TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
8 2009
Số 386

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Chúc mừng đoàn Việt Nam

TẠI KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ lần thứ 50

50th International Mathematical Olympiad
Bremen | Germany | 2009

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Ứng dụng của một đẳng thức

CHU TUẤN
(GV trường THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Nội)

Trong Kì thi Đại học và Cao đẳng vừa qua, học sinh thường gặp rất nhiều khó khăn trong các bài toán bất đẳng thức (BĐT). Tuy nhiên, nếu nhìn nhận kĩ, chúng ta sẽ thấy các bài toán BĐT này hoàn toàn có thể giải quyết chỉ bằng kiến thức cấp THCS. Bài viết này sẽ khai thác ứng dụng của một đẳng thức khá thú vị. Hi vọng qua bài viết này, bạn đọc sẽ thấy tự tin hơn khi gặp những bài toán BĐT trong các kì thi.

Xuất phát từ hai hằng đẳng thức đơn giản

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab,$$

ta thu được các kết quả sau:

KQ1. $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (a+b)^2$.

KQ2. $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \leq (a+b)^2$.

KQ3. $m(a^2+b^2) + nab =$

$$= \frac{2m+n}{4}(a+b)^2 + \frac{2m-n}{4}(a-b)^2.$$

Ta chứng minh KQ3. Thật vậy, biến đổi vế phải ta được

$$VP = \left(\frac{2m+n}{4} + \frac{2m-n}{4}\right)(a^2+b^2)$$
$$+\left(\frac{2m+n}{4} - \frac{2m-n}{4}\right)2ab = m(a^2+b^2) + nab = \text{VT}.$$

Dưới đây là một số ứng dụng thú vị của các kết quả nhận được ở trên.

★Thí dụ 1. *Cho hai số thực $x \neq 0$, $y \neq 0$ thay đổi và thoả mãn $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$.*

(Đề thi ĐH, khối A, 2006)

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $x + y \neq 0$ và sử dụng KQ 3 với $m = 4$, $n = -4$ ta có

$$4xy(x+y) = 4(x^2+y^2) - 4xy$$
$$= 3(x-y)^2 + (x+y)^2 \geq (x+y)^2 > 0.$$

Suy ra $0 < \dfrac{x+y}{xy} \leq 4$. Vậy

$$A = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 \leq 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 16, đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{2}$. □

★Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn $x(x+y+z) = 3yz$ ta có*

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3.$$

(Đề thi ĐH khối A, 2009)

Lời giải. Biến đổi giả thiết đã cho và sử dụng KQ2 ta có

$$(x+y)(x+z) = 4yz = (y+z)^2 - (y-z)^2 \leq (y+z)^2.$$

Suy ra $3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 3(y+z)^3$ (1)

Ta sẽ chứng minh $(x+y)^3 + (x+z)^3 \leq 2(y+z)^3$.

Thật vậy, ta có

$$(x+y)^3 + (x+z)^3$$
$$= (x+y+x+z)((x+y)^2 + (x+z)^2 - (x+y)(x+z))$$
$$= (x+y+x+z)(y^2 + z^2 + 2x(x+y+z) - 4yz)$$
$$= (x+y+x+z)(y^2 + z^2 + x(x+y+z) - yz)$$
$$= (x+y+x+z)(y+z)^2 \quad (2)$$

Mặt khác, sử dụng giả thiết và KQ 3 với $m = 1$, $n = 14$ ta có

$$(x+y+x+z)^2 = 4x^2 + 4x(y+z) + (y+z)^2$$
$$= 4x(x+y+z) + (y+z)^2 = (y^2+z^2) + 14yz$$
$$= 4(y+z)^2 - 3(y-z)^2 \le 4(y+z)^2.$$

Suy ra $(x+y+x+z) \le 2(y+z)$ (3)

Do đó $(x+y)^3 + (x+z)^3 \le 2(y+z)^3$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra điều phải chứng minh. □

★Thí dụ 3. *Cho các số thực x, y thay đổi thoả mãn $(x+y)^3 + 4xy \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3(x^4+y^4+x^2y^2) - 2(x^2+y^2) + 1$.*

(Đề thi ĐH, khối B, 2009)

Lời giải. Từ giả thiết, sử dụng KQ2 ta có

$$(x+y)^3 + (x+y)^2 - (x-y)^2 \ge 2$$
$$\Rightarrow (x+y)^3 - 1 + (x+y)^2 - 1 \ge (x-y)^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow (x+y-1)((x+y+1)^2+1) \ge 0$$
$$\Rightarrow x+y \ge 1 \quad (1)$$

Từ đó, áp dụng KQ3 với $m = n = 4$, ta có

$$4A = 3(4(x^4+y^4)+4x^2y^2) - 8(x^2+y^2) + 4$$
$$= 3(3(x^2+y^2)^2 + (x^2-y^2)^2) - 8(x^2+y^2) + 4$$
$$= 2(2(x^2+y^2)-1)^2 + 3(x^2-y^2)^2 + (x^2+y^2)^2 + 2$$
$$\ge (x^2+y^2)^2 + 2.$$

Sử dụng KQ2 và (1) ta có

$2(x^2+y^2) = (x+y)^2 + (x-y)^2 \ge (x+y)^2 \ge 1$,

suy ra $4A \ge \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. Do đó $A \ge \frac{9}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{16}$, đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. □

★Thí dụ 4. *Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của*

$$S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy.$$

(Đề thi ĐH, khối D, 2009)

Lời giải. Biến đổi S ta có

$$S = 16x^2y^2 + 12(x^3+y^3) + 9xy + 25xy$$
$$= 16x^2y^2 + 12(x+y)^3 - 36xy(x+y) + 34xy$$
$$= 16x^2y^2 - 2xy + 12 = 16\left(xy - \frac{1}{16}\right)^2 + \frac{191}{16} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng KQ 2 ta có

$$0 \le 4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \le (x+y)^2 = 1$$

suy ra $0 \le xy \le \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{16} \le xy - \frac{1}{16} \le \frac{3}{16}$

$$\Rightarrow 0 \le \left|xy - \frac{1}{16}\right| \le \frac{3}{16} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{191}{16} \le S \le \frac{25}{2}$.

• $S = \frac{191}{16} \Leftrightarrow x + y = 1$ và $xy = \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$; $y = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

• $S = \frac{25}{2} \Leftrightarrow x + y = 1$ và $xy = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min S = \frac{191}{16}$ và $\max S = \frac{25}{2}$. □

★Thí dụ 5. *Cho ba số thực không âm x, y, z thoả mãn $x + y + z = 3$. Hãy chứng minh*

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \ge 3\sqrt{3}.$$

Lời giải. Áp dụng KQ3 với $m = 1$ và $n = 1$ ta được

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2}$$
$$\ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) \quad (1)$$

Tương tự, ta nhận được các BĐT sau

$$\sqrt{y^2+yz+z^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z) \quad (2)$$

$$\sqrt{z^2+zx+x^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x) \quad (3)$$

(Xem tiếp trang 5)

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN PHÚ, HẢI PHÒNG

năm học 2009 - 2010

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Bài 1. (1,0 *điểm*)

Cho $x = \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}-2}$.

Tính $P = \left(x^2+x+1\right)^{2009}$.

Bài 2. (1,5 *điểm*)

Cho hai phương trình

$$x^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

và

$$x^2 - b^2x + bc = 0 \quad (2)$$

Biết phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và phương trình (2) có hai nghiệm x_3, x_4 thoả mãn điều kiện $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Xác định b và c.

Bài 3. (2,0 *điểm*)

1) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

2) Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670.$$

Bài 4. (3,5 *điểm*)

Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ($c < a$, $c < b$). Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn tâm (O) nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AC và BC. Đường thẳng MN cắt các tia AO và BO lần lượt tại P và Q. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng

1) Các tứ giác $AOQM$, $BOPN$, $AQPB$ nội tiếp.

2) Ba điểm Q, E, F thẳng hàng.

3) $\dfrac{MP+NQ+PQ}{a+b+c} = \dfrac{OM}{OC}$.

Bài 5. (2,0 *điểm*)

1) Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$3^x - y^3 = 1.$$

2) Cho bảng ô vuông kích thước 2009×2010, trong mỗi ô lúc đầu đặt một viên sỏi. Gọi T là thao tác lấy 2 ô bất kì có sỏi và chuyển từ mỗi ô đó một viên sỏi đưa sang ô bên cạnh (là ô có chung cạnh với ô có chứa sỏi). Hỏi sau một số hữu hạn phép thực hiện thao tác trên ta có thể đưa hết sỏi ở trên bảng về cùng một ô không?

ĐOÀN THÁI SƠN

(*GV THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng*) giới thiệu

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA năm học 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THTT số 385, tháng 7 năm 2009)

Câu 1.

Quy đồng mẫu số rồi rút gọn ta được

$$M=-\frac{1}{a}\ \left(a\geq\frac{1}{2},\ a\neq 1\right).$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có

$$\frac{7}{x+z}=\frac{a}{x+y}=\frac{7-a}{z-y}=\frac{7+a}{2x+y+z}.$$

Suy ra

$$\frac{49}{(x+z)^2}=\frac{7}{x+z}\cdot\frac{7}{x+z}=\frac{7-a}{z-y}\cdot\frac{7+a}{2x+y+z}$$
$$=\frac{49-a^2}{(z-y)(2x+y+z)}=\frac{13}{(z-y)(2x+y+z)}.$$

Do đó $49-a^2=13 \Leftrightarrow a^2=36$.

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta được $a=6$.

Do đó $M=-\frac{1}{6}$.

Câu 2.

Giả sử ngược lại, trong ba số a, b, c có một số không dương. Không giảm tính tổng quát, giả sử $a\leq 0$. Do $abc>0$ nên $a<0$ và $bc<0$.

Có hai trường hợp: hoặc $a<0$, $b<0$, $c>0$; hoặc $a<0$, $b>0$, $c<0$.

Xét $a<0$, $b<0$, $c>0$ (trường hợp $a<0$, $b>0$, $c<0$ hoàn toàn tương tự).

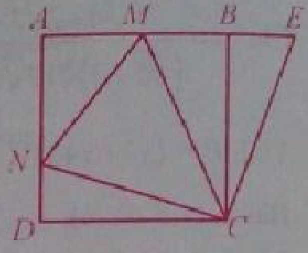
Ta có $a+b<0$; $c>-(a+b)>0$. Do đó $c(a+b)<-(a+b)^2$ hay $ca+cb<-(a+b)^2$.

Suy ra $ab+bc+ca<-\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]<0$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy cả ba số a, b, c đều dương.

Câu 3.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE=DN$ (h. 1).



Hình 1

Ta có $\Delta NDC=\Delta EBC$ (c.g.c), suy ra $CN=CE$ và $\widehat{NCE}=90^\circ$.

Chu vi ΔAMN bằng

$AN+AM+MN=2$

$=AD+AB=AM+MB+AN+ND$, suy ra

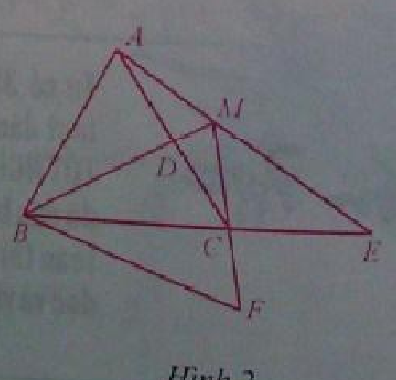
$MN=MB+ND=MB+BE=ME$. Do đó $\Delta CMN=\Delta CME$ (c.c.c.).

Vậy $\widehat{MCN}=\widehat{MCE}=45^\circ$.

Câu 4.

Vì $AD.BE=a^2=AB^2$ nên $\frac{BE}{AB}=\frac{AB}{AD}$.

Lại có $\widehat{BAD}=\widehat{EBA}=60^\circ$ nên $\Delta BAD \backsim \Delta EBA$. Suy ra $\widehat{AEB}=\widehat{DBA}$. Do $\widehat{DBA}+\widehat{DBC}=\widehat{AEB}+\widehat{CAE}=60^\circ$ nên $\widehat{DBC}=\widehat{CAE}$, suy ra tứ giác $ABCM$ nội tiếp được trong đường tròn. Dựng tam giác đều MBF (h. 2).



Hình 2

Ta có

$\widehat{ABM} + \widehat{MBC} = 60° = \widehat{MBC} + \widehat{CBF}$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CBF}$.

Từ đó $\Delta ABM = \Delta CBF$ (c.g.c), suy ra $MA = CF$. Vậy $MA + MC = CF + MC = MF = MB$.

Câu 5.

Giả sử thương của phép chia $x^2 + y^2 + 6$ cho xy là m (m nguyên dương) suy ra

$x^2 + y^2 + 6 = mxy$ hay $x^2 - mxy + y^2 + 6 = 0$ (1)

Trong tất cả các cặp số nguyên dương $(x ; y)$ thỏa mãn (1), giả sử $(x_0 ; y_0)$ là cặp có $x_0 + y_0$ bé nhất. Không giảm tính tổng quát giả sử $x_0 \le y_0$. Xét phương trình

$$y^2 - mx_0y + x_0^2 + 6 = 0 \quad (2)$$

Rõ ràng y_0 là một nghiệm của PT (2). Gọi y_1 là nghiệm còn lại của PT (2). Theo định lí Viete ta có

$$y_0 + y_1 = mx_0;\ y_0y_1 = x_0^2 + 6 \quad (3)$$

Do $(x_0 ; y_0)$ và $(x_0 ; y_1)$ đều thỏa mãn PT (1) mà $x_0 + y_0$ bé nhất nên $0 < x_0 \le y_0 \le y_1$.

- Nếu $x_0 = y_0$ thì từ (1) ta có $m = 2 + \dfrac{6}{x_0^2}$ nguyên dương .

Suy ra $x_0 = 1$; $m = 8$.

- Nếu $y_0 = y_1$ thì từ (3) ta có

$$(y_0 - x_0)(y_0 + x_0) = 6.$$

Điều này không xảy ra vì $(y_0 - x_0)$ và $(y_0 + x_0)$ cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu $x_0 < y_0 < y_1$ thì $y_0 \ge x_0 + 1$ và $y_1 \ge x_0 + 2$. Từ (3) suy ra

$$x_0^2 + 6 \ge (x_0 + 1)(x_0 + 2) \Leftrightarrow 4 \ge 3x_0.$$

Suy ra $x_0 = 1$. Do đó $y_0y_1 = 7$ nên $y_0 = 1$ và $y_1 = 7$. (Mâu thuẫn với giả thiết $x_0 < y_0 < y_1$).

Vậy thương của phép chia $x^2 + y^2 + 6$ cho xy là 8.

PHẠM NGỌC QUANG

(*Sở GD&ĐT Thanh Hoá*) giới thiệu

ỨNG DỤNG... (*Tiếp trang 2*)

Cộng theo vế các BĐT (1), (2) và (3), kết hợp với giả thiết ta có điều phải chứng minh. ❐

★**Thí dụ 6.** *Cho ba số thực không âm x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2+y^2+3xy}+\sqrt{y^2+z^2+3yz}+\sqrt{z^2+x^2+3zx} \le \sqrt{5}(x+y+z).$$

Lời giải. Sử dụng KQ3 với $m = 1$, $n = 3$ ta được

$$\sqrt{x^2+y^2+3xy} = \sqrt{\frac{5}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2}$$

$$\le \sqrt{\frac{5}{4}(x+y)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+y) \quad (1)$$

Tương tự ta có các BĐT sau

$$\sqrt{y^2+z^2+3yz} \le \frac{\sqrt{5}}{2}(x+y) \quad (2)$$

$$\sqrt{z^2+x^2+3zx} \le \frac{\sqrt{5}}{2}(z+x) \quad (3)$$

Cộng theo vế các BĐT (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh. ❐

Cuối cùng, mời các bạn cùng luyện tập ứng dụng các kết quả trên thông qua các bài tập dưới đây.

1. Cho ba số thực dương thoả mãn

$$z(x+y+z) = xy.$$

Chứng minh rằng

$$(x+z)^4 + (y+z)^4 < (x+y)^4.$$

2. Cho ba số dương x, y, z thoả mãn hệ thức $x + y + z = \dfrac{yz}{3x}$. Chứng minh rằng

$$x \le \frac{2\sqrt{3}-3}{6}(y+z).$$

3. Cho ba số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2-bc}$$

$$+ \frac{1}{3}\sqrt{4c^2+4a^2+ca} \ge a+b+c.$$

50th International Mathematical Olympiad
Bremen | Germany | 2009

Kì thi OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 50 - năm 2009

HÀ HUY KHOÁI
(Trưởng đoàn Việt Nam)

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 50 (IMO 2009) diễn ra tại Bremen, Đức, từ ngày 10 đến 22/7/2009. Kì thi lần này đạt hai kỉ lục cao nhất từ trước đến nay : có 104 nước và vùng lãnh thổ tham gia, với 565 thí sinh.

Đoàn Việt Nam tham gia IMO lần thứ 50 gồm GS.TSKH *Hà Huy Khoái* (Trưởng đoàn), Thầy *Nguyễn Khắc Minh* (Phó trưởng đoàn), Thầy *Tô Xuân Hải*, Thầy *Đào Mạnh Thắng*, Thầy *Hạ Vũ Anh*, Thầy *Lê Đức Thịnh* (Quan sát viên) và 6 học sinh: *Hà Khương Duy* (Lớp 12, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), *Phạm Đức Hùng* (Lớp 11, THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng), *Phạm Hy Hiếu* (Lớp 11, ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh), *Nguyễn Hoàng Hải* (Lớp 12, THPT chuyên Vĩnh Phúc), *Tạ Đức Thành*, (Lớp 11, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ), *Nguyễn Xuân Cương* (Lớp 12, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương).

Các nước có đề được chọn là: *Australia* (Bài 1), *Nga* (Bài 2, Bài 6), *Hoa Kì* (Bài 3), *Bỉ* (Bài 4), *Pháp* (Bài 5). Theo đánh giá chung, đề thi năm nay khá hay, đặc biệt là bài 6. Ngay trong ngày chọn đề, GS. *Gronau*, Chủ tịch Hội đồng Giám khảo đã tỏ ý mong muốn kì thi năm nay sẽ chọn được một bài để lại ấn tượng "như bài 6 của kì thi IMO tại Hà Nội". Trong buổi bế mạc IMO 2009, ông cũng nhắc lại là Ban Giám khảo đã chọn được một bài thi hay và khó, "có lẽ chỉ dễ hơn bài 6 ở Hà Nội một chút!". Trên thực tế, chỉ có 3 thí sinh giải được trọn vẹn bài 6 (và là 3 người có tổng số điểm cao nhất kì thi). Bạn *Hà Khương Duy* của Việt Nam được 4 điểm ở bài này, là một trong rất ít người có điểm khác 0 ở bài 6.

Tuân thủ nguyên tắc $\frac{1}{2}$ tổng số thí sinh được nhận huy chương, trong đó tỉ lệ Vàng:Bạc:Đồng là 1:2:3, căn cứ điểm của thí sinh, Ban Giám khảo đã quyết định trao Huy chương Đồng cho những người có tổng số điểm từ 14 đến 23; Huy chương Bạc: tổng điểm từ 24 đến 31; Huy chương Vàng: tổng điểm từ 32 đến 42.

Ba người đạt điểm cao nhất kì thi là: *Makoto Soejima* (Nhật, 42 điểm), *Dongyi Wei* (Trung Quốc, 42 điểm) và *Lisa Sauermann* (Đức, 41 điểm). Bạn *Hà Khương Duy* của đội tuyển Việt Nam được 39 điểm, chỉ xếp sau ba người kể trên.

Sau đây là thành tích của Đội tuyển Việt Nam tại IMO 2009:

Họ và tên	*Điểm bài thi*							*Huy chương*
	Bài 1	*Bài 2*	*Bài 3*	*Bài 4*	*Bài 5*	*Bài 6*	*Tổng điểm*	
Hà Khương Duy	7	7	7	7	7	4	39	Vàng
Phạm Đức Hùng	7	7	7	7	5	0	33	Vàng
Phạm Hy Hiếu	7	7	1	7	7	0	29	Bạc
Nguyễn Hoàng Hải	7	3	1	7	7	0	25	Bạc
Tạ Đức Thành	2	7	0	6	4	0	19	Đồng
Nguyễn Xuân Cương	6	7	0	3	0	0	16	Đồng

Theo quy định, các kì thi IMO không tính giải đồng đội. Tuy nhiên nếu xếp theo tổng điểm thì thứ tự 10 đoàn đầu tiên sẽ là: *Trung Quốc, Nhật Bản, Nga, Hàn Quốc, Triều Tiên, Hoa Kì, Thái Lan, Thổ Nhĩ Kỳ, Đức, Belarus.* Đoàn *Việt Nam* đạt tổng điểm 161, xếp thứ 15. Nếu xếp theo số huy chương Vàng, Bạc, Đồng thì đoàn *Việt Nam* sẽ xếp thứ 8 (cùng với *Italia* và *Romania*).

Trong Kì thi này có thể thấy sự tiến bộ vượt trội của nhiều nước châu Á và Mỹ la tinh: *Nhật Bản, Hàn Quốc, Triều Tiên, Thái Lan, Braxin* (160 điểm, thứ 17), *Peru* (144 điểm, thứ 24). Điều này là kết quả của chính sách bồi dưỡng học sinh giỏi của các nước đó trong những năm gần đây. Chẳng hạn, Nhật Bản mỗi năm chi cho việc tuyển chọn, bồi dưỡng, cử đoàn tham gia Olympic khoảng 450.000 USD; *Hàn Quốc* có "Uỷ ban Olympic" chuyên trách công tác này; *Thái Lan* đầu tư rất lớn để xây dựng một số trường chuyên,... Nếu chúng ta không đẩy mạnh hơn nữa việc bồi dưỡng học sinh giỏi thì chắc chắn trong những năm tới, vị trí của đoàn *Việt Nam* trên "đấu trường IMO" sẽ không thể giữ được như bây giờ (và rõ ràng là đã thấp hơn nhiều so với vị trí của những năm trước 2005).

IMO 2009 là kì thi lần thứ 50 trong lịch sử IMO. Để ghi nhớ sự kiện này, nước chủ nhà đã tổ chức một buổi gặp mặt giao lưu giữa những người tham gia IMO 2009 với nhiều vị khách quý: ba nhà toán học đạt giải thưởng Fields đồng thời đã từng đoạt huy chương IMO là *W.Timothy Gowers, Jean-Christophe Yoccoz, Terence Tao*, một số khác đã từng đoạt huy chương IMO, nay là những nhà toán học nổi tiếng: *Lovasz* (Chủ tịch Hội Toán học thế giới), *Bollobas, Smirnov*, ... Cuộc gặp để lại nhiều ấn tượng đẹp cho các bạn học sinh tham gia IMO lần này. Một bộ phim tài liệu về IMO sẽ được hoàn thành vào khoảng tháng 11/2009.

Có thể nói, IMO 2009 là một trong những kì thi được tổ chức tốt nhất, để lại một dấu ấn đặc biệt trong lịch sử phong trào IMO. Các kì thi IMO tiếp theo sẽ được tổ chức tại các Quốc gia sau: *Kazakhstan* (năm 2010), *Hà Lan* (năm 2011), *Achentina* (năm 2012).

Sau đây là sáu bài toán thi.

NGÀY THỨ NHẤT (15/7/2009)

Bài 1. *Giả sử n là một số nguyên dương và $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geq 2$) là những số nguyên đôi một khác nhau thuộc tập hợp $\{1, \ldots, n\}$ sao cho $a_i(a_{i+1}-1)$ chia hết cho n với mọi $i = 1, \ldots, k-1$. Chứng minh rằng $a_k(a_1-1)$ không chia hết cho n.*

Bài 2. *Giả sử ABC là tam giác với O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Các điểm P và Q là những điểm trong của các cạnh CA và AB tương ứng. Giả sử K, L và M là trung điểm của các đoạn thẳng BP, CQ và PQ tương ứng, Γ là đường tròn đi qua K, L và M. Giả thiết rằng đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn Γ. Chứng minh rằng $OP = OQ$.*

Bài 3. *Giả sử $s_1, s_2, s_3, \ldots$ là dãy tăng thực sự các số nguyên dương sao cho các dãy con*

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ và } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

đều là các cấp số cộng. Chứng minh rằng dãy $s_1, s_2, s_3, \ldots$ cũng là cấp số cộng.

NGÀY THỨ HAI (16/7/2009)

Bài 4. *Giả sử ABC là tam giác với $AB = AC$. Các đường phân giác của các góc CAB và ABC cắt các cạnh BC và CA tại D và E tương ứng. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADC. Giả thiết rằng $\widehat{BEK} = 45^o$. Tìm mọi giá trị có thể của góc CAB.*

Bài 5. *Tìm tất cả các hàm f từ tập hợp các số nguyên dương đến tập hợp các số nguyên dương sao cho, với mọi số nguyên dương a và b, tồn tại tam giác không suy biến với độ dài các cạnh là các số a, $f(b)$ và $f(b + f(a) - 1)$.*

(Tam giác gọi là không suy biến nếu ba đỉnh của nó không cùng nằm trên một đường thẳng.)

Bài 6. *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương khác nhau từng cặp và M là tập hợp gồm $n-1$ số nguyên dương không chứa số $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Một con châu chấu nhảy dọc theo trục thực, xuất phát từ điểm 0 và tiến hành n bước nhảy về bên phải với độ dài các bước nhảy là $a_1, a_2, \ldots, a_n$ theo một thứ tự nào đó. Chứng minh rằng con châu chấu có thể chọn thứ tự các bước nhảy sao cho nó không bao giờ nhảy lên bất kì điểm nào thuộc M.*

Về một bài toán TAM GIÁC LƯỢNG

PHAN CUNG ĐỨC
(GV khối THPT chuyên
ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Việc tìm nhiều lời giải khác nhau cho một bài toán cũng là một phương pháp tốt để rèn luyện kĩ năng làm bài tập. Chúng ta hãy bắt đầu với bài toán:

Cho tam giác ABC với a, b, c là các cạnh tương ứng với các đỉnh A, B, C và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{R^2}.$$

Để có nhiều lời giải đối với bài toán này, chúng ta sẽ sử dụng các kết quả quen thuộc sau và việc chứng minh xin dành cho bạn đọc:

Với mọi tam giác ABC ta có các bất đẳng thức

1) $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$.

2) $R\ge 2r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp).

3) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}}=\frac{9}{a^2+b^2+c^2}.$$

Sử dụng kết quả 1, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

Lời giải 2. Ta luôn có

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge 9.$$

Suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunyakovski

$(ab+bc+ca)^2\le(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)$,

dẫn đến $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$.

Từ đó, sử dụng kết quả 1 ta có đpcm. □

Lời giải 3. Xét $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{2rR}$

(Vì $S_{ABC}=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)r=\frac{abc}{4R}$).

Từ kết quả 2, ta có đpcm.

Lời giải 4. Vì $h_a=\frac{bc}{2R}$, $h_b=\frac{ca}{2R}$, $h_c=\frac{ab}{2R}$

và $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$ nên ta có

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=\frac{1}{2Rr}.$$

Từ đó, sử dụng kết quả 2, ta có đpcm. □

Lời giải 5. Ta thấy BĐT $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{R^2}$

$\Leftrightarrow\frac{2p}{abc}\ge\frac{1}{R^2}=\frac{16S^2}{(abc)^2}$

$\Leftrightarrow abc\ge 8(p-a)(p-b)(p-c)$

(Theo công thức Heron)

Mặt khác, từ bất đẳng thức Cauchy, ta có,

$a=(p-b)+(p-c)\ge 2\sqrt{(p-b)(p-c)}$;

$b=(p-c)+(p-a)\ge 2\sqrt{(p-c)(p-a)}$;

$c=(p-a)+(p-b)\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$.

$\Rightarrow abc\ge 8(p-a)(p-b)(p-c)\Rightarrow$ đpcm. □

Lời giải 6. Sử dụng bất đẳng thức

$(a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow\frac{1}{ab}\ge\frac{4}{(a+b)^2}$, suy ra

(Xem tiếp trang 11)

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN trong Sách giáo khoa

NGUYỄN TẤT THU
(GV trường THPT Lê Quý Đôn, Biên Hòa, Đồng Nai)

Có những bài toán việc giải nó rất đơn giản nên chúng ta thường cho rằng nó không hay, nhưng nếu chúng ta chịu khó nghiên cứu kĩ hơn ta sẽ tìm được nhiều kết quả thú vị.

Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác. Kẻ đường kính BB' của đường tròn (O). Xét mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{B'C}$ ta có bài toán sau.

BÀI TOÁN GỐC. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng H là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi*

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

(Bài toán 3, SGK Hình học 10 nâng cao, trang 21)

Chứng minh. Tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành (h. 1) nên $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C}$.

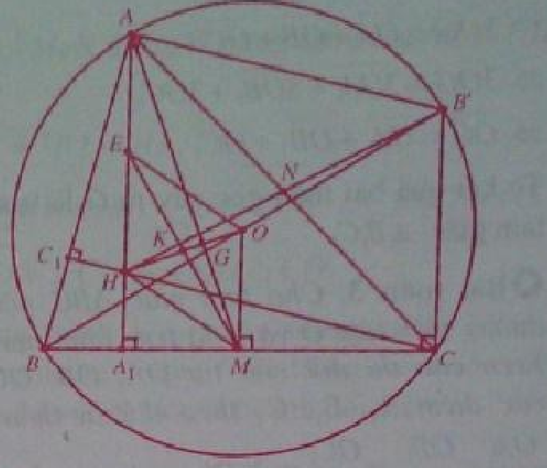
Nếu ta gọi M là trung điểm của BC, thì

$\overrightarrow{B'C}=2\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (1)



Hình 1

Vậy nếu H là trực tâm thì ta có đẳng thức (1).

Giả sử H' là điểm thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Khi đó theo (1) ta có

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH'}$ suy ra $H\equiv H'$.

Mặt khác, nếu gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì có $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Từ đó $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$ suy ra O, G, H thẳng hàng và điểm G chia đoạn OH theo tỉ số $k=-2$. Vậy ta có bài toán sau.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng trong một tam giác, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, trọng tâm G nằm trên một đường thẳng và G chia đoạn OH theo tỉ số k = –2. (Đường thẳng Euler).*

Sử dụng các kết quả trên ta dễ dàng giải được các bài toán sau.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác. Trên các đoạn OA, OB, OC lấy các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thỏa mãn $\dfrac{OA}{OA_1}=\dfrac{OB}{OB_1}=\dfrac{OC}{OC_1}=3$. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$.*

Lời giải. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OB_1}$; $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OC_1}$, mà G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OA_1} + 3\overrightarrow{OB_1} + 3\overrightarrow{OC_1}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

Từ kết quả bài toán gốc suy ra G là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

✪Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và H là trực tâm tam giác. Trên các tia đối của tia OA, OB, OC lấy các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thỏa mãn* $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = 3$. *Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.*

Hướng dẫn. Chứng minh tương tự bài toán 2.

Từ nhận xét ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ (h. 1), nên nếu gọi E là trung điểm của AH thì $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{OM}$. Suy ra tứ giác $EOMH$ là hình bình hành, từ đó ME và HO cắt nhau tại điểm K là trung điểm của mỗi đường. Mặt khác, tam giác EA_1M vuông tại A_1 suy ra K là tâm đường tròn đi qua E, A_1, M. Hơn nữa $KE = \frac{1}{2}OA$. Vậy ta có bài toán sau đây.

✪Bài toán 4. *Chứng minh rằng trong một tam giác bất kì, trung điểm các cạnh, chân các đường cao, trung điểm các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh nằm trên một đường tròn (K) và K là trung điểm của đoạn nối trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, bán kính của đường tròn (K) bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Trở lại bài toán gốc thì tứ giác $AHCB'$ là hình bình hành nên $B'H$ đi qua trung điểm của N của BC. Hay ba điểm B', H, N thẳng hàng. Từ đó ta có bài toán sau đây.

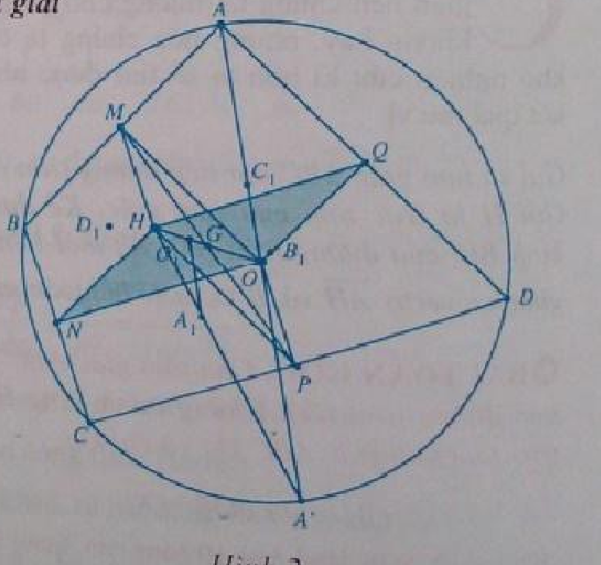
✪Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Kẻ các đường kính AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các đường thẳng A'M, B'N, C'P đồng quy tại một điểm.*

Ta dễ dàng giải quyết được bài toán và mở rộng bài toán này cho hình tứ giác và khối tứ diện.

✪Bài toán 6. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Kẻ các đường kính AA', BB', CC', DD' của đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A', B_1B', C_1C', D_1D' đồng quy tại một điểm.*

Hướng dẫn. Trước hết ta dự đoán điểm mà bốn đường thẳng đồng quy. Ở bài toán 5 ta thấy các đường thẳng $A'M$, $B'N$, $C'P$ đồng quy tại H. Vậy H được xác định như thế nào? Ta chú ý đến hệ thức $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, phải chăng tỉ số $k = -2$ là ngẫu nhiên? Thực chất tỉ số này có được là nhờ vào tỉ số trọng tâm G chia độ dài đường trung tuyến, nhưng trong tứ giác thì trọng tâm chia đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối diện của nó không phải theo tỉ số $k = -2$ mà chia theo tỉ số $k = -1$. Vậy ta suy đoán điểm H được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{GO}$.

Lời giải



Hình 2

Lấy H đối xứng với O qua G (h. 2), khi đó ta có

$$\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$
$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}).$$
$$\overrightarrow{A_1H} = \overrightarrow{A_1A'} + \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_1A'} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}$$
$$= \overrightarrow{A_1A'} + \frac{3}{2}\overrightarrow{A'A_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A'}.$$

Suy ra $A'A_1$ đi qua H.

Chứng minh tương tự thì B_1B', C_1C', D_1D' cũng đi qua H. Vậy bốn đường thẳng nói trên đồng quy tại H.

Giải xong bài toán trên ta sẽ đặt ra câu hỏi vậy thì H có tính chất gì đặc biệt hay không? Dựa vào sự xác định H ta thấy tứ giác $MHPO$ là hình bình hành, nên $OP // MH$ mà $MH \perp CD$ suy ra $OP \perp CD$. Vậy ta dễ dàng giải được bài toán sau.

✪**Bài toán 7.** *Chứng minh rằng đối với một tứ giác nội tiếp thì bốn đường thẳng trong đó mỗi đường thẳng đi qua trung điểm của cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại một điểm.*

Bây giờ ta sẽ mở rộng bài toán 6 ra không gian.

✪**Bài toán 8.** *Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O). Gọi A_0, B_0, C_0, D_0 lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, ACD, ABD, ABC. Kẻ các đường kính AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 của mặt cầu (O). Chứng minh rằng*

a) Các đường thẳng A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0 đồng quy tại điểm H.

b) Các đường thẳng đi qua H và trung điểm của cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

(Đề thi HSG Quốc gia năm học 1998-1999)

Dựa vào cách giải bài toán 6, ta có lời giải bài toán này như sau (Bạn đọc tự vẽ hình).

Lời giải. a) Gọi H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$, khi đó

$$\overrightarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$
$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}).$$

$$\overrightarrow{A_0H} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}$$
$$= \overrightarrow{A_0A_1} + (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_0}.$$

Suy ra A_0, A_1, H thẳng hàng hay A_0A_1 đi qua H. Chứng minh tương tự ta có B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1 cũng đi qua H.

b) Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AB và CD, ta có

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OH}$$
$$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{ON}$$

mà $ON \perp CD$ nên $MH \perp CD$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có các đường thẳng đi qua H và trung điểm của một cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Để kết thúc bài viết, chúng tôi xin nêu ra bài toán sau đây là sự mở rộng của bài toán 4 (bạn đọc xem như một bài tập).

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp.

VỀ MỘT BÀI TOÁN... *(Tiếp trang 8)*

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \ge 4\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right)$$
$$\ge 4.\frac{9}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}$$
$$= \frac{18}{(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca)}$$
$$\ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2}.$$

Sử dụng kết quả 1, ta có đpcm. □

Lời giải 7. Sử dụng định lí sin đối với tam giác ABC, ta thấy bất đẳng thức

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \ge \frac{1}{R^2}$$
$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \ge 4\sin A \sin B \sin C$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \ge \sin A \sin B \sin C$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Sử dụng kết quả 3, ta có đpcm. □

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Ứng dụng phần mềm GEOGEBRA để nâng cao chất lượng giảng dạy bộ môn Toán

NGUYỄN PHƯỚC
(GV trường THCS Lê Hồng Phong, TP. Huế)

GeoGebra là một phần mềm toán học kết hợp hình học, đại số và vi tích phân. Chương trình được phát triển cho việc dạy học Toán trong các trường học bởi Markus Hohenwarter tại Đại học Florida Atlantic. GeoGebra là một hệ thống hình học động, có hai chế độ hiển thị đặc trưng: Một đối tượng trong cửa sổ hình học tương ứng với một đối tượng trong cửa sổ đại số (dưới dạng giải tích). GeoGebra là phần mềm miễn phí với mã nguồn mở. Phần mềm này tải về từ địa chỉ: **http://www.geogebra.at** hoặc **http://www.geogebra.org**

Phần mềm GeoGebra được khởi tạo năm 2001 và đã liên tục phát triển với tốc độ nhanh, phần mềm GeoGebra với phiên bản ***GeoGebra 2.7.1.0*** được phổ biến trên toàn thế giới ngày 01/6/2006, đến năm 2007 đã nâng cấp thành phiên bản ***GeoGebra 3.0.0.0*** và đến nay các bạn có thể tải phiên bản ***GeoGebra 3.2.0.0*** về từ địa chỉ nêu trên.

Đến với phiên bản ***GeoGebra 3.2.0.0*** bạn sẽ thấy sản phẩm của GeoGebra có nhiều tính năng nổi trội so với các phần mềm khác cùng loại:

1. Tất cả các đối tượng đều được hiển thị ở cửa sổ đại số (Algebra window) nên bạn có thể quan sát, điều khiển các đối tượng này một cách độc lập và hoàn toàn chủ động.

2. Các đối tượng hình học, đại số, số học,... đều được thể hiện trong cửa sổ đại số và trên vùng làm việc (drawing pad) với một tên duy nhất (name), điều này cho phép bạn "đại số hóa" tất cả đối tượng trong phần mềm.

3. Cửa sổ nhập lệnh (Input field) cho phép nhập các đối tượng của phần mềm. Đây là một chức năng đặc biệt của phần mềm GeoGebra.

4. Bạn có thể tạo amition cho các đối tượng phụ thuộc bởi các phím + hoặc – hoặc có thể tạo amition cho chúng bởi các slide. Đặc biệt, bạn có thể sử dụng các slide để tạo ra các phép biến hình có độ lớn của góc, vectơ, tỉ số "động".

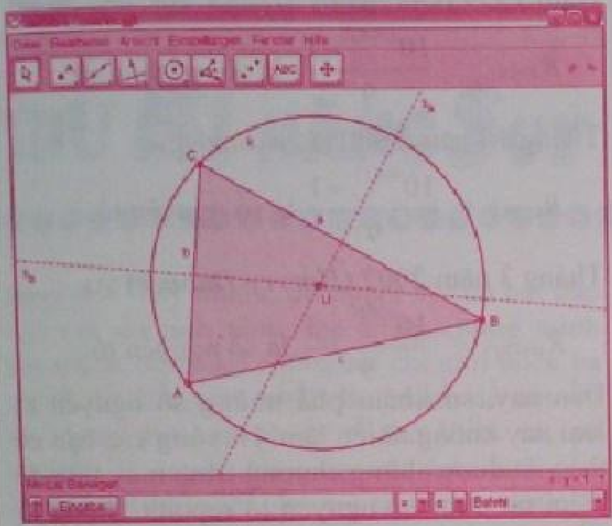
5. Cửa sổ cách dựng hình (Construction Protocol) cho phép bạn quan sát điều chỉnh thứ tự các bước dựng hình, đặc biệt bạn có thể trình diễn lại quá trình dựng hình của bạn từ đầu đến cuối bởi thanh công cụ dựng hình (Navigation bar for construction steps). Chức năng này giúp bạn rèn luyện kĩ năng dựng hình cho học sinh.

6. GeoGebra cho phép bạn chèn các đối tượng ảnh, đối tượng văn bản trên vùng làm việc, đặc biệt bạn có thể điều khiển ảnh chuyển động và trộn văn bản "tĩnh" với văn bản "động".

7. Sản phẩm GeoGeobra có thể xuất ra (export) dưới dạng web, dạng ảnh, ... Tính năng này để chèn các văn bản toán học, đặc biệt tất cả sản phẩm của Geogebra dễ dàng chuyển lên mạng Internet để chia sẽ thông tin hoặc để dùng trong các lớp học trực tuyến....

8. Chức năng Redefine cho phép bạn định nghĩa lại đối tượng mà bạn cần thay đổi.

9. Khi bạn sử dụng để dạy học, bạn có thể không cho hiển thị tất cả những menu, thanh công cụ,... không cần thiết, giao diện lúc đó của phần mềm đóng vai hoàn toàn như bảng đen và phần mềm sẽ "làm thay" từng thao tác vẽ hình của giáo viên.



10. Phần nâng cao giúp bạn điều khiển sự ẩn/hiện các đối tượng một cách tùy ý, màu "động" (Dynamic colors) các đối tượng và ưu tiên "lớp" (layer) cho các đối tượng.

Điều quan trọng nhất là GeoGebra là phần mềm miễn phí với mã nguồn mở, giao diện của chúng rất thân thiện, dễ sử dụng, đã được Việt hóa, ứng dụng rộng rãi trên toàn thế giới. Ngoài ra, Phần mềm GeoGebra đã được đưa vào giảng dạy trong chương trình Tin học THCS (lớp 7 và lớp 8) nên rất thuận tiện để thầy và trò cùng sử dụng.

Hưởng ứng phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực", vừa qua tôi đã ứng dụng phần mềm GeoGebra để xây dựng giáo án thân thiện môn Hình học lớp 9, mục tiêu chính của đề tài nhằm đổi mới phương pháp dạy học để nâng cao chất lượng bộ môn Toán nói chung và cụ thể đối với môn Hình học lớp 9. Sản phẩm của đề tài là giáo án Hình học lớp 9 gồm 4 chương với 32 bài, 70 tiết, gần 3600 file GeoGebra được biên soạn thành website. Thông thường chúng ta phải mất một lượng thời gian lớn để tạo dựng một giáo án điện tử bằng PowerPoint nhưng cơ bản chỉ giải quyết được về mặt hình thức, vì chúng ta chỉ liên kết với phần mềm Toán đối với những nội dung cần thiết và nhược điểm lớn nhất của chúng là "chỉ có một con đường và một lối đi" khi sử dụng nó. Với đề tài này tôi đã vận dụng một cách sáng tạo phần mềm GeoGebra để giải quyết cơ bản những yêu cầu mà giáo viên mong muốn khi tiến hành giảng dạy, vì thế tất cả nội dung bài học được biên soạn bởi phần mềm GeoGebra, riêng phần tóm tắt bài dạy và giáo án có sử dụng PowerPoint (tóm tắt nội dung bài dạy) và Word (thiết kế bài giảng). Giáo án Hình học lớp 9 theo hướng này ta có thể xem nó là giáo án để giảng dạy theo tác giả đã trình bày, cũng có thể xem nó là công cụ để thể hiện vấn đề đổi mới phương pháp dạy học theo hướng tích cực, bạn có thể chỉnh sửa một cách dễ dàng để dùng, tất nhiên bạn phải biết sử dụng phần mềm GeoGebra.

Trong phần trợ giúp của phần mềm chỉ hướng dẫn cho các bạn các phần cơ bản, các tính năng nổi bật ở trên có một phần do tự nghiên cứu để biết, mong rằng các bạn sẽ có nhiều sáng tạo hơn nữa trong việc sử dụng phần mềm GeoGebra. Do khuôn khổ của bài viết nên không thể nêu thí dụ được, các bạn có thể tham khảo sản phẩm GeoGebra (giáo án điện tử Hình học lớp 9 đang biên soạn) tại địa chỉ:

http://thcslehongphong-hue.co.cc

(ở mục giáo án điện tử Toán), bạn cũng có thể download giáo án tại địa chỉ:

http://5url.us/NguyenPhuoc_GADT9

Công trình trên đang biên soạn nhưng đã hoàn thành các bài ở phần học kì I, trong quá trình biên soạn không sao tránh được những sơ suất, rất mong các bạn góp ý để sản phẩm ngày càng được hoàn thiện, mọi thư từ trao đổi xin gửi về địa chỉ email:

nguyenphuoc0802@yahoo.com.vn

SỐ NGUYÊN TỐ GỒM TOÀN CHỮ SỐ 1 và số nguyên tố tuyệt đối

NGUYỄN VĂN NHO
(NXBGD Việt Nam)

1. Số nguyên tố REPUNIT (gồm toàn chữ số 1)

Vào năm 1964, *A. H. Beiler* là người đầu tiên đề cập đến các số nguyên tố loại này, ông gọi nó là *số nguyên tố* ***repunit.*** Repunit là sự lắp ghép giữa hai từ : *repeated* (lặp lại) và *unit* (đơn vị).

Một số chỉ gồm toàn những số 1 (repunit) được kí hiệu là R_m, với m là số tất cả các chữ số 1 có mặt (và chỉ có số 1 mà thôi). Thí dụ,

$R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$, $R_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Chú ý. Các bạn có thể tự chứng minh được hai mệnh đề sau:

a) R_n chia hết cho R_m khi và chỉ khi n chia hết cho m.

b) Nếu R_n là số nguyên tố thì n cũng là số nguyên tố.

Điều đảo lại ở b) không đúng, thí dụ,

$R_3 = 111 = 3.37$, $R_5 = 11111 = 41.271$.

Tuy nhiên, R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317} là các số nguyên tố.

Người ta vẫn chưa chứng minh được các số nguyên tố loại này là hữu hạn hay vô hạn.

Tính nguyên tố của loại số *gồm toàn đơn vị* này được thảo luận nhiều chẳng hạn trong, [S. Yates, *Repunits and repetends*, Star Publ. Co., Boynton Beach, Florida, 1982].

Ngày nay, người ta vẫn đang kiểm tra xem với m bằng bao nhiêu thì R_m là số nguyên tố.

Những kết quả gần đây nhất có thể kể đến như sau :

Năm 1999 (*Dubner*) :

$$R_{49081} = \frac{10^{19081} - 1}{9} \text{ là số nguyên tố.}$$

Tháng 10 năm 2000 (*Lew Baxter*) :

$$R_{86453} = \frac{10^{86453} - 1}{9} \text{ là số nguyên tố.}$$

Tháng 3 năm 2007 (*Harvey Dubner*) :

$$R_{109297} = \frac{10^{10927} - 1}{9} \text{ là số nguyên tố.}$$

Đến nay, sự khám phá những số nguyên tố loại này không nhiều lắm. Hi vọng các bạn có thể viết được những chương trình máy tính để kiểm tra được số nguyên tố repunit khổng lồ hơn con số mà *Harvey Dubner* đã tiến hành vào tháng 3 năm 2007.

2. Số nguyên tố tuyệt đối

Một số nguyên tố vẫn còn là số nguyên tố sau một hoán vị tuỳ ý của các chữ số được gọi là *số nguyên tố tuyệt đối* (absolute prime).

Các số nguyên tố *gồm toàn đơn vị* nói trên là trường hợp đặc biệt của các số nguyên tố tuyệt đối.

Cách đây khoảng 56 năm (1951), *H.-E. Richert* [1] đã giới thiệu loại số nguyên tố này và nó mang tên *số nguyên tố hoán vị* (*permutable prime*). Tuy nhiên, sau này người ta thường dùng thuật ngữ *số nguyên tố tuyệt đối* theo đề xuất của *T.N. Bhagava* và *P.H. Doyle* [2], *A.W.Johnson* [3].

Từ bảng các số nguyên tố bé hơn 10^3, ta tìm được 21 số nguyên tố tuyệt đối ngoài số 11: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991.

Đến nay, người ta đã thiết lập và chứng minh được nhiều kết quả chung quanh *số nguyên tố*

Giải trí toán học

Dưới đây là những dãy số được tạo thành tuân theo một quy luật nhất định. Bạn hãy nghiên cứu kĩ các dãy số đã cho và tìm những số hạng (?) phù hợp nhất với mỗi dãy số đó

Bài 1. Tìm số còn thiếu để hoàn thành dãy số sau:

1, 4, 27, 16, **?**, 36, 343.

Bài 2. Tìm số còn thiếu để hoàn thành dãy số sau:

4, 6, 12, 14, 28, 30, **?** .

Bài 3. Tìm phân số còn thiếu để hoàn thành dãy số sau:

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$, **?** .

PHẠM QUỲNH
(Công ty CP SGD tại TP. Hà Nội)

THỬ KĨ NĂNG SUY LUẬN

tuyệt đối. Tuy nhiên, do phạm vi của bài báo này (và do tính phức tạp trong chứng minh các mệnh đề khác) chúng tôi chỉ giới thiệu ba mệnh đề đơn giản nhất. Ba mệnh đề này có tác dụng thu hẹp phạm vi tìm kiếm các số nguyên tố tuyệt đối giúp các bạn làm gọn thuật toán khi viết chương trình máy tính để tìm kiếm.

Mệnh đề 1. *Biểu diễn thập phân của một số nguyên tố tuyệt đối lớn hơn 5 chỉ có thể chứa các chữ số 1, 3, 7, 9.*

Chứng minh

Nếu một trong các chữ số 0, 2, 4, 5, 6, 8 xuất hiện trong biểu diễn của một số nguyên tố tuyệt đối, thực hiện hoán vị chuyển chữ số đó về cuối thì sẽ được số chia hết cho 2 hoặc 5.

Mệnh đề 2. *Một số nguyên tố tuyệt đối không thể đồng thời chứa các chữ số 1, 3, 7, 9.*

Chứng minh

Gọi N là số đồng thời chứa các chữ số 1, 3, 7, 9. Ta hoán vị để có số

$$N_0 = \overline{c_1 \ldots c_{n-4}7931} = L.10^4 + 7931.$$

Ta có các số

$K_0 = 7931$, $K_1 = 1793$, $K_2 = 9137$, $K_3 = 7913$,

$K_4 = 7193$, $K_5 = 1937$, $K_6 = 7139$
có cùng số dư khi chia cho 7.

Do đó, các số $N_i = L.10^4 + K_i$, với $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ cũng có cùng số dư khi chia cho 7. Vì vậy một trong các số đó phải chia hết cho 7. Suy ra điều phải chứng minh.

Mệnh đề 3. *Trong biểu diễn thập phân, không tồn tại số nguyên tố tuyệt đối nào có chứa ba chữ số a và chứa hai chữ số b, với $a \neq b$.*

Chứng minh

Giả sử số nguyên N chứa các chữ số a, a, a, b, b $(a \neq b)$. Hoán vị các chữ số của N, ta thu được các số nguyên

$$N_{i,j} = \overline{c_1 \ldots c_{n-5}aaaaa} + (b-a)(10^i + 10^j),$$

với $4 \geq i > j \geq 0$.

Do các số nguyên

$10^4 + 10^3$, $10^3 + 10^2$, $10^3 + 10^1$, $10^2 + 10^0$, $10^1 + 10^0$, $10^4 + 10^0$, $10^4 + 10^2$

có số dư tương ứng khi chia cho 7 là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 nên bảy số $(b-a)(10^i + 10^j)$ cũng vậy, với $4 \geq i > j \geq 0$. Suy ra, trong các số $N_{i,j}$ phải có một số là bội của 7. Điều này mâu thuẫn với tính nguyên tố.

Tài liệu tham khảo

[1]. H. E. Richert, *On permutable primtall*, Norsk Matematiske Tiddskrift, 1951, vol.33, pp.50–54.

[2]. T.N. Bhargava and P.H. Doyle, *On the existence of absolute primes*, Mathematics Magazine, 1974, vol.47, p.233.

[3]. A.W. Johnson, *Absolute primes*, Mathematics Magazine, 1977, vol.50, pp. 100–103.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/386. (Lớp 6) Tìm hai chữ số tận cùng của tổng $2008^{2009} + 2009^{2008}$.

PHẠM THỊ THÀNH
(Hà Nội)

Bài T2/386. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi G là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AG = \frac{1}{3}AB$, M là trung điểm cạnh BC, E là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CG. Hai đường thẳng MG và AC cắt nhau tại D. Chứng minh rằng $DE = BC$.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/386. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4x^4 + 2(x^2 + y^2)^2 + xy(x + y)^2 = 132.$$

NGUYỄN VĂN ÁI
(GV THPT Lê Thế Hiếu, Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T4/386. Cho các số a, b, c thoả mãn $a \le b \le c$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab^2c^3$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T5/386. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và đường phân giác trong AD. Gọi E, F thứ tự là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD. Cho $BC = a$. Hãy tính diện tích tứ giác $AEOF$.

PHẠM HUY THÔNG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/386. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, có trọng tâm G nằm trong đường tròn (I). Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

PHẠM THẾ THÍNH
(SV KTĐ-THCN2-K49, ĐHBK Hà Nội)

Bài T7/386. Các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 - 16xyz}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{x + y + z + 4xyz}{1 + 4xy + 4yz + 4zx}.$$

NGUYỄN SƠN HÀ
(GV Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/386. Giải phương trình

$$2^x + 5^x = 2 - \frac{x}{3} + 44\log_2\left(2 + \frac{131x}{3} - 5^x\right).$$

PHẠM QUỐC PHONG
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/386. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của cạnh BC. Vẽ góc vuông PMQ với P thuộc cạnh AB, Q thuộc cạnh AC. Chứng minh rằng

$$PQ^2 \ge AP.\,CQ + AQ.\,BP.$$

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/386. Ta gọi a_n là chữ số khác 0 cuối cùng (tính từ trái sang phải) khi biểu diễn $n!$ trong hệ thập phân. Hỏi dãy số (a_n) với $n = 1, 2, 3, \ldots$ có phải là một dãy số tuần hoàn kể từ một lúc nào đó hay không ? (Dãy số (a_n) gọi là *tuần hoàn* kể từ một lúc nào đó nếu tồn tại các số nguyên dương T và N sao cho $a_{i+T} = a_i \ \forall i \ge N$).

TRẦN BÁ DUY LINH
(SV lớp 30, K34, ĐH Kinh tế, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/386. Cho n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \geq 3$) thoả mãn $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \geq a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

VÕ QUỐC BÁ CẨN

(SV lớp YY0647A1 khoá 32, ĐH Y Dược Cần Thơ)

Bài T12/386. Cho dãy số (x_n) với $n = 1, 2, ...$ được xác định bởi

$x_1 = a\ (a > 1),\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_n - \ln x_n\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\ln\sqrt{x_{2k-1}}$ $(n \geq 2)$.

Tìm $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

TRẦN VŨ HOÀNG ĐẢO

(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/386. Một khối bán cầu tâm O, khối lượng m được đặt sao cho mặt phẳng của khối nằm trên một mặt phẳng nằm ngang. Một vật nhỏ có khối lượng m bay theo phương ngang với vận tốc u tới va chạm với bán cầu tại điểm A sao cho bán kính OA tạo với phương ngang một góc α. Coi va chạm là hoàn toàn đàn hồi. Bỏ qua mọi ma sát.

Hãy xác định vận tốc của khối bán cầu sau khi va chạm.

NGUYỄN XUÂN QUANG

(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/386. Có bốn linh kiện: điện trở R, cuộn dây có độ tự cảm L còn điện trở thuần không đáng kể, hai tụ điện có điện dung tương ứng là C_1 và C_2. Ghép từng linh kiện lần lượt vào nguồn xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng U, tần số f thì ta thấy cường độ dòng điện hiệu dụng qua các linh kiện L, C_1, C_2 có độ lớn theo thứ tự là $I_{C_1} > I_L > I_{C_2}$.

Tìm điều kiện về độ lớn và sự liên hệ giữa C_1, C_2, L để khi ghép nối tiếp R, L, C_1 và khi ghép nối tiếp R, L, C_2, rồi lần lượt đặt vào hai đoạn mạch ghép nối tiếp này nguồn xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng U, tần số f sao cho

a) $\cos\varphi$ bằng nhau.

b) $\cos\varphi$ lớn nhất (khi $\varphi \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$, nghĩa là khi hai mạch chưa có cộng hưởng).

NGUYỄN VAN THUÂN

(GV Trường ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/386. (For 6th grade) Find the last two decimal digits of the sum $2008^{2009} + 2009^{2008}$.

T2/386. (For 7th grade) Let ABC be an isosceles right triangle with the right angle at A. Let G be a point on AB such that $AG = \frac{1}{3}AB$, let M be the midpoint of BC and E be the foot of the altitude from M to CG. The two lines MG and AC meet at D. Prove that $DE = BC$.

T3/386. Find all integer solutions of the equation

$$4x^4 + 2(x^2 + y^2)^2 + xy(x + y)^2 = 132.$$

T4/386. Let a, b and c satisfy the conditions $a \leq b \leq c$ and $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Find the least value of the expression $P = ab^2c^3$.

T5/386. A triangle ABC inscribed in a circle centered at O, radius R, AD is its angle-bisector. Let E, F be the circumcenters of the triangles ABD and ACD, respectively. Given that $BC = a$. Determine the area of the quadrilateral $AEOF$.

T6/386. Let ABC be a triangle with incenter I such that its centroid G lies inside (I)...

(Xem tiếp trang 27)

★Bài T1/382. *Hãy so sánh tổng gồm 2010 số hạng*

$$\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009^2}+\frac{3}{2009^3}+\ldots+\frac{2009}{2009^{2009}}+\frac{2010}{2009^{2010}}$$

với $\frac{2009}{2008^2}$.

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát hơn. So sánh tổng ($n > 1$).

$$S=\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\ldots+\frac{n}{n^n}+\frac{n+1}{n^{n+1}} \text{ với } \frac{n}{(n-1)^2}$$

Biến đổi như sau

$$\frac{S}{n}=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\ldots+\frac{n}{n^{n+1}}+\frac{n+1}{n^{n+2}}.$$

Lấy hiệu

$$S-\frac{S}{n}=\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{n+1}{n^{n+1}}-\frac{n}{n^{n+1}}\right)-\frac{n+1}{n^{n+2}}$$

hay $$\frac{n-1}{n}.S=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^{n+1}}-\frac{n+1}{n^{n+2}} \qquad (1)$$

Đặt $T=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^{n+1}}$

thì từ (1) có $\frac{n-1}{n}.S<T \qquad (2)$

Ta có $\frac{T}{n}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^{n+1}}+\frac{1}{n^{n+2}}$

nên $\frac{n-1}{n}.T=T-\frac{T}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{n+2}}$.

Suy ra $\frac{n-1}{n}.T<\frac{1}{n}$ hay $(n-1)T<1 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) có $\frac{(n-1)^2}{n}.S<1$ hay $S<\frac{n}{(n-1)^2}$.

Cho $n = 2009$ ta thu được

$$\frac{1}{2009}+\frac{2}{2009^2}+\frac{3}{2009^3}+\ldots+\frac{2009}{2009^{2009}}+\frac{2010}{2009^{2010}}$$

$$<\frac{2009}{2008^2}. \square$$

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đã giải với $n = 2009$ và tính $2009S - S = 2008S$. Bạn *Phạm Văn Quyến*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** đã phân tích từng số hạng của tổng trên như sau (với $m = 1, 2, \ldots, 2010$)

$$\frac{m}{2009^m}=\frac{2008^2.m}{2008^2\times 2009^m}$$

$$=\frac{2009\times 2008m+2009-2008m-2009}{2008^2\times 2009^m} \text{ hay}$$

$$\frac{m}{2009^m}=\frac{2008m+1}{2008^2\times 2009^{m-1}}-\frac{2008m+2009}{2008^2\times 2009^m}$$

rồi thay vào tổng đã cho, nhanh chóng dẫn đến kết quả.

2) Bạn *Hoàng Văn Nam*, 6C, THCS Hoằng Thắng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa** có nhận xét đúng rằng bằng cách giải như trên ta có bài toán tổng quát là:

Với hai số nguyên dương a, n mà $a \geq 2$, $n \geq 1$ thì

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^3}+\frac{3}{a^4}+\ldots+\frac{n}{a^{n+1}}<\frac{1}{(a-1)^2}.$$

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Trần Mỹ Hoa, Vũ Thị Mai*, 6A1, *Nguyễn Hoàng Anh*, 6A3, THCS Lâm Thao, TTr. Hùng Sơn, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Thanh Xuân, Đại Thị Hoàng Yến, Phạm Thị Vân Anh, Nguyễn Tú Anh*, 6A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Hùng*, 6C, THCS Hoằng Thắng, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Hồ Đức Hải Quân, Hồ Anh Dũng, Nguyễn Thị An Quỳnh, Nguyễn Đăng Nguyên, Đinh Thị Hồng Ngọc, Hồ Thị Thủy, Lê Hồ Minh Tuấn, Đặng Mỹ Linh, Trần Ngọc Linh, Hoàng Văn Bằng, Trần Đức Lương, Đào Mỹ Linh, Nguyễn Hoàng Thảo Hiền, Hồ Hữu Hải, Đặng Thu Thủy, Nguyễn Việt Khánh* 6A, THCS Hồ Xuân Hương, TTr. Cầu Giát, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Thị Hằng, Phan Hoàng Thanh Tùng*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Thái Nguyễn Ngọc Uyên*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, *Nguyễn Đức Quân, Nguyễn Thị Sương, Nguyễn Xuân Hiền, Nguyễn Thế Duy, Hoàng Thế Anh*, 6B, THCS Xuân Diệu, Can Lộc.

VIỆT HẢI

★Bài T2/382. *Tìm một nghiệm của đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Biết rằng đa thức có nghiệm và $a+2b+4c=-\frac{1}{2}$.*

Lời giải. Ta có giả thiết $a+2b+4c=-\frac{1}{2}$ tương đương với $\frac{1}{2}+a+2b+4c=0$.

Chia cả hai vế của đẳng thức trên cho 4, ta được

$$\frac{1}{8}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3+a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\left(\frac{1}{2}\right)+c=0\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

Vậy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của đa thức. □

Nhận xét. Đây là một bài toán đơn giản nên hầu hết các bạn gửi bài, có lời giải đúng.

Có thể giải bài toán bằng cách

Từ giả thiết suy ra $a=-2b-4c-\frac{1}{2}$; biến đổi

$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2bx-2c(1+2x)\right)$; suy ra $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của $P(x)$.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Mai Phương*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Bắc Giang:** *Lê Thuỳ Linh*, 6A, THCS Hoàng Hoa Thám, *Lê Anh Dũng*, 7A1, THCS Ngô Sĩ Liên, TP Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hương Ly*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong; **Ninh Bình:** *Nguyễn Nhật Dương*, 7C, THCS TTr. Nho Quan; **Nghệ An:** *Nguyễn Hoàng Tâm*, 7B, THCS Diễn Xuân, *Ngô Quang Hà*, 7B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Vương Ngọc Anh*, 7H, THCS Tam Hợp, Quỳ Hợp; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Như Quỳnh*, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Bảo Trâm*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T3/382. *Xét các số thực không âm thay đổi $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ có tổng bằng 1. Đặt $S_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}$ ($k=1, 2, ..., 6$). Gọi $M=\max\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của M.*

Lời giải. Cách 1. Ta có

$S_1=a_1+a_2+a_3+a_4$; $S_2=a_2+a_3+a_4+a_5$;

$S_3=a_3+a_4+a_5+a_6$; $S_4=a_4+a_5+a_6+a_7$;

$S_5=a_5+a_6+a_7+a_8$; $S_6=a_6+a_7+a_8+a_9$

và $\sum_{i=1}^{9}a_i=1$; $a_i\geq 0$ ($i=1, 2, ..., 9$). Suy ra

$$12M\geq 4S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+4S_6$$

$$=4\sum_{i=1}^{9}a_i+a_2+2a_3+3a_4+3a_6+2a_7+a_8\geq 4$$

$$\Rightarrow M\geq\frac{1}{3}.$$

$M=\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a_2=a_3=a_4=a_6=a_7=a_8=0\\ a_1=a_5=a_9=\frac{1}{3}\end{cases}\qquad (*)$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{1}{3}$ khi các số a_i ($i=1, ..., 9$) thỏa mãn điều kiện (*).

Cách 2. Nhận thấy

$$S_1+S_2+S_6=\sum_{i=1}^{9}a_i+a_2+a_3+a_4\geq 1$$

nên $\max\{S_1, S_2, S_6\}\geq\frac{1}{3}$ (1)

Tương tự có $\max\{S_1, S_3, S_6\}\geq\frac{1}{3}$ (2)

$\max\{S_1, S_4, S_6\}\geq\frac{1}{3}$ (3)

$\max\{S_1, S_5, S_6\}\geq\frac{1}{3}$ (4)

Suy ra $M=\max\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}\geq\frac{1}{3}$.

$M=\frac{1}{3}$ khi các BĐT (1), (2), (3), (4) trở thành đẳng thức, tức là các số a_i thỏa mãn điều kiện (*). □

Nhận xét. Với giả thiết $S_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}$ ($k=1, 2, ..., 6$) nên S_i có liên quan đến thứ tự các số a_1, a_2, ..., a_9. Vì vậy không thể coi vai trò của a_1, a_2, ..., a_9 như nhau để giả sử $a_1\geq a_2\geq ...\geq a_9$ như một số bạn đã làm. Các bạn làm theo kiểu này là đã tự bổ sung giả thiết của bài toán.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Khắc Tùng*, THSP Hợp Lý, Thực Sơn; **Quảng Trị:** *Võ Trần Tâm*, 8E, THCS TTr. Gio Linh.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T4/382. *Cho m, n, a, b, c là các số thực thỏa mãn các đẳng thức*

$m^{1000}+n^{1000}=a$; $m^{2000}+n^{2000}=\dfrac{2b}{3}$;

$m^{5000}+n^{5000}=\dfrac{c}{36}$.

Tìm hệ thức giữa a, b, c không phụ thuộc vào m, n.

Lời giải. (*Của hầu hết các bạn*)

Đặt $m^{1000}=x$, $n^{1000}=y \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=\dfrac{2b}{3} \\ x^5+y^5=\dfrac{c}{36}. \end{cases}$

Ta có

- $xy=\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\dfrac{a^2-\dfrac{2b}{3}}{2}=\dfrac{3a^2-2b}{6}$
- $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$$=a^3-3.a.\frac{3a^2-2b}{6}=\frac{2ab-a^3}{2}$$

- $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{36}=\frac{2b}{3}.\frac{2ab-a^3}{2}-\frac{(3a^2-2b)^2}{36}.a$$

$$=\frac{2ab^2-a^3b}{3}-\frac{9a^5-12a^3b+4ab^2}{36}$$

$$=\frac{20ab^2-9a^5}{36}$$

$\Leftrightarrow 9a^5-20ab^2+c=0$.

Đây là hệ thức liên hệ giữa a, b, c không phụ thuộc vào m, n. □

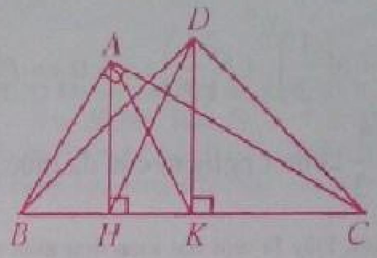
Nhận xét. Tất cả các bạn đều tìm đúng kết quả. Các bạn có lời giải tốt là:

Vĩnh Phúc: *Hà Trung Hiếu*, 8A, THCS Tam Dương, **Hải Dương:** *Đỗ Thị Mai*, *Phạm Thị Hương Liên*, 9A2, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; **Thanh Hóa:** *Lê Viết Nghĩa*, 8A, THCS Hoằng Minh, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu, *Cao Thị Linh Chi*, 8A, *Đậu Phương Thảo*, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Bình Định:** *Lê Như Ngọc*, 9A1, THCS TTr. Bình Định, Quy Nhơn, *Nguyễn Danh Nhân*, 9A2, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; **Quảng Ngãi:** *Hồ Tấn Vũ*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trường Sinh*, 9A, THCS Phan Đình Phùng, TX. Đông Hà; **Khánh Hòa:** *Vũ Ngọc Cương*, 8/6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

TRẦN HỮU NAM

★**Bài T5/382.** *Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A lấy điểm D sao cho DB = DC =* $\dfrac{AB}{\sqrt{2}}$. *Chứng minh rằng BD, DH và HA là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.*

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BC, ta có $DK \perp BC$ (do $DB = DC$). Do đó

$$DB^2-DH^2=(DK^2+BK^2)-(DK^2+HK^2)$$
$$=BK^2-HK^2=AK^2-HK^2=AH^2.$$

Suy ra $DB^2=DH^2+AH^2$.

Vậy BD, DH và HA là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. □

Nhận xét. 1) Trong giả thiết của bài toán chỉ cần $DB = DC$ (không cần điều kiện bằng $\dfrac{AB}{\sqrt{2}}$).

2) Có nhiều bạn tham gia gửi bài, tất cả đều cho lời giải đúng. Trong các lời giải đều không sử dụng giả thiết $DB=DC=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thế Bảo*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Hữu Sơn*, 7A3, THCS Gia Sàng, TP. Thái Nguyên; **Hà Nội:** *Đặng Thắng Lợi*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nam:** *Phạm Hồng Ngọc*, 9C, THCS Nguyễn Hữu Tiến, TTr. Hòa Mạc, Duy Tiên; **Bắc Ninh:** *Trần Thị Ngọc*, 9B, THCS Từ Sơn, TX. Từ Sơn, *Nguyễn Thị Hương Lý*, 7A1, THCS Đông Thọ, Yên Phong, *Ngô Minh Khang*, 9A, THCS Yên Phong, TP. Bắc Ninh, *Hoàng Trương Long*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, *Chu Hương Giang*, 9A, THCS Hàn Thuyên; **Hải Phòng:** *Lê Đức Tiến*, 8A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Minh Thu*, 9A, THCS Tân Lập, Vũ Thư, *Trần Quang Đại*, 9A1, Phân hiệu HSG Kiến Xương; **Nam Định:** *Lê Thị Phương Thanh*, 9A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Yến*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trần Đại Dương*, 9A, THCS Diễn Hùng, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Trường Sinh*, 9A, THCS Phan Đình Phùng, TX. Đông Hà; *Võ Trần Tâm*, 8E, THCS TTr. Gio Linh; **Quảng Ngãi:** *Hồ Tấn Vũ*, 8A, THCS Hành Phước, *Cao*

Thị Ánh Nguyệt, 8A, Nguyễn Bảo Trâm, 7A, Đặng Đình Dương, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** Vũ Ngọc Cương, 8/6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bạc Liêu:** Trần Quang Minh, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu; **Bình Định:** Võ Nhật Nam, 9A1, THCS Ngô Mây, Phù Cát; **Kiên Giang:** Trần Văn Hội, 9/1, THCS Mai Thị Hồng Hạnh, TTr. Giồng Riềng.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T6/382. *Tìm giá trị lớn nhất của x^2+y^2 trong đó x, y là hai số nguyên thuộc [– 2009 ; 2009] và thỏa mãn điều kiện*

$$(x^2-2xy-y^2)^2=4.$$

Lời giải. Nhận thấy nếu $(x\ ;\ y)$ là một nghiệm của bài toán thì $(-x\ ;\ -y)$, $(-y\ ;\ x)$, $(y\ ;\ -x)$ cũng là nghiệm của bài toán, hơn nữa $x=0$ hay $y=0$ đều không là nghiệm của bài toán, vì vậy ta chỉ cần xét $1 \le x,\ y \le 2009$.

Cách 1. Xét điều kiện $(x^2-2xy-y^2)^2=4$ (1)

• Nếu $x=1$, từ (1) suy ra $y=1$.

• Nếu $x>1$, ta sẽ chứng minh $x>2y$.

Thật vậy, giả sử $x<2y$, ta có

$x-2y\le -1 \Rightarrow x(x-2y)<-1$

$\Rightarrow x^2-2xy-y^2<-2 \Rightarrow (x^2-2xy-y^2)^2>4$ (vô lí).

Nếu $x=2y$, từ (1) suy ra $y^4=4$ nên $y \notin \mathbb{Z}$ (vô lí). Do đó $x>2y$.

Mặt khác, dễ thấy nếu $(x\ ;\ y)$ là một nghiệm của (1) thì $(x_1\ ;\ y_1)$ cũng là một nghiệm của PT (1) với $x_1=y$, $y_1=x-2y$.

Tiếp tục như vậy, $(x_2\ ;\ y_2)$ cũng là nghiệm của (1) với $x_2=y_1$, $y_2=x_1-2y_1$, ... Ta nhận thấy $x>y=x_1>y_1=x_2>y_2$ ... Giả sử $(x_0\ ;\ y_0)$ là cặp nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (1). Nếu $x_0>1$ thì theo trên ta lại nhận được cặp nghiệm nhỏ hơn $(y_0\ ;\ x_0-2y_0)$, mâu thuẫn. Vậy $x_0=1$, suy ra $y_0=1$.

Từ đó suy ra các cặp nghiệm thoả mãn điều kiện (1) là

(1 ; 1), (3 ; 1), (7 ; 3), (17 ; 7), (41 ; 17), (99 ; 41), (239 ; 99), (577 ; 239), (1393 ; 577).

Vậy giá trị lớn nhất của x^2+y^2 là 1393^2+577^2.

Cách 2. Theo trên ta chỉ cần xét $1 \le x,\ y \le 2009$. Nhận thấy $x \ge y$, vì nếu ngược lại thì $(x^2-2xy-y^2)^2>(2xy)^2\ge 4$ (trái giả thiết).

Nếu $x=y$ thì $x=y=1$.

Nếu $x>y$ ta đưa PT (1) về dạng PT Pell

$$x^2-2xy-y^2=\pm 2$$

$$\Leftrightarrow t^2-2y^2=\pm 2\ (t=x-y>0).$$

• Xét phương trình $t^2-2y^2=2$ (2)

PT (2) có nghiệm nguyên dương $(t\ ;\ y)$ nhỏ nhất là (2 ; 1). Theo công thức nghiệm của phương trình Pell ta có

$$t_1=2;\ y_1=1;\ t_{n+1}=3t_n+4y_n;\ y_{n+1}=2t_n+3y_n.$$

Do $1\le y\le 2009$, tìm được các cặp nghiệm nguyên dương $(t\ ;\ y)$ của (2) là (2 ; 1), (10 ; 7), (58 ; 41), (338 ; 239), (1970 ; 1393), từ đó tìm được các cặp $(x,\ y)$ thoả mãn PT (1) là (3 ; 1), (17 ; 7), (99 ; 41), (577 ; 239) (3)

• Tương tự, xét $t^2-2y^2=-2$ ta tìm được các cặp nguyên dương $(x,\ y)$ thoả mãn PT (1) là (7 ; 3), (41 ; 17), (239 ; 99), (1393 ; 577) (4)

Từ (3) và (4) suy ra giá trị lớn nhất của x^2+y^2 là 1393^2+577^2.

Nhận xét. Không nhiều bạn tham gia giải bài toán này, đa số dựa theo hai cách trên. Các bạn có lời giải tốt hơn cả là:

Hải Dương: *Nguyễn Tuấn Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Mai Anh Bằng*, 10 Toán, THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; *Trần Thế Khải*, 11 A1 Toán, khối THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thanh Hoá:** *Mai Chí Đạt*, 11E, THPT Hà Trung; **Quảng Ngãi:** *Phan Thành Chí*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** *Huỳnh Công Bằng*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T7/382. *Cho đa thức với hệ số thực* $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *và* $Q(x)=x^2+x+2009$.

Biết rằng đa thức $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt và đa thức $P(Q(x))$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng $P(2009)>\dfrac{1}{4^n}$.

Lời giải. (Theo bạn *Hồ Diên Tuấn Anh*, 11A1 Toán, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **TP. Cần Thơ**).

Do $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$ nên $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Do $P(Q(x))$ vô nghiệm nên $Q(x) \neq x_i, \forall x \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., n)$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 2009 - x_i \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < 2009 - x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

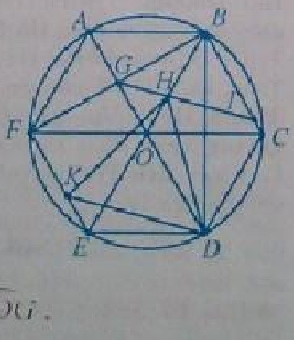
Vậy $P(2009) = (2009 - x_1)...(2009 - x_n) > \dfrac{1}{4^n}$. □

Nhận xét. Bài toán này được nhiều bạn tham gia giải và tất cả các lời giải đều đúng. Các bạn có lời tốt là:

Bắc Ninh: *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành I; **Quảng Ninh:** *Hoàng Minh Tuấn*, THPT chuyên Hạ Long; **Thái Bình:** *Nguyễn Thị Lệ Dung*, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Trương Thị Minh Nguyệt*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Đắk Lắk:** *Lê Quang Hiếu*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T8/382. *Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi G là trung điểm của BF. Lấy điểm I trên cạnh BC sao cho BI = BG, điểm H trên đoạn IG sao cho $\widehat{CDH} = 45^\circ$, điểm K trên cạnh EF sao cho $\widehat{DKE} = 45^\circ$. Chứng minh rằng tam giác DHK là tam giác đều.*



• *Cách 1.* Từ giả thiết $ABCDEF$ là lục giác đều, suy ra $\widehat{BDG} = 30^\circ$, $\widehat{CDG} = 60^\circ$, $DG \perp BF$, $\widehat{GBC} = 90^\circ$.

Từ đó $\widehat{HDG} = \widehat{CDG} - \widehat{CDH} = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ = \dfrac{1}{2}\widehat{BDG}$.

Vậy DH là phân giác của góc $\widehat{BDG}$. Kết hợp với GH là phân giác của góc $\widehat{BGD}$ (do ΔBGI vuông cân nên $\widehat{DGH} = \widehat{HGB}$), suy ra BH là phân giác của góc $\widehat{DBF}$, do đó B, H, O thẳng hàng (O là tâm của lục giác đều).

Hai tam giác DHO và DKE có $DO = DE$, $\widehat{HDO} = \widehat{KDE} = 15^\circ$, $\widehat{HOD} = \widehat{KED} = 120^\circ$ nên chúng bằng nhau (g.c.g), suy ra $HD = KD$.

Lại có $\widehat{HDK} = \widehat{HDO} + \widehat{ODK} = \widehat{ODK} + \widehat{KDE} = \widehat{ODE} = 60^\circ$. Vậy tam giác HDK đều.

• *Cách 2.* Vì $\widehat{FDC} = \widehat{FBC} = 90^\circ$ nên $\widehat{FDH} = \widehat{BGH} = 45^\circ$, do đó tứ giác $GHDF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FHD} = \widehat{FGD} = 90^\circ$ nên tam giác HFD vuông cân

$\Rightarrow H, O, E$ cùng thuộc trung trực của đoạn FD

$\Rightarrow \widehat{EHD} = \dfrac{1}{2}\widehat{FHD} = 45^\circ = \widehat{EKD}$

$\Rightarrow$ tứ giác $EKHD$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HDK} = \widehat{HFK} = 60^\circ$, $\widehat{HKD} = \widehat{HED} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta HKD$ đều. □

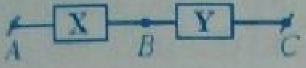
Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đưa ra nhiều cách khác nhau, trong đó có cách giải khá ngắn gọn nhờ áp dụng định lí sin trong các tam giác GHD và EKD để chứng minh $HD = KD$.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Thanh Hóa: *Phan Thanh Hùng*, 10A1, THPT Ngọc Lặc; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Yến*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Xuân Thắng*, *Nguyễn Quang Phú*, *Chế Hoàng Thông*, 10A1, *Nguyễn Đức Trung*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thế Nam Huy*, 10A, THPT Yên Phong; *Nguyễn Tuấn Linh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Thái Nguyên:** *Trần Văn Huy*, 10A1, THPT Chu Văn An; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Lý Phùng Hoàng*, 9A1, PTDL Nguyễn Siêu, Q. Cầu Giấy; **Hải Dương:** *Nguyễn Tấn Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Vũ Văn Trí*, 10 Toán, *Trương Quang Huy*, 11B, THPT Chuyên Lê Hồng Phong; **Lào Cai:** *Phạm Ngọc Điệp*, 11 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hưng Yên:** *Đỗ Văn Anh*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm; **Quảng Ninh:** *Vũ Thị Duyên*, 11 Toán, THPT chuyên Hạ Long; **Thái Bình:** *Trần Quang Đại*, 9A1, Phân hiệu học sinh giỏi, Kiến Xương; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Kim Ngọc Khánh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Ngãi:** *Hồ Tấn Vũ*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 10A1, THPT Lê Hồng Phong, Tuy Hòa; **Tp Hồ Chí Minh:** *Đoàn Minh Luân*, 10 Toán, THPT Năng Khiếu, ĐHQG; *Lương Xuân Vinh*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài L1/382. *Một đoạn mạch xoay chiều ABC chứa hai linh kiện: tụ điện C và cuộn cảm có độ tự cảm L, điện trở thuần r.*



Cho dòng điện xoay chiều tần số $f = 1000$Hz đi qua thì đo được $U_{AB} = 2$V, $U_{BC} = \sqrt{3}$V, $U_{AC} = 1$V và $I = 1$mA. Cho biết, nếu giữ cho U_{AC} luôn luôn bằng 1V, tăng tần số dòng điện lên quá 1000Hz thì thấy dòng điện trong mạch giảm. Hỏi

1) Đoạn mạch AB chứa linh kiện gì? Đoạn mạch BC chứa linh kiện gì ?

2) Tính L và C.

Lời giải. 1) Khi tăng tần số vượt quá 1000Hz thì dòng điện trong mạch giảm nên tại tần số $f = 1000$Hz thì có hiện tượng cộng hưởng.

Gọi U_c và U_d là hiệu điện thế hai đầu tụ điện và cuộn cảm, ta có

$$I = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{U_d}{\sqrt{Z_L^2 + r^2}}.$$

Vì $Z_L = Z_c$ nên ta thấy $U_d > U_c$. Theo bài cho $U_{AB} > U_{BC}$ nên đoạn mạch AB chứa cuộn cảm (có độ tự cảm L và điện trở thuần r), đoạn mạch BC chứa tụ điện.

2) Ta có $Z_c = \frac{U_{BC}}{I} = 1000\sqrt{3} = \frac{1}{2\pi.1000C}$

Suy ra $C = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\mu F$.

Từ điều kiện cộng hưởng ta tính được

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\text{H}. \square$$

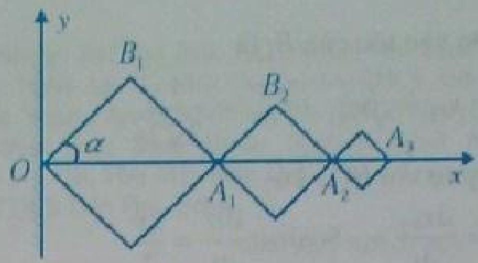
Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Bắc Cạn: *Ngô Việt Hùng*, 12 Toán THPT chuyên Bắc Cạn; **Nam Định:** *Đỗ Thị Ninh*, Xóm 2, Thôn An Nghiệp, Hải Toàn, Hải Hậu; **Phú Thọ:** *Triệu Thị Thuỳ Dung*, Khu 14, Sơn Vy, Lâm Thao; **ĐakLak:** *Bùi Minh Hải* 12B1 THPT Trần Quốc Toản, Đakrar; **Quảng Ngãi:** *Trần Vy Nhật Quang, Nguyễn Tấn Dũng*, 11 Lý THPT chuyên Lê Khiết.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/382. *Một hệ thống các bản lề nối các đỉnh của ba hình thoi có tỉ lệ độ dài các cạnh là 3 : 2 : 1 (như hình vẽ).*

Cho đỉnh A_3 chuyển động với vận tốc v theo phương ngang. Tìm vận tốc của các đỉnh A_1, A_2, B_1 và B_2 tại thời điểm các cạnh của hình thoi vuông góc với nhau.



Lời giải. Theo giả thiết, các hình thoi có tỉ lệ độ dài các cạnh là $l_1 : l_2 : l_3 = 3 : 2 : 1$. Đặt $l_3 = a$, khi đó $l_2 = 2a$, $l_1 = 3a$. Tại thời điểm OB_1 hợp với Ox một góc α, toạ độ của các điểm B_1, A_1, B_2, A_2, A_3 lần lượt là

$x_{B_1} = l_1\cos\alpha = 3a\cos\alpha$, $y_{B_1} = l_1\sin\alpha = 3a\sin\alpha$.

$x_{A_1} = 2l_1\cos\alpha = 6a\cos\alpha$, $y_{A_1} = 0$;

$x_{B_2} = 2l_1\cos\alpha + l_2\cos\alpha = 8a\cos\alpha$,

$y_{B_2} = l_2\sin\alpha = 2a\sin\alpha$;

$x_{A_2} = 2l_1\cos\alpha + 2l_2\cos\alpha = 10a\cos\alpha$, $y_{A_2} = 0$;

$x_{A_3} = 2l_1\cos\alpha + 2l_2\cos\alpha + 2l_3\cos\alpha = 12a\cos\alpha$,

$y_{A_3} = 0$.

Theo giả thiết, vận tốc của A_3 là $v_{A_3} = v$ (1)

Mặt khác $v_{A_3} = \frac{dx_{A_3}}{dt} = -12a\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v}{12a}$ (3)

Vận tốc của A_1 là $v_{A_1} = \frac{dx_{A_1}}{dt} = -6a\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}$,

chú ý đến (3) ta có $v_{A_1} = \frac{v}{2}$.

Vận tốc của A_2 là $v_{A_2} = \frac{dx_{A_2}}{dt} = -10a\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}$,

chú ý đến (3) ta tìm được $v_{A_2} = \frac{5v}{6}$.

Vận tốc của B_1 là $v_{B_1x} = \frac{dx_{B_1}}{dt} = -3a\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}$,

kết hợp với (3) suy ra $v_{B_1x} = \frac{v}{4}$.

$v_{B_1y} = \frac{dy_{B_1}}{dt} = 3a\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$, kết hợp với (3) và chú ý đến việc tính vận tốc ở thời điểm các cạnh của hình thoi vuông góc với nhau ta có

$v_{B_1y} = -\frac{v}{4\tan\alpha} = -\frac{v}{4}$.

Độ lớn vận tốc của B_1 là

$$v_{B_1} = \sqrt{v_{B_{1x}}^2 + v_{B_{1y}}^2} = \frac{v}{2\sqrt{2}}.$$

Tương tự với B_2 ta có

$$v_{B_{2x}} = \frac{dx_{B_2}}{dt} = -8a\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2v}{3}$$

$$v_{B_{2y}} = \frac{dy_{B_2}}{dt} = 2a\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v}{6\tan\alpha} = -\frac{v}{6}.$$

Độ lớn vận tốc của B_2 là

$$v_{B_2} = \sqrt{v_{B_{2x}}^2 + v_{B_{2y}}^2} = \frac{v\sqrt{17}}{6}. \square$$

Nhận xét: Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hoá: *Bùi Thị Thuý*, 10A1, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông, Trần Vy Nhật Quang*, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Tuyến*, 11Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Cà Mau:** *Dương Thái Dương*, 11T2, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN VĂN THUẬN

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

★Bài T3/THCS. *Giải phương trình*

$$\sqrt{\frac{x^3}{3-4x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $0 < x < \frac{3}{4}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3}{3-4x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \frac{x^3}{3-4x} = \frac{(2x+1)^2}{4x}$

$\Leftrightarrow 4x^4 - (3-4x).(2x+1)^2 = 0 \qquad (2)$

Ta có $4x^4 - (3-4x)(2x+1)^2$

$= 4x^4 - (3-4x)(4x^2+4x+1)$

$= 4x^4 + 16x^3 + 4x^2 - 8x - 3$

$= (4x^4 + 16x^3 + 6x^2) - (2x^2 + 8x + 3)$

$= (2x^2 - 1)(2x^2 + 8x + 3)$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow (2x^2 - 1)(2x^2 + 8x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (do $0 < x < \frac{3}{4}$).

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

Nhận xét. Phương trình trên thuộc dạng cơ bản. Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tất cả các bạn đều giải đúng và hầu hết các bạn đều giải theo cách trên. Các bạn học sinh lớp 8 sau có lời giải tốt:

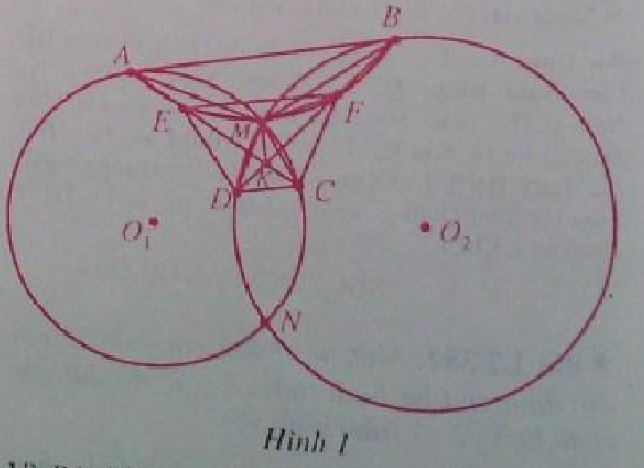
Phú Thọ: *Đinh Anh Hoàng*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Nguyễn Ngọc Hải*, 8B, THCS Nguyễn Thiện Thuật, Khoái Châu; **Vĩnh Phúc:** *Lê Tuấn Anh*, 8A, THCS Đại Đồng, Vĩnh Tường, *Dương Thị Hạnh*, 8C, THCS Lập Thạch, *Phùng Văn Mạnh*, 8A, THCS Vĩnh Yên, *Hà Quang Nhân*, 8B, THCS Như Thụy, Sông Lô, *Nguyễn Việt Hoàng Phi*, 8B, THCS Gia Khánh, Bình Xuyên, *Lê Quang Trọng*, 8C, THCS Vĩnh Tường; **Nam Định:** *Nguyễn Thùy Linh*, 8A4, THCS Hoàng Minh, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thu Hiền*, 8G, THCS Bắc Hồng, TX. Hồng Lĩnh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T4/THCS. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại M, N. Giả sử AB là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) gần điểm M với $A \in (O_1)$, $B \in (O_2)$. Lấy điểm C nằm trên (O_1) và nằm trong (O_2), điểm D nằm trên (O_2) và nằm trong (O_1). AC và BD cắt nhau tại K. Chứng minh rằng nếu CD//AB thì $\widehat{KMC} = \widehat{KMD}$.*

Lời giải. *Cách 1.* (Theo bạn *Lê Quang Trọng*, 8C, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**)

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB theo thứ tự cắt AC, BD tại E, F (h.1).



Hình 1

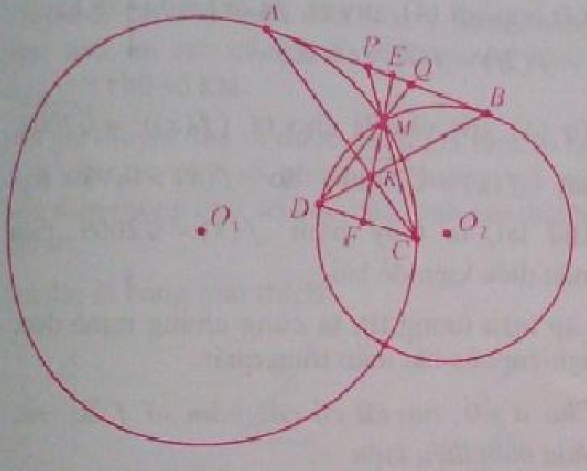
Vì BA tiếp xúc với (O_2) và tứ giác $ABME$ nội tiếp nên $\widehat{KDM} = \widehat{MBA} = \widehat{KEM}$. Do đó, tứ giác $DKME$ nội tiếp.

Vì AB tiếp xúc với (O_1) và tứ giác $BAMF$ nội tiếp nên $\widehat{KCM} = \widehat{MAB} = \widehat{KFM}$. Do đó tứ giác $CKMF$ nội tiếp.

Vì tứ giác $ABFE$ nội tiếp và $AB \mathbin{//} CD$ nên $\widehat{ECD} = \widehat{EAB} = \widehat{EFD}$. Do đó tứ giác $CDEF$ nội tiếp. Suy ra: $\widehat{KMD} = \widehat{KED} = \widehat{KFD} = \widehat{KMC}$.

Cách 2. (Theo bạn *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**).

Gọi P, Q theo thứ tự là giao điểm của CM, DM với AB; còn E, F theo thứ tự là giao điểm của KM với AB, CD (h.2).



Hình 2

Vì PA, QB theo thứ tự tiếp xúc với các đường tròn (O_1), (O_2) nên dễ dàng suy ra

$PA^2 = PM.PC$; $QB^2 = QM.QD$.

Do đó $\left(\dfrac{PA}{QB}\right)^2 = \dfrac{PM}{QM}.\dfrac{PC}{QD}$.

Từ đó, chú ý rằng $PQ \mathbin{//} CD$, ta có

$$\left(\frac{PA}{QB}\right)^2 = \left(\frac{MC}{MD}\right)^2. \text{ Suy ra } \frac{PA}{QB} = \frac{MC}{MD} \quad (1)$$

Mặt khác, vì $AB \mathbin{//} CD$ nên, theo định lí Thales, ta có

$$\frac{EA}{EB} = \frac{FC}{FD} = \frac{EP}{EQ} \Rightarrow \frac{FC}{FD} = \frac{EA-EP}{EB-EQ} = \frac{PA}{QB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{MC}{MD} = \frac{FC}{FD} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KMD}. \square$$

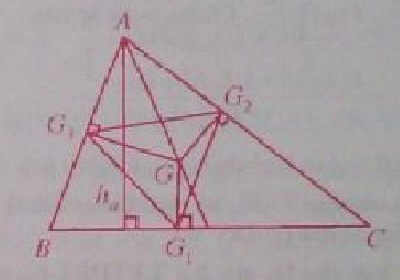
Nhận xét. Ngoài bạn *Trọng* và bạn *Thắng*, Toà soạn nhận được lời giải đúng của năm bạn khác: **Hải Dương:** *Bùi Thế Bin*, 9A2, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nghệ An:** *Hà Nhật Cương*, 9A, THCS Anh Sơn; **Quảng Ngãi:** *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, THCS Mỹ Cát, Phù Mỹ; **Đăk Lăk:** *Phạm Trung Hiếu*, 9D1, THCS Trần Phú, Eakar.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T3/THPT. *Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Gọi G là trọng tâm tam giác đó; G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của G lên BC, CA, AB; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh hệ thức*

$$\frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}.$$

Lời giải



Giả sử h_a, h_b và h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B và C của tam giác ABC; S là diện tích của tam giác ABC. Vì G là trọng tâm ΔABC nên dễ chứng minh được $GG_1 = \dfrac{h_a}{3}$; $GG_2 = \dfrac{h_b}{3}$; $GG_3 = \dfrac{h_c}{3}$.

Lại vì tứ giác AG_3GG_2 nội tiếp, nên $\widehat{G_3GG_2} + \widehat{G_3AG_2} = 180^\circ$. Từ đó suy ra $\sin\widehat{G_3GG_2} = \sin A$. Do đó từ định lí sin, ta có

$$S_{GG_3G_2} = \frac{1}{2}GG_2.GG_3.\sin\widehat{G_3GG_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h_b}{3}\right)\left(\frac{h_c}{3}\right)\sin A = \frac{1}{2}\left(\frac{2S}{3b}\right)\left(\frac{2S}{3c}\right)\left(\frac{a}{2R}\right)$$

$$= \frac{S^2.a}{9bc.R} = \frac{S\left(\dfrac{abc}{4R}\right).a}{9bcR} = \frac{S.a^2}{36R^2} \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$S_{GG_3G_1} = \frac{S.b^2}{36R^2} \ (2); \ S_{GG_1G_2} = \frac{S.c^2}{36R^2} \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$S_{G_1G_2G_3} = S_{GG_3G_2} + S_{GG_3G_1} + S_{GG_1G_2}$$
$$= S\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{G_1G_2G_3}}{S_{ABC}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}. \square$$

Nhận xét. 1) Hai bạn *Vũ Minh Thắng*, 11 Toán 1, khối THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội** và *Nguyễn Việt Khánh*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ** đã đề xuất giải đúng bài toán khái quát hóa sau:

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Giả sử M là một điểm bất kì trong tam giác đó; M_1, M_2, M_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA và AB; A', B', C' lần lượt là giao điểm của AM và BC, BM và AC, CM và AB. Đặt $k_1 = \frac{A'M}{AA'}$, $k_2 = \frac{B'M}{BB'}$, $k_3 = \frac{C'M}{CC'}$. *Chứng minh hệ thức*

$$\frac{S_{M_1M_2M_3}}{S_{ABC}} = \frac{k_2.k_3.a^2 + k_3k_1.b^2 + k_1k_2.c^2}{4R^2}$$

(trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Cách giải của bạn *Thắng* và bạn *Khánh* cũng tương tự như lời giải đã nêu ở trên.

2) Nhiều bạn cho lời giải bài **T3/THPT** bằng cách sử dụng *công thức Euler* (hay còn gọi là *công thức Pedal*) và *định lí Leibnitz* dưới dạng

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

HỒ QUANG VINH

★Bài T4/THPT. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy)f(yz)f(zx)f(x+y)f(y+z)f(z+x) = 2009 \quad (1)$$

với mọi x, y, z dương.

Lời giải. (Theo bạn *Bùi Đăng Khoa*, lớp 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**).

Cho $x = y = z = t$, từ (1) ta thu được

$$f(2t)f(t^2) = \sqrt[3]{2009} \quad (2)$$

Tiếp theo, cho $x = y = t$, $z = 1$, ta được

$$f(t^2)f(2t)(f(t)f(t+1))^2 = 2009.$$

Kết hợp với (2), ta suy ra

$$(f(t)f(t+1))^2 = \sqrt[3]{2009^2}, \text{ hay}$$
$$f(t)f(t+1) = \sqrt[3]{2009}. \quad (3)$$

Tiếp theo, thay t bởi $t+1$ trong (3) rồi lại kết hợp với (3) ta suy ra

$$f(t+2) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (4)$$

Trong (1) chọn $z = 1$ và kết hợp với (3), ta thu được

$$f(xy)f(x+y) = \sqrt[3]{2009} \quad (5)$$

Lần lượt thay $y = 2$ và $y = 4$ trong (5), ta nhận được

$$f(2x)f(x+2) = \sqrt[3]{2009}, \quad (6)$$
$$f(4x)f(x+4) = \sqrt[3]{2009}.$$

Kết hợp với (4), suy ra $f(2x) = f(4x)$ hay

$$f(2t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (7)$$

Từ (4), (6) và (7) cho ta $(f(x))^2 = \sqrt[3]{2009}$, hay $f(x) = \sqrt[6]{2009}$, do $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = \sqrt[6]{2009}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Lập luận tương tự, ta cũng chứng minh được nghiệm của bài toán tổng quát:

Cho $a > 0$, tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện

$$\prod_{i>j;\, i,j=1}^{n} f(x_ix_j)f(x_i+x_j) = a, \forall x_i \in \mathbb{R}_+.$$

Có nghiệm duy nhất là hàm hằng $f(x) \equiv a^{\frac{1}{n(n-1)}}$. $\square$

Nhận xét. Có rất nhiều bạn gửi lời giải bài này tới Tòa soạn. Ngoài bạn Khoa, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Nguyễn Tuấn Ninh, Nguyễn Văn Quý*, 10T THPT chuyên; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Sơn, Mai Anh Bằng*, 10T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Doãn Tiến Đạt*, 12A1, THPT chuyên Toán - Tin ĐHKHTN Hà Nội; **Hà Nam:** *Trần Trung Kiên*, 11T THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12T1, *Vũ Minh Hải*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Ninh Bình:** *Vũ Thanh Tùng*, 11T THPT chuyên Lương Văn Tụy; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Tú*, 11A1 THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thế Công*, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tăng Thành*, 11A1, *Phan Văn Hoàng Vỹ*, 10A, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Cần Thơ:** *Lê Đại Thành, Hồ Diên Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Quảng Ngãi:** *Phan Đình Chí, Lê Nguyên Chánh*, 11T, THPT Chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** *Huỳnh Công Bằng*, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Vinh*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN MẬU

BẠN CÓ BIẾT ?

Cách viết các chữ số Ả-RẬP

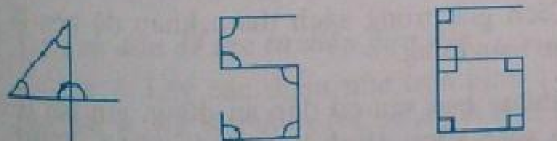
Cách viết các chữ số Ả-rập (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) do những người lái buôn Phênixiêng tạo ra để ghi lại số tài sản của mình. Cách viết này tồn tại từ hàng ngàn năm trước Công nguyên, dạng các chữ số có thay đổi, nhưng về cơ bản vẫn giữ những nét ban đầu.

Vấn đề là cách viết đó dựa trên ý tưởng nào, logic nào, tại sao cách viết chữ số này khác cách viết chữ số kia.

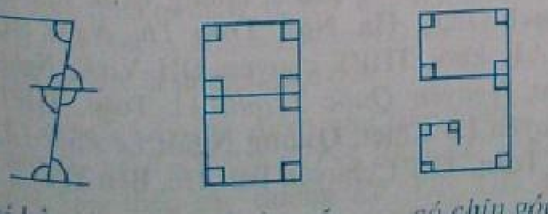
Một giả thuyết đưa ra được đánh giá rất cao là cách viết các chữ số phản ánh lượng mà nó biểu diễn thông qua số góc của hình tạo thành chữ số.

Sau đây là bảng giải thích

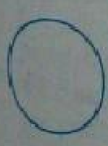
có một góc *có hai góc* *có ba góc*



có bốn góc *có năm góc* *có sáu góc*



có bảy góc *có tám góc* *có chín góc*



không có góc nào (số không)

Bạn có thấy cách giải thích trên là có lí không?

PHAN THANH QUANG
(TP. Hồ Chí Minh)

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

...Let a, b, c be the lengths of the sides BC, AC, AB, respectively. Find the greatest and least value of the following expression

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

T7/386. Let x, y, z be positive numbers satisfying

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1-16xyz}{4}.$$

Find the least value of the expression

$$S=\frac{x+y+z+4xyz}{1+4xy+4yz+4zx}.$$

T8/386. Solve for x

$$2^x+5^x=2-\frac{x}{3}+44\log_2\left(2+\frac{131x}{3}-5^x\right).$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/386. Let ABC be a right triangle, right angle at A, M is the midpoint of BC. Construct a right angle PMQ with $P\in AB$, $Q\in AC$. Prove that

$$PQ^2\ge AP.\,CQ+AQ.\,BP.$$

T10/386. Let a_n be the last non-zero digit (counting from left to right) when expressing $n!$ in the decimal number system. Is the sequence (a_n) for $n=1, 2, 3 \ldots$ periodic? (That is, there exist the positive integers T and N such that $a_{i+T}=a_i\ \forall i\ge N$).

T11/386. Given n non-negative numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n\ge 3)$ satisfying $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$.

Prove that

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\ge a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1.$$

When does equality occur?

T12/386. Let (x_n) $(n=1, 2, \ldots)$ be a sequence given by

$x_1=a\ (a>1)$, $x_2=1$, $x_{n+2}=x_n-\ln x_n\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

Put $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\ln\sqrt{x_{2k-1}}\ (n\ge 2)$.

Find $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Translated by LE MINH HA

Phương trình logarit VÔ NGHIỆM ?

Khi bắt đầu làm toán về phương trình (PT) logarit, nếu không cẩn thận, học sinh có thể mắc những sai lầm khá *tế nhị* dù vấn đề không phải là phức tạp. Tôi xin giới thiệu một tình huống dưới đây.

* Với đề bài: *Giải phương trình*

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_3 2.\log_4 36$$

một học sinh lớp tôi dạy đã giải như sau:

• ĐK $x > 0$.

• PT đã cho tương đương với

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_3 2\left(\frac{1}{2}.2\log_2 6\right).$$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_3 x = \log_3 6$

$\Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 2 = \log_3 2 - \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 2 = -(\log_3 x - \log_3 2)$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x}{2} = -\log_3 \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_{\frac{x}{2}} 2} = -\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}} 3}$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}} 3 = -\log_{\frac{x}{2}} 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}} 3 + \log_{\frac{x}{2}} 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{2}} 6 = 0 \Leftrightarrow 6 = \left(\frac{x}{2}\right)^0 \Leftrightarrow 6 = 1$ (vô lí).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Theo bạn, có vấn đề gì trong lời giải trên không? Còn lời giải của bạn như thế nào?

DƯƠNG THỊ XUÂN AN

(GV THPT chuyên Bến Tre)

Giải đáp bài: KÌ LẠ !

(Đề đăng trên THTT số 383, tháng 5.2009)

• Sai lầm của tác giả trong lời giải thứ hai là việc công nhận đường thẳng d_2: $y = \frac{1}{3}x$ là tiếp tuyến của hyperbol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$ (!).

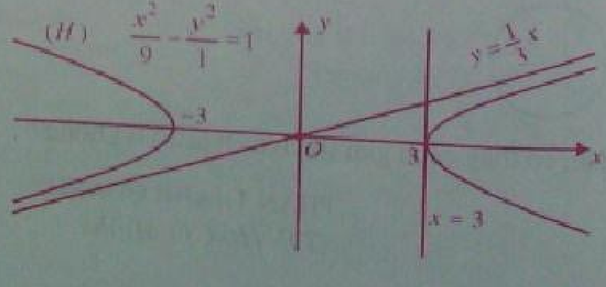
• Nguyên nhân phạm phải sai lầm nói trên ở chỗ khi dùng điều kiện $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$ để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với hyperbol có PT $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tác giả đã quên mất điều kiện $C \neq 0$.

Với $k = \frac{1}{3}$ thì $C^2 = (1 - 3k)^2 = 0$ và trong trường hợp này ta thấy đường thẳng d_2: $y = \frac{1}{3}x$ mà tác giả tìm được chính là một đường tiệm cận của hyperbol (H). Rõ ràng nó không phải là tiếp tuyến của (H).

• Cách giải trong sách tham khảo đã nêu là hoàn toàn đúng.

• Những bạn sau có đáp án đúng, gửi bài về Tòa soạn sớm: *Đinh Vân Anh*, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, Quận Thanh Xuân, *Nguyễn Thế Linh*, 10A5, THPT Phùng Khắc Khoan, Thạch Thất, **Hà Nội**; *Trần Thị Ngọc An*, 11A1, khối THPT chuyên ĐH Vinh; **Nghệ An**: *Nguyễn Quốc Trình*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Lê Phúc Lữ*, 12 Toán, THPT chuyên Bến Tre, **Bến Tre**.

NGỌC HIỂN



Phân chia lục giác đều, ghép thành hình vuông

Dễ dàng phân chia một lục giác đều thành các phần rời nhau rồi ghép tất cả các phần đó lại (không chờm lên nhau) tạo thành một hình bình hành hoặc một hình chữ nhật.

Dành cho bạn đọc

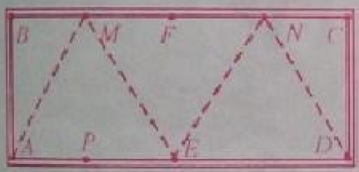
1) Hãy trình bày cách phân chia một lục giác đều thành $k = 6$ phần rồi ghép các phần đó lại thành một hình vuông.

2) Bạn có thể làm như thế với $k = 5$ không?

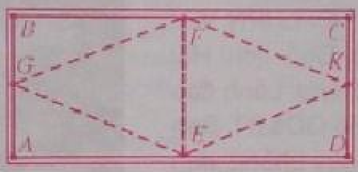
PHI PHI

Giải đáp: TẠO TỨ DIỆN từ tờ giấy hình chữ nhật

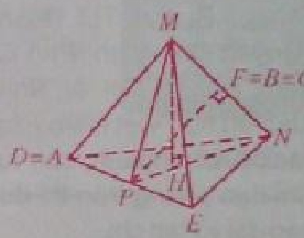
(Đề đăng trên THTT số 382 tháng 4 năm 2009)



Hình 1



Hình 2



Hình 3

1) *Cách dán để tạo tứ diện gần đều*

• *Cách 1.* Lấy các điểm như trên hình 1 sao cho $BM = MF = FN = NC = AP = PE$. Gấp theo các đường AM, ME, EN, ND. Dán AB với DC, AE với DE, BM với FM, CN với FN, ta được hình tứ diện $AEMN$ như ở hình 3.
Dễ thấy $AM = ME = EN = ND$ và $AE = MN$ nên $AEMN$ là tứ diện gần đều.

• *Cách 2.* Lấy các điểm như trên hình 2 sao cho $AG = GB = CK = KD$ và $BF = FC = AE = ED$. Gấp theo các đường EF, GF, GE, KF, KE. Dán AE với DE, BF với CF, AG với BG, CK với DK, ta được hình tứ diện có bốn mặt bằng nhau và bằng các tam giác cân GEF, KEF nên tứ diện tạo thành là tứ diện gần đều (có các cạnh đều khác 16 cm).

2) *Tính thể tích tứ diện AEMN* (h.3)

Ta có $AE = MN = 16$ (cm), $\Delta AME = \Delta DNE$ $\Rightarrow PM = PN = 13$ (cm), $PF \perp MN$.

Kẻ $MH \perp PN$ tại H. Do $AE \perp PM$ và $AE \perp PN$ nên $AE \perp \text{mp}(PMN)$, do đó MN là đường cao của tứ diện $AEMN$. Ta có

$$PF = \sqrt{PM^2 - MF^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105} \text{ (cm)}$$

$$V_{AEMN} = \frac{1}{3}.MH.S_{AEN} = \frac{1}{3}.\frac{MN.PF}{PN}.\frac{PN.AE}{2}$$

$$= \frac{128\sqrt{105}}{3} \approx 437,2(\text{cm}^3).$$

Các bạn có lời giải tốt, được nhận tặng phẩm là: *Đinh Thị Thùy Dung*, 11C9, THPT Đào Duy Từ, **Thanh Hóa** (Bạn *Dung* đã nêu được cả hai cách tạo tứ diện); *Lê Thị Lý* (A), 10B10, THPT Hậu Lộc 2, **Thanh Hóa**; *Hà Đức Giang*, 12A1, THPT B Nghĩa Hưng, **Nam Định**; *Phạm Phú Hoàn*, 11A4, THPT Lý Nhân, **Hà Nam**.

AN MINH

Lễ kí kết kế hoạch phối hợp triển khai phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực" năm học 2009 - 2010

Ngày 3/8/2009, tại Hội trường D205 Bộ Giáo dục và Đào tạo đã diễn ra *Lễ kí kết kế hoạch phối hợp triển khai phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực năm học 2009 - 2010"* giữa năm đơn vị: Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Văn hoá, Thể thao và Du lịch, Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh, Hội Liên hiệp Phụ nữ Việt Nam và Hội Khuyến học Việt Nam. Tham dự buổi lễ có Phó Thủ tướng kiêm Bộ trưởng Bộ GD&ĐT GS. *Nguyễn Thiện Nhân*, các Thứ trưởng Bộ GD&ĐT *Nguyễn Vinh Hiển* và *Nguyễn Thị Nghĩa*, Thứ trưởng Bộ VH, TT & DL *Trần Chiến Thắng*, Bí thư TƯ Đoàn TNCS Hồ Chí Minh *Nguyễn Đắc Vinh*, Phó Chủ tịch Hội LHPN Việt Nam *Hoàng Thị ái Nhiên*, Phó Chủ tịch Hội Khuyến học Việt Nam *Phạm Tất Dong*, Lãnh đạo các bộ, các ngành, các vụ trong Bộ GD&ĐT, Ban Chỉ đạo phong trào thi đua cùng các phóng viên báo đài và tạp chí.

Buổi Lễ kí kết diễn ra vào thời điểm trước thềm năm học mới 2009 - 2010 (năm học thứ hai thực hiện phong trào thi đua này) nhằm có sự chỉ đạo tập trung theo ngành dọc, có sự thống nhất, chặt chẽ giữa các bên; đảm bảo việc thực hiện một cách sáng tạo và có hiệu quả những nội dung của phong trào thi đua *"Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực"* của mọi cơ sở giáo dục và các đơn vị cùng cấp ở địa phương. Mỗi bộ, ngành đóng góp vào phong trào thi đua phù hợp với thế mạnh của mình và thông qua kế hoạch phối hợp để phát huy sức mạnh tổng hợp trên toàn hệ thống chính trị, toàn xã hội trong việc chăm lo sự nghiệp "trồng người", vì tương lai của mỗi gia đình và sự phát triển của đất nước.

PV

Hội thi tin học trẻ toàn quốc lần thứ XV - Năm 2009

Vào các ngày từ 28 đến 30/7/2009 Hội thi Tin học trẻ toàn quốc lần thứ XV do Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Thông tin và Truyền thông, UBND TP. Hà Nội, Đài Truyền hình Việt Nam, Hội Tin học Việt Nam phối hợp tổ chức đã diễn ra tại Thủ đô Hà Nội.

Hội thi năm nay có 220 thí sinh (TS) của 52 tỉnh, thành, ngành tham gia, trong đó có 55TS Tiểu học (Bảng A); 56TS THCS (Bảng B); 85TS THPT (Bảng C); 28TS dự thi phần mềm sáng tạo (PMST) (Bảng D), trong đó có 4 em dự thi cả 4 phần thi chung). Hai TS trẻ tuổi nhất ở Hội thi này là *Nguyễn Đức Minh*, (Lớp 3, TH Điện Biên, **Thanh Hóa**) và *Phạm Thị Thu Trang* (Lớp 3, TH Bình Thuận, **Tuyên Quang**). Có 8 TS là người dân tộc thiểu số. Tổng số PMST gửi về Ban tổ chức là 67 (phần mềm).

Tối ngày 20/7/2009 tại Nhà hát lớn Hà Nội, Ban chỉ đạo Hội thi đã tổ chức lễ Kỉ niệm 15 năm Hội thi Tin học trẻ Toàn quốc và trao 123 giải thưởng cho các thí sinh đoạt giải: *Lê Tự Thành Nhân* (**Đà Nẵng**) đoạt giải Nhất Bảng A, *Vũ Đình Quang Đạt* (**Quảng Ninh**) Nhất Bảng B; *Võ Anh Duy, Nguyễn Hoàng Phương* (**Bà Rịa - Vũng Tàu**) Nhất Bảng C. Kết quả PMST Bảng D như sau: *Phạm Thành Tuấn* (**Đà Nẵng**) Nhất Bảng TH (D1), *Nguyễn Đình Trí Cường* (**Đà Nẵng**) Nhất Bảng THCS (D2); *Võ Lý Minh Nhân* (**Bình Thuận**) Nhất Bảng THPT (D3).

Như vậy trong 15 năm qua Hội thi Tin học trẻ Toàn quốc đã có bước phát triển vượt bậc cả quy mô và chất lượng, góp phần tích cực hỗ trợ, cổ vũ các em học sinh ở các địa phương ứng dụng kiến thức tin học vào sản xuất và đời sống; phát hiện những tài năng tin học trẻ, tạo nguồn nhân lực về công nghệ thông tin cho nước nhà.

LÊ MAI

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 386(8.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

TRƯỜNG HỌC VIỆT NAM tại Biển Hồ, Campuchia

Nhân chuyến tham quan tại Campuchia trong tháng 7 vừa qua, đoàn cán bộ Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam (bao gồm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ, Viện nghiên cứu Sách và Học liệu giáo dục) đã đến thăm và tặng quà cho Trường học Việt Nam.

Ngôi trường được đặt trên một chiếc thuyền nổi ở khu vực Biển Hồ, tỉnh Xiêm Riệp, Campuchia. Trên đó có đủ bảng, bàn ghế cho một lớp học. Trường mới được hoàn thành từ tháng 5/2009 với tổng trị giá 5555 USD do sự đóng góp của các cá nhân, cơ quan, tổ chức từ thiện của Việt Nam. Ban lãnh đạo nhà trường cùng toàn thể gia đình phụ huynh học sinh ở đây vô cùng phấn khởi đã xây dựng được trường học cho trẻ em học tập.

Trường chỉ có hai giáo viên: thầy giáo già Nguyễn Văn Tư làm Hiệu trưởng (nguyên là giáo viên đã nghỉ hưu tại tỉnh Tây Ninh) và thầy giáo trẻ Nguyễn Minh Luân (mới tốt nghiệp Trung học phổ thông 2 năm trước tại tỉnh Tây Ninh). Hai thầy giáo đã tự nguyện sang dạy học từ thiện cho 210 học sinh Việt Kiều. Trường chỉ có ba lớp : Lớp 1 gồm 112 em, lớp 2 gồm 58 em, lớp ghép 3 và 4 gồm 40 em; được chia học làm 3 ca mỗi ngày: từ 8h đến 11h, 11h đến 13h, 15h đến 17h. Tất cả học sinh đều là con các gia đình ngư dân Việt kiều sống trên thuyền với nghề bắt cá, nuôi bè cá. Phương tiện đi lại chính của các em là thuyền, bè. Thầy Hiệu trưởng Nguyễn Văn Tư cho biết các em học sinh ở đây rất ngoan, chịu khó học tập nhưng phần lớn gia đình rất nghèo nên hầu hết chỉ học được lớp 1 và lớp 2 để xoá mù chữ, chỉ một số ít con gia đình khá giả hơn mới theo học lớp 3 và lớp 4. Ông tâm sự : "Tôi tự nguyện sang Biển Hồ, Campuchia để dạy học từ thiện cho con, em người Việt Kiều,để cho con em nhớ lại nguồn gốc của cha ông chúng ta,...!". Ông mong muốn nhiều cá nhân, tổ chức có lòng hảo tâm đóng góp từ thiện để xây dựng nhà trường và tặng quần áo, sách vở, dụng cụ học tập cho học sinh, động viên được nhiều cháu học lên cấp THCS.

Điện thoại Hiệu trưởng (00855)099 811187.

THANH LOAN

TRƯỜNG THCS LÊ HỒNG PHONG - THÀNH PHỐ HUẾ

Địa chỉ 214b Lý Nam Đế, thành phố Huế - Điện thoại 054.3519437
Website: www.thcslehongphong-hue.co.cc

Ông NGUYỄN PHƯỚC
Hiệu trưởng nhà trường

Hội đồng sư phạm nhà trường

Trường THCS Lê Hồng Phong được thành lập vào đầu năm học 2004-2005, tọa lạc trên cánh đồng An Ninh Thượng, phía Tây TP. Huế, tiếp giáp với đường Lý Nam Đế. Lúc mới thành lập trường có tên "Trường THCS Hương Long" và đến tháng 11/2005 được đổi tên "Trường THCS Lê Hồng Phong".

Trên khuôn viên 11.371m^2 với 16 phòng học được xây dựng khang trang theo hình chữ L, đảm bảo quy cách trường THCS. Ban đầu trường có 26 cán bộ, giáo viên, nhân viên và 834 học sinh được phân thành 20 lớp. Sau ba năm học để đảm bảo sự phát triển giáo dục không ngừng, địa phương đầu tư xây dựng thêm khu hiệu bộ tạo thế chữ U hoàn chỉnh. Đến nay, trường có 21 phòng, 20 lớp với 46 cán bộ giáo viên, nhân viên và 732 học sinh.

Trong những năm qua thầy và trò Trường THCS Lê Hồng Phong đã nỗ lực phấn đấu đáp ứng yêu cầu phát triển sự nghiệp giáo dục và đào tạo và đã đạt được những thành tích sau đây:

- Chi bộ nhà trường từ ngày thành lập có 4 đảng viên đến nay phát triển thành 11 đảng viên, hằng năm đều được công nhận Chi Bộ trong sạch, vững mạnh.
- Công đoàn nhà trường ba năm liền được Liên Đoàn Lao Động Tỉnh tặng Bằng khen.
- Đội Thiếu niên Tiền phong luôn được các cấp khen thưởng, trong đó có 3 năm đạt danh hiệu vững mạnh cấp Trung ương.
- Kể từ năm học đầu tiên đến nay Trường đều đạt giải toàn đoàn học sinh giỏi cấp thành phố, đặc biệt năm học 2007-2008 đoạt giải Nhất toàn đoàn, năm học 2008-2009 đoạt 2 Huy chương Đồng trong kì thi giải toán trên mạng do Bộ GD&ĐT tổ chức, đoạt 1 Huy chương Đồng Olympic Toán Tuổi thơ.
- Nhà trường rất quan tâm đến giáo dục toàn diện cho học sinh, các em Trường THCS Lê Hồng Phong không chỉ học giỏi mà còn tham gia các phong trào TDTT rất sôi nổi, mặt mạnh của trường là Cờ vua và Điền kinh. Năm học 2008-2009 Trường đoạt giải toàn đoàn trong Hội Khỏe Phù Đổng cấp thành phố.
- Trường 3 năm liền đạt danh hiệu "Tập thể lao động xuất sắc cấp Tỉnh" và được Bộ GD&ĐT tặng Bằng khen. Năm học 2008-2009 nhà trường được đề nghị đạt danh hiệu "Tập thể lao động xuất sắc" và được nhận Cờ thi đua Tỉnh.
- Năm học 2008-2009 Trường đã tập trung mọi nguồn lực để xây dựng trường trung học đạt chuẩn quốc gia, Hội đồng các cấp kiểm tra đều ghi nhận nhà trường đã đáp ứng được các tiêu chuẩn và đã được UBND Tỉnh Thừa Thiên Huế quyết định công nhận Trường THCS Lê Hồng Phong đạt chuẩn quốc gia giai đoạn 2001-2010.

So với các trường có bề dày thành tích trong Thành phố, những gì thầy và trò Trường THCS Lê Hồng Phong đạt được chỉ là một sự đóng góp nhỏ cho sự phát triển chung của Ngành. Dầu sao đó cũng là niềm tự hào của một ngôi trường vừa tròn 5 tuổi nhưng đã từng bước khắc phục khó khăn vươn lên sánh vai cùng các trường bạn trong Thành phố.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT08M9
Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2009
Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng