EMIN BOREN

Khả năng và chắc chắn

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

EMIN BOREN

KHẢ NĂNG VÀ CHẮC CHẮN

Người dịch: **Hoàng Kiếm**

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI — 1976

Nguyên bản tiếng Pháp

Dịch từ bản tiếng Nga

Эмиль Борель

ВЕРОЯТНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА — 1969

LỜI GIỚI THIỆU

Nhà toán học Pháp lỗi lạc Emin Boren (1871 — 1956) nổi tiếng là một người hiểu biết rất toàn diện và viết rất nhiều. Ông đã để lại một di sản khoa học khá đồ sộ, gồm rất nhiều sách chuyên khảo, công trình nghiên cứu, bài báo và sách phổ biến khoa học.

Cũng như nhiều cuốn sách của ông giới thiệu về các lĩnh vực toán học khác, cuốn sách này đã được đông đảo bạn đọc ở nhiều nước đánh giá cao.

Đọc sách của ông, người đọc rất thoải mái, vì những vấn đề toán học rắc rối được ông diễn giải nhẹ nhàng với những thí dụ sinh động, hầu như rất ít dùng đến các công thức, ký hiệu toán học.

Cuốn sách xuất bản lần đầu tiên ở Pháp từ năm 1950 nhưng là một cuốn sách đến nay vẫn rất có giá trị và đã được dịch ra nhiều thứ tiếng trên thế giới. Chúng tôi mong rằng cuốn « Khả năng và chắc chắn » sẽ giúp bạn đọc hiểu sâu thêm về lý thuyết xác suất — một bộ môn toán học hiện đại đang được ứng dụng rộng rãi ở nước ta.

Người dịch

LỜI NÓI ĐẦU CỦA TÁC GIẢ

Kể từ khi in cuốn sách đầu tiên của tôi nói về xác suất, đến nay đã gần 40 năm. Sau đó, tôi còn viết thêm một số cuốn sách nữa và cuốn này chắc cũng chưa phải là cuốn cuối cùng. Dù sao nó cũng vẫn đánh dấu một bước phát triển quan trọng của tôi trong cách nhìn nhận về xác suất.

Thật vậy, trong các cuốn sách trước (đặc biệt là cuốn « Ngẫu nhiên ») tôi cũng thường dùng cách nói quen thuộc của các nhà vật lý khi nói về một hiện tượng vật lý mà có xác suất cực kỳ bé. Trong những trường hợp như vậy, tôi không dám khẳng định là chúng chắc chắn không xảy ra mà chỉ có thể nói là chúng không xảy ra với khả năng rất lớn.

Qua nhiều suy nghĩ về vấn đề này, cuối cùng tôi nhận thấy cách lý giải như trên là không thực tế. Vì nó không bao quát được tất cả các hiểu biết của chúng ta về vũ trụ và tôi cũng rút ra kết luận là không nên lo ngại việc dùng từ « chắc chắn » để chỉ các xác suất khác đơn vị một lượng vô cùng bé. Tôi cũng có thể hình dung được rõ những ý kiến phản đối việc thay đổi cách dùng thuật ngữ này mà chính tôi cũng từng đưa ra trước đây và chúng càng làm cho tôi tin tưởng vào sự thay đổi đó.

Vì vậy, tôi thấy cũng cần phải viết thêm cuốn sách nhỏ này để phân tích vấn đề sâu sắc hơn nữa.

Các bạn theo dõi quá trình lý luận trong cuốn này sẽ thấy vấn đề đặt ra không chỉ thuần túy về mặt hình thức, vì vậy nội dung của nó không đến nỗi vô vị lắm.

Sự thay đổi cách dùng thuật ngữ như vậy phù hợp với hiểu biết thấu đáo về vai trò phổ dụng của xác suất trong các ngành khoa học. Nó sẽ cho phép chúng ta đứng trên một quan điểm mới mẻ để nghiên cứu những đề tài sinh học và vũ trụ — những đề tài không chỉ có những nhà triết học mà cả những người ham muốn hiểu biết khác đều quan tâm đến. Vì không thể nào đưa ra tất cả những vấn đề đó trong một cuốn sách nhỏ bé, nên tôi chỉ đề cập một phần nào ở cuối sách này.

Đồng thời, tôi cũng cố gắng chính xác hóa xem trong những trường hợp thực tế nào thì có thể bỏ qua hoặc không thể bỏ qua những xác suất rất bé. Một số nhận xét của tôi cũng liên quan đến các trò chơi may rủi — những trò chơi mà được nhiều người nghiên cứu trong buổi đầu khai sinh ra khoa học xác suất và cho đến nay các nhà xác suất vẫn thích thú nghiên cứu bởi tính đặc biệt tiện lợi của chúng trong một số cách tính xác suất.

Tóm lại, tôi có thể nói với các bạn rằng trong cuốn sách nhỏ này đã chỉ ra những giai đoạn nhận thức về khái niệm xác suất : Đầu tiên là nó đối lập với khái niệm tin cậy (chắc chắn) sau đó lại thống nhất với khái niệm ấy và có thể xem xác suất là độ tin cậy thực tế, còn đến bây giờ là độ tin cậy tuyệt đối nếu cần chính xác hóa giá trị của nó.

1950

CHƯƠNG 1

KHẢ NĂNG VÀ CHẮC CHẮN

1. Cách nói hàng ngày

Có lẽ thông thường chúng ta vẫn dùng đến từ « khả năng » và « chắc chắn » mà không phân biệt ý nghĩa của chúng một cách tương đối. Tuy nhiên, việc chính xác hóa các ý nghĩa đó trong một chừng mực có thể cũng rất bổ ích đối với chúng ta.

Trong các sự kiện mà chúng ta coi là *ít có khả năng*, có khả năng hay rất nhiều khả năng xảy ra có thể phân biệt thành ba phạm trù: Phạm trù liên quan đến đặc tính riêng của chúng ta; Phạm trù liên quan đến đặc tính riêng của người khác và phạm trù liên quan đến các hiện tượng thiên nhiên. Hơn nữa, chúng ta còn thấy rằng đôi khi không thể nào xác định được ranh giới giữa các phạm trù đó.

« Rất có khả năng là ngày mai tôi sẽ ra đi » khi tôi phát biểu lời nói này là tôi đã tóm tắt ở dạng chung một loạt suy nghĩ phức tạp và đơn giản, mà một số có liên quan đến đặc tính của người khác còn một số khác thì liên quan đến các hiện tượng thiên nhiên. Chẳng hạn, tôi quyết định ra đi nếu người bạn đã báo đến thăm tôi nhưng lại không đến; hay tôi sẽ ra đi nếu trời không có tuyết rơi (vào dịp tháng chạp), hoặc không có mưa giông (vào dịp tháng sáu). Cả hai trường hợp, xác suất ra đi của tôi đều phụ thuộc vào khả năng mà tôi phác họa được về hành vi của người bạn hay về các tình hình thời tiết khác nhau. Trong các mục sau, ta sẽ bàn với những điều kiện như thế nào thì các khả năng khác nhau đó có thể biểu diễn thành số. Nhưng ta cũng cần phải tính đến một khả năng khác mà những người cảm thấy mình khỏe mạnh thường dễ dàng bỏ qua khi họ ấn định một chương trình hành động ngắn hạn: Tôi sẽ không thể ra đi nếu như tôi ốm nặng hay càng rõ hơn nữa là nếu như tôi chết. Cả hai giả thiết này cần phải hiểu ngầm là khi chúng ta nói đến xác suất có liên quan đến một sinh vật.

Với những qui ước như vậy thì có thể cho rằng (nếu các *bạn tin tưởng vào sự chân thật của tôi)* những sắc thái mà tôi muốn nói đến về khả năng ra đi ngày mai sẽ được gán cho những ý nghĩa quen biết. Tôi có thể đặc trưng cho sự ra đi là ít khả năng, có khả năng, nhiều khả năng hay rất nhiều khả năng. Việc nghiên cứu các khả năng đó nhận những giá trị nào đối với từng người xác định theo các sắc thái khác nhau cũng là một vấn đề rất đáng chú ý.

Khái niệm về sự kiện chắc chắn có đối lập với khái niệm về sự kiện có khả năng. Tôi sẽ phải hết sức thận trọng khi khẳng định là có thể hoàn thành một hành động nào đấy vô điều kiện dù là trong thời gian tới rất gần, bởi vì những hoàn cảnh khác nhau, không phụ thuộc vào ý muốn của tôi (chưa kể đến tình trạng sức khỏe hay cái chết của tôi) sẽ can thiệp vào. Nhưng khi tôi nói đến *một sự kiện* có tính chất phủ định, chẳng hạn như « Chắc chắn là ngày mai tôi sẽ không có mặt ở buổi lễ » thì lời khẳng định này sẽ được những ai tin vào tôi và biết đặc tính của tôi không hay thay đổi coi là một thực tế chính xác.

Ta cũng sẽ có những khẳng định khác nhau như vậy đối với đặc tính của từng người cụ thể và đặc biệt là đối với đặc tính chung của một số đông người.

Chẳng hạn, nếu như ngày mai ở một nước lớn nào đó tổ chức bầu cử rộng rãi thì những người đã nắm vững được tình hình chính trị sẽ nhất trí với ý kiến nói rằng: chắn chắn một đảng nào đấy sẽ được ít hơn 30 ghế trong quốc hội và một đảng khác sẽ được nhiều hơn 200 ghế. Những sự chắc chắn trên sẽ không được đảm bảo nếu bỗng dưng xảy ra một biến động thiên nhiên ảnh hưởng đến cuộc bầu cử hay một biến động xã hội (đảo chính chẳng hạn) làm thay đổi sâu sắc các điều kiện bầu cử và kết quả chân thực của cuộc bầu.

Tương tự như vậy, nếu tôi khẳng định là tại vĩ độ chúng ta đang sống chắc chắn sẽ thấy được mặt trời mọc vào ngày mai thì chẳng ai tranh luận về điều đó nữa. Nhưng cũng cần phải làm rõ nghĩa thêm lời khẳng định trên. Nếu tôi hiểu lời nói trên là tôi sẽ thấy mặt trời mọc một cách vô điều kiện, ấy là tôi đã bỏ qua trường hợp biết đâu ngày mai tôi không còn sống. Nếu hiểu lời nói trên là ở nước Pháp sẽ có những người nhìn thấy mặt trời mọc thì tôi sẽ không sợ mắc sai lầm nếu như không có một tai họa vũ trụ hủy diệt một phần lớn hay toàn bộ quả đất của chúng ta.

Cũng có những trường hợp mà sự khẳng định liên quan đến sự kiện chỉ xảy ra trong khoảnh khắc; sự chắc chắn của điều khẳng định đó bị hạn chế bởi qui ước là không có một sự cố tức thời ảnh hưởng đến. Ví dụ như tôi ném hòn đá ở độ cao một mét xuống đất và khẳng định nó sẽ chạm đất sau một phần mười giây. Nhưng nếu tôi đứng ở trên một gác chuông và có một chiếc xe vận tải phóng vụt qua đấy đúng lúc tôi ném hòn đá xuống thì lời nói của tôi sai rồi!

Những cách suy nghĩ đầu tiên như vậy đã buộc chúng ta dùng những từ : khả năng và chắc chắn. Bây giờ, chúng ta sẽ cố gắng định lượng hóa những khái niệm định tính này. Độc giả chắc cũng biết rằng, tri thức của con người xứng đáng với cái tên khoa học và tùy thuộc ở vai trò của con số thể hiện trong đó như thế nào.

2. Ước lượng xác suất

Khi tôi nói với hai người bạn biết rõ đặc điểm, tính tình của tôi là việc tôi ra đi ngày mai ít khả năng hay rất có khả năng xảy ra thì tùy theo đặc tính và sự đoán trước thời tiết của mỗi người (giả sử họ đều cho rằng tôi chỉ ra đi nếu đẹp trời) sẽ có những cách giải thích lời tuyên bố của tôi rất khác nhau. Người này sẽ nói khả năng tôi không ra đi là nhiều hơn ; người kia sẽ nói khả năng tôi không ở lại là nhiều hơn. Thành thử, nếu họ là những người máu mê cờ bạc thì họ sẽ đánh cuộc với nhau. Lời khẳng định của người nào sai thì người ấy phải mất cho người kia một số tiền.

Đôi khi người ta còn nói ngoa lên rằng, trong hai anh đánh cuộc thì một anh ngu và một anh gian giảo. Khi ấy ta phải hiểu ngầm là có một anh hiểu biết hơn anh kia và hầu như biết chắc kết cục xảy ra. Thực tế, thường là mỗi người đánh cuộc đều có cơ sở để cho mình hiểu biết hơn người kia và việc đánh cuộc là có lợi đối với anh ta. Nhưng điều đó không có nghĩa là anh ta bị coi là ngu dần nếu nói sai.

Ví dụ chúng tôi đưa ra trên đây phản ánh đặc trưng chủ quan của xác suất.

Khi tôi nói « có khả năng ngày mai tôi ra đi » là tôi đã vô tình hay chủ ý nêu lên xác suất đã biết p của sự kiện kí hiệu qua A : « Ngày mai, tôi ra đi ». Nhưng anh bạn

Paven sau khi nghe tôi nói và điểm qua những tin tức anh ta nắm được (chẳng hạn, những thông báo khí tượng) lại đưa ra xác xuất p' cho sự kiện A. Còn anh Piôt lại đưa ra xác xuất p'' (cả p' và p'' đều khác p). Do việc đánh cuộc giữa Paven và Piôt mà ta có thể suy ra p' lớn hơn 1/2 và p'' nhỏ hơn 1/2. Bằng cách đánh cuộc để rút ra các đánh giá tương tự cho p có khó khăn ở chỗ: nếu tôi phải đặt món tiền cược khá lớn cho việc tôi ra đi hay ở lại thì việc đánh cuộc sẽ ảnh hưởng đến quyết định của tôi và như vậy sẽ làm thay đổi p. Nhưng có thể nhờ cách đánh cuộc để biết về kết quả bầu cử nếu như số người bầu rất ít và họ không bị quyến rũ bởi những món tiền mua chuộc. Ở một cuốn sách khác, tôi cũng đã chỉ ra rằng, nhờ cách đánh cuộc mà chúng ta có thể nhận được những ước lượng xấp xỉ cho xác suất của những sự kiện khá phức tạp (Cuốn « Xác suất và đời sống » Pari 1946).

3. Định nghĩa tổng quát của xác suất chủ quan

Khi một người đặt cho mình nhiệm vụ ước lượng xác suất của sự kiện A thì một mặt anh ta phải chú ý đến bản thân sự kiện A, mặt khác cũng phải biết đến mọi khả năng thuận lợi hay cản trở việc thực hiện A. Theo Keynes, ta sẽ kí hiệu K là tập hợp mọi thông tin cần để ước lượng xác suất. Như vậy, xác suất của sự kiện A có thể kí hiệu qua P (A, K). Viết thế này cũng có nghĩa là xác suất của sự kiện A với tập hợp thông tin K nằm trong bộ óc của một người nào đó. Nếu cả hai người đều có cùng tập hợp thông tin K về sự kiện A thì giá trị xác suất đối với hai người đó là như nhau. Nhưng có thể xảy ra trường hợp là, đối với cùng một người trong một khoảng thời gian thì tập hợp thông tin K biến đổi thành K', như thế xác suất cũng thay đổi theo và lúc đó cần phải viết lại là P (A, K').

Ký hiệu của Keynes tuy phức tạp, nhưng có ưu điểm là luôn luôn nhắc nhở chúng ta rằng, xác suất không tồn tại một cách trừu tượng mà nó chỉ tồn tại đối với một con người xác định, tức là đối với một tập hợp thông tin K nào đó. Đồng thời có thể tập hợp thông tin này lại chứa những xác suất liên quan đến các sự kiện phụ thuộc vào A. Những xác suất như vậy khi ước lượng cần phải xét đến tập hợp thông tin có thể thay đổi theo thời gian.

Chẳng hạn, khi một anh bạn hỏi tôi là « ngày mai tôi có ra đi hay không? » và anh ta biết rằng quyết định của tôi phụ thuộc vào thời tiết thì tập hợp thông tin K đặc biệt sẽ gồm những xác suất mà anh bạn tôi đánh giá các khả năng về tình hình thời tiết ngày mai ; Tập hợp K này có thể thay đổi nếu anh ta biết được những thông báo khí tượng mới hay chính anh ta quan sát được hướng và sức gió. Ví dụ đơn giản này chỉ ra rằng : việc xác định xác suất P (A, K) có thể làm nảy ra một số bài toán khá phức tạp. Những xác suất nào mà trong trường hợp đặc biệt có thể bằng đơn vị thì có thể xem như tương đương với sự chắc chắn. Thật ra thì mọi vấn đề nghiên cứu của nhân loại và khoa học có thể phát biểu như sau : Các nhà lý thuyết hoàn toàn loại trừ việc nghiên cứu các bài toán mà giá trị P (A, K) dễ xác định. [1]

4. Một số vấn đề phức tạp hơn

Tuy nhiên, cũng cần phải nói thêm một chút về phạm trù các bài toán phức tạp hơn. Đó là những bài toán mà tập hợp thông tin K lại chứa những yếu tố ngẫu nhiên phụ thuộc vào xác suất. Ta xét ví dụ đơn giản sau đây:

Rút hú họa 32 quân bài từ cỗ tu lơ khơ 52 quân bài để lập thành cỗ bài J. Cỗ bài mới này khác với cỗ bài thông thường, vì ta chưa biết thành phần trong đó như thế nào. Cho nên, ta sẽ đặt ra một số bài toán xác suất với cỗ bài này.

Chẳng hạn, ta rút từ J ra một quân bài. Sau đó xem xong ta trả lại chỗ cũ. Tráo bài rồi ta lại rút ra một quân v.v... Ta có thể làm đi làm lại như thế rất nhiều lần. Thử hỏi với 1000 lần rút quân bài từ J sẽ rút được mấy lần quân cơ, quân rô, quân nhép, quân pích? Rõ ràng là câu trả lời phụ thuộc vào thành phần của J mà ta chưa biết. Nhưng chúng ta lại biết rằng, 32 quân bài này là lấy ngẫu nhiên từ cỗ tú lơ khơ gồm 13 quân cơ, 13 quân rô, 13 quân nhép và 13 quân pích. Tập hợp thông tin K của ta chỉ gồm có thế.

Như vậy, trả lời câu hỏi trên không phải là đơn giản. Về nguyên tắc, cần phải tính đến các hệ số xác suất: Nhưng ở đây, ta có thể giải đáp một cách chính xác tương đối. Chẳng hạn, có thể khẳng định là có rất nhiều khả năng để trong 1000 lần rút liên tiếp quân bài từ J sẽ được hơn 4 lần quân cơ. Điều khẳng định chỉ sai nếu J không có một quân cơ nào nhưng khả năng này xảy ra rất ít.

5. Trường hợp thông tin không đầy đủ

Chúng ta cũng cần phải chú ý đến trường hợp thông tin thiếu và không hoàn chỉnh nên giá trị xác suất sẽ rất bất định. Điều này đã xảy ra trong thực tế như khi dự báo thời tiết ngắn hạn, vì tin tức khí tượng của chúng ta chưa bảo đảm cho một sự tiên đoán thật chính xác. Nhưng nhà thống kê dùng các số liệu quan sát sau nhiều năm lại có thể chỉ ra tại ngày nào đó, xác suất để xảy ra các khả năng thời tiết khác nhau với một độ chính xác đã biết.

Chẳng hạn, nếu biết được nhiệt độ trong một thời gian dài ở Pari (chính xác ra là nhiệt độ tại các trạm khí tượng nằm ở những địa điểm xác định của Pari) và thừa nhận giả thiết khí hậu không thay đổi bất thường, thì chúng ta có thể rút ra xác suất để cho nhiệt độ trung bình (hoặc là nhiệt độ cao nhất, thấp nhất ở Pari vào gần ngày 1 tháng 1 là thấp hơn $-10°$, giữa $-10°$ và $-5°$, giữa $-5°$ và $0°$, giữa $0°$ và $5°$, cao hơn$10°$. Lẽ tất nhiên là vào những ngày cuối tháng chạp, tin tức ở các trạm khí tượng khác nhau báo về sẽ giúp chúng ta ước lượng các xác suất đó càng chính xác thêm.

6. Trường hợp có những thông tin sai

Cuối cùng, tôi thấy cần phải nói đến trường hợp mặc dầu người ta thường cho rằng ít xảy ra nhưng lại rất quan trọng. Đó là khi mà tập hợp thông tin K chứa trong P(A,K) có sai số. Vì vậy, rõ ràng là xác suất của sự kiện A cũng mắc sai số và điều này đặc biệt nghiêm trọng nếu sai số xác suất bằng 1 thì A sẽ được coi là sự kiện chắc chắn.

Ở đây đặt ra cho chúng ta vấn đề tổng quát về tính đúng, sai mà nhiều nhà triết học đã tranh luận. Mục này, tôi không có ý định sẽ trình bày các khía cạnh triết học của vấn đề đó (xem chương 9), mà giới hạn việc nghiên cứu theo quan điểm thực tiễn với ý chủ đạo duy nhất cho mỗi lời giải là hãy cố gắng làm hết mọi khả năng để tránh lầm lẫn.

Chẳng hạn, nếu tôi lấy ra một cỗ bài 52 quân thay cho cỗ bài 32 quân thì những dự đoán mà tôi đã rút ra trước kia về việc rút ra hú họa một quân bài sẽ không còn đúng nữa. Với cỗ bài 32 quân, tôi có thể khẳng định (mà không sợ sai lắm) là khi rút 80 lần thì sẽ được hơn 20 lần các quân bài có hình vẽ (A, K, Q, J), còn với cỗ bài 52 quân thì lại càng ít có khả năng hơn nữa[2].

Sai lầm của tôi còn lớn hơn nữa nếu tôi lại gặp phải một nhà ảo thuật khéo léo mà có thể rút từ cỗ bài trong tay tôi 32 quân bài như nhau : hoặc chỉ toàn « Krô » hoặc chỉ toàn « 7 pich ». Rõ ràng là nhà ảo thuật có thể làm cho tôi thua cuộc với những quân bài giả tạo như trên.

Như vậy, cần phải nhấn mạnh thêm là mọi kết luận có thể rút ra với các phép tính xác suất luôn luôn tuân theo một hạn chế vẫn hiểu ngầm rằng những điều kiện của phép thử hay của các phép thử không được thay đổi bởi một sự gian lận hay một cách thức bất ngờ chưa biết nào đó.

Trường hợp tương đối thuận lợi hơn cả là khi chỉ có hoàn cảnh ngẫu nhiên ảnh hưởng đến cuộc thí nghiệm. Chẳng hạn (đám mây làm ảnh hưởng đến sự quan sát sao của nhà thiên văn qua ống kính và tất nhiên mọi việc không xảy ra khi nhà thiên văn không có mặt ở đài quan sát. Nhưng nếu một anh chàng tai ác nào đó lại đặt trước vật kính một lăng kính nhỏ làm lệch tia sáng đi chút ít thôi thì sẽ cho ta một trường hợp khá nghiêm trọng. Vì kết quả quan sát khi đó sẽ có sai lệch mà nguyên nhân chưa được biết. Đôi khi các nhà bác học lại xây dựng cả những lý thuyết rắc rối để giải thích những sai số rất bé đó.

Cho nên việc phân biệt giữa tập hợp thông tin không đầy đủ và tập hợp thông tin bị sai cục bộ rất quan trọng. Trong lý thuyết xác suất hiện tượng không đầy đủ thông tin là bình thường. Ta có thể khẳng định là chỉ khi nào biết được mọi hoàn cảnh xảy ra quanh hiện tượng được xét thì xác suất tính được mới đáng tin cậy. Tuy nhiên, quan điểm này chỉ thuần túy lý thuyết, bởi vì ta làm sao mà có thể biết được mọi chuyển động của tay khi gieo xúc xắc hoặc tráo bài [3].

Chỉ trong những trường hợp bàn tay khéo léo của nhà ảo thuật điều khiển chuyển động của quân xúc xắc và thứ tự cỗ bài thì ta mới không áp dụng được các qui tắc tính xác suất. Bởi vì giả thiết ban đầu cho rằng 6 mặt của quân xúc xắc hay tất cả các quân bài đều có khả năng xuất hiện như nhau không còn đúng nữa.

CHƯƠNG 2

PHÉP THỬ LẶP

7. Các trò chơi may rủi

Ở chương trước, chúng ta đã xét một vài ví dụ lấy từ các trò chơi may rủi. Những ai biết các trò chơi đó mà không nắm được lý luận toán học, thì có thể cho rằng đây không phải là một vòng luẩn quẩn (1) bởi vì sự phát minh ra các trò chơi may rủi có trước lý luận xác suất và chắc chắn là những người phát minh chỉ hình dung một cách thô thiển về khái niệm xác suất mà thôi.

Nếu nói về các trò gieo súc sắc, chơi bài hay chơi đôminô là những trò chơi may rủi phổ biến nhất và cũng có từ lâu đời nhất thì chúng cũng dựa trên sự bằng nhau của những xác suất nào đó. Các mặt khác nhau của quân xúc xắc sẽ có khả năng xuất hiện như nhau khi ta gieo nó trên một mặt bàn nằm ngang, các quân bài khác nhau của một cỗ bài tú lơ khơ đều có khả năng rơi vào bất cứ người chơi nào như nhau khi cỗ bài đã tráo thật kỹ (cẩn thận hơn nữa, ta có thể

(1) Ở đây, ý Boren muốn nói là việc dùng các trò chơi may rủi để định nghĩa hay chính xác hóa các khái niệm của lý thuyết xác suất rồi lại dùng những khái niệm này để nghiên các trò chơi đó không phải là một vòng luẩn quẩn (N.D).

« bốc » một số quân bài từ trên xuống dưới trước khi chia bài, nhưng sự phòng xa này cũng vô ích nếu người chia bài có những « thủ thuật » để gian lận).

Như vậy, các nhà bác học sáng tạo ra môn tính xác suất (Galilê, Fecma, Pascan) đã tìm thấy ở trò chơi gieo xúc xắc một phương tiện tốt và đơn giản giảm bớt rất nhiều khó khăn trong những bước đầu xây dựng khoa học này. Họ đã coi con xúc xắc đều đặn là một hình lập phương lý tưởng, đồng chất. Đồng thời, họ cũng coi các chấm khác trên 6 mặt không ảnh hưởng đáng kể đến tính đối xứng của khối lập phương con con đó.

Trong khi trao đổi với kỵ sĩ Đơmêrê, Pascan đã giải quyết được một bài toán khó khăn đầu tiên là tính chính xác số trường hợp xảy ra của trò chơi sau đây :

Hai người đánh cuộc với nhau về kết quả gieo cùng một lúc 3 quân xúc xắc. Một người nói rằng tổng số điểm xuất hiện trên 3 mặt sẽ nhỏ hơn 10, còn người kia nói tổng số điểm đó sẽ lớn hơn 10. Dễ dàng nhận thấy rằng cả hai người đều có khả năng may mắn như nhau. Nhưng có một vấn đề khó khăn nảy ra như sau : Kỵ sĩ Đơmêrê với một số lớn lần chơi đã chỉ ra trong những lần tổng số điểm lớn hơn 10 thì số lần 11 điểm nhiều hơn số lần 12 điểm. Nhưng ngài kỵ sĩ phản đối là ông ta có thể nhận được tổng số 11 điểm bằng 6 cách khác nhau (6—4—1 ; 6—3—2 ; 5—5—1 ; 5—4—2 ; 5—3—3 ; 4—4—3) và lấy tổng 12 điểm cũng bằng 6 cách khác nhau (6—5—1 ; 6—4—2 ; 6—3—3 ; 5—5—2 ; 5—4—3 ; 4—4—4). Pascan đã giải đáp rất đơn giản tổ hợp 6—4—1 chính là một biến cố hợp mà gồm 6 biến cố đơn giản tạo thành. Nếu ta đánh số các quân xúc xắc hay mỗi quân xúc xắc có một màu khác nhau thì ta sẽ có 6 cách để xuất hiện tổ hợp 6—4—1. Nhưng với tổ hợp như 5—5—1 thì ta chỉ có 3 cách tạo thành và tổ hợp 4—4—4 thì chỉ có một cách duy nhất.

Cho nên, nếu muốn biết thật sự số cách khác nhau để nhận được 11 hay 12 điểm ta cần phải tính tổng các cách tạo thành mỗi tổ hợp trên. Như vậy, đối với trường hợp 11 điểm ta có tổng số các cách tạo nên là (viết theo thứ tự các tổ hợp trên):

$$6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$$

Khi ấy, đối với trường hợp 12 điểm, ta có:

$$6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$$

Từ đây, suy ra cứ trung bình 27 lần gieo được 11 điểm thì có 25 lần gieo được 12 điểm. Kết quả này rất phù hợp với các quan sát của kỵ sĩ Đơmêrê.

8. Phép thử lặp

Những nhận xét mà Pascal đã rút ra ở trò chơi gieo 3 quân xúc xắc hoàn toàn có thể áp dụng trò chơi gieo quân xúc xắc 3 lần liên tiếp nhau. Khi đó, chỉ dùng một quân xúc xắc, ta có thể nhận được 6—5—1 bằng 6 cách khác nhau, bởi vì 6 có thể xuất hiện ở lần gieo thứ nhất, thứ hai hoặc thứ ba và khi những lần gieo được thực hiện chỉ còn 2 khả năng để 5 xuất hiện trước 1 hoặc 1 xuất hiện trước 5.

Ta hãy xét một trò chơi đơn giản hơn là trò chơi « sấp, ngửa ». Nếu Piôt và Paven thỏa thuận với nhau mỗi ván chơi gồm 4 lần gieo đồng xu liên tiếp thì sẽ có 5 khả năng xảy ra, bởi vì Piôt có thể thắng 4 lần, 3 lần, 2 lần, 1 lần hoặc 0 lần, trong khi đó Paven sẽ thắng 0 lần, 1 lần, 2 lần, 3 lần hoặc 4 lần. Thực ra, mỗi khả năng trên không như nhau vì chúng không tương đương nhau. Piôt chỉ có một cách thắng 4 lần vì anh ta phải thắng ở lần gieo thứ nhất, lần gieo thứ hai... đến lần gieo cuối cùng. Nhưng anh ta có 4 cách thắng 3 lần, vì anh ta có thể chỉ thua 1 lần ở lần gieo thứ nhất, lần gieo thứ hai,... hoặc lần gieo thứ tư. Dễ dàng thấy rằng có 6 cách khác nhau để thắng 2 lần (cũng nghĩa là để thua 2 lần) bởi vì có thể thắng ở lần 1, lần 2 hoặc lần 1, lần 3 hoặc lần 1, lần 4 hoặc lần 2, lần 3 hoặc lần 2; lần 4 hoặc lần 3, lần 4.

Ngoài ra có sự đối xứng giữa Paven và Piôt. Nếu một người thắng 3 lần thì người kia chỉ thắng 1 lần. Từ đây rút ra kết luận là các khả năng để Piôt thắng 4, 3, 2, 1 hoặc 0 lần được biểu diễn bởi dãy số:

1, 4, 6, 4, 1

Các số này có thể nhận được dễ dàng nhờ tam giác số học Pascan có các dòng đầu như sau:

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Nếu coi như mỗi dòng trên được thêm vào bên phải, bên trái những số 0 thì ta có thể phát biểu được một qui tắc sau: mỗi số bất kì ở một dòng nào đó bằng số đứng trên nó ở dòng trước cộng với số kề bên trái của số đứng trên ấy. Ví dụ, số thứ 3 dòng 5: $10 = 6 + 4$; số thứ 4 dòng 5: $10 = 4 + 6$; số thứ 5 dòng 5: $5 = 1 + 4$.

Khi số lần thử rất lớn, việc tính toán trên tam giác Pascan rất lâu. Các nhà toán học đã đưa ra những công thức tính được một số bất kỳ hoặc tổng một dãy số trên một dòng nào đó của tam giác Pascan.

Việc rút ra các công thức này, bạn đọc có thể tìm thấy trong những tác phẩm trình bày về phép tính xác suất. Ở đây chúng tôi chỉ giới hạn trong việc sử dụng những hệ quả quan trọng nhất của chúng. Các bạn cũng chỉ cần biết những kết quả này có thể nhận được nhờ cách tính đơn giản số khả năng—cách tính mà chúng ta đã làm do trò chơi « sấp, ngửa » khi gieo 4 lần liên tiếp — nhưng cách tính này không áp dụng được cho thực tế với hàng triệu lần thử.

9. Kỳ vọng toán học và số xác suất

Trong nhiều vấn đề của lý thuyết xác suất, việc đưa vào khái niệm kỳ vọng toán học tỏ ra có nhiều tiện lợi. Nếu một người chơi muốn nhận được một số tiền khi một sự kiện ngẫu nhiên nào đó xảy ra có xác suất đã biết thì kỳ vọng toán học của sự kiện ấy sẽ là số tiền đáng lý người hy vọng thắng phải đóng góp vào. Ví dụ : Piôt gieo quân xúc xắc một lần và anh ta nhận được 6 đồng nếu mặt 4 xuất hiện. Dễ dàng thấy kỳ vọng toán học của sự kiện này là 1 đồng, tức là tích của số tiền 6 đồng có thể nhận được với xác suất may mắn 1/6.

Thực vậy, giả sử người cầm cái gieo quân xúc xắc và mỗi người chơi chọn lấy một mặt xuất hiện để thắng cuộc. Nếu có 6 người chơi ứng với 6 mặt khác nhau của quân xúc xắc thì người cầm cái lần nào cũng phải trả 6 đồng, vì luôn luôn có một và chỉ một người thắng. Để trò chơi hợp lý, mỗi người chơi cần phải góp cho người cầm cái 1 đồng, vì không có cơ sở nào để một người này phải góp ít hơn hay nhiều hơn người khác (do 6 mặt của quân xúc xắc xuất hiện đồng khả năng).

Từ đây, chúng ta rút ra kết luận là kì vọng toán học của mỗi người chơi có giá trị bằng 1 đồng.

Cũng cần chú ý rằng giá trị của kỳ vọng toán học không phải bao giờ cũng phù hợp với khả năng và có khi còn hơn.

Ví dụ, nếu Piôt giao hẹn là anh ta sẽ gieo xúc xắc 11 lần và thu về 6 đồng hễ cứ có xuất hiện mặt 4 thì kì vọng toán học của anh ta bằng 11 đồng. Nhưng chắc chắn là chẳng bao giờ anh ta thu được đúng số tiền ấy mà chỉ có thể thu được 0,6, 12, 18, 24,... đồng tùy theo mặt 4 xuất hiện 0, 1, 2, 3, 4... lần. Chúng ta sẽ thấy rõ hơn (xem những trang sau) là chỉ có thể khẳng định rằng với số ván chơi khá lớn thì trung bình nhận được 11 đồng mỗi ván. Do đó đôi khi người ta còn nói rằng 11 đồng là số tiền thắng trung bình hay số tiền thắng có khả năng. Ngược lại, có thể nói số tiền thắng có khả năng nhất của Piôt là 12 đồng, vì cứ 11 ván chơi thì anh ta thường hay thắng 2 ván, nhưng số tiền thắng có khả năng nhất ít được quan tâm xác định hơn là số tiền thắng có khả năng hay số tiền thắng cuộc trung bình.

Việc áp dụng kỳ vọng toán học trong nhiều vấn đề có một ưu điểm lớn là: kì vọng toán học của 2 sự kiện nào đó có thể xác định dễ dàng bằng cách cộng 2 kì vọng của 2 sự kiện ấy không kể chúng có liên hệ với nhau hay không. Thực vậy, người có kì vọng toán học có thể bán cho 2 người khác nhau và thu được số tiền bằng tổng giá trị của các kì vọng ấy.

10. Định nghĩa độ lệch và đơn vị độ lệch

Giả sử, chúng ta thực hiện n lần phép thử lặp mà xác suất của sự kiện thuận lợi là p, sự kiện đối lập là q $(p+q=1)$.

Ví dụ, trên một vòng quay có ghi 36 số thứ tự và chữ số 8. Xác suất để khi quay số nhận được số lẻ là 18/37, sự kiện đối lập (số chẵn hay số 8) có xác suất là 19/37.

(Nếu 18 số trong 36 số được ghi màu đỏ thì xác suất để nhận được số màu đỏ cũng tính tương tự như trên).

Nếu tiến hành n lần thử, số khả năng của sự kiện thuận lợi bằng np và trong nhiều trường hợp không phải là một số nguyên. Ta ký hiệu số sự kiện thuận lợi quan sát được trong thực tế là np + h ; ở đây h có thể dương hay âm. Số h này theo định nghĩa được gọi là độ lệch và nhiệm vụ cốt yếu của lý thuyết các phép thử lặp là đi xác định qui luật của độ lệch hay nói chính xác hơn là xác suất để độ lệch nằm trong một giới hạn cho trước.

Khi số n nhỏ, tam giác Pascan giúp ta giải quyết vấn đề này rất nhanh. Giả sử ta chơi liên tiếp 4 ván « sấp, ngửa » và xét tổ hợp của 2 chữ « S » và « N » (chẳng hạn, SSNS). Xác suất để được S trong ván đầu là 1/2, để được S trong ván thứ hai là 1/2, để được N trong ván thứ 3 và S trong ván thứ 4 cũng là 1/2. Cho nên [5], xác suất để nhận được SSNS bằng tích của 4 thừa số 1/2, tức là bằng 1/16. Ta cũng được xác suất như vậy cho các tổ hợp khác nhau của S, N. Nhưng chúng ta đã biết là trong số các tổ hợp này (xem 8), có 1 tổ hợp chứa 4S, 1 tổ hợp chứa 4N, 4 tổ hợp chứa 3S và 1N, 4 tổ hợp chứa 3N và 1S, 6 tổ hợp chứa 2N và 2S. Các tổ hợp cuối này ứng với độ lệch h' bằng 0. Do đó, xác suất của độ lệch này là 6/16 = 3/8. Có 4 tổ hợp tương ứng với độ lệch +1 và 4 tổ hợp tương ứng với độ lệch —1 ; xác suất của mỗi độ lệch này là 4/16 = 1/4. Cuối cùng, xác suất của độ lệch +2 và —2 là 1/16.

Nhưng, như chúng ta đã thấy : khi n lớn quá 10 hoặc 50 việc tính toán tam giác số học Pascan rất mất công. Cho nên những trường hợp ấy cần phải dùng những công thức gần đúng với giả thiết giá trị n khá lớn. Những công thức đó hoàn toàn đáp ứng được các kết quả gần đúng khi n vượt quá giá trị mà không sử dụng được *tam giác Pascan*(1).

Các công thức gần đúng dựa trên việc khảo sát số u (được gọi là đơn vị độ lệch); theo định nghĩa chính bằng căn bậc hai của 2npq. Chúng ta đặc biệt chú ý đến 2 trường hợp rất quan trọng trong thực hành. Trường hợp thứ nhất là khi 2 số p và q bằng nhau hoặc khác nhau rất ít (nhưng trong trường hợp quay số : 18/37 và 19/37). Tích pq khi đó bằng 1/4 (hoặc khác 1/4 rất ít) và đơn vị độ lệch u bằng căn bậc hai của n/2. Nhưng n/2 (khi p = = 1/2) chính là số khả năng của các sự kiện thuận lợi. Cho nên ở trường hợp đầu tiên này, độ lệch u chính là căn bậc hai của số khả năng.

Trường hợp riêng thứ hai là khi p rất bé và q do đó sẽ gần bằng 1 nên cũng có thể xem nó là bằng đơn vị. Chẳng hạn, xác suất để được một số xác định trên vòng quay số sẽ là : p = 1/37, q = 36/37. Đơn vị độ lệch u khi ấy có thể xem như bằng căn bậc hai của 2np nghĩa là căn bậc hai của gấp đôi số khả năng các sự kiện thuận lợi.

Kết quả quan trọng nhất của lý thuyết phép thử lặp có thể phát biểu như sau :

Khi đã biết đơn vị độ lệch u, có thể khẳng định rằng xác suất để độ lệch u nằm giữa $-\lambda_u$ và λ_u chỉ phụ thuộc vào λ. Như vậy, trong các bài toán về phép thử lặp liên quan đến các số n và p khác nhau đều có một sự tương tự đã biết là chỉ cần tính u một cách gián tiếp qua số liệu của những bài toán.

---

(1) Để cho chính xác hoàn toàn, cần chú ý thêm là nếu một trong các số p hoặc q rất bé thì phải chọn n đủ lớn sao cho tích np, nq không bé quá (chẳng hạn phải vượt quá 10 hoặc 20) [4].

Đôi khi ta sẽ gọi λ (dương hoặc âm) là độ lệch tương đối, khi ấy tính λ_u biểu thị độ lệch thực sự hay độ lệch tuyệt đối. (Bạn đọc đừng lẫn với khái niệm giá trị tuyệt đối của độ lệch).

11. Các kết quả quan trọng về xác suất của độ lệch tương đối

Trong các sách chuyên khảo về lý thuyết xác suất có thể tìm thấy các bảng dẫn ra xác suất để độ lệch tương đối nhỏ hơn một số λ cho trước. Ở đây, chúng tôi chỉ hạn chế nêu một vài lời chỉ dẫn ngắn gọn đủ dùng cho các ứng dụng trong cuốn sách này.

Xác suất để độ lệch h nằm ngoài $-\lambda_u$ và λ_u với một vài λ nào đó được cho theo dãy cấp số cộng sau :

$\lambda = 1{,}15$	xác suất	10^{-1}
$\lambda = 2{,}30$	«	10^{-3}
$\lambda = 3{,}45$	«	10^{-6}
$\lambda = 4{,}60$	«	10^{-10}

Để cho bảng số đơn giản, chúng tôi đã thay đổi giá trị λ. Nhưng việc thay đổi này không ảnh hưởng gì đến các ứng dụng mà chúng ta vẫn quan tâm đến. Bạn đọc nào muốn tiến hành những tính toán chính xác có thể sử dụng bảng hàm số $\theta(\lambda)$.

Xác suất ứng với các giá trị λ trong bảng của chúng ta lần lượt bằng một phần mười, một phần nghìn, một phần triệu và một phần mười tỷ. Bạn đọc cũng thấy các xác suất này phù hợp với mức độ tin cậy của sự kiện hoàn toàn có khả năng, sự kiện rất có khả năng, sự kiện cực kì có khả năng đến sự kiện chắc chắn xảy ra đối với sự kiện đối lập (nghĩa là sự kiện độ lệch nằm ngoài λ_u và λ_u).

12. Áp dụng vào bài toán « Người đánh bạc phá sản »

Bây giờ, chúng ta sẽ áp dụng các kết quả trên vào bài toán « người đánh bạc phá sản » trước đây đã gây nên một cuộc tranh luận sôi nổi trong giới nghiên cứu lý thuyết xác suất. Chúng ta cũng thấy nếu trò chơi hợp lý thì sự thua cuộc của người chơi sẽ xảy ra (theo tiên đoán của các nhà toán học) nhưng rất chậm. Cho nên, những ai chơi các ván cược nhỏ thôi thì không lấy gì lã đáng lo ngại cả.

Chúng ta hãy xét trò chơi « sấp, ngửa » mà người được mỗi ván hay thua mỗi ván sẽ thu về hay mất đi một đồng. Bạn đọc có thể chơi mỗi ván với số tiền được là 10, 100, 1000 đồng... khi đó chỉ cần nhân các kết quả nhận được dưới đây với 10, 100, 1000.

Lẽ dĩ nhiên những kết quả đó cũng áp dụng được cho các trò chơi phức tạp hơn trò chơi « sấp ngửa » với điều kiện là hy vọng thắng cuộc của người chơi như nhau. Chẳng hạn như trò « đỏ, đen », « chẵn, lẻ » hay tương tự như thế giữa những người ngang sức nhau. Tuy vậy cần chú ý rằng biện pháp đáng tin nhất để kiểm tra xem hai người chơi có ngang sức nhau hay không là phải quan sát độ lệch khi chơi một số ván khá lớn có vượt quá giới hạn đã tính toán chưa?

Giả sử mỗi ván chơi chỉ kéo dài vài giây. Điều đó cho phép ta chơi một ngày được mấy nghìn ván, một năm được gần một triệu ván. Số khả năng của các ván thắng là 500000, độ lệch đơn vị bằng căn bậc hai của số này gần đúng 707 nhân với 4,6 cho ta xấp xỉ 3250. Cho nên,

---

(1) Tuy bài toán không phù hợp với chúng ta, nhưng là « bài toán kinh điển » của lí thuyết xác suất, nên chúng tôi mạnh dạn giới thiệu để bạn đọc tham khảo.

có thể khẳng định là số ván thắng nằm giữa 503250 và 496750 vì xác suất của sự kiện đối lập nhỏ hơn một phần mười tỷ. Như vậy cuộc chơi của ta phải kéo dài 10 tỷ năm mới có hy vọng để số ván thắng hay thua trong một năm nằm ngoài 503250 và 496750 tức là lệch đi quá 3250 ván. Nếu cuộc chơi kéo dài một mạch 64 năm thì phải nhân độ lệch tương đối u với 8 (căn bậc hai của 64) nghĩa là số ván thắng hay thua có thể lệch đi 26000 ván.

Như vậy, trò chơi may rủi mà mỗi ván đặt cược một đồng trong suốt 64 năm (64 triệu ván) không thể làm cho người chơi thua quá 26000 đồng. Tuy nhiên, để cho chính xác cũng cần phải nói thêm là chúng ta đã lý luận xem như mọi ván chơi đã kết thúc nhưng biết đâu trong quá trình chơi số tiền mất của người thua đã vượt quá số tiền đó. Điều này không ảnh hưởng đến thực chất các kết luận của chúng ta.

Tổng cộng số tiền mà người chơi có thể mất bằng căn bậc hai của số ván chơi. Nếu xét đến những trò chơi đòi hỏi phải suy nghĩ như đánh bài thì một ngày chỉ chơi giỏi lắm là 100 ván và 27 năm chỉ chơi được khoảng 1 triệu ván. Cho nên độ lệch thực tế không bao giờ vượt quá số tiền cược 3000 lần (tức là 3 triệu đồng nếu tiền được 1000 đồng). Người chơi cần phải có vốn tỷ lệ với tiền cược ít nhất là như vậy mới mong không bị phá sản.

Nhưng nếu những người chơi chuyên nghiệp thường đến chơi ở các câu lạc bộ hay các sòng bạc thì bất kể ai cũng đều phải đóng góp một phần tiền cược của mình để trả cho tiền thuê nhà, người phục vụ, v.v... (sự đóng góp này có thể trực tiếp hoặc gián tiếp nhờ các luật lệ chơi đặt ra). Dễ thấy là việc đóng góp này lại càng tăng thêm « tốc độ » phá sản của người chơi.

Thực vậy, giả sử người cầm cái quy định chặt chẽ trích ra chẳng hạn một phần trăm số tiền cược mỗi ván để làm số tiền đóng góp cho sòng bạc trong khi số tiền thắng lớn nhất lại chỉ tăng theo căn bậc hai của số ván chơi. Khi đó, số tiền thắng cuộc nhiều nhất sau một triệu ván chơi không thể vượt quá 300 lần số tiền cược, ấy thế mà số tiền đóng góp 1% sau một triệu ván đã gấp 1 vạn lần số tiền cược. Cho nên, người nào chơi triệu ván có thể tin tưởng chắc chắn là ngay cả khi anh ta có vận đỏ đi nữa thì cũng bị mất ít nhất một số tiền gấp 7000 lần số tiền cược trung bình của mình.

13. Luật số lớn

Từ các luật về độ lệch ta có thể rút ra luật số lớn mà đã được Iacôv Becnuli phát biểu lần đầu tiên ở thế kỷ XVII. Ta xét một dãy vô hạn các phép thử lặp và gọi tần suất xuất hiện biến cố thuận lợi trong n phép thử đầu tiên là thương số của số lần xuất hiện biến cố đó chia cho n. Kí hiệu tần suất đó qua f_n ; luật số lớn khẳng định là : *khi n tăng vô hạn, tần xuất f_n tiến tới giới hạn f bằng xác suất p* [6].

Một số nhà lý luận hiện đại đã khẳng định rằng luật số lớn này là một sự trùng phức, bởi vì họ nghĩ xác suất chỉ có thể xác định như là tần suất của số lần thử rất lớn. Nếu với số lần thử rất lớn mà tần suất đó không tiến tới giới hạn và dao động trong một khoảng nào đó thì cần phải kết luận là xác suất p không phải hằng số mà sẽ bị thay đổi trong quá trình tiến hành phép thử. Chẳng hạn, khi ta xét về tỷ lệ người chết trong một thế kỷ : tỷ lệ này sẽ giảm đi do tiến bộ của y học đã kéo dài tuổi thọ của con người ; hoặc xác suất p để trẻ em sinh ra sống đến 60 tuổi sẽ ngày càng tăng lên. Quan điểm thực hành này rất thuận tiện cho nhà thống kê nghiên cứu các hiện tượng huyết học, bởi vì khi đó sự tiên đoán nhờ các công cụ khoa học nào đó phải dựa trên rất nhiều quan sát. Nhưng đối với các hiện tượng đơn giản mà xác suất có thể tính ngay được nhờ bản chất của nó thì lại là một chuyện khác : chẳng hạn như khi gieo xúc xắc, quan sát vòng quay số được thiết kế đều đặn, hay một số hiện tượng lý học, sinh học, v.v...

Nếu chúng ta gieo xúc xắc một số ít lần và chú ý kết quả gieo thì sẽ nhận thấy giữa các kết quả khác nhau có một sự sai lệch đáng kể.

Với 60 lần gieo, ta có thể được 13 lần xuất hiện 6 mặt nhưng lại chỉ được 7 lần xuất hiện mặt 5. Định luật về độ lệch cho ta biết là nếu gieo xúc xắc 30.000 lần thì độ lệch của số khả năng xuất hiện mặt 6 (5000 lần) sẽ không thể vượt quá đơn vị độ lệch với một thừa số không lớn lắm. Trong trường hợp này nó đúng bằng 100 (căn bậc hai của 5000×2). Như vậy, tần suất xuất hiện 6 sẽ nằm giữa thương số của phép chia 5300 và 4700 cho 30.000, tức là nó sẽ khác với xác suất 1/6 một lượng nhỏ hơn 1%.

Nếu số phép thử nhiều hơn 100 lần thì đơn vị độ lệch chỉ lớn hơn 10 lần và tần suất và xác suất sẽ chỉ khác nhau 1‰.

Ở ví dụ đơn giản này chúng ta đã quan sát thấy tác động cơ học của luật số lớn. Ký hiệu số lần xuất hiện sự kiện thuận lợi là $np+h$. Ta biết độ lệch h dương hay âm không thể vượt quá λ_u (tích của đơn vị độ lệch với thừa số λ không lớn lắm), đơn vị độ lệch u là căn bậc hai của $2npq$ nên λ_u là tích của một số không đổi với căn bậc hai của n. Như vậy, tần suất f bằng thương của phép chia $np+h$ cho n sẽ chính bằng xác suất P cộng với một số hạng dương hoặc âm.

Số hạng này là một tỷ số mà mẫu số là căn bậc hai của n và tử số là số λ mà chúng ta đã biết rất ít khả năng vượt quá 4 hoặc 5. Như thế là chúng ta đã có một cách chứng minh *đơn giản* của luật số lớn theo ngôn ngữ thông thường. Suốt một thời gian dài, nhiều người đã tỏ ra thỏa mãn với cách chứng minh đó. Nhưng những kết quả nghiên cứu sâu sắc đã chỉ ra rằng để chứng minh chặt chẽ luật số lớn cần phải dùng đến lý thuyết xác suất đếm được (1) mà chúng tôi không trình bày ở đây. Bạn đọc có thể tìm xem trong các sách đã dẫn.

Tuy vậy, cũng cần phải đồng ý với các nhà thực nghiệm là, nếu trong quá trình quan sát rất lâu kết quả các phép thử lặp mâu thuẫn với luật số lớn thì chúng ta kết luận rằng giá trị xác suất đã thừa nhận là không đúng và phải cố gắng tìm một giá trị chính xác hơn dựa vào kết quả thực nghiệm cũng như việc nghiên cứu sâu sắc thêm bản chất của vấn đề. Chẳng hạn, ta có thể kết luận một con xúc xắc nào đó có dạng bất đối xứng dựa trên những quan sát thu được. Điều này không làm hạ thấp ý nghĩa của luật số lớn mà đã được xem như một định luật toán học thiết lập nhờ các phép tính chính xác. Nó chỉ chứng minh một cách đơn giản là chúng ta đã gặp phải trường hợp khi mà tập hợp thông tin để xác định xác suất có chứa các yếu tố không chính xác : ta giả sử con xúc xắc đối xứng nhưng thực ra không phải như vậy.

---

(1) Chúng tôi vẫn giữ nguyên thuật ngữ của Borel dùng để chỉ các giá trị có khả năng nhiều vô hạn nhưng vẫn có thể đánh số thứ tự được [7]

14. Phép thử lặp nhiều lần và các xác suất chính xác

Ta có thể liên hệ phép thử lặp với phép thử lặp nhiều lần tức là phép thử mà tiến hành trong những điều kiện có yếu tố biến đổi chứ không hoàn toàn nhất quán. Ví dụ như khi ta đến gần một nhóm người nào đó và yêu cầu mỗi người chọn ngẫu nhiên một số nguyên có 2 chữ số. Nếu một người nào đó không hiểu yêu cầu và trả lời sai thì ta không tính đến.

Dùng phép thử lặp nhiều lần, ta có thể xác định được các xác suất nào đó với độ chính xác rất cao nhờ các xác suất tính xấp xỉ rất thô và không chính xác.

Để hình dung được điều này, chúng ta hãy giải bài toán sau đây. Xem như không biết số a chẵn hay lẻ, ta giả sử xác suất a chẵn là $\frac{1}{2} + \varepsilon$, xác suất a lẻ là $\frac{1}{2} - \varepsilon$. Tương tự, xác xuất b chẵn là $\frac{1}{2} + \varepsilon'$, xác suất b lẻ là $\frac{1}{2} - \varepsilon'$. Ta có thể nói gì về xác suất chẵn, lẻ của số a + b?

Số a + b chẵn trong 2 trường hợp: hoặc cả a và b cùng chẵn hay cùng lẻ. Cho nên, xác suất để a + b chẵn bằng:

$$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon'\right)+\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon'\right)=\frac{1}{2}+2\varepsilon\varepsilon'.$$

Từ đây, dễ dàng suy ra nếu trong một đám n người, ta yêu cầu mỗi người chọn một số nguyên 2 chữ số thì xác suất để tổng n số nguyên là số chẵn bằng

$$P=\frac{1}{2}+2^{n-1}\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n$$

Ở đây, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là những số dương hay âm cộng thêm vào 1/2 để được giá trị xác suất mỗi người chọn số chẵn. Các số ε này chưa được xác định nhưng ta biết trước rằng chúng có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1/2 và hầu như chắc chắn là các số đó rất bé.

Như vậy, nếu giả sử số ε có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1/4 thì hiệu giữa p và 1/2 sẽ nhỏ hơn phân số $1/2^n$. Nếu $n = 1000$, nghĩa là đám đông gồm 1000 người thì 2^{1000} sẽ lớn hơn 10^{300} (vì $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$). Như thế là chúng ta đã xác định được xác suất p có sai số rất nhỏ. Ở chương 6, bạn đọc sẽ thấy khả năng biểu diễn các số cực kỳ bé mà chúng ta không thể tưởng tượng nổi nhờ các cách so sánh.

Lẽ dĩ nhiên cách lập luận trên có thể áp dụng cho mọi trường hợp, mà xác suất chỉ biết xấp xỉ, ví dụ : nằm giữa 0,3 và 0,4. Sau khi tổ hợp số lần thử liên tiếp khá nhiều một cách thích hợp thì ta có thể xác định được xác suất rất chính xác của biến cố hợp.

Chẳng hạn, có thể gieo nhiều lần các xúc xắc và cộng các kết quả nhận được. Xác suất để cho chữ số cuối cùng của tổng nhận được là 0, 1, 2, 3... hay 9 sẽ hoàn toàn chính xác bằng 1/10 và sai số có thể bỏ qua nếu số lần gieo quá nhiều.

CHƯƠNG 3

XÁC SUẤT NHÂN QUẢ

15. Xác suất nhân quả — một bài toán đơn giản

Chúng tôi sẽ không trình bày lý thuyết tổng quát về xác suất nhân quả ở mục này. Lý thuyết xác suất nhân quả bắt nguồn từ khái niệm xác suất tiên nghiệm của các hiện tượng nhân quả khác nhau, tức là dựa vào những hiểu biết đúng đắn nhiều hay ít về các xác suất nhân quả đó. Bài toán được đặt ra như sau: Hãy xác định xem xác suất tiên nghiệm đó thay đổi như thế nào khi ta có kết quả của một số phép thử xác định mà trong quá trình tiến hành phép thử hiện tượng đang xét có thể xảy ra hoặc không xảy ra.

Chúng ta hạn chế trong việc xét các trường hợp đơn giản khi mà lý luận dựa trên những suy nghĩ đúng đắn cho phép nhận được các kết quả thú vị và chính xác. Ta khảo sát trò chơi đơn giản nhất: trò chơi « sấp — ngửa ». Nói chung, đồng tiền đem gieo sẽ được xem như có xác suất rơi sấp hay ngửa bằng nhau hay bằng 1/2. Với điều kiện đó, chúng ta đã thấy rằng nếu làm một triệu lần phép thử thì đơn vị độ lệch n bằng căn bậc hai của số khả năng xảy ra các biến cố thuận lợi (tức là 500.000) sẽ bằng 707. Mặt khác, chúng ta cũng biết rằng xác suất của độ lệch lớn hơn đơn vị độ lệch 4,6 lần sẽ bằng một phần mười tỷ (tức là độ lệch bằng 3350). Chúng ta cũng có thể nói thêm rằng xác suất của độ lệch kép (tức là lấy 6500 thay cho 3250) sẽ phải nâng lên lũy thừa bậc bốn (tức là 10^{-40} thay cho 10^{-10}). Bạn đọc có thể tìm thấy cách chứng minh kết quả này trong các sách nói về lý thuyết xác suất [8].

Bây giờ, giả sử rằng chúng ta đã kiên nhẫn tung đồng tiền một triệu lần và kết quả là 506.500 lần xuất hiện mặt « ngửa » của đồng tiền. Một câu hỏi nảy ra là nguyên nhân nào gây ra hiện tượng đó. Dĩ nhiên, chúng ta sẽ do dự giữa 2 giả thuyết: hoặc là xác suất rơi sấp hay ngửa bằng nhau (nhưng có độ lệch khác thường) hoặc là xác suất rơi ngửa lớn hơn xác suất rơi sấp. Cùng với các giả thuyết này còn có thể nêu lên những giả thuyết về việc phép thử tiến hành không đúng như đã mô tả. Chẳng hạn, người được giao ghi chép kết quả đôi lúc lúng túng hoặc sơ suất ghi sai, hay người tung đồng tiền khéo tay để cho đồng tiền rơi xuống mặt ngửa v.v... Nhưng như ta đã thỏa thuận với nhau ở chương 1 thì những giả thuyết đó sẽ bị loại ra, vì tập hợp tin tức của chúng ta có những thông tin sai do sơ suất hoặc các lý do khác.

Như vậy, cuối cùng ta chỉ còn lựa chọn giữa 2 giả thuyết: độ lệch ngoại lệ do ngẫu nhiên hay xác suất rơi mặt ngửa lớn hơn 1/2. Nhưng chúng ta đã biết xác suất của độ lệch ngoại lệ như vậy bằng 10^{-40}. Điều này làm ta rất khó tin vào giả thuyết đầu. Ngược lại giả thuyết cho rằng hai mặt của đồng tiền không cân xứng gây nên sự sai khác nhỏ giữa xác suất rơi mặt ngửa và mặt sấp là hợp lý và ta cần thừa nhận nó.

16. Lời bàn về bài toán trước

Có thể đặt ra vấn đề sau đây: chúng ta sẽ kết luận như thế nào ở bài toán trước ta dùng một miếng kim loại gia công tỉ mỉ (xem như là một hình trụ dẹt lý tưởng) thay cho đồng tiền bất đối xứng. Để phân biệt hai đáy của hình trụ này, ta chỉ chấm lên những chấm màu rất nhỏ (một mặt chấm xanh, một mặt chấm đỏ). Nói cho đúng ra là ta sẽ tiến hành trò chơi sấp, ngửa với miếng kim loại chỉ phân biệt được hai mặt bởi màu sắc đã qui ước (chẳng hạn), màu xanh là mặt ngửa). Bằng cách này chúng ta sẽ có một trong các phương pháp đã chỉ ra ở mục 14 để nhận được xác suất rơi sấp hay ngửa đúng bằng 1/2 với sai số có thể hoàn toàn bỏ qua.

Nhưng với một triệu lần thử mà ta được 510.000 lần xuất hiện mặt ngửa thì dứt khoát cần phải loại bỏ cả hai giả thuyết không hợp lý: độ lệch lớn ngoại lệ hay giá trị xác suất 1/2 là không đúng. Chúng ta đi đến kết luận là có những sai lệch chưa quan sát thấy trong khi thử và kết quả nhận được bị ảnh hưởng bởi một nguyên nhân chưa biết mà ta cần phải tìm ra.

17. Xác suất đẻ con trai

Một số bạn đọc có thể cho rằng bài toán trên hơi thừa vì việc ngồi tung đồng tiền một triệu lần để xem nó sấp hay ngửa rất vô vị. Nhưng các kết quả nhận được có thể áp dụng cho bài toán mà từ lâu đã được nhiều nhà thống kê quan tâm.

Ở các nước văn minh, hơn một thế kỷ nay có thống kê đều đặn số lượng trẻ em mới đẻ. Sự thống kê đó đã chỉ ra rằng tỷ lệ đẻ con trai rất ít xê dịch. Như vậy, trong khoảng thời gian từ mấy tháng đến mấy năm ở một nước nào đó ta có thể nhận được số liệu thống kê của một triệu lần sinh đẻ xảy ra trong khoảng thời gian đó. Khi ấy ta luôn luôn thấy rằng số trẻ em trai sinh ra lớn hơn 510.000 còn số em gái ít hơn 490.000(1). Dựa trên kết quả trước chúng ta có thể kết luận một cách chắc chắn rằng ở những nước ấy trong suốt hơn một thế kỷ qua, xác suất đẻ con trai lớn hơn 0,5 (khá gần 0,51). Đây là một kết luận rất đáng chú ý về mặt sinh học vì nó đặt ra trước cho nền sinh học một vấn đề hóc búa. Thực vật, lý thuyết di truyền hiện đại đã dẫn tới kết luận là việc đẻ con trai, con gái phụ thuộc vào thời điểm thụ tinh. Như vậy, vấn đề đầu tiên cần phải giải quyết là chúng ta tìm hiểu xem khả năng hình thành con trai, con gái ở lúc thụ tinh có bằng nhau hay là khả năng hình thành giao tử con trai nhiều hơn. Hoặc tỷ lệ con trai nhiều hơn có phải là do tỷ lệ chết yểu con gái nhiều hơn v.v...

Nếu những câu hỏi đó được trả lời thì ta chỉ còn phải nghiên cứu nguyên nhân sinh học của giá trị xác suất hình thành giao tử con trai, con gái lúc thụ tinh và xác suất chết yểu của trẻ sơ sinh.

---

(1) Ở một số nước khác, tỷ lệ này có thay đổi và những phong tục, tập quán dân tộc ảnh hưởng đến tỷ lệ chết của trẻ em mới đẻ. Tỷ lệ 0,51 đối với việc sinh con trai cho ta một tương ứng cứ 1000 trường hợp sinh con gái thì có 1040 trường hợp sinh con trai. Dưới đây xin nêu ra bảng thống kê số trường hợp sinh con trai ứng với 100 trường hợp sinh con gái ở nước Pháp trong khoảng thời gian sau:

1921 — 1925	... 1050	1943	... 1061
1935 — 1939	... 1038	1944	... 1059
1940	... 1040	1945	... 1056
1941	... 1038	1946	... 1056
1942	... 1055	1947	... 1057

Như vậy ta thấy một hiện tượng là cứ sau chiến tranh tỷ lệ đẻ con trai tăng lên một chút. Tỷ lệ em trai chết lúc mới đẻ cao hơn tỷ lệ em gái chết lúc mới đẻ (1300 — 1400 ứng với 1000)

Những vấn đề trên không nằm trong nội dung cuốn sách này. Nhưng chúng ta cũng thú vị khi nhận thấy là phép tính xác suất trong một số trường hợp rút ra được các kết luận chắc chắn đối với nhà sinh học và đặt ra cho họ những bài toán xác định.

18. Giới tính của các trẻ em sinh đôi, sinh ba

Khi sinh đôi, sinh ba... có lúc các em bé đẻ ra đều cùng giới tính, cũng có lúc khác giới tính. Nếu chỉ giới hạn trong việc xét các trường hợp sinh đôi thì kết quả cho biết là các em bé sinh ra cùng giới nhiều hơn là khác giới.

Chúng ta hãy đi tính thử bài toán này. Để đơn giản ta giả thiết rằng xác suất sinh con trai hay con gái đều bằng 0,5 (thay cho 0,51 và 0,49). Nếu xét hai lần sinh độc lập (trong hai gia đình khác nhau) thì dễ dàng nhận thấy rằng xác suất đẻ cả hai con trai bằng 0,25, cả hai con gái bằng 0,25 ; xác suất đẻ một trai, một gái bằng 0,50 (vì ta có xác suất đẻ con trai ở gia đình thứ nhất và con gái ở gia đình thứ hai bằng 0,25 và xác suất đẻ con gái ở gia đình thứ nhất và con trai ở gia đình thứ hai cũng bằng 0,25).

Nhưng kết quả quan sát số trường hợp sinh đôi lại cho thấy tỉ lệ các em bé sinh đôi cùng giới lại lớn hơn 0,5 đáng kể và xấp xỉ bằng 0,64. Phương pháp đơn giản và hợp lý nhất để giải thích điều này là phải giả thiết rằng, trong một số trường hợp sinh đôi giới tính của một trong hai trẻ sơ sinh sẽ báo trước giới tính của trẻ thứ hai còn thì chúng hoàn toàn không phụ thuộc vào nhau. Nếu gọi xác suất để xảy ra trường hợp đầu là p còn xác suất trường hợp sau sẽ là 1 — p thì xác suất để các trẻ sinh đôi cùng giới tính là :

$$p + 0,5\,(1 - p) = 0,5\,(1 + p)$$

So sánh giá trị này với 0,64 là giá trị ta quan sát được thì rút ra $p = 0{,}28$. Ta cũng có thể nói rằng đó là xác suất để cho hai trẻ sinh đôi đầu tiên vào sáng hôm nay ở một thành phố nào đó sẽ là cùng con trai hay con gái.

Cũng có thể tính toán tương tự cho trường hợp sinh ba. Các trường hợp sinh bốn, sinh năm quá ít ỏi nên khó áp dụng các phép tính xác suất.

19. Thăm dò dư luận xã hội

Các tổ chức chuyên thăm dò dư luận xã hội mà thường được gọi là các Viện thăm dò dư luận xã hội dù ít, dù nhiều cũng đều sử dụng các phương pháp tính xác suất [9]. Ở đây, nảy ra một vấn đề quan trọng là hãy thiết lập xem các kết quả xác định nhận được dựa vào đa số ý kiến khi thăm dò dư luận phần nhiều có phù hợp với thực tế không:

Vấn đề đầu tiên đặt ra là liệu bài toán mà ta vừa phát biểu có ý nghĩa hay không, tức là chúng ta có quyền nói về dư luận xã hội chỉ qua một số cuộc phỏng vấn xác định hay không.

Chúng ta cũng biết rõ rằng những kết quả mà viện thăm dò dư luận công bố hầu như luôn luôn chỉ gồm một số câu trả lời hạn định. Trong số đó lại có những người được hỏi không hiểu biết đầy đủ về vấn đề đặt ra cho họ. Nhưng loại ra những câu trả lời không có giá trị như vậy, chúng ta có thể tự hỏi, liệu nhiều người trong số được phỏng vấn mới lần đầu suy nghĩ về vấn đề đó hay không? Nghĩa là nói cho đúng ra thì họ không có khả năng phát biểu về một ý kiến mà đáng lẽ họ phải trả lời. Kki ấy chúng ta cũng có cơ sở để cho rằng phần lớn ngững người không được hỏi ở trong tình trạng như vậy. Cho nên nếu ta nói đến tình hình dư luận xã hội xác định về một vấn đề nào đó là không đúng.

Nhưng cũng có những trường hợp mà chúng ta có thể giả sử rằng đa số công dân của một nước nào đó thực sự nắm vững những ý kiến xác định về các vấn đề chính trị quan trọng thiết thân đối với họ. Chẳng hạn, một vài tuần lễ trước khi bầu cử tổng thống hầu hết các công dân đều biết rõ rằng họ sẽ bầu ông A, ông B, ông C hay chẳng bầu ai cả. Tôi cũng biết rõ là điều giả sử này sẽ gây ra nhiều sự phản đối, nhưng chúng ta cần phải coi nó như là một trường hợp thuận lợi nhất để cho quá trình thăm dò dư luận xã hội được đúng đắn.

Bây giờ, nếu mỗi công dân đều nghĩ trong đầu một trong các chữ A, B, C, D, (3 chữ đầu ứng với tên của 3 ứng cử viên, chữ cuối cùng ứng với việc phản đối cuộc bầu) và ta giả sử những người được hỏi đều có thể bầu cử trong những điều kiện bí mật như hôm bầu thật thì các công dân đó sẽ bầu cử như họ bầu vào đúng hôm bầu thật. (Họ sẽ viết lên tờ phiếu một trong 4 chữ A, B, C, D và bỏ vào hòm kín). Khi đó sẽ nảy ra bài toán là cần phải làm thế nào để xác định khá chính xác về kết quả có khả năng xảy ra của cuộc bầu cử).

20. Đoán trước kết quả bầu cử

Bài toán mà chúng ta đã đặt ra tương đương với bài toán sau đây (Giả sử ý kiến mỗi người bầu cử tương ứng với một quả cầu có màu khác nhau):

Một hòm kín chứa rất nhiều quả cầu xanh, đỏ, trắng, đen (số lượng quả cầu lớn hơn 100.000 hoặc lên tới một vài triệu). Hỏi cần phải rút bao nhiêu quả cầu từ hòm đó để nhận biết được thành phần các quả cầu trong hòm với một độ chính xác chắc chắn.

Đặc biệt, chúng ta sẽ nghiên cứu vấn đề là có thể dựa vào các quả cầu rút ra để tin tưởng các quả cầu trắng chiếm đa số tuyệt đối trong hòm hay không (các quả cầu đen xem như ý kiến phản đối và không được kể vào khi tính đa số tuyệt đối).

Rõ ràng là để giải bài toán này chỉ cần tính đơn vị độ lệch tương đối cho kết quả rút ra một số quả cầu xác định. Từ đây, ta rút ra một nhận xét đầu tiên là: Khi số lượng quả cầu trong hòm khá nhiều thì việc rút cùng một số lượng quả cầu trong hòm chứa 100.000 hay 50 triệu quả cầu cũng cho ta biết được thành phần của hòm với xác suất sai số như nhau.

Đồng thời, ta cũng còn một nhận xét nữa là: Nếu số lượng quả cầu trong hòm rất nhiều so với số lượng quả cầu rút ra thì việc rút quả cầu không hoàn lại hay có hoàn lại cũng không khác nhau đáng kể (1).

Thường là, người ta hay rút ra đến 5000 quả (2) cầu để có thể nhận được một kết quả chính xác đáng tin. Nếu ta thừa nhận tỷ lệ quả cầu trắng xấp xỉ 0,5 thì số khả năng có thể rút ra quả cầu trắng là 2500 và đơn vị độ lệch sẽ là 50. Chúng ta lại biết rằng xác suất độ lệch bằng hoặc lớn hơn 2,30 u (u : đơn vị độ lệch) tức là xác suất để cho độ lệch gần bằng 115 là một phần nghìn. Độ lệch như vậy ứng với 2615 quả cầu trắng, tức là 52,3% nếu độ lệch dương và 47,7% nếu độ lệch âm. Từ

(1) Dễ thấy rằng việc rút quả cầu không hoàn lại sẽ làm tăng thêm khả năng nhận biết thành phần các quả cầu trong hòm.

(2) Con số này vẫn đạt được khi số quả cầu trong hòm ít hơn 5000 (tất nhiên phải thực hiện việc rút có hoàn lại) nhưng trường hợp này không đáng quan tâm lắm trong bài toán của chúng ta.

đây, ta rút ra kết luận là nếu số quả cầu trắng vượt quá 52% thì có thể khẳng định với xác suất bằng 0,999 rằng: trong hòm đa số là quả cầu trắng.

Trong lý luận trên, ta đã bỏ qua các quả cầu đen « phản đối cuộc bầu cử ». Nếu số lượng chúng không nhiều lắm thì ảnh hưởng có thể bỏ qua được, vì nó sẽ được bù trừ bởi các nhân tố khác có xu hướng làm giảm độ lệch đơn vị. Chẳng hạn như việc rút quả cầu không hoàn lại hay một số cách khác sẽ được trình bày dưới đây.

21. Phân hoạch việc rút ra các quả cầu

Khi 50 triệu quả câu trong hòm đại diện cho 50 triệu cử tri của một nước nào đó thì việc tổ chức lấy mẫu (chọn) ngẫu nhiên trong số cử tri thực tế rất phức tạp.

Cách giải quyết đơn giản nhất là đánh số tất cả các cử tri đó từ 1 đến 50.000.000 (chẳng hạn có thể dùng luôn số ghi trên phiếu bầu). Sau đó bằng một cách tương tự như quay sổ số để chọn 5000 số trong 50.000.000 số. Để làm điều này chỉ cần rút bú họa ra 4 chữ số và chọn tất cả những số nào tận cùng bởi 4 chữ số đó (ví dụ như 3517). Những nhận xét mà chúng tôi muốn đưa ra dưới đây nhằm mục đích chứng tỏ là việc phân hoạch như vậy chỉ có thể làm giảm độ lệch đơn vị.

Sự việc sẽ khác đi nếu chúng ta nảy ra ý nghĩ chọn trong số nam nữ cử tri cùng họ, cùng tên (ví dụ, ở Pháp phổ biến nhất là các tên Pie hay Giano). Phương pháp này khiến ta nhiều khi chọn phải những người cùng gia đình mà thường thường cùng có ý kiến như nhau hoặc tăng khả năng chọn được nhiều người vùng này, giảm khả năng chọn được người ở một số vùng khác v.v...

Tuy nhiên, một cách rất tự nhiên ta sẽ cố gắng phân hoạch theo lãnh thổ hoặc theo đặc điểm nghề nghiệp. Kiểu phân hoạch này sẽ cho ta nhiều kết luận rất thú vị.

Chẳng hạn, có thể phân hoạch 50.000.000 cử tri theo 50 bang mà mỗi bang trung bình có 1 triệu người. Trong mỗi bang cứ 10.000 người chọn ra một cử tri. Hoặc cũng có thể phân hoạch số cử tri theo các phạm trù tùy theo nghề nghiệp. Nếu có phạm trù nào quá nhiều cử tri (vượt hơn mấy triệu) thì ta lại phân hoạch nhỏ ra theo dấu hiệu tuổi tác (từ 20 đến 30 tuổi v.v...).

Nhưng sự phân hoạch theo đặc điểm lãnh thổ hay nghề nghiệp có chắc chắn làm cho tỷ lệ phần trăm số người bầu cho một ứng cử viên xác định nào đấy (ứng với quả cầu trắng) thay đổi đáng kể từ vùng này sang vùng khác và từ nghề nghiệp này sang nghề nghiệp khác hay không.

Với mỗi lớp phân hoạch ta rút ra một quả cầu từ 10.000 quả, nghĩa là chọn ra một nam hay nữ cử tri trong 10.000 người đi bầu.

Làm như vậy, chúng ta sẽ giảm đơn vị độ lệch xuống đáng kể. Chúng tôi không nêu ra đây cách chứng minh tổng quát cho điều khẳng định này mà xin giải thích bằng ví dụ. Nếu một triệu cử tri thuộc cùng một phạm trù xác định : chẳng hạn phạm trù những người thợ mỏ hay cư dân của một vùng nào đó có cùng chung ý kiến thì việc chọn ngẫu nhiên 100 lần mà trong đó sẽ cho một kết quả giống nhau. Khi đó đơn vị độ lệch sẽ bằng không. Nếu ở các phạm trù khác cũng có tình hình như vậy (dĩ nhiên ý kiến chung của mỗi phạm trù có thể khác nhau) thì đơn vị độ lệch ở mỗi mẫu riêng bằng không sẽ dẫn đến đơn vị độ lệch của toàn thể cũng bằng không.

Các viện thăm dò dư luận thường đưa ra trong thông báo của họ những tỷ lệ phần trăm các câu trả lời tán thành hoặc không tán thành của riêng từng phạm trù nghề nghiệp, nam, nữ khác nhau. Đến đây chúng tôi thấy cần phải đưa ra một nhận xét. Giả sử rằng phạm trù nghề nghiệp của chúng ta (hay phạm trù lãnh thổ) gồm 1 triệu người. Nếu cứ 10.000 người chọn ra 1 người thì ta sẽ chọn được ra 100 người. Nếu ta thừa nhận xác suất rút quả cầu màu trắng là 0,5 thì số khả năng rút được quả cầu trắng sẽ là 50. Căn bậc hai của 50 gần bằng 7 và đó chính là đơn vị độ lệch. Tích của số 7 với 1,15 gần bằng 8, với 2,3 gần bằng 16.

Cho nên nếu ta có một phần mười hy vọng để độ lệch vượt quá 8 thì ta sẽ chỉ có một phần nghìn hy vọng để độ lệch vượt quá 16. Trong trường hợp đầu phần trăm quả cầu trắng nhỏ hơn 42% hoặc lớn hơn 56% ; trong trường hợp thứ hai nó nhỏ hơn 34% hoặc lớn hơn 66%.

Như vậy, chúng ta thấy tỷ lệ phần trăm nhận được khi lấy mẫu ngay cả từ trong phạm trù rất đông (hàng triệu cá thể) sai khác khá nhiều với tỷ lệ phần trăm tính theo cả nước. Nhưng vì sai số này do tính lấy mẫu ngẫu nhiên không phải là sai số hệ thống nên lúc dương, lúc âm sẽ bù trừ cho nhau. Vì thế về mặt tổng thể vẫn đạt được độ chính xác cao.

22. Sự ước lượng của các chuyên gia

Rõ ràng là ai biết khá nhiều người thuộc về một nghề nghiệp hay một vùng nào đó thì đều dễ dàng ước lượng được tỷ lệ phần trăm bỏ phiếu nhiều nhất của mọi người có nghề nghiệp ấy hoặc ở trên vùng ấy. Dường như các phương pháp thăm dò dư luận xã hội đều dựa trên điều này. Chúng ta hãy xét việc phân hoạch theo phạm trù nghề nghiệp. Các viện thăm dò dư luận sẽ cố gắng chọn ra ở mỗi nghề nghiệp một số người nào đó đại diện cho các khuynh hướng khác nhau trong nghề nghiệp ấy và dựa theo các câu trả lời của họ mà viện thăm dò sẽ ước lượng phần trăm những người giữ ý kiến này, khác trong phạm trù nghề nghiệp ấy. Cũng có thể làm như vậy đối với việc thăm dò dư luận về một cuộc bầu cử chính trị. Bởi vì theo dấu hiệu lãnh thổ, những người biết rõ vùng nào sẽ ước lượng tương đối chính xác về kết quả bầu cử của vùng ấy.

Chúng ta cũng không loại trừ khả năng (mặc dù điều này không chắc chắn lắm) khi phân hoạch theo nghề nghiệp hoặc lãnh thổ số người lên tới hàng triệu sẽ làm cho ước lượng dự kiến không thể chính xác lắm nhưng nó còn tốt hơn ước lượng dựa vào sự chọn ngẫu nhiên (cách này cứ 10 lần chọn thì một lần mắc sai số 8%). Nhưng như chúng ta đã thấy việc chọn ngẫu nhiên có ưu điểm là tổng các độ lệch ngẫu nhiên của các kết quả riêng biệt lại sẽ dẫn đến sai số trung bình khá bé. Sự ước lượng của các chuyên gia cũng có tính chất này nhưng làm sáng tỏ điều đó rất khó. Để minh họa, chúng tôi xin đưa ra trường hợp cực đoan nhất. Ai cũng biết rằng một đảng phái chính trị lớn sẽ nắm được nhiều phương tiện lưu tin nên ước lượng lạc quan của họ đối với mỗi khu vực bầu cử chỉ mắc sai số không vượt quá 3 hoặc 4% (tức là 53 hoặc 54 thay cho 50%).

Nhưng nếu mọi sai số cùng dấu thì tổng nhận được sẽ có sai số bằng trung bình cộng của chúng và như vậy sẽ lớn hơn sai số nhận được khi lấy ngẫu nhiên. Trong khi đó sai số cục bộ theo cách ước lượng của chuyên gia thường nhỏ hơn sai số cục bộ của cách chọn ngẫu nhiên.

Bàn chi tiết về các phương pháp thăm dò dư luận xã hội khác nhau không nằm trong nội dung cuốn sách này. Mục đích của chúng tôi chỉ nhằm trình bày một vài nguyên tắc mà đã được nêu bật lên khi bàn về các phương pháp đó. Để kết thúc chương này, chúng tôi xin nói thêm vài lời nhận xét về sự bắt chước ngẫu nhiên.

23. Sự bắt chước ngẫu nhiên

Bạn đọc có thể tự hỏi là, liệu có thể thay cách chọn ngẫu nhiên tiến hành một cách mò mẫm và phức tạp bởi một cách chọn chủ ý cũng có những ưu điểm như cách chọn ngẫu nhiên với một số ưu điểm khác nữa hay không?

Vấn đề này liên quan đến cái gọi là « sự bắt chước ngẫu nhiên ». Ta có thể thay vòng quay số bởi một người đọc số được bố trí sao cho anh ta không thể nhìn hoặc biết món tiền cược và anh ta sẽ xướng lên theo ý mình con số để thắng cuộc. Dĩ nhiên người đọc số về trung bình mà nói sẽ không được xướng lên quá một con số 0 trong 37 lần. Bây giờ ta giả sử người bắt chước chỉ phải chọn tùy ý hai tiếng *đỏ* và *đen*. Liệu anh ta có bắt chước ngẫu nhiên được không? Nghĩa là anh ta phải xướng lên tiếng *đỏ* hoặc *đen* theo một thứ tự mà người chơi không thể đoán trước được nhưng cách xướng phải bảo đảm cho người chơi luôn luôn có khả năng thắng cuộc như nhau. Dễ dàng thấy rằng cách duy nhất đạt được kết quả này là người bắt chước phải tách ra khỏi mọi suy nghĩ của mình để trả lời thật ngẫu nhiên các tín hiệu mà không nhớ lại các câu trả lời trước.

Thực vậy, giả sử anh ta cố gắng nhớ lại các câu đã xướng lên, chẳng hạn trong 20 câu trả lời trước anh ta thấy tiếng *đỏ* được ưa thích hơn thì đến câu tiếp anh ta sẽ ngả về tiếng *đen*. Khi ấy, người chơi có óc quan sát tốt sẽ xây dựng cho mình một lối chơi ứng với hành vi của người bắt chước mà anh ta phác họa được để tăng thêm khả năng mình thắng cuộc.

Bài toán chọn ra một trăm người trong số một triệu người thuộc về một nghề nghiệp hoặc một vùng nào đó để đánh giá dư luận chung có khác với bài toán trước. Nhưng cách giải quyết nó cũng tương tự và có lẽ không *chỉ có cách lấy ngẫu nhiên thuần túy mà bất kỳ cách* nào khác muốn có kết quả tốt đều phải thực hiện bằng việc chọn ra những người chưa biết trước câu trả lời của vấn đề đặt ra. Ở trường hợp sau này mà ta phải khó nhọc tổ chức ra cách chọn thì thật là vô ích. Thực vậy, nếu đã biết trong một triệu người có khoảng 50% sẽ bầu cho ông A và khi chọn ra 100 người mà có đúng 50 người bầu ông A thì chắc chắn là cách chọn này sẽ tốt hơn bất kỳ một cách chọn ngẫu nhiên thuần túy nào khác. Nhưng điều này có liên quan đến việc bài toán thiết lập nên đã giải được hay trong một chừng mực nào đó người ta tin rằng lời giải của nó đã được biết.

Nếu hoàn cảnh không được như vậy thì ta có thể cố chọn ra một số người mà ý kiến của họ ta chưa biết nhưng có thể xem như họ là đại diện điển hình cho các nhóm người mà ta nghiên cứu. Như thế ta sẽ bỏ qua ý kiến của rất nhiều người có thể là họ rất tầm thường nhưng lá phiếu bầu của họ vẫn giá trị ngang như lá phiếu bầu của những người khác. Ta cũng không có cơ sở gì để cho rằng ý kiến của những người mà ta bỏ qua sẽ phân bố như ý kiến của những người được chọn ra.

Ta cũng có thể cố gắng bắt chước « ngẫu nhiên » nhờ các phương pháp thực nghiệm đơn giản. Chẳng hạn, ta chọn một công nhân ra khỏi xí nghiệp hay một người hành khách trong xe điện ngầm. Rõ ràng sẽ có nhiều khả năng chọn phải anh chàng lười lao động và không buồn bã vì cảnh thất nghiệp, hay chọn phải những người vì điều kiện công tác, tình trạng sức khỏe và thu nhập của mình (không giàu quá hoặc nghèo quá) mà phải thường xuyên đi xe điện ngầm, nhưng như thế thì hoàn toàn có khả năng là ta đã bỏ qua mất phạm trù gồm những người có ý kiến rất khác với những người trong phạm trù được chọn ra. Để tổng kết, tôi lại xin nêu nhận xét đã nói ở trên. Ưu điểm lớn của cách chọn ngẫu nhiên là nó không có sai số hệ thống, vì sai số của các kết quả riêng khác nhau sẽ bù trừ cho nhau khi lấy tổng tất cả lại. Chẳng hạn có thể bằng cách tùy ý nào đó ta chia 50 triệu người dân thành 5000 nhóm, mỗi nhóm 10.000 người rồi chọn ngẫu nhiên trong mỗi nhóm một người. Rõ ràng người độc nhất này không thể đại diện hoàn toàn cho các khuynh hướng khác nhau trong nhóm và có khi ta lại chọn phải người chỉ đại diện cho một khuynh hướng của thiểu số rất ít người. Tuy vậy, tập hợp 5000 người được chọn cũng cho ta hình dung một cách khá chính xác về các ý kiến chung của 50 triệu người.

Trong trường hợp này rất rõ ràng là mọi phương pháp chọn khác với cách chọn ngẫu nhiên đều không xác thực. Bởi vì nếu chọn ngẫu nhiên thì trung bình sẽ chọn được 100 người cùng ý kiến trong số 5000 người chọn ra (với điều kiện cứ 10000 người thì có 200 người cùng ý kiến) còn cách chọn khác có khi chẳng chọn ra (với điều kiện cứ 10000 người thì có 200 người cùng ý kiến), còn cách chọn khác có khi chẳng chọn ra được người nào đại diện cho nhóm 200 người ấy cả.

CHƯƠNG 4

SỰ KHUẾCH TÁN CÁC CHẤT KHÍ VÀ NGUYÊN LÝ TIẾN HÓA

24. Lý thuyết động học của chất khí

Becnuli đã sáng lập ra thuyết động học của chất khí từ thế kỷ 18 (1), nhưng chỉ đến giữa thế kỷ 19, Macxoen và sau đó là Bônxơman mới chính xác hóa lý thuyết này, đưa vào các phương pháp tính toán đồng thời biết cách rút ra những tính chất cơ bản của chất khí từ những giả thiết đơn giản. Sang đầu thế kỷ 20, khoa học tiến thêm một bước nữa: thuyết phân tử đặc biệt nhờ công trình nổi tiếng của Perôn đã trở thành một thuyết hiện thực của vật lý học [10]. Hơn nữa, các phương pháp liên quan đến phép tính xác suất không những chỉ giúp ta rút ra các tính chất đã biết mà còn giúp ta tìm ra một loại tính chất mới cũng như một loạt lý thuyết mới, chẳng hạn: lý thuyết lượng tử, lý thuyết cơ học lượng

(1) Nói cho đúng hơn là thay cho tốc độ trung bình ta cần phải nói đến căn bậc hai của giá trị trung bình của bình phương tốc độ. Nhưng nếu hai số này không bằng nhau thì dễ dàng chứng minh tỷ số của chúng không đổi, nếu độ lệch trung bình theo luật Laplax-Gauxơ thì theo Macxoen nó cũng đúng cả cho tốc độ của phân tử khí.

tử, cơ học sóng... làm đổi mới hẳn bộ mặt của vật lý học.

Điểm xuất phát của mọi sự tiến bộ đó là sự biểu diễn một khối thể khí như là tập hợp gồm rất nhiều phân tử ở trạng thái luôn luôn chuyển động. Mỗi phân tử trong một giây va chạm rất nhiều lần vào thành bình chứa chất khí đó, lúc thì va vào các phân tử khác. Chính các va chạm này tạo nên áp suất của chất khí tác dụng lên thành bình — áp suất này đã được ứng dụng vào việc chế tạo các van khí để gây nên sự chuyển động của máy.

Tốc độ phân tử càng lớn thì nhiệt độ chất khí càng cao. Nếu tính bắt đầu từ độ 0 tuyệt đối (—273° Kenvin) thì nhiệt độ chất khí sẽ tỷ lệ với bình phương giá trị tốc độ trung bình của phân tử khí nhân với khối lượng phân tử của chất khí đó.

Từ đây ta kết luận là nếu lấy hai thể tích khí bằng nhau có cùng nhiệt độ thì bình phương của tốc độ trung bình sẽ tỷ lệ nghịch với khối lượng phân tử. Chẳng hạn, vì khối lượng phân tử ôxy lớn hơn 16 lần khối lượng phân tử hyđrô nên tốc độ trung bình của phân tử hyđrô sẽ lớn hơn bốn lần tốc độ trung bình của phân tử ôxy để hai chất khí có cùng nhiệt độ. Thực vậy, ở nhiệt độ thường giá trị trung bình của tốc độ phân tử khí ôxy gần bằng 450 m/s, còn của phân tử khí hyđrô gần bằng 1800 m/s. Bởi vì khi mật độ chất khí khá lớn (ở áp suất và nhiệt độ khí quyển bình thường) khoảng cách tự do trung bình (tức là khoảng cách mà phân tử đi được giữa 2 lần va chạm liên tiếp) sẽ rất bé nên chúng ta rút ra kết luận là mỗi phân tử sẽ phải va chạm rất nhiều lần trong mỗi giây. Mỗi lần va chạm giữa hai phân tử nói chung đều gây nên sự biến đổi tốc độ của cả hai phân tử. (Nhưng tổng bình phương các tốc độ này vẫn không đổi theo định luật bảo toàn năng lượng). Chính tác động cơ học này gây nên sự biến đổi rất nhanh chóng về tốc độ của các phân tử khi trộn các chất khí có nhiệt độ chênh lệch vào với nhau. Trong một khoảng thời gian rất ngắn nhiệt độ hỗn hợp khí sẽ trở nên cân bằng và phân bố tốc độ phân tử sẽ tuân theo định luật Macxoen.

Luật phân bố tốc độ này do Macxoen đã chứng minh dựa vào một giả thuyết không hiển nhiên lắm, là xác suất của các giá trị hình chiếu của tốc độ lên hai trục vuông góc là đối lập với nhau. Nhưng Bônxơman đã đưa ra một cách chứng minh chặt chẽ không phụ thuộc vào giả thuyết đó và ông cũng chứng minh được là giả thuyết đó cũng đúng.

25. Hỗn hợp các chất khí

Chúng tôi sẽ không nêu ra đây các công thức toán học của thuyết động học cũng như các công thức của cơ học thống kê (mà Givxơ đã tổng quát hóa thuyết động học này (1)) mà chỉ nói đến một vài kết quả đơn giản chỉ đòi hỏi các phép tính hết sức sơ cấp.

Ta xét hai bình như nhau chứa hai chất khí khác nhau ở cùng một áp suất và nhiệt độ khí quyển. Hai bình này

(1) Bạn đọc nào quan tâm đến các vấn đề này có thể tìm đọc trong hai bài viết của Borel về lý thuyết xác suất :

— E. Borel : Mécanique statistique classique

— J. Perrin : Mécanique statistique quantique

Tiếng Nga có những cuốn rất hay sau :

— М. А. Леонтович, статистическая физика, гостехиздат, 1944.

— А. Я. Хинчин, математические методы статистической механики, гостехиздат, 1943.

được nối với nhau bằng một ống có vòi đóng, mở. Chúng ta mở vòi: cái gì sẽ xảy ra? Thí nghiệm đã chứng tỏ là chỉ sau một thời gian ngắn (không quá vài tiếng nếu ống không quá hẹp) thì cả hai bình đều chứa hỗn hợp của hai chất khí — một hỗn hợp thuần nhất và như nhau ở cả hai bình. Trạng thái này sẽ ổn định rất lâu và thí nghiệm không thể nhận thấy một sự thay đổi nhỏ nào về thành phần của hỗn hợp.

Giải thích hiện tượng này theo quan điểm của thuyết động học rất đơn giản: chuyển động của các phân tử do những sự va chạm nhiều lần với nhau nên rất hỗn độn, tức là hết sức ngẫu nhiên (chính sự chuyển động ngẫu nhiên trong một khoảnh khắc bất kỳ lại tuân theo luật phân bố tốc độ của Macxoen; luật này không những đúng cho mọi tốc độ của các phân tử khác nhau ở cùng một thời điểm mà còn đúng cho mọi tốc độ của một phân tử trong một chu kỳ nhất định. Như vậy, trong một khoảng thời gian khá dài so với khoảng thời gian giữa 2 lần va chạm (khoảng thời gian này ngắn hơn một phần triệu giây rất nhiều) xác suất để cho một phân tử ở bình này chuyển động sang bình khác là như nhau (giả sử hai bình bằng nhau). Chúng ta xem như mỗi bình chứa được một lít và chất khí trong bình ở nhiệt độ và áp suất khí quyển bình thường. Như vậy số phân tử của mỗi chất khí chứa trong bình sẽ là 10^{22}. Nếu ta muốn nhận biết thành phần hỗn hợp khí ở trong một bình nào đó thì cần phải hình dung là mỗi phân tử sẽ tự chọn một chuyển động ngẫu nhiên sang bên phải hay bên trái tùy theo đồng tiền rơi sấp hay ngửa v.v... Trong điều kiện như vậy, số khả năng các phân tử của mỗi chất khí ở trong mỗi bình sẽ bằng một nửa 10^{22} cộng hay trừ với một độ lệch nào đó (mà ta đã biết qui luật).

Thực vậy, ở đây ta cần phải công nhận đơn vị độ lệch là căn bậc hai của số khả năng, tức là một số nhỏ hơn 10^{11}, còn xác suất độ lệch vượt quá 5 lần đơn vị độ lệch sẽ nhỏ hơn một phần mười tỷ. Xác suất độ lệch vượt quá đơn vị độ lệch 10 hoặc 100 lần sẽ bằng 10^{-40} hoặc 10^{-4000} (tức là số bé vô cùng)(1).

Nhưng độ lệch vượt quá đơn vị độ lệch 10 lần bằng 10^{12}. Bởi vì có 10^{22} phần tử nên tỷ lệ của độ lệch bằng 10^{-10}, tức là một phần mười tỷ. Cho nên khả năng để hỗn hợp khí không thuần nhất đáng kể là cực kỳ bé. Điều này cũng dễ hiểu vì không thể có một thí nghiệm nào quan sát được hiện tượng ấy. Ngay cả các phương pháp chính xác nhất mà ta có thực hiện được cũng không thể nào xác định được tỷ lệ chất khí trong hỗn hợp chính xác đến một phần mười tỷ. (Tức là phải xác định trọng lượng một gam khí chính xác đến một phần mười triệu miligam). Việc xác định này ngay cả khi tỷ lệ độ lệch có lớn hơn 10 lần đi nữa cũng rất khó khăn, huống hồ xác suất để có tỷ lệ độ lệch như vậy có thể xem như hoàn toàn bỏ qua được (vì nó nhỏ hơn 10^{-400}).

26. Sự thăng, giáng trong dung dịch

Các nhà bác học đã đi đến kết luận là: tính chất của dung dịch cũng giống như tính chất của chất khí và các phân tử của chất hòa tan cũng như các phân tử của chất khí.

Nếu dung dịch rất yếu thì số phân tử của chúng rất lớn và các khả năng biến đổi thành phần sẽ quan sát được. Chẳng hạn, nếu số phân tử của một lit dung dịch ít hơn một triệu lần số phân tử của một lit chất khí thì

(1) Ta sẽ chính xác hóa tính vô cùng bé này ở chương sau

đơn vị độ lệch sẽ nhỏ hơn 1000 lần và sự biến đổi ứng với một bội số nào đó của đơn vị độ lệch cũng sẽ ít hơn 1000 lần. Cho nên thay cho tỷ lệ một phần mười tỷ, ta được tỷ lệ phần triệu tức là có thể gần quan sát được.

Cũng nhờ thuyết động học và phép tính xác suất mà ta có thể lý giải được hiện tượng bay hơi xảy ra trong dung dịch nào đó ở gần điểm tới hạn. Bạn đọc có thể xem chi tiết vấn đề này trong các sách đã dẫn ở trên.

Nếu có những phần tử rắn ở trạng thái cân bằng vô cùng nhỏ bé (nhưng vẫn có thể nhìn thấy bằng kính hiển vi) ở trong một chất lỏng chứa rất nhiều phân tử đang chuyển động thì những phân tử này sẽ va chạm vào những phần tử chất rắn nhỏ bé rất nhiều lần trong một giây. Những « cú va chạm » này diễn ra rất ngẫu nhiên và về trung bình mà nói thì chúng sẽ bù trừ cho nhau, nghĩa là giá trị trung bình của các hình chiếu đại số của mọi chuyển động lên cùng một trục nào đó phải bằng không. Tuy nhiên ở từng thời điểm giá trị trung bình sẽ có một độ lệch khỏi giá trị 0 và những độ lệch hỗn độn đó sẽ gây nên sự chuyển dịch của các phân tử nhỏ bé mà thường được gọi là chuyển động Brao. Nghiên cứu chuyển động Brao là một trong những ứng dụng lý thú nhất của phép tính xác suất và là đối tượng của rất nhiều công trình nghiên cứu. Ở đây, tôi không có khả năng chỉ ra tất cả mà chỉ xin lưu ý bạn đọc tới tác phẩm của G. Perón và một số công trình sau này của Pônlêvi.

27. Sự cân bằng nhiệt

Chúng ta đã thấy rằng khi trộn hai chất khí có nhiệt độ khác nhau thành một hỗn hợp (giả sử hỗn hợp được chứa trong một bình kín) thì chỉ sau một thời gian ngắn chúng sẽ cùng một nhiệt độ và tốc độ các phân tử phân bố theo luật Macxoen.

Khi đạt tới nhiệt độ ấy, nó sẽ ổn định và không biến đổi. Điều này chỉ ra luật Macxoen cũng đúng cho các phân tử lấp đầy một thể tích nhỏ bé nào đó tại thời điểm cho trước. (Chẳng hạn, một khối lập phương có cạnh dài 1cm hoặc 1mm). Nhưng điều đó cũng có nghĩa là các phân tử chuyển động nhanh nhất sẽ phân bố đều giữa các phần khối hỗn hợp khí khác nhau. Lẽ dĩ nhiên sự phân bố này chỉ gần đều nhưng so với số phân tử vô cùng nhiều thì độ lệch tương đối cực kì bé và chúng ta không thể quan sát thực nghiệm được.

Sự cân bằng nhiệt như vậy diễn ra không chỉ trong chất khí mà còn diễn ra cả trong chất lỏng và chất rắn. Khi có hai vật nhiệt độ khác nhau thì nhiệt sẽ truyền bằng bức xạ từ vật nóng hơn sang vật lạnh hơn. Cho nên vật đầu sẽ nguội đi và vật sau sẽ nóng lên. Hiện tượng này ta có thể luôn luôn thấy được ở một tỷ lệ vô cùng lớn là mặt trời và trái đất : mặt trời dần dần nguội đi còn quả đất nóng dần lên nếu như nó không bị nguội đi bởi bóng đêm.

Cacnô là người đầu tiên, nhờ phỏng đoán thiên tài của mình, đã hiểu được sự cân bằng nhiệt có ý nghĩa cơ bản đối với nhiệt động học và đặc biệt là đối với lý thuyết máy hơi nước. Nguyên lý Cacnô, mà sau này được Claudiuyt chính xác hóa, chiếm một vị trí hàng đầu trong khoa học kỹ thuật. Hiện nay, người ta thường gọi nó là nguyên lý tiến hóa (theo lối hình dung mà chúng ta sẽ thấy dưới đây). Đồng thời, bạn đọc cũng đã thấy nguyên lý này tồn tại được là dựa vào khái niệm xác suất, cho nên mọi kết luận rút ra từ nguyên lý đó phải coi như chỉ rất có khả năng chứ không phải hoàn toàn chắc chắn là đúng.

28. Nghịch lý Ginxơ

Nhà vật lý Anh Ginxơ đã nêu một câu hỏi là: liệu có thể bằng một thí nghiệm đơn giản nào đó để cho bình nước đặt cạnh lò sưởi rất nóng mà nước trong bình lại đóng băng hay không?

Bằng cách tiến hành những tính toán như chúng ta đã làm khi trộn các chất khí. Ginxơ đã tính ra được xác suất để xảy ra hiện tượng trên mà sau này được mang tên là « chuyện kỳ lạ của Ginxơ ».

Sau khi tính được xác suất đó, Ginxơ kết luận là không nên coi chuyện vô lý đó không thể xảy ra mà chỉ nên coi nó có rất ít khả năng xảy ra mà thôi.

Thú thực với bạn đọc là ở các công trình trước đây, tôi đã công nhận kết luận đó của Ginxơ. Chắc chắn là do tôi bị ấn tượng mạnh mẽ bởi nhiều nhà vật lý và toán học đã đồng ý với Ginxơ.

Nhưng giờ đây, cũng như bạn đọc sẽ thấy ở cuối sách, tôi sẽ không hề do dự mà tuyên bố rằng chuyện kỳ lạ của Ginxơ sẽ không bao giờ xảy ra cả trong cách nghĩ của những người có bộ óc tốt.

Lẽ tất nhiên, tôi không nghĩ rằng theo ý nghĩ của những người có bộ óc tốt là luôn luôn đúng; tôi cũng còn nhớ Pôn valêri đã nói: chính những bộ óc khỏe mạnh đã có thời kì phủ định cả sự tồn tại của chất đối ảnh và sự chuyển động của trái đất quanh mặt trời.

Nhưng tôi cảm thấy sự hình dung của chúng ta về số vô cùng lớn và số vô cùng bé không được đầy đủ nên nhiều khi những lập luận nói đến các số đó cũng như các số mà chúng ta đạt được giá trị chính xác của chúng thường đánh lừa chúng ta.

29. Nguyên lý tiến hóa

Nguyên lý tiến hóa (dạng hiện đại của nguyên lý Cacnô) phát biểu như sau:

Một hệ đóng (nghĩa là không nhận năng lượng từ nguồn bên ngoài) trong quá trình phát triển của mình cần phải chuyển từ trạng thái ít có khả năng sang trạng thái có khả năng hơn.

Điều này đã được thể hiện khi ta trộn các chất khí hay các chất lỏng có mật độ khác nhau, ví dụ như nước lã và rượu nho, chất này ở trên chất kia trong một ống thẳng đứng. Sau một khoảng thời gian ta sẽ nhận được một hỗn hợp thuần nhất và không thể nào trút riêng nước và rượu ra được.

Cũng có thể phát biểu nguyên lý tiến hóa khác đi như sau:

Một hệ đóng không bao giờ diễn lại một trạng thái hai lần. Thực vậy, nước và rượu có thể tách ra từ hỗn hợp nhưng khi đó phải chưng cất, tức là phải nhận nguồn nhiệt lượng từ bên ngoài.

Hơn nữa, chúng ta có thể quan sát luật tiến hóa không phải chỉ ở mức độ phân tử. Nếu ta có những hạt kích thước nhỏ hơn 1 mm thì một lít hạt ấy sẽ chứa vài triệu hạt. Giả sử có một số hạt đen và một số hạt trắng: khi ấy, ta có thể dễ dàng trộn hai lượng hạt đen, trắng bằng nhau để được một khối lượng hạt có màu xám đều. Sau đó thì ta không thể nào bốc ra được một nắm hạt toàn hạt đen hoặc toàn hạt trắng. Để được một nắm hạt thuần nhất như vậy, ta phải kiên nhẫn ngồi nhặt ra từng hạt một. Nhưng nói cho đúng ra thì ta có thể làm được điều đó đối với các hạt chứ không thể làm được với các phân tử.

Macxoen có làm được một thí nghiệm rất tinh xảo như sau (Thí nghiệm « Macxoen »):

Có hai bình chỉ thông sang nhau bởi một lỗ hổng nhỏ đến mức chỉ cho vừa đủ một phân tử lọt qua, Macxoen đặt trước lỗ hổng ấy một tấm che nhỏ. Tấm che ấy chỉ mở ra cho phân tử nào « nóng » (chuyển động nhanh) sang bình bên trái và phân tử nào « lạnh » (chuyển động chậm) sang bình bên phải. Hoạt động của tấm che này đòi hỏi một ít năng lượng bên ngoài, liệu có thể xem là không đáng kể so với kết quả thu được không (Theo thí nghiệm này thì cuối cùng bình bên trái sẽ nóng lên và bình bên phải sẽ nguội đi). Bởi vì thí nghiệm này được điều khiển từ ngoài nên ta không thể coi nó là chứng minh cho việc nguyên lý tiến hóa không còn đúng nữa.

30. Entrôpi

Những người sáng lập ra lý thuyết nhiệt động học đã cùng với Claudiuyt định nghĩa một hàm trạng thái của hệ gọi là entrôpi. Entrôpi của một vật mà mọi phần của nó có nhiệt độ bằng nhau xác định bởi thương số của nhiệt lượng mà vật đó tỏa ra khi lạnh xuống độ 0 tuyệt đối và nhiệt độ tương đối của vật.

Nguyên lý Cacnô — Claudiuyt hay luật tiến hóa còn có thể phát biểu như sau :

Entrôpi của một hệ đóng chỉ luôn luôn giảm đi. Bây giờ, entrôpi được xác định bởi giá trị tuyệt đối của lôga xác suất. Cho nên khi xác suất tăng từ 0 đến 1 thì entrôpi giảm từ vô cùng đến 0 [11].

Nếu entrôpi của vũ trụ trở nên bằng 0 thì điều đó có nghĩa là vũ trụ đã đạt tới trạng thái cuối cùng và không thể có một sự tiến hóa nào nữa. Vũ trụ khi đó sẽ gồm những khối vật chất thuần nhất và cùng nhiệt độ như nhau. Nhưng sự tồn tại của vô số các vì sao (những tụ tập vật chất nóng chảy rất khổng lồ) đã chỉ cho chúng ta thấy rằng vũ trụ còn lâu lắm mới đạt tới entrôpi bằng 0 được. Thời gian để vũ trụ đạt tới trạng thái đó so với thời gian tồn tại sự sống trên hành tinh của chúng ta như là hàng tỷ năm so với một giây đồng hồ vậy. Nhưng chúng ta sẽ không đi vào các vấn đề vũ trụ đó, mà hiện nay vấn đề chính được bàn nhiều đến là sự mâu thuẫn giữa định luật vạn vật hấp dẫn với những nguyên nhân bí ẩn gây ra sự dãn nở của vũ trụ [12]. Bạn đọc hãy quay trở về hành tinh của chúng ta. Ở đây, nhiệt mặt trời thường xuyên tỏa ra cho trái đất đã vi phạm vào luật tiến hóa (luật này chỉ áp dụng cho những hệ tách biệt). Chúng ta thấy rằng những hiện tượng sinh học thường bao gồm việc tạo ra những trạng thái có khả năng không lớn lắm. Chính một số trữ lượng đáng kể than đá và dầu hỏa nuôi sống nền công nghiệp của chúng ta đã tạo ra như vậy; và cũng chính những khu rừng cung cấp củi với số lượng lớn cho ta đã nói lên điều ấy. Nhưng cũng có xảy ra những hiện tượng mà ít được chú ý, chẳng hạn như một trong những hiện tượng quan trọng nhất là việc xói mòn đất, đá ở vùng núi trôi rất chậm (nhưng ngày càng nhiều) xuống đồng bằng và ra biển.

Có thể hạn chế quá trình đó bằng cách trồng rừng chống xói mòn nhưng điều đó không loại trừ được hiện tượng trôi đất, đá. Đồng thời, ta cũng không thể lấy lại hết vật chất mà sông ngòi đổ ra biển cả trừ phi làm những cái phễu lọc ở mọi cửa sông!

Sự khác nhau về nhiệt độ giữa xích đạo và vùng cực do mặt trời gây ra đã dẫn đến sự chênh lệch đáng kể về nhiệt độ của vùng biển xích đạo ở các độ sâu khác nhau.

Thực vậy, ở biển có những dòng hải lưu nóng chảy từ xích đạo lên địa cực và những dòng hải lưu lạnh ở rất sâu chảy từ địa cực về xích đạo. Một số nhà phát minh đã nảy ra ý nghĩ sử dụng sự chênh lệch nhiệt độ ở vùng biển xích đạo ở các độ sâu khác nhau. Để làm điều đó cần phải bơm hút nước lạnh ở dưới sâu lên trên mặt. Đáng tiếc là những thiết bị máy móc làm việc ấy có thể rất tốt trong khi biển lặng nhưng khó có thể chịu đựng được những đợt sóng mạnh do gió gây nên trên mặt biển. Sức mạnh của sóng đôi lúc không thể nào chống đỡ nổi. Cũng có thể đặt những đường ống dẫn nước ở dưới đất hoặc dưới những lớp nước sâu dưới biển để tránh ảnh hưởng của sóng nhưng khi đó việc thực hiện vô cùng khó khăn và những người ủng hộ dự án thông minh ấy sẽ mất hết của cải, tiền bạc mà thôi.

31. Trật tự và hỗn độn

Để kết thúc, chúng tôi xin nêu một nhận xét là trong nhiều trường hợp, ngoài việc nói đến xác suất trạng thái, chúng ta còn có thể nói đến cả về những xác suất của sự trật tự và hỗn độn.

Hiển nhiên là sự trật tự it có khả năng xảy ra hơn là sự hỗn độn. Nếu ta dễ dàng nhận được sự hỗn độn từ sự trật tự thì nói chung lại phải mất rất nhiều cố gắng để tạo nên một sự trật tự từ sự hỗn độn.

Than và quặng sắt — đó là những trữ lượng đã sắp xếp theo sự sử dụng của ta. Khi ta đốt than là ta đã phân tán chúng ở dạng hỗn độn và chỉ nhờ có thực vật chúng mới lại ở dạng trật tự trong không khí là khí cacbonic (CO_2). Nhưng sắt do nhu cầu sử dụng rất đa dạng nên thường phân tán và mất mát rất nhanh. (Điều này cũng xảy ra đối với đa số sản phẩm mà con người làm ra). Đã sắp đến ngày mà do tài nguyên thiên nhiên cạn dị khiến chúng ta phải nghĩ đến việc sử dụng những nguồn năng lượng mới. Ví dụ như năng lượng thủy triều và cả những nguồn năng lượng vũ trụ khác như năng lượng của mặt trời hay năng lượng sự quay của trái đất. Nhưng để sử dụng những nguồn năng lượng dồi dào như vậy cần phải xây dựng, chế tạo ra những máy móc, thiết bị rất phức tạp mà nguyên liệu đầu tiên cần có lại là đồng chẳng hạn. Cho nên, vấn đề mất dần đi những vật chất như thế không phải ngày một, ngày hai mà giải quyết được.

Nhưng có thể chứng tỏ là nếu sự tiến hóa của các dạng trong một khoảng thời gian rất dài dẫn đến việc giảm bớt dần dần các đại lượng của nó thì điều đó sẽ kéo theo việc giảm bớt đòi hỏi trạng thái trật tự để cho các dạng đó tồn tại.

Thế nghĩa là ta vẫn có thể nhận được một mức độ phức tạp, mặc dầu sự tiến hóa đi đến trạng thái hỗn độn. Chẳng hạn, đồng hồ kích thước bé đòi hỏi việc tiêu tốn năng lượng ít hơn những đồng hồ treo tường lớn. Nhưng cách hình dung trên không thể cho ta khả năng tiên đoán được tương lai của trái đất cũng như càng không thể tiên đoán được tương lai của vũ trụ (1).

Như vậy, chúng ta kết luận là vũ trũ sẽ tiến hóa từ chỗ không thuần nhất đến chỗ thuần nhất nghĩa là từ trạng thái có trật tự tương đối dến trạng thái ngày càng hỗn độn hơn. Nhưng sự tiến hóa này về toàn thể mà nói sẽ diễn ra vô cùng chậm chạp.

(1) Xem chương cuối của cuốn « Ngẫu nhiên » cũng do Borel viết.

CHƯƠNG 5

QUAN ĐIỂM CỦA NHÀ TRIẾT HỌC

32. Đẳng thức sai

Hăngri Păngcarê trong những tìm tòi sâu sắc của ông ở lĩnh vực triết học đã nhấn mạnh đến một điều là theo quan điểm của các nhà toán học thì sai số không có sự phân cấp và bất cứ một đẳng thức sai nào dù sai số bé đến đâu cũng phải xem như một sai lầm nặng, bởi vì từ đó có thể rút ra đẳng thức sai bất kỳ nào khác.

Thực vậy, giả sử ta vô ý viết:

$$a = b, \qquad (1)$$

khi mà a không đúng bằng b. Điều này dẫn đến việc viết đẳng thức:

$$a - b = 0. \qquad (2)$$

Thực ra $a - b$ không bằng 0. Vì hiệu này khác không nên bất kỳ với A là số như thế nào ta có thể tìm được số M để cho

$$M(a - b) = A. \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có quyền nhân M với cả 2 vế của (2) mà ta giả sử là đúng:

$$M(a - b) = 0. \qquad (4)$$

So sánh (3) với (4), ta được:

$$\lambda = 0 \qquad (5)$$

Như vậy, hệ thức (5) là hệ quả tất yếu từ hệ thức xuất phát (1).

Quan điểm trên nhất thiết nhà toán học nào cũng phải thừa nhận. Đối với nhà toán học thì không có sự phân cấp trong sai số cũng như số vô cùng bé và số vô cùng lớn, bởi vì tất cả đều phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo. Một tỷ đối với ta là một số rất lớn nếu so với một năm hay một tấn vàng, nhưng nó lại là con số rất bé khi so với số phân tử hyđrô hay số giọt nước ở biển. Điều này cũng xảy ra tương tự đối với các số đo trừu tượng như xác suất: xác suất một phần nghìn đối với ta là không đáng kể, nếu nói về xác suất của ngày nổ bom nguyên tử ở gần chúng ta.

Những ví dụ này chỉ ra rằng mọi người đôi khi trong công việc có thể bỏ qua những sai số nào đó nghĩa là có thể coi những số không bằng nhau là những số bằng nhau. Nếu người nào đặt cho mình nhiệm vụ xác định số milimet khối nước chứa ở biển thì anh ta cần phải ăn mừng nếu đạt được sai số không quá một tỷ. Ta cũng có thể khẳng định là số cần tìm này cũng còn xa mới đạt tới độ chính xác vì mỗi giây nước sông đổ ra biển hoặc nước biển bay hơi một lượng lớn hơn hàng tỷ giọt nhiều.

Nhưng nhà toán học có quyền gạt bỏ câu trả lời như vậy bởi vì ông ta có thể tính xác suất với độ chính xác rất lớn cho một số sự kiện có thể được rồi tổ hợp những xác xuất ấy lại để tính xác suất của các sự kiện phức tạp hơn mà sẽ có giá trị lớn hơn hoặc nhỏ hơn. Cho nên, chúng ta cần phải xét thêm vài ví dụ nữa.

33. Xác suất thập phân

Ta sẽ gọi xác suất thập phân là xác suất xuất hiện một chữ số nào đó (nguyên hay phân) viết theo hệ thập phân. Xét một số thập phân có mười chữ số sau dấu phẩy sau đây :

$$a = 0{,}3141592653.$$

Có thể đặt ra một câu hỏi là xác suất để khi chọn liên tiếp các chữ số khác nhau được số a là bằng bao nhiêu? (Chẳng hạn có thể chọn số nhờ vòng quay số ngẫu nhiên hoặc vòng quay sổ số (1)

Vì xác suất để nhận được chữ số 3, chữ số 1 v.v... bằng 1/10 nên xác suất p để được số a bằng lũy thừa bậc 10 của 1/10, tức là một phần mười tỷ. Nếu chôn một số b có không phải 10 chữ số mà là 20 chữ số thì xác suất p' sẽ là một phần trăm tỷ. Các xác suất p và p' được xác định và biết chính xác. Cả hai số này đều khác không rất ít nhưng nhà toán học không được lẫn lộn chúng với số 0 như nhà vật lý khi anh ta xem chúng là xác suất sai khác của việc đo độ dài bằng thước mét.

Nếu ta có thể lặp lại cách chọn ngẫu nhiên 10 tỷ lần thì kỳ vọng toán học để nhận được số a bằng đơn vị. Điều này không nói lên rằng số a sẽ nhận được như vậy một cách tuyệt đối mà chỉ xét về trung bình thôi.

Theo công thức Poatxông [14], mười tỷ lần thử (mà mỗi lần gồm việc chọn ra 10 chữ số) sẽ có 36,8% hy

---

(1) Bạn đọc có thể e ngại vòng quay số không được thật là cân xứng nên ảnh hưởng đến khả năng xuất hiện các chữ số không đều nhau. Bạn đọc hãy nhớ lại lý luận ở mục 14, sau khi chọn được nhiều số mà mỗi số nhận được với xác suất gần bằng 1/10, ta cộng tất cả lại rồi lấy chữ số bằng đơn vị. Cách chọn này bảo đảm số nhận được có xác suất gần bằng 1/10 với độ chính xác rất cao.

vọng nhận được a một lần, 18,4% hy vọng nhận được a hai lần và 6,1% hy vọng nhận được a ba lần v.v... Nếu mỗi lần thử chiếm một giây thì cứ trung bình 300 năm chọn liên tiếp mới được số a một lần (chính xác là 317 năm).

34. Số thập phân chuẩn

Giả sử bây giờ ta muốn xác định một số thập phân vô hạn bằng cách chọn ngẫu nhiên mọi chữ số liên tiếp của nó. Rõ ràng là ta không thể tiến hành chọn như vậy mãi được. Nhưng nhà toán học lại có thể hình dung được số chữ số của nó nhiều tùy ý theo đúng như định nghĩa toán học của số vô hạn (1). Ta biết rằng theo luật số lớn của Becnuli, tần suất xuất hiện một trong mười chữ số sẽ tiến tới giới hạn 1/10 khi số lần chọn tăng lên vô hạn. Hiển nhiên, điều đó cũng đúng với một số hữu hạn các chữ số liên tiếp. Nếu lấy ra 2 chữ số; ví dụ 35, thì xác suất nhận được chúng bằng 1/100 nên tần suất xuất hiện 35 sẽ khoảng một phần trăm. Tương tự, tần suất xuất hiện tổ hợp 206 khoảng một phần nghìn và tần suất xuất hiện số a sẽ là một phần mười tỷ. Từ đây ta rút ra kết luận là nếu mỗi giây thực hiện được mười lần chọn một chữ số thì trung bình cứ mỗi giây chọn được một lần chữ số 3, 20 giây chọn được một lần chữ số 35, 300 giây chọn được một lần chữ số 206 (tức là 5 phút) và số a thì như ta đã thấy phải mất 300 năm mới chọn được một lần.

(1) Thực vậy, ta nói rằng một số là vô hạn nếu nó vượt quá mọi số nguyên cho trước bất kỳ. Số vô hạn định nghĩa như vậy còn gọi là số vô hạn tiềm năng và trong toán học chỉ dùng số vô hạn cho đến khi Cantor đưa thêm vào khái niệm này [15].

Ta nói rằng số thập phân chuẩn nếu tần suất *giới* hạn các chữ số của nó (xem như là tổ hợp của một số tùy ý các chữ số liên tiếp) cũng tuân theo luật áp dụng cho các số mà các chữ số được chọn ngẫu nhiên, tức là tần suất một chỉ số bằng một phần mười, tổ hợp 2 chữ số bằng một phần trăm, tổ hợp 3 chữ số bằng một phần nghìn v.v... [16].

Nếu đứng trên quan điểm lý thuyết độ đo của tập hợp điểm thì ta sẽ có kết luận là các số không chuẩn tạo nên một tập hợp có độ đo bằng 0 [17], khi ấy độ đo của tập hợp các số thập phân chuẩn (giữa 0 và 1) sẽ bằng đơn vị. Do đó, cần phải thấy rằng các số chuẩn nhiều hơn vô cùng so với các số không chuẩn. Ở đây ta không phát triển tiếp những khía cạnh này nhưng có điều lý thú là việc xác định số chuẩn cực kỳ khó khăn. Đặc biệt là nếu đòi hỏi số đó có hoàn toàn đủ những đặc trưng của số mà các chữ số chọn ngẫu nhiên (ví dụ như số nhận được bằng cách viết sau dấu phẩy mọi số nguyên liên tiếp bắt đầu từ 1 sẽ không phải là số đó). Điều này khiến bộ óc của con người rất khó bắt chước ngẫu nhiên. Ngược lại, cần phải thấy rằng mọi số xác định một cách đơn giản (trừ ra các số hữu tỷ) hoàn toàn có khả năng là các số chẵn. Chẳng hạn như số $\sqrt{2}$, e, π, đóng vai trò quan trọng trong giải tích toán học hoặc sin, cosin có acgumen biểu diễn qua một số nguyên độ, phút hay giây (trừ những trường hợp đặc biệt khi chúng nhận giá trị hữu tỷ).

Chứng minh chặt chẽ điều này là một trong những thành tựu rực rỡ nhất của lĩnh vực lý thuyết số. Nhưng cách chứng minh hình như là rất phức tạp.

Nếu các nhà toán học nói chung đều nhất trí thừa nhận kết quả trên thì đó là do họ dựa vào một nguyên lý.

Nguyên lý này có một ý nghĩa lớn để ta có thể tin tưởng vào sự bằng nhau của các xác suất xác định (việc xuất hiện các mặt quân xúc xắc, rút bài từ cỗ tu lơ khơ v.v...). Thực vậy, ta không có cơ sở nào để cho rằng một chữ số thập phân nào đó lại chiếm vị trí đặc biệt trong số $\sqrt{2}$, e hay π chẳng hạn. Ngoài ra một vài số đó đã được tính chính xác đến hàng trăm chữ số sau dấu phẩy (như số π đã tính hơn 800 chữ số (1). Việc nghiên cứu tỷ mỉ các chữ số nhận được đã khẳng định rằng độ lệch tần suất các chữ số đó cũng đạt tới độ lệch của cách chọn ngẫu nhiên. Nhưng thật ra (giới hạn trong hệ thập phân) chúng ta khó mà hình dung được mọi kết quả độc đáo do việc $\sqrt{2}$ hay π là chuẩn bởi vì không dễ mà phân biệt các dãy số gần hàng trăm chữ số tương tự nhau. Chúng ta chỉ có thể làm điều đó với những dãy tạo nên bởi toàn số 0 hay nói chung là toàn những chữ số giống nhau hoặc hai chữ số đan nhau một cách đều đặn v.v... việc nghiên cứu vấn đề thú vị này phải nhờ đến cách đánh số thập phân mà còn có tên gọi là cách đánh số chữ cái.

35. Cách đánh số chữ cái

Có thể qui ước chọn hệ đếm với cơ số 26 mà 26 chữ số biểu diễn 26 chữ cái tiếng Pháp. Giả sử chữ a ứng với số 0, chữ b ứng với số 1... chữ z ứng với số 25. Khi đó mọi từ Pháp (Anh, Tây ban nha v.v...) có thể xem như là một số với điều kiện đã bỏ hết các dấu (gạch nối, trọng âm, v.v...). Nếu kể các dấu thì cần phải chọn hệ điểm cơ số lớn hơn 26, chẳng hạn có thể chọn hệ đếm cơ

(1) Đến nay, ta đã tính được hàng trăm ngàn chữ số sau dấu phẩy của π.

số 84 ứng với 84 ký hiệu của máy chữ. Nhưng chúng ta chỉ xét giới hạn trong trường hợp 26 chữ cái thôi.

Nếu giả sử rằng số π chuẩn theo hệ đếm chữ cái trên thì ta sẽ suy ra mọi tổ hợp của các chữ đều có thể nhận được khi xét các chữ số liên tiếp của số π theo hệ đếm này.

Ta hãy xét một tổ từ gồm n ký hiệu (chữ) xác suất để nhận được nó bằng thương số của phép chia số 1 cho lũy thừa bậc n của 26. Để có thể hình dung về đại lượng này ta làm mấy con tính đơn giản sau. Chú ý rằng lũy thừa 10 của 2 bằng 10^{24}, tức là xấp xỉ 1000 (bằng lập phương của 10). Vì 25 là bình phương của 5 nên ta có:

$$25^5 . 2^{10} = 10^{10},$$

Cho nên 25^5 gần bằng thương của phép chia 10^{10} cho 10^3, tức là 10^7, và 25^{10} sẽ gần bằng 10^{14}. Như vậy 26^{10} sẽ nằm giữa khoảng 10^{14} và 10^{15}. Từ đây ta rút ra kết luận: mẫu số của biểu thức xác định xác suất nhận được dãy 1000 chữ cái (tử số bằng 1) nằm giữa 10^{1400} và 10^{1500}, tức là một số dài khoảng 1400 — 1500 chữ số.

Trong chương sau chúng ta sẽ nói đến nhiều các số lớn như vậy. Ở đây, theo cách nhìn của nhà toán học, chúng ta sẽ coi như không có gì khó khăn trong việc nghiên cứu các số đó miễn là khi viết chúng dưới dạng như vậy (26^{10} chẳng hạn) thì nếu hai nhà toán học có nói đến một dạng viết nào đó ta sẽ đều hiểu là họ cùng nói đến một số.

Cho nên, nếu ta xét một dãy gồm một triệu chữ cái (ứng với một cuốn sách dày 400 — 500 trang khổ trung bình) thì xác suất để nhận được nó khi xét số π trong hệ đếm chữ cái sẽ bằng 1 chia cho một số dài khoảng 1.400.000 chữ số.

Bạn đọc đã thấy hệ đếm chữ cái thú vị hơn hệ đếm thập phân nhiều bởi vì dãy hàng triệu chữ cái tạo nên một cuốn sách này sẽ làm cho ta phân biệt được ngay với những tổ từ như thế trong cuốn sách khác. Một người không cần phải có trí nhớ cực kỳ tốt lắm có thể mãi rồi cũng thuộc lòng một tập sách nhất là khi đó là tập thơ. Trong khi đó những bậc thầy về tính toán nhẩm khó có thể mà nhớ được trong óc một số gồm hàng triệu chữ số (ngay chỉ hàng ngàn chữ số thôi cũng chưa chắc). Từ đây suy ra một điều là nếu chúng ta biết số chuẩn trong hệ đếm chữ cái thì tính chất của số chuẩn này chắc chắn sẽ có rất nhiều điều thú vị hơn số chuẩn ở hệ thập phân.

36. Số chuẩn trong hệ đếm chữ cái

Chúng tôi đã chỉ ra những cách hình dung mà qua đó bạn đọc có thể tin vào việc số π là số chuẩn trong hệ thập phân. Những cách hình dung đó vẫn còn tác dụng cho một hệ đếm khác bất kỳ đặc biệt là hệ đếm chữ cái. Hơn nữa nếu trái với sự mong đợi của ta, sự trình bày dưới đây không áp dụng được cho số π thì ta chỉ cần thay số π bởi một số chuẩn bất kỳ nào khác. Chúng ta đã biết là các số chuẩn nhiều vô hạn nhưng việc chỉ ra chính xác một số nào đó không phải là dễ dàng.

Theo mục trước, xác suất hữu hạn (bằng 1 chia cho số có 1.400.000 chữ số) để số π trong hệ đếm chữ cái chứa một dãy gồm một triệu chữ cái nào đó tạo thành một cuốn sách là vô cùng bé. Nhưng vì khai triển của π vô hạn (π không phải số hữu tỷ) nên dãy chữ cái này sẽ xuất hiện trong biểu diễn của không phải một lần mà có thể vô hạn lần là đằng khác.

Như vậy, nếu chúng ta cố gắng khai triển π theo hệ đếm chữ cái ra vô hạn thì nó sẽ chứa mọi cuốn sách viết bằng tiếng Pháp hay một tiếng bất kỳ nào khác cũng có bảng 26 chữ cái như thế.

Lẽ tất nhiên, khai triển này còn chứa cả một bài báo tiếng Pháp đã đăng hoặc sắp đăng vào ngày mai cũng như vào hàng thế kỷ sau nữa. Giữa những bài này trong khai triển của π chắc chắn sẽ còn xen vào vô số những dãy cái vô nghĩa. Nhưng chắc chắn là những dãy này không thể dài vô hạn mà trong bản thân nó cũng chứa những từ, những câu hoặc cả những bài văn rất hay nữa.

Có thể chỉ ra ví dụ như chúng ta không thể có cách nào hình dung được tập hợp điểm vô hạn liên tục trên một đoạn thẳng. Nhưng ở đây không cần phải chuyền qua vô hạn. Ta chỉ cần lấy một số đủ lớn, chẳng hạn số N gồm hàng nghìn tỷ chữ số thì cũng đã có thể thấy là sau khi viết N chữ số đầu tiên của π trong hệ đếm chữ cái thì ta có thể tìm được mọi bài viết trong các cuốn sách của thư viện gồm 30 vạn cuốn.

Sự phong phú như vậy lại chỉ bao hàm trong một con số π. Chúng ta đã biết các phương pháp đơn giản để tìm được các chữ số đầu tiên của nó hoặc theo hệ thập phân, hoặc theo hệ đếm chữ cái. Những thành tựu của máy tính điện tử đã giúp chúng ta tính ra được hàng ngàn chữ số đầu của π (cũng như của e) những năm gần đây. Nhưng rõ ràng là còn lâu lắm mới có thể tính xong hàng ngàn tỷ chữ số của π để ta đặt được cái gọi là điều kỳ lạ của nhà toán học. Hơn nữa, nếu thực hiện được điều đó thì việc đọc những con số dài dằng dặc như thế cũng chẳng thú vị gì.

37. Ảo giác của nhà toán học

Thực vậy, những cái mà ta nói ở trên có khá nhiều điều đáng ngờ chưa kể thời gian vô cùng dài để thực hiện đúng. Chúng ta đã chỉ ra rằng có thể nhận được nguyên vẹn cả một cuốn sách, ví dụ như « Xida » (một cuốn sách Pháp nổi tiếng thời Boreu) trong khai triển của π. Nhưng ta cũng không nên quên là quyển sách nhận được ấy sẽ có những đoạn mà thứ tự chữ bị xáo trộn hoặc có khi đảo lộn cả thứ tự của các câu thơ, bài thơ, màn kịch v.v...

Chúng ta cũng có thể tìm thấy cả những bài báo xuất bản vào ngày mai ở Pari, Luân đôn, Niu loóc hay Buênôt Airet hoặc những bài viết tương tự mà khác đi nhiều hay ít. Có khi những bài ấy nói về một tin đúng hoặc có khi nó lại nói về một tin rất vô lý, chẳng hạn như tin ở Hồ Giơnevơ xảy ra cuộc thủy chiến giữa hạm đội Nga và Mêchxich... Ngay cả khi chúng ta tự cho mình một nghìn lần siêu phàm hơn mức độ siêu phàm của một người uyên bác nhất so với người rất kém cỏi chỉ biết viết được chữ ký của mình để có thể chứa được toàn bộ biểu diễn chữ cái mà trong đó tìm thấy « Xida » thì trong biểu diễn đó ta cũng có thể tìm thấy rất nhiều từ hay và lạ khác để dễ dàng sáng tạo ra một tác phẩm mới không thua kém kiệt tác nào.

Hoặc nếu như trong bộ óc siêu phàm cực kỳ ấy chứa đầy những tin tức của các bài báo ngày mai thì cũng có một vài hy vọng để rút ra một số rất ít tin chính xác từ vô số những tin sai và mơ hồ.

Hơn nữa, chỉ cần suy nghĩ thêm một chút và giả sử mọi cuốn « Xiđa » trên thế giới này bỗng dưng mất hết. Bây giờ cần phải khôi phục lại tác phẩm này bằng cách chọn ngẫu nhiên các chữ cái. Ta cũng giả sử rằng có một công cụ siêu phàm nào đó giúp ta thực hiện được sự chọn như vậy. Có thể nó sẽ chọn ra cho ta vô số những tác phẩm gần giống như « Xiđa ». Để được tác phẩm « Xi đa » chân chính, ta phải dùng đến trí nhớ của mình hoặc của những người đương thời mà phán đoán.

Từ đây có thể rút ra kết luận những điều ta nhận được là mất ý nghĩa hay không?

Không hẳn vậy, mà nó chỉ mất ý nghĩa theo cách nhìn thực tiễn. Còn theo quan điểm toán học thì những điều ấy vẫn có ý nghĩa khá lớn nếu như chúng chỉ ra con đường nghiên cứu dáng điệu của những biểu thức xác định một số vô tỷ nào đó ở xa vô cùng. Chính tôi cũng đã nhiều lần quan tâm đến vấn đề này nhưng tôi cũng thấy rõ được một điều là việc đó rất khó. Đến nay, tôi cũng chưa thấy được một công cụ nào để khắc phục những khó khăn ấy.

Tôi cũng muốn từ những lý luận trên để có thể rút ra kết luận là : trong những biểu diễn có vẻ chính xác, rõ ràng mà nhà toán học lập nên đối với dãy số nguyên vô hạn có không ít ảo giác. Tiếp theo một số nguyên là một số nguyên khác và phép chuyển từ số n sang n + 1 bắt đầu từ 1 cho đến n bao nhiêu đi nữa ta cũng có thể hình dung được. Các số lớn nhất mà chúng ta có thể đếm một cách xác định là số trong hệ đếm chữ cái biểu thị các cuốn sách trong các thư viện của chúng ta nếu chúng không quá nhiều và cuốn này xếp sau cuốn kia theo một thứ tự xác định. Nhưng chúng ta tuyệt đối không thể nào tìm ra được một tính chất gì đó của các số xác định như vậy.

Tất nhiên, còn có thể xác định những số lớn hơn rất nhiều. Nhưng đó là những số « kỳ dị » xác định một cách đặc biệt. Chẳng hạn ta kí hiệu a_1 là lũy thừa 10 của 10, a_2 là lũy thừa a_1 của 10, a_3 là lũy thừa a_2 của 10 v.v...

Nhưng chúng ta cũng có thể tạo ra số lớn bằng cách tương tự như trên có biến dạng chút ít. Mặc dầu vậy, các số lớn loại đó cực kỳ ít ỏi so với các số xác định theo hệ đếm chữ cái hoàn toàn gần gũi với các số thông thường nhất — những số mà có thể nhận được bằng cách chọn ngẫu nhiên các chữ số liên tiếp.

CHƯƠNG 6

SỐ LỚN VÀ VŨ TRỤ

38. Số thiên văn

Cách nói thường ngày gọi các số lớn là các số thiên văn bởi vì ngoài các nhà toán học, như ta đã thấy, có thể viết được các số cực lớn rất dễ dàng mà các nhà thiên văn cũng hay phải dùng những số lớn như vậy để xác định khoảng cách giữa các vì sao, khối lượng mặt trời, kích thước vũ trụ...

Chúng ta hãy thử ước lượng độ lớn của các đại lượng đó đối với đơn vị độ dài theo hệ C.G.S. tức là theo đơn vị xăng ti mét.

Khoảng cách đến ngôi sao thường xác định theo thời gian mà ánh sáng đi tới chúng. Còn tốc độ của ánh sáng (trong chân không) bằng 300.000 km/s hay là 30 tỷ ($3 . 10^{40}$) cm trong 1 giây. Thời gian ánh sáng đi từ mặt trời đến quả đất mất 8 phút (khoảng 500 giây). Vì trong suốt chương này chúng ta chỉ chú ý đến bậc của đại lượng cần xét nên để cho tính toán đơn giản ta chỉ lấy các số gần đúng.

Như vậy, khoảng cách từ quả đất đến mặt trời tính theo cm bằng tích của 500 với 3.10^{10}, nghĩa là bằng $1,5 \times \times 10^{13}$. Khoảng cách từ hành tinh xa mặt trời nhất (Diêm vương tinh) tới mặt trời gấp 40 lần khoảng cách giữa quả đất và mặt trời, nghĩa là bằng $6 \cdot 10^{14}$. Cho nên thể tích của khối cầu S có tâm là mặt trời và chứa cả hệ thái dương sẽ gần bằng $1000 \cdot 10^{42}$ tức là 10^{45} cm^3. Bởi vì khối lượng của mặt trời gần bằng $2 \cdot 10^{36}$ gam nên nếu nó phân bố đều trong khối cầu S như vậy (khối lượng hành tinh bỏ qua so với khối lượng mặt trời) thì mật độ trung bình bằng $2 \cdot 10^{36-45} = 2 \cdot 10^{-9}$ (g/cm^3). Ánh sáng mặt trời phải mất 3 năm mới tới được ngôi sao gần nhất (chòm α), tức là khoảng 10^8 giây (hơn 1000 ngày đêm và mỗi ngày đêm khoảng 100.000 giây). Khoảng cách từ mặt trời đến ngôi sao đó sẽ bằng 3×10^{18} cm. Thể tích hình cầu S' có tâm là mặt trời và bán kính bằng khoảng cách đó sẽ gần bằng $100 \cdot 10^{54} = 10^{56}$ (cm^3). Do đó nếu khối lượng của hệ thái dương phân bố đều trong khối cầu đó thì mật độ sẽ gần bằng $2 \cdot 10^{-20}$ (g/cm^3).

Nếu giả sử mật độ trung bình của các ngôi sao thiên hà chúng ta gần bằng mật độ của mặt trời và khối lượng trung bình của chúng có cỡ như mặt trời thì mật độ vừa tính chỉ cho biểu diễn tương đối chính xác về mật độ vật chất trong thiên hà của chúng ta (nghĩa là con số 20 chính xác đến hàng đơn vị).

Nếu ước lượng bề ngang lớn nhất của thiên hà chúng ta khoảng 100.000.000 năm ánh sáng [18] thì nó không lớn hơn bán kính hình cầu S' 10^5 lần và bậc của đại lượng độ dài đó không vượt quá 10^{27}, lập phương số này bằng 10^{81}.

Các tinh vân xoắn xa nhất mà chúng ta quan sát được là những thiên hà cách quả đất không quá 3 tỷ năm ánh sáng, nghĩa là 10^{28} cm, lập phương số này là 10^{84}.

Các số thiên văn lớn nhất đã nhận được như vậy khi đo vũ trụ quen thuộc theo hệ đo lường đơn vị C.G.S.

39. Thời gian thiên văn

Khi tính các khoảng thời gian mà hệ thái dương đã trải qua trong quá khứ và phát triển trong tương lai chúng ta sẽ nhận được các số nhỏ hơn rất nhiều.

Ở đầu thế kỷ này, các nhà địa chất và thiên văn bàn cãi nhiều về tuổi quả đất. Thời gian mà nhà địa chất đưa ra để giải thích sự tạo thành các lớp vỏ quả đất vượt quá khoảng thời gian mà nhà thiên văn nêu lên để giải thích trái đất của ta nguội đi sau đó mới có khả năng thành tạo biển và xuất hiện sự sống.

Cuộc tranh cãi này đã nảy ra do việc tính toán độ sáng thiên văn của các ngôi sao cỡ mặt trời đưa đến kết luận chúng không thể chiếu sáng trong khoảng thời gian dài như nhà địa chất giả định. Nhưng sau khi phát minh ra phóng xạ và hiện tượng các thiên thể khi quay giải thoát năng lượng rất lớn đã cho chúng ta thấy quá trình chiếu sáng có thể kéo dài hơn rất nhiều.

Hiện nay, các nhà địa chất và thiên văn đều nhất trí rằng thời gian nguội lạnh của quả đất gần một tỷ năm và khả năng sự sống tồn tại trên quả đất trong tương lai cũng có thời gian dài như vậy. Để cho chắc chắn, ta cứ giả sử thời gian đó là hàng trăm tỷ năm đi (1), chẳng hạn lớn hơn 10 triệu giây một nghìn tỷ lần (tức là bằng 10^{22} giây). Như vậy trong tương lai, sự nhận thức của loài người và thời gian trôi qua trên hành tinh của chúng ta cũng không vượt quá 10^{30} giây.

40. Du ngoạn vào thế giới vô cùng bé.

Từ lâu người ta đã nhận thấy thế giới vô cùng bé tuy gần gũi với con người hơn thế giới vô cùng lớn rất nhiều

(1) Bởi vì càng về sau này, do tiến bộ của khoa học, khoảng thời gian này sẽ càng dài thêm.

nhưng việc hiểu và đo được thế giới vi mô này cũng rất khó.

Các phân tử và nguyên tử cấu tạo nên mọi chất đơn giản và phức tạp suốt một thời gian dài bị coi là không thể phát hiện được. Sự tồn tại của chúng chỉ là một giả thiết thuần túy mà thôi. Nhưng cuối thế kỷ 19 và đầu thế kỷ 20, người ta đã đo được chúng bằng nhiều cách khác nhau và những công trình thí nghiệm quan trọng đó (trong số đó phải kể đến J. Perôn) đã chứng minh nguyên tử và phân tử là có tồn tại thực sự.

Khối lượng phân tử gần bằng 10^{-22} gam. Cứ cho là nó bằng 10^{-24} thì căn bậc ba của 10^{-24} sẽ cho ta hình dung về cỡ kích thước của nguyên tử và phân tử (10^{-8}). Mấy mươi năm gần đây, các nhà vật lý đã tiến một bước khá xa trong lĩnh vực tìm hiểu vật chất. Họ đã đi sâu vào *bên trong nguyên tử* và biểu diễn được cấu trúc của nó (Nin Bor). Họ cũng đã nhận biết được cả những phần tử nhỏ bé hơn nguyên tử rất nhiều (proton, nơtron, pôditron, mêdôn...) những điều mới mẻ này liên quan chặt chẽ với lý thuyết lượng tử và cơ học sóng (Plankơ, Srôđinghe, Lui đơ Broi), khối lượng nhỏ nhất trong các hạt mới khoảng 10^{-28} gam.

Tất cả những lý thuyết này còn đang ở quá trình phát triển và chắc chắn còn nhiều điều nữa sẽ được khám phá ra. Vì vậy, tốt nhất là chúng ta cứ thừa nhận một kích thước « dự trữ lâu bền » cho kích thước của những hạt vô cùng bé so với nguyên tử mà được tìm ra trong tương lai. Có lẽ thừa số 10^{12} là đủ để khi bạn đọc xem cuốn sách này vẫn thấy đúng, tức là kích thước của các hạt vô cùng bé tìm ra mươi năm tới vẫn không thể nhỏ hơn 10^{-20}.

Nếu so sánh các kết quả thu được trong thế giới vô cùng bé với các kết quả thu được trong thế giới vô cùng lớn thì ta thấy rằng để ước lượng kích thước của vũ trụ qua kích thước của những hạt nhỏ bé nhất thì cũng chỉ cần đến các số nhỏ hơn 10^{50} (đối với kích thước tuyến tính) hoặc 10^{150} (đối với thể tích).

41. Các thời gian ngắn nhất

Khi đo các khoảng thời gian lớn nhất theo hệ CGS ta sẽ được các số xấp xỉ bằng các khoảng cách lớn nhất cũng biểu diễn theo hệ đó. Giữa khoảng thời gian ngắn nhất và khoảng cách nhỏ nhất cũng có sự phù hợp tương tự như vậy. Chính các khoảng thời gian ngắn nhất ấy một mặt là chu kì dao động của các sóng ánh sáng, mặt khác là khoảng thời gian giữa 2 lần va chạm liên tiếp của cùng một phân tử. Ở đây, ta đã thừa nhận một số đo dự trữ khi tính đến khả năng tiến bộ về các phương tiện nghiên cứu tương lai cũng như sự phát triển của vật lý học. Số đo dự trữ cho khoảng thời gian ngắn nhất bằng 10^{-20} giây. Khoảng thời gian lớn nhất tương lai đạt được là 10^{30} giây. Tỷ số giữa khoảng thời gian lớn nhất và nhỏ nhất bằng 10^{50} cũng tính bằng tỷ số giữa khoảng cách lớn nhất và khoảng cách nhỏ nhất.

Nhân tỷ số giữa các khoảng thời gian với tỷ số thể tích, tức là nhân 10^{50} với 10^{150}, ta được 10^{200} là số cực đại các biến cố sơ cấp có thể xảy ra trong vũ trụ (là những biến cố xảy ra trong phạm vi không gian và thời gian rất nhỏ).

Chương cuối cùng của cuốn này sẽ bàn đến các vấn đề nảy sinh ra khi xét các biến cố phức tạp.

Ở đây, chúng tôi chỉ hạn chế trong nhận xét là ngay cả khi ước lượng của chúng ta có những thay đổi rất lớn đi nữa thì cũng không dễ dàng gì mà thay thế 10^{200}

bởi 10^{300} được. Từ đây rút ra kết luận là điều đó không cản trở đến các kết luận của chúng ta về việc so sánh các số này với lũy thừa của mười. Khi ấy, các số mũ có thể lớn tới hàng triệu hay hàng tỷ như chúng ta đã gặp ở các chương trước. Sau đây tôi sẽ cố gắng chứng tỏ là các số lớn như vậy cũng có thể nhận được với những cấu trúc xây dựng trên khả năng vô cùng tận của vũ trụ.

42. Vũ trụ hữu hạn hay vô hạn

Lý thuyết tương đối đã cho phép đặt vấn đề về vũ trụ hữu hạn hay vô hạn theo những công thức chính xác. Thực vậy, độ cong của vũ trụ tại một miền xác định có thể xem như là hàm của mật độ trung bình của vật chất trong miền đó. Nếu như độ cong đó lớn hơn một số cố định nào đó, dù bé đến đâu đi nữa thì nhất định phải kết luận là vũ trụ hữu hạn và đường quĩ đạo của ánh sáng (mà ta gọi là đường thẳng) thực chất là đường tròn với bán kính rất lớn. Chuyển động theo đường đó, ta sẽ quay trở lại được vị trí xuất phát ban đầu giống như một loại sinh vật nhỏ bé nào đó mỗi năm đi theo kinh tuyến của quả đất được một phần trăm milimét. Nhưng sinh vật này cần phải sống lâu đến hàng tỷ năm mới đi được một vòng quanh quả đất được. (Nếu nó không bị một tai họa nào đe dọa). Cho nên sinh vật này và con cháu của nó không thể nào nhận biết được là chúng chuyển động theo một quĩ đạo đóng.

Tuy thuyết tương đối dẫn đến kết luận là giả thuyết vũ trụ hữu hạn có khả năng đúng nhưng nó cũng không hoàn toàn bác bỏ giả thuyết cho rằng vũ trụ vô hạn. Trong trường hợp vũ trụ vô hạn thì có thể cho rằng nếu ta xét một hình cầu có tâm tại một điểm nào đó và bán kính lớn vô cùng thì mật độ trung bình của vật chất trong hình cầu đó sẽ dẫn tới không.

Hơn nữa, từ lâu các nhà khoa học đã chỉ ra rằng nếu trong vũ trụ vô hạn mật độ trung bình các ngôi sao là không dồi thì bầu trời của chúng ta sẽ sáng như mặt trời nếu như giữa các ngôi sao là chân không và nó không hấp thu các tia sáng. Nếu không gian giữa các ngôi sao không phải là chân không thì chúng ta sẽ lại gặp phải những khó khăn khác.

Như vậy, ta hãy cố hình dung ra một vũ trụ mà mật độ vật chất trung bình của nó bằng không. Thiên hà của chúng ta như đã biết là một tụ tập các ngôi sao tạo nên sông Ngân hà cùng với các ngôi sao gần nhất chúng ta phân tán đều theo mọi hướng. Mật độ trung bình của thiên hà này như đã tính ở mục 39, khoảng bằng 10^{-20}. Ta cũng có thể cho rằng đó là mật độ trung bình của các thiên hà khác mà chúng ta quan sát thấy ở dạng tinh vân xoắn. Nhưng để cho mật độ trung bình bên trong hình cầu ngày càng giảm đi khi bán kính tăng vô hạn thì phải giả thiết thể tích của các thiên hà trong đó phải nhỏ hơn rất nhiều so với thể tích của khoảng không ngăn cách giữa chúng. Nói khác đi, nếu kích thước của thiên hà có thể đo bằng hàng trăm triệu năm ánh sáng thì khoảng không giữa chúng phải đo với đơn vị hàng tỷ năm ánh sáng.

Đến đây ta đã dẫn tới giới hạn xa nhất mà khoa học có thể đạt được trong thế kỷ của chúng ta. Chỉ dựa vào sự tương tự và các giả thiết chồng chất lên nhau, ta cũng có thể tìm thấy những giới hạn xa hơn nữa. Dù sao đó cũng là cách duy nhất để chúng ta nhận được các số thiên văn vượt quá 10^{200}.

43. Số siêu thiên văn

Như vậy, ta sẽ giả sử rằng các thiên hà giống thiên hà của chúng ta (thiên hà cấp một) nhiều vô kể như các ngôi sao tạo nên thiên hà. Các thiên hà này tạo nên thiên hà cấp hai (1). Chúng ta đã thấy các ngôi sao trong thiên hà cách nhau gần nhất cũng phải hàng năm ánh sáng, xa nhất là hàng chục triệu năm ánh sáng. Theo giả thiết của chúng ta thì các thiên hà trong thiên hà cấp hai gần nhau nhất cũng phải hàng triệu năm ánh sáng. Cho nên, ta có thể thừa nhận khoảng cách hàng triệu năm ánh sáng làm kích thước của các thiên hà cấp hai. Tức là kích thước tuyến tính của các thiên hà cấp hai lớn hơn kích thước tuyến tính của thiên hà chúng ta khoảng 10^7 lần và thể tích sẽ lớn hơn 10^{20} lần.

Bây giờ ta lại hình dung các thiên hà cấp hai khác mà khoảng cách giữa chúng lớn hơn 10 lần kích thước lớn nhất của chúng v.v... Cứ mỗi lần mở rộng như thế, thể tích của các thiên hà sẽ được nhân với 10^{20}. Đến thiên hà cấp 1000, thể *tích đó* sẽ bằng $10^{20.000}$.

Lẽ dĩ nhiên, nhà toán học không bắt buộc phải dừng lại ở đó. Anh ta có thể chọn ra các thiên hà có cấp lớn, tùy ý. Nhưng đã đến lúc chúng ta phải đặt câu hỏi là liệu các lý luận trên có phù hợp chút nào với thực tại của chúng ta hay không?

44. Siêu thiên hà

Thực vậy, chúng ta vừa mới thấy kích thước của thiên hà cấp nào đó sẽ lớn hơn kích thước của thiên hà cấp sau đấy mười triệu lần. Đây cũng là tỷ số giữa kích thước của quả đất với giọt nước. Nếu chúng ta hình dung trên giọt nước cũng có những sinh vật mang trí tuệ như

(1) Trong mục này cũng như mục sau, tôi chỉ cố gắng khái quát chung nhất mà không chú ý nêu lên các kết quả cụ thể của lý thuyết về sự dãn nở vũ trụ (tôi sẽ nêu tóm tắt ở cuối sách)

chúng ta nhưng chúng rất bé so với giọt nước cũng như ta so với trái đất vậy. Thế thì liệu ta có thể cho rằng điều sau đây là có khả năng và hợp lý hay không: Phải chăng sinh quyển của giọt nước cũng đa dạng, phong phú các khoáng vật, thực vật, động vật như trên trái đất chưa kể bên trong đó mà ta biết được rất ít.

Chúng ta sẽ rút ra kết luận gì khi chuyển từ thiên hà này sang một thiên hà cấp cao hơn cứ lặp lại như thế 1000 lần.

Như bạn đọc đã thấy, tỷ số giữa các thiên hà có cấp khác nhau có thể hoàn toàn tùy ý bởi vì chúng chỉ dựa vào những sự tương tự thô thiển. Nhưng cũng cần phải thấy rõ là các kết luận của chúng ta vẫn không thay đổi gì khi các tỷ số đó có biến dạng đi. Thực vậy, ta cần phải vứt bỏ giả thuyết vô lý cho rằng mật độ sao tăng lên theo khoảng cách xa quả đất, ngay cả khi mật độ đó gần với một hằng số thì chúng ta cũng sẽ gặp phải những khó khăn không sao vượt qua nổi. Chính những kết luận của thuyết tương đối về tính hữu hạn của vũ trụ cũng không làm thay đổi các kết luận của chúng ta.

Chúng ta cũng còn phải ngập giữa đại dương bí ẩn rất lâu nữa trước khi đạt được con số có cấp 10^{1000} bởi vì không có căn cứ nào để cho rằng vũ trụ ở những khoảng cách xa như vậy lại có một thế giới tương tự như thế giới của chúng ta. Thế giới đó có thể khác ta về lượng và chất hơn trái đất khác giọt nước hay một hạt cát nhiều.

Vì vậy những thí nghiệm như con khỉ đánh máy chữ và thí nghiệm Ginxơ có thể lặp lại 10^{1000} lần là một điều giả sử rất vô lý [19] không thể tưởng tượng nổi.

Cuối cùng, chúng tôi xin nêu ra một hệ quả thú vị của thuyết dãn nở vũ trụ: phần vũ trụ mà chúng ta quan sát được là hữu hạn bởi vì phần vũ trụ bên ngoài sẽ rời xa chúng ta với tốc độ vượt quá tốc độ ánh sáng và không có một tín hiệu nào từ đấy có thể tới chúng ta được. Như vậy, nếu xuất phát từ những thông tin của chúng ta thì phải xem vũ trụ là hữu hạn và kích thước của vũ trụ chỉ vượt quá mấy tỷ năm ánh sáng.

Ở chương 9, tôi sẽ cố gắng chính xác hóa những kết luận đối với khái niệm khả năng và chắc chắn mà có thể rút ra được từ những nhận xét đó. Trong hai chương sau đây, chúng ta sẽ nghiên cứu các bài toán đơn giản liên quan đến việc lý thuyết xác suất thâm nhập vào khái niệm vô hạn và liên tục.

CHƯƠNG 7

NGHỊCH LÝ PÊTECBUA

45. Nội dung nghịch lý

Vào thế kỷ 18, giữa những nhà nghiên cứu xác suất nổi tiếng nhất ở Pari và Pêtecbua đã tranh luận về một bài toán mà sau này được gọi là « nghịch lý Pêtecbua »:

Piôt và Paven thỏa thuận chơi với nhau một loạt ván « Sấp — Ngửa » (hoặc là các trò chơi tương tự bảo đảm cho khả năng thắng cuộc của người chơi như nhau trong những điều kiện như nhau).

Nếu Piôt thắng ván đầu thì Paven sẽ phải trả cho anh ta 2 đồng và cuộc chơi chấm dứt. Nếu Piôt thua ván thứ nhất và thắng ván thứ hai thì Paven trả cho anh ta 4 đồng rồi chấm dứt cuộc chơi,... Nếu Piôt thua n — 1 ván đầu rồi mới thắng ván thứ n thì Paven trả cho anh ta 2^n đồng và cuộc chơi chấm dứt. Bài toán yêu cầu xác định số tiền cược mà Piôt ngay từ đầu cuộc chơi phải đưa cho Paven.

Nghịch lý của bài toán này là ở chỗ món tiền cược đó phải lớn vô hạn. Điều này nghĩa là món tiền cược của Piôt có lớn đến đâu đi nữa thì cuộc chơi vẫn kết thúc có lợi cho anh ta. Nghĩa là anh ta có thể bán quyền chơi của mình để lấy một số tiền lớn.

Sự tính toán dẫn đến kết quả này rất đơn giản và tỏ ra không hề có chỗ sơ hở nào. Ta hãy tính kỳ vọng toán học toàn phần của Piôt. Kì vọng này hiển nhiên bằng tổng các kì vọng toán học của các khả năng để Piôt thắng cuộc. Thực ra, Piốt lại có thể bán riêng cho từng người mỗi kỳ vọng toán học đó.

Cho nên, hãy xét trường hợp khi mà Piôt thắng ván thứ n sau (n — 1) ván thua. Xác suất của sự kiện này bằng $\frac{1}{2^n}$. Đây cũng là xác suất để cho một cách thắng theo qui định trước giữa hai người khi chơi n ván. Như vậy, Piôt sẽ có 2^n kiểu thắng khác nhau và kì vọng toán học của anh ta sẽ bằng một (tích của xác suất thắng cuộc với số khả năng thắng cuộc).

Piôt có thể bán với giá như thế cho người mua khả năng thắng cuộc của mình sau (n — 1) ván thua và thắng ván thứ n. Vì lý luận này đúng với giá trị n tùy ý nên kì vọng toán học toàn phần của Piôt bằng tổng của chuỗi vô hạn mà mỗi số hạng bằng một, nên tổng ấy sẽ lớn vô cùng.

Tuy vậy, không một người có lý trí và kinh nghiệm chơi nào đó lại đồng ý đóng 100 đồng ở cương vị của Piôt để chơi với Paven. Chính chỗ này chứa đựng nghịch lý Pêtecbua.

Trong số những lý luận đưa ra để giải thích nghịch lý này có một lý luận đáng chú ý nhất là lý luận kỳ vọng tinh thần. Hiện nay nó đã lạc hậu nhưng trong lý luận cũng có một số cơ sở tâm lý học mà không ai có thể tranh cãi được. Lý luận kỳ vọng tinh thần dựa vào nhận xét là lợi suất thực sự của số tiền thắng cuộc đối với người này hay người khác không tỷ lệ với số tiền đó mà phụ thuộc vào quan hệ giữa số tiền thắng cuộc và trạng thái tinh thần của người thắng cuộc.

Ví dụ, người có một nghìn đồng chơi được một triệu đồng cũng vui sướng như người có một triệu đồng chơi được một tỷ đồng. Nhưng hoàn toàn có đủ cơ sở để chứng tỏ rằng dù cho ý nghĩa tâm lý của lý luận này thế nào đi nữa ta cũng không thể dùng nó để ước lượng kỳ vọng toán học. Bởi vì kì vọng toán học có giá trị như hàng hóa và có thể bán cho bất kì ai. Cho nên khi xác lập giá trị của nó không thể tùy theo trạng thái của người mua hay người bán.

Có thể thừa nhận một cách giải quyết khác đối với « nghịch lý Pêtecbua » — đó là cách phủ định sự tồn tại của nghịch lý và nêu ra các kết quả đúng mực nhận được bằng những lý luận chặt chẽ không ai chê trách vào đâu được.

Giôdep Bectrăng(1) đã theo hướng giải quyết như vậy. Ông khẳng định rằng: với số tiền cược bất kì nào của Piôt thì anh ta vẫn có thể tin rằng cuối cùng mình sẽ giàu to và làm cho Paven phá sản.

Tất nhiên, khi Piôt thua thì không được bắt anh ta phải trả tiền ngay mà cho anh ta vay nợ. Piôt có thể nợ chồng chất một số tiền khổng lồ lớn hơn giá trị của khối lượng vàng mà trái đất có. Nhưng nếu anh ta có đủ kiên nhẫn, anh ta sống khá lâu hoặc nếu anh ta di chúc trò chơi đó cho con cháu của mình thì cuối cùng sự giàu có sẽ đến.

Sau đây ta sẽ chính xác hóa các kết luận rút ra từ điều khẳng định của Bectrăng. Điều đó sẽ cho phép ta giải thích được nghịch lý và gạt bỏ những kết luận rút ra từ nghịch lý đó.

---

(1) G. Bectrăng, (1822 — 1900), nhà toán học Pháp lỗi lạc, hoạt động trong rất nhiều lĩnh vực khoa học. Cuốn « Calcul des probabilités » (Các phép tính xác suất) của ông xuất bản vào năm 1888.

46. Giải thích nghịch lý

Như đã chỉ ra, giá trị kỳ vọng toán học vô hạn của Piô là tổng của một chuỗi vô hạn mà mỗi số hạng bằng đơ vị. Mỗi số hạng đó là kỳ vọng toán học của những giao ước riêng có thể bán cho người mua với giá 1 đồng. Chúng tôi sẽ chỉ ra rằng nếu Piôt có thể hy vọng người ta mua các số hạng đầu của chuỗi dễ dàng thì các số hạng sau rất khó mà có người mua và càng số hạng về sau thì càng không ai mua.

Trước hết, ta xét một trường hợp không có khả năng rõ ràng. Muốn vậy, chỉ cần lấy $n = 1000$. Ta đã biết :

$$2^{10} > 10^{3}$$

Từ đây, suy ra

$$2^{1000} > 10^{300}$$

Như vậy, Piôt có một xác suất nhất định để chơi được số tiền bằng 10^{300} đồng và xác suất đó bằng 10^{-300}, cho nên kỳ vọng toán học chính bằng đơn vị.

Như các phép tính ở chương trước đã chỉ ra tổng số tiền được cuộc này sẽ bằng giá trị của một khối vàng có thể tích lớn hơn rất nhiều trái đất, tâm là mặt trời và bán kính bằng khoảng cách từ mặt trời đến ngôi sao gần nhất.

Mặt khác, để có hy vọng nhận được sự thắng cuộc như vậy cần phải tổ chức tại mỗi phân khối không gian của vũ trụ mỗi giây chơi được một ván và kéo dài hàng tỷ năm. Bectrăng đề nghị giảm số tiền cược bằng cách không chơi bằng tiền mà chơi bằng số phân tử hydrô. Nhưng đề nghị này cũng chỉ làm giảm vài đơn vị của chỉ số 300 và không làm thay đổi gì các kết luận của chúng ta.

Những người chơi trò đỏ đen quan sát rất kỹ lưỡng việc xuất *hiện ngẫu nhiên màu đỏ hay màu đen* của vòng quay số đều kể lại rằng họ chưa hề thấy một màu nào xuất hiện liên tiếp quá 23 hoặc 24 lần. Không ai sẽ dại gì mà đồng ý mua của Piôt hy vọng ứng với số hạng thứ 30 của chuỗi – hy vọng thắng cuộc để Paven phải trả một tỷ đồng nếu xảy ra sự kiện có xác suất gần bằng một phần tỷ (bởi vì lũy thừa 30 của 2 lớn hơn lũy thừa 9 của 10 một chút) sự kiện này ứng với việc 29 lần xuất hiện mặt sấp và sau đó mới xuất hiện mặt ngửa. Sự kiện này cũng không có khả năng như sự kiện xuất hiện 30 lần mặt ngửa liên tiếp.

Như thế là chúng ta đã đi tới kết luận mặc dầu kỳ vọng toán học của Piôt bằng tổng của một chuỗi vô hạn mà mọi số hạng bằng đơn vị nhưng thực tế chỉ có các số hạng đầu của chuỗi này mới là những đối tượng để ký giao ước. Giá trị của các số hạng sau giảm rất nhanh và sẽ trở nên đúng bằng 0, bởi vì chúng hoàn toàn chỉ là những kì vọng toán học ảo giác mà không ai có thể bỏ tiền để mua cả.

Cách giải quyết nghịch lý Pêtécbua rất đơn giản như vậy. Chúng tôi sẽ chính xác hóa nó ở chương sau. Chương này sẽ bàn về khả năng xác định chính xác hơn giới hạn mà bắt đầu từ đó, các số hạng của chuỗi cần phải bỏ đi thực sự.

Chúng tôi cũng đưa ra ở cuối sách bài viết ngắn: « Trò chơi đánh bạc gỡ ». Trong bài này có xét một vài tính chất của kì vọng toán học liên quan đến nghịch lý này.

CHƯƠNG 8

NGỤY BIỆN VỀ ĐỐNG THÓC

47. Ngụy biện của người xưa

Trong các chương trước, chúng ta đã tạm gạt sang một bên chưa xét đến việc xác định giá trị chính xác nào của xác suất thì có thể bỏ qua được. Vấn đề này thực ra lại liên quan đến một nghịch lý nổi tiếng về đống thóc mà người cổ Hy lạp để lại cho chúng ta.

Một hạt thóc không tạo thành một đống thóc. Hai hạt, ba hạt ... cũng không tạo thành đống thóc. Mặt khác, ai cũng đồng ý với câu nói là một trăm triệu hạt thóc tạo nên một đống thóc. Giới hạn đúng là như thế nào? Liệu có thể cho rằng 325647 hạt thóc không tạo nên đống thóc trong khi 325648 hạt lại tạo nên một đống thóc được không.

Nhưng nếu không xác định giới hạn này thì không thể hiểu đống thóc nghĩa là như thế nào và từ nay sẽ vô nghĩa mặc dù trong một số trường hợp nó không gây ra những bất đồng ý kiến.

Có thể cho rằng vấn đề này chỉ là cách dùng từ và không đáng chú ý. Cũng có thể đề ra cách phân biệt nhờ các tính từ thích hợp như đống thóc bé và đống thóc nhỏ, đống thóc lớn và đống thóc rất to v.v... Những số tính từ chỉ là có hạn nên cách này vẫn chưa giải quyết hoàn toàn vấn đề đã nêu ra.

Mục sau, chúng ta sẽ làm quen với một số vấn đề tương tự được thiết lập gắn liền với các bài toán thực tế, tuyệt nhiên không phải chỉ là vấn đề cách dùng từ như thế nào. Một số nhận xét mà chúng ta rút ra từ ngụy biện của người cổ Hy lạp sẽ giúp ích chúng ta giải quyết những vấn đề mới đó.

Như vậy, các bạn sẽ thấy rằng mặc dầu ngụy biện về đống thóc có vẻ như khôi hài nhưng chính nó, cũng như nhiều ngụy biện khác mà các nhà triết học Hy lạp cổ đại để lại cho chúng ta vẫn mang nhiều ý nghĩa quan trọng và thời sự nóng hổi.

Ta biết rằng, dạng của đống thóc không chỉ phụ thuộc vào số lượng hạt mà ta có thể xác định. Nó cũng còn phụ thuộc vào thể tích và trọng lượng trung bình của hạt tùy theo từng vùng và mùa thu hoạch. Cho nên nảy ra vấn đề là làm thế nào để nhận biết một tụ tập các hạt thóc nào đó được gọi là đống thóc hay không. Bởi vì, vấn đề giải quyết là một cái tên gọi nên cách giải quyết phải phù hợp với ý kiến chung của những ai nói cùng một thứ tiếng nào đó, (chẳng hạn tiếng Pháp).

Vì thế, cách giải quyết đầu tiên là ta phỏng vấn một số khá lớn người nói tiếng Pháp để phần trăm câu trả lời cho biểu diễn khá chính xác về phần trăm ý kiến khi phỏng vấn rộng rãi hơn. Nếu cuộc phỏng vấn cho biết 65% ý kiến cho rằng tụ tập các hạt thóc đó tạo thành một đống thóc và 35% cho rằng chúng không phải là một đống thóc thì có thể thỏa thuận như sau: xác suất để tụ tập các hạt thóc đó là đống thóc bằng 0,65, xác suất đối lập bằng 0,35. Dĩ nhiên xác suất để một tụ tập hạt được gọi là đống thóc sẽ tăng cùng với số lượng và trọng lượng hạt. Khi xác suất này bằng đơn vị chúng ta sẽ tin tưởng rằng mọi ai mà biết tiếng Pháp sẽ đều thừa nhận cách gọi đống thóc cho những tạ tập hạt thóc như vậy.

Cách giải quyết này có lẽ gây ra một số ý kiến phản đối. Thực vậy, có thể giả sử rằng để xác lập được cách gọi đúng đắn cần phải có một số khá lớn sự nhất trí. Chẳng hạn, nếu 95% những người được hỏi đều sử dụng cách gọi đống thóc thì tất nhiên phải cho rằng họ gọi đúng (theo nghĩa là họ đã dùng đúng cách gọi phổ biến nhất). Chỉ có 5% không dùng cách gọi này. Thành thử, việc chọn hệ số 95% nhất định sẽ gắn liền với một độ bất định nào đó và chúng ta lại gặp phải một ngụy biện mới, điều mà ta muốn tránh. Vì vậy cách giải quyết mà chúng ta chọn phải như sau. Giả sử rằng, xác xuất để cách dùng từ của ta là thích hợp bằng 50% nếu phần trăm trả lời tán thành bằng 50, nhưng khi tăng các câu trả lời tán thành, xác suất này lại tăng nhanh hơn đến mức nó sẽ bằng một trong khi phần trăm các câu trả lời tán thành mới bằng 90. Vì ta đang nói đến cách dùng từ nên mức độ % để ứng với xác suất bằng đơn vị có thể được xác lập tùy ý bởi chính quyền hay một viện nghiên cứu các luật về ngôn ngữ. Khi đó, chúng ta lại phải cách giải quyết « biện pháp hành chính » (mục 48) và những vấn đề tương tự nảy sinh do sai số quan sát (mục 50).

Cho nên, ở đây chúng ta chỉ hạn chế trong nhận xét là việc đưa vào xác suất (mà có thể xem như một câu trả lời mang tính chất luật pháp) có ưu điểm khử bỏ sự gián đoạn trong cách phát biểu của người cò. Thực vậy, theo sự thiết lập của họ thì 97315 hạt thóc chưa phải là một đống thóc mà chỉ với số hạt từ 97316 trở đi mới được gọi là đống thóc. Rõ ràng chúng ta sẽ it bị choáng váng hơn với lời tuyên bố là trong trường hợp đầu xác suất để có đống thóc là 0,1999, còn trường hợp sau xác suất là 0,5001. Cũng cần phải nói thêm rằng, trong thực tế khó mà phân biệt được sự khác nhau giữa hai xác suất đó cũng như việc đếm được chính xác số hạt thóc.

48. Biện pháp hành chính

Chúng tôi thấy kể cũng có ích nếu nói một chút về các biện pháp hành chính, nghĩa là các luật lệ giúp ta khắc phục những khó khăn thực tế nảy sinh ra do những ngụy biện khi áp dụng một đạo luật về thuế má, tô tức v.v... cũng như các đạo luật khác.

Chẳng hạn, theo quan điểm của Ngân khố quốc gia hoặc luật vận chuyển hàng hóa thì luật có thể qui định một chiếc ô tô là *cỡ trung xa nếu trọng lượng của nó* không quá 2000 kg, còn khi quá số này thì ôtô đó được coi là đại xa. Tuy vậy chúng tôi cũng không bắt buộc các bạn phải áp dụng hầu hết các nhận xét rút ra sau đây cho ví dụ này.

Có một nhà văn trào phúng đã minh họa những khó khăn nảy ra đối với luật qui định trẻ em từ 3 *tuổi trở* lên phải trả nửa vé đi xe hỏa. Trong câu chuyện hài hước, ông ta kể về một ông bố keo kiệt đi xe hỏa với cậu con trai của mình. Ông bố này đã bật tín hiệu dừng tầu cấp tốc đúng lúc cậu con đầy 3 tuổi và nói với người nhân viên hỏa xa chạy *tới*: « Tôi đã sử dụng cách duy nhất để trả chính xác tiền vé vì tôi chỉ phải trả nửa vé cho những cây số mà con tôi đã được 3 *tuổi* ». Câu chuyện dừng ở đấy nhưng mỗi bạn đọc có thể tự mình hình dung đoạn kết của nó kể cả việc xuất hiện bác sĩ tâm thần với câu hỏi ông bố đó có điên hay không?

Dù sao câu chuyện bịa ra ở trên cũng thu hút nhiều sự chú ý vào một số vấn đề nho nhỏ mà cần phải giải quyết bằng cách đưa vào thêm những luật chi tiết hoặc giao cho người soát vé tự giải quyết. Chẳng hạn, nếu không chú ý lắm đến giờ sinh cậu con trai thì trong ngày sinh ta chọn giờ nào để làm thời điểm cậu ta tròn 3 tuổi: 0 giờ, 12 giờ hay 24 giờ? Giải quyết sự khác nhau về thời gian giữa nơi sinh và nơi đưa trẻ đến thế nào? Chúng ta sẽ không đi sâu vào những khía cạnh này mà xét một vấn đề nghiêm túc hơn cũng rút ra từ thực tế đường sắt.

Mỗi người đều có quyền mang theo 30 kg hành lý mà không phải trả thêm tiền vé. Để tăng nhanh thời gian kiểm tra, người ta dùng một cái cân có độ chính xác không lớn lắm. Người kiểm tra hành lý sẽ liếc nhanh trên thang cân và tuyên bố gói hành lý nặng bao nhiêu ki lô gam. Tùy theo 31 hay 30kg mà người hành khách sẽ phải trả thêm hay không phải trả thêm tiền. Do cái cân và do sự nhìn của người kiểm tra nên con số 31 mà anh ta xướng lên có thể ứng với gói hàng nặng đúng bằng 30.000 gam hay 30.050, hay 30.100, hay 30.500, hay 30.900, hay 30.950. Giả thiết trọng lượng của gói hàng ấy bằng 30.500 nhưng nếu xuất phát từ một giá trị khác thì lý luận cũng không thay đổi gì. Như vậy, ta giả sử là người kiểm tra sẽ tuyên bố gói hành lý nặng 31 kg nếu anh ta thấy trọng lượng quan sát được bằng hay vượt quá 30.500. Ta nói độ chính xác của cái cân bị hạn chế nghĩa là trọng lượng chính xác sẽ nằm giữa, chẳng hạn 30.480 và 30.520. Khi đó có một khả năng để người kiểm tra tuyên bố 30kg và một khả năng để tuyên bố 31kg.

Chính xác hơn, xác suất để anh ta tuyên bố con số 31 có thể bằng 0 với trọng lượng 30.400 sau đó nó sẽ tăng lên mới đầu rất chậm rồi nhanh dần đến lúc trở thành 0,5 ứng với trọng lượng 30.500, nó sẽ tiếp tục tăng lên lúc đầu nhanh rồi sau chậm dần và bằng đơn vị ứng với trọng lượng 30.600. Như vậy, thay cho sự gián đoạn mà gây choáng váng cho chúng ta là sự liên tục.

Sự liên tục này vẫn đạt được trong những trường hợp có hành khách rất khôn ngoan biết rõ các qui định trên, anh ta muốn sử dụng quyền không phải trả tiền vé cước đến mức tối đa bằng cách chỉ mang theo gói hành lý cân nặng đúng 30.499 gam. Người hành khách ấy tin chắc mình không phải trả tiền thêm trong khi lại có một từ hai khả năng là anh ta phải trả thêm tiền.

Hiển nhiên là với dụng cụ đo chính xác đến đâu thì vẫn có những khó khăn kiểu như vậy nảy ra (có thể tăng độ chính xác bằng cách đo một số lần lặp riêng đủ lớn).

Chẳng hạn, trước đây đã có thời gian lưu thông tự do tiền vàng. Người ta cho rằng tiền vàng sẽ giữ nguyên trọng lượng của nó rất lâu trong quá trình lưu thông (tức là coi các mất mát do cọ xát, ăn mòn rất nhỏ) vì vậy họ đã đề ra mức hao hụt cho phép là 1 miligam. Nhưng rõ ràng là khi đồng tiền hao hụt gần 1 miligam chỉ sai khác một phần mười thì lại có một trong hai khả năng xảy ra, hoặc đồng tiền đó được công nhận có giá *trị nguyên vẹn* hay *không còn giá trị nguyên vẹn* khi đem cân nó ở một ngân hàng nào đó.

49. Tính liên tục vật lý theo Poăngcarê

Những trường hợp trên có thể so sánh với sự liên tục về mặt vật lý mà Poăngcarê đã nêu trong cuốn sách « khoa học và giả thuyết ». Tôi cũng đã nêu một vài ý kiến phản đối định nghĩa đó mà không thấy ông ta trả lời. Điều này cho phép tôi nghĩ là Poăngcarê đã đồng ý với những ý kiến đó của tôi (1).

---

(1) Ý kiến phản đối của tôi công bố vào năm 1908. Còn Poăngcarê mãi đến năm 1912 mới chết đột ngột sau một ca mổ.

Khái niệm liên tục vật lý theo Poăngcarê được đưa ra với giả thiết là có thể đồng thời có những đẳng thức và bất đẳng thức sau:

$$A = B , \qquad B = C$$
$$A > C$$

Điều này có được là do phương tiện đo của chúng ta không phân biệt được đại lượng A với đại lượng B, đại lượng B với đại lượng C nhưng lại xác lập được đại lượng A lớn hơn đại lượng C.

Chúng ta có thể so sánh trọng lượng một cách thô thiển bằng sự ước chừng hay so sánh độ dài bằng mắt; cũng có thể sử dụng một phương tiện đo nào đấy rất chính xác với bất kỳ phương pháp nào hạn chế nhỏ nhất sự sai khác mà có thể coi như A bằng B, B bằng C nhưng giữa A và C nó lại phát hiện ra sự sai khác đủ lớn thì ta sẽ suy ra $A > C$.

Để cho đơn giản, ta giả sử rằng không có trong tay một dụng cụ vật lý chính xác nào mà chỉ ước lượng các vật nhờ tay và mắt, cũng để tránh những khó khăn quá mức, ta cũng cần giả sử là chỉ so sánh các đối tượng đồng dạng và đồng chất.

Thực vậy, chúng ta sẽ phạm phải những sai lầm thô thiển nếu so sánh quả cầu bằng đồng với quả cầu bằng bông bằng cách nhấc lên tay để so sánh nặng nhẹ hay ước lượng bằng mắt. Cho nên, giả sử là chúng ta sẽ chỉ so sánh những quả cầu bằng kim loại có đường kính như nhau nhưng trọng lượng khác nhau do chúng làm bằng những kim loại khác nhau, Chúng ta cảm thấy quả cầu A nặng như quả cầu B và quả cầu B nặng như quả cầu C nhưng chúng ta cảm thấy quả cầu A nặng hơn quả cầu C rõ ràng. Nhưng trong trường hợp này, ta dễ dàng suy ra quả cầu B cũng phải nặng hơn quả cầu C. Thực vậy, nếu B nhẹ hơn C thì hiệu A — B sẽ lớn hơn hiệu A — C nghĩa là chúng ta sẽ phải cảm thấy quả cầu A nặng hơn quả cầu B chứ không phải là cảm thấy A bằng B. Từ đây ta rút ra được là B nhỏ hơn A. Nói khác đi, nếu bằng cách thí nghiệm chúng ta xác lập được :

$$A = B, \qquad B = C$$

$$A > C$$

và không tiến hành một thí nghiệm bất kỳ nào nữa thì có thể suy ra một cách lôgic :

$$A > B > C$$

Như vậy, chúng ta cũng có thể phát hiện được những sự sai khác rất nhỏ về trọng lượng giữa các quả cầu có trọng lượng xấp xỉ nhau bằng cách so sánh từng cặp quả cầu với nhau hoặc so sánh trọng lượng chung của hai quả cầu này với trọng lượng chung của 2 quả cầu khác v.v... Nhưng chúng ta không đi sâu vào vấn đề này vì không thể nghiên cứu nó độc lập mà không dùng đến lý thuyết sai số (sẽ nói ở mục sau).

Trở lại công thức mà Poăngcarê khái quát hóa những kết quả thực nghiệm thô thiển để dẫn đến khái niệm liên tục vật lý, chúng ta có thể viết một cách tổng quát như sau :

$$A_1 = A_2\,; \qquad A_2 = A_3\,; \qquad A_{99} = A_{100}$$

$$A_{100} > A_1$$

Điều này lại dẫn ta đến đúng ngụy biện về đống thóc, Chúng ta không phân biệt được tụ tập A_1 gồm 1010 hạt thóc với tụ tập A_2 gồm 1020 hạt thóc, tụ tập A_2 với tụ tập A_3 gồm 1030 hạt thóc..., tụ tập A_{99} gồm A1990 hạt thóc với tụ tập A_{100} gồm 2000 hạt thóc. Nhưng chúng ta lại phân biệt được rất rõ tụ tập 2000 hạt thóc với tụ tập 1010 hạt thóc.

Như vậy, ngụy biện này chính là việc rút từ các đẳng thức vật lý $A_1 = A_2$, $A_2 = A_3$..., $A_{99} = A_{100}$ ra đẳng thức vật lý $A_1 = A_{100}$. Lý luận này đúng với các đẳng thức toán học chứ không đúng cho các đẳng thức vật lý. Việc cho rằng thêm một hạt thóc vào không có một thay đổi nào về mặt vật lý đã dẫn đến kết luận sai là thêm vào một số bất kỳ hạt thóc cũng không dẫn đến một thay đổi nào về mặt vật lý. Cho nên, chúng ta không có quyền nói rằng bắt đầu từ một số xác định hạt thóc nào đó mới được gọi là đống thóc còn trước đó dù kém một hạt thì lại không phải là đống thóc.

Chúng ta cũng có thể chứng minh rằng việc đưa lý luận toán học chuyển từ n sang n + 1 vào vật lý sẽ không đúng: nếu một hàm nào đó không đổi khi chuyển từ n sang n + 1 nghĩa là $\varphi(n + 1) = \varphi(n)$ thì hàm này sẽ giữ nguyên giá trị không đổi khi n tăng lên vô hạn.

Nhờ hệ số xác suất, ta có thể đưa tính gián đoạn vào những chỗ dường như có vẻ liên tục như đã thấy ở trên, chúng ta sẽ coi hai tụ tập các hạt thóc gồm 1010 hạt và 1020 hạt thu hoạch cùng mùa là như nhau. Nếu chúng ta phải trả lời câu hỏi là tụ tập nào nhiều hạt hơn thì chắc chắn chúng ta sẽ chỉ trả lời hú họa. Điều đó nghĩa là cứ 100 lần thử liên tiếp với nhiều người khác nhau thì có khoảng 50 người có ý kiến này và khoảng 50 người có ý kiến kia. Thường thường, độ lệch giữa các con số này có thể *vượt quá* 5 nghĩa là 55 câu trả lời đúng và 45 câu trả lời sai. Liệu có thể cho rằng sự khác nhau nhỏ về 10 hạt thóc làm biến đổi hệ số xác suất đến mức mà chúng ta chỉ phát hiện được sự thay đổi đó với một số lần thử đủ lớn hay không? Giả sử rằng hệ số này bằng 0,051. Khi đó để có thể chọn được câu trả lời đúng cần phải tiến hành gần một triệu lần thử. *Dễ* dàng thấy rằng để phát hiện được sự sai khác do thêm một hạt vào 10.000 hạt thì số lần thử phải tăng lên rất lớn vượt quá khả năng thực hiện của chúng ta.

Như vậy, công thức Poăngcarê không chỉ đưa ra một cách giải hợp lý duy nhất cho ngụy biện về đống thóc mà còn chỉ ra rằng ngụy biện đó làm sáng tỏ một tính chất cơ bản của khoa học thực nghiệm — đó là tính liên tục về mặt vật lý.

50. Sai số quan sát

Mọi nghiên cứu khoa học chính xác, đặc biệt là các quan sát thiên văn luôn luôn phải chú ý đến việc xuất hiện những sai số quan sát. Những sai số này vẫn sinh ra dầu cho tài nghệ và tính cẩn thận của người quan sát đến đâu đi nữa nhằm tránh khỏi những sai số thô như quan sát nhầm sao này với sao khác hoặc tính nhầm các quả cân đặt trên đĩa cân v.v... Những sai số quan sát này càng nhỏ nếu phương pháp quan sát càng hoàn thiện, tức là độ chính xác tuyệt đối của kết quả quan sát càng lớn. Thực vậy, chúng ta có thể đưa ra định nghĩa hệ số chính xác và luật sai số phụ thuộc vào hệ số này [20]. Chúng ta có thể xét một ví dụ thô thiển sau đây: đo một độ dài mấy mét bằng các thước gỗ vạch chia đến milimét. Nếu mỗi milimét lại có những vạch chia nhỏ đến một phần mười milimét thì sai số đo độ dài ấy có thể chỉ còn mấy phần mười milimét. Luật sai số đồng nhất với luật Laplax — Gauxơ cho độ lệch của phép thử lặp. Nếu chúng ta định nghĩa đơn vị thập phân của sai số u với điều kiện là xác suất để cho giá trị tuyệt đối của sai số vượt quá u bằng một phần mười thì chúng ta sẽ kết luận rằng xác suất vượt quá 2u sẽ bằng một phần nghìn và xác suất vượt quá 3u bằng một phần triệu. Đồng thời các sai số dương, âm có xác suất như nhau.

Chúng ta hãy áp dụng các kết quả này vào bài toán sau đây:

Đo 2 độ dài a và b. Biết đơn vị thập phân của sai số là u? Tìm xác suất của sai số khi so sánh 2 đại lượng a và b.

Giả sử (a — b) dương. Ta kí hiệu h, k là những sai số đo (dương hoặc âm). Khi đó giá trị đo được sẽ là a + h và b + k. Chúng ta mắc phải sai số, nghĩa là cho rằng a nhỏ hơn b nếu:

$$a + h \leq b + k,$$

tức là

$$k - h > a - b.$$

Ở đây, chúng ta chỉ cần sử dụng một kết quả đã chứng minh. Kết quả này nói rằng đơn vị độ lệch (hay sai số) của tổng hoặc hiệu (trong bài toán này là a — b) bằng $u\sqrt{2}$. Cho nên, nếu $a - b = u\sqrt{2}$ thì hiệu k — h dương và phải vượt quá $u\sqrt{2}$ là đơn vị thập phân. Thành thử xác suất để vượt quá đơn vị này là 1/20; nếu $a - b = 2u\sqrt{2}$ thì xác suất bằng 1/2000 nghĩa là cứ 2000 lần đo độc lập nhau thì 1999 lần có khả năng so sánh đúng hai đại lượng a và b. Khi đó phải giả sử xác suất để sai số dương hay âm là bằng nhau; Điều này có thể không đúng trong một số quan sát nhưng rất cần cho việc xác định đơn vị thập phân u.

Như vậy, lý thuyết sai số quan sát cho phép chúng ta tính xác suất của sai số khi so sánh hai đại lượng. Đáng nhẽ so sánh trực tiếp thì chúng ta sẽ đo các đại lượng ấy riêng rẽ độc lập nhau. Phương pháp so sánh như vậy thường là cách duy nhất bởi vì không phải lúc nào cũng dễ dàng xếp đặt hai đại lượng để so sánh trực tiếp với nhau. Ngay cả khi hai đại lượng này rất gần nhau thì việc so sánh trực tiếp vẫn thường bị sai nếu chúng ta nhìn các đại lượng này dưới những góc nhìn khác nhau.

Chẳng hạn chúng ta khó mà so sánh được các độ dài theo chiều đứng và chiều ngang như chiều cao và chiều dài của một căn buồng hoặc chiều cao và chiều rộng của một cái hiên tòa nhà 5 tầng.

51. Phép thử lặp và xác suất thống kê

Xác suất thống kê đôi khi được gọi là tần suất quan sát thấy việc xuất hiện một hiện tượng nào đấy khi số lần thử lặp rất lớn. Chẳng hạn như là các quan sát khí tượng được tiến hành luôn luôn ở cùng một chỗ vào hàng ngày suốt một thế kỷ cho phép ta rút ra được xác suất thống kê để nhiệt độ trung bình các ngày tháng giêng lớn hơn 5° hay nhỏ hơn 0°. Bất kể độ chính xác của các quan sát như thế nào đi nữa thì vẫn có độ không xác định khi định ra chính xác giá trị lấy làm mốc giới hạn.

Nếu nhiệt độ trung bình quan sát được của ngày đó đúng bằng 0° thì ta có thể coi xác suất của sự kiện này bằng 0,5 bởi vì một trong hai khả năng để nhiệt độ thực sự lớn hơn hay nhỏ hơn 0° đều có thể xảy ra.

Một số tác giả theo trường phái Midet đã cho rằng mọi xác suất thực chất là xác suất thống kê được xác định trong một tập hợp nào đó thường được gọi là đám đông (quần thể).

Tôi sẽ trình bày trong một cuốn sách khác về những nguyên nhân mà khiến cho lý luận này không được thích dụng [21].

Chúng ta đã biết khi xác định xác suất theo tần suất quan sát có thể mắc những *sai số* mà xác suất của nó lại tuân theo luật Laplax — Gauxơ.

Khi đó, đơn vị sai số tỷ lệ với căn bậc hai của số lần quan sát (ứng với việc quan sát các biến cố thuận lợi) hoặc tỷ lệ nghịch với căn bậc hai này (nếu ta nói về tần suất). Điều đó chỉ ra là để nhận được giá trị xác suất theo tần suất tương ứng có thêm một chữ số chính xác thì ta cần phải gấp 100 lần số quan sát ban đầu.

Khi chúng ta xét đến những quan sát tiến hành liên tiếp, chẳng hạn như đo nhiệt độ tháng giêng ở Pari thì ta không thể tăng số quan sát này trong quá khứ mà cứ mỗi năm trôi qua mới lại được thêm một số liệu. Hơn nữa ta cũng khó mà có thể giả sử khí hậu hoàn toàn không thay đổi vì những quan sát được tiến hành ở gần những thành phố lớn đều chỉ ra nhiệt độ trong suốt thế kỷ có dao động một cách chậm chạp. Như vậy, chúng ta đã thấy rằng vấn đề xác định số lần quan sát đủ để tìm ra giá trị gần đúng thích hợp của xác suất thống kê cũng mang những nét đặc trưng giống như ngụy biện về đống thóc.

Trước đây, chúng tôi đã đưa ra ví dụ về tỷ lệ phần trăm sinh con gái. Khi số quan sát rất nhiều (hàng triệu quan sát mỗi năm) thì ta có thể khẳng định chắc chắn rằng hệ số xác suất đó xấp xỉ 0,51 và nói chung trong mọi trường hợp nó sẽ lớn hơn 0,5. Chúng tôi cũng đã chỉ ra gần đúng số lần thử phải tiến hành đi thăm dò dư luận xã hội nhưng với điều kiện là độ chính xác của kết quả không yêu cầu cao quá. Nhưng chúng tôi cũng không phản đối ai về đề nghị chỉ tiến hành 4000 hoặc 6000 phép thử chứ không nhất thiết là 5000. Chính ở chỗ này ta cũng gặp phải khó khăn như ngụy biện về đống thóc. Khó khăn này không phải là không đánh giá được nhưng ta cũng đừng gán cho nó một ý nghĩa thái quá và coi nó như là một sự kìm hãm mọi hành động của chúng ta.

Kết luận rút ra từ chương này là như vậy và nó vẫn còn ý nghĩa khi ta đọc đến chương sau. Chương cuối cùng của cuốn sách này sẽ rút ra kết luận tổng quát của nội dung cuốn sách.

CHƯƠNG 9

XÁC SUẤT TRỞ NÊN ĐỘ TIN CẬY

52. Độ tin cậy và sự sai lầm

Từ thời cổ đại xa xưa, nhiều nhà triết học đã nghiên cứu về vấn đề sai, đúng. Theo như nhận xét rất tinh tế của một nhà triết học Hy lạp vĩ đại thì một người mắc sai lầm có 2 điều không biết: anh ta không biết câu trả lời đúng và anh ta không biết là anh ta không biết nó. Chính điều không biết thứ hai này rất nguy hại bởi vì lòng tin của người mắc sai lầm vào câu trả lời mà anh ta cho là đúng cũng như là sự tin vào việc anh ta biết và không mắc sai lầm. Thế thì ta có thể rút ra kết luận là xác suất để những người rất có lương tâm mắc phải sai lầm khi chứng tỏ một điều gì đó là khác không hay không?

Chúng ta sẽ trở lại điểm này ở mục sau. Bây giờ trước hết ta hãy xét đến các trường hợp được tin tưởng tuyệt đối (theo đúng nghĩa chính xác của từ này) là phù hợp với các chân lý quen biết.

Chúng ta phân biệt 2 phạm trù chân lý: Chân lý toán học và chân lý thực tế. Đầu tiên, ta hãy chú ý đến phạm trù thứ nhất.

Ví dụ thường được nêu ra để nói về chân lý toán học chính là « 2 cộng với 2 bằng 4 ». Một số người phản đối điều này không phải là chân lý mà chỉ là một định nghĩa về mặt từ pháp. Thực ra thì 4 cũng được xác định bằng 3 + 1 mà 3 lại bằng 2 + 1, cho nên để thiết lập được 2 + 2 bằng 4 cần phải có thêm một đoạn chứng minh ngắn. Một chứng minh toán học phức tạp hay đơn giản chính là một dãy lựa chọn các lý lẽ vô cùng đơn giản và dễ hiểu. Cho nên để kiểm tra khi chứng minh có mắc sai lầm trong các sự lựa chọn ấy không nhiều lúc khá phức tạp. Chỉ hạn chế trong việc xét một trường hợp tầm thường nhất là cộng 30 số có 6 chữ số. Một người kế toán giỏi sẽ xem việc này cũng đơn giản như 2 + 2 bằng 4 nhưng tuy nhiên cũng có lúc anh ta cộng nhầm, nhất là khi anh ta lặp lại 2 lần phép cộng 30 số này.

Lý do duy nhất khiến chúng ta tin tưởng vào các kết quả toán học đã được chứng minh, chẳng hạn như : « Diện tích mặt cầu lớn hơn diện tích hình tròn lớn 4 lần » là : phép chứng minh đó đã được lặp đi lặp lại bởi hàng nghìn, hàng triệu người (như cách chứng minh bắt nguồn từ Ơclit). Xác suất để tất cả những người ấy cùng không nhận ra sai lầm là nhỏ đến mức mà ta có thể hoàn toàn tin tưởng vào sự đúng đắn của các kết quả đó.

Thời đại ngày nay, một nhà toán học tìm ra định lý mới có thể công bố trên một vài trăm, ngàn cuốn sách hoặc bài báo, thành thử cũng có không ít khả năng là một vài độc giả quan tâm đến kết quả này và kiểm tra lại cách chứng minh nó. Có khi họ lại tìm ra được cách chứng minh mới đơn giản hơn. Chính theo trào lưu này mà các kết quả mới được xếp vào các kết quả được tin tưởng và bắt đầu được mọi người tin tưởng. Nhưng hoàn toàn có khả năng là một số kết quả riêng biệt không được quan tâm lắm sẽ bị xếp xó trên những giá sách phủ đầy bụi hàng thế kỷ, mà trong số đó có điều không đúng, ngay cả khi trường hợp này có xảy ra đi nữa thì nó cũng không làm sứt mẻ lòng tin của chúng ta vào các kết quả được các nhà toán học thừa nhận và in trên vô số các cuốn sách giáo khoa, bởi vì chúng đã được kiểm tra đi kiểm tra lại vô số lần.

Trường hợp phép cộng dài và rắc rối là một trường hợp đặc biệt, vì sự cực kì đơn giản về mặt lý luận được thay bằng sự phức tạp trong lúc thực hành. Nếu phải cộng 50 số có 8 chữ số thì ta cần biết trước hết là các số này được cho từ những dạng nào. Nếu đó là những số mà người kế toán viết trong sổ của anh ta từ những nguồn tài liệu như cuốn séc, sổ thu chi v.v..., thì điều đầu tiên cần phải xem những số này được lấy ra đúng hay không?

Đồng thời, nếu một người kế toán khác được trao cho việc kiểm tra người kế toán trước thì anh ta cần biết là mình sử dụng những số liệu của người trước hay tự mình lại phải thu thập lấy ra những số liệu ấy. Sự khác nhau có thể xảy ra do ghi chép sai hoặc cộng sai. Trong trường hợp hai người đều đi đến kết quả giống nhau thì ta có thể tính được xác suất để sự trùng hợp đó là do 2 sự sai lầm khác nhau (hoặc ghi chép, hoặc cộng) gây nên.

Mặt khác, nếu cả hai người kế toán đều thực hiện phép cộng trên cùng các số liệu như nhau được ghi chép ra bởi một người khác thì liệu họ có thể cùng bỏ qua mất một chỗ sai nào đó không.

Cho nên, nếu chúng ta muốn tin tưởng hoàn toàn thì cần phải có ít nhất là 3 người kế toán cùng tiến hành kiểm tra và mỗi người tự mình ghi chép các số liệu gốc và cộng lấy.

Đây chính là trường hợp trung gian giữa độ tin cậy lý thuyết của một định lý toán học và độ tin cậy thực tế mà chúng tôi sắp nói dưới đây. Không ai có thể sống mà lại không tính đến độ tin cậy thực tế của những thông tin về bản thân mình, những người xung quanh mình, ngôi nhà mình ở và thành phố mình đang sống v.v... Ta có thể phản đối những độ tin cậy mang tính chất chủ quan như sự tin tưởng của nhữngngười mất trí nhớ, điên dại, mê sảng, hoảng loạn v.v... Vì những độ tin cậy kiểu này có thể là bắt nguồn cho các cuộc tranh cãi rắc rối.

Độ tin cậy hạn chế như vậy có thể gọi là khách quan và chung cho mọi người dân một nước nào đó, ít ra cũng là đối với những người có một trình độ học vấn tối thiểu. Những sự tin cậy đó có nhiều loại khác nhau. Chủ yếu là các sự kiện về địa lý và con người. Chẳng hạn sự tin tưởng vào sự tồn tại của một thành phố xác định nào đó trên đất nước này cũng như nước khác. về sự tồn tại của những nhân vật nổi danh (mà một số đang sống và một số qua đời đã lâu). Nhưng sự tin tưởng này dựa trên một số lớn những bằng chứng do báo chí và đài phát thanh đưa tin mặc dầu chúng ta biết rõ những nguồn tin này có khi vẫn sai, nhưng chúng ta biết chắc là sự tin tưởng vào sự tồn tại của một thủ đô, một nguyên thủ quốc gia hay một thủ tướng, một nhà hoạt động thể thao hay nghệ thuật nổi tiếng v.v... không lặp lại những sai số ngẫu nhiên. Dĩ nhiên sẽ có ai đó nghi ngờ về một cái tin nói đến một sự kiện chính trị được nhiều nước quan tâm, nhất là khi cái tin đó do nước xảy ra biến cố chính trị ấy phát đi. Nhưng lòng tin của chúng ta sẽ được củng cố tuyệt đối nếu cái tin này được phát đi một cách độc lập từ nhiều nguồn khác nhau.

Chỉ có điều hạn chế duy nhất là lòng tin của chúng ta chỉ có ý nghĩa đối với ngày hôm qua, bởi vì ngày sáng hôm nay có thể xảy ra một sự cố mà chúng ta chưa biết. Nhưng những điều mà chúng ta đã nhận thức được vẫn không sai. Độ tin cậy thực tế của chúng ta được chính xác hóa như vậy cũng giá trị như độ tin cậy lý thuyết của nhà toán học. Chúng ta tin vào sự tồn tại của Luân đôn cũng như tin vào các tính chất đúng đắn của thiết diện cônic.

53. Xác xuất có thể bỏ qua trong thực tế

Như chúng tôi đã nói với các bạn, trong thực tế có thể bỏ qua những xác suất không lớn và cũng không bé đến mức mà hoàn toàn bỏ qua được. Chẳng hạn, chúng ta có thể dễ dàng tin tưởng đưa một số tiền lớn cho nhân viên ngân hàng và kiên nhẫn chờ đợi anh ta làm những thủ tục và các chứng từ gửi tiền. Ở đây, chúng ta đã bỏ qua một khả năng không lớn lắm là biết đâu *người nhân viên ấy bỗng dưng chết bất đắc kỳ tử! Cũng* tương tự như vậy khi ta giao phó số phận mình cho anh tài xế lái xe công hay tư. Trong nhiều trường hợp thực tế khác, chúng ta thường tin tưởng rằng những người còn trẻ và khỏe mạnh sẽ không gặp một sự rủi ro nào (nếu không bất tử thì ít ra cũng sống được vài ngày hay vài giờ nữa).

Các ví dụ kiểu như trên còn có thể dẫn ra rất nhiều. Nhưng chúng ta không được xem đó là các ví dụ chứng tỏ xác suất trở thành độ tin cậy.

Bởi vì trong những trường hợp đó, tuy chúng ta hành động với một sự tin tưởng hoàn toàn, nhưng chúng ta vẫn biết là không có độ tin cậy tuyệt đối. Nếu các bạn đề nghị nói rõ hơn thì chúng tôi sẵn sàng nói thẳng ra là chúng ta bị mắc lừa. Sự việc vẫn không có gì thay đổi nếu như sự rủi ro bị mắc lừa ấy, chúng ta xem như có xác suất xảy ra bé đến nỗi không thể có một biện pháp nào để tránh khỏi cả.

54. Yêu cầu của các nhà bác học và các nhà triết học.

Cho nên rất tự nhiên là chúng ta phải gạt sang một bên những hình ảnh mượn từ thực tế cuộc sống và cố gắng phát biểu vấn đề để sao cho nó cũng thỏa mãn các nhà bác học hay các nhà triết học quen nói chính xác. Liệu chúng ta có quyền dùng thuật ngữ độ tin cậy khi chúng ta biết xác suất của sai số mặc dầu cực kỳ bé, nhưng vẫn khác không được chăng? Ở đây, chúng ta lại quay trở về các xác suất mà có thể bỏ qua được ở tỷ lệ vô cùng nhỏ — những xác suất có giá trị bằng một phần triệu triệu hay một phần tỷ tỷ. Những xác xuất bé như thế này, các bạn đã thấy trong thuyết động học các chất khí và nhiệt động học, trong nghịch lý Ginxơ (nước đóng băng bên cạnh lò sưởi) hay trong « chuyện đánh máy chữ kỳ lạ » (tái tạo lại một tập sách 1000 trang hay cả một thư viện một cách chính xác và hoàn toàn ngẫu nhiên).

Lẽ dĩ nhiên, trước hết chúng ta cần phải thừa nhận mọi điều kiện cần thiết để phép thử mà kết quả xác định ta đã khẳng định không thể xảy ra được. Nếu có điều gì đáng hoài nghi thì chúng ta có thể khử bỏ đi bằng cách phức tạp hóa phép thử. Chẳng hạn, nếu một anh chàng nào đó làm nghề đánh máy chữ tuyên bố anh ta không biết tiếng Anh mà lại đọc thuộc được tuyển tập kịch của Sếchxpia thì chúng ta sẽ chỉ tin điều đó nếu anh ta đánh máy lại được một cuốn sách nào đó từ một đoạn văn bằng cách đánh chữ đầu, rồi chữ thứ 10, chữ thứ 20 v.v... rồi lại đánh chữ thứ hai, thứ 12, thứ 22 v.v... Của đoạn văn đó. Hoặc đơn giản hơn là chỉ yêu cầu bài văn đánh máy bằng cách đó trùng với một bài báo đăng trên bất kỳ một tờ báo Âu—Mỹ nào vào ngày mai.

Chúng ta đã biết cách tính xác suất để có những chuyện hiếm như trên khi biết tổng số các chữ cái của đoạn văn đó. Thành thử, nếu chúng ta khẳng định rằng chuyện lạ đánh máy chữ đó không thể xảy ra và điều không thể này là chắc chắn thì chúng ta đã cố ý bỏ qua các xác suất không đáng kể ấy. Những người khác có thể nói rằng chúng ta không có quyền làm như vậy. Tôi cũng xin thú thực là trong các bài báo trước đây, tôi đã dùng cách nói của một số nhà vật lý, đặc biệt là của Ginxơ—cho rằng sự vi phạm nguyên lý Cacnô—Claudiuyt nên coi là không có khả năng ở mức độ cao chứ không nên coi là hoàn toàn không có khả năng.

Bây giờ thì tôi có thể khẳng định là chúng ta nên bỏ cách dùng từ ấy đi bởi vì theo ý tôi, cách dùng từ như vậy sẽ làm cho bạn đọc rối mù lên. Chúng ta chỉ nên dùng từ tin cậy thì mới không bị lầm lẫn. Bạn đọc cũng cần phải đồng ý với ý kiến của một nhà toán học nói rằng: độ tin cậy đó không giống hoàn toàn như là độ tin cậy của một định lý toán học xác định (như định lý về diện tích mặt cầu chẳng hạn)—Những định lý toán học này sau khi công bố lần đầu đến nay đã được kiểm tra hàng triệu lần. Thật ra, chúng ta cũng có thể phản đối nhà toán học là liệu anh ta có xem những định lý ra đời về sau này rất phức tạp và chỉ rất ít người hiểu nó là cũng có độ tin cậy như những định lý đơn giản được nhiều người hiểu hay không.

Xác suất sai số này tất nhiên rất khó xác định nhưng chúng ta không có quyền coi nó nhỏ hơn xác suất của chuyện lạ đánh máy chữ.

Nhưng nếu ta cần nói thêm về quan điểm của nhà toán học cho đầy đủ thì phải hiểu rằng trong nghịch lý Ginxơ cũng như chuyện lạ đánh máy chữ là chúng ta chỉ gặp những hiện tượng được quan sát trong những điều kiện có thể chính xác hóa dễ dàng chứ không phải là những cấu trúc lý thuyết thuần túy. Có thể chính xác hóa bằng nhiều cách để khử bỏ mọi hoài nghi làm chúng ta bị mắc lừa (chúng tôi nói đến « bị mắc lừa » nếu phép thử thực hiện không đúng như đã mô tả).

Chúng ta tin các chuyện đó không thể xảy ra với lòng tin có khi còn lớn hơn cả lòng tin vào nhiều việc khác trong thực tế hàng ngày. Ở đây, có thể đưa ra một số ngoại lệ nhưng không phải là nhiều lắm. Đó là khi ta nói về *những sự kiện quá khứ mà mọi người đều thống nhất ý kiến*. Chẳng hạn như sự kiện « Napôlêông I đã sống và đã chết »: Nhưng nếu không giới hạn ở việc nêu lên sự kiện chung chung mà ta còn chú ý cả đến hoàn cảnh và ngày tháng xảy ra sự kiện thì trong nhiều sự kiện lịch sử có nhiều chỗ rất đáng nghi ngờ. Xác suất sai lầm sẽ trở nên đáng kể nếu ta lại bàn đến các hiện tượng tương đối cận đại. Chẳng hạn về sự tồn tại của một thành phố rất xa chúng ta, một nguyên thủ quốc gia nào đó hoặc một nhân vật nổi tiếng v.v... Bởi vì xác suất để có sự cố xảy ra làm hủy diệt thành phố ấy hoặc xác suất để những nhân vật ấy chết dù có *bé* đến đâu đi nữa vẫn lớn hơn nhiều những xác suất mà chúng ta đã quyết định bỏ qua.

55. Những đặc trưng khách quan của độ tin cậy

Cũng còn có thể đưa ra nhiều điều trái ngược với những cái mà đã được nêu ra có liên quan đến đặc trưng khách quan của độ tin cậy vào khả năng không thể nào xảy ra chuyện lạ đánh máy chữ.

Thực vậy, những người có đủ trình độ văn hóa để hiểu thực chất vấn đề sẽ tin vào điều đó như nhau. Cho nên, ta không thể coi độ tin cậy của các sự kiện lịch sử hay địa lý là đối với ai cũng như nhau.

Nếu người Pháp không hề nghi ngờ về việc đã tồn tại Napôlêông thì những người sống xa nước Pháp hay người Pháp nào mà không biết lịch sử của nước Pháp có thể lại không tin lắm. Ngay cả đến những hiện tượng thiên văn hầu như ai cũng quan sát thấy giống nhau, nhưng những người ở địa cực có khi lại quan niệm khác hẳn.

Chúng ta còn có thể thấy đa số các độ tin cậy thực tế là khách quan theo nghĩa độ tin cậy chung của nhiều người. Nhưng nếu chúng ta không nắm được ý kiến của những người khác thì không thể có cơ sở nào để tin tưởng vào các hiện tượng đó.

Ngược lại, nếu xét chuyện lạ đánh máy chữ thì phép thử chính có thể mô tả theo nhiều cách khác nhau thích hợp với cả những người không biết tý gì về cái máy chữ. Chúng ta cũng biết cách biến đổi với dân tộc quen viết lối chữ tượng hình.

Mọi cố gắng và khả năng của trí tuệ con người nhằm làm cho phép thử tạo lại ngẫu nhiên một kiệt tác văn học chắc chắn là điều không thể được. Chỉ xét một bài thơ đơn giản thôi là chúng ta hoàn toàn hiểu được lý luận sau đây không đúng;

« Chẳng có lý gì để lần chọn ngẫu nhiên đầu tiên mà lại không chọn được chữ đầu của bài thơ, chữ thứ hai, chữ thứ 3 v.v... chữ cuối cùng cũng vậy.

Chính việc chọn lặp đi lặp lại này để được một bài thơ 600 — 700 chữ cũng không thể nào làm được huống hồ là cả một tập sách hàng triệu chữ. Chúng ta cũng có thể tự cho phép mình phủ định các khả năng xảy ra chuyện lạ đánh máy chữ, chuyện lạ nhiệt động học (có một lúc nào đó một bình để hở ngoài không khí lại chứa đầy òxi thuần khiết), chuyện lạ Ginxơ (nước đóng băng bên cạnh lò sưởi) ,với độ tin cậy như trên.

Một số nhà phê bình có thể sẽ bảo vệ cho tính chính xác của thuật ngữ bằng cách phản đối cách dùng từ độ tin cậy vào những chỗ mà nhà toán học thiết lập được xác suất cực kỳ bé của sự kiện đối lập.

Một số nhà phê bình khác có thể lại quở trách chúng tôi là quá đề cao cách dùng từ và họ cho rằng cuối cùng cũng không cần phân biệt cách gọi một hiện tượng nào đấy là không có khả năng xảy ra ở mức độ cao hay chắc chắn là không thể quan sát được. Chúng tôi thấy cần phải phân biệt, vì câu nói: không có khả năng ở «mức độ cao» và những câu nói tương tự khác có thể làm bạn đọc rối tinh mù lên rồi quan niệm sai vấn đề đi nữa.

Khi chúng ta khẳng định độ tin cậy khách quan thì điều đó nghĩa là nếu có ai tuyên bố đã quan sát thấy hiện tượng mà chúng ta bảo rằng không xảy ra thì chắc chắn là người ấy đã bị lừa. Hiển nhiên, khả năng chúng ta phát hiện ra sự đánh lừa ấy phụ thuộc vào phương tiện mà chúng ta dùng trong thực tế để nghiên cứu kỹ những điều kiện làm cho hiện tượng đó xảy ra.

56. Nguồn gốc sự sống

Để kết luận, tôi thấy cần phải nói một vài lời về một vấn đề không nằm trong nội dung cuốn sách này vì nếu bỏ qua nó thì sẽ có một số bạn đọc quở trách.

Tôi có tìm hiểu vấn đề xuất hiện sự sống trên hành tinh của chúng ta (có khả năng xuất hiện ở các hành tinh trong vũ trụ khác nữa) và xác suất để ngẫu nhiên nảy sinh sự sống. Vấn đề này vượt quá tầm hiểu biết của chúng ta vì nó vô cùng phức tạp.

Khi chúng ta tính xác xuất để tái tạo lại một ấn phẩm văn học hoàn toàn ngẫu nhiên thì các bạn dĩ nhiên sẽ không quên là những tác phẩm như vậy đều do thành quả lao động trí óc của con người. Vậy thì có thể rút ra kết luận là xác suất để tạo ra bộ não bởi một lực « siêu phàm » hết sức ngẫu nhiên nhỏ hơn xác suất của chuyện lạ đánh máy chữ không? (Bởi vì bộ não ắt hẳn là phức tạp hơn một kết quả hoạt động riêng biệt của nó).

Rõ ràng kết quả sẽ đúng như thế nếu vấn đề đặt ra là tìm hiểu xem có thể tổ hợp ngẫu nhiên các nguyên tố vật chất đã biết để tạo nên được một con người hay không. Nhưng vấn đề nảy sinh sự sống lại đặt ra một cách khác. Mọi người chắc đều nhất trí là các thực thể sống đều do kết quả của quá trình phát triển lâu dài từ những cơ thể đơn giản nhất mà trong quá trình đó sẽ hình thành các tính chất xác định của sinh vật chứ không thể khẳng định nó sinh ra do các qui luật ngẫu nhiên. Một số tính chất của giới hữu sinh cũng thấy có trong giới vô sinh. Chẳng hạn như các tinh thể : ta không thể nào áp dụng các phép tính xác suất vào hiện tượng thành tạo tinh thể từ các dung dịch loãng hay đậm đặc. Nếu không biết được một số tính chất của vật chất mà làm cho việc thành tạo tinh thể dễ dàng thì chúng ta sẽ không thể nào giải được bài toán xác suất trên.

Cho nên chúng ta cần giả sử một cách có lý rằng việc thành tạo các cơ thể sống đơn giản nhất và sự phát triển của chúng cũng tuân theo các tính chất cơ bản của vật chất mà chúng ta hoàn toàn chưa biết đến nhưng vẫn phải coi là chúng tồn tại.

Các bạn cũng có thể rút ra kết luận tương tự cho việc cố gắng áp dụng xác suất vào nghiên cứu sự tiến hóa của vũ trụ. Có lẽ việc trình bày các kết quả trong lĩnh vực này hiện nay không mang lợi ích gì lớn nên chúng tôi xin phép không trình bày ở đây.

NÓI THÊM VỀ TRÒ CHƠI PÊTECBUA

57. Trò chơi đánh bạc gỡ vốn

Những điều kiện của trò chơi Pêtecbua có thể ta cũng tạo ra được. Tuy nhiên, trò chơi đánh gỡ vốn là kiểu trò chơi Pêtecbua dễ thực hiện nhất.

Giả sử Piôt và Paven đánh « Sấp — Ngửa » với nhau. Nhưng Piôt có quyền đặt trước tiền cược và ngừng chơi bất cứ lúc nào tùy ý anh ta. Các điều kiện này là cần nếu số vốn của Paven lớn hơn số vốn của Piôt. Kiểu chơi phải sao cho hợp lý và kì vọng toán của mỗi người bằng không vì mỗi ván chơi khả năng thắng và thua của họ đều như nhau.

Với những điều kiện như vậy, Piôt sẽ chọn cách chơi đánh gỡ vốn. Ván đầu, anh ta đặt cược 2 đồng. Nếu anh ta thắng, anh ta được 2 đồng và ngừng chơi. (Có thể anh ta lại bắt đầu ván chơi mới với số tiền cược đầu tiên là 2 đồng). Nếu Piôt thua ván đầu thì anh ta sẽ mất 2 đồng và tiếp tục chơi ván thứ hai với số tiền cược 6 đồng. Thành thử, nếu anh ta thắng ván thứ hai thì anh ta sẽ được lãi 4 đồng và ngừng chơi. Nếu thua ván thứ hai, Piôt sẽ mất 8 đồng và ván thứ ba anh ta phải đặt cược 16 đồng để ván đó mà thắng thì anh ta lãi 8 đồng. Nếu Piòt lại thua ván thứ ba, anh ta mất cả thảy 24 đồng và ván thứ tư phải đặt cược là 40 đồng để khi thắng cuộc lãi đúng 16 đồng. Ván này mà thua nữa thì Piôt mất tổng cộng là 64 đồng.

Dễ dàng thấy rằng nếu Piôt thua $(n-1)$ ván đầu thì số tiền thua cả thảy là $(n-1)2^{n-1}$ đồng và ván thứ n anh ta phải đặt cược $(n+1)2^{n-1}$ đồng nếu muốn lãi đúng 2^n đồng khi thắng ván thứ n. Nếu ván thứ n mà anh ta lại thua thì số tiền mất sẽ bằng

$$(n-1)2^{n-1} + (n+1)2^{n-1} = 2n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^n$$

Kết quả này lại tuân theo công thức mà ta đã đưa ra cho trường hợp ván thứ $(n - 1)$.

Nếu xuất phát từ một giả thiết tự nhiên là vốn liếng của Piôt có hạn (hay nói khác đi là anh ta chỉ định dành một số tiền nào đấy để chơi bạc) thì anh ta phải xác lập được số ván chơi nhiều nhất là bao nhiêu. Rõ ràng là số ván chơi nhiều nhất không thể vượt quá n nếu như Piôt không muốn thua quá $n \cdot 2^n$ đồng.

Bây giờ, ta sẽ đi tính kỳ vọng toán của Piôt và Paven khi số ván chơi nhiều nhất là n. (Cuộc chơi có thể ngừng trước khi đạt đến ván thứ n vì Piôt có thể thắng giữa chừng).

58. Tính kỳ vọng toán

Kỳ vọng toán của mỗi người chơi gồm 2 số hạng, một số hạng tương ứng với kì vọng thắng cuộc và một số hạng âm ứng với kì vọng thua cuộc.

Vì Piôt thắng thì Paven thua và ngược lại nên chỉ cần tính kỳ vọng toán học dương của cả hai người chơi.

Piôt có thể thắng theo n cách khác nhau bởi vì anh ta sẽ kết thúc ván chơi khi anh ta thắng được một ván. Ván thắng này có thể là ván thứ nhất, ván thứ hai,... ván thứ n. Kì vọng toán học toàn phần của anh ta sẽ bằng tổng các kì vọng toán học ứng với mỗi khả năng ấy. Cho nên anh ta có thể bán các kì vọng riêng ấy cho những người « khách mua » tham dự trò chơi đó.

Ta hãy tính kì vọng toán để Piôt thắng ván thứ k. (k là số nguyên bất kì nhỏ hơn hoặc bằng n). Theo các điều kiện đã qui định thì cuộc chơi chấm dứt ở ván thứ k nếu Piôt thua $(k - 1)$ ván trước và thắng ván thứ k. Xác suất của sự kiện này bằng $\frac{1}{2^k}$, bởi vì đó là xác suất để k ván thắng hay thua liên tiếp theo một thứ tự đã định sẵn. (Xác suất để một người nào đó thắng ván đầu bằng 1/2, ván thứ hai và các ván sau cũng vậy. Cho nên để tính xác suất của biến cố hợp trên cần phải nhân k thừa số $\frac{1}{2}$ với nhau).

Mặt khác số tiền thắng cuộc của Piôt trong trường hợp trên (tức là thắng ở ván thứ k) bằng 2^k. Vì vậy kì vọng toán bằng tích của số tiền thắng cuộc với xác suất thắng cuộc bằng đúng đơn vị.

Kì vọng toán toàn phần của Piôt khi thắng cuộc sẽ là tổng n số hạng bằng đơn vị ứng với k từ 1 đến n. Như vậy, kì vọng toán dương ε của Piôt bằng n còn kì vọng toán âm $-\varepsilon$ của Paven bằng $-n$.

Bây giờ ta tính kì vọng toán dương ε' của Paven. Theo các điều kiện đã qui định, Paven chỉ thắng cuộc khi anh ta thắng cả n ván đầu tiên. Xác suất của sự kiện này bằng $1/2^n$. Ta đã biết số tiền thắng của Paven khi ấy là $n \cdot 2^n$ nên kỳ vọng toán của anh ta bằng

$$\varepsilon' = \frac{1}{2^n} \cdot n \cdot 2^n = n$$

Như vậy, kì vọng toán toàn phần của Piôt $\varepsilon - \varepsilon'$ cũng bằng kì vọng toán toàn phần của Paven $\varepsilon' - \varepsilon$ và bằng 0. Điều này rất phù hợp với thực tế bởi vì cuộc chơi bảo đảm hợp lý, công bằng ở từng ván cũng sẽ là hợp lý, công bằng suốt cuộc chơi. Tuy nhiên, khi n khá lớn thì lập luận sẽ phức tạp hơn.

59. Trường hợp số ván chơi khá nhiều

Giả sử vốn liếng của Piôt khá lớn để số ván chơi n có thể bằng 30. Bởi vì 2^{30} xấp xỉ bằng 10^9 (một tỷ) nên vốn của Piôt gấp $n \cdot 2^n$ lần số tiền đặt cược ban đầu (với $n = 30$ là 30 tỷ đồng nếu đầu tiên đặt cược 1 đồng). Nếu đơn vị tiền đặt cược không tính theo đồng mà tính theo xu mà ván thứ nhất mỗi người chơi đặt một xu thì Piôt cũng vẫn phải có ít nhất 300 triệu đồng. Dĩ nhiên, Paven còn phải có số tiền vốn nhiều hơn nữa.

Với số tiền cược ban đầu rất bé, chúng ta có thể giả sử rằng Piôt và Paven chơi được nhiều loạt ván. Mỗi loạt chấm dứt khi Piôt thắng. Dễ dàng tính ra được (xin dành cho bạn đọc tự tính lấy) số ván trung bình của mỗi loạt bằng 2 nếu như số loạt chơi rất nhiều. Nếu mỗi ván chơi chỉ kéo dài 5 giây thì một loạt trung bình sẽ kéo dài mất 10 giây. Mỗi ngày, ta có thể chơi 3000 loạt và một năm gần một triệu loạt. Để thắng sau mỗi loạt chơi, Paven phải thắng được cả 30 ván loạt chơi, (Theo qui ước là số ván chơi cực đại giữa hai người). Xác suất có được điều này chỉ bằng một phần tỷ. Cho nên, trung bình Paven cứ 1000 năm mới thắng được một loạt với nhịp độ chơi là 1 triệu ván một năm.

Thế thì Paven có rất ít hy vọng để thắng cuộc. Kì vọng toán học lý thuyết của anh ta cũng bằng 0 như của Piôt. Nhưng kì vọng toán học thực tế của Paven lại âm trong khi của Piôt là dương và nhỏ hơn 30 xu một chút đối với mỗi loạt chơi. Thực vậy, ta cần phải bỏ qua các kì vọng toán học của những loạt chơi quá 25 ván. (Những loạt không bao giờ có được trong thực tế).

Nếu ta thừa nhận mỗi năm họ chơi được một triệu ván thì trung bình hàng năm Piôt thu lãi được gần 250.000 đồng (Tính trung bình là 25 xu cho mỗi loạt). Paven dĩ nhiên mất một số tiền cũng vào khoảng đó. Tuy vậy là ta đã loại ra những loạt chơi mà Piôt thắng sau khi chơi từ 20 — 30 ván. (Trường hợp cực hiếm có thể xảy ra là Piôt sẽ thắng sau 30 ván và anh ta thu lãi được 300 triệu đồng).

Có thể nhận thấy số tiền lãi trung bình hàng năm mang lại do Piôt thắng cuộc không vượt quá một phần nghìn số vốn mà anh ta phải có để tiến hành trò chơi như vậy. Tuy vậy cũng phải công nhận là trò chơi này có lợi cho Piôt.

Số tiền lợi nhuận này sẽ còn lớn hơn nữa nếu tỷ số giữa vốn của Piôt và số tiền đặt cược ban đầu có thể cho phép anh ta chơi được loạt 40 ván liền. Xác suất thua cuộc của Piôt bé đến mức có thể hoàn toàn bỏ qua được và độ tin cậy thắng cuộc của anh ta là hoàn toàn chắc chắn (đặc biệt là nếu chỉ hạn chế cuộc chơi trong khoảng thời gian sống của người chơi). Nhưng hoàn toàn rõ ràng là theo quan điểm toán học của Giôdep Beetrăng (tức là cho phép con cháu của những người chơi có thể tiếp tục cuộc chơi đến bao lâu cũng được) thì cuối cùng ngày « phục thù » của Paven sẽ đến. Cho nên khi n lớn tùy ý thì trò chơi này vẫn xem như là hợp lý và công bằng. Nhưng các bạn sẽ thấy rằng nếu giá trị n không thiết lập từ trước thì chúng ta sẽ nhận được các kết luận khác.

60. Trường hợp số ván chơi chưa thiết lập trước.

Nếu đồng ý với quan điểm của Beetrăng trong công trình nói về nghịch lý Pêtecbua thì ta không cần chú ý đến vốn liếng và thời gian sống của người chơi bị hạn chế. Chúng ta chỉ xét đến những người chơi tưởng tượng, chơi trên số tiền tưởng tượng, ai thắng ai thua chỉ ghi vào một cuốn sổ lớn. Cuốn sổ này cũng là một cuốn sổ tưởng tượng bởi lẽ kích thước của nó có khi cần phải lớn hơn cả kích thước vũ trụ mà chúng ta biết được để có thể ghi được vào đó những con số nợ dài dằng dặc như những số siêu thiên văn.

Hiển nhiên, nhà toán học được quyền nghiên cứu những bài toán tưởng tượng như vậy. Lịch sử khoa học đã chỉ cho chúng ta thấy việc xây dựng những bài toán mang nội dung không thực tế có khi lại rất có ích cho việc phát triển khoa học và những áp dụng thực tiễn của chúng.

Thế thì ta sẽ giả sử rằng số ván n cực đại của loạt chưa xác định, còn Piốt vẫn có quyền đặt cược theo ý mình và ngừng chơi bất cứ lúc nào anh ta muốn. Thành thử, anh ta sẽ chọn kiểu đánh gỡ và chơi cho đến khi nào thắng được một ván.

Khi ấy, có một cách lý luận khá quyến rũ sau đây. Như chúng ta đã thấy, các kì vọng toán học ε và ε' ứng với sự thắng cuộc của Piốt và Paven đều bằng n, do đó hiệu $\varepsilon-\varepsilon'$ luôn luôn bằng 0 và trò chơi như thế là hợp lý. Bởi vì điều này đúng với n bất kì nên cũng đúng khi n tăng lên vô hạn. Do đó giới hạn của hiệu $\varepsilon-\varepsilon'$ khi n ra vô hạn sẽ bằng 0. Thành ra trò chơi vẫn hợp lý và trong những điều kiện mới kì vọng toán học của mỗi người chơi cũng vẫn bằng 0.

Chúng ta sẽ thấy lý luận trên thiếu chính xác nếu chú ý đến cách tính ε và ε' ở mục trước. ε : đó là tổng của n kì vọng toán học mà mỗi cái bằng đơn vị. Khi n tăng, số số hạng của tổng sẽ tăng nhưng mỗi số vẫn bằng đơn vị.

Như vậy, tổng các số đó sẽ tăng vô hạn nghĩa là phải xem nó là vô cùng lớn khi n ra vô cùng. Nói khác đi, với giá trị n đủ lớn thì tổng này có thể lớn bao nhiêu tùy ý.

Cũng có thể phản đối lý luận này ở chỗ : các số hạng về sau của tổng ứng với xác suất cực kỳ bé của các sự kiện chỉ xảy ra nếu chơi rất nhiều loạt ván. Nhưng ta đều có thể thiết lập được số loạt ván cần thiết để có thể hy vọng thực sự vào việc xuất hiện các sự kiện đó. (Cụ thể là bằng 2^n ứng với số hạng thứ n).

Nhưng lý luận của chúng ta được đưa ra với giả thiết là số loạt chơi không bị hạn chế thời gian, vốn liếng của người chơi. Vì vậy, chúng ta thực sự có thể nhận được giá trị ε lớn tùy ý với điều kiện số loạt chơi khá nhiều. Cho nên có thể khẳng định ε là vô cùng lớn theo đúng nghĩa toán học của từ này bởi vì đại lượng biến thiên này có thể lớn hơn bất kỳ một số cho trước nào.

Còn ε' thì lại hoàn toàn khác. Nếu chú ý đến mục 58 thì chúng ta sẽ thấy ε' là tích của hai thừa số : xác suất thắng cuộc và số tiền thắng cuộc. Đồng thời khi n tăng lên vô hạn, thừa số đầu dần đến 0 còn thừa số thứ hai tăng vô hạn. Nếu trong đại số gặp tích như vậy thì ta thường gọi là tích ở dạng vô định và cũng có thể tính được giá trị đúng của nó nhờ các phương pháp đơn giản (mà ở đây sẽ rút ra được giá trị của ε' là vô cùng lớn).

Nhưng chúng ta sẽ thấy việc áp dụng lý thuyết đại số về « giá trị đúng » vào đây là không đúng.

Thực vậy, thừa số thứ nhất là xác suất tiến tới 0 khi n tăng vô hạn, xác suất này bằng 0 khi n ở vô cùng nghĩa là không thể giả sử rằng Paven chơi được tất cả các ván. Hoặc với số loạt chơi bất kì như thế nào thì xác suất để cho một loạt kéo dài vô hạn luôn bằng 0. Cũng có thể chứng minh được rằng xác suất để chơi được liên tiếp một số ván vô cùng lớn là bằng không. Nhưng chúng ta chỉ cần đến kết quả sau đây :

Với bất kỳ N lớn thế nào, chắc chắn là Paven cũng không bao giờ thắng được bởi vì đến thời điểm nào đấy Piốt nhất định sẽ thắng một ván và kết thúc thắng lợi cuộc chơi này. Cho nên, khi tính ε' bằng tích số tiền thắng cuộc với xác suất vừa thiết lập bằng 0 ta sẽ được kết quả là ε' bằng 0. Đồng thời do ε tăng vô hạn nên hiệu số ε—ε' cũng sẽ tăng vô hạn.

Thành thử kì vọng toán học của Piốt vô cùng lớn nghĩa là nó càng lớn khi số loạt chơi càng nhiều. Thật ra nó xấp xỉ bằng n nếu số loạt chơi bằng 2^n, tức là nó tăng rất chậm so với số loạt chơi.

Dầu sao thì theo quan điểm toán học cũng phải cho rằng nó là vô cùng lớn nếu xét vấn đề một cách trừu tượng như ta đã giả sử. Thực vậy, kì vọng toán học đó tỷ lệ với loga của thời gian. (Ta không chú ý đến cuộc chơi sẽ kéo dài bao nhiêu thế kỷ!).

Như vậy, chỉ cần đưa vào tính vô hạn tiềm năng là cuộc chơi đã bất hợp lý. (mặc dầu ta cứ tưởng cuộc chơi gồm một số ván mà mỗi ván đều hợp lý thì nó sẽ hợp lý). Điều này chỉ đúng khi số ván chơi đã ấn định nghĩa là không vượt quá n cho trước. Đồng thời số n này có thể lớn bao nhiêu nữa cũng được. Nhưng thực ra, nếu số ván chơi vô cùng lớn theo nghĩa toán học của từ này thì kết quả sẽ khác đi. Nghĩa là số ván chơi đó là một biến số mà giá trị xác định hoàn toàn bởi mỗi loạt chơi. Dĩ nhiên trong loạt chơi này có thể lớn hơn số cho trước dù cho có lớn bao nhiêu đi nữa.

Tính vô hạn này được gọi là vô hạn tiềm năng sẽ đối lập với tính vô hạn thực tại mà thỉnh thoảng được các nhà toán học xét đến trong việc nghiên cứu chuỗi nguyên. Chính tính vô hạn thực tại này đã bị phê phán trong ngụy biện nổi tiếng của Zênông. Trong ngụy biện này, nhà triết học đó đã khẳng định là lực sĩ Asin không thể đuổi kịp con rùa cũng như mũi tên bay bất động [22].

Nói khác đi, Paven có thể thắng với cách đặt vấn đề trừu tượng là n có thể lớn tùy ý, bởi vì khi ấy chỉ cần giả sử số loạt chơi vượt quá 2^n. Tuy nhiên nếu không cố định n thì Paven không thể thắng được bởi vì điều đó sẽ bắt buộc anh ta phải thắng liên tiếp vô hạn—điều mà không thể làm được.

Bạn đọc có thể hiểu rõ hơn điều này nếu hình dung ra được vô số loạt chơi mà mỗi loạt kết thúc bởi ván thắng của Piốt. Chúng ta có thể biểu diễn mỗi loạt chơi đó bằng một chuỗi vô hạn các số 0,1 (0 ứng với ván Paven thắng 1 ứng với ván Piốt thắng). Theo luật số lớn, nếu chọn ngẫu nhiên các chữ số từ chuỗi số 0, 1 như vậy thì tỷ số giữa số chữ số 0 và số chữ số 1 sẽ tiến dần tới 1 khi số lần chọn ra vô hạn bởi vì khả năng rút được số 0 và số 1 đều như nhau. Thành thử ta sẽ có nhiều vô kể các số 0 và các số 1. Để Paven thắng cuộc thì bắt đầu từ một vị trí xác định của chuỗi phải toàn là số 0. Chính ở chỗ này mà chúng ta không thể nào khẳng định Paven sẽ thắng cuộc bởi vì để được một chuỗi như vậy cần phải thực hiện vô hạn lần lấy mẫu (1).

Chúng ta đã khảo sát vấn đề của chúng ta từ nhiều khía cạnh khác nhau vì vậy kết quả nhận được nhiều khi rất độc đáo và nghịch lý hơn cả nghịch lý Pêtecbua. Chính điều này đã đưa đến việc Piôt có thể yên tâm chơi theo kiểu đánh gỗ hơn cả trò chơi Pêtecbua và không do mất một xu nào cho Paven.

Như vậy, giả thiết đề cho Piôt có quyền đặt cược và ngừng chơi tùy ý mình là rất không hợp lý khi số ván chơi chưa ấn định trước hoặc số tiền cược ban đầu cũng không qui định lớn nhất là bao nhiêu. Việc đưa vào tích vô hạn tiềm năng là đủ để làm cho cuộc chơi hợp lý mỗi ván lại không công bằng.

Tôi cũng thú thực với bạn đọc là trước đây tôi có đề ra khả năng xét giá trị giới hạn của kì vọng toán học khi

---

(1) Bởi vì trên Trái đất chỉ có một số hữu hạn người nên chúng ta có thể thâu tóm mọi ván chơi tương tự « Sấp—ngửa » diễn ra trong thế kỷ này và thế kỷ tới. Ai sẽ đồng ý với khẳng định là : mọi vòng quay số luôn luôn xuất hiện màu đỏ mà không bao giờ xuất hiện màu đen ».

cho đại lượng biến đổi dần ra vô cùng (Trong nhận xét đối với trò chơi đánh cuộc Pascan [23]. Bởi vì trong trường hợp riêng đó, tính toán cho ta giá trị giới hạn bằng 0 phù hợp với kết quả đúng (nhưng tôi đã phạm phải sai lầm trong cách lý luận như vậy).

Thực ra như các bạn đã thấy ở trên, các qui tắc tính thông thường không thể áp dụng để tính giá trị giới hạn của kì vọng toán học được.

Chúng ta cần phải xét thực chất của vấn đề và nếu khi thấy sự kiện đó không thể xảy ra thì cần phải cho kỳ vọng toán học của nó bằng 0 mặc cho mọi lời hứa hẹn khi thắng cuộc như thế nào. Đây cũng chính là nguyên do khiến cách lập luận trong trò chơi đánh cuộc của Pascal không mang lại được một điều gì xác thực cả.

CHÚ THÍCH

[1] (trang 12) Trong cuốn này, tác giả không đưa ra định nghĩa chính xác về xác suất của sự kiện ngẫu nhiên Vì vậy, bạn đọc có thể làm quen với khái niệm này trong các sách phổ biến rộng rãi sau đây:

B. Gơnhiêđencô: Giáo trình lý thuyết xác suất (đã có bản dịch tiếng Việt).

A. Iaglôm và I. Iaglôm. Xác suất và thông tin, Nhà xuất bản Toán — Lý, 1960.

B. Gơnhiêđencô và A. Khinchin: Nhập môn lý thuyết xác suất sơ cấp. Nhà xuất bản kỹ thuật quốc gia — 1957. Việc Boren cố gắng áp dụng ước lượng chính xác cho xác suất của một hành vi nào đó thuộc về từng con người chỉ có thể coi như là một vấn đề vui trong khoa học. Các xác suất này đối với một người cụ thể phụ thuộc rất nhiều vào trạng thái tâm lý cũng như thể chất của người đó ở thời điểm nhất định. Những kết luận rút ra ở thời điểm đó không nhất thiết sẽ đúng cho những người khác và cho cả ngay người ấy ở tại một thời điểm khác. Boren đã nói rất đúng rằng các xác suất này « không tồn tại một cách trừu tượng mà chỉ tồn tại đối với mỗi một con người cụ thể » Nhưng nói như vậy không có nghĩa là ta sẽ được quyền đồng nhất quan điểm của Boren đối với xác suất của một sự kiện ngẫu nhiên theo cách lập luận lý tưởng chủ quan do khái niệm cơ bản này.

Cuối cùng, xin lưu ý bạn đọc nhớ cho là phần lớn các nhà bác học chỉ chú ý đến các xác suất của những sự kiện tồn tại một cách khách quan không phụ thuộc vào nhận thức chủ quan của con người.

[2] (trang 15) Ở đây, Boren diễn đạt chưa được đủ ý. Chúng tôi muốn nói rõ nghĩa thêm như sau: những kết luận xác suất về diễn biến của một sự kiện ngẫu nhiên phụ thuộc quan trọng vào những điều kiện để cho sự kiện diễn ra. Để minh họa điều này, tác giả đã đưa ví dụ về 2 cỗ bài. Những kết luận rút ra với cỗ bài 52 quân có thể sẽ khác với cỗ bài 32 quân.

[3] (trang 16) Ở đây cần chú ý hai chỗ. Thứ nhất, từ « đã biết », « tri thức của chúng ta » trong đoạn này không phải là nói đến ý chủ quan của khái niệm xác suất. Thứ hai, những khi mà mọi hoàn cảnh diễn biến của hiện tượng đã được biết thì về nguyên tắc có thể bỏ qua không cần chú ý đến các quan niệm xác suất. Nhưng điều này không có nghĩa là trong các trường hợp đó, công cụ của lý thuyết xác suất hoàn toàn mất ý nghĩa của nó.

Trong những trường hợp mà hiện tượng chịu ảnh hưởng của một số lớn các tác động nhỏ xấp xỉ như nhau thì sẽ dẫn đến việc mô tả tiền định không còn thích hợp bởi vì việc sử dụng công cụ giải tích lúc đó có nhiều khó khăn không sao khắc phục nổi. Khi đó cách lập luận của lý thuyết xác suất hoàn toàn đáp ứng việc mô tả hiện tượng và rút ra các qui luật tiên đoán diễn biến của hiện tượng đó một cách định lượng.

[4] (trang 24) có nhiều sách tiếng Nga nói về việc áp dụng kỳ vọng toán học (chẳng hạn như một số cuốn nêu ở mục 1). Ở đây, Boren đã phát biểu một định lý quan trọng. Nếu X và Y là các đại lượng ngẫu nhiên bất kỳ thì kỳ vọng toán học của tổng bằng tổng các kỳ vọng toán học của từng số hạng.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

M là kí hiệu kì vọng toán học đứng trước đại lượng ngẫu nhiên.

[5] (trang 23) Ở đây tác giả đã sử dụng định lý nhân xác suất được nêu trong mọi cuốn sách nói về lý thuyết xác suất. Định lý đó phát biểu như sau:

Xác suất xuất hiện đồng thời sự kiện A và B (P(AB) bằng tích xác suất của P(A) hoặc P(B) với xác suất có điều kiện P(B/A) hoặc P(A/B):

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

Nếu xác suất có điều kiện P(B/A) trùng với xác suất không điều kiện (nghĩa là $P(B/A) = P(B)$ hay $P(A/B) = P(A)$ thì hai sự kiện A và B được gọi là độc lập. Đối với các sự kiện độc lập thì định lý nhân rất đơn giản:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Boren đã sử dụng dạng này của định lý nhân xác suất (cho trường hợp 4 sự kiện độc lập). Việc tổng quát hóa định lý này cho trường hợp số sự kiện tùy ý rất hiển nhiên.

Sau này, tác giả còn dùng đến một nội dung cơ bản của lý thuyết xác suất là định lý cộng xác suất được phát biểu như sau:

Nếu sự kiện A và B không tương thích (nghĩa là xác suất xuất hiện đồng thời của chúng bằng 0) thì xác suất để xảy ra một trong hai sự kiện này bằng tổng các xác suất của chúng:

$$P(A \text{ hoặc } B) = P(A) + P(B)$$

[6] (trang 28) Ở đây, Boren đã phát biểu cái gọi là luật mạnh số lớn mà nội dung chính xác được bao hàm trong công thức:

$$P\{\lim_{n\to\infty} f_n = p\} = 1$$

Luật số lớn theo cách phát biểu của Becnuli có « yếu hơn » điều khẳng định trên và nội dung của nó là: nếu mỗi một trong n phép thử độc lập, xác suất xuất hiện của sự kiện ngẫu nhiên đều bằng p thì với n đủ lớn xác suất để $|f_n F - p|$ nhỏ hơn một số cho trước có thể gần 1 tùy ý. Biểu diễn điều này dưới dạng công thức là:

$$P\{|f_n - p| < \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$$

Sự khác nhau giữa 2 mệnh đề này là ở chỗ: luật số lớn thông thường (Định lý Becnuli) chỉ khẳng định rằng nếu n đủ lớn thì giá trị của f_n và p (ứng với n đó) sẽ gần nhau với xác suất lớn gần bằng một tùy ý. Luật mạnh số lớn lại khẳng định hiệu của f_n và p sẽ càng bé đi kể từ mọi giá trị n tiếp sau với xác suất bằng 1.

[7] (trang 30) xem [5]

[8] (trang 34) Boren đã chỉ ra ở đây một cách đánh giá sự giảm của xác suất. Ước lượng chính xác hơn có thể nhận được nhờ định lý tích phân Laplaxơ:

$$P\{|f_n - p| \geqslant c\sqrt{npq}\} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Ta có đẳng thức gần đúng:

$$\int_c^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \sim \frac{1}{e} e^{-\frac{c^2}{2}}$$

Vì vậy

$$P\{|f_n - p| \geqslant 2c\sqrt{npq}\} \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2c} \cdot e^{-\frac{4c^2}{2}} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{8} c^3 \left(\frac{2}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}}\right)^4 \sim c^3 [p\{|f_n - p| >$$

$$> c\sqrt{npq}\}]^4$$

[9] (trang 30) Trong chương này và hai chương kế đấy tác giả đã xét một số phương pháp được áp dụng ở các « Viện thăm dò dư luận xã hội » hoạt động ở các nước tư bản. Trong số các viện này nổi tiếng nhất là Viện Galơp (Mĩ).

Sơ đồ xác suất mà Boren đưa ra cũng có thể áp dụng cho các lĩnh vực khác. Nhất là bài toán kiểm tra sản phẩm.

[10] (trang 48). Các công trình này được trình bày tỉ mỉ và dưới nhiều quan điểm khác nhau trong cuốn sách rất hay của G. Perôn « Nguyên tử » (Bản tiếng Nga, ГИЗ — 1924). Cần chú ý rằng cùng với Pêrôn còn có nhiều nhà bác học ở các nước khác nhau đã biến khoa học vật lý phân tử từ một khoa học suy luận thành một khoa học được kiểm tra bằng thực nghiệm.

[11] (trang 57) Boren đã đơn giản một chút cách trình bày vì vậy ta cần nhớ lại ký hiệu và công thức sử dụng trong lý luận nhiệt động học. Entrôpi S là độ đo xác suất nhiệt động học, ω — trạng thái của hệ, công thức liên hệ giữa chúng là:

$$S = k \ln \omega$$

Ở đây, k là hằng số Bônxơman. ω là số trạng thái vi mô khác nhau của hệ trong trạng thái vĩ mô.

Trong công thức này, ω là số nguyên rất lớn vì vậy loga của nó sẽ dương và khi chuyển qua trạng thái có khả năng hơn thì entrôpi theo định nghĩa thông thường đó sẽ không giảm đi mà lại tăng lên.

Trong lý thuyết thông tin cũng sử dụng khái niệm Entrôpi gần giống với khái niệm đưa ra đây.

[12] (trang 58) Sự « dãn nở vũ trụ » được nhắc ở đoạn này là kết luận rút ra từ hiện tượng gọi là « dịch chuyển hồng ngoại ». Hiện nay có nhiều cách giải thích khác nhau về hiện tượng này và vấn đề vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn.

[13] (trang 62). Ở đây tốt hơn cả là không nên nói đến xác suất thập phân mà nên nói đến xác suất của các chữ số trong khai triển thập phân của các số. Ngoài ra, nội dung của tiết này không dẫn đến một sự hiểu lầm nào khác nữa.

[14] (trang 63). Công thức Poatxông cho ta giá trị gần đúng của xác suất xuất hiện k lần ($k = 0, 1, 2...$) một sự kiện trong n lần thử độc lập nếu xác suất xuất hiện sự kiện đó không đổi và rất bé :

$$P(k) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Ở đây $\lambda = Pn$, p là xác suất xuất hiện của mọi sự kiện trong n lần thử. Boren xét ví dụ với $n = 10.000.000.000$,

$P = \dfrac{1}{10.000.000.000}$. Như vậy $\lambda = 1$ và :

$$P(0) \approx e^{-1} \approx 0{,}368,$$

$$P(1) \approx 1.e^{-1} \approx 0{,}368,$$

$$P(2) \approx \frac{e^{-1}}{2!} \approx 0{,}184,$$

$$P(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} \approx 0{,}061,$$

[15] (trang 64) Về khái niệm vô hạn tiềm năng và vô hạn thực tại xin xem các bài báo БСЭ : Sự vô hạn (trong toán học) T. 5. Lý thuyết tập hợp, T. 28.

[16] (trang 65). Những kết quả ở đây rút ra từ cuốn sách nổi tiếng của Boren « Những bài giảng về lý thuyết hàm số » Pari, 1914. Những nhận xét có ý nghĩa đối với vấn đề này có trong tác phẩm của A. Pốt nhi cốp « Mô hình số học của quá trình ngẫu nhiên ».

« Các công trình của Viện Toán Steclôp — T. 57 AHCCC 1960 ».

[17] (trang 65). Điều này nghĩa là mỗi một số không chuẩn có thể đặt vào trong hệ đoạn thẳng mà tổng độ dài có thể bé tùy ý.

[18] (trang 73) Đường kính của thiên hà khoảng 100.000 năm ánh sáng (xem БСЭ) Tuy vậy sự sai khác này không ảnh hưởng đến ước lượng của Boren.

[19] (trang 80) có một ví dụ của Boren (trong cuốn « Ngẫu nhiên ») nói về xác suất nhận được một kiệt tác văn học trong kho tàng văn học thế giới bằng cách cho khỉ đánh máy chữ một cách hú họa.

[20] (trang 96) Ý này cần phải giải thích. Boren muốn nói rằng khi thực hiện các điều kiện hoàn toàn tổng quát, xác suất để sai số đo nằm trong khoảng từ x đến x + dx bằng.

$$P(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{h^2 x^2}{2}}\, dx,$$

Ở đây hằng số $h > 0$ đặc trưng cho chất lượng đo. Nó còn mang tên là số đo độ chính xác.

[21] (trang 98) Quan niệm về xác suất của Midét, bạn đọc có thể tìm xem trong cuốn sách của chính Midét « Xác suất và thống kê » (ГИЗ, 1930 do Khinchin dịch và hiệu đính). Lý luận cơ bản của Midét đòi hỏi 2 yêu cầu sau :

1) Tần suất tương đối của việc xuất hiện một biến cố nào đó trong dãy thử liên tiếp độc lập nhau có một giá trị giới hạn xác định.

2) Các giá trị giới hạn này vẫn không đổi nếu ta chọn ra một dãy con từ tất cả các dãy trên để tính tần suất Khinchin đã viết một bài báo phê phán sâu sắc quan niệm xác suất của Midét « Lý thuyết tần số của Midét và các tư tưởng hiện đại của lý thuyết xác suất ».

Những vấn đề của triết học số 1 và 2 — 1961.

[22] (trang 118) xem [15]

[23] (trang 120). Dưới tên gọi « trò đánh cuộc Pascan » là để chỉ một lý luận độc đáo chứng minh chắc như đinh đóng cột về sự tồn tại của chúa trời theo ý của Bledơ Pascan. Lý luận này được nêu trong tác phẩm « Suy tưởng » của ông. Việc trình bày lý luận đó chi tiết được nêu trong cuốn sách của E. Butru « Pascan và Trò đánh cược Pascan » xuất hiện vào năm 1664 khi ông nghiên cứu cách giải một loạt bài toán nảy ra trong các trò chơi may rủi và sau này là cơ sở để phát triển lý thuyết xác suất. Lý luận mà Pascan đưa ra như thế này. Có tồn tại hay không tồn tại chúa trời. Ở đây trí tuệ không thể giải quyết được gì cả mà ta phải đánh giá khả năng tán thành hoặc không tán thành và cố gắng bảo đảm cho mình kỳ vọng thắng cuộc. Số tiền thắng cuộc do việc thừa nhận chúa trời là vô hạn. Tiền cược của chúng ta dù có lấy hết của cải trên trái đất này cũng chỉ là hữu hạn. Như vậy cần phải công nhận về sự tồn tại của chúa trời ngay cả khi đó chỉ là một điều hư ảo.

Pascan đã sai lầm khi cho rằng tích của không với vô cùng lớn hơn bất cứ một số hữu hạn nào. Điều này có lẽ không cần phải phân tích thêm vì nó là một sai lầm toán học quá ngây thơ. Boren đã chỉ ra sai lầm của Pascan trong bài báo in ở tập thông báo của Viện hàn lâm khoa học Pari.

« Sur les probabilités dénombrables et le pari de Pascal » Comptes Rendus t. 224 (1947) p. p. 77 — 78.

MỤC LỤC

EMIN BOREN

KHẢ NĂNG VÀ CHẮC CHẮN

Người dịch : Hoàng Kiếm
Biên tập : Trương Quang Thiết
Sửa bản in thử : Thanh Quan, Hoàng Kiếm
Trình bày bìa : Dương Đình Giác

In 10.100 cuốn. Khổ 13×19. Tại xí nghiệp in Minh Sang — Hà nội
Số in 06/76. Số xb 5-76/KHKT. Xong và nộp lưu chiểu tháng 01-1976

Giá : 0,40đ