T.Thúy

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

12 2017 Số 486

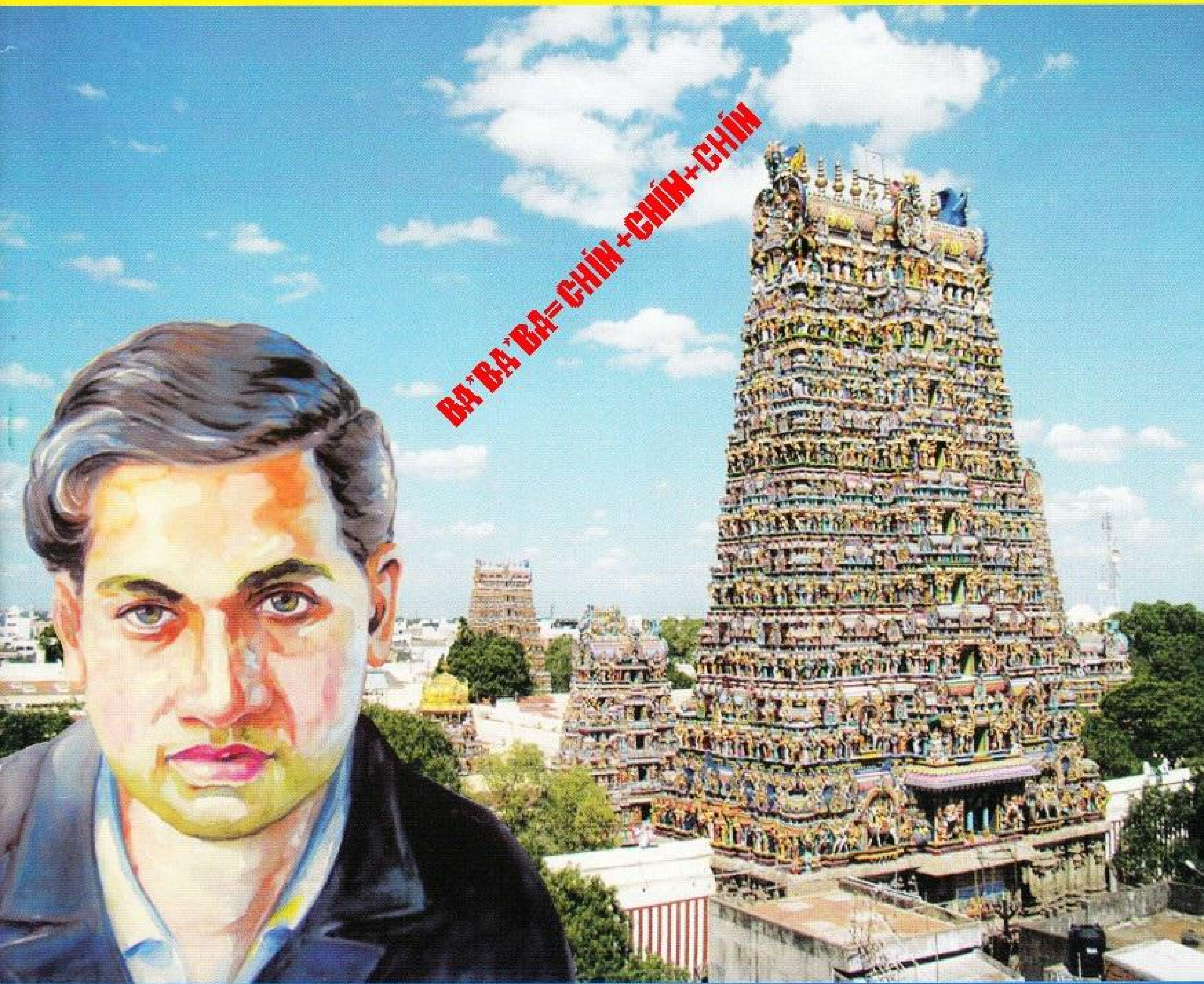
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Nhà Toán học Ấn Độ **Srinivasa Ramanujan** (22/12/1887 - 26/4/1920)

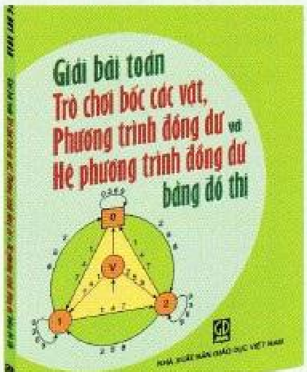
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

GIẢI BÀI TOÁN TRÒ CHƠI BỐC CÁC VẬT, PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG DƯ BẰNG ĐỒ THỊ

của tác giả GS. TS. NGND ĐẶNG HUY RUẬN

Sách dày 112 trang, khổ 17x24cm, giá bìa: 30.000 đồng.



Nội dung của sách trình bày phương pháp giải bài toán trò chơi bốc các vật, phương trình đồng dư tuyến tính, hệ phương trình đồng dư tuyến tính và phương trình đồng dư bậc cao bằng đồ thị. Nói cụ thể hơn: Nội dung chủ yếu của cuốn sách là trình bày thuật toán xây dựng đồ thị có hướng với các cung được gán nhãn trên bảng chữ cái thập phân mà nhãn của đồ thị nhận được chính là tập nghiệm của phương trình hay hệ phương trình đồng dư.

Sách gồm hai phần chính:

Phần trò chơi bốc các vật trình bày thuật toán để người đi đầu chiến thắng bằng cách bốc được vật cuối cùng (hoặc không phải bốc vật cuối cùng).

Phần phương trình và hệ phương trình đồng dư được trình bày trong bốn chương cuối của cuốn sách.

Chương [illegible] trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình $ax \equiv b$ (mod m) với a, m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, còn $b \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Chương VI trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư tuyến tính.

Chương VII trình bày thuật toán xây dựng đồ thị xác định tập nghiệm của hệ phương trình đồng dư bậc cao.

Chương V trình bày về thuật toán giải phương trình đồng dư tuyến tính dạng đặc biệt $x \equiv b$ (mod m). Tập nghiệm của phương trình này chính là tập số đồng dư với b theo module m. Bởi vậy đồ thị xác định tập nghiệm của phương trình này được gọi là nguồn đồng dư.

Cuốn sách không những trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo một module, mà còn trình bày thuật toán xây dựng nguồn đồng dư theo nhiều module và một số cấu trúc khác, chẳng hạn, nguồn sinh tất cả các số nguyên dương chia hết cho 7, mà mỗi số này đều có chữ số lẻ và chữ số chẵn đan xen nhau.

Trong khi Quý độc giả giảng dạy, hướng dẫn hoặc làm việc về đồng dư mà có nguồn đồng dư theo module m bên cạnh thì có thể chỉ ra hàng chục số gồm nhiều chữ số chia hết cho m trong chốc lát.

Tin tưởng rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo yêu toán phổ thông mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường đại học và cao đẳng ngành toán cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học tốt môn số học.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TỶ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THCS Hoà Hiếu 2, TX. Thái Hoà, Nghệ An)

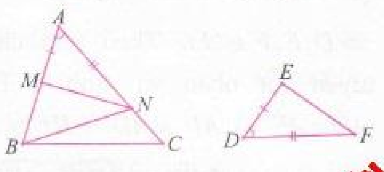
Việc vận dụng tỉ số diện tích của hai tam giác có hai góc bằng nhau hoặc bù nhau, giúp chúng ta có được lời giải tương đối tự nhiên cho một số bài toán liên quan đến tỉ số của hai đoạn thẳng.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC và tam giác DEF có $\widehat{A}=\widehat{D}$ hoặc $\widehat{A}+\widehat{D}=180^0$.*

Chứng minh rằng: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\dfrac{AB.AC}{DE.DF}$.

Chứng minh. *Trường hợp* 1: $\widehat{A}=\widehat{D}$ (h.1).

Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM=DE$, $AN=DF$.



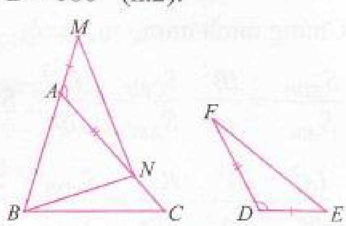
Hình 1

Khi đó $\Delta AMN=\Delta DEF$ (c.g.c). Ta có:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABN}}.\frac{S_{ABN}}{S_{AMN}}=\frac{AC}{AN}.\frac{AB}{AM}=\frac{AB.AC}{DE.DF}.$$

Trường hợp 2: $\widehat{A}+\widehat{D}=180^0$ (h.2).

Trên tia AC và tia đối của tia AB lần lượt lấy các điểm N và M sao cho $AM=DE$, $AN=DF$.



Hình 2

Khi đó $\Delta AMN=\Delta DEF$ (c.g.c). Ta có:

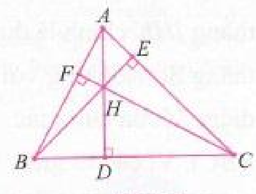
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABN}}.\frac{S_{ABN}}{S_{AMN}}=\frac{AC}{AN}.\frac{AB}{AM}=\frac{AB.AC}{DE.DF}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ vận dụng bài toán 1 để chứng minh một số hệ thức hình học sau đây.

Bài toán 2. *Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:*

a) $\dfrac{HB.HC}{AB.AC}+\dfrac{HC.HA}{AB.BC}+\dfrac{HA.HB}{AC.BC}=1$;

b) $\dfrac{BC}{AH}+\dfrac{AC}{HB}=\dfrac{AB}{FH}$.



Hình 3

Lời giải (h.3)

a) Xét tứ giác $CEHD$ có $\widehat{CEH}=\widehat{CDH}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{ACB}+\widehat{EHD}=180^0 \Rightarrow \widehat{ACB}+\widehat{AHB}=180^0$.

Tương tự: $\widehat{BAC}+\widehat{BHC}=180^0$ và $\widehat{ABC}+\widehat{AHC}=180^0$.

Do đó từ bài toán 1, ta có:

$$\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{AB.BC}+\frac{HA.HB}{AC.BC}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=1.$$

b) *Phân tích:* Nhìn vào hệ thức cần chứng minh ta chưa biết vận dụng tỉ số diện tích đối với các tam giác nào, vì vậy ta sẽ đưa hệ thức cần chứng minh về dạng giống hệ thức ở câu a) bằng cách nhân hai vế của hệ thức đó với $\dfrac{HA.HB.HF}{AB.BC.AC}$ ta được

$$\frac{BC}{AH}+\frac{AC}{HB}=\frac{AB}{FH}\Leftrightarrow\frac{HB.HF}{AB.AC}+\frac{HA.HF}{AB.BC}=\frac{HA.HB}{AC.BC},$$

đến đây việc chứng minh hệ thức mới tương đối dễ dàng, ta có lời giải như sau:

Theo tính chất của hai góc kề bù ta có: $\widehat{BHF}+\widehat{EHF}=180^0$ và $\widehat{AHF}+\widehat{FHD}=180^0$.

Kết hợp với $\widehat{BAC}+\widehat{BHC}=180^0$

và $\widehat{ABC}+\widehat{AHC}=180^0$ (đã chứng minh ở câu a)

suy ra: $\widehat{BAC}=\widehat{BHF}$ và $\widehat{ABC}=\widehat{AHF}$.

Vì $\widehat{ACB}+\widehat{AHB}=180^0$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BHF}$; $\widehat{ABC}=\widehat{AHF}$ nên theo bài toán 1, ta có:

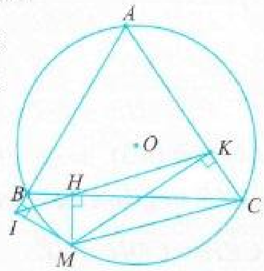
$$S_{HBF}+S_{HAF}=S_{HAB}\Rightarrow\frac{S_{HBF}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAF}}{S_{BAC}}=\frac{S_{HAB}}{S_{CAB}}$$

$$\Rightarrow \frac{HB.HF}{AB.AC}+\frac{HA.HF}{AB.BC}=\frac{HA.HB}{AC.BC}\Rightarrow \frac{BC}{AH}+\frac{AC}{HB}=\frac{AB}{FH}.$$

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung BC không chứa điểm A, gọi MH, MI, MK theo thứ tự là các đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC.*

Chứng minh rằng: $\frac{BC}{MH}=\frac{AB}{MI}+\frac{AC}{MK}$.

Lời giải (h.4). Ta có ba điểm I, H, K thẳng hàng (đường thẳng IHK chính là đường thẳng Simson ứng với điểm M của tam giác ABC). Vì các tứ giác $MHKC$, $MHBI$, $MKAI$ nội tiếp nên ta suy ra



Hình 4

$\widehat{HMI}=\widehat{ABC}; \widehat{HMK}=\widehat{BCA}; \widehat{IMK}+\widehat{BAC}=180^0$.

Theo bài toán 1, ta có:

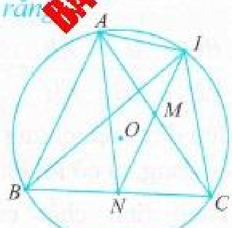
$$S_{MIK}=S_{MHK}+S_{MHI}\Rightarrow \frac{S_{MIK}}{S_{ABC}}=\frac{S_{MHK}}{S_{ABC}}+\frac{S_{MHI}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{MI.MK}{AB.AC}=\frac{MK.MH}{BC.AC}+\frac{MH.MI}{AB.BC}\Rightarrow \frac{BC}{MH}=\frac{AB}{MI}+\frac{AC}{MK}.$$

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC. Gọi I là giao điểm của tia NM với đường tròn (O). Chứng minh rằng:*

$$\frac{BC}{IA}=\frac{CA}{IB}+\frac{AB}{IC}.$$

Lời giải (h.5). Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC nên MN là đường trung bình của ΔABC



Hình 5

$$\Rightarrow MN // AB \Rightarrow S_{IAB}=S_{NAB}=\frac{1}{2}S_{ABC}. \quad (1)$$

Ta có: $S_{IBC}=S_{IABC}-S_{IAB}=S_{ABC}+S_{IAC}-S_{IAB}$

$$=\frac{1}{2}S_{ABC}+S_{IAC}+\left(\frac{1}{2}S_{ABC}-S_{IAB}\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$S_{IBC}=S_{IAB}+S_{IAC}+\left(S_{IAB}-S_{IAB}\right)=S_{IAB}+S_{IAC}.$$

Ta có: $\widehat{BIC}=\widehat{BAC}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}\right)$;

$\widehat{AIB}=\widehat{BCA}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}\right)$ và $\widehat{AIC}+\widehat{ABC}=180^0$

(vì tứ giác $AICB$ nội tiếp). Theo bài toán 1, ta có:

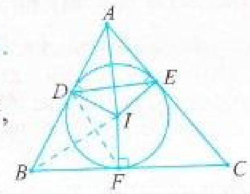
$$S_{IBC}=S_{IAB}+S_{IAC}\Rightarrow \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}=\frac{S_{IAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{IAB}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{IB.IC}{AB.AC}=\frac{IA.IC}{BC.AB}+\frac{IA.IB}{BC.AC}\Rightarrow \frac{BC}{IA}=\frac{AC}{IB}+\frac{AB}{IC}.$$

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1.$$

Lời giải (h.6). Kẻ $ID\perp AB$, $IE\perp AC, IF\perp BC$ $(D\in AB, E\in AC, F\in BC)$



Hình 6

$\Rightarrow D, E, F\in (I)$. Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau và định lí Pythagore ta có $AD=AE$ và $AI^2=AD^2+ID^2=AD.AE+ID.IE$.

Xét tứ giác $ADIE$ có $\widehat{ADI}=\widehat{AEI}=90^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC}+\widehat{DIE}=180^0$. Vì $\widehat{BAC}+\widehat{DIE}=180^0$ và $\widehat{DAE}=\widehat{BAC}$ nên theo bài toán 1 ta có:

$$\frac{S_{ADIE}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}+\frac{S_{DIE}}{S_{ABC}}=\frac{AD.AE}{AB.AC}+\frac{ID.IE}{AB.AC}=\frac{IA^2}{bc}.$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$\frac{S_{BDIF}}{S_{ABC}}=\frac{IB^2}{ca}; \frac{S_{CEIF}}{S_{ABC}}=\frac{IC^2}{ab}$. Suy ra

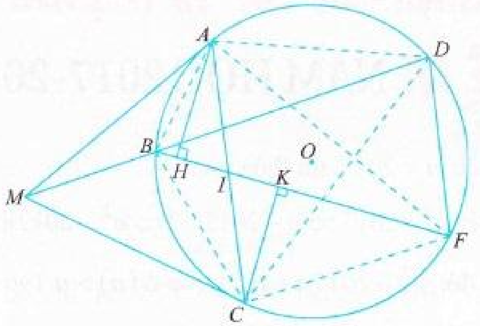
$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=\frac{S_{ADIE}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BDIF}}{S_{ABC}}+\frac{S_{CEIF}}{S_{ABC}}=1.$$

Bài toán 6. *Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MC và cát tuyến MBD (A, C là các tiếp điểm và $MB < MD$). Gọi I là trung điểm của AC; F là giao điểm của tia BI với đường tròn (O). Chứng minh rằng DF // AC.*

Lời giải (h.7). Xét ΔMAB và ΔMDA có:

$$\widehat{AMB} \text{ chung; } \widehat{MAB}=\widehat{MDA}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}\right)$$

$\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{MA}{MD}$. (1)



Hình 7

Tương tự $\Delta MBC \backsim \Delta MCD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{MC}{MD}$. (2)

Từ (1), (2) và $MA = MC$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$. (3)

Kẻ $AH \perp BF; CK \perp BF \left(H, K \in BF\right)$

$\Rightarrow \Delta AIH = \Delta CIK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = CK \Rightarrow S_{ABF} = S_{BCF}$.

Vì tứ giác $ABCF$ nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{BAF} + \widehat{BCF} = 180^0$, theo bài toán 1 ta có:

$S_{ABF} = S_{BCF} \Rightarrow 1 = \dfrac{S_{ABF}}{S_{BCF}} = \dfrac{AB.AF}{BC.CF}$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \dfrac{AD.AF}{CD.CF} = 1 \Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CF}{AF}$

$\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta CFA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CAF}$

Mà $\widehat{CAF} = \widehat{CDF}$ $\left(= \dfrac{1}{2} \text{sđ} \overset{\frown}{CF}\right)$, do đó:

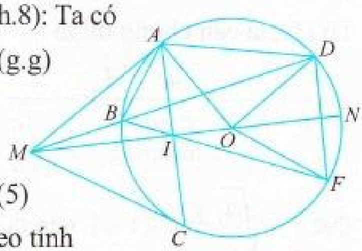
$$\widehat{ACD} = \widehat{CDF} \Rightarrow AC // DF.$$

Chú ý. Với bài toán này chúng ta có thể giải đơn giản hơn như sau (h.8): Ta có

$\Delta MAB \backsim \Delta MDA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MA}$

$\Rightarrow MA^2 = MB.MD$ (5)



Hình 8

Vì $MA = MC$ (theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OC$ nên MO là đường trung trực của $AC \Rightarrow I \in MO$.

Gọi N là giao điểm của tia MI với đường tròn (O) (O nằm giữa I và N), áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông AMO ta có $MA^2 = MI.MO$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $MD.MB = MI.MO$

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MO} = \dfrac{MI}{MB} \Rightarrow \Delta DMO \backsim \Delta IMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{ODM}$ nên tứ giác $BIOD$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{FBD} = \widehat{DON}$.

Mặt khác $\widehat{FBD} = \dfrac{1}{2}\widehat{FOD}$, từ đó suy ra $\widehat{DON} = \dfrac{1}{2}\widehat{FOD}$

$\Rightarrow ON$ là tia phân giác của góc DOF.

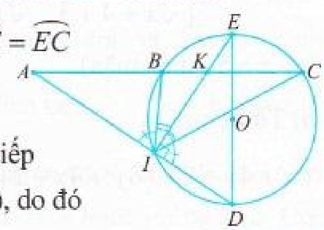
Xét tam giác DOF cân tại O có ON là đường phân giác nên ON cũng là đường cao $\Rightarrow ON \perp DF$ $\Rightarrow AC // DF$ (cùng vuông góc với ON).

Bài toán 7. *Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến ABC. Gọi E là điểm chính giữa của cung BC, DE là đường kính của đường tròn (O), AD cắt đường tròn (O) tại I, IE cắt BC tại K. Chứng minh rằng $AC.BK = AB.KC$.*

Lời giải (h.9). Vì $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$

$\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{CIE}$, mà

$\widehat{EID} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó



Hình 9

$\widehat{AIB} = \widehat{CID}$. Theo bài toán 1, ta có:

$$\frac{BK}{KC} = \frac{S_{BIK}}{S_{CIK}} = \frac{IB.IK}{CI.IK} = \frac{IB}{CI}. \quad (1)$$

Vì $\widehat{AIC} + \widehat{CID} = 180^0$ và $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$

$\Rightarrow \widehat{AIC} + \widehat{AIB} = 180^0$ nên theo bài toán 1, ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{S_{IAB}}{S_{IAC}} = \frac{IA.IB}{IC.IA} = \frac{IB}{IC}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC.KB = AB.KC$.

Bài toán 8. *Cho đường tròn (O), vẽ hai dây cung AB, EF cắt nhau tại I (I nằm bên trong đường tròn). Gọi M là trung điểm của BF, MI cắt AE tại N. Chứng minh rằng $\dfrac{AN}{EN} = \left(\dfrac{AI}{EI}\right)^2$.*

(Xem tiếp trang 11)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, NGHỆ AN NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. a) ĐK: $x \ge 4$.

$$3x + 7\sqrt{x-4} = 14\sqrt{x+4} - 20$$

$$\Leftrightarrow 3x + 20 - 7\left(2\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+20)\left(1 - \frac{7}{2\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{20}{3} \text{ (loại)} \\ 2\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 7 \ (*) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+4} - 3\right) + \left(\sqrt{x-4} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left[\frac{2}{\sqrt{x+4}+3} + \frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn).

b) Từ hệ suy ra

$$6x + 4y + 2 - (6y + 4x - 2) = (x+1)^2 - (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 2)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x + 2 \ (1) \\ y = 2 - x \ (2) \end{array}\right..$$

Thế (1) vào PT thứ nhất suy ra $\left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 9 \Rightarrow y = 11 \end{array}\right..$

Thế (2) vào PT thứ nhất suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = -1 \\ x = -3 \Rightarrow y = 5. \end{array}\right.$

Vậy $(-1;1)$, $(9;\ 11)$, $(3,-1)$, $(-3;\ 5)$ là nghiệm.

Câu 2. Áp dụng bổ đề: Với mọi số tự nhiên n ta có $0 \le S(n) \le n$.

- Nếu $n = 0$ thì không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $1 \le n \le 2016$ thì

$$(n-1)(n-2016) \le 0 \Rightarrow n^2 - 2017n + 2016 \le 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 2017n + 10 < n^2 - 2017n + 2016 \le 0$$

$\Rightarrow S(n) < 0$ (vô lí).

- Nếu $n = 2017$ thì thỏa mãn.

- Nếu $n > 2017 \Rightarrow n - 2017 \ge 1 \Rightarrow n^2 - 2017n \ge n$

Do đó: $n^2 - 2017n + 10 > n \Rightarrow S(n) > n$ (vô lí).

Vậy $n = 2017$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. Áp dụng BĐT Cauchy

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{4} \ge \frac{a}{a+b}; \qquad (1)$$

$$\left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \frac{1}{4} \ge \frac{b}{b+c}; \qquad (2)$$

$$\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + \frac{1}{4} \ge \frac{c}{c+a} \Rightarrow 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 + 1 \ge \frac{4c}{c+a}. \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{c+a}\right)^2$$

$$\ge \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2} \quad (*)$$

Áp dụng bổ đề: Với $x, y > 0$ và $xy \ge 1$ thì

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \ge \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{xy} - 1\right) \ge 0.$$

Do đó $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} = \dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{c}{b}} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}}$.

Từ (*), ta cần chứng minh

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} - \frac{3}{2} \ge \frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{c}{a}}} + \frac{4}{1+\dfrac{a}{c}} - \frac{3}{2} \ge \frac{3}{2} \ (**)$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{a}{c}} \Rightarrow 0 < t \le 1$ nên ta có

$$(**) \Leftrightarrow \frac{2t}{1+t} + \frac{4}{1+t^2} - \frac{3}{2} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 + 4t + 1\right) \le 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

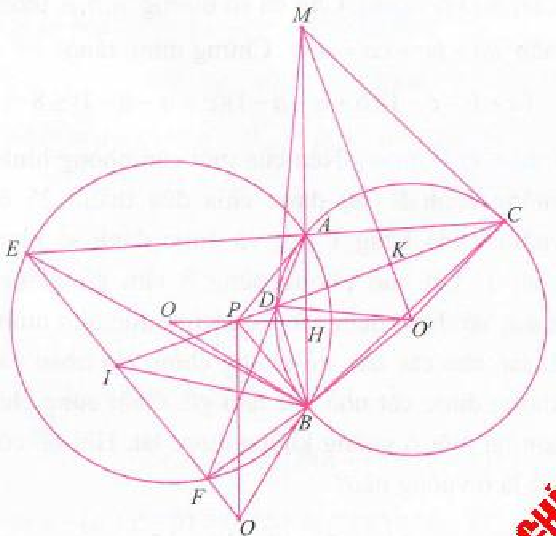
Câu 4. Ta có:

$\Delta MDA \backsim \Delta MBD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{MA}{MD}.$ (1)

và $\Delta MCA \backsim \Delta MBC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{MA}{MC}.$ (2)

Từ (1), (2) và kết hợp với $MD = MC,$ ta có:

$\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$ (3) $\Rightarrow AC.BD = AD.BC.$



b) Gọi $I = CD \cap EF$. Ta có $ABFE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} \Rightarrow FIDB$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FIB} = \widehat{FDB} = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \Delta FIB \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IF}{BI} = \dfrac{CA}{CB}.$ (4)

Mặt khác: $\Delta BDA \backsim \Delta BIE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EI}{BI} = \dfrac{DA}{DB}.$ (5)

Từ (3), (4) và (5) ta có $\dfrac{IF}{BI} = \dfrac{IE}{BI} \Rightarrow IF = IE.$

Vậy CD đi qua trung điểm của $EF.$

c) Gọi P, H lần lượt là giao điểm của OO' với CD và AB; K là giao điểm của CD với $O'M.$

$OO' \perp AB, O'M \perp CD \Rightarrow \Delta O'HM \backsim \Delta O'KP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{O'H}{O'K} = \dfrac{O'M}{O'P} \Rightarrow O'H.O'P = O'K.O'M = O'B^2$

$\Rightarrow \dfrac{O'H}{O'B} = \dfrac{O'B}{O'P} \Rightarrow \Delta HO'B \backsim \Delta BO'P$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{O'BP} = \widehat{O'HB} = 90^0 \Rightarrow BP$ là tiếp tuyến của (O').

Tương tự AP cũng là tiếp tuyến của (O').

Từ đó suy ra P là điểm cố định.

Qua B kẻ tiếp tuyến với (O), tiếp tuyến này cắt EF tại Q suy ra đường thẳng BQ cố định (6).

Ta có $\widehat{QBF} = \widehat{QEB} = \widehat{BAF} = \widehat{PBD}; \widehat{BFQ} = \widehat{BDP}$

$\Rightarrow \Delta BDP \backsim \Delta BFQ$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BPD} = \widehat{BQF}$

$\Rightarrow BPIQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BPQ} = \widehat{BIQ} = \widehat{BDF} = \widehat{BCA} = \widehat{BO'O}.$

Mặt khác: $\widehat{O'BO} = \widehat{QBP} \left(= 90^0 + \widehat{OBP}\right),$

do đó $\Delta PBQ \backsim \Delta O'BO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BQ}{BO} = \dfrac{BP}{O'B} \Rightarrow BQ = \dfrac{BP.BO}{O'B}$ (không đổi) (7).

Từ (6) và (7) suy ra Q là điểm cố định.

Vậy EF luôn đi qua điểm cố định Q khi M thay đổi.

Câu 5. Vẽ đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 21 đơn vị. Khi đó diện tích hình tròn này là

$$S = 441\pi.$$

Vẽ các đường tròn $(C_1), (C_2), ..., (C_{399})$ có tâm $A_1, A_2, ..., A_{399}$, bán kính bằng 1 đơn vị. Khi đó tổng diện tích của 399 hình tròn này là

$$S' = 399\pi < S.$$

Do đó 399 hình tròn này không phủ hết hình tròn (C). Suy ra có vô số điểm $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ nằm trong (C) nhưng không thuộc bất kì hình tròn nào trong 399 hình tròn $(C_1), (C_2), ..., (C_{399})$.

Các hình tròn tâm $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ bán kính 1 đơn vị luôn nằm trong (O) nhưng không chứa điểm nào trong 399 điểm $A_1, A_2, ..., A_{399}$.

MAI XUÂN VINH
(*Sở GD-ĐT Nghệ An*) **giới thiệu**

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2017 – 2018

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 *(2,0 điểm).* Cho biểu thức:

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}+\frac{2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{x+2-\sqrt{3x+6}}\right).$$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định.

b) Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Câu 2 *(2,0 điểm).*

a) Cho phương trình $\dfrac{2mx+1}{x-2}+3+m=0$, với m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm $x\le 3$.

b) Cho bốn số nguyên không âm a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}a^2+2b^2+3c^2+4d^2=36\\2a^2+b^2-2d^2=6\end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q=a^2+b^2+c^2+d^2$.

Câu 3 *(1,0 điểm).* Cho tổng 2017 số hạng $S=2+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}}+...+\sqrt[2017]{\dfrac{2018}{2017}}$. Tìm $[S]$.

(Trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x).

Câu 4 *(3,0 điểm).* Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm di động trên cạnh BC (E không trùng với B,C). Đường thẳng AE cắt DC tại G. Đường thẳng qua E song song với AB cắt BG tại F.

a) Chứng minh rằng CF vuông góc với AC.

b) Đường thẳng DE cắt đường thẳng BG tại K, đường thẳng CK cắt các đường thẳng AE và AB lần lượt tại H và I. Chứng minh rằng tứ giác $BEHI$ nội tiếp đường tròn.

c) Gọi giao điểm của hai đường thẳng IE và AC là J. Tính độ dài hai đoạn thẳng DJ, DH theo a.

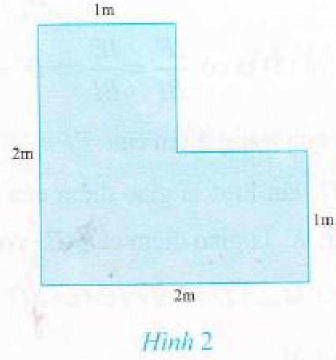
Câu 5 *(1,0 điểm).* Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng

$$(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1)\le 8$$

Câu 6 *(1,0 điểm).* Nền của một căn phòng hình vuông cạnh 5 (m) được chia đều thành 25 ô vuông cạnh bằng 1 (m) và được đánh số như hình 1. Lát căn phòng bằng 8 tấm gỗ giống nhau, với hình dạng và các kích thước như hình 2, sao cho các tấm gỗ không chòm lên nhau và không được cắt nhỏ các tấm gỗ. Cuối cùng chỉ còn lại một ô vuông không được lát. Hỏi đó có thể là ô vuông nào?

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55

Hình 1



Hình 2

TRẦN MẠNH CƯỜNG
(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) **giới thiệu**

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 40$ và $x_n = 1,1.x_{n-1}$ với mọi $n = 2,3,4,...$ Tính giá trị $S = x_1 + x_2 + ... + x_{12}$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

A. 855,4. **B.** 855,3. **C.** 741,2. **D.** 741,3.

Câu 2. Xác định $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2}$.

A. 0. **B.** $-\infty$.
C. không tồn tại. **D.** $+\infty$.

Câu 3. Cho $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}, g(x) = \sin x$. Tính giá trị của $\frac{f'(0)}{g'(0)}$.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{5}{6}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là CD. Gọi M là trung điểm của cạnh SA, N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. MN và SD cắt nhau. **B.** $MN // CD$.
C. MN và SC cắt nhau. **D.** MN và CD chéo nhau.

Câu 5. Đồ thị các hàm số $y = \frac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ khi $x > 0$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 7. Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. 6. **B.** -6. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{-1}{6}$.

Câu 8. Tính môđun số phức nghịch đảo của số phức

$$z = (1-2i)^2.$$

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(1;3;2)$ đến đường thẳng

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases}.$$

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và

$$d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}.$$

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. **B.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$. **D.** $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 11. Tìm số nghiệm thuộc $\left[\frac{-3\pi}{2}; -\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{với } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 0$.

Câu 13. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{x-2} - 27$ song song với trục hoành là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(2;4), B(5;1), C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Tìm tọa độ trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.

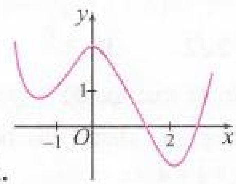
A. $(-4;2)$. **B.** $(4;2)$.
C. $(4;-2)$. **D.** $(-4;-2)$.

Câu 15. Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số

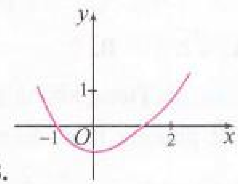
$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|-1}.$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

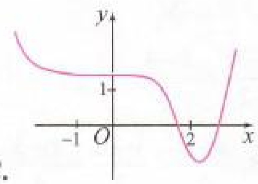
Câu 16. Một trong số các đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g'(0)=0$, $g''(x)<0, \forall x \in (-1,2)$. Hỏi đó là đồ thị nào?



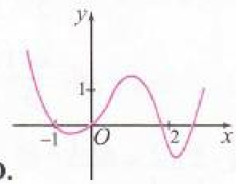
A.



B.



C.



D.

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \le 1.$$

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(1, \sqrt{2}\right] \cup (2, +\infty)$.

B. $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(1, \sqrt{2}\right]$.

C. $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right)$.

D. $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x}\ln x.$$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 1) + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$.

Câu 19. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)^2 dx$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2 dx - \pi\int_0^2 x^4 dx$.

C. $\pi\int_0^2 4x^2 dx + \pi\int_0^2 x^4 dx$. **D.** $\pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2+\pi}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2+\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 21. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn

$$|z| = |z + \overline{z}| = 1?$$

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 22. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1| = |z + \overline{z} + 2|$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. đường thẳng. **B.** đường tròn.

C. parabol. **D.** hypebol.

Câu 23. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{3}a^2h}{4}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^2h}{4}$.

C. $V = \frac{\pi}{3}\left(h^2 + \frac{4a^2}{3}\right)\sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}\pi a^2 h}{4}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-2;-1), B(-2;-4;3), C(1;3;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$. **B.** $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $M(2;2;-4)$. **D.** $M(-2;-2;4)$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (*P*), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng *d*.

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. **B.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}$.

C. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$. **D.** $\frac{x+1}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{3}$.

Câu 26. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó chứa các chữ số 3, 4, 5 và chữ số 4 đứng cạnh chữ số 3 và chữ số 5?

A. 1470. **B.** 750. **C.** 2940. **D.** 1500.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỷ số $\frac{KS}{KD}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** [illegible]

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên $(0,1)$.

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m<-1$.

C. $m>\frac{1}{3}$ hoặc $m<-1$. **D.** $-1<m<\frac{1}{3}$.

Câu 30. Phương trình $\left|x^2-2x\right|\left(|x|-1\right)=m$ (với m là tham số thực) có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 31. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

A. $m=\frac{61}{2}$. **B.** $m=3$.

C. không tồn tại. **D.** $m=\frac{9}{2}$.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f'(x)\geq x+\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^+$ và $f(1)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(2)$.

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}+\ln 2$. **D.** 4.

Câu 33. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y=2-x$ với $x\geq 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay *D* quanh trục hoành.

A. $V=\frac{1}{3}+\frac{e^2-1}{2e^2}$. **B.** $V=\frac{\pi(5e^2-3)}{6e^2}$.

C. $V=\frac{1}{2}+\frac{e-1}{e}\pi$. **D.** $V=\frac{1}{2}+\frac{e^2-1}{2e^2}$.

Câu 34. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích *V* của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$.

C. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, xét đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0,0,1)$ và vuông góc với mặt phẳng *Ozx*. Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm $B(0,4,0)$ tới điểm C trong đó C là điểm cách đều đường thẳng Δ và trục *Ox*.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

Câu 36. Mỗi lượt, ta gieo một con xúc sắc (loại 6 mặt, cân đối) và một đồng xu (cân đối). Tính xác suất để trong 3 lượt gieo như vậy, có ít nhất một lượt gieo được kết quả con xúc sắc xuất hiện mặt 1 chấm, đồng thời đồng xu xuất hiện mặt sấp.

A. $\frac{397}{1728}$. **B.** $\frac{1385}{1728}$. **C.** $\frac{1331}{1728}$. **D.** $\frac{1603}{1728}$.

Câu 37. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng theo hình thức gửi góp hàng tháng. Lãi suất tiết kiệm gửi góp cố định 0,55%/tháng. Lần đầu tiên người đó gửi 2.000.000 đồng. Cứ sau mỗi tháng người đó gửi nhiều hơn số tiền đã gửi tháng trước đó là 200.000 đồng. Hỏi sau 5 năm (kể từ lần gửi đầu tiên) người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?

A. 618051620 đồng. **B.** 484692514 đồng.

C. 597618514 đồng. **D.** 539447312 đồng.

Câu 38. Cho tam giác ΔABC vuông cân tại A và điểm M trong tam giác sao cho $MA = 1, MB = 2,$ $MC = \sqrt{2}$. Tính góc $\widehat{AMC}$.

A. 135^0. **B.** 120^0. **C.** 160^0. **D.** 150^0.

Câu 39. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x$. Tính giá trị của x sao cho hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 40. Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x(x^2 - 3)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) và trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt A (khác M) và B sao cho M là trung điểm của AB?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 41. Hàm số $y = f(x)$ có đúng 3 cực trị là $-2, -1$ và 0. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 42. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 43. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $10m \in \mathbb{Z}$ và phương trình $2\log_{mx-5}(2x^2 - 5x + 4) = \log_{\sqrt{mx-5}}(x^2 + 2x - 6)$ có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của S.

A. 15. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 16.

Câu 44. Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a, b]$ có đồ thị là một đường cong C. Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a, x = b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số $f(x) = \ln x$ bị giới hạn các đường thẳng

$x = 1, x = \sqrt{3}$ là $m - \sqrt{m} + \ln\frac{1+\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của $m^2 - mn + n^2$ là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 45. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{4}$. **D.** 5.

Câu 46. Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = 2\sqrt{3}$ và các cạnh còn lại đều bằng x. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $2\sqrt{2}$.

A. $x = \sqrt{6}$. **B.** $x = 2\sqrt{2}$.

C. $x = 3\sqrt{2}$. **D.** $x = 2\sqrt{3}$.

Câu 47. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với điểm B qua điểm D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{80}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{320}$. **D.** $\frac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Câu 48. Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều ngoại tiếp mặt cầu có bán kính bằng a, tính thể tích V của khối chóp có thể tích nhỏ nhất.

A. $V = \frac{8a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{10a^3}{3}$.

C. $2a^3$. **D.** $V = \frac{32a^3}{3}$.

TỶ SỐ DIỆN TÍCH...

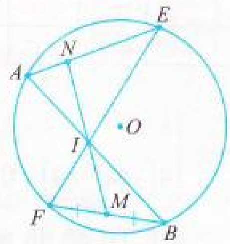
(Tiếp theo trang 3)

Lời giải (h.10). Vì M là trung điểm của BF

$\Rightarrow S_{FIM} = S_{BIM}$

Ta có: $\Delta AIE \backsim \Delta FIB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{FI}{BI} = \dfrac{AI}{EI}$ (1)



Mặt khác, theo tính chất của hai góc đối đỉnh ta có:

Hình 10

$\widehat{AIN} = \widehat{BIM}$ và $\widehat{EIN} = \widehat{FIM}$ nên theo bài toán 1, ta có:

$$\frac{AN}{EN} = \frac{S_{IAN}}{S_{IEN}} = \frac{S_{IAN}}{S_{MIB}} \cdot \frac{S_{FIM}}{S_{IEN}} = \frac{IA.IN}{MI.BI} \cdot \frac{IF.IM}{EI.IN} = \frac{IA}{EI} \cdot \frac{IF}{BI} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AN}{EN} = \left(\dfrac{AI}{EI}\right)^2$.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC nhọn, có trực tâm H và nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi D, E, F tương ứng là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C; gọi M là giao điểm của tia AO và cạnh BC; gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $HE.MN = HF.MP$;

b) Tứ giác $EFPN$ là tứ giác nội tiếp;

c) $\dfrac{BD.CM}{CD.CM} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên Vĩnh Phúc – năm học 2015-2016, vòng 2).

2. Cho hình bình hành $ABCD$, một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh AB, AD và đoạn thẳng AC lần lượt tại M, N và P. Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AP}.$$

3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, một đường thẳng d quay quanh G và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} = 3.$$

4. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{BH}{CA} = \dfrac{CH}{AB}$

(Bài T5/418, tạp chí TH&TT tháng 4/2012).

5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), chứng minh rằng $AB.CD + AD.BC = AC.BD$ *(Định lí Ptolemy).*

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác cân với $\widehat{BAC} = 120^0, AB = AC = a.$ Hình chiếu của D trên mặt phẳng ABC là trung điểm của BC. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết thể tích của tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{a^3}{16}$.

A. $R = \dfrac{\sqrt{91}a}{8}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$.

C. $R = \dfrac{13a}{2}$. **D.** $R = 6a$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0,0,2), B(3,4,1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AX + BY$ với X, Y là các điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $XY = 1$.

A. 3. **B.** 5.

C. $2 + \sqrt{17}$. **D.** $1 + 2\sqrt{5}$.

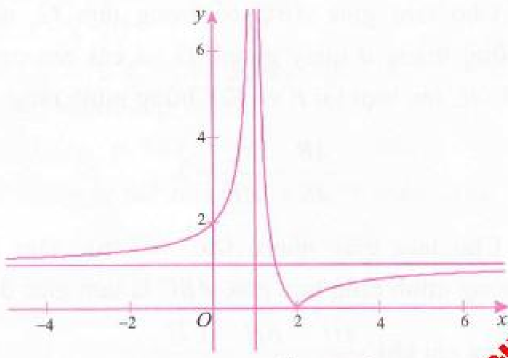
TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

1D	2C	3C	4B	5C	6D	7A	8B	9C	10D	11C	12B	13D	14A	15C	16D	17A
18B	19A	20C	21B	22B	23C	24A	25C	26D	27A	28C	29A	30A	31C	32B	33B	34C
35B	36C	37C	38A	39D	40A	41B	42D	43D	44B	45B	46C	47A	48C	49A	50B	

Câu 4. Dựa theo đồ thị, hàm số là $y=a(x+2)(x-1)^2$, vì (*C*) qua (0; 2) suy ra $a=1$. Do đó phương trình hàm số là $y=x^3-3x+2$, suy ra phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn là $y=-3x+2$. Chọn B.

Câu 5. Vẽ nhanh đồ thị $y=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. Ta chọn C.



Câu 6. Ta có $y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow y'=\sin 2x,\ y''=2\cos 2x,\ y'''=-4\sin 2x$. Chọn D.

Câu 7. Gọi số xăng của hai người chạy một ngày là *x* và *y*, ta có $x+y=10;\ 0\le x, y\le 10$.

Tổng số ngày hai người chạy là

$$P=\frac{32}{x}+\frac{72}{10-x} \text{ hay } P=8\left(\frac{4}{x}+\frac{9}{10-x}\right).$$

Xét hàm số $y=\frac{4}{x}+\frac{9}{10-x}\Rightarrow y'=-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{(10-x)^2}$.

Khi $y'=0\Rightarrow x=4$ hoặc $x=-20$. Lập bảng biến thiên ta thấy *y* đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=4$.

Vậy số ngày ít nhất là 20 ngày. Chọn A.

Câu 8. Ta có $y'=3x^2-6kx$ khi $y'=0$

$\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2k$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi hàm số có hai cực trị thỏa mãn

$$f_{\max}.f_{\min}<0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_{y'}>0\\ f_{\max}.f_{\min}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ne 0\\ f(0).f(2k)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k\ne 0\\ 4\left(-4k^3+4\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow k>1. \text{ Chọn B.}$$

Câu 9. Từ đồ thị ta suy ra $f'(x)=ax^3-bx$ với *a*, *b* dương nên $f(x)=\frac{a}{4}x^4-\frac{b}{2}x^2+c$ là hàm trùng phương với *a*, *b* dương. Từ đó chọn C.

Câu 10. Hàm số *f*(*x*) liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{a+\frac{1}{x^2}}}\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{a}},\ a>0.$$

Vậy khi $a>0$ đồ thị (*C*) có hai đường tiệm cận song song với *Ox*.

Để tiệm cận và tiếp tuyến có khoảng cách thì tiếp tuyến đó phải song song với tiệm cận hay cùng phương *Ox*, nghĩa là tiếp tuyến có tiếp điểm là cực trị. Ta có

$$f'(x)=\frac{1-ax}{(ax^2+1)\sqrt{ax^2+1}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{a}.$$

Lập bảng biến thiên ta nhận thấy (*C*) có điểm cực đại $\left(\frac{1}{a};\sqrt{\frac{1}{a}+1}\right)$.

Vậy để tiệm cận cách tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}-1$ thì xảy ra: $\sqrt{\frac{1}{a}+1}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}-1\Rightarrow a=1$ hoặc

$\sqrt{\frac{1}{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{2}-1$: vô nghiệm.

Vậy nhận $a=1$. Chọn D.

Câu 12. Cách giải của An dư nghiệm, Sơn thiếu nghiệm, nên chọn Lộc, câu B.

Câu 13. Phương trình tương đương

$$\cos 2x+5\cos 5x+3=5(\cos 5x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2=0$$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos x = 2 > 1$ (loại).

Khi $\cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. Chọn D.

Câu 14. Phương trình $\cos^2 x + 2\cos 3x.\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\cos 3x.\sin x + 1 = 0.$ (1)

Ta xem (1) là phương trình bậc hai ẩn sin$x$ có $\Delta' = \cos^2 3x - 1 \le 0$; $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \pm 1$, thay vào (1) được sin$x$ = ±1, suy ra cos$x$ = 0, mâu thuẫn với cos3x = ±1. Từ đó chọn A.

Câu 15. Để tồn tại giá trị lớn nhất thì phương trình $y = \dfrac{\cos x + a.\sin x + 1}{\cos x + 2}$ phải có nghiệm

$\Leftrightarrow$ PT $(y-1)\cos x - a\sin x = 1 - 2y$ có nghiệm

$\Leftrightarrow (y-1)^2 + a^2 \ge (1-2y)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{1+3a^2}}{3} \le y \le \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}.$

Suy ra giá trị lớn nhất $y = \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3} = 1$ $\Leftrightarrow a = \pm 1$. Vậy chọn C.

Câu 18. Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}} =$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{2015} + x^{2014} + ... + x + 1 + 1\right)}{2017(x-1)}\left(\sqrt{2018x+1} + \sqrt{x+2018}\right)$

$= 2\sqrt{2019}$. Vậy chọn B.

Câu 19. Không gian mẫu $|\Omega| = C_{10}^3 = 120$.

Số cách chọn ra 3 câu đại số $p(A) = C_6^3 = 20$.

Vậy xác suất chọn ra ba câu trong đó có ít nhất một câu hình học là: $p = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{20}{120} = \dfrac{5}{6}$.

Chọn A.

Câu 20. Số hạng thứ $k+1$ là

$$C_{12}^k x^{2k}.\left(\frac{1}{x}\right)^{10-k} = C_{12}^k.x^{3k-12} = C_{12}^k.x^m.$$

Theo giả thiết để $C_{12}^k = 495 \Rightarrow k = 4$ và số đối xứng k = 8. Vậy số hạng có số mũ $m = 3k - 12 = 3.4 - 12 = 0$ hoặc m = 12. Chọn C.

Câu 21. Gọi A là biến cố bắn trúng tâm, theo giả thiết $p(A) = \dfrac{3}{7}$, suy ra xác suất bắn không trúng

$p\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$.

$$p = p(A)p\left(\overline{A}\right)p\left(\overline{A}\right) + p\left(\overline{A}\right)p(A)p\left(\overline{A}\right) + p\left(\overline{A}\right)p\left(\overline{A}\right)p(A)$$

$= 3.\dfrac{48}{343} = \dfrac{144}{343}$. Chọn B.

Câu 25. Gọi x là cạnh tam giác đều, ta có thể tích $V = \pi\dfrac{\sqrt{3}}{24}x^3 = \pi\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3 \Rightarrow x = 2a$. Chọn C.

Câu 26. Để diện tích xung quanh hình trụ lớn nhất đồng nghĩa diện tích $MNPQ$ lớn nhất.

Đặt $BQ = x \Rightarrow MQ = x, PQ = a - 2x$

$\Rightarrow S_{MNPQ} = MQ.PQ = x(a-2x), x \in (0;a).$

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $S = ax - 2x^2$ ta có $S_{\max} = \dfrac{a^2}{8}$. Chọn D.

Câu 27. Gọi x là cạnh bên của hình chóp, ta có

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}SA.SB.SC = \frac{x^3}{6} = \frac{a^3}{6}.$$

Suy ra $x = a \Rightarrow S_{tp} = S_{ABC} + 3S_{SAB} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}a^2$

$\Rightarrow r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{a}{3+\sqrt{3}}$. Chọn A.

Câu 28. Cố định V_1. Để k lớn nhất thì V_2 lớn nhất, nghĩa là mặt tròn đáy của khối trụ nội tiếp trên mặt hình vuông của hình lập phương. Gọi a là cạnh hình lập phương, suy ra bán kính hình tròn đáy hình trụ là $\dfrac{a}{2}$.

Vậy $k = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi\dfrac{a^3}{4}}{a^3} = \dfrac{\pi}{4}$. Chọn C.

Câu 29. Ta có $V_{H1} = \dfrac{27a^3}{\pi}, V_{H2} = \dfrac{27a^3}{2\pi},$

$V_{H3} = 3\sqrt{3}a^3, V_{H4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. So sánh, chọn A.

Câu 30. Ta có $S = \log_2 2016 = \log_2 (32.9.7)$

$= 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7 = 5 + a + 2\dfrac{\log_7 3}{\log_7 2}$

$= 5 + a + 2\dfrac{a}{b} = \dfrac{2a + 5b + ab}{b}$. Chọn A.

Câu 31. ĐK: $0 < x \neq 1$. Bất phương trình tương đương $\log_{2018} x \leq \dfrac{1}{\log_{2018} x} \Leftrightarrow \dfrac{\log_{2018}^2 x - 1}{\log_{2018} x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{2018} x \leq -1 \\ 0 < \log_{2018} x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{2018} \\ 1 < x \leq 2018 \end{array}\right.$. Chọn C.

Câu 32. Vẽ hình dáng hai đồ thị $y = 2018^x$ và $y = -x^2 + \sqrt{2016 + \sqrt[3]{2017 + \sqrt[5]{2018}}}$ trên cùng một hệ trục tọa độ thì ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên phương trình có hai nghiệm. Chọn B.

Câu 33. $S = \dfrac{1}{\log_{(ab)} a} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b} = \dfrac{5}{4} + \log_a b + \dfrac{1}{4\log_a b}$

Đặt $x = \log_a b$, vì $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow x > 0$.

Ta có $S = \dfrac{5}{4} + x + \dfrac{1}{4x} \Rightarrow S' = 1 - \dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2}$.

Lập bảng biến thiên ta có $S_{\min} = S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$.

Chọn B.

Câu 34. Điều kiện $x > -3, x \neq 0$, phương trình được viết lại $\log_2(x^3 + 3x^2) = k \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 2^k$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 + 3x^2$.

Để phương trình có một nghiệm duy nhất x thỏa mãn $x > -3, x \neq 0$ thì ta có $2^k > 4 \Leftrightarrow k > 2$, nên chọn câu C.

Câu 37. Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}, x = 1$

$\Rightarrow u = 1, x = 4 \Rightarrow u = 2$. Do đó

$\displaystyle\int_1^4 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\int_1^2 f(u) du = 4$. Chọn câu C.

Câu 38. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx, x = 1$

$\Rightarrow t = -1; x = -1 \Rightarrow t = 1$. Vậy

$I = \displaystyle\int_{-1}^1 \dfrac{f(x)}{1+e^x}dx = -\int_1^{-1} \dfrac{f(-t)}{1+e^{-t}}dt = \int_{-1}^1 e^t \dfrac{f(t)}{1+e^t}dt = \int_{-1}^1 e^x \dfrac{f(x)}{1+e^x}dx$

$\Rightarrow 2I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \Rightarrow I = 1$. Chọn A.

Câu 39. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \dfrac{dx}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \ln|x| \end{cases}$ suy ra

$1 = \displaystyle\int_1^e \dfrac{f(x)}{x} dx = \left[\ln|x|.f(x)\right]_1^e - \int_1^e f'(x).\ln x dx$

$= 1 - \displaystyle\int_1^e f'(x).\ln x dx \Rightarrow \int_1^e f'(x).\ln x dx = 0$.

Câu 40. Phương trình có dạng $y = ax^2, a > 0$ qua $(2;4) \Rightarrow a = 1$. Đường thẳng qua $(1;0)$, $(2;4)$ nên có phương trình $y = 4x - 4$. Do đó

$V = \pi\left(\displaystyle\int_0^2 x^4 dx - 16\int_1^2 (x-1)^2 dx\right) = \pi\left(\dfrac{32}{5} - \dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{16}{15}\pi$.

Chọn A.

Câu 42. Ta có $(1+i)^2 = 2i$

$\Rightarrow (1+i)^3 = 2i(1+i) = 2i - 2 \Rightarrow (1+i)^4 = (2i-2)(1+i) = -4$

$\Rightarrow (1+i)^5 = -4(1+i) = -4 - 4i$

$\Rightarrow (1+i)^6 = (-4-4i)(1+i) = -8i$. Chọn D.

Câu 43. Ta có $\Delta' = m$.

Nếu $m \geq 0$ thì phương trình có hai nghiệm

$z_1 = 1 + \sqrt{m},\ z_2 = 1 - \sqrt{m} \Rightarrow |z_1| = 1 + \sqrt{m},\ |z_2| = |1 - \sqrt{m}|$.

Để $|z| = 2$ thì $1 + \sqrt{m} = 2 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc

$|z_2| = |1 - \sqrt{m}| = 2 \Leftrightarrow m - 2\sqrt{m} - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 9$.

Nếu $m < 0$ thì phương trình có hai nghiệm

$z_1 = 1 + i\sqrt{-m},\ z_2 = 1 - i\sqrt{-m}$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{1-m} = 2 \Leftrightarrow m = -3$. Chọn D.

Câu 44. Giả sử $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$, ta có $|z+m| = |z-1+m| \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} - m.$

Vậy trên mặt phẳng phức, số phức z chạy trên đường thẳng (d): $x = \dfrac{1}{2} - m$ và số phức $z' = 1+i$ được biểu diễn là điểm $A(1;1)$. Ta có $|z - z'| \geq 0$. Vậy $|z - z'|$ nhỏ nhất khi A thuộc đường thẳng $d \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{2} - m \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$. Chọn B.

Câu 45. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1), \overrightarrow{AC} = (-1;1;-1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$. Chỉ có khẳng định I và IV đúng nên chọn B.

Câu 46. d_1 có VTCP $\vec{v} = (2;1;4)$ và qua $M(1;7;3)$. d_2 có VTCP $\vec{u} = (3;-2;1)$ và qua $N(6;-1;-2)$. Ta có $\left[\vec{v}, \vec{u}\right].\overrightarrow{MN} = 0$ nên hai đường thẳng cắt nhau. Chọn C.

Câu 47. Gọi $I(t;1+t;2+t)$ là tâm I của mặt cầu, ta có $d(I,P) = d(I,Q)$

$\Leftrightarrow |2t-2-t-4| = |t-2-2t-2| \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow I(1;2;3) \Rightarrow R = \sqrt{5}.$

Do đó phương trình mặt cầu là

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5$. Chọn A.

Câu 48. Đặt $f(x,y,z) = 2x + y + z - 4$ ta có $f(A).f(B) = 2.(-2) < 0$ nên A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (P). Vậy để $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M, A, B thẳng hàng, nghĩa là M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P). Giải hệ

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+1 \\ z = t+1 \\ 2x+y+z-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;2;0)$$, nên chọn C.

Câu 49. VTPT của (P) và (Q) lần lượt là:

$\overrightarrow{n_1} = (1;2;-2), \overrightarrow{n_2} = (1;m;m-1)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng, ta có

$$\cos\alpha = \frac{|1|}{\sqrt{2}\sqrt{m^2-m+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Đẳng thức xảy khi $m = \dfrac{1}{2}$.

Lúc đó $(Q): 2x + y - z + 2.2017 = 0$. Chọn A.

Câu 50. Theo yêu cầu đề toán tâm I mặt cầu chính là trung điểm của đường vuông góc chung MN của hai đường thẳng d_1 và d_2 và bán kính

$$R = \frac{MN}{2}\ (M \in d_1; N \in d_2).$$

Đường thẳng d_1: $x = 4-2t,\ y = t,\ z = 3$

$\Rightarrow$ VTCP $\vec{a} = (2;-1;0)$ và $M(4-2t;t;3) \in d_1$.

Đường thẳng d_2: $x = 1$; $y = t'$; $z = -t'$

$\Rightarrow$ VTCP $\vec{b} = (0;1;-1)$ và $N(1;t';-t') \in d_2$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (2t-3; t'-t; -t'-3)$.

Để MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 thì $\overrightarrow{MN} \perp \vec{a}$, $\overrightarrow{MN} \perp \vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-4t-t+t'+0 = 0 \\ 0+t-t'-3-t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t-t'-6 = 0 \\ t-2t'-3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M(2;1;3), N(1;-1;1).$$

Suy ra tâm $I\left(\dfrac{3}{2};0;2\right)$, $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{3}{2}$. Chọn B.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hoà, Phú Yên)

Lịch sử TOÁN HỌC

RAMANUJAN
NGƯỜI ĐI TÌM VÔ HẠN

ĐẶNG THỊ KIÊM HỒNG
(GV Đại học Tài chính – Kế toán, Quảng Ngãi)

Nhân dịp kỉ niệm ngày thành lập Quân đội nhân dân Việt Nam (22-12-1944 – 22-12-2017), tôi xin giới thiệu với bạn đọc về một nhà toán học nổi tiếng thế giới cũng có ngày sinh là ngày 22-12. Đó là nhà toán học huyền thoại người Ấn Độ Srinivasa Ramanujan (22-12-1887 – 26-4-1920).

Ông được biết đến là một trong những nhà toán học không được đào tạo bài bản về toán nhưng lại có những đóng góp quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học như giải tích, lý thuyết số, chuỗi vô hạn và liên phân số.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

The man who knew infinity (*Người đi tìm vô hạn*) là bộ phim tiểu sử xúc động của nước Anh được sản xuất năm 2015 nói về Ramanujan, dựa trên cuốn sách cùng tên của tác giả Robert Kanigel. Cả cuộc đời Ramanujan có thể nói là sống trong cơ cực và bệnh tật nhưng ông đã dành trọn tình yêu của mình cho Toán học. Những khám phá của ông đã tạo nguồn cảm hứng cho nhiều nhà toán học sau này nghiên cứu chứng minh những công thức của ông và mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới trong Toán học và Vật lý.

Ramanujan có tên đầy đủ là Srinivasa Ramanujan Lyengar, sinh ngày 22 tháng 12 năm 1887 trong gia đình Tamil Brahmin Lyengar, tại vùng Erole thuộc địa phận Tamil Nadu ở miền nam Ấn Độ. Cha ông, K. Srinivasa Lyengar, là một nhân viên trong một cửa hàng bán sari. Mẹ ông, Komalatammal, làm nội trợ và đóng góp vào thu nhập của gia đình bằng việc hát Bhajans (loại nhạc dành cho các nghi lễ) tại một ngôi chùa gần nhà. Họ sống trong một ngôi nhà nhỏ theo kiểu truyền thống trên đường Sarangapani Sannidhi trong thị trấn Kumbakonam, ngôi nhà này hiện là nhà bảo tàng.

Khi ông được một tuổi rưỡi thì mẹ ông sinh được một em trai nhưng bị chết sau đó ba tháng. Tháng 12 năm 1889, ông bị bệnh đậu mùa nhưng may mắn qua khỏi trong một dịch bệnh đậu mùa mà có hơn 4000 người chết trong khu vực.

Ông theo mẹ đến ở nhà ông bà ngoại tại Kanchipuram, gần Madras (bây giờ là Chennai). Ở đó, mẹ ông sinh thêm hai người con nữa, vào năm 1891 và 1894, cả hai đều không sống được đến một tuổi. Ngày 1-10-1892 ông được cho vào học tại một trường địa phương. Sau khi ông ngoại của ông bị mất việc ở văn phòng tòa án tại Kanchipuram, ông và mẹ ông về lại Kumbakonam và ông được cho vào học trong trường tiểu học Kangayan. Khi ông nội của ông mất, ông lại được gửi trở lại cho ông bà ngoại đang sống ở Madras. Ông không thích trường học ở Madras nên không muốn đi học. Gia đình ông phải nhờ đến cảnh sát địa phương để đưa ông đến trường. Được khoảng 6 tháng, Ramanujan quay trở lại Kumbakonam. Tại trường tiểu học Kangayan, ông đã học rất tốt. Mới mười tuổi, tháng 11-1897, ông đã vượt qua kỳ thi cuối cấp với các môn tiếng Anh, tiếng Tamil, Địa lý và Số học với điểm số cao nhất trong khu vực. Cùng năm đó, ông vào học trường trung học thị trấn, nơi mà ông đã chạm trán với toán học hình thức lần đầu tiên.

Năm 11 tuổi, ông mượn được quyển sách *Advanced trigonometry* (Lượng giác cao cấp) của S.L. Loney từ hai sinh viên trọ học tại nhà ông và đã nắm vững được nội dung cuốn sách. Đến năm 13 tuổi, ông đã tự mình khám phá ra các định lí phức tạp. Năm 14 tuổi, ông đã hoàn thành bài kiểm tra toán học với nửa thời gian cho phép và đã cho thấy sự hiểu rõ về hình học và chuỗi vô hạn. Ramanujan cũng đã chỉ ra cách giải phương trình bậc ba vào năm 1902 và ông đã phát triển phương pháp của mình cho việc giải phương trình bậc bốn.

Vào năm 1903, khi mới 16 tuổi, Ramanujan có được từ một người bạn bản sao của cuốn *A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics* (Bản tóm tắt các kết quả cơ bản trong toán lý thuyết và ứng dụng) của GS. Carr gồm 5000 định lí. Cuốn sách được xem là nguồn cảm hứng cho những nghiên cứu toán học của Ramanujan. Vào năm tiếp theo, ông đã độc lập nghiên cứu và khám phá ra số Bernoulli và tính toán hằng số Euler – Mascheroni đến 15 chữ số thập phân.

Năm 1904, ông tốt nghiệp trường trung học thị trấn và nhận được giải thưởng K. Ranganatha Rao về toán học. Với thành tích điểm số cao nhất, ông nhận được học bổng vào trường Đại học Government Arts ở Kumbakonam, nhưng vì quá mải mê với toán học nên ông đã không chú tâm vào các môn học khác và thi trượt chúng, đánh mất suất học bổng đang có. Sau đó, ông đăng ký học tại trường Đại học Pachaiyappa ở Madras. Ở đó, ông cũng chỉ đam mê với toán học, tỏ ra kém cỏi trong các môn như tiếng Anh, Sinh lý học và tiếng Phạn. Không lấy được bằng FA (Fellow of Arts), ông rời trường đại học và tiếp tục theo đuổi nghiên cứu toán học một cách độc lập, sống trong hoàn cảnh nghèo khổ và luôn bên bờ vực của sự thiếu ăn.

Ngày 14-7-1909 ông kết hôn với Janaki (21-3-1899 – 13-4-1994) – người con gái được mẹ ông chọn và chỉ mới có 10 tuổi, đây không phải là điều lạ ở Ấn Độ lúc này. Tuy nhiên, ông vẫn ở nhà mẹ cô ấy cho đến 13 tuổi. Vào năm 1912, Janaki và mẹ của ông đến ở cùng ông ở Madras.

Sau hai lần bị bệnh nặng vào năm 1909 và 1910, Ramanujan vẫn tiếp tục theo đuổi con đường nghiên cứu toán học. Vào năm 1910, sau cuộc gặp gỡ giữa ông và người sáng lập Hội toán học Ấn Độ, giáo sư V. Ramaswany Aiyer, Ramanujan bắt đầu được sự thừa nhận của giới toán học ở Madras. Họ đã giới thiệu ông cho ông R.Ramachandra Rao, thư ký của Hội Toán học Ấn Độ, ông Rao đã cho ông cơ hội để giải thích về những gì ông viết như tích phân elliptic, chuỗi siêu hình học và chuỗi phân kỳ trong lý thuyết của ông. Cuối cùng, ông Rao cũng thừa nhận sự tài giỏi của Ramanujan và chấp thuận trợ cấp tài chính cho ông. Với sự giúp đỡ của Aiyer, nghiên cứu của Ramanujan đã được xuất bản trong tạp chí của Hội toán học Ấn Độ. Nhưng theo đánh giá của các nhà toán học Ấn Độ thì các bài viết của ông quá ngắn gọn, không có lập luận chặt chẽ chứng minh những kết quả của ông. Đầu năm 1912, ông tìm được công việc tạm thời ở văn phòng kế toán tổng hợp Madras với mức lương 20 rupi/tháng. Sau đó vài tuần, ông xin được vào làm thư ký cho kế toán trưởng với mức lương 30 rupi/tháng. Ông thường nhanh chóng hoàn thành xong công việc được giao. Có một đoạn trong phim *Người đi tìm vô hạn*, vị sếp của ông bảo "*Sao anh không dùng máy tính để tính?*", ông bảo rằng "*Tôi thấy tôi tính nhẩm nhanh hơn.*" Ngoài thời gian làm việc, ông dành hết thời gian cho nghiên cứu toán học và có lẽ do ảnh hưởng từ cuốn sách của GS. Carr nên ông chỉ ghi những kết quả và công thức ông tìm ra mà không ghi rõ ràng vì sao có được chúng, cũng có thể hoàn cảnh khó khăn, giấy viết lúc đó quá đắt, ông ghi các bước giải lên bảng đá đen (một loại bảng thường dùng của học sinh lúc đó) rồi ghi kết quả vào giấy.

Vào năm 1913, Ramanujan đã gửi bản tóm tắt kết quả nghiên cứu của mình đến nhiều nhà toán học nước Anh nhưng chỉ có G.H. Hardy - giáo sư toán ở đại học Trinity, Cambrige - là nhận thấy được sự mới mẻ và tuyệt vời trong công trình của ông. Hardy cùng với cộng sự của mình là Littlewood đã đọc hết 9 trang giấy viết tay từ thư của Ramanujan và họ rất ngạc nhiên với những gì Ramanujan đã viết. Họ cho rằng Ramanujan là một nhà toán học với trình độ cao nhất, một người hội đủ tài năng và khả năng sáng tạo hiếm có. Vào tháng 2 năm 1913, Hardy đã gửi thư bày tỏ sự thích thú của mình đối với nghiên cứu của Ramanujan và liên hệ với văn phòng ở Ấn Độ sắp xếp một chuyến đi cho Ramanujan đến Cambridge. Hơn một năm sau, ngày 17-3-1914, Ramanujan lên thuyền S.S. Nevasa và đi đến London vào 14-4. Sau đó không lâu, Ramanujan được làm việc với Littlewood và Hardy, ông đã đưa những quyển sách viết tay đóng thành tập của mình cho Littlewood và Hardy. Hardy đã nhận được 120 định lí từ hai lá thư đầu tiên của ông, nhưng trong các quyển sách này còn chứa nhiều kết quả và định lí khác nữa. Hardy nhận thấy một số sai, một số đã được khám phá và phần còn lại là mới hoàn toàn. Ramanujan đã gây ấn tượng mạnh mẽ với Hardy và Littlewood. Littlewood cho rằng "*Tôi có thể tin anh ta ít nhất là một Jacobi.*" Hardy cho rằng "*Anh ta có thể so sánh với Euler hoặc Jacobi.*" Tuy nhiên, các cuốn sách của ông hầu hết nêu các kết quả và định lí mà không có chứng minh cụ thể chi tiết cho chúng. Trong khi Hardy là một người làm toán nghiêm khắt, ông đòi hỏi phải chứng minh chặt chẽ các kết quả đó. Ông đã yêu cầu Ramanujan nghiêm túc tham gia các giờ giảng của các giáo sư toán ở đại học Trinity để có nền tảng cơ bản về toán học. Ramanujan đã trải qua gần 5 năm ở Cambridge để hợp tác với Hardy và Littlewood và công bố những gì ông đã tìm ra. Điều đáng nói là ông đã vượt qua rất nhiều khó khăn về khác biệt văn hóa, nhất là chế độ ăn chay trường của người theo đạo Hinđu như ông và vấn đề về sức khỏe, để tiếp tục nghiên cứu toán học. Trong những năm tháng khó khăn của chiến tranh trong thế chiến thứ nhất (1914 - 1918), sức khỏe ông yếu dần và được chuẩn đoán là bị lao phổi (sau này người ta nghiên cứu bệnh án và cho rằng ông bị bệnh gan do một loại amip gây ra). Nằm trên giường bệnh, ông vẫn nghĩ đến các con số và công thức. Có một giai thoại về số Ramanujan – Hardy, lúc Hardy đến thăm ông ở bệnh viện bằng chiếc xe taxi mang số 1729, Hardy cho rằng đó là một con số vô tri vô giác, song Ramanujan nói rằng: "*Không, đó là một số thú vị, nó là số nguyên dương nhỏ nhất có thể biểu diễn thành tổng của hai số lập phương theo hai cách khác nhau*: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$".

Từ ý tưởng này đã khái quát thành định nghĩa những số taxicab. Littewood cho rằng: "*Dường như mỗi số nguyên đều là một người bạn của con người ấy.*"

Vào năm 1918, ông được bầu làm viện sĩ Viện hàn lâm Hoàng gia Anh với nghiên cứu về hàm elliptic trong lý thuyết số và là viện sĩ trẻ tuổi nhất trong lịch sử Hoàng gia. Sau đó, ông được bầu làm Viện sĩ trường Đại học Trinity, Cambrige vào 13-10-1918.

Vào năm 1919, ông quay về Kumbakonam và không lâu sau đó ông chết vào năm 1920 khi mới 32 tuổi. Theo phong tục Ấn Độ, vợ ông không tái giá và bà vẫn ở vậy cho đến lúc chết vào năm 1994.

Trong suốt cuộc đời, ông đã độc lập công bố hơn 3900 kết quả (nhiều nhất là về các đồng nhất thức và các phương trình). Chúng tập hợp trong 4 cuốn sách: cuốn đầu tiên gồm 351 trang, cuốn thứ hai gồm 256 trang, cuốn thứ ba gồm 33 trang và cuốn thứ tư gồm 87 trang, được gọi là "*Lost notebook*", được tìm thấy bởi George Andrews năm 1976. Nhiều kết quả là hoàn toàn mới lạ, độc đáo, như số nguyên tố Ramanujan, hàm theta Ramanujan, công thức phân hoạch và hàm giả theta (được viết vào năm cuối cuộc đời khi ông ở Ấn Độ), đã mở ra nhiều hướng nghiên cứu mới cho một số lượng lớn các nhà nghiên cứu sau này. Tạp chí Ramanujan ra đời nhằm xuất bản những công trình toán học chịu ảnh hưởng bởi các nghiên cứu của Ramanujan. Lý thuyết về hàm phân hoạch mà Ramanujan và Hardy đưa ra đã được vận dụng vào nguyên lý hoạt động của máy ATM. Những công thức mà mới nhìn thì có vẻ là sai về mặt Toán học như công thức nổi tiếng với tên Tổng Ramanujan:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + ... = -\frac{1}{12}$$

nhưng nó lại liên quan đến lực Casimir và được ứng dụng nhiều trong lý thuyết dây của Vật lý (bạn đọc có thể xem một cách chứng minh sơ cấp cho công thức này tại

https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=w-I6XTVZXww).

Mới đây, người ta đã vận dụng những kết quả trong cuốn "*Lost notebook*" để giải thích sự rối loạn của các lỗ đen trong vũ trụ. Có thể nói Ramanujan đã đi trước thế giới gần cả thế kỷ, nên ông còn được xem là một nhà Toán học huyền thoại. Hardy đã từng hỏi ông: "*Làm thế nào ông có được những công thức đó?*". Ông bảo rằng: "*Các công thức thường xuất hiện sau mỗi lần tôi cầu nguyện. Mỗi công thức không phải là vô nghĩa, nó đều ẩn chứa một thông điệp của thần linh*".

Vào dịp kỉ niệm 100 năm ngày sinh của ông, 22 tháng 12 hàng năm được tổ chức là ngày Ramanujan tại trường Đại học Government Arts, Kumbakonam. Một giải thưởng với tên Ramanujan được trao bởi Trung tâm Vật lý lý thuyết quốc tế (ICTP) dành cho những nhà Toán học trẻ không quá 32 tuổi với những nghiên cứu chịu ảnh hưởng bởi Ramanujan, trị giá 10000 USD. Vào năm 2012, nhân dịp 125 ngày sinh của ông, chính phủ Ấn Độ tuyên bố ngày 22 tháng 12 sẽ được tổ chức hàng năm như *ngày Toán học quốc gia* nhằm ghi nhớ nhà Toán học thông thái với bản năng tự học bẩm sinh Ramanujan. Và cuối cùng tôi xin được trích một ý trong bài nói chuyện của GS. Ngô Bảo Châu với sinh viên Việt Nam: "*… khi đã vượt qua biên giới của những gì đã biết để thực sự đuổi theo cái chưa biết, bạn rất cần tính quả cảm vì vào thời điểm đó, bạn thường phải chạy một mình, mà trong một số trường hợp bạn sẽ phải chạy một mình rất lâu*".

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

DÃY SỐ LỒI

KIỀU ĐÌNH MINH – NGUYỄN TIẾN LONG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Dãy số lồi đã từng xuất hiện trong những năm 70 của thế kỷ trước nhưng chưa được quan tâm đúng mức, mặc dù dãy số này, cũng có những ứng dụng nhất định. Ngày nay, người ta cũng đã nghiên cứu khá nhiều về dãy số lồi và các mở rộng của nó. Trong bài báo này chúng tôi muốn trình bày một cách cơ bản, có hệ thống và tương đối đầy đủ các kiến thức cơ sở về dãy số lồi cũng như những áp dụng của nó trong việc giải các bài toán thi Olympic.

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1. Dãy các số thực $(a_n)_1^{+\infty}$ được gọi là *lồi* nếu $a_{k-1} + a_{k+1} \ge 2a_k$ với mọi $k \ge 2$ và gọi *lõm* nếu thỏa mãn $a_{k-1} + a_{k+1} \le 2a_k$ với mọi $k \ge 2$.

Định nghĩa 2. Dãy số dương $(a_n)_1^{+\infty}$ được gọi là *lồi lôgarit* nếu $a_{k+1}a_{k-1} \ge a_k^2$ với mọi $k \ge 2$ và gọi là *lõm lôgarit* nếu $a_{k+1}a_{k-1} \le a_k^2$ với mọi $k \ge 2$.

2. TÍNH CHẤT

Định lý 1. *Cho dãy số lồi $(a_n)_1^{+\infty}$, khi đó với mọi $n > l \ge k \ge 1$ thì $a_{n-l} + a_{n+l} \ge a_{n-k} + a_{n+k}$.*

Chứng minh. Đặt $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i, i \ge 1,$ suy ra $\Delta a_{i+1} \ge \Delta a_i \ \forall i \ge 1$. Ta có

$$a_{n+l} - a_{n+k} = \sum_{i=n+k}^{n+l-1} \Delta a_i;\ a_{n-k} - a_{n-l} = \sum_{i=n-l}^{n-1-k} \Delta a_i.$$

Vì $\Delta a_{i+1} \ge \Delta a_i, \forall i \ge 1$ nên suy ra

$$\sum_{i=n+k}^{n+l-1} \Delta a_i \ge \sum_{i=n-l}^{n-1-k} \Delta a_i.$$

Do đó $a_{n-l} + a_{n+l} \ge a_{n-k} + a_{n+k}$.

Định lý 2. *Với mọi dãy số lồi $(a_i)_1^{+\infty}$ thì*

$$\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \max\{a_1, a_n\}.$$

Chứng minh

• Nếu với mọi $k \ge 1$ ta có $a_k \ge a_{k+1}$, khi đó

$$\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} = a_1 = \max\{a_1, a_n\}.$$

• Nếu tồn tại k nhỏ nhất, $k \ge 1$ thoả mãn $a_k < a_{k+1}$, ta có: $a_k + a_{k+2} \ge 2a_{k+1}$

$\Rightarrow a_{k+1} < a_{k+2} \Rightarrow a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < ... < a_n$.

Mặt khác ta có $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_k$. Như vậy ta suy ra $\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \max\{a_1, a_n\}$.

Từ hai trường hợp trên, ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3. *Cho $(a_n)_1^{+\infty}$ lồi và bị chặn. Khi đó*

a) $a_1 \ge a_2$;

b) $(a_n)_1^{+\infty}$ *hội tụ đến một giới hạn hữu hạn a.*

Chứng minh

a) Đặt $a_2 - a_1 = t$. Giả sử $t > 0$. Từ giả thiết ta có

$$a_{n+1} - a_n \ge a_n - a_{n-1} \ge a_{n-1} - a_{n-2} \ge ... \ge a_2 - a_1 = t,$$

suy ra $a_{n+1} \ge a_n + t \ge a_{n-1} + 2t \ge ... \ge a_1 + nt$.

Do $t > 0$ nên cho $n \to +\infty$ thì $a_{n+1} \to +\infty$, mâu thuẫn với tính bị chặn của $(a_n)_1^{+\infty}$.

Vậy $t \le 0$ hay $a_1 \ge a_2$.

b) Theo trên dễ suy ra $(a_n)_1^{+\infty}$ giảm. Lại vì $(a_n)_1^{+\infty}$ bị chặn nên nó có giới hạn hữu hạn.

3. MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HỌA

Thí dụ 1. *Cho $(a_i)_0^{+\infty}$ là một dãy số lồi. Chứng minh rằng* $\dfrac{a_1+a_3+...+a_{2n-1}}{n} \le \dfrac{a_0+a_2+...+a_{2n}}{n+1}$.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp. Với $n=1$, kết luận đúng.

Giả sử khẳng định đúng với n, ta chứng minh khẳng định cũng đúng với $n+1$, hay

$$(n+2)(a_1+a_3+...+a_{2n+1}) \le (n+1)(a_0+a_2+...+a_{2n+2}).$$

Do $(n+1)(a_1+a_3+...+a_{2n-1}) \le n(a_0+a_2+...+a_{2n})$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$a_1+a_3+...+a_{2n-1}+(n+2)a_{2n+1}$$
$$\le a_0+a_2+...+a_{2n}+(n+1)a_{2n+2}.$$

Điều này đúng vì theo Định lý 1 và định nghĩa ta có

$$\begin{cases} a_1+a_{2n+1} \le a_0+a_{2n+2} \\ a_3+a_{2n+1} \le a_2+a_{2n+2} \\ ... \\ a_{2n-1}+a_{2n+1} \le a_{2n-2}+a_{2n+2} \\ a_{2n+1}+a_{2n+1} \le a_{2n}+a_{2n+2} \end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được điều phải chứng minh.

Thí dụ 2. *Cho $(a_i)_1^n$ là một dãy lồi, đặt $A_k = \dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$. Chứng minh rằng $(A_k)_1^n$ cũng là một dãy lồi.*

Lời giải. *Cách* 1. Định nghĩa

$$f(k) = k(k+1)(k-1)(2A_k - A_{k+1} - A_{k-1}),$$
$$k = 2,3,...,n-1.$$

Từ giả thiết suy ra $f(k) - f(k-1)$

$$= k(k+1)(k-1)(2A_k - A_{k+1} - A_{k-1})$$
$$-(k-1)k(k-2)(2A_{k-1} - A_k - A_{k-2})$$
$$= 2(k-1)(k+1)\sum_{i=1}^{k} a_i - k(k-1)\sum_{i=1}^{k+1} a_i - k(k+1)\sum_{i=1}^{k-1} a_i$$
$$-2k(k-2)\sum_{i=1}^{k-1} a_i + (k-1)(k-2)\sum_{i=1}^{k} a_i + k(k-1)\sum_{i=1}^{k-2} a_i$$
$$= k(k-1)(2a_k - a_{k+1} - a_{k-1}) \le 0.$$

Tức là $f(k) \le f(k-1), k = 3,4,...,n-1$.

Vì vậy $f(k) \le f(k-1) \le ... \le f(2) = 6(2a_2 - a_3 - a_1) \le 0$.

Suy ra $2A_k \le A_{k+1} + A_{k-1}, k = 2,3,...,n-1$ (đpcm).

Cách 2. Chứng minh bằng quy nạp

$$2A_k \le A_{k+1} + A_{k-1} \text{ với } k = 2,\ 3,\ \dots,\ n-1.$$

Với $k=2$ thì ta dễ dàng có điều phải chứng minh do dãy a_n lồi.

Giả sử khẳng định đúng với l, ta có:

$$A_{k-1} + A_{k+1} \ge 2A_k \ \forall k \le l$$
$$\Leftrightarrow (k^2-k)a_{k+1} + 2(a_1+a_2+...+a_{k-1})$$
$$\ge (k^2+k-2)a_k \ \forall k \le l.$$

Ta chứng minh $A_l + A_{l+2} \ge 2A_{l+1}$

$$\Leftrightarrow (l^2+l)a_{l+2} + 2(a_1+a_2+...+a_l) \ge (l^2+3l)a_{l+1}.$$

Thật vậy, do giả thiết quy nạp:

$$(l^2-l)a_{l+1} + 2(a_1+a_2+...+a_{l-1}) \ge (l^2+l-2)a_l$$
$$\Rightarrow (l^2+l)a_{l+2} + 2(a_1+a_2+...+a_{l-1}+a_l) + (l^2-l)a_{l+1}$$
$$\ge (l^2+l)(a_{l+2}+a_l) \ge (2l^2+2l)a_{l+1}$$
$$\Rightarrow (l^2+l)a_{l+2} + 2(a_1+a_2+...+a_l) \ge (l^2+3l)a_{l+1}.$$

Vậy có điều phải chứng minh.

Thí dụ 3 (Baltic Way, 2014). *Cho dãy số $(a_i)_0^n$ $(n \ge 3)$ với $a_0 = a_n = 0$ thỏa mãn*

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2,\ i = 1,2,...,n-1.$$

Chứng minh rằng $a_i \le 0, i = 1,2,...,n-1$.

Lời giải. Giả thiết suy ra dãy đã cho lồi. Áp dụng Định lý 2 ta có ngay $a_i \le 0 \ \forall i = 0,1,2,...,n$.

Thí dụ 4 (IMO SL, 1988). *Cho $(a_k)_1^{+\infty}$ là dãy các số thực, lồi và không âm sao cho $\sum_{j=1}^{k} a_j \le 1, \forall k = 1,2,....$ Chứng minh rằng*

$$0 \le (a_k - a_{k+1}) < \frac{2}{k^2}, \forall k = 1,2,...$$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra dãy $(a_k)_1^{+\infty}$ bị chặn, từ đó áp dụng Định lý 3, ta suy ra $a_k \ge a_{k+1}$ với mọi k. Vì vậy $a_k - a_{k+1} \ge 0\ \forall k.$

Giả sử tồn tại k sao cho $a_k - a_{k+1} \ge \frac{2}{k^2}$. Thế thì $\forall i < k,$ ta có

$$a_i = a_{k+1} + \sum_{j=i}^{k}\left(a_j - a_{j+1}\right) \ge \sum_{j=i}^{k}\frac{2}{k^2} = \frac{2(k+1-i)}{k^2}, \quad i = 1,2,...,k.$$

Suy ra $a_1 + a_2 + ... + a_k \ge$

$$\frac{2}{k^2} + \frac{4}{k^2} + ... + \frac{2k}{k^2} = \frac{k(k+1)}{k^2} > 1,$$

mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy $a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}\ \forall k.$

Thí dụ 5 (IMO LL, 1978). *Tìm một số $c > 0$ sao cho với mọi dãy lõm dương $(a_k)_0^n$ ta đều có*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \ge c(n-1)\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Lời giải. Bất đẳng thức trong đề bài tương đương với $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2\sum_{0\le i<j\le n} a_i a_j \ge c(n-1)\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$

Trong $2\sum_{0\le i<j\le n} a_i a_j$ chứa các số có dạng

$$a_i\left(a_{i-j} + a_{i+j}\right) \ge \frac{\left(a_{i-j} + a_{i+j}\right)^2}{2} > \frac{1}{2}a_{i-j}^2 + \frac{1}{2}a_{i+j}^2\ \forall i \ge j \ge 1.$$

Với mỗi $i,$ ta xét xem có bao nhiêu cặp dạng trên.

- $1 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right]$. Có các cặp $(a_{i-1}, a_{i+1}), (a_{i-2}, a_{i+2}), ..., (a_0, a_{2i})$. Suy ra $a_i^2 + a_i(a_{i-1} + a_{i+1}) + ... + a_i(a_0 + a_{2i}) >$ $a_i^2 + \frac{1}{2}\left(a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + ... + a_0^2 + a_{2i}^2\right) = \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{1}{2}\left(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{2i}^2\right).$
- $\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le i \le n-1$. Có các cặp $(a_n, a_{2i-n}),$ $(a_{n-1}, a_{2i-n+1}), ..., (a_{i+1}, a_{i-1})$. Suy ra

$$a_i^2 + a_i\left(a_{i-1} + a_{i+1}\right) + ... + a_i\left(a_n + a_{2i-n}\right) > \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{1}{2}\left(a_{2i-n}^2 + ... + a_n^2\right).$$

Vậy $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2 \ge$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{2i}^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\left(a_{2i-n}^2 + ... + a_n^2\right).$$

Nếu n chẵn thì ta có $\text{VP} \ge$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{2i}^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}\left(a_{2i-n}^2 + ... + a_n^2\right)$$

$$> \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}.\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \frac{n+2}{4}\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Nếu n lẻ thì ta có $\text{VP} \ge$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{2i}^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(a_{2i-n}^2 + ... + a_n^2\right)$$

$$> \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}.\frac{n-1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \frac{n+1}{4}\sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Do đó, ta có thể chọn $c = \frac{1}{4}.$

Thí dụ 6 (China MO, 2009). *Với mỗi số tự nhiên n cho trước, $n \ge 3$, xét dãy số lồi $(a_k)_1^n$ thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. Tìm biểu thức $f(n)$ bé nhất sao cho với mọi $k \in \{1,2,...,n\}$ ta có*

$$|a_k| \le f(n)\max\{|a_1|, |a_n|\}.$$

Lời giải. Trước hết, định nghĩa dãy $(a_k)_1^n$ như sau: $a_1 = 1, a_2 = -\frac{n+1}{n-1}$ và

$$a_k = -\frac{n+1}{n-1} + \frac{2n(k-2)}{(n-1)(n-2)}, k = 3,4,...,n.$$

Ta có $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$ và $2a_k \le a_{k-1} + a_{k+1}$ với $k = 2,3,...,n-1.$

Trong trường hợp này, dễ kiểm tra rằng $f(n)\ge\frac{n+1}{n-1}$.

Tiếp theo, giả sử $(a_k)_1^n$ là dãy thỏa mãn bài toán. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$a_k\le\frac{n+1}{n-1}\max\{|a_1|,|a_n|\},\forall k\in\{1,2,...,n\}.$$

Do $(a_k)_1^n$ lồi nên $a_n-a_{n-1}\ge a_{n-1}-a_{n-2}\ge...\ge a_2-a_1$.

Do đó $(k-1)(a_n-a_1)$

$$=(k-1)\left[(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_2-a_1)\right]$$

$$\ge(n-1)\left[(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+...+(a_2-a_1)\right]$$

$=(n-1)(a_k-a_1)$. Suy ra

$$a_k\le\frac{k-1}{n-1}(a_n-a_1)+a_1=\frac{1}{n-1}\left[(k-1)a_n+(n-k)a_1\right].\quad(1)$$

Tương tự, với k cố định, $k\notin\{1,n\}$ và với $j\in\{1,2,...,k\}$, ta có $a_j\le\frac{1}{k-1}\left[(j-1)a_k+(k-j)a_1\right]$.

Vì vậy, với $j\in\{k,k+1,...,n\}$ ta cũng có

$$a_j\le\frac{1}{n-k}\left[(j-k)a_n+(n-j)a_k\right].$$

Hệ quả, ta có

$$\sum_{j=1}^{k}a_j\le\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}\left[(j-1)a_k+(k-j)a_1\right]=\frac{k}{2}(a_1+a_k),$$

$$\sum_{j=k}^{n}a_j\le\frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n}\left[(j-k)a_n+(n-j)a_k\right]=\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n).$$

Lấy tổng của hai bất đẳng thức trên, ta được

$$a_k=\sum_{j=1}^{k}a_j+\sum_{j=k}^{n}a_j\le\frac{k}{2}(a_1+a_k)+\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n)$$

$$=\frac{k}{2}a_1+\frac{n+1}{2}a_k+\frac{n+1-k}{2}a_n.$$

Vì vậy, ta có

$$a_k\ge-\frac{1}{n-1}\left[ka_1+(n+1-k)a_n\right].\quad(2)$$

Từ (1) và (2), với $k=2,3,...,n-1$, ta được

$$|a_k|\le\max\left\{\frac{1}{n-1}\left|(k-1)a_n+(n-k)a_1\right|,\frac{1}{n-1}\left|ka_1+(n+1-k)a_n\right|\right\}$$

$$\le\frac{n+1}{n-1}\max\{|a_1|,|a_n|\}.$$

Tóm lại: $f(n)$ bé nhất bằng $\frac{n+1}{n-1}$.

Thí dụ 7 (USA MO, 1993). *Cho $a_0,a_1,a_2,...$ là dãy lõm lôgarit. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_0+a_1+...+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}\ge\frac{a_0+a_1+...+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ \forall n>1.$$

Lời giải. *Bổ đề 1.* $\frac{a_k^{k+1}}{a_{k+1}^{k}}\ge a_0,\forall k\in\mathbb{N}.$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề này bằng quy nạp. Với $k=1$ thì hiển nhiên đúng $a_1^2\ge a_0a_2$. Giả sử bất đẳng thức đúng với $k=j$, ta chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $k=j+1$.

Thật vậy $\frac{a_j^{j+1}}{a_{j+1}^{j}}\ge a_0$

$$\Rightarrow a_{j+1}^{j+2}\ge\frac{a_{j+1}^{2(j+1)}}{a_j^{j+1}}a_0\ge\frac{(a_ja_{j+2})^{j+1}}{a_j^{j+1}}a_0=a_{j+2}^{j+1}a_0\Rightarrow\frac{a_{j+1}^{j+2}}{a_{j+2}^{j+1}}\ge a_0.$$

Bổ đề 2. $a_1a_2a_3...a_{n-1}\ge(a_0a_n)^{\frac{n-1}{2}},\forall n\ge2.$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề này bằng quy nạp.

Với $n=2$ thì $a_1^2\ge a_0a_2\Rightarrow a_1\ge(a_0a_2)^{\frac12}$. Giả sử khẳng định đúng với $n=m$. Ta chứng minh khẳng định đúng với $n=m+1$. Thật vậy

$$a_1a_2a_3...a_{m-1}\ge(a_0a_m)^{\frac{m-1}{2}}$$

$$\Rightarrow a_1a_2a_3...a_{m-1}a_m\ge a_0^{\frac{m-1}{2}}a_m^{\frac{m+1}{2}}.\quad(1)$$

Theo Bổ đề 1 ta có

$$\frac{a_m^{m+1}}{a_{m+1}^{m}}\ge a_0\Rightarrow\frac{a_m^{\frac{m+1}{2}}}{a_{m+1}^{\frac{m}{2}}}\ge a_0^{\frac12}\Rightarrow1\ge\frac{a_0^{\frac12}a_{m+1}^{\frac m2}}{a_m^{\frac{m+1}{2}}}.\quad(2)$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2), ta được

$$a_1a_2a_3...a_m \ge a_0^{\frac{m}{2}}a_{m+1}^{\frac{m}{2}} = \left(a_0a_{m+1}\right)^{\frac{(m+1)-1}{2}}.$$

Quay trở lại bài toán. Ta viết kết quả Bổ đề 2 như sau $\left(a_1a_2a_3...a_{n-1}\right)^{\frac{2}{n-1}} \ge a_0a_n$

$$\Leftrightarrow \left(a_1a_2a_3...a_{n-1}\right)^{\frac{2n}{n^2-1}} \ge \left(a_0a_n\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(a_0a_n\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(a_1a_2...a_{n-1}\right)^{\frac{2n}{n^2-1}} \ge a_0a_n$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n^2-1]{a_0^{n-1}a_1^{2n}a_2^{2n}a_3^{2n}...a_{n-1}^{2n}a_n^{n-1}} \ge a_0a_n.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, suy ra

$$\frac{a_0+a_1+...+a_n}{n+1}.\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1} \ge a_0a_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2\left(n^2-1\right)}$$

$$\ge \frac{a_0a_n}{n^2} - \frac{a_n\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2\left(n^2-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2\left(n^2-1\right)} \ge$$

$$\frac{a_0a_n}{n^2} + \frac{a_n\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2} - \frac{a_n\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(a_0+a_1+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+a_2+...+a_{n-1}\right)}{n^2-1} + \frac{a_n\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2-1}$$

$$\ge \frac{\left(a_0+...+a_{n-1}\right)\left(a_1+...+a_{n-1}\right)}{n^2} + \frac{a_n\left(a_0+...+a_{n-1}\right)}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_0+a_1+...+a_n}{n+1}.\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}$$

$$\ge \frac{a_0+...+a_{n-1}}{n}.\frac{a_1+...+a_n}{n}.$$

Trên đây là một số thí dụ cơ bản về dãy số lồi. Để hiểu thêm về vấn đề này xin mời bạn đọc luyện tập qua một số bài tập sau

4. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1 (IMO SL, 1975). Cho $\left(a_n\right)_1^{+\infty}$ là dãy số lồi và $0 \le a_n \le 1$. Chứng minh rằng

$$0 \le (n+1)\left(a_n - a_{n+1}\right) \le 2, n = 1,2,3,...$$

2 (IMO LL, 1978). Giả sử $\left(b_n\right)_0^{+\infty}$ là một dãy các số dương sao cho $\left(\alpha^n b_n\right)_0^{+\infty}$ lồi với mọi $\alpha > 0$. Chứng minh rằng dãy $\left(\log b_n\right)_0^{+\infty}$ là lồi.

3 (IMO LL, 1978). Chứng minh rằng $c = \frac{3}{4}$ là hằng số tốt nhất thỏa mãn

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)^2 \ge c(N-1)\sum_{n=0}^{N} a_n^2$$

với mọi dãy dương lõm $\left(a_n\right)_1^N$.

4 (IMO SL, 1976). Cho $a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ là dãy các số thực thỏa mãn điều kiện $a_0 = a_{n+1} = 0$ và $\left|a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}\right| \le 1, k = 1,2,...,n.$

Chứng minh rằng $\left|a_k\right| \le \frac{k(n+1-k)}{2}, \forall k = 0,1,...,n+1.$

5 (Baltic Way, 1994). Cho $a_1, a_2, ..., a_9$ là các số thực không âm thoả mãn $a_1 = a_9 = 0$ và ít nhất một trong các số này khác 0. Chứng minh rằng có chỉ số $i, 2 \le i \le 8$ sao cho $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$.

Phát biểu còn đúng không khi thay số 2 trong bất đẳng thức bởi 1 hoặc 9?

6 (China TST, 2008). Tìm hằng số M lớn nhất sao cho với số nguyên $n \ge 3$, tồn tại hai dãy các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn đồng thời

a) $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1;\ 2b_k \ge b_{k-1} + b_{k+1}, k = 2,3,...,n-1;$

b) $a_k^2 \le 1 + \sum_{i=1}^{k} a_ib_i, k = 1,2,...,n;\ a_n \equiv M.$

7 (China TST, 2009). Cho số nguyên $n \ge 2$. Tìm hằng số $\lambda(n)$ lớn nhất có tính chất sau: nếu dãy các số thực lõm $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn $0 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)^2 \ge \lambda(n)\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

CÁC LỚP THCS

Bài T1/486 (Lớp 6). Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{abba}$ thỏa mãn: $\overline{abba} = \overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 + a - b$.

ĐỖ THỊ HƯỜNG
(GV THCS Thanh Tâm, Thanh Liêm, Hà Nam)

Bài T2/486 (Lớp 7). Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*, trong tam giác lấy điểm *D* sao cho $\widehat{ABD} = 15^0$, $\widehat{BAD} = 30^0$. Chứng minh rằng:

a) $BD = \dfrac{BC}{2}$.

b) $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)

Bài T3/486. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{3x+4} = \sqrt[3]{y^3 + 5y^2 + 7y + 4}$.

HOÀNG ANH TUẤN
(GV TT giáo dục thường xuyên Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T4/486. Trên nửa đường tròn tâm *O* đường kính *AB* lấy hai điểm *E, F* (*E* thuộc cung *BF*). Điểm *P* di động trên tia đối của tia *EB*, đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABP* cắt đường thẳng *BF* tại *Q*. Gọi *R* là trung điểm của *PQ*. Chứng minh rằng đường tròn đường kính *AR* luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN NHƯ HIỀN
(GV THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T5/486. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 7x + \sqrt{x-2} = y + 4 \\ y^3 - 7y + \sqrt{y-2} = z + 4. \\ z^3 - 7z + \sqrt{z-2} = x + 4 \end{cases}$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Ranh, Khánh Hòa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/486. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 5$.

Chứng minh rằng: $a^3b + b^3c + c^3a \le 8$.

NGUYỄN VĂN HUYỆN
(SV ĐH Giao thông Vận tải, TP.Hồ Chí Minh)

Bài T7/486. Giải phương trình

$$\frac{1}{4}\left(|\sin x|^n + |\cos x|^n\right) = \frac{|\sin x|^m + |\cos x|^m}{|\sin 2x|^k + 4|\cos 2x|^k}$$

$(m, n, k \in \mathbb{N}, n \ge m, k \ge 2)$.

ĐỖ CAO TRÍ
(GV huyện Long Điền, Bà Rịa, Vũng Tàu)

Bài T8/486. Cho tam giác *OBC* có góc $\widehat{AOB} = 120^0$, $OA = a$, $OB = b$. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *O* trên cạnh *AB*. Chứng minh rằng: $aHA + bHB \le \sqrt{3}ab$.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Quỳ Hợp, Nghệ An)

Bài T9/486. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương *n* sao cho số $2018^{n-2017} - 1$ chia hết cho *n*.

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/486. Tìm tất cả các số tự nhiên *n* để số $4^n + 15^{2n+1} + 19^{2n}$ chia hết cho $18^{17} - 1$.

ĐOÀN CÁT NHƠN
(GV THCS Nhơn Lộc, An Nhơn, Bình Định)

Bài T11/486. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(0)$ là số hữu tỷ và thỏa mãn

$$f\left(x + f^2(y)\right) = f^2(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T12/486. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \ge \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

NGUYỄN VĂN QUÝ
(ĐH Giáo dục, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/486. Một con lắc lò xo nằm ngang gồm vật nặng có khối lượng $m = 100$g, lò xo có độ cứng là $k = 160$N/m. Lấy $g = 10$m/s^2. Khi vật đang ở vị trí cân bằng, người ta truyền cho vật vận tốc $v = 2$m/s theo phương ngang để vật dao động. Do giữa vật và mặt phẳng ngang có lực ma sát với hệ số ma sát $\mu = 0{,}01$ nên dao động của vật sẽ tắt dần. Tìm tốc độ trung bình của vật trong suốt quá trình chuyển động.

VIỆT CƯƠNG
(Hà Nội)

Bài L2/486. Một đoạn mạch gồm ba phần tử R, L, C mắc nối tiếp. Biết cường độ dòng điện qua mạch có biểu thức $i = I_0\cos\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$(A). Tính từ thời điểm cường độ dòng điện qua mạch bị triệt tiêu, sau khoảng thời gian $\dfrac{1}{4}$ chu kì thì điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của mạch là bao nhiêu?

THANH LÂM
(Hà Nội)

Đính chính. Đề bài T4/485, số T11-2017 (trang 24) đã viết: … *BE*, *BF* theo thứ tự cắt …
xin được sửa là: … *BE*, *AF* theo thứ tự cắt …
Chân thành xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TH&TT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/486 (For 6th grade). Find all natural numbers of the form $\overline{abba}$ such that

$$\overline{abba} = \overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 + a - b.$$

Problem T2/486 (For 7th grade). Given a right isosceles triangle ABC with the right angle A. Inside the triangle, choose a point D so that $\widehat{ABD} = 15^0$, $\widehat{BAD} = 30^0$. Prove that

a) $BD = \dfrac{BC}{2}$.

b) $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$.

Problem T3/486. Find all integral solutions of the equation $\sqrt{3x+4} = \sqrt[3]{y^3 + 5y^2 + 7y + 4}$.

Problem T4/486. On a semicircle O with the diameter AB choose two points E, F (E is on the arc BF). A point P varies on the opposite ray of the ray EB. The circumcircle of ABP intersects the line through BF at the second point Q. Let R be the midpoint of PQ. Prove that the circle with the diameter AR always goes through a fixed point.

Problem T5/486. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 - 7x + \sqrt{x-2} = y + 4 \\ y^3 - 7y + \sqrt{y-2} = z + 4. \\ z^3 - 7z + \sqrt{z-2} = x + 4 \end{cases}$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/486. Given three non-negative numbers a, b, c so that $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Prove that $a^3b + b^3c + c^3a \le 8$.

Problem T7/486. Solve the equation

$$\frac{1}{4}\left(|\sin x|^n + |\cos x|^n\right) = \frac{|\sin x|^m + |\cos x|^m}{|\sin 2x|^k + 4|\cos 2x|^k}$$

$(m, n, k \in \mathbb{N}, n \ge m, k \ge 2)$.

Problem T8/486. Given a triangle OBC with $\widehat{AOB} = 120^0$, $OA = a$, and $OB = b$. Let H be the perpendicular projection of O on AB. Prove that $aHA + bHB \le \sqrt{3}ab$.

Problem T9/486. Prove that there exists infinitely many positive integers n so that $2018^{n-2017} - 1$ is divisible by n.

(Xem tiếp trang 36)

Bài T1/482. *Tùy theo giá trị của số tự nhiên n, hãy tìm chữ số tận cùng của*

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n.$$

Lời giải. Đặt $n = 4k + r$ với số tự nhiên $k \geq 0$ và r bằng 0, 1, 2, 3.

Với $n = 0$ thì

$$S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Với $n > 0$ thì $S_n = 1 + 16^k.2^r + 81^k.3^r + 256^k.4^r$.

Xét $k = 0$; $r = 1, 2, 3 \Rightarrow S_n = 1 + 2^r + 3^r + 4^r$ có tận cùng là 0.

Xét $k \geq 1$, ta có *nhận xét*: Lũy thừa của số tận cùng 1 thì luôn có tận cùng là 1 và lũy thừa số mũ nguyên dương của số tận cùng 6 thì luôn có tận cùng là 6. Từ nhận xét trên suy ra chữ số tận cùng của S_n bằng chữ số tận cùng của

$$T_n = 1 + 6.2^r + 1.3^r + 6.4^r.$$

• Với $r = 0$ thì $T_n = 1 + 6 + 1 + 6 = 14$ nên chữ số tận cùng của S_n là 4.

• Với $r = 1$ thì $T_n = 1 + 6.2 + 3 + 6.4 = 40$ nên chữ số tận cùng của S_n là 0.

• Với $r = 2$ thì

$T_n = 1 + 6.2^2 + 3^2 + 6.4^2 = 10 + 6(2^2 + 4^2) = 130$

nên chữ số tận cùng của S_n là 0.

• Với $r = 3$ thì

$T_n = 1 + 6.2^3 + 3^3 + 6.4^3 = 28 + 6(2^3 + 4^3) = 460$

nên chữ số tận cùng của S_n là 0.

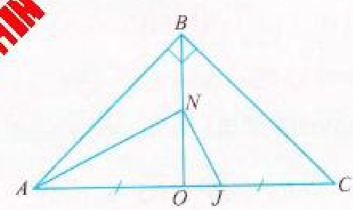
Vậy chữ số tận cùng của S_n là 4 khi n chia hết cho 4 và chữ số tận cùng của S_n là 0 khi n không chia hết cho 4. ☐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Nhiều bạn quên xét trường hợp $k = 0$. Một số bạn làm cách khác: Dễ thấy S_n luôn là số chẵn vì là tổng của hai số lẻ và hai số chẵn, sau đó xét số dư của S_n khi chia cho 5. Cách này dễ nhầm lẫn vì phải kết hợp hai số dư, nhất là khi cho biểu thức S_n phức tạp hơn.

2) Các bạn sau có lời giải đúng: **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 6A, *Hoàng Quốc Duy*, 6C, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, *Hoàng Tùng Dương*, 6A, THCS An Hoạch, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Quốc Hiếu*, *Trương Công Cảnh*, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Võ Thị Hồng Thu*, 6B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Nguyễn Tuyết Minh*, 6B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/482. *Cho tam giác ABC vuông cân tại B có O là trung điểm của AC. Lấy điểm J trên đoạn OC sao cho $3AJ = 5JC$. Gọi N là trung điểm của OB. Chứng minh $AN \perp NJ$.*



Lời giải. *Cách* 1. (*Của bạn Nguyễn Công Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**).

Xét ΔABC cân tại B có BO là đường trung tuyến nên $BO \perp AC$ và $OB = OC = OA = \frac{1}{2}AC$.

Vì N là trung điểm của OB nên $OB = 2ON$ (1)

Từ giả thiết: $3AJ = 5JC$

$\Rightarrow 3(OA + OJ) = 5(OC - OJ)$

$\Rightarrow 3(OB + OJ) = 5(OB - OJ) \Rightarrow OB = 4OJ$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $ON = 2OJ$.

Áp dụng định lý Pythagore cho ΔAON, ΔJON đều vuông tại O và theo (1), (2) ta có:

$$AN^2 + JN^2 = (OA^2 + ON^2) + (ON^2 + OJ^2) = 25OJ^2$$

$$= (5OJ)^2 = (4OJ + OJ)^2 = (OA + OJ)^2 = AJ^2$$

Vậy theo định lý Pythagore đảo thì ΔANJ vuông tại N hay $AN \perp NJ$.

Cách 2. (*Của bạn Văn Quang Tuệ*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**).

Theo giả thiết $3AJ = 5JC$ nên

$$\frac{JC}{3} = \frac{AJ}{5} = \frac{AJ + JC}{3+5} = \frac{AC}{8}.$$

Suy ra : $JC = \frac{3}{8}AC;\ AJ = \frac{5}{8}AC;\ OJ = \frac{1}{8}AC.$

Áp dụng định lý Pythagore cho ΔONJ, ΔONA và chú ý tới $ON = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{4}AC$, ta có:

$$NJ^2 = OJ^2 + ON^2 = \left(\frac{AC}{8}\right)^2 + \left(\frac{AC}{4}\right)^2 = \frac{5AC^2}{64};$$

$$NA^2 = NO^2 + AO^2 = \left(\frac{AC}{4}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{5AC^2}{16}.$$

Suy ra:

$$NJ^2 + NA^2 = \frac{5AC^2}{16} + \frac{5AC^2}{64} = \frac{25AC^2}{64} = AJ^2.$$

Do đó theo định lý Pythagore đảo thì ΔNJA vuông tại N hay $NJ \perp NA$. ❒

➢***Nhận xét.*** Ngoài hai bạn trên thì các bạn có lời giải tốt là: **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt, Cao Thị Ngọc Trâm, Võ Quỳnh Anh, Phạm Thị Thu Nhung, Võ Đàm Hương Giang, Văn Quang Tuệ,* 7A, *Võ Thị Hồng Thu,* 7B, *Nguyễn Thị Yến Nhi*, 7D, *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành. **Nghệ An:** *Ngô Minh Quân,* 7A, *Lê Văn Mạnh, Lê Văn Quang Trung*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn,* 6A, *Hoàng Quốc Duy*, 6C, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn. *Hoàng Tùng Dương*, 6A, THCS An Hoạch, An Hoạch, TP. Thanh Hóa. **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/482. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2\left(y^2 - x^2\right) = \dfrac{14}{x} - \dfrac{13}{y} & (1) \\ 4\left(x^2 + y^2\right) = \dfrac{14}{x} + \dfrac{13}{y} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $xy \neq 0$.

Lần lượt cộng, trừ (1) và (2) theo vế, ta được

$$\begin{cases} 2\left(y^2 - x^2\right) + 4\left(x^2 + y^2\right) = \dfrac{14}{x} - \dfrac{13}{y} + \dfrac{14}{x} + \dfrac{13}{y} \\ 2\left(y^2 - x^2\right) - 4\left(x^2 + y^2\right) = \dfrac{14}{x} - \dfrac{13}{y} - \dfrac{14}{x} - \dfrac{13}{y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 14 & (3) \\ y^3 + 3x^2y = 13 & (4) \end{cases}$$

Cách 1. Lần lượt cộng, trừ (3) và (4) theo vế, ta được

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + y^3 + 3x^2y = 14 + 13 \\ x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x^2y = 14 - 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 3^3 \\ (x-y)^3 = 1^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Thay bộ số $(x; y) = (2; 1)$ vào HPT ban đầu thấy thỏa mãn. Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất

$(x; y) = (2; 1)$.

Cách 2. Từ (3) và (4) suy ra

$$13\left(x^3 + 3xy^2\right) = 14\left(y^3 + 3x^2y\right)$$

$$\Leftrightarrow 13x^3 - 42x^2y + 39xy^2 - 14y^3 = 0 \qquad (5)$$

Chia hai vế của (5) cho y^3 $(y \neq 0)$ và đặt $t = \frac{x}{y}$ $(t \neq 0)$ ta có PT: $13t^3 - 42t^2 + 39t - 14 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(13t^2 - 16t + 7) = 0$$

Nhận thấy $13t^2 - 16t + 7 = 13\left(t - \frac{8}{13}\right)^2 + \frac{27}{13} > 0$ với mọi t. Do đó: $t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Suy ra $x = 2y$, thay vào (4) ta có $y^3 + 12y^3 = 13$ $\Leftrightarrow y^3 = 1 \Leftrightarrow y = 1$. Do đó $x = 2$.

Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất

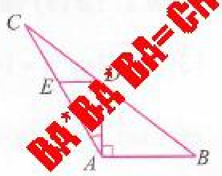
$(x; y) = (2; 1)$. ❒

➢ ***Nhận xét.*** Có rất nhiều bạn tham gia giải bài, và thường làm theo một trong hai cách trên. Tuy nhiên một số bạn quên không đặt điều kiện $xy \neq 0$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT Dân Lập Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Nguyễn Thị Khánh Ly*, 9A4, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Thái Thị Cẩm Chi*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, *Cao Khánh Linh*, 8A, THCS Cao Xuân Huy; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Thu Nhung*, *Phạm Trung Phú*, *Võ Đàm Hương Giang*, 7A, *Nguyễn Thị Yến Nhi*, 7D, *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Bến Tre:** *Ngô Quốc Bảo*, 8/1, THCS Mỹ Hóa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/482. *Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^0$. Giả sử trên cạnh BC có điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 90^0$ và AB = DC = 1. Tính độ dài đoạn thẳng BD.*

Lời giải. Đặt $BD = x$ ($x > 0$). Gọi E là điểm trên cạnh AC sao cho $DE \,//\, AB$, suy ra $DE \perp AD$.



Áp dụng định lí Thales cho tam giác ABC ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \text{ hay } DE = \frac{1}{x+1}.$$

Mặt khác, ΔADE vuông tại D có

$$\widehat{DAE} = 120^0 - 90^0 = 30^0,$$

suy ra $AD = DE\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{x+1}$.

Áp dụng định lí Pythagore cho tam giác ABD ta có $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{3}{(x+1)^2} = x^2$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^3-2) = 0$$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ (vì $x > 0$). Vậy $BD = \sqrt[3]{2}$. □

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau cho lời giải tốt: **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT DL Lương Thế Vinh; **Thanh Hoá:** *Phạm Anh Đức*, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh; *Thiều Đình Minh Hùng*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Cần Thơ:** *Trần Phương Trân*, 8A7, THCS Thốt Nốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/482. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn*

$$a + b + c = \sqrt{6051}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2a}{\sqrt{a^2+2017}} + \frac{2b}{\sqrt{b^2+2017}} + \frac{2c}{\sqrt{c^2+2017}}.$$

Lời giải. Với a, b, c dương và thỏa mãn $a+b+c = \sqrt{6051}$ ta có

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$$
$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}.6051 = 2017.$$

Do đó

$$\frac{2a}{\sqrt{a^2+2017}} \leq \frac{2a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} = \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}. \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$ ta có:

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{2a}{\sqrt{a^2+2017}} \leq \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}. \quad (3)$$

Tương tự: $$\frac{2b}{\sqrt{b^2+2017}} \leq \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a}. \quad (4)$$

$$\frac{2c}{\sqrt{c^2+2017}} \leq \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}. \quad (5)$$

Cộng theo vế các BĐT (3), (4), (5) ta được

$$P\le\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}\right)+\left(\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=3.$$

$$P=3\Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{6051}}{3}.$$

Vậy $\max P=3$ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{6051}}{3}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn làm như cách trên, một số lời giải còn dài. Các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh; *Hoàng Việt Bách*, 8C5, THCS Giảng Võ. **Vĩnh Phúc:** *Trần Việt Khoa, Nguyễn Duy Quyết*, 9A1; *Nguyễn Thị Khánh Ly, Nguyễn Thị Ngọc Mai, Nguyễn Mai Linh*, 9A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, TTr. Bút Sơn, Hoằng Hóa; *Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa. **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài. **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/482. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2x+2}}\ \textit{với}\ x>\frac{1}{2}.$$

Lời giải. Phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x(2x-1)}}=\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{2x+2}}{\sqrt[3]{(2x+2)(3x+1)}}\quad(1)$$

Đặt $a=\sqrt[3]{2x-1};b=\sqrt[3]{x};c=\sqrt[3]{3x+1};d=\sqrt[3]{2x+2}$.

Ta có: $a,b,c,d>0$ và $a^3-b^3=c^3-d^3=x-1$.

Phương trình (1) trở thành: $\dfrac{a-b}{ab}=\dfrac{c-d}{cd}$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3-b^3}{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{c^3-d^3}{cd\left(c^2+cd+d^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{x-1}{cd\left(c^2+cd+d^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{1}{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}-\frac{1}{cd\left(c^2+cd+d^2\right)}\right]=0\quad(2)$$

Vì $x>\dfrac{1}{2}$ nên: $a=\sqrt[3]{2x-1}<c=\sqrt[3]{3x+1}$;

$b=\sqrt[3]{x}<d=\sqrt[3]{2x+2}$. Suy ra:

$$ab\left(a^2+ab+b^2\right)<cd\left(c^2+cd+d^2\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}>\frac{1}{cd\left(c^2+cd+d^2\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}-\frac{1}{cd\left(c^2+cd+d^2\right)}>0.$$

Do đó (2) $\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$, thỏa mãn bài toán. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Hầu hết các bạn đều biến đổi phương trình về dạng tích, trong đó có thừa số $(x-1)$; sau đó chứng minh thừa số thứ hai khác không. Tuy nhiên một số bạn trình bày dài, làm bài toán thêm phức tạp.

2) Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Kim Thị Hồng Lĩnh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Vĩnh Long:** *Trần Lĩnh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Quảng Nam:** *Lê Đào Văn Trung*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Huỳnh Tuyên, Nguyễn Quốc Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Sơn*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh, *Nguyễn Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Thị Mỹ Duyên*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10 Toán 2, *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Bắc Giang:** *Hoàng Mai Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T7/482. *Cho p, q, r là ba nghiệm nguyên phân biệt của đa thức với hệ số nguyên: x^3+ax^2+bx+c, trong đó $16a+c=0$.*

Chứng minh rằng $\frac{p+4}{p-4}\cdot\frac{q+4}{q-4}\cdot\frac{r+4}{r-4}$ cũng là một số nguyên.

Lời giải. Ta có $x^3+ax^2+bx+c=(x-p)(x-q)(x-r)$

$=x^3-(p+q+r)x^2+(pq+qr+rp)x-pqr.$

$$\text{Suy ra }\begin{cases}p+q+r=-a\\ pq+qr+rp=b\\ pqr=-c\end{cases}\qquad(1)$$

Theo giả thiết $0=16a+c=-\left[16(p+q+r)+pqr\right]$.

Do đó $\frac{p+4}{p-4}\cdot\frac{q+4}{q-4}\cdot\frac{r+4}{r-4}$

$$=\frac{pqr+4(pq+qr+rp)+16(p+q+r)+64}{pqr-4(pq+qr+rp)+16(p+q+r)-64}$$

$$=\frac{4(pq+qr+rp)+64}{-4(pq+qr+rp)-64}=-1$$

là số nguyên (đpcm). ❒

➤***Nhận xét.*** 1) (1) được gọi là định lý Viète.

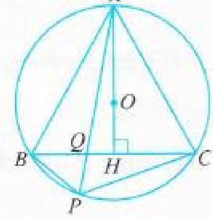
2) Đây là bài toán đa thức cơ bản, đơn giản. Hoan nghênh các bạn THCS sau đã tham gia và có lời giải đúng: **Thanh Hóa:** *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Bút Sơn, Hoằng Hóa, *Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/482. *Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh a. Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa điểm A lấy điểm P bất kỳ ($P\neq B, P\neq C$). Các đoạn AP và BC cắt nhau tại Q.*

Chứng minh $PQ\le\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải. Kẻ $AH\perp BC$ ($H\in BC$). Gọi R là bán kính của đường tròn (O). Khi đó



$AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$R=OA=\frac{2}{3}AH=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Ta có $PQ=AP-AQ$

$$\le 2R-AH=\frac{2a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $Q\equiv H$, lúc đó P là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Một số bạn sử dụng *định lý Ptolemy* cho tứ giác nội tiếp $ABPC$ suy ra $PA=PB+PC$; kết hợp với kết quả $\Delta PBQ \backsim \Delta PAC$ dẫn đến hệ thức $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$. Áp dụng BĐT $\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}\ge\frac{4}{PB+PC}$ cũng dẫn tới điều cần chứng minh.

2) Rất nhiều bạn giải đúng bài toán này. Xin nêu tên những bạn có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** *Vũ Thanh Thảo*, 11 Toán, THPT Sơn Tây, *Nguyễn Minh Nghĩa*, 11A1, THPT Ứng Hoà A, Ứng Hoà; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa, Phan Trung Dũng*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Anh Minh*, 9A, THCS Tuân Chính, Vĩnh Tường; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Dương Quỳnh Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hoá:** *Phạm Anh Đức, Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hoá, *Thiều Đình Minh Hùng*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Hoàng Việt Phương*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Thanh Hùng*, 11.1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Lê Hà Khiêm*, 11T, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Lâm Đồng:** *Phùng Trọng Nghĩa, Nguyễn Tuấn Lộc*, 10 Toán,

Chu Văn Phương, Võ Minh Quân, Nguyễn Nguyên Phước, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Tấn Phúc, Nguyễn Phúc Tăng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Bình Phước:** *Nguyễn Tấn Tài*, 12A; THPT chuyên Quang Trung; **Long An:** *Lê Trí Phú, Bùi Khánh Phong*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Cần Thơ:** *Tăng Trung Lộc*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Vĩnh Long:** *Thái Ngọc Vinh Hiển*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trương Hồ Hoài Nam, Nguyễn Thái Bình, Bùi Khánh Vĩnh, Phạm Thị Quỳnh Như*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/482. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 6.$

Lời giải. (*Theo đa số các bạn*) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{b^2c}}=3\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}. \quad (1)$$

Tương tự, $\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}$ (2)

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\ge 3\frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \quad (3)$$

Cộng các vế tương ứng của (1)-(3), ta thu được

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$ Suy ra

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}}=6 \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ☐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Đây là dạng toán cơ bản về áp dụng bất đẳng thức Cauchy nên có rất nhiều bạn tham gia giải bài này. Ngoài cách đã trình bày ở trên, còn có rất nhiều cách giải khác bằng cách ghép hoặc chuẩn hóa bộ ba số dương đã cho. Tất cả đều cho lời giải đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Giang:** *Hoàng Mai Phương*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Bà Rịa-Vũng Tàu:** *Mai Thành Huy*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Trần Tấn Phát, Phạm Nhật Minh, Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT chuyên Bến Tre; **Bình Phước:** *Phan Minh Hiếu*, 11T4, *Lưu Chí Cường, Trịnh Hoàng Hiệp, Nguyễn Hoàn Đức, Nguyễn Tấn Tài*, 12A, THPT chuyên Quang Trung; **Đồng Nai:** *Quách Minh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phúc Tùng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **TP.HCM:** *Nguyễn [illegible] Thuấn*, 10L1, *Đặng Đức Trường, Trương Lê Hoài Nam, Nguyễn Thái Bình, Trần Hồng Nhân*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên Huế:** *Hoàng Vũ Nam Tấn*, 11T1, *Lê Thị Thu Sương, Lê Nguyễn Huyền Châu*, 12T2, *Vũ Hoàng Minh Tuấn, Nguyễn Minh Tuấn*, 10T1, Quốc học Huế; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên, *Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Lê Huy*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Khánh Hòa:** *Hồ Long Nhật*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Trần Tuấn Lộc*, 10T, *Chu Văn Phương, Võ Minh Quân, Nguyễn Huỳnh Tuyên, Nguyễn Nguyên Phước*, 11T, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** *Lê Trí Phú, Bùi Khánh Phong*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Nam Định:** *Lê Đình Năm*, 10T2, *Đặng Đức Trường, Vũ Thúy An, Dương Quỳnh Anh*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh, *Nguyễn Nam Khánh*, 10A1, *Bùi Đình Hưng*, 10A6, *Vũ Trường Giang*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Nam:** *Huỳnh Đình Ngọc Trác, Nguyễn Thanh Hùng*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Lê Hà Khiêm*, THPT chuyên Lê Thánh Tông; **Quảng Ngãi:** *Trần Nguyễn Quy*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** *Võ Thanh Long*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Sóc Trăng:** *Vương Gia Huy*, 10A1, THPT chuyên

Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Thanh Hóa:** *Lê Minh Dũng*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10T2, *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Vĩnh Long:** *Lê Nữ Hoàng Kim, Trần Nguyễn Yên Đan, Thái Ngọc Vinh Hiển, Đỗ Thiên Ân*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Thu Thị Thanh, Phan Trung Dũng, Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/482. *Với mỗi số nguyên $n > 2$, gọi u_n là số các chữ số 0 đứng tận cùng của $n!$ viết trong hệ cơ số n. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{u_n}{n-1}$.*

Lời giải. Ta cần sử dụng các kết quả sau về công thức Polignac (Xem chứng minh trên tạp chí TH&TT số 474 tháng 12.2016).

Cho số nguyên dương x. Kí hiệu $v_p(x)$ là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của x. Khi đó ta có các tính chất sau:

1) $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^i}\right]$;

2) $v_p(n!) \le \dfrac{n-1}{p-1}$.

Trở lại bài toán. Giả sử $u_n = s \in \mathbb{N}$. Khi đó biểu diễn của $n!$ trong hệ cơ số n là

$$n! = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_s n^s \qquad (1)$$

với $k \ge s$, $0 \le a_{s+1}, \ldots, a_{k-1} < n$, $1 \le a_s, a_k < n$.

Giả sử $n = p^t m$ với $(m, p) = 1$ và p là ước nguyên tố bất kỳ của n. Thay vào (1) ta được

$$n! = a_k m^k p^{kt} + a_{k-1}m^{k-1}p^{(k-1)t} + \ldots + a_s m^s p^{st}$$
$$= p^{st}.M \ (M \in \mathbb{N}).$$ Vậy $v_p(n!) \ge st$.

Từ tính chất 2 suy ra

$$st \le \frac{n-1}{p-1} \Rightarrow u_n = s \le \frac{n-1}{t(p-1)}. \qquad (2)$$

Vì $n > 2$ nên $n = 2^t$ $(t \ge 2)$ hoặc n có một ước nguyên tố lẻ $n \ge 3$. Cả hai trường hợp này đều dẫn đến $t(p-1) \ge 2$. Vậy $u_n \le \dfrac{n-1}{2} \Rightarrow P \le \dfrac{1}{2}$.

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn tại $n = 3$.

Khi đó $3! = 6$ nên trong hệ cơ số 3 là $\overline{20}$.

Do đó $P = \dfrac{u_3}{3-1} = \dfrac{1}{2}$. ❒

➤***Nhận xét.*** Đây là một bài toán khó vì phải sử dụng một số tính chất của $v_p(n!)$. Chỉ có 4 bạn tham gia giải trong đó có 2 bạn đưa ra kết quả đúng mặc dù chứng minh còn nhiều chỗ chưa chính xác.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/482. *Cho thập giác lồi $A_1A_2\ldots A_{10}$. Ta thực hiện phép toán tô màu các cạnh và đường chéo nằm trong thập giác bởi 5 màu khác nhau theo quy tắc sau:*

a) Mỗi cạnh hoặc đường chéo được tô nhiều nhất 1 màu.

b) Các cạnh và các đường chéo được tô màu không có đỉnh chung và không cắt nhau.

Hỏi có thể thực hiện được bao nhiêu cách tô màu khác nhau?

Lời giải. Ta giải bài toán cho trường hợp tổng quát là tô màu các cạnh và đường chéo một $(2n)$ – giác lồi $A_1A_2\ldots A_{2n}$ bởi n màu thỏa mãn các điều kiện đầu bài. Ký hiệu K_n là số cách tô màu thỏa mãn điều kiện đầu bài mà chưa kể đến hoán vị các màu, thì số cách tô màu thỏa mãn điều kiện đầu bài sẽ là $n!K_n$.

Đặt $K_0 = K_1 = 1$, với $n \ge 2$ xét một cách tô màu các cạnh và đường chéo của $A_1A_2\ldots A_{2n}$ bởi n màu. Khi đó $2n$ đỉnh của đa giác được chia thành n cặp, mỗi đoạn thẳng nối một cặp đỉnh này được tô bởi một màu nào đó.

Giả sử $A_1A_k\ (2 \le k \le 2n)$ là đoạn thẳng được tô màu. Khi đó đoạn thẳng này chia đa giác $A_1A_2\ldots A_{2n}$ thành 2 đa giác lồi $A_2A_3\ldots A_{k-1}$ và $A_kA_{k+1}\ldots A_{2n}$ mà mỗi đoạn thẳng khác, được tô màu và khác với đoạn thẳng A_1A_k, chỉ nối các đỉnh cùng thuộc một trong hai đa giác lồi này. Từ đó suy ra số đỉnh của mỗi đa giác lồi nhỏ này là số chẵn (bằng 2 lần số đoạn thẳng được tô màu trong nó) và từ đó suy ra công thức truy hồi:

$$K_n = K_0K_{n-1} + K_1K_{n-2} + \cdots + K_{n-1}K_0.$$

Tính trực tiếp ta có:

$K_2 = K_0K_1 + K_1K_0 = 2,$

$K_3 = K_0K_2 + K_1K_1 + K_0K_2 = 5,$

$K_4 = K_0K_3 + K_1K_2 + K_2K_1 + K_3K_0 = 14,$

$K_5 = K_0K_4 + K_1K_3 + K_2K_2 + K_3K_1 + K_4K_0 = 42,$

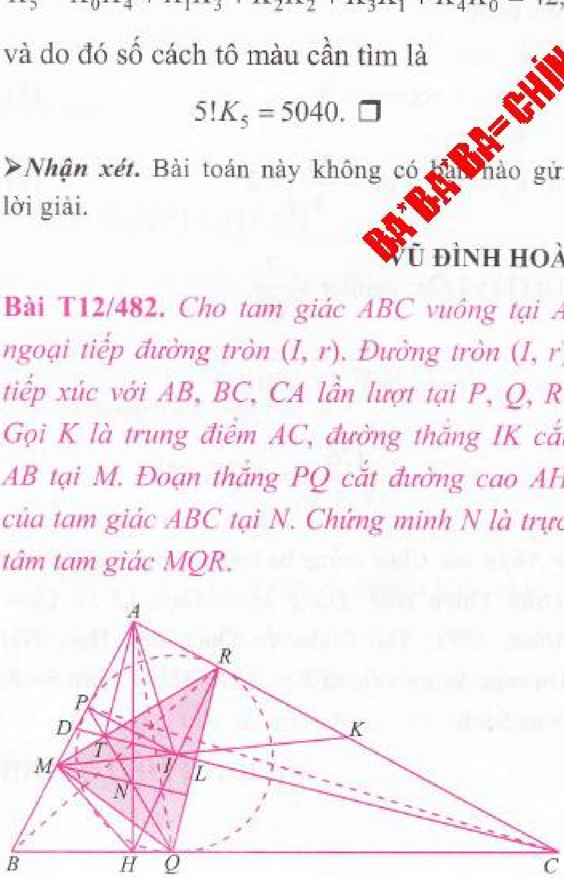
và do đó số cách tô màu cần tìm là

$$5!K_5 = 5040. \ \square$$

➤***Nhận xét.*** Bài toán này không có bạn nào gửi lời giải.

VŨ ĐÌNH HOÀ

Bài T12/482. *Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (I, r). Đường tròn (I, r) tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại P, Q, R. Gọi K là trung điểm AC, đường thẳng IK cắt AB tại M. Đoạn thẳng PQ cắt đường cao AH của tam giác ABC tại N. Chứng minh N là trực tâm tam giác MQR.*



Lời giải. (Theo bạn *Võ Minh Quân*, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt, **Lâm Đồng**).

Gọi *D, T, L* theo thứ tự là giao điểm của *CI* và *AB, MR, RQ*.

Dễ thấy $AR = AP; BP = BQ; CQ = CR$ nên

$$\frac{QB}{QC}.\frac{RC}{RA}.\frac{PA}{PB} = 1.$$

Do đó, theo định lí Ceva, *AQ, BR, CP* đồng quy.

Vậy $T(ALRQ) = T(ACRP) = -1$ (1).

Kết hợp với $LR = LQ$, suy ra $AT // QR$.

Kết hợp với $QR \perp TC$, suy ra $\widehat{ATI} = 90^0$.

Kết hợp với $\widehat{API} = 90^0; \widehat{ARI} = 90^0$, suy ra năm điểm *A, P, T, I, R* cùng thuộc một đường tròn (2).

Vậy $\widehat{RTA} = \widehat{RAP} = 90^0$. (3)

Vì $AC \perp AB; IP \perp AB$ nên $AC // IP$.

Từ đó, chú ý rằng $KA = KC$, suy ra

$T(ACMP) = T(AIMP) = I(ATMP) = I(ATKP) = -1$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $T(ACRP) = T(ACMP)$.

Điều đó có nghĩa là *T, R, M* thẳng hàng (5).

Từ (1) và (5) suy ra $QN \equiv QT \perp MR \equiv TR$ (6).

Từ (2), chú ý rằng $AC // IP; AB \perp AC; AH \perp BC$, suy ra $\widehat{TAM} = \widehat{TAP} = \widehat{TIP} = \widehat{TCA}$

$$= \frac{1}{2}\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\widehat{BAH} = \frac{1}{2}\widehat{MAN}.$$

Do đó $\widehat{TAM} = \widehat{TAN}$.

Từ (1) và (6) suy ra $\widehat{ATM} = \widehat{ATN}$.

Vậy $\Delta ATM = \Delta ATN$, điều đó có nghĩa là $AM = AN; TM = TN$. Do đó $AT \perp MN$.

Kết hợp với $AT // QR$, suy ra $MN \perp QR$ (7).

Từ (6) và (7) suy ra *N* là trực tâm của tam giác *MQR*. $\square$

➤*Nhận xét.* 1) Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Nhiều bạn sử dụng kết quả quen thuộc *MBIR* là hình bình hành. Một số bạn tính toán quá dài.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tương đối tốt: **Bắc Giang:** *Hoàng Mai Phương*, 11T, THPT chuyên Bắc Giang, TP. Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Vũ Đăng Linh*, 11A1, THPT Thuận Thành I, Thuận Thành; **Thái Bình:** *Trần Lê Phương Thảo*, THPT chuyên Thái Bình, TP. Thái Bình; **Thừa Thiên-Huế:** *Huỳnh Hữu Nhật*, *Nguyễn Trung Kiên*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Vũ Duy*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Tuấn Lộc*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/482. *Cho đoạn mạch có R, L mắc nối tiếp, điện trở R = 100Ω, cuộn cảm thuần có độ tự cảm* $L=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (H). *Giả sử điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là* $u=400\cos^2(50\pi t+\pi)$ (V). *Xác định cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch.*

Lời giải. $u=400\cos^2(50\pi t+\pi)$

$$=200+200\cos(100\pi t).$$

Điện áp 2 đầu mạch gồm 2 thành phần: một chiều và xoay chiều.

Cường độ dòng điện do điện áp một chiều gây ra: $I_1=\frac{200}{R}=2(\text{A})$.

Cường độ dòng điện hiệu dụng do điện áp xoay chiều gây ra: $I_2=\frac{\frac{200}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (A).

Ta có: $P=I^2R=I_1^2R+I_2^2R$

Do đó cường độ dòng điện hiệu dụng qua mạch bằng: $I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$(A). ❒

➤*Nhận xét.* Các bạn có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Bá Quốc Minh, Võ Xuân Đức Thắng, Đặng Minh Nhật*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/482. *Hai điểm M, N nằm trên một phương truyền sóng, cách nhau một khoảng bằng một phần ba bước sóng* $\frac{\lambda}{3}$. *Biết sóng truyền đi với biên độ không đổi. Tại thời điểm t nào đó, khi li độ dao động tại M là* u_M = 3cm *thì li độ dao động tại N là* u_N = 2cm. *Xác định biên độ.*

Lời giải. M và N cách nhau $\frac{\lambda}{3}$ sẽ dao động lệch pha nhau $\frac{2\pi}{3}$.

Nếu $u_M=a\cos\omega t=3$ (1)

thì $u_N=a\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)=2$ (2)

Từ (1) và (2): $a\sin\omega t=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow a=\sqrt{(a\cos\omega t)^2+(a\sin\omega t)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{76}{3}}\approx 5{,}03\text{cm}.$$ ❒

➤*Nhận xét.* Chúc mừng ba bạn đã có lời giải đúng: **Thừa Thiên Huế:** *Đặng Minh Nhật, Lê Bá Quốc Minh*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách, Nam Sách.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

ĐÔI ĐIỀU VỀ THƠ ĐƯỜNG LUẬT

Trước khi hiểu thêm về luật thơ Đường ta đọc lại hai bài thơ đã đăng trên TH&TT sau đây:

Bài 1. **TOÁN VÀ HOA**

Em cắm hoa tươi đặt cạnh bàn
Mong rằng toán học bớt khô khan
Em ơi! Trong toán nhiều công thức
Vẫn đẹp như hoa lại chẳng tàn.

(***Văn Như Cương***)

Bài 2. **MỪNG XUÂN ĐINH DẬU**

Tạp chí mừng xuân đón Tết Gà
Vui cùng độc giả ở gần, xa
Khai niên, giải toán – tình yêu trẻ
Điểm tết, bình thơ – sở thích già
Mỗi tập thông tin rèn các giải
Qua nhiều thế hệ luyện tài ba
Mong sao Tạp chí thêm cơ hội
Để toán khai tâm đến mọi nhà.

(***Đào Tam***)

Bài 1 là bài dạng tứ tuyệt (chỉ 4 câu), bài 2 là bài dạng thất ngôn bát cú, gọi tắt là bát cú (8 câu). Đặc điểm chung của hai loại này là mỗi câu có 7 tiếng. Ta đánh số thứ tự từ trái sang phải:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Yếu tố (YT) 1: LUẬT. Luật là quy tắc ta phải tuân theo. Tiếng 2 và 6 cùng thanh điệu: hoặc bằng (B); hoặc trắc (T). Tiếng 4 khác thanh với hai tiếng trên, tức là phải xảy ra một trong hai sơ đồ sau:

2	4	6
B	T	B
T	B	T

Các tiếng 1, 3, 5, 7 bất luật.

Câu đầu (kể từ trên xuống) tiếng thứ 2 mà (B) ta nói bài thơ ở thể bằng; còn nếu mà (T), ta nói bài thơ ở thể trắc.

YT 2: NIÊM. Niêm có nghĩa là dính. Ở bài tứ tuyệt câu 1 niêm với câu 4, ta viết (1, 4). Tương tự (2, 3). Ở bài thất ngôn bát cú thì: (1, 8); (2, 3); (4, 5); (6, 7). Trong mỗi cặp, hai câu phải mang cùng một sơ đồ trong hai sơ đồ nêu ở phần luật (YT1).

YT 3: VẦN. Vần là các tiếng cùng một gốc nguyên âm. Ở bài tứ tuyệt có 3 vần là 3 tiếng cuối 3 câu 1, 2, 4. Ở bài bát cú có 5 vần là 5 tiếng cuối 5 câu 1, 2, 4, 6, 8.

YT 4: ĐỐI. Thanh bằng đối với thanh trắc và ngược lại, ta viết B ↔ T. Tương tự:

Danh từ	DT ↔ DT
Danh từ chung	DTC ↔ DTC
Danh từ riêng	DTR ↔ DTR
Động từ	ĐT ↔ ĐT
Tính từ	TT ↔ TT
Từ láy	TL ↔ TL
Từ số lượng	TSL ↔ TSL

Cụm nhiều từ đối với cụm nhiều từ.

Trong bài bát cú có 2 cặp phải đối nhau trong mỗi cặp, đó là (3, 4); (5, 6). Các cặp còn lại không nhất thiết phải đối.

YT 5: Bố cục. Trong bài bát cú ta chia thành 4 cặp: Đề, Thực, Luận, Kết. Mỗi cặp được gọi là một liên, gồm: liên (1, 2), liên (3, 4), liên (5, 6), liên (7, 8). Liên (1, 2) là cặp câu đề, câu 1 là phá đề (mở đề) tức là mở ý bài thơ, câu 2 là thừa đề, nói thêm và chuyển ý vào cặp (3, 4). Liên (3, 4) là cặp câu thực (hoặc trạng): Tả phong cảnh, con người, sự vật,... liên quan đến đề. Liên (5, 6) là cặp luận: Bàn luận rộng thêm dựa trên cơ sở cặp thực. Liên (7, 8) là cặp kết: Kết thúc bài thơ, tác giả nêu tâm tư, nguyện vọng, cảm tưởng, đề xuất, triển vọng,... Vậy bố cục của bát cú là 2, 2, 2, 2. Bài tứ tuyệt cũng có bố cục 4 phần: Đề, thực, luận, kết, nhưng mỗi phần chỉ có 1 câu. ☞

PROBLEM...

(*Tiếp theo trang 25*)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/486. Find all natural numbers n satisfying $4^n + 15^{2n+1} + 19^{2n}$ is divisible by $18^{17} - 1$.

Problem T11/486. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(0)$ is rational and

$$f\left(x + f^2(y)\right) = f^2(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Problem T12/486. Given a triangle ABC. Prove that

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Translated by NGUYEN PHU HOANG LAN

(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

Sơ đồ tổng hợp

Niêm và đối			Tiếng 1	2	3	4	5	6	7	
Niêm	Niêm	Dòng 1		T		B		T	Vần	Đề
		Dòng 2		B		T		B	Vần	
	Niêm / Đối	Dòng 3		B		T		B		Thực
	Đối	Dòng 4		T		B		T	Vần	
	Niêm / Đối	Dòng 5		T		B		T		Luận
	Đối	Dòng 6		B		T		B	Vần	
	Niêm	Dòng 7		B		T		B		Kết
		Dòng 8		T		B		T	Vần	

CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG

TH1: Câu đầu không vần với câu 2, 4, 6, 8.

TH2: Sai niêm, sai luật vì để cho mềm mại.

TH3: Những câu thơ ở khoảng đầu hoặc cuối, hoặc cả hai đầu không đủ 7 tiếng làm cho khoảng giữa bài thơ phình to như đầu gối chân con hạc, ta gọi bài thơ dạng "*hạc tất*".

TH4: Những câu thơ ở khoảng giữa không đủ 7 tiếng làm cho bài thơ "thắt lưng ong", ta gọi bài thơ dạng "*phong yêu*",...

XƯỚNG – HỌA

Trong thơ Đường luật có xướng – họa rất lí thú. Một người làm bài thơ gọi là bài xướng rồi mời người khác họa.

Nguyên tắc chơi là giữ lại đủ các vần của bài xướng. Từ liền kề trước vần không được dùng lại, phải thay từ khác kèm theo từ vần cho có (hợp) nghĩa.

Họa theo thứ tự vần của bài xướng ta gọi là họa nguyên vần bằng. Thứ tự ngược lại ta gọi là họa đảo vần. Họa xếp vần khác hai trường hợp trên ta gọi là họa loạn vần.

Bài họa phải gần nội dung bài xướng, xa quá ta gọi là sáng tác mượn vần.

• Xét hai bài đã nêu trên. Cả hai bài, xét theo 5 yếu tố của luật Đường là không sai phạm, hoàn chỉnh. Riêng bài toán và hoa, các bạn nên ghi vào đầu sách toán của các bạn mà nhớ, như một điều "chỉ dẫn".

Sau đây là hai bài họa cho hai bài thơ trên:

Bài 1. TOÁN VÀ HOA

Toán học cứng khô không phải bàn
Hoa tươi em tặng toán không khan
Toán nhiều công thức, nhiều hoa lắm
Đẹp mãi cùng anh, chẳng thể tàn.

Bài 2. MỪNG XUÂN ĐINH DẬU

Mừng xuân Tạp chí, Tết con gà
Độc giả cùng vui, gần với xa
Tết đến báo ta hay gấp bốn
Xuân về bạn đọc mến hơn ba
Say sưa giải toán xuân – khi trẻ
Sôi nổi bình thơ tết – lúc già
Tạp chí góp xây nhiều thế hệ
Mong sao Toán học tới muôn nhà.

NGUYỄN HỮU DỰ

(*Xóm 3 Quỳnh Liên, TX. Hoàng Mai, Nghệ An*)

DIỄN ĐÀN

DẠY HỌC TOÁN

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƯỜNG TRÒN CHÍN ĐIỂM TRỰC TÂM ĐỂ SÁNG TẠO MỘT SỐ BÀI TOÁN TOẠ ĐỘ PHẲNG

VÕ XUÂN LAM

(GV THPT Lê Viết Thuật, TP. Vinh, Nghệ An)

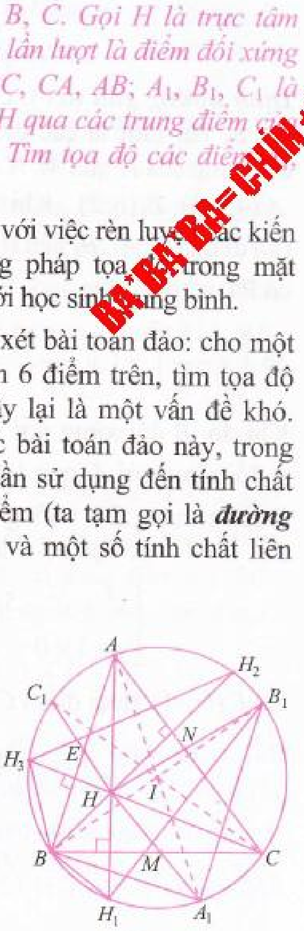
Bài toán tọa độ trong mặt phẳng là một nội dung quan trọng dùng để phân loại đối tượng học sinh khá, giỏi trong các kỳ thi. Các bài toán trong tọa độ phẳng là tương đối khó và đa dạng. Để giải quyết được chúng, học sinh cần phải nắm được một số tính chất hình học phẳng và kết hợp với kiến thức về tọa độ. Vì vậy trong bài viết này chúng tôi xin trao đổi vấn đề thiết lập bài toán đảo liên quan đến một số tính chất của tam giác nội tiếp đường tròn và trực tâm tam giác để sáng tạo một số bài toán tọa độ phẳng.

Bài toán. *Trong mặt phẳng tọa độ cho ΔABC có tọa độ các đỉnh A, B, C. Gọi H là trực tâm ΔABC. Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là điểm đối xứng với H qua các cạnh BC, CA, AB; A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với H qua các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1, C_1, H_1, H_2, H_3.*

Đây là bài toán phù hợp với việc rèn luyện các kiến thức cơ bản về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, nó vừa sức đối với học sinh trung bình.

Nếu đặt vấn ngược lại, xét bài toán đảo: cho một số yếu tố liên quan đến 6 điểm trên, tìm tọa độ các đỉnh ΔABC thì đây lại là một vấn đề khó. Để giải quyết được các bài toán đảo này, trong một số trường hợp ta cần sử dụng đến tính chất đường tròn đi qua 9 điểm (ta tạm gọi là ***đường tròn 9 điểm trực tâm***) và một số tính chất liên quan, cụ thể:

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I, H là trực tâm ΔABC. Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là điểm đối xứng với H qua các cạnh BC, CA, AB; A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với H qua các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Khi đó:



Hình 1

1) 9 điểm A, B, C, A_1, B_1, C_1, H_1, H_2, H_3 cùng thuộc đường tròn (I);

2) A, A_1, I thẳng hàng;

3) $BA_1 \perp A_1B_1$; $BH_1 \perp H_1B_1$;

4) BA là tia phân giác của góc $\widehat{H_2BH_3}$;

5) $IA \perp H_2H_3$;

6) H_2H_3 song song với tiếp tuyến của (C) tại A.

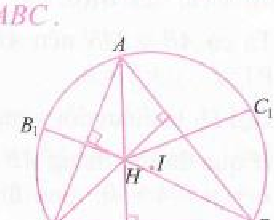
Việc chứng minh các tính chất trên không khó, ta vận dụng tính chất trực tâm và góc nội tiếp để đưa ra kết luận. Sau đây là một số bài toán đảo của bài toán trên.

1. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC biết một số điểm trong 9 điểm trên và một số yếu tố khác.

Bài toán đảo 1.1. *Cho ΔABC có trực tâm H. Gọi H_1 là điểm đối xứng của H qua đường thẳng BC; gọi B_1, C_1 là các điểm đối xứng của H qua các trung điểm của các cạnh AB, AC. Biết $H_1(1; -1)$, $B_1(5; 3)$, $C_1(-1; 3)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

Hướng dẫn giải (h.2).

Áp dụng tính chất trên ta có đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC đi qua các điểm H_1, B_1, C_1. Giả sử (C) có PT: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.



Hình 2

Do (C) đi qua H_1, B_1, C_1 nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 1+1+a-b+c=0 \\ 25+9+5a+3b+c=0 \\ 1+9-a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Vậy (C) có PT: $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$.

Tương tự trên, ta có thể đưa ra một số bài toán sau:

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC khi biết:

+ Tọa độ đỉnh A và các điểm H_1, H_2.

+ Tọa độ đỉnh A và các điểm B_1, C_1.

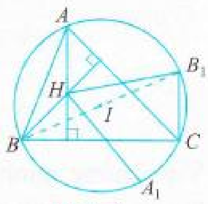
+ Tọa độ đỉnh A và các điểm B_1, H_3.

+ Tọa độ đỉnh A, B và điểm C_1,...

Bài toán đảo 1.2. *Cho ΔABC có trực tâm H. Gọi A_1, B_1 thứ tự là các điểm đối xứng của H qua các trung điểm của BC, AC, biết $A_1(0; -3)$, $B_1(2; 2)$, đường thẳng BC có phương trình: $y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

Hướng dẫn giải (h.3). Ta có $B_1C \perp BC \Rightarrow B_1C$ có phương trình: $x - 2 = 0$

$\Rightarrow C(2; -1)$. Khi đó đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC sẽ đi qua A_1, B_1 và C.



Hình 3

Giải tương tự bài toán trên ta có PT của (C) là:

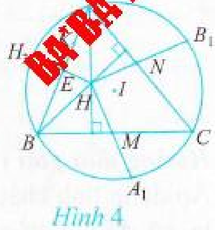
$$x^2 + y^2 + 3x - y - 12 = 0.$$

Bài toán đảo 1.3. *Cho ΔABC có trực tâm $H(2; 2)$; các trung điểm của BC, AC lần lượt là $M(2; 0)$; $N(4; 2)$; đường thẳng AB đi qua điểm $K(2; 3)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

Hướng dẫn giải (h.4). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua M, N thì $A_1(2; -2)$, $B_1(6; 2)$.

Ta có AB // MN nên AB có PT: $x - y + 1 = 0$.

Gọi H_3 là điểm đối xứng với H qua đường thẳng AB thì HH_3 có phương trình: $x + y - 4 = 0$, giao điểm E của HH_3 và AB là trung điểm của HH_3, $E\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right) \Rightarrow H_3(1; 3)$.



Hình 4

Khi đó đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC sẽ đi qua A_1, B_1, H_3.

Giải tương tự bài toán trên ta có PT của (C) là:

$$x^2 + y^2 - \frac{19}{3}x - \frac{5}{3}y + \frac{4}{3} = 0.$$

2. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác khi biết một số điểm đối xứng của trực tâm và một số yếu tố khác

Bài toán đảo 2.1. *Cho ΔABC có đỉnh $A(2; 4)$. Gọi H là trực tâm ΔABC, B_1, C_1 thứ tự là các điểm đối xứng của H qua các trung điểm các cạnh AC, AB. Biết tọa độ $B_1(4; 0)$; $C_1(0; 4)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.*

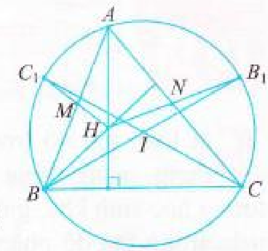
Định hướng giải (h.5).

Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC đi qua A, B_1, C_1 nên có PT:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$

$\Rightarrow$ tâm của (C) là $I(1; 1)$.

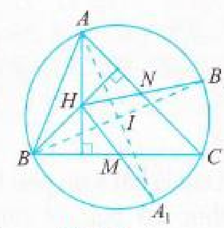


Hình 5

Vì B đối xứng với B_1 qua I nên $B(-2;2)$, C đối xứng với C_1 qua I nên $C(2;-2)$.

Bài toán đảo 2.2. *Cho ΔABC có trực tâm $H(1; 1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA. Cho $M\left(\dfrac{5}{2};-1\right)$, $N\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC đi qua $K(-1;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.*

Định hướng giải (h.6). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua M, N thì $A_1(4;-3)$; $B_1(6;2)$. Khi đó (C) đi qua K, A_1, B_1 nên (C) có PT: $x^2 + y^2 - 5x - y - 8 = 0$



Hình 6

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{58}{4} \Rightarrow$ tâm $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Khi đó: B đối xứng với B_1 qua I nên $B(-1;-1)$, A đối xứng với A_1 qua I nên $A(1; 4)$.

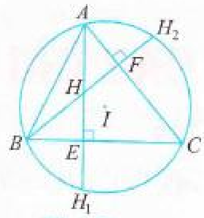
Đường thẳng BC vuông góc với AH nên BC có PT: $y + 1 = 0$. Tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - y - 8 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(6;-1)$ (loại điểm $C'(-1; -1)$ trùng với B).

Bài toán đảo 2.3. *Cho ΔABC có trực tâm $H(2;-1)$ có đường tròn ngoại tiếp (C). Gọi H_1, H_2 là các giao điểm của các đường thẳng AH, BH với (C). Biết $H_1(2;-5)$; $H_2\left(\dfrac{118}{29};-\dfrac{5}{29}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.*

Định hướng giải (h.7). Ta có BC là đường trung trực của đoạn $HH_1 \Rightarrow BC$ có PT: $y + 3 = 0$; AC là đường trung trực của đoạn $HH_2 \Rightarrow AC$ có PT: $5x + 2y - 14 = 0$.



Hình 7

Do C là giao điểm của AC, BC nên $C(4;-3)$.

Đường tròn (C) đi qua C, H_1, H_2 nên có PT:

$$x^2 + y^2 - x + 3y - 12 = 0.$$

Do đó tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 3y - 12 = 0 \\ 5x + 2y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;\ 2).$$

Tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 3y - 12 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3;-3).$$

3. Một số bài toán đảo sử dụng tính chất phân giác và tiếp tuyến

Bài toán đảo 3.1. *Cho ΔABC nhọn có đỉnh $A(1;\ 4)$; $B(1;\ -3)$ và nội tiếp đường tròn (C). Gọi H là trực tâm ΔABC; H_2, H_3 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các đường thẳng AC; AB; biết H_2H_3 có phương trình: $3x-7y-4=0$ và tâm I của (C) thuộc đường thẳng d: $x+y-3=0$.*

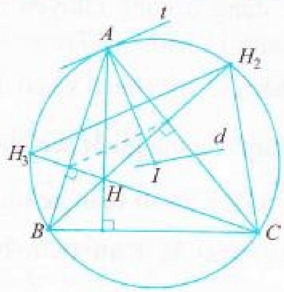
1) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại A.

2) Tìm tọa độ các điểm H_2, H_3.

3) Viết phương trình đường phân giác trong góc $\widehat{H_2CH_3}$.

Định hướng giải (h.8)

1) Do tiếp tuyến At // H_2H_3 nên At có PT: $3x-7y+25=0$.



Hình 8

2) Đường thẳng $AI \perp At$ nên AI có PT: $7x+3y-19=0$.

Khi đó tọa độ tâm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 7x+3y-19=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Khi đó đường tròn (C) có PT:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{58}{4}.$$

Tọa độ H_2, H_3 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{58}{4} \\ 3x-7y-4=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow H_2(6;\ 2)$; $H_3(-1;-1)$ (do ΔABC nhọn nên B và H_2 nằm khác phía đối với AI).

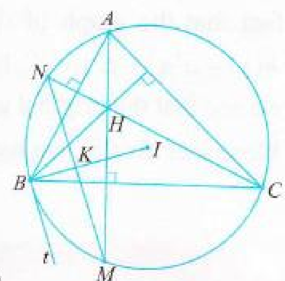
3) Ta có đường phân giác trong $\widehat{H_2CH_3}$ chính là đường thẳng AC; mà $AC \perp BH_2$ nên AC có PT $x+y-5=0$.

Bài toán đảo 3.2. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C). Gọi H là trực tâm ΔABC; N, M lần lượt là các điểm đối xứng của H qua đường thẳng AB, BC; biết M thuộc đường thẳng $d: 5x+5y-16=0$, $N(1;-1)$. Cho tiếp tuyến Bt của (C) tại B có phương trình: $3x+y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C).*

Định hướng giải (h.9)

+ Chứng minh M, N thuộc (C);

+ Chứng minh MN // $Bt \Rightarrow MN$ có PT: $3x+y-2=0$.



Hình 9

Do M là giao điểm của d và $MN \Rightarrow M\left(-\frac{3}{5};\frac{19}{5}\right)$;

BI là đường trung trực của $MN \Rightarrow BI$ đi qua K là trung điểm MN; $K\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right) \Rightarrow BI$: $x-3y+4=0$.

Do B là giao điểm của BI và $Bt \Rightarrow B(-1;\ 1)$.

Do I thuộc $BI \Rightarrow I(3a-4;a)$, do $IB = IN$ $\Rightarrow I(2;\ 2)$. Vậy PT (C): $(x-2)^2+(y-2)^2=10$.

Bài toán đảo 3.3. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C). Gọi H là trực tâm ΔABC; H_2, H_3 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua đường thẳng AC; AB. Phân giác trong góc $\widehat{H_2CH_3}$ là đường thẳng có phương trình: $x+y+2=0$. Biết $H_2(1;\ 3)$; tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình: $x-3y+10=0$. Tìm tọa độ các đỉnh ΔABC.*

(Xem tiếp trang 46)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 26

Problem. *Show that the graphs of cubic functions $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ always have a point of symmetry.*

Solution: First, we see that the function $g(x)=ax^3+cx$ is an odd function and therefore its graph (C_1) has the origin as the point of symmetry. The graph (C_2) of $h(x)=ax^3+cx+d$ is received from (C_1) by moving up or down depending on the sign of d. Therefore (C_2) also has a point of symmetry.

Now we will make a change of variable to make the part bx^2 disappear. Notice that, changing variable means translating the graphs left or right and hence the fact that having a point of symmetry or not is unchanged. Now from the fact that the graph of the function of the form $h(x)=a'x^3+c'x+d'$ has a point of symmetry, we see that the original graph does too.

More specifically, we have

$$a(x+r)^3+b(x+a)^2+...=ax^3+3arx^2+...+bx^2+...$$

Therefore if we choose $r=-\dfrac{b}{3a}$ we can reduce $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ to the form

$$h(x)=a'x^3+c'x+d'.$$

Thus we can conclude that the graph of $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ has a point of symmetry.

Remark: By this method we can also find the point of symmetry of the graph (how?).

TỪ VỰNG

cubic	: bậc 3
graph	: đồ thị
point of symmetry	: tâm đối xứng

NGUYEN PHU HOANG LAN
(*College of Science - Vietnam National University, Hanoi*)

BÀI DỊCH SỐ 24

Bài toán. *Chứng minh hoặc bác bỏ mệnh đề: Hàm số f(x) = $\sin x^2$ là hàm tuần hoàn."*

Chú ý. Với bài toán này, chúng ta sẽ sử dụng kết quả sau về hàm tuần hoàn đã được đăng ở cùng chuyên mục trong số báo trước (TH&TT số 485, tháng 11 năm 2017).

Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số tuần hoàn và có đạo hàm, khi đó

(i) Hàm f bị chặn, nghĩa là tồn tại M sao cho $|f(x)|\leq M, \forall x$;

(ii) Hàm f' cũng là một hàm số tuần hoàn.

Lời giải. Chúng ta sẽ chỉ ra $f(x)=\sin x^2$ không phải là hàm tuần hoàn. Thật vậy, giả sử $f(x)=\sin x^2$ là hàm tuần hoàn. Từ (ii) ta thấy đạo hàm của nó $f'(x)=2x.\cos x^2$ là hàm tuần hoàn. Như vậy, theo (i) $f'(x)=2x.\cos x^2$ bị chặn. Nhưng điều này không đúng. Ta có thể thấy rằng bằng cách chọn dãy $x_n=\sqrt{2n\pi}$, thì dãy số tương ứng $f'(x_n)=2\sqrt{2n\pi}.\cos(2n\pi)=2\sqrt{2n\pi}$ rõ ràng không bị chặn. Do đó hàm $f(x)=\sin x^2$ không phải là hàm tuần hoàn.

Nhận xét. Hoan nghênh bạn *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách, Nam Sách, **Hải Dương** đã có bài dịch tốt, gửi bài đến Toà soạn sớm.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

✪ BÀI TOÁN 7 (TH&TT số 484, tháng 10 năm 2017). *Cho tam giác ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) thỏa mãn $\cos B = \frac{R-r}{R}$ (trong đó R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác). Tìm hệ thức liên hệ giữa các cạnh a, b, c.*

Cách giải 1. Theo định lý côsin và sin, ta có

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \sin R = \frac{b}{2\sin B}.$$

Ta có diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}ac.\sin B$,

$S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{ac\sin B}{a+b+c}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Do đó $\frac{r}{R} = \frac{2ac\sin^2 B}{b(a+b+c)} = \frac{2ac(1-\cos^2 B)}{b(a+b+c)}$

Ta có $\cos B = \frac{R-r}{R} = 1 - \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = 1 - \cos B$

$\Leftrightarrow \frac{2ac(1-\cos^2 B)}{b(a+b+c)} = 1 - \cos B \Leftrightarrow \frac{2ac(1+\cos B)}{b(a+b+c)} = 1$

(do $1 - \cos B \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{2ac\left(1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{b(a+b+c)} = 1$$

$\Leftrightarrow (a+c)^2 - b^2 = b(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (a+c-b)(a+b+c) = b(a+b+c) \Leftrightarrow a+c = 2b.$

Cách giải 2. Ta có diện tích tam giác ABC:

$S = \frac{abc}{4R} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

với $p = \frac{a+b+c}{2}$. Theo đề bài

$\cos B = \frac{R-r}{R} = 1 - \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = 1 - \cos B$

$\Leftrightarrow \frac{4S^2}{p.abc} = 1 - \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \Leftrightarrow \frac{8S^2}{p.b} = b^2 - (a-c)^2$

$\Leftrightarrow \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{p.b} = (b-a+c)(b+a-c)$

$\Leftrightarrow \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{b} = 4(p-a)(p-c)$

$\Leftrightarrow 2(p-b) = b \Leftrightarrow a+c = 2b$.

Cách giải 3. Theo định lý côsin và sin, ta có

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \sin R = \frac{b}{2\sin B}.$$

Ta có diện tích tam giác ABC: $S = \frac{1}{2}ac.\sin B$,

$S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Khi đó $\cos B = \frac{R-r}{R} = 1 - \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = 1 - \cos B$

$\Leftrightarrow \frac{r}{R}(1+\cos B) = 1 - \cos^2 B$

$\Leftrightarrow r\left(1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) = R.\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \frac{S}{p}.\frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{b}{2\sin B}.\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \frac{S}{a+b+c}\left[(a+c)^2 - b^2\right] = \frac{abc.\sin B}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{S}{a+b+c}(a+c-b)(a+c+b) = b.S$

$\Leftrightarrow a+c-b = b \Leftrightarrow a+c = 2b.$

Cách giải 4. Theo định lý côsin và sin, ta có

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, R.\sin B = \frac{b}{2}.$$

Ta có diện tích tam giác ABC:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$

với $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Khi đó $\cos B = \frac{R-r}{R} \Leftrightarrow R.\cos B + r = R$

$\Leftrightarrow R.\sin B.\cos B + r.\sin B = R.\sin B$ (do $\sin B > 0$)

$\Leftrightarrow \frac{b}{2}\cos B + r\sin B = \frac{b}{2} \Leftrightarrow r\sin B = \frac{b}{2}(1-\cos B)$

$\Leftrightarrow r\sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{b}{2}(1-\cos B)$

$$\Leftrightarrow r\sqrt{1+\cos B}=\frac{b}{2}\sqrt{1-\cos B}$$

$$\Leftrightarrow r^2(1+\cos B)=\left(\frac{b}{2}\right)^2(1-\cos B)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{S}{p}\right)^2\left(1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=\frac{b^2}{4}\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S^2}{p^2}\left[(a+c)^2-b^2\right]=\frac{b^2}{4}\left[b^2-(a-c)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{S^2}{p^2}(a+c-b)(a+c+b)=\frac{b^2}{4}(b-a+c)(b+a-c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}2(p-b)2p=\frac{b^2}{4}2(p-a)2(p-c)$$

$$\Leftrightarrow 4(p-b)^2=b^2\Leftrightarrow 2(p-b)=b\Leftrightarrow a+c=2b.$$

Cách giải 5. Ta có: $\frac{b}{\sin B}=2R,\ r=\frac{S}{p}$, $\frac{S}{\sin B}=\frac{1}{2}ac$ và $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$.

Do $R>r$ nên $\cos B=\frac{R-r}{R}>0$. Khi đó: $\cos B=\frac{R-r}{R}$

$$\Leftrightarrow R\cos B=R-r\Leftrightarrow R^2\cos^2 B=R^2-2Rr+r^2$$

$$\Leftrightarrow R^2(1-\cos^2 B)-2Rr+r^2=0$$

$$\Leftrightarrow R^2.\sin^2 B-2Rr+r^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b}{\sin B}r+r^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b}{2}-\frac{r}{\sin B}\right)^2=\frac{r^2}{\sin^2 B}-r^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b}{2}-\frac{r}{\sin B}\right)^2=\frac{\cos^2 B}{\sin^2 B}r^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{b}{2}-\frac{r}{\sin B}=\frac{\cos B}{\sin B}r\\ \frac{b}{2}-\frac{r}{\sin B}=-\frac{\cos B}{\sin B}r\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{b}{2}=\frac{1+\cos B}{\sin B}r\\ \frac{b}{2}=\frac{1-\cos B}{\sin B}r\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{b}{2}=\frac{1+\cos B}{\sin B}.\frac{S}{p}\\ \frac{b}{2}=\frac{1-\cos B}{\sin B}.\frac{S}{p}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{b}{2}=\frac{1+\cos B}{2p}.ac\\ \frac{b}{2}=\frac{1-\cos B}{2p}.ac\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{b}{2}=\dfrac{1+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{2p}.ac\\ \frac{b}{2}=\dfrac{1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{2p}.ac\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\frac{(c+a)^2-b^2}{a+b+c}\\ b=\frac{b^2-(c-a)^2}{a+b+c}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=c+a-b\\ b(a+b+c)=b^2-(c-a)^2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+c=2b\\ b(a+c)+(c-a)^2=0\ \text{(vô lý)}\end{array}\right..$$

Vậy ta thu được kết quả $a+c=2b$.

Cách giải 6. Thực hiện tương tự cách 5 ta được $R^2.\sin^2 B-2Rr+r^2=0$, đến đây ta có thể thực hiện như sau: $R^2.\sin^2 B-2Rr+r^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{R}{r}\right)^2\sin^2 B-2\frac{R}{r}+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{R}{r}=\frac{1+\cos B}{\sin^2 B}\\ \frac{R}{r}=\frac{1-\cos B}{\sin^2 B}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\frac{R}{r}\sin^2 B=1+\cos B & (1)\\ \frac{R}{r}\sin^2 B=1-\cos B & (2)\end{array}\right..$$

Từ (1) ta biến đổi như cách giải 3 ta có $a+c=2b$.

Ta có $(2)\Leftrightarrow R\sin^2 B=r(1-\cos B)$

$$\Leftrightarrow\frac{b}{2\sin B}\sin^2 B=\frac{S}{p}\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{abc.\sin B}{2}=\frac{S}{2p}\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b.S=\frac{S}{a+b+c}\left[b^2-(a-c)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow b(a+c)+(c-a)^2=0\ \text{(vô lý)}.$$

Vậy ta thu được kết quả $a+c=2b$.

Cách giải 7. Thực hiện tương tự cách 5 ta được $R^2.\sin^2 B-2Rr+r^2=0$, đến đây ta có thể giải tiếp như sau.

Ta có $S=\frac{abc}{4R},\frac{b}{\sin B}=2R,r=\frac{S}{p}$,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Khi đó

$R^2.\sin^2 B-2Rr+r^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\frac{abc}{4S}.\frac{S}{p}+\left(\frac{S}{p}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4}-\frac{abc}{2p}+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4}-\frac{abc}{a+b+c}+\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{a+b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow b^2(a+b+c)-4abc+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0\ (*)$$

$$\Leftrightarrow b\left[b(a+b+c)-4ac\right]+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left[b(a+c)+(a-c)^2+b^2-(a+c)^2\right]+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left[b(a+c)+(a-c)^2\right]+b(b-a-c)(b+a+c)+\left[b^2-(c-a)^2\right](c+a-b)=0$$

$$\Leftrightarrow b\left[b(a+c)+(a-c)^2\right]-(a+c-b)\left\{b(b+a+c)-\left[b^2-(c-a)^2\right]\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow b\left[b(a+c)+(a-c)^2\right]-(a+c-b)\left[b(a+c)+(c-a)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow b-(a+c-b)=0\ (\text{do } b(a+c)+(a-c)^2>0)$$

$$\Leftrightarrow a+c=2b.$$

Lời bình. Việc phân tích đa thức bậc ba biến (*) thành nhân tử là việc rất khó khăn nên cách giải 7 khó có thể đến đích.

Cách giải 8. Ta có $r=4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$,

$\sin A+\sin C-\sin B=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}$.

Do đó $\cos B=\frac{R-r}{R}\Leftrightarrow\frac{r}{R}=1-\cos B$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}=2\sin^2\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin C-\sin B=\sin B\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{b}{2R}=\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\Leftrightarrow 2b=a+c.$$

Cách giải 9. Ta có

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1,$$

$$\cos A+\cos C-\cos B=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}-1$$

$$\cos A+\cos C+\cos B=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

và $r=4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$.

Trước tiên ta chứng minh

$\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\cos B=\frac{R-r}{R}$. Thật vậy

$$\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{B}{2}\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\sin\frac{B}{2}\frac{1}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos B}{\cos A+\cos C-\cos B+1}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\cos B)=\cos A+\cos C-\cos B+1$$

$$\Leftrightarrow 2-\cos B=\cos A+\cos C+\cos B$$

$$\Leftrightarrow 2-\cos B=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos B=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos B=\frac{r}{R}\Leftrightarrow\cos B=\frac{R-r}{R}.$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow c+a=2b.$$

Ta có: $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}.\sin^2\frac{C}{2}=\sin^2\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos A)(1-\cos C)=\frac{1}{2}(1-\cos B)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[a^2-(b-c)^2\right].\left[c^2-(a-b)^2\right]$$
$$=b^2\left[b^2-(c-a)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$$
$$=b^2(b-c+a)(b+c-a)$$

$\Leftrightarrow (a+c-b)^2=b^2 \Leftrightarrow a+c-b=b$ (vì $a+c-b>0$)

$\Leftrightarrow a+c=2b.$

Ta có thể chứng minh $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow c+a=2b$ bằng cách khác như sau:

Ta có $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right).\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right).\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+C)=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{b}{2R}=\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\Leftrightarrow 2b=a+c.$$

Nhận xét:

1) Ta có $\cos B=\frac{R-r}{R}\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C\Leftrightarrow 2b=a+c.$$

Đây là điều kiện để độ dài 3 cạnh theo thứ tự a, b, c của một tam giác lập thành một cấp số cộng.

2) Cách giải 9 không là cách giải tốt cho bài toán này, nhưng đã thực hiện được một cách chứng minh trực tiếp kết quả: $\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \cos B=\frac{R-r}{R}$.

3) Nếu ta chứng minh được

$$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$$

thì từ kết quả này ta chứng minh được

$$S=p^2\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}.$$

Mà $\cos B=\frac{R-r}{R}\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$, khi đó ta có

$$S=\frac{1}{3}p^2\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow \frac{S}{p}=\frac{1}{3}p\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow r=\frac{1}{3}p\tan\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow (p-b)\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{3}p\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow 3(p-b)=p\Leftrightarrow a+c=2b.$$

NGUYỄN ANH VŨ

(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Nhận xét. Các cách giải của tác giả *Nguyễn Anh Vũ* đều xoay quanh định lý côsin, định lý sin và công thức diện tích tam giác. Trong bài tác giả đã đưa ra được kết quả: $\cos B=\frac{R-r}{R}$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C$$

$\Leftrightarrow 2b=a+c$ (điều kiện cần và đủ để độ dài ba cạnh a, b, c theo thứ tự đó của ΔABC lập thành một cấp số cộng). Ngoài bạn *Vũ*, bạn *Bùi Thị Thùy Trang*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** cũng đưa ra một cách giải tương tự như cách 2 của bạn *Vũ*. Xin hoan nghênh cả hai bạn.

LÊ MAI *(Hà Nội)*

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 9 sau đây về Toà soạn TH&TT trước ngày 30.1.2018.

BÀI TOÁN 9. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geq 3+\sqrt{3}.$$

TRƯƠNG QUANG AN

(Xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Tạp chí TH&TT số 486, tháng 10/2017 giới thiệu với các bạn hai bài toán nằm trong kì thi Junior Balkan MO cùng với các lời giải của chúng.

Bài 11 *(Kỳ thi Junior Balkan MO, 1998, lần 2, nước đề xuất: Albania). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x; y) sao cho*

$$x^y = y^{x-y}. \qquad (1)$$

Lời giải. Ta thấy ngay rằng $x = y = 1$ là một nghiệm của bài toán. Nếu $x > 1$ thì $x > y$, vì nếu trái lại, $x \le y$ thì ta có: $y^{x-y} \le 1 < x^y$: mâu thuẫn. Ta có thể giả sử $x > y \ge 2$. Viết lại (1) dưới dạng

$$\left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{x-2y} \qquad (2)$$

thì $x - 2y > 0$, và do đó $\frac{x}{y}$ là số nguyên lớn hơn 2. PT (2) tương đương với

$$\frac{x}{y} = y^{\frac{x}{y}-2} \qquad (3)$$

Từ $y^{\frac{x}{y}-2} \ge 2^{\frac{x}{y}-2}$ suy ra $\frac{x}{y} \ge 2^{\frac{x}{y}-2}$.

Bằng quy nạp, ta dễ chứng minh $2^{n-2} > n$ với mọi $n \ge 5$. Do đó $\frac{x}{y} \le 4$, vậy $\frac{x}{y} = 3$ hoặc $\frac{x}{y} = 4$.

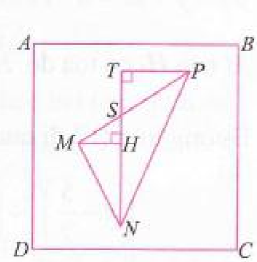
• Với $\frac{x}{y} = 3$, từ (3) suy ra $x = 9, y = 3$.

• Với $\frac{x}{y} = 4$, từ (3) suy ra $x = 8, y = 2$.

Vậy các nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1), (9; 3), (8; 2)$.

Bài 12 *(Kỳ thi Junior Balkan MO, 1997, lần 1, nước đề xuất: Bulgari). Cho 9 điểm nằm trong một hình vuông đơn vị. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 điểm trong 9 điểm đó là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn* $\frac{1}{8}$.

Lời giải. Chia hình vuông đơn vị thành 4 hình vuông, mỗi hình có diện tích $\frac{1}{4}$. Theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có ba điểm trong 9 điểm đã cho nằm trong hoặc ở trên cạnh một hình vuông nhỏ. Gọi ba điểm này là M, N, P và nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông $ABCD$ có diện tích $\frac{1}{4}$. Xét các đường thẳng vẽ từ M, N, P song song với AD. Sẽ có một đường nằm giữa hai đường kia, không mất tính tổng quát, giả sử $NS // AD$, $(H, T \in NS)$.



Kẻ MH và PT vuông góc với NS. Ta có:

$$S_{MNP} = S_{MNS} + S_{NSP} = \frac{1}{2}(MH.NS + PT.NS)$$

$$= \frac{1}{2}NS(MH + PT) \le \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $NS(MH + PT) = AB.AD$

$\Leftrightarrow NS = AD,\ MH + PT = AB$, nghĩa là khi một cạnh tam giác MNP bằng một cạnh hình vuông và đỉnh thứ ba nằm trên cạnh đối của hình vuông.

Chú ý. Nếu trong các đường thẳng vẽ từ M, N, P và song song với AD có hai đường trùng nhau thì ta thấy ngay $S_{MNP} \le \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{8}$.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

Mời các bạn tìm thêm những lời giải khác cho hai bài toán trên.

Sau đây là hai bài tập đề nghị. Các bạn hãy thử sức giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.1.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 13. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$, ở đó kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Bài 14. Xét hoán vị σ tùy ý của các số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Với mỗi bộ ba trong 8 bộ ba, mỗi bộ ba gồm ba số hạng liên tiếp trong hoán vị σ, xét tổng của ba số này. Gọi $M(\sigma)$ là tổng lớn nhất trong 8 tổng này. (Ví dụ: với $\sigma = (4, 6, 2, 9, 0, 1, 8, 5, 7, 3)$, ta có có 8 tổng là: 12, 17, 11, 10, 9, 14, 20, 15 và $M(\sigma) = 20$).

a) Tìm một hoán vị σ_1 sao cho $M(\sigma_1) = 13$;

b) Tồn tại hay không một hoán vị σ_2 sao cho $M(\sigma_2) = 12$?

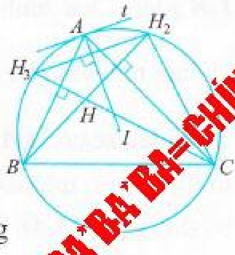
TRẦN HỮU NAM (*Hà Nội*)

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT...

(*Tiếp theo trang 39*)

Định hướng giải (h.10)

Phân giác trong $\widehat{H_2CH_3}$ chính là cạnh $AC \Rightarrow A$ là giao điểm của AC và tiếp tuyến $At \Rightarrow A(-4;2)$. Gọi I là tâm của (C), đường thẳng $AI \perp At$ nên AI có PT:



Hình 10

$3x + y + 10 = 0$. Ta có H_3 đối xứng với H_2 qua AI nên H_3 có tọa độ $H_3\left(-\frac{43}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Đường tròn (C) đi qua A, H_2, H_3 nên có PT:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{845}{2}.$$

Tọa độ C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{845}{2} \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow C(22;-24).$$

Đường thẳng $BH_2 \perp AC \Rightarrow BH_2$ có PT: $x - y + 2 = 0$, do đó B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{845}{2} \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow B(-18;-16).$$

Trên đây là một số ý tưởng sáng tạo thêm một số bài toán dựa trên tư duy lật ngược vấn đề, xét bài toán đảo và kết hợp một số tính chất của hình học phẳng. Rất mong sự góp ý, chia sẻ của đồng nghiệp và bạn đọc.

BÀI TẬP

1. Cho ΔABC nhọn có trực tâm H. Đường thẳng BC có phương trình: $y + 1 = 0$. Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng của H qua các trung điểm của các cạnh BC, AC. Biết $A_1(0;-3)$, $B_1(2;2)$, viết phương trình cạnh AC.

2. Cho ΔABC có trực tâm $H(-1;2)$ nội tiếp đường tròn (C). Cho trung điểm của BC là $M\left(\frac{1}{2};-1\right)$. Gọi H_2 là giao điểm của đường thẳng BH với (C), phương trình AH_2 là: $y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh ΔABC biết B có hoành độ âm.

3. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C). Gọi H là trực tâm ΔABC; H_2 là điểm đối xứng của H qua đường thẳng AC. Biết $H(-2;1)$; $H_2(1;4)$ và tiếp tuyến Ct của (C) tại C có phương trình: $7x - 3y - 24 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

GIẢI ĐÁP: NGHIỆM NÀO ?

(Đề đăng trên TH&TT số 482, tháng 8 năm 2017)

Phân tích sai lầm. Lời giải của *An* có ba lỗi.

1) Nhờ đẳng thức $a^3+b^3-c^3+3abc$

$$=\frac{1}{2}(a+b-c)\left[(a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2\right]$$

nên khi $a\neq b$ hoặc $a\neq -c$ hoặc $b\neq -c$ thì $a+b=c \Leftrightarrow a^3+b^3+3abc=c^3$. Nếu $a=b=-c$ thì chưa thể khẳng định được $a+b=c$ và $a^3+b^3+3abc=c^3$ tương đương.

2) Trong lời giải của *An*, từ PT có dạng $a+b=c$ lập phương hai vế được $a^3+b^3+3ab(a+b)=c^3$, sau đó lại thế $a+b=c$ vào PT và đi đến $a^3+b^3+3abc=c^3$.

Như vậy PT $a^3+b^3+3abc=c^3$ chỉ là hệ quả của PT $a+b=c$. Do đó, khi giải PT $a^3+b^3+3abc=c^3$ tìm ra x ta phải thử lại vào PT $a+b=c$ sau đó mới kết luận.

3) Trong lời giải của *An* có thêm một sơ suất, dòng $85x^3-939x^2+1623x-769=0$ đã viết thành

$$85x^3-939x^2+1623x-796=0.$$

Lời giải sau đây khắc phục hai lỗi trên.

Lời giải đúng. Từ phương trình

$$\sqrt[3]{2x+6}+\sqrt[3]{9-x}=\sqrt[3]{3x-11} \quad (1)$$

lập phương hai vế, ta được

$$2x+6+9-x+3\sqrt[3]{2x+6}.\sqrt[3]{9-x}\left(\sqrt[3]{2x+6}+\sqrt[3]{9-x}\right)$$
$$=3x-11. \quad (2)$$

Thế (1) vào (2), ta thu được phương trình hệ quả

$$2x+6+9-x+3\sqrt[3]{2x+6}.\sqrt[3]{9-x}\sqrt[3]{3x-11}=3x-11$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2x+6}.\sqrt[3]{9-x}\sqrt[3]{3x-11}=2x-26$$
$$\Leftrightarrow 27(2x+6)(9-x)(3x-11)=(2x-26)^3$$
$$\Leftrightarrow 85x^3-939x^2+1623x-769=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(85x-769)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{769}{85}.$$

Thử lại vào PT(1) thấy $x=1$ không thỏa mãn (1), $x=\frac{769}{85}$ thỏa mãn (1). Vậy (1) có nghiệm $x=\frac{769}{85}$.

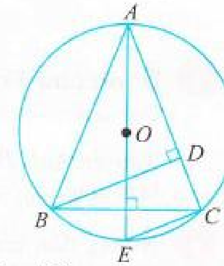
Nhận xét. Các bạn tham gia bài này đều phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Có một bạn quên viết tên và địa chỉ. Danh sách các bạn được khen là:

Bắc Giang: *Hoàng Mai Phương*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang, TP. Bắc Giang. **Hưng Yên:** *Cao Thành Trung*, 12A3, THPT Dương Quảng Hàm, *Trần Thị Phương Linh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Thừa Thiên Huế:** *Bùi Nhật Minh, Nguyễn Đình Long*, 12T1, *Lê Cẩm Thanh Hà*, 12T2, *Mai Thanh Hằng*, 10T2, *Lê Cẩm Huyền*, 12 Lý, THPT chuyên Quốc học Huế. **Quảng Ngãi:** *Trần Nguyên Quy*, 10T1, THPT chuyên Lê Khiết. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHIVI

ĐÃ LÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CHƯA ?

Bài toán. *Cho tam giác ABC thay đổi cân tại A, nội tiếp được đường tròn (O; R) cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của đường cao BD.*



Một bạn học sinh đã giải như sau: Vẽ đường kính *AE*, ta có

$\Delta BDC \backsim \Delta ACE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BD}{AC}=\dfrac{BC}{AE}$. Suy ra

$$DB=\frac{AC.BC}{AE}\le\frac{(AC+BC)^2}{4AE} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $AC=BC$ hay ΔABC đều.

Khi đó $\dfrac{EC}{EA}=\sin\widehat{EAC}=\sin 30^0=\dfrac{1}{2}\Rightarrow EC=\dfrac{AE}{2}=R.$

ΔAEC có $AC^2=(2R)^2-R^2=3R^2$

$$\Rightarrow AC=AB=BC=\sqrt{3}R \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được: $DB\le\dfrac{\left(2\sqrt{3}R\right)^2}{8R}=\dfrac{3R}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của *BD* là $\dfrac{3R}{2}$ khi tam giác *ABC* đều.

Theo bạn kết quả trên đã là giá trị lớn nhất của đường cao BD chưa?

TRẦN THANH HƯNG

(GV THCS Võ Trứ, Tuy An, Phú Yên)

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 486 (12.2017)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 48, Lê Văn Lương, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

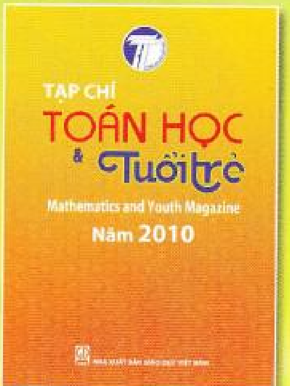
Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN NGỌC ĐẠI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG ***Mĩ thuật:*** QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN ***Thiết kế, chế bản:*** MAI ANH

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

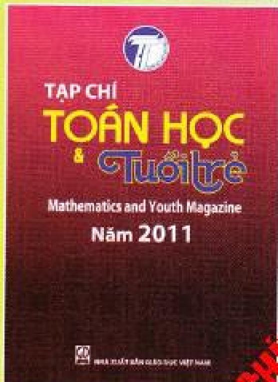
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

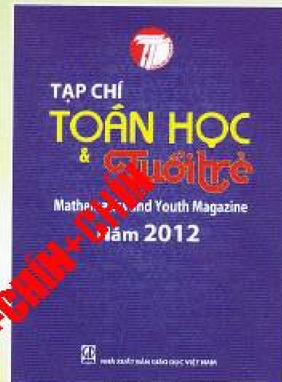
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



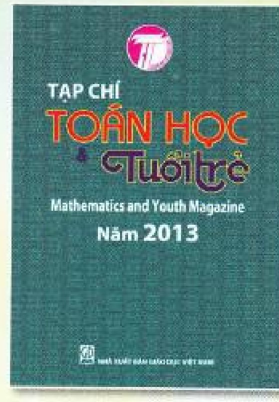
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



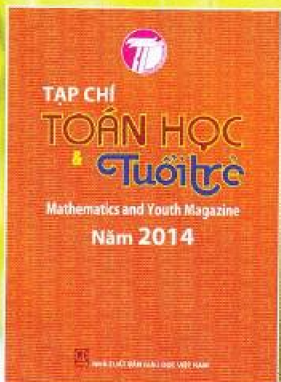
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



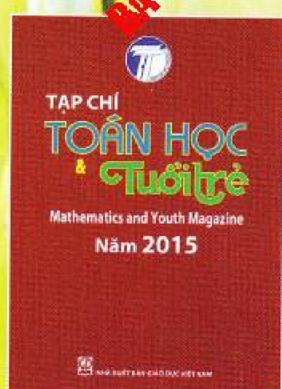
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



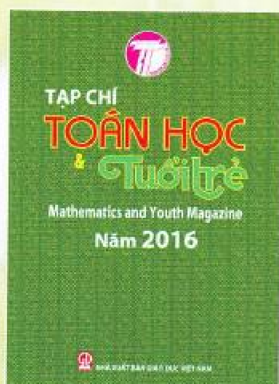
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



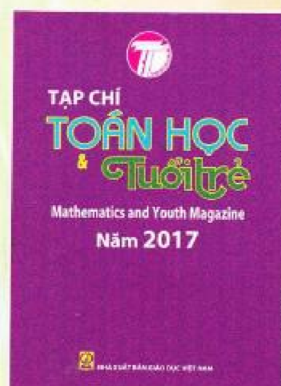
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024. 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT12M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2017

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng