - 2011.
- Được Bộ GD&ĐT tặng Bằng khen về thành tích "Thực hiện chương trình thí điểm và sách giáo khoa" năm 2002; về thành tích "Hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ trong việc tham gia dự án THCS giai đoạn 2000 - 2005".
- Được UBND thành phố Hà Nội tặng Cờ thi đua xuất sắc năm học 2010 - 2011; Bằng khen về thành tích xuất sắc trong phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" năm 2010.
- Được UBND quận Cầu Giấy, UBND thành phố Hà Nội nhiều năm liền tặng Giấy khen và Bằng khen về thành tích trường đạt danh hiệu "Tập thể tiên tiến"; "Tập thể tiên tiến xuất sắc".
- Được Sở TDTT tặng Bằng khen về thành tích "Đạt danh hiệu trường TTXS về TDTT".

Gần 20 năm với sự nghiệp "trồng người", Trường THCS Lê Quý Đôn luôn là đơn vị dẫn đầu quận Cầu Giấy về thành tích học sinh giỏi cấp quận, thành phố (trong đó có 1782 giải cấp quận và 556 giải cấp thành phố các bộ môn văn hóa, 92 giải Olympic Toán Hà Nội mở rộng, Olympic Toán Singapore và Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương; 424 giải cấp quận và 141 huy chương cấp thành phố các môn TDTT). Hàng năm nhiều học sinh của trường thi đỗ vào các trường chuyên THPT. Từ mái trường mang tên nhà bác học lỗi lạc Lê Quý Đôn nhiều thế hệ học sinh đã trưởng thành đang học tập và công tác trên khắp mọi miền đất nước.

Trong phong trào thi đua Dạy tốt – Học tốt, nhiều giáo viên đã đạt các thành tích xuất sắc. 3 nhà giáo vinh dự được phong tặng danh hiệu NGƯT; 1 Huân chương Lao động hạng Ba, 3 Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ; 22 Bằng khen của Bộ GD & ĐT và Bằng khen của UBND Thành phố Hà Nội; 165 lượt giáo viên giỏi, chiến sĩ thi đua cấp cơ sở; 34 giáo viên dạy giỏi cấp thành phố; 67 giáo viên dạy giỏi cấp quận và nhiều Giấy khen, Bằng khen của các ban ngành đoàn thể.

Trường THCS Lê Quý Đôn ngày càng trưởng thành, phát triển vững mạnh, thực chất và có uy tín cao trong nhân dân, đã và đang từng bước khẳng định là một mắt xích quan trọng trong hệ thống giáo dục Thủ đô.

Tập thể cán bộ, giáo viên Trường THCS Lê Quý Đôn – quận Cầu Giấy – TP Hà Nội.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT12M3

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2013

Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng