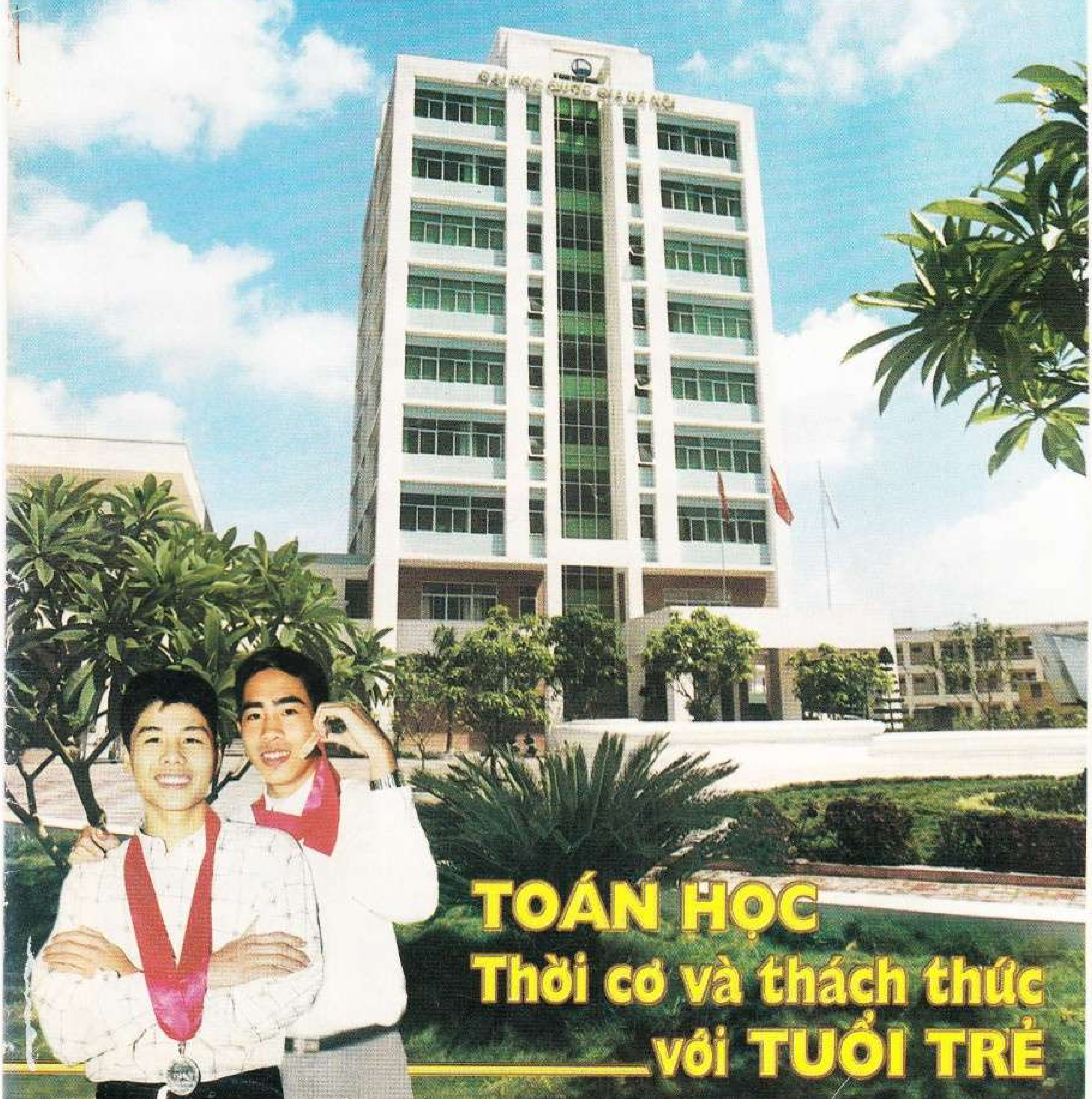
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

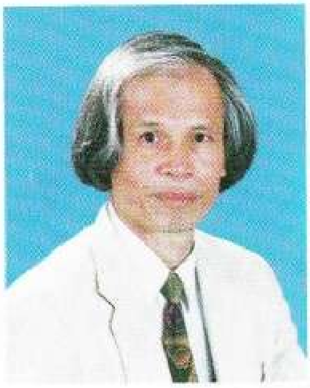
3
2000

SỐ 273 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



TOÁN HỌC
Thời cơ và thách thức với TUỔI TRẺ

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*



PTS DOÃN TAM HÒE sinh ngày 22.04.1943 quê ở Song Lãng, Vũ Thư, Thái Bình, từ một công nhân xây dựng trở thành kĩ sư xây dựng rồi cán bộ giảng dạy trường Đại học Xây dựng năm 1966, từng phục vụ trong quân đội, bảo vệ luận án PTS chuyên ngành Lôgic - Đại số - Lí thuyết số năm 1985 tại LB Nga, Chủ nhiệm bộ môn Toán Đại học xây dựng 1989-1993, hiện là Trưởng phòng Khoa học trường ĐHXD, ủy viên Ban chấp hành Hội Ứng dụng toán học Việt Nam. Ông là tác giả một số giáo trình Toán cao cấp dành cho Khối Kĩ thuật. Ông cho rằng hơn 35 năm qua báo THTT đã góp công lớn đào tạo nhiều nhà toán học Việt Nam; đến với báo là đến với học tập, lao động và giải trí bằng trí tuệ.

Nhà giáo PHẠM NGỌC BỘI sinh ngày 16.12.1954 tại Hải Châu, Hải Hậu, Nam Định, tốt nghiệp ĐHSP Vinh năm 1976, giảng dạy tại Khoa Toán và Khối Phổ thông chuyên toán ĐHSP Vinh đến nay. Nhớ lại những ngày học chuyên toán ĐHSP Vinh 1969-1972 ông không quên hình ảnh các học sinh chuyền tay nhau từng đề toán của báo THTT. Ngày nay THTT giúp bao thế hệ thày, trò gặp gỡ nhau và chắp cánh cho những nhân tài toán học. Chính vì suy nghĩ ấy, ông đã cộng tác với THTT qua những đề toán gửi đến tạp chí.

Nhà giáo LÊ QUANG TRUNG sinh ngày 23.04.1963 quê tại Thạch Thán, Quốc Oai, Hà Tây, tốt nghiệp Đại học Sư phạm Hà Nội II năm 1984, công tác ở Minh Hải (cũ) rồi 1986 chuyển về dạy ở Cao đẳng Sư phạm Bạc Liêu, từ 1992 là Phó chủ nhiệm Khoa Toán Lí Tin CĐSP Bạc Liêu. Ông đã có các bài viết trên THTT những năm gần đây. Ông coi THTT thực sự là nhịp cầu nối để các bạn đọc say mê nghiên cứu toán học trong cả nước trao đổi những suy nghĩ, nghiên cứu, thông tin mới về toán và hi vọng tạp chí khuyến khích các bạn trẻ tìm tòi, phát hiện những vấn đề mới.

Nhà giáo NGUYỄN HỮU BẰNG sinh ngày 12.09.1960 tại Nam Trung, Nam Đàn, Nghệ An, tốt nghiệp ĐHSP Vinh năm 1995, từ 1980 đến 1982 dạy toán THCS ở Quỳnh Lưu, Nghệ An và từ 1982 đến nay dạy toán ở trường THCS Bến Thủy, Vinh. Ông đã có một số bài dành cho bậc học THCS trên THTT. Ông quan niệm THTT là nơi cung cấp cho bạn đọc những bài toán bổ ích, điển hình, được trình bày dưới dạng đẹp đẽ và lí thú. Rất nhiều bài viết có nội dung sâu sắc và gợi mở cho các bạn trẻ phương pháp tự học tích cực nhất.

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 273 (3-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

TOÁN HỌC
THỜI CƠ VÀ THÁCH THỨC VỚI TUỔI TRẺ

Hưởng ứng việc tuyên bố năm 2000 là Năm Toán học Thế giới của Hội Toán học quốc tế và được UNESCO ủng hộ, sáng 26/2/2000 Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức cuộc giao lưu đầu Xuân giữa các nhà toán học Việt Nam với học sinh, sinh viên tại Hội trường ĐHQG Hà Nội. Nhân dịp này, Hội cũng đã tổ chức trao giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 1999 cho hai thầy giáo và bốn học sinh. Gần 1000 học sinh, sinh viên đã tới giao lưu với hàng chục nhà toán học. Cuộc giao lưu còn được đón GS. VS Nguyễn Văn Đạo, Chủ tịch Hội Cơ học Việt Nam, Giám đốc ĐHQG Hà Nội, và GS.TS Bạch Hưng Khang, Chủ tịch Hội Tin học Việt Nam, Viện trưởng Viện Công nghệ thông tin tới dự. Các bạn đã được nghe GS.TS Hoàng Tụy kể về *"Những kỉ niệm trong cuộc đời làm toán"*, GS.TS Ngô Việt Trung nói về *"Năm toán học thế giới"*, GS.TS Hà Huy Khoái bàn về *"Toán học, khoa học lí thuyết hay khoa học ứng dụng"*, PGS.TS Nguyễn Hữu Việt Hưng phát biểu về *"Đào tạo toán học"* và GS.TS Nguyễn Duy Tiến đọc một tham luận thú vị về *"Toán học thế kỉ 21"*. Cuộc giao lưu sôi động hẳn lên khi các nhà toán học trả lời các câu hỏi của các bạn học sinh, sinh viên. Những câu hỏi liên tiếp đặt ra thật phong phú : Xuất phát từ đâu mà ĐHQG Hà Nội mở các lớp đào tạo Cử nhân tài năng ? Tư duy Toán học có ảnh hưởng tới ngoại hình của các bạn gái hay không ? Bí quyết học các môn Toán ở Đại học ? Toán học giúp ích gì cho công tác quản lí ? Chỉ làm Toán có đủ sống không ? Điều kiện để trở thành hội viên của Hội Toán học Việt Nam ? Thi vào các khoa Toán của ĐHSP, ĐHKHTN có khó không ? Làm toán say mê có ảnh hưởng tới việc xây dựng gia đình và có hay bị đãng trí không ? Toán học có liên quan tới Thơ không ? Toán học ứng dụng trong Quốc phòng như thế nào ? Để trở thành một Nhà Toán học thì có cần nắm vững môn Triết học không ? Lương cao nhất của cán bộ Viện Toán học Việt Nam là bao nhiêu ?...

Ban tổ chức đã thành lập Ban giải đáp gồm các nhà toán học : GS.TS Đào Trọng Thi, GS.TS Hoàng Xuân Sính, GS.TS Đỗ Long Vân, GS.TS Phạm Thế Long, GS.TS Hà Huy Khoái, GS.TS Ngô Việt Trung, GS.TS Hoàng Tụy, GS.TS Nguyễn Duy Tiến, PGS.TS. Phạm Kỳ Anh, TS. Phạm Khắc Ban, TS Nguyễn Đình Công, TS. Trương Xuân Đức Hà, TS. Tống Đình Quỳ, GS.TS Nguyễn Hữu Việt Hưng, PGS.TS Đỗ Đức Thái.

Những câu trả lời của các nhà toán học cũng thật thú vị, những tràng vỗ tay, những tiếng cười vui vẻ làm ấm thêm không khí giao lưu.

Các bạn trẻ Việt Nam sẽ nghĩ và làm gì khi cuộc giao lưu rất ý nghĩa mang chủ đề "Toán học - Thời cơ và thách thức với Tuổi trẻ" ? Nền Toán học Việt Nam trong tương lai đang chờ các bạn !

L.T.N.

GS.TS Đỗ Long Vân, Chủ tịch Hội THVN với các thầy giáo và học sinh được tặng giải thưởng Lê Văn Thiêm.

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TẬP DƯỢT KHAI THÁC CÁC ĐẲNG THỨC ĐÃ BIẾT

TRỊNH KHÔI
(Phòng THPT, Sở GD-ĐT Bắc Ninh)

Khi đã được học phép nhân đa thức, bất kì học sinh nào cũng có thể thực hiện phép tính để rút ra hằng đẳng thức :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \; (*)$$

Nếu chỉ quan sát đẳng thức (*) trong trạng thái tĩnh thì quả thực ta khó có thể rút ra được một điều gì thú vị ngoài tính cân đối, đẹp mắt của nó. Ta hãy nhìn đẳng thức (*) với trạng thái động xem sao ! Trước hết chúng ta hãy chủ động cho các đối tượng a, b, c thay đổi một chút, chẳng hạn ta thay a, b, c bởi $1/a$, $1/b$, $1/c$, theo đẳng thức (*) ta có :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}$$

hay $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}$ (**)

Trong (**) cho $a+b+c = 0$, được

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Rõ ràng ta có một kết quả thú vị : Với $abc \neq 0$, $a+b+c = 0$ thì :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| \; (1).$$

Như vậy, chỉ cần thay đổi một chút các dữ kiện, ta đã thu được một kết quả rất đẹp. Nhưng nếu ta dừng lại ở đây thì sẽ không thấy hết được tầm ứng dụng của kết quả mới. Chúng ta thử cùng xem vai trò của đẳng thức (1) qua một loạt các bài toán ở những dạng khác nhau dưới đây.

Bài 1: Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|$ (2)

b) $\sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}} = \left|a+b-\frac{ab}{a+b}\right|$ (3)

Hướng dẫn: - Để chứng minh đẳng thức (2), ta chỉ cần chú ý rằng $(a+b)^2 = [-(a+b)]^2$ như vậy đẳng thức (2) được suy ra trực tiếp từ (1) khi ta thay $c = -(a+b)$.

- Tương tự (3) được suy ra trực tiếp từ (1) khi ta thay a, b, c bởi bộ 3 số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ và $-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng :

$$s = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$$ là số hữu tỉ.

Hướng dẫn: Chỉ cần để ý $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, nên từ (1) ta có : $s = \left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right| \in Q$

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau :

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}}$$

Hướng dẫn: Áp dụng (2) có :

$$\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2+b^2}$$

và do đó (áp dụng (2) một lần nữa), được

$$P = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a-b}\right|.$$

Bài 4. Xét tổng

$$S_n = \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+ \sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}.$$

a) Tính S_{2000}.

b) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ thì S_n là số hữu tỉ nhưng S_n không thể là số nguyên.

Hướng dẫn: Hãy chú ý $1 + (n-1) + (-n) = 0$, áp dụng (1) ta có :

$$\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}} = 1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Từ đó dễ dàng thấy :

$$S_n = \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = (n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}.$$

Từ đó giải quyết được a) và b).

Bài 5. Đặt $S_n = \sqrt{1 + 99..9^2 + 0,99...9^2}$ (hạng tử thứ hai trong căn là bình phương của số tự nhiên có n chữ số 9 còn hạng tử thứ ba trong căn là bình phương của số thập phân có n chữ số 9 ở sau dấu phẩy).

a) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì S_n luôn là số hữu tỉ.

b) Viết S_{2000} dưới dạng số thập phân.

Hướng dẫn: Chú ý $99...9 = 10^n - 1$ (vế trái là số tự nhiên có n chữ số 9)

$0,99...9 = \frac{10^n - 1}{10^n}$ (vế trái là số thập phân có n chữ số 9 sau dấu phẩy). Do đó

$$S_n = \sqrt{1 + (10^n - 1)^2 + \left(\frac{10^n - 1)}{10^n}\right)^2}.$$

Áp dụng (3) với $a = 1$, $b = 10^n - 1$, ta thu được $S_n = 10^n - 1 + \frac{1}{10^n}$ nên việc giải quyết các câu a) và b) không còn khó khăn.

Bài 6. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$

b) $x^2 + 6x + 6 + \left(\frac{x+3}{x+4}\right)^2 = 0$

Hướng dẫn: Áp dụng các đẳng thức (2) và (3) để giải các phương trình trên.

Trên đây chúng tôi đã giới thiệu với các bạn một hướng khai thức đẳng thức (*). Kết quả thu được rõ ràng đã giúp chúng ta sáng tạo ra nhiều bài toán mới.

Các bạn hãy tập khai thác hằng đẳng thức khác đang học trong chương trình.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 27

Problem. Among 27 given coins there is a false coin. This coin is lighter than the other coins which have the same weight. What is the minimum number of weighings by which we can always use a balance without weights to detect the false coin ?

Solution. The minimum number of weighings is three. To see this we divide the given coins into three groups of nine coins each. Then we put two groups on the two pans of the balance. If they do not balance, the lighter group must contain the false coin. If they balance, the false coin belongs to the remaining group. Next we divide the group containing the false coin into three smaller groups of three coins each. Putting two of them on the pans of the balance we know which group of these three groups is lighter. Now we only need to compare two coins of the lighter group by a third weighing in order to see which coin is false. It remains to show that we can not always find the false coin by two weighings. First we note that every weighing divides a set of coins into three groups. The result of a weighing is most unfavorable if the group which contains the false coin has the greater number of coins. Thus, the number of the coins in the group which contains the false coin can decrease no more than three times after each weighing. Since 27:3 = 9; 9:3 = 3 and 3:3 = 1, we need at least three weighings in order to detect the false coin.

Từ mới:

coin	= đồng xu
false	= hỏng, sai (tính từ)
light	= nhẹ (tính từ)
same	= cùng, như nhau (tính từ)
weight	= sức nặng, quả cân
minimum	= ít nhất, cực tiểu
weighing	= lần cân
balance	= cân bàn (danh từ), cân (động từ)
detect	= phát hiện
divide into	= chia ra (động từ)
each	= mỗi một
pan	= bàn cân
belong	= thuộc vào (động từ)
remain	= còn lại (động từ)
set	= tập hợp, bộ
result	= kết quả
unfavorable	= không thuận lợi (tính từ)
decrease	= giảm (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC trong kì thi tuyển sinh đại học năm 1999

NGUYỄN THANH GIANG
(GV trường THPT NK Hưng Yên)

Có thể nói không có đề thi tuyển sinh đại học và cao đẳng nào lại không có bài về lượng giác, trong đó phương trình lượng giác (PTLG) là loại toán thường có mặt nhiều hơn cả.

Bài viết này đề cập đến cách giải những bài toán về PTLG trong kì thi tuyển sinh năm 1999 vào các trường Đại học và Cao đẳng. Thông thường có các phương pháp giải như sau :

Phương pháp 1: ***Dùng các công thức lượng giác đưa phương trình về dạng tích***

Ví dụ 1. (ĐH Kinh tế quốc dân)

Giải phương trình :

$\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$ (1)

Phương trình (1) tương đương với :

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}$$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x\cos x + 2\cos 5x\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 3x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos 5x.\cos 2x.\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0\\ \cos 2x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + l\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5}\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi\end{array}\right. (k, l, n \in Z)$$

Ví dụ 2. (ĐH Quốc gia Hà Nội)

Giải phương trình :

$\cos^6 x + \sin^6 x = 2(\cos^8 x + \sin^8 x)$ (2)

Ta có :

(2) $\Leftrightarrow \cos^6 x(2\cos^2 x - 1) = \sin^6 x(1 - 2\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^6 x - \cos^6 x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^2 x - \cos^2 x)(1 + \sin^2 x.\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$

Ví dụ 3. (Phân viện báo chí tuyên truyền)

Giải phương trình lượng giác :

$8\sqrt{2}\cos^6 x + 2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x - 6\sqrt{2}\cos^4 x - 1 = 0$ (3)

Ta có

(3) $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) +$
$+ 2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x.2\cos x\cos 3x + 2\sin^2 x.2\sin x\sin 3x = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)(\cos 2x+\cos 4x) +$
$+ (1-\cos 2x)(\cos 2x-\cos 4x) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2(\cos 2x+\cos 2x\cos 4x) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x(1 + \cos 4x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos^2 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi$ $(k \in Z)$

Phương pháp 2: ***Đặt ẩn phụ đưa PTLG về phương trình đại số***

Ví dụ 4. (Học viện Kĩ thuật mật mã)

Giải phương trình lượng giác :

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32} \quad (4)$$

Ta có (4)

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^4 = \dfrac{17}{32}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{8}(\cos^4 2x + 6\cos^2 2x + 1) = \dfrac{17}{32}$

Đặt $\cos^2 2x = t \in [0; 1]$

ta có $t^2 + 6t + 1 = \dfrac{17}{4}$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6t - \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \dfrac{1}{2}\\ t = \dfrac{-13}{2}\end{array}\right.$$

Vì $t \in [0; 1]$ nên $t = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos 4x + 1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$

Ví dụ 5. (ĐH Nông nghiệp 1)

Giải phương trình lượng giác :

$2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$ (5)

Ta có

(5) $\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)\sin x + 2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x)[2(1+\cos x)\sin x + 2(1+\cos x) - 1] = 0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x)(2\sin x + 2\cos x + 2\sin x\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \quad (k \in Z) \\ 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x\cos x + 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Giải (*) : Đặt $\sin x + \cos x = t$ ($|t| \le \sqrt{2}$)

thì phương trình (*) trở thành

$2t + t^2 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -\cos x$

$\Leftrightarrow x = -\pi/4 + n\pi$ $(n \in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình là

$x = -\pi/4 + n\pi; x = k2\pi$ $(n, k \in Z)$

Phương pháp 3: ***Quy PTLG về việc giải hệ phương trình lượng giác bằng cách đánh giá, so sánh, sử dụng bất đẳng thức***

Ví dụ 6. (ĐH Tài chính kế toán)

Giải phương trình :

$\pi^{|\sin\sqrt{x}|} = |\cos x|$ (6)

Điều kiện : $x \ge 0$

Do $|\sin\sqrt{x}| \ge 0$ nên $\pi^{|\sin\sqrt{x}|} \ge \pi^o = 1$

mà $|\cos x| \le 1$. Do đó

(6) $\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin\sqrt{x}| = 0 \\ |\cos x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = k\pi & (k \in Z^+) \\ x = n\pi & (n \in Z) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k^2\pi^2 \\ x = n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2\pi = n \\ x = n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = n = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

(Vì $k, n \in Z^+$)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Phương pháp 4: ***Sử dụng tính chất hàm số***

Ví dụ 7. (ĐH Sư phạm 2)

Giải phương trình : $1 - (x^2/2) = \cos x$

Đặt $f(x) = \cos x + (x^2/2)$

Dễ thấy $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in R$ do đó $f(x)$ là hàm chẵn vì vậy trước hết ta chỉ xét với $x \ge 0$

Ta có : $f'(x) = \sin x + x$

$f''(x) = -\cos x + 1 \ge 0$ $\forall x \ge 0$

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm đồng biến, do đó $f'(x) \ge f'(0) = 0$ với $x \ge 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến với $x \ge 0$

Mặt khác ta thấy $f(0) = 0$ do đó $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 8. (ĐH Bách Khoa)

Với n là số tự nhiên bất kì lớn hơn 2, tìm x thuộc khoảng $(0, \pi/2)$ thỏa mãn phương trình :

$\sin^n x + \cos^n x = 2^{\frac{2-n}{2}}$

Đặt $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$

ta có : $f'(x) = n\cos x.\sin^{n-1}x - n\sin x.\cos^{n-1}x =$

$= n\sin x.\cos x(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x)$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ trên $(0; \pi/2)$

ta có : $\min f(x) = f(\pi/4) = 2^{\frac{2-n}{2}}$ và $x = \pi/4$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Sau đây mời các bạn giải một số đề thi tuyển sinh đại học năm 1999 bằng cách sử dụng các phương pháp trình bày ở trên :

Giải các phương trình:

1) $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$ (Học viện Ngân hàng)

ĐS: $x = k2\pi$; $x = \pi/2 + n2\pi$

2) $\text{tg}x.\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x.\cos x)$ (ĐH Mỏ - Địa chất)

ĐS: $x = -\pi/4 + k\pi$; $x = \pm\pi/3 + n\pi$;

3) $2\sin 3x - (1/\sin x) = 2\cos 3x + (1/\cos x)$; (ĐH Thương mại)

ĐS: $x = \pm\pi/4 + k\pi/4$; $x = -\pi/12 + n\pi$; $x = 7\pi/12 + m\pi$

4) $|\sin x - \cos x| + |\cos x + \sin x| = 2$ (ĐH Quốc gia Hà Nội)

ĐS: $x = k\pi/2$

5) $4(\sin 3x - \cos 2x) = 5(\sin x - 1)$ (ĐH Luật Hà Nội)

ĐS : $\left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + k2\pi \\ x = \arcsin(-1/4) + n2\pi \\ x = \pi - \arcsin(-1/4) + l2\pi \end{array}\right.$

6) $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$ (ĐH Y Khoa Hà Nội)

ĐS : $x = \pi/4 + k\pi$

7) $\sin(3x - (\pi/4)) = \sin 2x.\sin(x + (\pi/4))$ (Học viện công nghệ bưu chính viễn thông)

ĐS : $x = \pi/4 + k\pi/2$

8) $\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{1/x}(\cos x + \cos 2x) = 0$ (ĐH Xây dựng)

ĐS : $x = -\pi/6 + k2\pi$ với $k \in Z^+$./.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN VÀO TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG HÀ NỘI 1999

PHẦN A. Phần dành cho tất cả thí sinh

Câu I. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

2) Tìm hai điểm A, B thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị để khoảng cách giữa chúng là nhỏ nhất.

Câu II. 1) Giải phương trình lượng giác :

$\sin^3 x.\cos 3x + \cos^3 x.\sin 3x = \sin^3 4x$

2) Các góc của ΔABC thỏa mãn :

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Câu III. 1) Giải phương trình :

$$\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$$

2) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

3) Cho các số x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3^x + 9^y$.

Câu IV. Cho họ đường tròn :

$x^2 + y^2 - 2mx - 2(m + 1)y + 2m - 1 = 0$

1) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ đường tròn luôn luôn đi qua hai điểm cố định.

2) Chứng minh rằng với mọi m, họ đường tròn luôn luôn cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

PHẦN B. Phần dành cho từng loại đối tượng thí sinh:

Câu Va. *(cho thí sinh thi theo chương trình phân ban)* :

Tính tích phân : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 3x + 2)^2}$

Câu Vb. *(cho thí sinh thi theo chương trình ban khoa học tự nhiên và kĩ thuật – ban B)* :

Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. Bạn đọc tự giải.

2) Viết hàm số dưới dạng $y = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Điểm $A(x_1, y_1)$ thuộc nhánh bên phải đường tiệm cận đứng có tọa độ là

$x_1 = 1 + \alpha,\ y_1 = 1 + \alpha + \dfrac{1}{\alpha}\ (\alpha > 0)$.

Điểm $B\ (x_2, y_2)$ thuộc nhánh bên trái có tọa độ là

$x_2 = 1 - \beta;\ y_2 = 1 - \beta - \dfrac{1}{\beta}\ (\beta > 0)$.

Nếu $AB = d$ thì

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \\ &= (\alpha+\beta)^2 + (\alpha + \frac{1}{\alpha} + \beta + \frac{1}{\beta})^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2 + [(\alpha+\beta)(1 + \frac{1}{\alpha\beta})]^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2\,[1 + (1 + \frac{1}{\alpha\beta})^2] \end{aligned}$$

$$\geq 4\alpha\beta.\left[2 + \frac{2}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha\beta)^2}\right] = 4(2\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2) \geq$$

$$\geq 4(2\sqrt{2} + 2) = 8(\sqrt{2} + 1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \alpha = \beta \\ 2\alpha\beta = \dfrac{1}{\alpha\beta} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Vậy hai điểm A và B cần tìm có hoành độ là :

$x_1 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}},\quad x_2 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Câu II. 1) Đưa phương trình về :

$\sin 12x = 0 \Leftrightarrow 12x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{12}\quad (k \in Z)$

2) Ta có : $\text{cotg}A + \text{cotg}B = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} =$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} \geq \frac{2\sin C}{1 + \cos C} = 2\,tg\frac{C}{2} \quad (1)$$

(đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$).

Tương tự ta có $\text{cotg}B + \text{cotg}C \geq 2\,tg\dfrac{A}{2}$ (2)

$\text{cotg}C + \text{cotg}A \geq 2\,tg\dfrac{B}{2}$ (3)

Cộng từng vế dẫn tới :

$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C \geq tg\dfrac{A}{2} + tg\dfrac{B}{2} + tg\dfrac{C}{2}$ (4)

(4) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$ (1), (2), (3) đồng thời trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

Câu III. 1) Giải $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$

Đặt $x^2 - x = t$ ta được :

$\sqrt{3 + t} = \sqrt{2 - t} + 1\ (-3 \leq t \leq 2)$

(Xem tiếp trang 11)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG, PHÚ THỌ 1999

ĐỀ TOÁN

(Dành cho các lớp Khoa học tự nhiên)

Thời gian : 150 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+x+\sqrt{y^2+3}+y=5\\ \sqrt{x^2+2}-x+\sqrt{y^2+3}-y=2\end{cases}$$

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{3}\le\frac{a(c-d)+3d}{b(d-c)+3c}\le\frac{3}{2}$$

với mọi số a, b, c, d thuộc $[2; 3]$

Bài 3. Chứng minh rằng với ba số thực a, b, c phân biệt thì phương trình :

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

có hai nghiệm khác nhau.

Bài 4. Cho tam giác cân ABC. Trên cạnh BC lấy các điểm E, F (khác B, C) sao cho $BE = CF < \frac{BC}{2}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔAEF.

a) Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ABF có bán kính bằng nhau.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABF theo R và r.

ĐỀ TOÁN

(Dành cho lớp chuyên Toán)

__Ngày thứ nhất__ *(Thời gian : 150 phút)*

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau với a, b, c là các số nguyên không âm :

$$3\le\frac{1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}+\frac{1+\sqrt{b}}{1+\sqrt{c}}+\frac{1+\sqrt{c}}{1+\sqrt{a}}\le 3+a+b+c$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B=3a+4\sqrt{1-a^2}$$

với các giá trị của a thuộc $[-1; 1]$

Bài 3. Chứng minh rằng trong 7 số tự nhiên bất kì bao giờ cũng chọn được 4 số sao cho tổng của 4 số đó chia hết cho 4.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho $\angle BAM=\angle CAN$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{BM}{CN}\cdot\frac{CM}{BN}=\left(\frac{AM}{AN}\right)^2$;

b) $\frac{BM}{CN}\cdot\frac{BN}{CM}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

c) $\frac{BM}{CN}+\frac{CM}{BN}\ge 2\frac{AM}{AN}$

__Ngày thứ hai__ *(Thời gian : 150 phút)*

Bài 5. Với giá trị nào của $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các tham số khác 0, thì các nghiệm phân biệt của cả hai phương trình sau có ít nhất là 3 nghiệm :

$$ax^2+2ax+10b=0$$
$$x^2-2bx-5ab=0$$

Bài 6. Cho 6 số thực $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ thuộc $[0; 1]$. Chứng minh rằng :

$$(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_6)(x_6-x)\le\frac{1}{16}$$

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Kí hiệu $AB = a$, $AD = b$, $CD = c$, $BC = d$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab+cd}{ad+bc}=\frac{AC}{BD}$$

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA BA LAN (4/1995)

NGÀY THỨ NHẤT (5 giờ)

Bài 1. Tìm số các tập con của tập $\{1, 2, ..., 2n\}$ sao cho phương trình $x+y = 2n+1$ vô nghiệm trên tập con đó.

Bài 2. Một ngũ giác lồi được phân chia bởi các đường chéo của nó thành 11 phần : 1 ngũ giác và 10 tam giác. Số lớn nhất các tam giác này có cùng diện tích có thể là bao nhiêu ?

Bài 3. Cho số nguyên tố $p \geq 3$. Xét dãy (a_n) được xác định bởi :

$a_n = n$ với $n = 0, 1, 2, ..., p-1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-p}$ với $n \geq p$.

Tìm số dư khi chia a_{p^3} cho p.

NGÀY THỨ HAI (5 giờ)

Bài 4. Với số nguyên cố định $n \geq 1$ hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng $x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} + ... + \frac{x_n^n}{n}$ biết rằng $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số dương thỏa mãn điều kiện : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = n$.

Bài 5. Giả sử n và k là các số nguyên dương. Từ một bình chứa n thẻ được đánh số từ 1 đến n, các thẻ được rút ra liên tiếp không đặt lại vào bình cho đến khi có một số là ước của k xuất hiện.

Với mỗi số n cho trước hãy xác định tất cả số $k \leq n$ để số lần rút ra đúng bằng k.

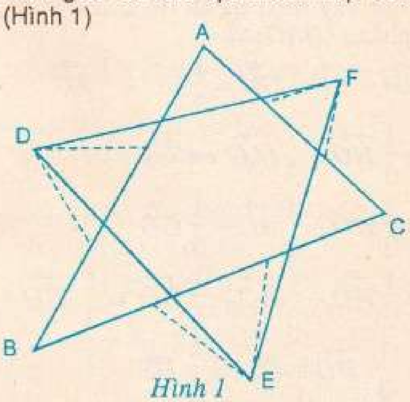
Bài 6. Giả sử k, h, m là 3 tia không đồng phẳng từ một gốc chung P và A là điểm đã cho trên tia k (khác với P). Chứng minh rằng tồn tại đúng 1 cặp điểm B, C với B thuộc h và C thuộc m sao cho $PA+AB = PC+CB$ và $PB+BC = PA+AC$.

BẠN CÓ BIẾT

BÀI TOÁN CỦA NAPÔLÊÔNG

Napôlêông, vị Hoàng đế nước Pháp nổi tiếng hồi đầu thế kỉ 19, không những giỏi chinh chiến mà còn thích đặt ra các bài toán và đưa ra cách giải đặc sắc từ cách nhìn trực quan. Theo tạp chí Toán Mathesis (1938) của Pháp, bài toán sau do ông đặt ra và nêu ra lời giải với ý tưởng độc đáo.

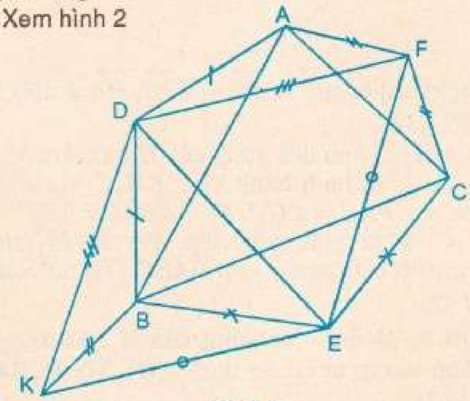
Cho tam giác ABC bất kì, chia mỗi cạnh của tam giác thành 3 đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn giữa, dựng ra phía ngoài 3 tam giác đều, các đỉnh của các tam giác mới mà không thuộc các cạnh của tam giác đã cho tạo thành một tam giác đều DEF (Hình 1)



Hình 1

Giải bằng ghép hình theo ý tưởng của Napôlêông

Xem hình 2



Hình 2

Đặt tam giác DAF trùng với tam giác DBK.
Đặt tam giác ECF trùng với tam giác EBK.
Đặt tam giác DFE trùng với tam giác DKE.
Lúc đó KDE và DEF là các tam giác đều.

Ghi chú : 1) Để có lời giải chính xác các bạn hãy chứng tỏ $\angle DAF + \angle ECF + \angle DBE = 360^\circ$ và các góc KDE, FDE, KED, FED đều bằng 60°.

2) Phát triển bài toán : chứng minh AE, BF, CD đồng quy (xem bài *Bàn luận về cách xét ba đường thẳng đồng quy*, THTT số 262 (4/1999)).

NGUYỄN ĐÌNH TÙNG
(*Cao đẳng sư phạm Hà Nội*)

DIỄN ĐÀN DẠY VÀ HỌC TOÁN

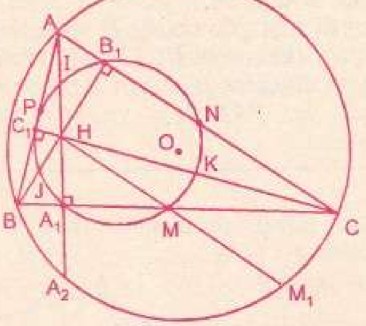
VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT BÀI TOÁN TỪ MẶT PHẲNG SANG KHÔNG GIAN

ĐÀO TAM
(GV Khoa Toán, ĐHSP Vinh)

Các bạn học sinh đã biết nhiều cách giải bài toán sau :

Trong ΔABC với các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy ở H; trung điểm các cạnh BC, CA, AB lần lượt là M, N, P; trung điểm các đoạn HA, HB, HC lần lượt là I, J, K thì 9 điểm A_1, B_1, C_1, M, N, P, I, J, K nằm trên cùng một đường tròn (đường tròn Ơle).

Dưới đây trình bày một cách giải :



Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HJ}$, $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HK}$ (1).

Gọi M_1 là ảnh đối xứng của H qua tâm M, khi đó HBM_1C là bình hành và $\angle BM_1C + \angle BAC = \angle BHC + \angle BAC = \angle C_1HB_1 + \angle BAC = 180^{\circ}$. Vậy ABM_1C là tứ giác nội tiếp, suy ra M_1 thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Từ đó $\overrightarrow{HM_1} = 2\overrightarrow{HM}$ (2).

Gọi A_2 là ảnh đối xứng của H qua trục BC, lập luận tương tự có A_2 thuộc (O). Từ đó $\overrightarrow{HA_2} = 2\overrightarrow{HA_1}$ (3)

Từ (1) (2) (3) rút ra rằng I, J, K, M, A_1 tương ứng là ảnh của A, B, C, M_1, A_2 qua phép vị tự $V_H^{1/2}$ tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$. Chứng minh tương tự, các điểm N, P, B_1, C_1 là ảnh của các điểm N_1, P_1, B_2, C_2 thuộc (O) qua $V_H^{1/2}$.

Vậy đường tròn đi qua chín điểm nói trên là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V_H^{1/2}$.

Từ cách giải bài toán trên trong mặt phẳng có thể đề xuất bài toán mới tương tự trong không gian như sau :

Cho tứ diện $ABCD$ có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại H, bốn trọng tâm M, N, P, Q của bốn mặt tương ứng đối diện với các đỉnh A, B, C, D và bốn điểm I, J, K, F thuộc các đoạn thẳng HA, HB, HC, HD sao cho $\frac{HI}{HA} = \frac{HJ}{HB} = \frac{HK}{HC} = \frac{HF}{HD} = \frac{1}{3}$ thì 12 điểm A_1, B_1, C_1, D_1, M, N, P, Q, I, J, K, F thuộc một mặt cầu (Mặt cầu mười hai điểm).

Bài toán mới đặt ra chỉ đúng cho lớp *các tứ diện trực tâm* tức là tứ diện có các đường cao đồng quy. Các bạn có thể dự đoán bài toán sẽ được giải nhờ sử dụng phép vị tự $V_H^{1/3}$.

Để chứng minh chúng ta cần có bổ đề sau :

"Trong một tứ diện trực tâm $ABCD$ thì trực tâm H, trọng tâm G và tâm O của mặt cầu ngoại tiếp thẳng hàng và G là trung điểm của đoạn OH".

Để chứng minh bổ đề chúng ta sử dụng bài toán quen biết trong hình học phẳng "Trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp thuộc một đường thẳng". Chú ý rằng hình chiếu vuông góc của các điểm G, O, H lên hai mặt phẳng (BCD) và (ACD) tương ứng theo các phương AA_1 và BB_1 thẳng hàng. Từ đó dẫn tới G, O, H thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau.

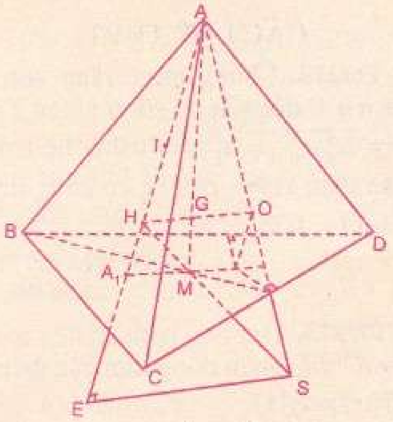
Chứng minh bài toán về mặt cầu mười hai điểm :

Giả sử S là điểm đối xứng của A qua tâm O của mặt cầu (O) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$; H là trực tâm và G là trọng tâm của tứ diện đó. Gọi E là điểm sao cho $\overrightarrow{HE} = 3\overrightarrow{HA}_1$.

Trước hết ta chứng minh $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HS}$ (4)

Thật vậy theo mệnh đề nêu trên G, M thuộc mặt phẳng (HAO) và

$$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{HO} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{HO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{HO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} - \frac{1}{6}\overrightarrow{HO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{AO})$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OS}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{HS}$$



Từ hệ thức (4) và $\overrightarrow{HA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ suy ra $A_1M // ES$ và từ đó $\angle AES = 90^\circ$, hay E thuộc mặt cầu (O).

Các đẳng thức $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$; $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HS}$; $\overrightarrow{HA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ chứng tỏ rằng các điểm I, A_1, M là ảnh của các điểm A, E, S thuộc mặt cầu (O) qua phép vị tự $V_H^{1/3}$.

Lập luận tương tự đối với ba mặt cầu còn lại của tứ diện $ABCD$ ta thấy các điểm J, K, F, N, P, Q, B_1, C_1, D_1 là ảnh của các điểm thuộc mặt cầu (O) qua phép vị tự $V_H^{1/3}$.

Từ đó suy ra mặt cầu đi qua mười hai điểm nói trên là ảnh của mặt cầu (O) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ qua phép vị tự $V_H^{1/3}$.

Từ bài toán về đường tròn Ơle đối với tam giác, các bạn hãy đề xuất và chứng minh bài toán tương tự về mặt cầu 12 điểm đối với hình tứ diện gần đều (tức là tứ diện có các cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một)./.

ĐÍNH CHÍNH

Trong số 272 THTT (2/2000) có một số lỗi, xin sửa lại như sau :

Trang 2, dòng 6 ↓ :

In là : $x+y+z \geq 3\sqrt{xyz}$; Sửa là : $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

Trang 10, dòng 19 ↓ :

In là : $\frac{1}{2}[x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2]+3(x_1x_2+x_2x+x_3x_1)$

Sửa là :

$\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]+3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$

Trang 10, : In là : Min(x_1); Sửa là : Min(x_i) $\forall i$

Trang 11, : In là : Max(x_1); Sửa là : Max(x_i) $\forall i$

Bìa 3 : ở 2 vòng tròn dưới

In là : $A(53)$, $B(36)$; Sửa là : $C(56)$, $D(59)$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

ĐỀ THI TUYỂN SINH... *(Tiếp trang 7)*

Thấy ngay $t = 1$ là một nghiệm mà hai vế ngược chiều biến thiên nên nghiệm ấy là duy nhất. Do đó :

$$t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2) Đặt $x + \frac{1}{x} = u$, $y + \frac{1}{y} = v$ với $|u| \geq 2$, $|v| \geq 2$ ta được hệ :

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7 \\ v = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = -2 \\ v = 7 \end{cases}$$

Từ đó ta được 4 nghiệm là

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

3) Đặt $3^x = t$, do $x \in [0, 1]$ nên $t \in [1, 3]$

$P = 3^x + 3^{2-2x} = t + \frac{9}{t^2}$, rồi dùng đạo hàm lập bảng biến thiên dẫn tới $\min P = 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ và $\max P = 10$. Có thể dùng bất đẳng thức để giải.

Câu IV. 1) Giả sử họ đường tròn đi qua điểm cố định $M(x, y)$ với $\forall m$. Khi đó :

$$2(1-x-y)m + (x^2+y^2-2y+1) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hai điểm cố định là $M_1(-1, 2)$ và $M_2(1, 0)$.

2) Để tìm giao điểm với trục tung cho $x=0$ ta được:

$y^2 - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0$ (*)

$\Delta' = (m+1)^2 - 2m + 1 = m^2 + 2 > 0$ với mọi m.

Vậy (*) luôn có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ họ đường tròn luôn cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Câu Va.

$$\int_0^1 \frac{dx}{[(x+1)(x+2)]^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2} - 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3} + 2\ln 3 - 4\ln 2.$$

Câu Vb. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = 2\ln 2 - \ln 3$$

Hướng dẫn giải : LÊ THỐNG NHẤT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/273. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho $\dfrac{a^2-2}{ab+2}$ là số nguyên.

VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

Bài T2/273. Giải phương trình

$$5x^5+5ax^3+a^2x+5b=0$$

trong đó a, b là các số cho trước và $a \geq 0$.

NGUYỄN HỮU BẰNG
(Nghệ An)

Bài T3/273. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$x^2+3x+y^2+3y+\frac{9}{x^2+y^2+1}$$

trong đó x, y là các số dương thỏa mãn $xy=1$

NGUYỄN QUANG HẢI
(Hà Nội)

Bài T4/273. Cho tam giác ABC và hai điểm phân biệt M, N nằm bên trong nó. Các tia AM và AN cắt BC tại A_1 và A_2 tương ứng. Các tia BM và BN cắt CA tại B_1 và B_2 tương ứng. Các tia CM và CN cắt AB tại C_1 và C_2 tương ứng. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AA_1 và B_1C_1, BB_1 và C_1A_1, CC_1 và A_1B_1. Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AA_2 và BB_1, BB_2 và CC_1, CC_2 và AA_1. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{AM}{MD}+\dfrac{BM}{ME}+\dfrac{CM}{MF} \geq 12$

b) $\dfrac{AP}{PA_2}+\dfrac{BQ}{QB_2}+\dfrac{CR}{RC_2} \geq 6$

NGÔ VĂN THÁI
(Thái Bình)

Bài T5/273. Trên mặt phẳng cho hai điểm cố định M, N và tam giác ABC có $BC < MN$ và $\angle BAC < 90^\circ$. Cho tam giác ABC chuyển động trượt trên mặt phẳng sao cho độ dài ba cạnh AB, BC, CA không đổi, đường thẳng AB đi qua M và đường thẳng AC đi qua N. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

NGUYỄN ĐÌNH LÂU
(Thừa Thiên – Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/273. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n > 0$ đều tồn tại số tự nhiên k sao cho số $k.5^n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1}$ viết trong hệ thập phân thỏa mãn điều kiện : i và a_i có cùng tính chẵn lẻ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

NGUYỄN VĂN THÔNG
(Đà Nẵng)

Bài T7/273. Tìm mọi hàm số liên tục $f: R^+ \to R^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

(1) $f(2x) = 2f(x) \quad \forall x \in R^+$

(2) $f((f(x))^2) = xf(x) \quad \forall x \in R^+$

(3) $f(x) \in N^* \quad \forall x \in N^*$

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Hải Phòng)

Bài T8/273. Giải phương trình

$$3\text{arctg}x - \text{arctg}3x = \frac{\pi}{2}$$

TRẦN VĂN VUÔNG
(Hà Nội)

Bài T9/273. Cho đường tròn (O, R) và một điểm P nằm trong đường tròn. Góc vuông xPy cắt đường tròn tại A và B, các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở điểm M. Tìm quỹ tích các điểm M khi góc vuông xPy quay quanh P.

ĐOÀN KIM SANG
(Yên Bái)

Bài T10/273. Cho hình trụ T_1. Ta gọi là hình trụ T_2 nội tiếp ngang T_1 nếu mỗi đáy của T_1 chứa đúng một đường sinh của T_2 và mặt bên của T_1 chứa 4 điểm của các đường tròn đáy của T_2.

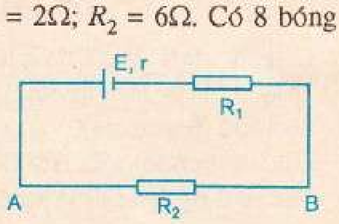
Tìm tỉ số giữa đường kính đáy và đường sinh của hình trụ T_1 để tồn tại vô hạn hình trụ $T_1, T_2, T_3, \dots$ mà mỗi hình trụ T_i nội tiếp ngang hình trụ T_{i-1} với mọi $i = 2, 3, \dots$

PHẠM NGỌC BỘI
(Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/273. Cho mạch điện như hình vẽ : $E = 60V$, $r = 1\Omega$, $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 6\Omega$. Có 8 bóng đèn :

Đ$_1$: 10V-10W ;
Đ$_2$: 10V-10W ;
Đ$_3$: 10V-11W ;
Đ$_4$: 10V-12W ;
Đ$_5$: 8V-5W;



$Đ_6$: 8V-10W; $Đ_7$: 7V-7W; $Đ_8$: 7V-8W.

Hãy mắc các bóng đèn trên đây cùng với các điện trở phụ thành một bộ điện trở và mắc bộ điện trở đó vào hai điểm A, B của mạch sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau :

1) Các đèn sáng bình thường

2) Tiết kiệm nhất.

Tính giá trị các điện trở phụ đó.

LẠI THẾ HIỀN
(Hà Nội)

Bài L2/273. Hình vẽ bên biểu thị sự quan sát vật AB qua kính hiển vi với vật kính MN và thị kính PQ. Vật chắn D có lỗ tròn mn để mắt nhìn qua. Cho biết :

Mắt bình thường, điểm cực cận cách mắt $d = 20$(cm);

Vật AB cách vật kính $d_1 = 1{,}8$(cm);

Khoảng cách 2 thấu kính $l = 18$(cm);

Khi mắt đặt cách thị kính $a = 2$(cm) thì thấy ảnh rõ nét mà không cần điều tiết, đồng thời lỗ tròn đường kính $mn = 2(mm)$ sẽ hứng gọn toàn bộ ánh sáng từ vật qua kính hiển vi tới mắt.

1) Tính các tiêu cự của vật kính và thị kính, đường kính tiết diện kính hiển vi, độ bội giác khi ảnh ở vô cực

2) Bỏ kính hiển vi đi thì mắt có nhìn rõ vật AB không, tại sao ?

TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/273. Find all pairs of integers (a, b) such that $\frac{a^2-2}{ab+2}$ is an integer.

T2/273. Solve the equation

$$5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b = 0$$

where a, b are given numbers and $a \geq 0$.

T3/273. Find the least value of the expression

$$x^2 + 3x + y^2 + 3y + \frac{9}{x^2+y^2+1}$$

where x and y are positive numbers satisfying $xy = 1$.

T4/273. Let be given a triangle ABC and two distinct points M and N inside it. The rays AM and AN cut BC respectively at A_1 and A_2. The rays BM and BN cut CA respectively at B_1 and B_2. The rays CM and CN cut AB respectively at C_1 and C_2. Let D, E, F be respectively the points of intersection of AA_1 and B_1C_1, of BB_1 and C_1A_1, of CC_1 and A_1B_1. Let P, Q, R be respectively the points of intersection of AA_2 and BB_1, of BB_2 and CC_1, of CC_2 and AA_1. Prove that :

a) $\frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} \geq 12$; b) $\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \geq 6$.

T5/273. On the plane, let be given two fixed points M, N and a triangle ABC such that $BC<MN$ and $\angle BAC < 90^o$. The triangle ABC moves on the plane so that the measures of the three sides AB, BC, CA rest unchanged, the line AB always passes through M and the line AC always passes through N. Prove that the line BC is tangent to a fixed circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/273. Prove that for every natural number $n>0$, there exists a natural number k such that the number $k.5^n = \overline{a_m a_{m-1} ... a_1}$, written in decimal system, satisfies the condition : for every $i = 1, 2, ..., m$, the numbers i and a_i have the same parity.

T7/273. Find all continuous functions $f : R^+ \to R^+$ satisfying simultaneously the conditions :

1) $f(2x) = 2f(x)$, $\forall x \in R^+$

2) $f((f(x))^2) = xf(x)$, $\forall \in R^+$,

3) $f(x) \in N^*$, $\forall x \in N^*$.

T8/273. Solve the equation

$$3\text{arctg}x - \text{arctg}3x = \frac{\pi}{2}.$$

T9/273. Let be given a circle (O, R) and a point P inside it. A right angle xPy cuts the circle at A and B, the tangents to the circle at A and B intersect at M. Find the locus of M when the right angle xPy rotates around P.

T10/273. Let be given a cylinder T_1. We say that the cylinder T_2 is horizontally tangent to T_1 if each base of T_1 contains exactly a generating line of T_2 and the lateral surface of T_1 contains 4 points of the base-circles of T_2.

Find the ratio of the diameter of the base to the measure of the generating line of a cylinder T_1 such that there exists an infinite number of cylinders T_1, T_2, T_3, ... so that T_i, is horizontally tangent to T_{i-1} for every $i = 2, 3, ...$

Bài T1/269. *Xét số tự nhiên $A_n = 19981998...1998$ được viết trong hệ thập phân bởi n số 1998 liên tiếp nhau.*

a) Chứng tỏ rằng tồn tại số nguyên dương $n < 1998$ sao cho A_n chia hết cho 1999.

b) Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn A_n chia hết cho 1999. Chứng minh rằng 1998 chia hết cho 2k.

Lời giải. a) Theo bài ra ta có

$$A_{999} = 1998(1+10^4+...+10^{4.998})$$
$$= 1998\frac{(10^4)^{999}-1}{10^4-1}$$

Để ý rằng 1999 là số nguyên tố và vì vậy theo định lí nhỏ Fecma thì $(10^4)^{999} - 1 = (10^2)^{1998} - 1$ chia hết cho 1999. Suy ra A_{999} chia hết cho 1999 do $(10^4\text{-}1, 1999) = (9999, 1999) = 1$.

b) Nhận xét rằng $A_{mk} \vdots A_k$ và $A_k \vdots 1999 \Rightarrow A_{mk} \vdots 1999\ \forall m \in N^*$. Ta viết $999 = kq+r$ với $q, r \in N, r < k$. Nếu $r \neq 0$ thì do k là số dương bé nhất để $A_k \vdots 1999$ nên $A_r \not\vdots 1999$. Mặt khác $A_{999} = A_{kq}.10^{4r} + A_r$, nên $A_r \vdots 1999$, trái với giả thiết. Vậy $r = 0$ và $999 \vdots k$ hay $1998 : 2k$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Lê Hùng Viết Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, *Nguyễn Đức Tâm*, 7C, THCS Giảng Võ; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, quận Phú Nhuận; **Phú Thọ:** *Phạm Minh Hoàng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Trần Thanh Hải, Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Hải Dương:** *Vũ Đình Thế*, 9A, THCS Phả Lại, Chí Linh, *Vũ Xuân Hiệu*, 8B, THCS Lai Cách, Cẩm Giàng; **Hưng Yên:** *Doãn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thu Trang, Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A THCS Yên Phong, **Hải Phòng:** *Đặng Sơn Lâm*, 9A, THCS Hùng Vương, Hồng Bàng; **Quảng Ngãi:** *Đoàn Quốc Vệ*, 7B, THCS Phổ Văn, Đức Phổ; **Ninh Bình:** *Phạm Quang Huy*, 9A, THCS thị trấn Ninh Yên, Yên Khánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T2/269. *Giải phương trình*

$$\frac{11}{x^2} - \frac{25}{(x+5)^2} = 1.$$

Lời giải. Điều kiện cho phương trình có nghĩa là $x \neq -5$ và $x \neq 0$.

Cách 1. Đặt $x+5 = y \neq 0$. Ta có $x^2 = y^2 - 10y + 25$. Thay vào phương trình ta có phương trình tương đương là $y^4 - 10y^3 + 39y^2 - 250y + 625 = 0$. Do $y \neq 0$, nên ta có

$$\left(y^2 + \frac{25}{y^2}\right) - 10\left(y + \frac{25}{y}\right) + 39 = 0 \quad (1)$$

Đặt : $z = y + \dfrac{25}{y}$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta dễ dàng có $|z| \geq 10$ (2)

Phương trình (1) trở thành :

$$z^2 - 10z - 11 = 0 \Rightarrow z = 11 \text{ (do (2))}$$

Thay $z = 11$ vào $z = y + \dfrac{25}{y}$ ta có $y^2 - 11y + 25 = 0$ và suy ra $y_1 = \dfrac{11+\sqrt{21}}{2}$, $y_2 = \dfrac{11-\sqrt{21}}{2}$.

Từ đó ta có $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 2. Biến đổi tương đương phương trình ban đầu ta có

$$11x^2 + 110x + 275 - 25x^2 = x^4 + 10x^3 + 25x$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 10x^3 + 39x - 110x - 275 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 5)(x^2 + 11x + 55) = 0$$

Giải ra ta có $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét. Một số bạn giải sai bài toán này, hoặc kết luận là bài toán vô nghiệm hoặc giải ra vô số nghiệm. Có bạn giải thiếu nghiệm của bài toán. Giải thật ngắn gọn và đầy đủ là các bạn sau đây :

Đồng Nai: *Trần Võ Huy* và *Phạm Văn Thắng*, 9/3 Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Đồng Tháp:** *Lê Thanh Nhân*, 9A1, THCB thị xã Cao Lãnh; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trần Đức Huân*, 9A2, Phước Hòa, Tân Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Hùng*, 9A1 II Supe Lâm Thao, *Tống Xuân Trường*, 9C, THCS Việt Trì, *Trần Thanh Hải*, THCS Việt Trì, *Trần Đình Quang*, 9C, THCS Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Ngô Quý Hoàn*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Tĩnh:** *Phan Như Sâm*, 8D, THCS Hương Khê, *Phạm Việt Dũng*, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 9D, Yên Ninh, *Phạm Quang Huy*, 9 Toán, THCS Trần Ninh, Yên Khánh, *Trịnh Thùy Nhung*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, thị xã Ninh Bình; **Hà Tây:** *Đinh Huy Hoàng*, 9A, THCS Mỹ Đức, *Lê Quang Bách*, 9C, chuyên Sơn Tây, *Nguyễn Viết Chính*, THCS Thạch

Thất; **Hà Nội:** *Vũ Khắc Hiếu*, 8B, Nguyễn Thượng Hiền, *Trần Anh Tuấn*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh, Thanh Xuân; **Hải Phòng:** *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường, Yên Lãng ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Thành giang*, 9A6, thực nghiệm sư phạm Q5, Hồng Bàng, *Nguyễn Minh Hoàng*, THCS Q.5, **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Tuấn*, THCS Yên Lạc, *Trần Quốc Hội*, và *Trần Thu Phương*, 8A, THCS Tự Lập, Mê Linh, *Phùng Thị Phương Lan*, 9A 9A, THCS Tam Đảo, Tam Dương, *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, dânlập, Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh; **Quảng Trị:** *Bạch Ngọc Bảo Phước*, 9B, THCS Gio Linh; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8PTCS, Mỹ Hóa.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/269. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$B = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

trong đó các số dương x, y thỏa mãn $x^2+y^2=1$.

Lời giải. Ta có

$$B = \left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương lần lượt có :

$$x+\frac{1}{2x} \ge \sqrt{2}\,; \quad y+\frac{1}{2y} \ge \sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{xy}} \ge \frac{1}{\sqrt[4]{x^2y^2}}$$

$$\ge \sqrt{\frac{2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}\,; \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$$

$$\Rightarrow B \ge 4+3\sqrt{2} \ (*)$$

Bất đẳng thức (*) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$ Tất cả các bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó B nhỏ nhất là $4+3\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét. 1) Nếu chưa có giả thiết $x, y > 0$ và $x^2+y^2 = 1$ thì nhiều bạn đã chứng minh B không có giá trị nhỏ nhất.

2) Nhiều bạn tự cho thêm giả thiết $x, y > 0$ và đã tìm ra B nhỏ nhất là 8 khi và chỉ khi $x = y = 1$.

3) Các bạn có lời giải tốt là : **Tp Hồ Chí Minh:** *Võ Vưu Phương Trí*, 8^1, và *Nguyễn Hoàng Hiến*, 9^{20}, THCS Hồng Bàng; **Phú Yên:** *Võ Nhật Linh*, 9D, 02-Lý Thường Kiệt, *Đàm Văn Thành*, 9C, THCS Hoàng Hoa Thám, Thị xã Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hà Nội:** *Đinh Thanh Tú*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên; **Hải Dương:** *Nguyễn Tấn Đạt*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Đặng Sơn Lâm*, 9A, THCS Hùng Vương, Hồng Bàng; *Bùi Hải Nam*, 9B, NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Thái Tuấn Anh*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Đồng Tháp:** *Hoàng Công Thiện*, $9A_1$, THCB thị xã Cao Lãnh; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long* 9A, THCS Yên Phong; **Đắc Lắc:** *Đặng Trung Nguyên*, 9A1, THCS Huỳnh Thúc Kháng; **Ninh Bình:** *Phạm Quang Huy*, 9 Toán, THCS thị trấn Ninh Yên, Yên Khánh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Thanh Hiền*, 9 Toán, Năng khiếu Nông Cống; **Nghệ An:** *Đậu Thị Ngọc ánh*, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn; **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang ;

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/269. *Cho tứ giác lồi ABCD. Lấy điểm M bất kì trên đường chéo AC. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BC tại P. Đường thẳng qua M song song với CD cắt AD tại Q. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{MP^2+MQ^2} \le \frac{1}{AB^2}+\frac{1}{CD^2}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

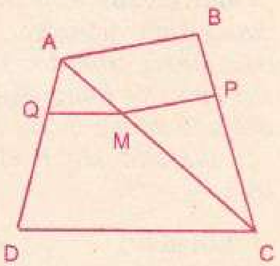
Lời giải. Theo định lí Talét ta có

$$\frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC}\,;$$

$$\frac{MP}{AB} = \frac{CM}{AC}$$

Suy ra

$$\frac{MQ}{CD}+\frac{MP}{AB} = \frac{AM+CM}{AC} = 1 \ (1)$$



Áp dụng bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpxki ta được

$$\left(\frac{MP}{AB}+\frac{MQ}{CD}\right)^2 \le (MP^2+MQ^2)\left(\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{CD^2}\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{MP^2+MQ^2} \le \frac{1}{AB^2}+\frac{1}{CD^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$MP.AB = MQ.CD \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra $\dfrac{MP.AB}{AB^2}+\dfrac{MQ.CD}{CD^2} = 1$,

kết hợp với (3) ta có

$$MP.AB\left(\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{CD^2}\right) = 1.$$

$$MP = \frac{1}{AB\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}\right)}$$

nên $\frac{CM}{CA} = \frac{MP}{AB} = \frac{1}{1 + \frac{AB^2}{CD^2}}$,

do đó $CM = \frac{CD^2.CA}{AB^2+CD^2}$

Tức là dấu đẳng thức xảy ra khi

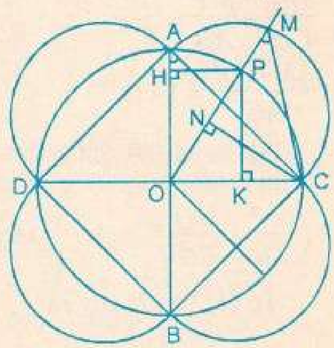
$$CM = \frac{CD^2.CA}{AB^2 + CD^2}.$$

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Phú Thọ: *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Ngọc Yến*, 8A, THCS Xuân Hòa, Mê Linh, *Hoàng Thị Phượng*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Nam Định:** *Vũ Tôn Anh Tuấn*, 9B, THCS Hải Hậu, *Nguyễn Quang Huy*, 9A, Nguyễn Hiền, Nam Trực, *Nguyễn Đăng Hợp*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Đà Nẵng:** *Lê Hoàng Phước*, 9/2 THCS Nguyễn Khuyến.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/269. *Cho đường tròn (O, R) với hai đường kính vuông góc AB và CD. Lấy điểm P trên đường tròn đó. Trên tia OP lấy điểm M sao cho OM bằng tổng các khoảng cách từ P đến các đường thẳng AB và CD. Tìm quỹ tích các điểm M khi P chuyển động trên đường tròn.*



h.1

Lời giải : Giả sử điểm P thuộc cung nhỏ AC của đường tròn (O) (h.1). Gọi H, K là hình chiếu của P lần lượt trên AB, AC và N là hình chiếu của C trên tia OP.

Dễ thấy:

$ON = PH$; $CN = PK$.

Thuận : Nếu điểm M trên tia OP thỏa mãn $OM = PH+PK = PH + HO > OP \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (O). $MN = OM-ON = PH+PK-ON = ON+CN-ON = CN$

$\Rightarrow \Delta NCM$ vuông cân tại $N \Rightarrow \angle OMC = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle OMC = \angle OAC \Rightarrow$ Tứ giác $AOCM$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle AMC + \angle AOC = 180^\circ \Rightarrow \angle AMC = 90^\circ$

$\Rightarrow M$ thuộc nửa đường tròn đường kính AC nằm ngoài đường tròn (O, R). Lập luận tương tự kết luận được : khi P chạy trên đường tròn (O, R) thì M chạy trên các nửa đường tròn đường kính AC, CB, BD, DA nằm ngoài đường tròn (O, R).

Đảo: Nếu M thuộc các nửa đường tròn nói trong kết luận của phần thuận. Không mất tính tổng quát, coi M thuộc nửa đường tròn đường kính AC nằm ngoài đường tròn (O, R). Tia OM cắt cung nhỏ AC của đường tròn (O) tại P. Xác định các điểm H, K, N như trên.

$\angle OMC = \angle OAC = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta NCM$ vuông cân tại $N \Rightarrow MN = CN$.

Vậy : $OM = ON+MN = PH+CN = PH+PK$.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài là các nửa đường tròn đường kính AC, CB, BD, DA nằm ngoài đường tròn (O, R).

Nhận xét. 1) Bài này có 95 bạn tham gia giải. Tất cả đều giải đúng. Tuy nhiên có bạn phải dùng các kiến thức của hình học giải tích (vượt quá chương trình THCS) mà lời giải lại quá dài.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nghệ An:** *Vũ Minh Triều*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Thắng*, 9A THCS Nguyễn Bỉnh khiêm, Biên Hòa; **Phú Thọ:** *Phạm Minh Hoàng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh; **Đà Nẵng:** *Lê Hoàng Phước*, 9A, THCS Nguyễn Khuyến; **Hải Dương:** *Hoàng Trung Tú*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/269. *Cho hai số nguyên dương m và n sao cho n+2 chia hết cho m. Hãy tính số các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn điều kiện : tổng x+y+z chia hết cho m, trong đó mỗi số x, y, z đều không lớn hơn n.*

Lời giải. (Dựa theo bài giải của *Phạm Tuấn Anh*, 11 Toán, ĐHKHTN, **Tp Hồ Chí Minh** và *Nguyễn Trung Lập*, 12A1 chuyên **Vĩnh Phúc**)

Đặt $k = \frac{(n+2)}{m} \in N^*$, ta có $n = km - 2$. Xét các tập hợp :

$D = \{km-1, km\}$, $E = \{1, 2, ..., km\}$,

$A = \{(x,y,z) / x, y, z \in E \setminus D$ và $x+y+z \vdots m\}$,

$B = \{(x, y, z) / x, y, z \in E$ và $x+y+z \vdots m\}$,

$C = \{(x, y, z) / x, y, z \in E, x \in D$ hoặc $y \in D$ hoặc $z \in D$ và $x+y+z \vdots m\}$. Kí hiệu số phần tử của tập hợp X là $|X|$, rõ ràng ta cần tính $|A|$. Dễ thấy $|A| = |B| - |C|$.

• Tính $|B|$: Có km cách chọn $x \in E$. Với mỗi cách chọn $x \in E$ ta có km cách chọn $y \in E$. Với mỗi cách chọn x và y như trên, ta có k cách chọn $z \in E$ sao cho $x+y+z \vdots m$. Do đó $|B| = km.km.k = k^3m^2$.

• Tính $|C|$: Muốn vậy, ta đặt $X = \{(x, y, z) / x \in D, y, z \in E$ và $x+y+z \vdots m\}$, $Y = \{(x, y, z) / y \in D, x, z \in E$ và $x+y+z \vdots m\}$ và $Z = \{(x, y, z) / z \in D, x, y \in E$ và $x+y+y \vdots m\}$. Khi đó ta có $C = X \cup Y \cup Z$, do đó

$|C| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |Z \cap X| + |X \cap Y \cap Z|$. Bằng cách tính tương tự, ta được :

$|X| = |Y| = |Z| = 2k^2m$.

$|X \cap Y| = |Y \cap Z| = |Z \cap X| = 4k$

$$|X \cap Y \cap Z| = \tau(m) = \begin{cases} 2^{4-m}, & \text{nếu } m = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{nếu } m > 3 \end{cases} \quad (*)$$

Từ đó $|C| = 6k^2m - 12k + \tau(m)$.

• Cuối cùng, sau khi thay $k = (n+2)/m$, ta được đáp số là : $|A| = |B| - |C| = k^3m^2 - 6k^2m + 12k - \tau(m) = \dfrac{n^3 + 8}{m} - \tau(m)$, trong đó $\tau(m)$ xác định bởi (*).

Nhận xét. 1) Đa số các bài giải gửi đến Tòa soạn đều dựa vào cách tính số $S(p)$ các nghiệm nguyên dương của phương trình $x+y+z = p$, trong đó p là một số nguyên dương tùy ý cho trước rồi cho p chạy qua các bội có thể được của m. Nhưng theo cách này chỉ có 1 bạn giải đúng. Hầu hết đều mắc sai lầm, cho rằng do $x, y, z \le n$ nên chỉ cần $p \le 3n$.

Từ đó dẫn đến kết luận sai rằng số cần tìm chính là tổng $\Sigma S(t.m)$, trong đó t nhận các giá trị từ 1 đến $\left[\dfrac{3n}{m}\right]$. Cần chú ý là : điều kiện $p \le 3n$ không đảm bảo cho mỗi số x, y, z không lớn hơn n.

2) Một số bạn có nhận xét rất đúng rằng giả thiết $n+2 \vdots m$ là không cần thiết. Trong trường hợp này, giả thiết ấy chỉ nhằm làm bớt tính phức tạp của bài toán. THTT rất hoan nghênh nếu các bạn có thể giải bài toán này mà không cần giả thiết $n+2 \vdots m$.

3) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Thanh Hóa:** *Trần Mạnh Hùng*, 11T, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thường*, 11A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Anh Dũng, Lương Thế Nhân*, 11 chuyên toán ĐHQG; **Trà Vinh:** *Bùi Minh Khoa*, 12 A1, trường PTTH chuyên.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T7/269. *Cho số tự nhiên $n \ge 2$ và hai số thực dương a, b sao cho $n-1 < \dfrac{a}{b} \le n$. Xét các dãy số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn điều kiện : $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$, trong đó $0 < x_i \le b$ $\forall i = 1, 2, ..., n$. Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tích $P = x_1, x_2, ..., x_n$ và xác định tất cả các dãy $x_1, x_2, ..., x_n$ ứng với giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đó.*

Lời giải. *1. Tính giá trị lớn nhất*

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương $x_1, ..., x_n$, ta có

$$P = x_1x_2 ... x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^n = \left(\frac{a}{n}\right)^n \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{a}{n}$ (rõ ràng $0 < \dfrac{a}{n} \le b$)

Vậy $\max P = \left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ và giá trị này đạt được ứng với một dãy duy nhất, đó là dãy $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{a}{n}$.

2. Tính giá trị nhỏ nhất

Cách 1. (của các bạn *Ngô Xuân Bách*, 10 Toán, PTTH chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Vũ Thái Sơn*, lớp 11 Toán, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội**, *Trần Chí Bình Sơn*, 12 Toán, PTTH năng khiếu **Quảng Bình** và một số bạn khác). Không giảm tổng quát ta giả sử $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$. Ta sẽ chứng minh tích $P = x_1x_2...x_n$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x_2 = ... = x_n = b$.

Thật vậy nếu $x_2 < b$. Vì $\sum_{i=3}^{n} x_i \le (n-2)b \Rightarrow$

$x_1 + x_2 = a - \sum_{i=3}^{n} x_i > b(n-1) - (n-2)b = b$.

$\Rightarrow x_1 + x_2 - b > 0$.

Xét dãy số mới gồm $x_3, x_4, ..., x_n, b, (x_1+x_2-b)$ Dãy này thỏa mãn điều kiện đầu bài và do $b(x_1+x_2-b) < x_1x_2$ (vì $(b-x_1)(b-x_2) > 0$) nên $x_1x_2...x_n > x_3x_4...x_nb(x_1+x_2-b)$.

Như vậy để tích P đạt giá trị nhỏ nhất ta phải có $x_2 = x_3 = ... = x_n = b$; $x_1 = a-b(n-1)$.

Như thế $\min P = b^{n-1}[a-(n-1)b]$ và giá trị này đạt được khi trong n số $x_1, x_2, ..., x_n$ có $n-1$ số bằng b, và số còn lại bằng $a-(n-1)b$.

Cách 2. (của bạn *Trần Tuấn Anh*, lớp 12 Toán, trường Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**).

Đặt $y_i = \frac{x_i}{b}$, $i = 1, 2, ..., n \Rightarrow 0 < y_i < 1$ và $\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{a}{b}$.

Có thể giả sử mà không làm mất tính tổng quát là $y_n = \min(y_1, ..., y_n)$. Rõ ràng ta có

$$\begin{cases}(1-y_1)(1-y_2) \geq 0 \\ (1-y_1y_2)(1-y_3) \geq 0 \\ \ldots\ldots \\ (1-y_1y_2\ldots y_{n-2})(1-y_{n-1}) \geq 0\end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên rồi rút gọn, ta có

$(n-2) \geq y_1+y_2+...+y_{n-1}-y_1y_2...y_{n-1} =$

$= \left(\frac{a}{b} - y_n\right) - y_1y_2...y_{n-1}$ Từ đó suy ra

$$\frac{P}{b^n} = (y_1y_2...y_{n-1})y_n \geq \left[\frac{a}{b} - y_n - (n-2)\right]y_n \quad (1)$$

Do $y_n = \frac{a}{b} - (y_1+...+y_{n-1}) \geq \frac{a}{b} - (n-1)$ và $y_n \leq 1$

$\Rightarrow (y_n-1)\left[y_n - \frac{a}{b} + (n-1)\right] \leq 0$, hay

$$\left[\frac{a}{b} - y_n - (n-2)\right]y_n \geq \frac{a}{b} - (n-1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{P}{b^n} \geq \frac{a}{b} - (n-1)$

hay $P \geq [a - (n-1)b]b^{n-1}$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow y_1 = y_2 = ...$ $= y_{n-1} = 1$ và $y_n = \frac{a}{b} - (n-1)$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = b$ và $x_n = a - (n-1)b$. Do vai trò bình đẳng giữa các x_i, nên suy ra

$\min P = [a - (n-1)b]b^{n-1}$ vì giá trị này đạt được khi trong n số $x_1, x_2, ..., x_n$ có n số bằng b và số còn lại bằng $a - (n-1)b$.

Nhận xét. 1) Có 73 bạn tham gia gửi bài. Cả 73 bạn đều cho lời giải đúng phần tìm giá trị lớn nhất. Có 10 bạn giải sai phần hai, trong đó có 5 bạn cholà không tồn tại giá trị bé nhất, và 5 bạn tính sai giá trị bé nhất.

2) Phần lớn các bạn đều có lời giải tương tự như hai cách giải trên. Có vài bạn sử dụng bất đẳng thức Côsi, hoặc bất đẳng thức Becnuli để tìm giá trị nhỏ nhất nhưng dài dòng.

3) Hoan nghênh bạn *Hoàng Ngọc Minh*, học sinhlớp 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ** là học sinh THCS duy nhất gửi bài giải và cho lời giải đúng.

4) Ngoài các bạn nêu tên ở trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Dương*, 10A Toán, *Ngô Quốc Anh*, 11A Toán và *Bùi Viết Lộc*, 12A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, *Vũ Thành Long*, 10A1, PTCT, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Hoài Anh*, 10 Toán, Hà Nội - Amsterdam; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Anh Dũng*, *Lâm Hùng Nguyên*, 11 Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Hải Dương:** *Phạm Hồng Quân*, 12 Toán, *Lê Hải Yến*, 10 Toán, PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 10 Toán, PTNK Trần Phú; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoài Vũ*, 11A1, *Hoàng Xuân Quang*, 10A, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 10CT, PTTH Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Hàn Ngọc Sơn*, *Vũ Đức Nghĩa*, *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thương*, 11A - PTTH Hermann Gmeiner-Vinh, *Lê Tất Thắng*, 11A, CT ĐHSP Vinh; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn*, 11 Toán, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, 11 Toán, THCB Cao Lãnh; **Sơn La:** *Nguyễn Bích Vân*, 12T3, trường NK Sơn La; **Hà Giang:** *Nguyễn Kim Cương*, 11CT, PTTH chuyên Hà Giang, *Ma Văn Hải*, 10B, PTTH Lê Hồng Phong, Hà Giang.

PHAN HUY KHẢI

Bài T8/269. *Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{1}{2-x}\right) = 2f(x) - 3$ với mọi $x \in R \setminus \{2\}$* (1)

Lời giải. (của đa số các bạn trong 180 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn). Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Thay $x = 1$ vào (1), ta được $f(1) = 3$.

Xét $x \neq 1$.

Đặt $\frac{1}{x-1} = t$ thì $t \neq 0$, $t \neq 1$, $x = 1 + \frac{1}{t}$, $\frac{1}{2-x} = 1 + \frac{1}{t-1}$. Khi đó (1) có dạng

$$f\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = 2f\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 3 \ \forall t \in R \setminus \{0; 1\} \quad (2)$$

Kí hiệu $g(t) = f\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 3$, $t \in R \setminus \{0; 1\}$.

Phương trình (2) tương đương với phương trình

$$g(t-1) = 2g(t) \ \forall t \in R \setminus \{0; 1\},$$

tương đương $h(t-1) = h(t) \ \forall t \in R \setminus \{0; 1\}$, (3) trong đó $h(t) = 2^t g(t)$.

Như vậy ta có

$$f(x) = \begin{cases} 3 \text{ khi } x = 1 \\ g\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + 3 \text{ khi} x \neq 1 \end{cases} \quad (4)$$

với $h(t)$ là hàm số tùy ý xác định với $t \in R \setminus \{0\,;1\}$ thỏa mãn (3) và $g(t) = 2^{-t}\,.\,h(t)$.

Chú ý. do ta viết các phương trình hàm tương đương nên các hàm số xác định như (4) sẽ thỏa mãn phương trình (1).

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/269. *Có tồn tại hay không một đa giác đều 600 cạnh trong mặt phẳng tọa độ Đềcác Oxy mà tọa độ các đỉnh của nó đều là số hữu tỉ ?*

Lời giải 1. Giả sử tồn tại một đa giác đều $A_1A_2...A_{600}$ mà các tọa độ (x_i, y_i) của các đỉnh $A_i (i = 1, 2, ..., 600)$ đều là các số hữu tỉ. Gọi $\omega\,(x_o, y_o)$ là tâm của các đa giác đều, thế thì :

$\sum_{i=1}^{600} \overrightarrow{\omega A_i} = \overrightarrow{0}$, và do đó, ta được :

$$x_o = \frac{1}{600}\sum_{i=1}^{600} x_i \quad \text{và} \quad y_o = \frac{1}{600}\sum_{i=1}^{600} y_i$$

Như vậy, các tọa độ (x_o, y_o) của tâm ω cũng là số hữu tỉ.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác, ta được :

$$\omega A_i^2 = R^2 = (x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2.$$

Vì $x_o, y_o; x_i, y_i\ (\forall i)$ đều thuộc **Q** nên $R^2 \in \mathbf{Q}$. Bây giờ ta tính độ dài đường chéo A_1A_{50} bằng hai cách khác nhau. Một mặt,

$A_1A_{50}^2 = (x_{50} - x_1)^2 + (y_{50} - y_1)^2$; vì $x_1, y_1; x_{50}, y_{50} \in \mathbf{Q}$ nên $A_1A_{50}^2 \in \mathbf{Q}$. (1)

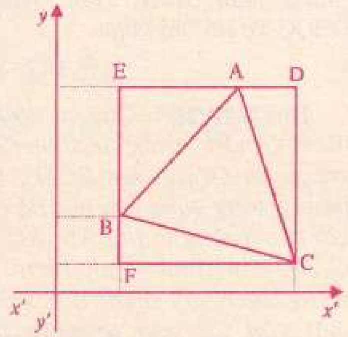
Mặt khác, A_1A_{50} là đáy của tam giác ωA_1A_{50} cân ở ω, có góc $\angle A_1\omega A_{50} = 30^o$ và cạnh bên bằng R nên ta được :

$$A_1A_{50}^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 30^o = R^2(2 - \sqrt{3})$$

Do đó, $\dfrac{A_1A_{50}^2}{R^2} = 2 - \sqrt{3}$ là một số vô tỉ, mâu thuẫn với (1) $\Rightarrow$ không tồn tại đa giác thỏa mãn đề bài.

Lời giải 2. (của nhiều bạn).

Giả sử tồn tại một đa giác đều 600 cạnh $A_1A_2...A_{600}$ thỏa mãn bài toán. Gọi A là đỉnh A_1, B là A_{201}, C là A_{401} thì ABC là một tam giác đều mà tọa độ các đỉnh là số hữu tỉ.



Bây giờ ta hãy tính diện tích tam giác đều ABC bằng hai cách khác nhau. Một mặt, dựng hình chữ nhật $CDEF$ ngoại tiếp tam giác đều ABC sao cho hình chữ nhật đó có cặp cạnh đối song song với trục tung và cặp cạnh đối kia song song với trục hoành, có một đỉnh trùng với một đỉnh của tam giác, chẳng hạn như hình vẽ (trường hợp khác xét tương tự).

Vì A, B và C có các tọa độ là những số hữu tỉ nên dễ thấy diện tích hình chữ nhật $CDEF$ và diện tích ba tam giác vuông ABE, BCF và CAD đều là những số hữu tỉ nên

$s(ABC) = s(CDEF) - s(ABE) - s(BCF) - s(CDA)$ là một số hữu tỉ .

Mặt khác, $s(ABC) = AB^2\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ là một số vô tỉ. Hai kết quả mâu thuẫn nhau. Ta đi đến kết luận như lời giải 1 đã nêu lên ở trên.

Nhận xét. 1) Một số bạn nêu lên nhận xét đúng là có thể tổng quát hóa bài toán với n là bội của 3 hoặc bội của 5.

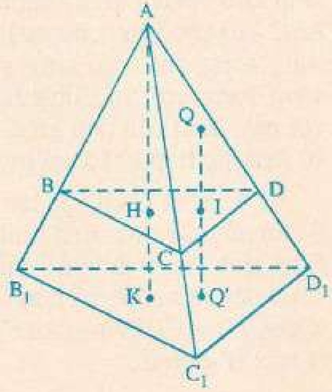
2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Giang: *Nguyễn Kim Cương*, 11CT, PTTH chuyên; **Yên Bái:** *Hà Thế Hùng*, 11A1, PTTH chuyên; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Ngọc Đông, Hoàng Xuân Quang*, 10A1, PTTH chuyên; **Hà Nội:** *Nguyễn Hữu Việt Khuê*, 10T, Hà Nội - Amsterdam, *Vũ Thành Long*, 10A1, PTCT ĐHSP Hà Nội, *Vũ Thái Sơn*, 11T, *Bùi Việt Lộc, Hoàng Tùng*, 12A, PTCT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Hoàng Trung Tú*, 9A, *Phạm Hồng Quân*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Lương Minh Hải, Phạm Đức Hiệp*, 10Ct, PTNK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp*, 10T, PTTH Lam Sơn, *Nguyễn Khắc Trung*, 11A2, PTTH Lê Hoàn, Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Mai Hương*, 10G, PTTH Huỳnh Thúc Kháng; *Lê Anh Tuấn*, 11A, PTCT-Tin, ĐHSP Vinh; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Thuận, Nguyễn Hải Viễn*, 11T, PTTH chuyên Lê Khiết; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 12T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Tp Hồ Chí**

Minh: *Trần Giang, Trần Quang,* 10T, PTTH NK ĐHQG Tp Hồ Chí Minh.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/269. *Cho tứ diện ABCD. Lấy một điểm Q nằm trong tứ diện. Gọi Q' là điểm đối xứng với Q qua mp(BCD). Qua Q' dựng mặt phẳng song song với mp(BCD), mặt phẳng này cắt các đường thẳng AB, AC, AD lần lượt ở B_1, C_1, D_1 ta được hình chóp cụt $BCDB_1C_1D_1$. Bằng cách lấy điểm đối xứng với Q qua mỗi mặt còn lại của tứ diện rồi dựng các mặt phẳng song song tương tự như trên, ta được 3 hình chóp cụt nữa. Hãy xác định vị trí điểm Q để tổng các thể tích của 4 hình chóp cụt tạo thành là nhỏ nhất.*



Lời giải. Dựa theo *Hoàng Tuấn Anh*, 11H, THPT công nghiệp Việt Trì, **Phú Thọ** và *Trần Quang Khải*, 11B3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, **Hải Dương**).

Gọi thể tích tứ diện $ABCD$ là V; thể tích các hình chópcụt tương ứng với các đáy BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng là V_1, V_2, V_3, V_4; thể tích các hình chóp $QBCD$, $QCDA$, $QDAB$, $QABC$ tương ứng là v_1, v_2, v_3, v_4. Với kí hiệu như hình vẽ, theo giả thiết có $AH = h$, $IQ = IQ' = HK = k$.

Theo công thức tính tỉ số thể tích hình chóp có

$$\frac{V+V_1}{V} = \frac{V(AB_1C_1D_1)}{V} = \left(\frac{AK}{AH}\right)^3 = \left(\frac{h+k}{h}\right)^3 =$$
$$\left(1+\frac{h}{k}\right)^3 = \left(1+\frac{v_1}{V}\right)^3 = \left(\frac{V+v_1}{V}\right)^3 \Rightarrow$$
$$V_1 = \frac{(V+v_1)^3}{V^2} - V.$$ Tương tự với V_2, V_3, V_4.

Gọi tổng các thể tích của 4 hình chóp cụt là T thì

$$T = \sum_{i=1}^{4} V_i = \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{4}(V+v_i)^3 - 4V \qquad (1)$$

Dễ dàng chứng minh được BĐT :

$$x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$$ từ đó có BĐT :

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{(x+y+z+t)^3}{16} \qquad (*)$$

trong đó x, y, z, t là các số dương.

Áp dụng (*) vào (1) với chú ý rằng $v_1+v_2+v_3+v_4 = V$ ta được

$$T = \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{4}(V+v_i)^3 - 4V \geq$$
$$\geq \frac{1}{16V^2}(4V+v_1+v_2+v_3+v_4)^3 - 4V = \frac{61}{16}V$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t$

$\Leftrightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v_4$ (2)

$\Leftrightarrow Q$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

(Xét (2) $\Leftrightarrow$ (3) như lời giải bài T7/265 THTT 11/1999)

Nhận xét. 1) Các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng, tuy nhiên khá nhiều bạn biến đổi dài dòng khi khai triển biểu thức

$$T = V\sum_{i=1}^{4}\left(1+\frac{k_i}{h_i}\right)^3 - 4V$$ rồi đánh giá các tổng của 4 lũy thừa cùng bậc.

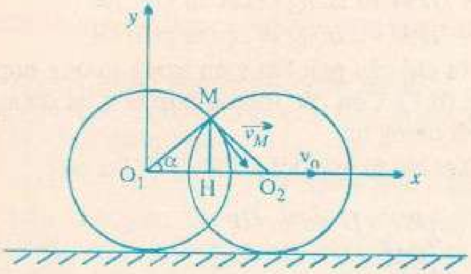
Nhiều bạn chứng minh (*) bằng cách sử dụng 2 lần BĐT Bunhiacôpxki. Một số bạn có nhận xét đúng rằng đây là sự phát biểu lại bài T10/198 THTT 4/1994 của tác giả Trần Duy Hinh.

2) Các bạn *Trần Trung Hiếu*, 11A10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**, *Phan Lạc Linh*, 11 Toán I, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**, *Đào Văn Sáng*, 11T, THPT NK **Hưng Yên**; *Trịnh Lê Hùng*, 12T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**, *Lê Tất Thắng*, 11A, PTCT ĐHSP Vinh, **Nghệ An** đã nêu bài toán tổng quát khi lấy điểm Q' trên tia $QI \perp$ mp(BCD); $I \in$ mp(BCD) sao cho $QQ' = k.QI$. Với $0 < k < 1$ thì Q' nằm trong tứ diện $ABCD$, với $k>1$ thì Q' nằm ngoài tứ diện $ABCD$.
3) Các bạn sau cũng có lời giải ngắn gọn : **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thanh Hải, Hoàng Xuân Quang, Nguyễn Văn Giáp*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Trần Thị Hà Phương*, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Hải Dương:** *Nguyễn Xuân Cường*, 11T, *Phạm Quốc Hoàng*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 10T, THPT NK Trần Phú; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, THPT Hà Nội - Amsterdam; *Đỗ Thị Thúy Lan*, 11A2, PTCT ĐHSP Hà Nội; *Vũ Thái Sơn*, 11AT, *Hoàng Tùng*, 12A, PTCT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Hòa Bình:** *Đỗ Thị Thu Hà*, 12T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Hà Tĩnh:** *Lê Tâm*, 9G, THCS Kỳ Anh; **Quảng Trị:** *Hoàng Minh Phụng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** *Đặng Ngọc*

Hiền, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Thuận:** *Phạm Lê Phương Duy*, 11A6, THPT Trần Hưng Đạo, Phan Thiết.

PHI PHI

Bài L1/269. *Trên mặt phẳng nằm ngang có một vành đai đứng yên, bán kính R. Một vành đai khác giống thế, chuyển động với vận tốc $\vec{v_o}$ cạnh vành đai đầu. Tìm mối liên hệ phụ thuộc của vận tốc của giao điểm trên của hai vành đai (điểm M trên hình vẽ) vào khoảng cách d giữa 2 tâm. Biết rằng hai vành đai đều mỏng và cái thứ hai chuyển động sát cái thứ nhất.*



Hướng dẫn giải: Gắn hệ trục tọa độ phẳng, thẳng đứng vào tâm O_1 của vành đai đứng yên. Giao điểm M dịch chuyển trên vành đai đứng yên, do đó véctơ vận tốc $\vec{v_M}$ tiếp tuyến với vành đai đứng yên, tức là vuông góc với bán kính O_1M. Gọi H là hình chiếu của M trên trục O_1x, ta có $v_{Mx} = v_H$ (1).

Mặt khác tam giác MO_1O_2 luôn luôn cân ta có :

$O_1H = \frac{1}{2}O_1O_2$. Suy ra $v_H = \frac{1}{2}v_o$ (2).

Từ (1) và (2) ta được :

$v_{Mx} = \frac{v_o}{2}$; $v_M \sin\alpha = \frac{v_o}{2}$ (3). Thay

$\sin\alpha = \frac{MH}{O_1M} = \frac{\sqrt{R^2 - (d^2/4)}}{R}$ vào (3) được :

$v_M = \frac{v_oR}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$ (với $d < 2R$)

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ (chú ý nêu điều kiện) và gọn :

Hà Nội: *Nguyễn Việt Dũng*, 10L1, PTTH Hà Nội - Amsterdam; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 11, PTTH Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Bình Định:** *Võ Trung Đông*, 11E, Quốc học Quy Nhơn; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 11 Lí, PTTH chuyên Tiền Giang; **Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, PTTH Phan Bội Châu; **Đà Nẵng:** *Phạm Minh Tuấn*, 12A, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Nguyễn Văn Nhu*, 11B1, PTTH Lê Hồng Phong, Hòa Bình 2, Tuy Hòa; **Yên Bái:** *Phạm Hồng Chinh*, 11A1, PTTH chuyên Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** *Lê Khánh Hùng, Trần Tuấn Nghĩa, Nguyễn Kim Thắng*, 11A3, *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1, *Dương Trung Kiên*, 10A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh

MAI ANH

Bài L2/269. *Cho mạch điện xoay chiều như trên hình vẽ. Hiệu điện thế xoay chiều giữa hai đầu A, B là : $u_{AB} = 80\sqrt{2}\sin 100\pi t (V)$, R là biến trở*

1) Khi $R = R_1$ thì

$u_{MB} = 60\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ *(V);*

$i = \sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$ *(A).*

Viết biểu thức u_{AM} và tính các giá trị R_1, L, r, C.

2) Khi $R = R_2$ thì công suất trên biến trở R có giá trị cực đại. Tìm R_2 và giá trị cực đại của công suất.

Hướng dẫn giải. Áp dụng phương pháp giản đồ, từ hình vẽ lập luận và tính toán tìm được :

$u_{AM} \approx 100\sqrt{2}\sin(100\pi t - 0,643)$ (V)

$R_1 \approx 39,3\Omega$; $L \approx 0,165H$; $r = 30\Omega$; $C \approx 34,6\mu F$; $P = \max P = 40W$ khi $R = 50\Omega$ (xem lời giải chi tiết ở số 270 THTT (12/1999).

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Nghệ An: *Trịnh Văn Bằng*, 12A, PTTH Thanh Lương III; **Hà Tĩnh:** *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh; **Bắc Giang:** *Nguyễn Trọng Trường*, 12C, PTTH Hiệp Hòa số 2; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thanh Thuận*, 11T, THCB Tx Cao Lãnh; **Tiền Giang:** *Trần Tiến Lộc*, 11 Lí, PTTH chuyên Tiền giang; **Đắc Lắc:** *Đinh Văn Trung*, 12 Lí I, chuyên Nguyễn Du; **Yên Bái:** *Hoàng Trọng Huy*, 11A2, PTTH chuyên Yên Bái; **Tp Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Minh Sơn*, 12 Lí, PTNK-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh.

MAI ANH

SUY NGHĨ về một BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

NGUYỄN MINH HÀ
(*Hà Nội*)

Trong cuốn "Tuyển tập 340 bài toán hình học không gian" của *IF.*Sharygin có một bài toán hay.

Bài toán 1: *Trong không gian cho ba véctơ* $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ *chứng minh rằng :*

$$\sum_{1\le i<j\le 3} |\vec{x_i}+\vec{x_j}| \le \Big|\sum_{1\le i\le 3} x_i\Big| + \sum_{1\le i\le 3} |\vec{x_i}| \qquad (*)$$

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh chi tiết trên báo THTT số 163 (5/1988) nhưng chỉ nêu 3 trường hợp xảy ra đẳng thức.

Có thể xem chứng minh ở bài toán 5.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có một trong bốn trường hợp sau xảy ra :

a) $\sum_{1\le i\le 3} \vec{x_i} = \vec{0}$

b) Một trong ba véctơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ bằng $\vec{0}$

c) Ba véctơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ cùng hướng

d) Hai trong ba véctơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ cùng hướng. Véctơ còn lại ngược hướng với hai véctơ trên và độ dài của nó lớn hơn độ dài của tổng hai véctơ đó.

Bất đẳng thức (*) có nhiều hệ quả và phát triển hay. Hệ quả đầu tiên của nó là :

Bài toán 2 : (Dự tuyển thi toán quốc tế năm 1987 - đề của Pháp).

Cho hình hộp ABCD.EFGH. Chứng minh rằng:

$$AF+AH+AC < AG+AB+AD+AE$$

Để giải bài toán 2, ta đặt : $\vec{AB} = \vec{x_1}$; $\vec{AD} = \vec{x_2}$; $\vec{AE} = \vec{x_3}$. Sau đó áp dụng bất đẳng thức (*).

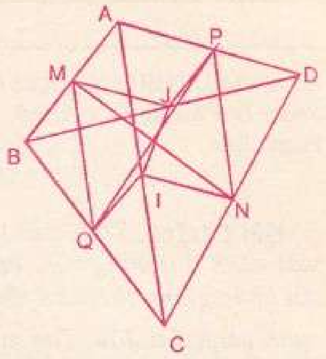
Hệ quả khác của (*) là

Bài toán 3: *Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng :*

$$AC+BD+2IJ < AB+BC+CD+DA$$

Để giải bài toán 3, ta đặt $\vec{AB} = \vec{x_1}$; $\vec{BC} = \vec{x_2}$; $\vec{CD} = \vec{x_3}$. Sau đó lại áp dụng bất đẳng thức (*).

Trường hợp đặc biệt, khi thay tứ diện *ABCD* bởi tứ giác *ABCD*, bài toán 3 có một lời giải sơ cấp. Thật vậy, gọi *M, N, P, Q* theo thứ tự là trung điểm của *AB, CD, AD, BC*. Ta thấy *MN, PQ, IJ* đồng quy tại trung điểm mỗi đường. Vì vậy chỉ có thể xảy ra một trong bốn trường hợp sau :



Hình 1

+ *IJPN* và *IJMQ* là các tứ giác lồi

+ *JIPN* và *JIMQ* là các tứ giác lồi

+ *IJPM* và *IJNQ* là các tứ giác lồi

+ *JIPM* và *JINQ* là các tứ giác lồi

Ta chỉ cần giải bài toán trong trường hợp thứ nhất (h.1). Còn các trường hợp còn lại được giải quyết tương tự.

Xét hai tứ giác lồi *IJPN, IJMQ* ta có :

$$\begin{cases} PN + IJ < JN + IP \\ QM + IJ < IM + JQ \end{cases}$$

Cộng theo từng vế hai BĐT trên được

$$AC + 2IJ < BC + CD \qquad (1)$$

Mặt khác : $BD < AB + DA \qquad (2)$

Từ (1); (2) ta có :

$$AC+BD+2IJ < AB+BC+CD+DA.$$

Hệ quả tiếp theo của (*) khá sâu sắc.

Bài toán 4: *Cho tam giác ABC, trọng tâm G, M là một điểm bất kì. N là điểm thỏa mãn* $\vec{MN} = 3\vec{MG}$. *Chứng minh rằng :*

$$NA+NB+NC \le MN+MA+MB+MC$$

Để giải bài toán 4, ta đặt : $\vec{MA} = \vec{x_1}$; $\vec{MB} = \vec{x_2}$; $\vec{MC} = \vec{x_3}$. Dễ thấy :

$$\vec{AN} = \vec{x_2} + \vec{x_3};\ \vec{BN} = \vec{x_3} + \vec{x_1};\ \vec{CN} = \vec{x_1} + \vec{x_2};$$

$$\vec{MN} = \vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3}.$$

Áp dụng (*), ta có điều phải chứng minh. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi *M* trùng với một trong 4 điểm *A, B, C, G*.

Bất đẳng thức sau là sự phát triển của (*) từ trường hợp ba véctơ sang trường hợp bốn véctơ.

Bài toán 5: *Cho bốn véctơ* $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}$. *Chứng minh rằng :*

$$\sum_{1\le i<j<k\le 4} |\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}| \le 2\Big|\sum_{1\le i\le 4} \vec{x_i}\Big| + \sum_{1\le i\le 4} |\vec{x_i}| \qquad (**)$$

Chứng minh: Ta có :

$$\Big(\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|+\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|\Big)\Big(\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|-\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|\Big)$$

$$=\Big(\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|\Big)^2-\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|^2$$

$$=2\sum_{1\le i<j\le 4}\big(|\vec{x_i}||\vec{x_j}|-\vec{x_i}.\vec{x_j}\big)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\le i<k\le 4}\big((|\vec{x_i}|+|\vec{x_j}|+|\vec{x_k}|)^2-|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|^2\big)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j<k\le 4}\big(|\vec{x_i}|+|\vec{x_j}|+|\vec{x_k}|+|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|\big)\times$$

$$\times\big(|\vec{x_i}|+|\vec{x_j}|+|\vec{x_k}|-|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|\big)\quad(3)$$

Mặt khác với $1\le i<j<k\le 4$ có :

$$|\vec{x_i}|+|\vec{x_j}|+|\vec{x_k}|+|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|\le$$

$$\le\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|+\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|$$

$$|\vec{x_i}|+|\vec{x_j}|+|\vec{x_k}|-|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|\ge 0\quad(4)$$

Từ (3), (4) suy ra :

$$\Big(\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|+\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|\Big)\Big(\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|-\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|\Big)$$

$$\le\frac{1}{2}\Big(\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|+\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|\Big)\times$$

$$\times\Big(3\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|-\sum_{1\le i<j<k\le 4}|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|\Big)$$

$$\Rightarrow 2\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|-2\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|\le$$

$$3\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|-\sum_{1\le i<j<k\le 4}|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|$$

$$\Rightarrow\sum_{1\le i<j<k\le 4}|\vec{x_i}+\vec{x_j}+\vec{x_k}|\le 2\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|+\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi một trong ba trường hợp sau xảy ra :

+ $\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}=\vec{0}$

+ Bốn véc tơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}$ cùng hướng

+ Ba trong bốn véctơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}$ cùng hướng. Véctơ còn lại ngược hướng với ba véctơ đó và độ dài của nó lớn hơn độ dài của tổng ba véctơ đó.

Việc kiểm tra chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Kết quả sau là hệ quả trực tiếp của (**)

Bài toán 6. *Cho tứ diện ABCD, trọng tâm G. M là một điểm bất kì. N là điểm thỏa mãn* $\vec{MN}=4\vec{MG}$. *Chứng minh rằng :*

$$NA+NB+NC+ND\le 2MN+MA+MB+MC+MD$$

Cũng giống như trường hợp bài toán 4, để giải bài toán 6, ta đặt : $\vec{MA}=\vec{x_1}, \vec{MB}=\vec{x_2}, \vec{MC}=\vec{x_3}; \vec{MD}=\vec{x_4}$. Sau đó sử dụng (**). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv G$.

Bài toán 6 chính là bài T10/267 THTT (3/1999). Lời giải vừa nêu là lời giải chuẩn của nó. Do sơ suất, tác giả bài báo này đã giới thiệu với bạn đọc một lời giải có chỗ không chuẩn như sau :

$$AN-AM=\frac{2\vec{AO}.\vec{MN}}{AN+AM}$$

$$\Rightarrow AN-AM\le\frac{2\vec{AO}.\vec{MN}}{MN}$$

Suy luận trên chỉ đúng nếu $\vec{AO}.\vec{MN}\ge 0$.

Tác giả chân thành xin lỗi bạn đọc vì sơ suất này.

Bất đẳng thức (*) còn nhiều hướng phát triển khác nữa. Tuy nhiên, do khuôn khổ bài báo có hạn xin tạm dừng tại đây. Cuối cùng, xin giới thiệu với bạn đọc hai bài toán xem như là bài tập sau khi đọc bài báo này.

Bài toán 7. *Cho bốn véctơ* $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4}$. *Chứng minh rằng :*

$$\sum_{1\le i<j\le 4}|\vec{x_i}+\vec{x_j}|\le\Big|\sum_{1\le i\le 4}\vec{x_i}\Big|+2\sum_{1\le i\le 4}|\vec{x_i}|$$

Bài toán 8. *Cho tứ diện ABCD, trọng tâm G. Gọi X, Y, Z, T, U, V là trung điểm của các cạnh. M là điểm bất kì. Chứng minh rằng :*

$$MX+MY+MZ+MT+MU+MV<$$
$$<2MG+MA+MB+MC+MD./.$$

CUỘC CHƠI

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Thật là ngẫu nhiên, lần này ngày sinh may mắn lại rơi vào **ngày 9**. Các bạn có ngày sinh là **9 tháng 4** sẽ được trao quà sinh nhật. Theo luật chơi thì chỉ chọn 5 bạn (nhờ bốc thăm), nhưng Câu lạc bộ xin chọn cả 8 bạn :

1) *Hoàng Đức Bình*, 1982, 12A1, THPT Tiên Lãng, **Hải Phòng**

2) *Hà Việt Hùng*, 1984, 10B, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân, **Thanh Hóa**.

3) *Nguyễn Khắc Bình*, 1976, THPT Vĩnh Linh, Vĩnh Linh, **Quảng Trị**

4) *Đào Hoàng Thanh* ?, khu IV, thị trấn Tiên Lãng, **Hải Phòng** (Hãy báo gấp năm sinh!)

5) *Lê Minh Đức*, 1984, 10A4, THPT Phúc Yên, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**.

6) *Lê Thanh Tùng*, 1985, số nhà 205 thị trấn Thanh Hà, **Hải Dương**.

7) *Trịnh Thị Hồng Hải*, 1984, 10T THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**

8) *Hoàng Văn Huynh*, 1986, 8B, THCS Thành Nhân, Ninh Giang, **Hải Dương**

Ba bạn thích ngày sinh 9 tháng 4 sẽ được nhận quà của Câu lạc bộ :

1) *Đào Hữu Việt*, 10A6, TH chuyên ban Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**.

2) *Lê Anh Vũ*, K254/17, Hoàng Diệu, thành phố **Đà Nẵng.**

3) *Nguyễn Thị Duyên*, đội 3, Văn Sơn, Đô Lương, **Nghệ An**.

Cám ơn các hội viên, các bạn tiếp tục chờ nhé !

THTT

KẾT QUẢ THI THƠ XUÂN

Các đồng nghiệp báo Văn nhìn số lượng thơ dự thi gửi về báo Toán cũng phải ngạc nhiên. Thế mới biết : dân mê Toán hầu hết đều "nghiền" cả Thơ! Đa số các bài thơ gửi về đều chung một chủ đề với "bài dạo" của Ngọc Mai : sự gắn bó của mình với Toán. Đặc biệt Toán trở thành người tình của nhiều bạn. Hội đồng giám khảo đã cân nhắc và quyết định trao giải đồng hạng cho các tác giả :

1. *Hoàng Ngọc Trúc*, Sở Giáo dục - Đào tạo Nam Định

2. *Vũ Thế Thám*, 383/5/18 đường Bình Giã, P.8, TP Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu.

3. *Lê Thị Thu Hiền*, lớp 12A5, THPT chuyên Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc.

4. *Cao Xuân Hùng*, 11A, THPT Diễn Châu 4, Diễn Châu, Nghệ An.

Xin cám ơn tất cả các bạn. Trân trọng giới thiệu các bài thơ được giải.

GỬI NGƯỜI YÊU

(Vừa trúng tuyển vào trường ĐH Nông nghiệp I Hà Nội)

Toán *yêu, em nhớ đừng buồn*
Học *nghề "kĩ thuật làm vườn" có sao ?*
Và *khi đã quyết chí cao*
Tuổi *đang phơi phới nghề nào chẳng xong*
Trẻ *trung nhẹ bước như không*
Chào *em duyên dáng bóng hồng xinh xinh*
Xuân *về sương sớm lung linh*
Mới *nghe rạo rực chuyện tình đôi ta.*

Hoàng Ngọc Trúc

CÙNG NGƯỜI YÊU TOÁN

Toán *xin nói với những người yêu* **toán**
Học *phải say sưa, học bạn* **học** *thầy*
Và *ở báo : Toán học* **và** *tuổi trẻ*
Tuổi *trẻ cần xem,* **tuổi** *trẻ cần say*
Trẻ *đời ta,* **trẻ** *những hàng cây*
Chào *chị,* **chào** *anh - Người dày công vun đắp*
Xuân! **Xuân** *tới - Niềm say mê rộng khắp*
"Mới triệu mầm non" - Thế hệ trẻ hôm nay./.

Cao Xuân Hùng

TOÁN - TRONG TÔI LÀ THẾ

Toán *trong tôi là thế*
Học *mãi học mãi thôi*
Và *cho đến muôn đời*
Tuổi *cao không hề nản*
Trẻ *hơn vì có toán*
Chào *năm mới con Rồng*
Xuân *về vui mênh mông*
Mới *bầu trời toán học*

Lê Thị Thu Hiền

HỌC TOÁN - YÊU TOÁN

Toán *với Anh như bóng với hình*
Học *em biết khó vẫn hết mình*
Và *khi đã hiểu thì vui lắm*
Tuổi *có cộng thêm vẫn vẹn tình*
Trẻ *nay lớp lớp say mê học*
Chào *đón tương lai bát ngát xanh*
Xuân *về càng học càng thêm trẻ*
Mới *mãi tình yêu toán với anh.*

Vũ Thế Thám

TIN VỀ... CÂU ĐỐI

Câu lạc bộ xin đăng một số vế đối hơi hơi được để bạn đọc gần xa tham khảo. Giải thưởng vẫn xin được treo lại và chờ đợi những vế đối nghe sướng hơn. Mong các bạn hưởng ứng tiếp.

Vế thách : Tết Tây, tết ta, tổ Toán toàn thi thơ Tết

Vế đối : 1) Tài trai, tài trẻ, tết Thìn thích tính toán tài

(Nguyễn Văn Tín, Phổ Tang, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc,

2) Thuê thầy, thuê thợ, thôn trang trả trước tiền thuê

(Hoàng Ngọc Trúc, Sở GD-ĐT Nam Định)

Vế thách : Rượu cần uống cho đủ.

Vế đối : 1) Hàng giả cho không thiết

(Hoàng Ngọc Trúc, Sở GD-ĐT Nam Định)

2) Trứng giả ăn không kết

(Lê Văn Bình, 10B, THPT Lê Lợi)

CLB

ĐÃ THẲNG HÀNG CHƯA ?

Bài toán. Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau với tiếp tuyến chung ngoài MM' và tiếp tuyến chung trong NN' (M, N là tiếp điểm của (O); M', N' là tiếp điểm của (O')). Gọi giao điểm của các đường thẳng MM' và NN' là P, giao điểm của các đường thẳng MN và $M'N'$ là Q. *Chứng minh rằng : O, Q, O' thẳng hàng.*

Lời giải: (trong một quyển sách)

Nối OQ, $O'Q$. Dễ dàng chứng minh được : $\angle OPO' = 90^o$.

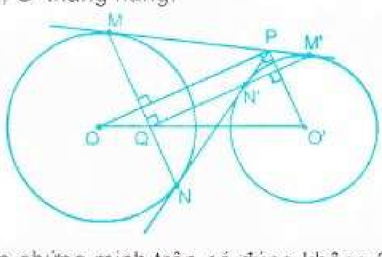
Ta có : $M'Q // OP$ (cùng vuông góc với $O'P$)

Mặt khác : $MQ \perp OP$ nên $MQ \perp M'Q \Rightarrow \angle MQM' = 90^o$. Ta có : $\angle OQM = 90^o - \angle POO'$ (*)

$\angle M'QO' = 90^o - \angle PO'O$ (**)

$\Rightarrow \angle MQO + M'QO' = 180^o - (\angle POO' + \angle PO'O) = 90^o \Rightarrow \angle OQO' = 90^o + \angle MQO + \angle M'QO' = 180^o$.

$\Rightarrow O, Q, O'$ thẳng hàng.



Phép chứng minh trên có đúng không ? Nếu sai thì sai ở đâu ? Bạn hãy cho lời giải đúng.

TRỊNH MINH ĐỨC

(11B3, THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Giải đáp bài

PHÂN TÍCH SỐ 2000

Gọi x, y, z, t lần lượt là các số nguyên dương cần tìm.

Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} x+y+z+t = 2000 & (1) \\ x+a=y-a=z.a=\dfrac{t}{a} & (2) \end{cases}$$

với điều kiện : $0 < x, y, z, t < 2000$.

Từ (2) ta có :

$x = a(z-1)$; $y = a(z+1)$; $t = a^2z$

Thế vào (1) được :

$a(z-1) + a(z+1) + z + a^2z = 2000$

$\Rightarrow z(a+1)^2 = 2000$ (3)

Vì $2000 = 5^3 2^4$ mà $(a+1)^2$ là số chính phương nên $(a+1)^2$ theo (3) sẽ có thể lấy các giá trị :

1) $(a+1)^2 = 4$ hay $a=1 \Rightarrow x = 499$, $y = 501$, $z = 500$, $t = 500$

2) $(a+1)^2 = 16$ hay $a = 3 \Rightarrow x = 372$, $y = 378$, $z = 125$, $t = 1125$

3) $(a+1)^2 = 25$ hay $a = 4 \Rightarrow x = 316$, $y = 324$, $z = 80$, $t = 1280$

4) $(a+1)^2 = 100$ hay $a = 9 \Rightarrow x = 171$, $y = 189$, $z = 20$, $t = 1620$

5) $(a+1)^2 = 400$ hay $a = 19 \Rightarrow x = 76$, $y = 114$, $z = 5$, $t = 1805$

Nhận xét. 1) Theo lời giải của các bạn : *Hoàng Thị Vân*, 6a3, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thị Ánh Tuyết*, 6A, PTCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**.

2) Rất nhiều bạn có lời giải đúng, trong đó có 6 bạn lớp 7, 3 bạn lớp 8. Có 54 bạn giải thiếu nghiệm.

BÌNH PHƯƠNG

HÌNH VUÔNG CHIA THÀNH BẢY HÌNH VUÔNG

Bác Cao, một thợ mộc cao cấp được giao một tấm gỗ quý hình vuông diện tích $7m^2$ và phải xẻ tấm gỗ thành một số mảnh sao cho sau khi ghép các mảnh này lại với nhau thì thu được 7 tấm hình vuông nhỏ bằng nhau, mỗi tấm có diện tích $1m^2$.

Các bạn trẻ yêu toán hãy giúp bác Cao cách xẻ tấm gỗ đó.

PHẠM HÙNG

(Hà Nội)

TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU HÀN THUYÊN, BẮC NINH

Hiệu trưởng
NGÔ VĂN QUỲNH

Trường được thành lập từ khi tái lập tỉnh Bắc Ninh (năm học 1996-1997). Ba năm học đầu, trường chưa có cơ sở riêng nên học sinh của trường vẫn học tại Trường THPT Hàn Thuyên. Đến nay, cơ ngơi của trường đã được xây dựng khá khang trang trên một diện tích rộng. Đội ngũ giáo viên của trường tuy mới tham gia dạy các lớp năng khiếu nhưng với lòng nhiệt tình và tích cực học hỏi nên đã sớm trưởng thành về nghề nghiệp. Học sinh của trường vốn mang truyền thống hiếu học của quê hương Bắc Ninh nay lại càng hăng say rèn luyện dưới mái trường năng khiếu thân yêu. Sự cố gắng của thầy và trò, sự quan tâm chu đáo của các cấp lãnh đạo đã tạo nên những mùa trái chín đầu tiên thật nhiều hứa hẹn. Trường đã đạt được 24 giải trong các kì thi học sinh giỏi Quốc gia (1 giải nhất, 3 giải nhì, 8 giải ba và 12 giải khuyến khích). Trường đã có 326 giải học sinh giỏi cấp tỉnh. Tỉ lệ học sinh trúng tuyển vào Đại học đã đạt 96%.

Đội ngũ giáo viên đã có 2 thạc sĩ và 2 nhà giáo ưu tú.

Với sự vươn lên của sức trẻ, trường THPT Năng khiếu Hàn Thuyên - Bắc Ninh rất tin tưởng vào tương lai phía trước của mình.

1	2
3	

1. Lãnh đạo Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Ninh cùng cán bộ tạp chí TH&TT đến thăm trường.

2. Đội tuyển Toán Bắc Ninh thi Quốc gia năm 1999

3. Đội tuyển Toán thi Quốc gia năm 2000

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT75M10

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2000

Tăng 4 trang quảng cáo
Giữ nguyên giá : 3000đ