BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

12 (246)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ NĂM HỌC 1995 - 1996
- ĐỀ THI TUYỂN SINH TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI HÀ NỘI - 1997
- KHAI THÁC BÀI TOÁN NHƯ THẾ NÀO

Các bạn $12C_1$ trước mùa thi năm 1997

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 NGuyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : HOÀNG LÊ BÁCH

KHAI THÁC BÀI TOÁN NHƯ THẾ NÀO

NGUYỄN HỮU BẰNG
(Trường Bến Thủy, Vinh, Nghệ An)

Khi học toán, làm toán, nhiều bạn thường khai thác từ một bài toán để có được những bài toán mới (không nhất thiết là mới đối với mọi người). Đó là một cách học toán thông minh sáng tạo. Tuy nhiên chúng ta cần suy nghĩ thêm về việc khai thác một bài toán như thế nào để tính sáng tạo được nâng cao. Trong bài này tôi xin trao đổi với các bạn về vấn đề đó thông qua một số bài toán, chúng ta bắt đầu từ bài toán quen thuộc sau :

Bài toán 1 : *Cho số nguyên dương m nguyên tố cùng nhau với 10. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên có dạng* $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ *chia hết cho m, (*$n \in N^*$*).*

Nhiều bạn đã biết cách giải dựa theo nguyên tắc Đirichlê, tóm tắt như sau :

Trong m + 1 số : 1, 11, ... , $\underbrace{11\ldots\ldots1}_{m+1}$ tồn tại hai số khác nhau khi chia cho m có cùng số dư, suy ra hiệu quả hai số này chia hết cho m, mà hiệu đó có dạng

$$11\ldots1 \,.\, 10^k \; (n,\, k \in N^*)$$

Do $(10, m) = 1 \Rightarrow 11\ldots1 \;\vdots\; m \Rightarrow$ (đpcm).

Rõ ràng ta có thể khái quát hóa bài toán 1 để có bài toán :

Cho số nguyên dương m nguyên tố cùng nhau với 10. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên có dạng

$$a_n \ldots a_1a_0a_n \ldots a_1a_0 \ldots a_n \ldots a_1a_0$$

chia hết cho m.

$(a_n \ldots a_1, a_0$ *là các chữ số*, $a_n \neq 0)$

Nhưng phương pháp giải bài toán này cũng tương tự như phương pháp giải bài toán 1. Do đó sự khái thác này là một sự mở rộng đơn giản.

Vậy ta có thể khai thác bài toán 1 theo hướng khác như thế nào ? Có nhiều cách khai thác, chẳng hạn là ta nhận thấy bài toán 1 chỉ đơn thuần nói lên sự tồn tại của số tự nhiên $n \neq 0$ để

$$U_n = \underbrace{11\ldots\ldots1}_{n} \;\vdots\; m \qquad (1)$$

Vậy ta đặt vấn đề xét xem có thể chỉ rõ được một số n cụ thể phụ thuộc m và thỏa mãn (1) hay không ? (vấn đề 1).

Hoặc là để ý rằng $U_n \;\vdots\; \Leftrightarrow U_n \equiv 0 \pmod m$ ta đặt vấn đề phải chăng với mỗi số tự nhiên $r < m$ đều tồn tại số tự nhiên n để

$U_n \equiv r \pmod m$ (vấn đề 2), v.v...

Ta sẽ thấy rằng cách giải quyết hai vấn đề này không chỉ đơn giản dựa vào cách giải quyết bài toán 1. Ta nên xét với trường hợp đặc biệt khi $m = p$ là số nguyên tố lớn hơn 5.

Đối với vấn đề 1, bằng cách thử trực tiếp ta có bảng 1, các số $n(p)$ sao cho

$U_n(p) = \underbrace{11\ldots\ldots1}_{n(p)} \;\vdots\; p$ với $p = 7, 11, 13, 17$:

p	$n(p)$
7	6, 12, 18, ...
11	2, 4, 6, 8, 10, ...
13	6, 12, 18, ...
17	16, 32, 48, ...

Như vậy có $U_6 \;\vdots\; 7, U_{10} \;\vdots\; 11$ $U_{12} \;\vdots\; 13, U_{16} \;\vdots\; 17$, ta dự đoán rằng nếu p là số nguyên tố, $p > 5$ thì :

$$U_{p-1} = \underbrace{11\ldots1}_{p-1} \;\vdots\; p \text{ hay } \frac{10^{p-1}-1}{9} \;\vdots\; p$$

hay chỉ cần chứng minh $10^{p-1} - 1 \;\vdots\; p$ và như vậy ta đề xuất được bài toán mới (thay số 10 bởi số nguyên dương a bất kì nguyên tố cùng nhau với số nguyên tố p) :

Bài toán 2 : *Nếu p là số nguyên tố và* $a \in N$, $(a, p) = 1$ *thì* $a^{p-1} - 1 \;\vdots\; p$.

Đây chính là định lí nhỏ Fecma, các bạn có thể tự giải bài toán này hoặc xem cách giải trong một số sách, báo về số học và có thể mở rộng xét bài toán này cho trường hợp $p = m$ là hợp số, từ đó giải quyết vấn đề 1 ;

Đặt $m = 3^\alpha K$ với $K, \alpha \in N$, $(K, 30) = 1$.

Số nguyên dương n sao cho $U_n \;\vdots\; m$ có thể chọn là $n = 3^\alpha \varphi(k)$ trong đó $\varphi(k)$ là số các số nguyên dương không quá k và nguyên tố cùng nhau với k.

Đối với vấn đề 2, ta cũng có thể lập bảng các số dư của phép chia U_n cho p với $p = 7$, 11, 13 để dự đoán kết quả, tức là dùng phương pháp quy nạp, hoặc có thể suy diễn như sau :

Theo bài toán 1 và bài toán 2 thì ta có thể giả sử q là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho

$U_q \vdots\ p$ (p là số nguyên tố, $p > 5$)

$\Rightarrow p \leqslant p\ - 1.$

Giả sử r_i ($i = \overline{1,q}$) là số dư của phép chia u_i cho p, dễ thấy rằng chúng đôi một khác nhau và nếu $n \equiv i$ (modq) thì $U_n \equiv U_i$ (modq).

Suy ra mỗi số dư của phép chia U_n cho p chỉ nhận một trong q giá trị thuộc tập hợp $\{r_1, r_2, \ldots r_q\} \subset \{0, 1, \ldots, p-1\} = A$. Suy ra trong tập hợp A có $p - q \geqslant 1$ số x thỏa mãn $U_n \not\equiv x$ (modp) $\forall\, n \in$ N. Nói cách khác, không tồn tại $n \in$ N để

$U_n \equiv x$ (modp).

Dễ thấy $x \neq 0$ và 1. Vậy ta có kết quả :

Bài toán 3 : *Nếu cho trước số nguyên tố $p > 5$ thì có ít nhất một số nguyên dương $x = r(p)$ không đổi, với $2 \leqslant r(p) \leqslant p - 1$ sao cho không tồn tại số nguyên dương n nào thỏa mãn* $\underbrace{11\ldots1}_{n} \equiv r(p)$ *(modp).*

Để xem có thể làm chặt thêm điều kiện của $x = r(p)$ hay không, ta xét bảng 2, các số $r(p)$ trong bài toán 3 với p = 7, 11, 13, 17, 19.

p	r(p)
7	3
11	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
13	2, 3, 4, 5, 8, 10, 12
17	15
19	2

Vậy phải chăng ta có :

Bài toán 4. *Nếu cho trước số nguyên tố $p > 5$ thì có một số nguyên dương r không đổi với $2 \leqslant r \leqslant p - 2$ sao cho không tồn tại số nguyên dương n nào thỏa mãn*

$$\underbrace{11\ldots1}_{n} \equiv r \ (modp)$$

Điều đáng lưu ý là ta không sử dụng được cách giải bài toán 3 cho bài toán 4 mặc dù chúng hơi giống nhau. Kết luận trong bài toán 4 yêu cầu ta chứng minh có $2 \leqslant r \leqslant p - 2$ để $\underbrace{11\ldots1}_{n} - r \not\vdots\ p\ \forall\, n \in$ N

$$\text{Ta có : } \underbrace{11\ldots1}_{n} - r = \frac{10^n - (1 + 9r)}{9}$$

nên ta chỉ cần chứng minh $10^n - (9r + 1) \not\vdots\ p$ $\forall\, n \in N$.

Nhưng $10^n \not\vdots\ p$ $\forall n \in N$ nên nếu chứng minh được rằng có $r \in N$, $2 \leqslant r \leqslant p - 2$ sao cho $9r + 1 \not\vdots\ p$ thì bài toán 4 được chứng minh.

Thật vậy, xét p số $9\,k$, ($k = 0, 1, \ldots, p - 1$) khi chia chúng cho p ta được p số dư khác nhau từng đôi một vì $(9, p) = 1$.

Suy ra có số tự nhiên $r \leqslant p - 1$ sao cho

$9r \equiv -1$ (modp) hay $9r + 1 \vdots\ p$, mà p là số nguyên tố, $p > 5$ nên $r \neq 0$, 1 và $p - 1$ Từ đó suy ra đpcm.

Dễ thấy rằng bài toán 4 tương đương với bài toán sau :

Chứng minh rằng nếu cho trước số nguyên tố p với $p > 5$ thì có một số tự nhiên r không đổi với $2 \leqslant r \leqslant p - 2$ sao cho trong tập hợp các số hạng $\underbrace{11\ldots1}_{n} + r$ *(n = 1, 2, ...)*

không có số nào chia hết cho p.

(Đây là bài T2/223 trên THVTT số 223. một bài toán rất có ít bạn giải được !).

Các bạn có thể xét bài toán 4 cho trường hợp p là hợp số để giải quyết phần nào vấn đề 2. Còn có nhiều vấn đề đặt ra từ những điều nêu trên, mong các bạn tìm tòi thêm và mời các bạn giải vài bài toán sau :

1. Cho p là số nguyên tố, $p \geqslant 7$ và $r \equiv 80(p - 7)!$ (modp) Chứng minh rằng $\underbrace{11\ldots1}_{n} - r \not\vdots\ p\ \forall\, n \in N$

2. Chứng minh rằng nếu số nguyên tố $p > 5$ thỏa mãn $\underbrace{11\ldots1}_{d} \not\vdots\ p$ với mọi d là ước khác $p - 1$ của $p - 1$ thì có duy nhất $r \in \{2, 3, \ldots, p - 2\}$ sao cho $\underbrace{11\ldots1}_{n} - r \not\vdots\ p\ \forall\ N$ (2)

3. Tìm tất cả các số nguyên a sao cho $\underbrace{11\ldots1}_{n} - a \not\vdots\ 59\ \forall\, n \in N$

KẾT QUẢ CUỘC THI ... (Tiếp theo trang 13)

Giải ba :

1. *Nguyễn Vũ Hưng*, 12D Chuyên ngoại ngữ, ĐHQG HN
2. *Tô Quang Chính*, 11A PTTH Chuyên Thái Bình
3. *Vũ Duy Hải*, 11 Chuyên lý, Lê Hồng Phong, Nam Định
4. *Nguyễn Quang Trường*, 11 Chuyên lý Phan Bội Châu, Nghệ An
5. *Lê Quang Thành*, 11 Chuyên lý, Chuyên Quảng Trị
6. *Nguyễn Thành Hưng*, 10 Chuyên lý, Lê Khiết, Quảng Ngãi.

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/242. *Cho dãy số : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,... (liên tiếp một số 1, hai số 2, ba số 3, ...). Hỏi số hạng thứ 500 000 là số nào ?*

Lời giải. (dựa theo *Đinh Thị Thêu*, $7B_1$, THCS Lương Thế Vinh, Tx **Thái Bình**).

Đặt n là số hạng thứ 500 000 của dãy đó ($n \in N^*$ (1)). Giả sử trong 500 000 số hạng đầu tiên của dãy có x số hạng bằng n, ta có $1 \leqslant x \leqslant n$. Từ tính chất của dãy số, ta có phương trình :

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + x = 500\,000.$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n : 2 + x = 500000$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n + 2x = 1000000$$

Do $x \geqslant 1$ nên $(n-1)n < 1000000$, suy ra $n < 1001$ (2)

Do $x \leqslant n$ nên $(n-1)n + 2x < (n+1)n$. Do đó $1000\,000 < (n+1)n$, hay $n > 999$ (3). Kết hợp (1), (2), (3), ta có số hạng cần tìm là 1000.

Nhận xét. Có 246 bài giải trong đó có 13 bài giải sai. Có bài thậm chí cho đáp số là 250 000 000 000, bỏ qua điều nhận xét đơn giản là đương nhiên số hạng thứ n phải bé hơn n. Lời giải tốt gồm có :

Thái Bình : *Đinh Thị Thêu* ($7B_1$THCS Lương Thế Vinh, Tx Thái Bình) ; **Thái Nguyên :** *Mai Nguyễn Dũng* ($9A_1$THCS Chu Văn An, Tp Thái Nguyên) ; **Nghệ An :** *Đoàn Hải Giang* (8A Năng khiếu 2.1 Quỳnh Lưu) ; *Nguyễn Hoàng Sài* (9B PTTH Đặng Thai Mai Tp Vinh) ; **Thanh Hóa :** *Tạ Thị Vân Anh* (9A PTCS thị trấn II Hà Trung) ; *Lê Thị Đào* (9B TT Chất Lượng Cao Triệu Sơn) ; *Khương Thu Phương* (8A Năng khiếu Hoằng Hóa) ; **Hải Dương :** *Nguyễn Phương Thảo* (9 Toán PTTH Nguyễn Trãi, Tx Hải Dương) ; **Bắc Giang :** *Dương Mạnh Hồng, Vũ Chí Minh* (9A THCS thị trấn Hiệp Hòa) ; **Hà Nội :** *Lê Minh Đức* (61 PTCS Nguyễn Trường Tộ).

DẶNG VIẾN

Bài T2/242 : *a, b, c là ba số tùy ý thuộc $[\alpha ; \beta]$ ($\alpha < \beta$) và thỏa mãn điều kiện : $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$ với $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$*

Lời giải : Nhiều bạn có nhận xét : không cần tới giả thiết $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ (một số bạn không dùng giả thiết này nhưng lại không bày tỏ ý kiến của mình ?). Sau đây là lời giải không cần giả thiết $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$:

Vì $\alpha \leqslant a ; b ; c \leqslant \beta$ nên :

$$(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha) + $$
$$+ (\beta - a)(\beta - b)(\beta - c) \geqslant 0$$

$\Rightarrow ab + bc + ca - (a+b+c)(\alpha+\beta) + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geqslant 0$. Nhân hai vế với 2 rồi cộng từng vế nhận được với $a^2 + b^2 + c^2$ ta có :

$$(a+b+c)^2 - 2(a+b+c)(\alpha+\beta) +$$
$$+ (\alpha+\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$$

$\Rightarrow (a+b+c-\alpha-\beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$

Nếu $\gamma \in [\alpha ; \beta]$ thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $(a ; b ; c$ **là một hoán vị của** α, β, γ.

Nếu $\gamma \notin [\alpha ; \beta]$ thì đẳng thức không xảy ra.

Nhận xét :

1) Có bạn nhận xét sai : $\gamma \in [\alpha ; \beta]$ thì bất đẳng thức không đúng.

2) Có bạn mắc sai lầm : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpski dẫn đến :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

và $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqslant \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3}$

để từ đó suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (vì $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$) (?)

3) Một số bạn chia thành quá nhiều trường hợp nên lời giải quá phức tạp.

4) Các bạn có lời giải và nhận xét tốt là : *Kim Đình Thái, Nguyễn Tuấn Tài*, 8B, Chuyên Yên Lạc (**Vĩnh Phúc**). *Vũ Anh Tuấn*, 9T, Năng khiếu Kiến Xương (**Thái Bình**). *Trần Đức Thịnh*, 9A6, Trần Đăng Ninh (**Nam Định**). *Nguyễn Tiến Khải*, 8J, Trần Hưng Đạo (**Quảng Ngãi**). *Nguyễn Trung Quân*, 9T, Năng khiếu Ý Yên (**Nam Định**). *Vũ Thành Long*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách (**Hải Dương**). *Trần Tuấn Anh*, 9T, Lê Quý Đôn (**Khánh Hòa**)....

5) Lưu ý : một số bạn không ghi đủ họ và tên, lớp, trường, huyện, tỉnh ở từng bài giải nên *không thể* **đoán** *là lời giải của ai* ! Mong các bạn lưu ý.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/242 : *Giải hệ phương trình sau :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2} & (1) \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải : của *Kim Đình Thái*, 8B, Chuyên Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. Ta có : (2) $\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x - y^2 - 2xy + 2 = 0$ (3)

(1) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 1$ (4)

Từ (3) và (4) ta có :

$$(4x^4 - 4x^3 + x^2) + (4x^2 - 4x + 1) +$$
$$+ (y^2 - 2xy + x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x-1)^2 +$$
$$+ (2x-1)^2 + (y-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2(x^2+1) + (y-x)^2 = 0 \quad (5)$$

Do $(2x-1)^2 \geqslant 0$; $x^2 + 1 > 0$; $(y-x)^2 \geqslant 0$ nên

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 = 0 \\ (y-x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta rút ra $x = y = \dfrac{1}{2}$

Thử lại ta thấy nghiệm $x = y = \dfrac{1}{2}$ thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Nhận xét : 1. Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Ngọc Thắng, Bùi Lệ Hằng*, 9A₁, Trường CLC Phong Châu ; *Nguyễn Hải Âu*, 9A, PTCS Thanh Ba, **Phú Thọ**. *Trần Gia Khánh, Nguyễn Đức Vinh*, 8B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. *Đào Thị Hương Giang*, 7B, Chuyên Quốc Oai, **Hà Tây**. *Phạm Huy Nam*, 9B, THCS Mĩ Hương, Gia Lương, **Bắc Ninh**. *Trần Thế Hiển*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, **Hà Nội**. *Lại Đức Phương*, 9A, Nguyễn Khuyến, Bình Lục, **Hà Nam**. *Trịnh Quang Minh, Lê Tuấn Anh*, 9B, CLC Triệu Sơn ; *Trần Thị Hữu Ái*, 10C6, Bỉm Sơn, *Nguyễn Thùy Linh*, 9A, NK Hoằng Hóa ; *Lê Anh Sơn*, 9C, TT. CLC, **Thanh Hóa**. *Lê Minh Hà*, 10A9, *Nguyễn Xuân Ôn*, Diễn Châu ; *Phan Huy Hoàng*, 9T, Phan Bội Châu, **Nghệ An**. *Nguyễn Huy Diễn*, 9T2, Năng Khiếu, **Hà Tĩnh**. *Võ Trung Thu*, 9A, Trương Quang Trọng, Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi**. *Trương Yến Nhi*, 8A ; *Trần Thế Minh*, 9A, Chuyên, **Bạc Liêu**.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/242 : *Cho một hình chữ nhật có chu vi là P và diện tích S. Hãy chứng minh*

$$P \geq \frac{32S}{2S + P + 2}$$

Lời giải : Gọi hai cạnh hình chữ nhật là a và b (a ; $b > 0$). Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương ta có :

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$a + 1 \geq 2\sqrt{a}$

$b + 1 \geq 2\sqrt{b}$

Suy ra $(a + b)(a + 1)(b + 1) \geq 8ab$

$\Rightarrow (a + b)(ab + a + b + 1) \geq 8ab$

$$\Rightarrow 2(a + b) \geq \frac{32ab}{2ab + 2(a + b) + 2}$$

Hay $P \geq \dfrac{32S}{2S + P + 2}$

Dấu = xảy ra khi $a = b = 1$.

Nhận xét :

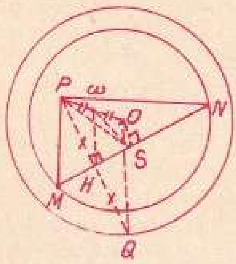
Giải tốt bài này có các bạn :

Trần Sơn Đông, 9C PTCS Điện Biên **Yên Bái** : Một bạn không đề tên ; **Thái Nguyên** : *Mai Nguyên Dũng, 9A1 THCS Chu Văn An, Thái Nguyên* ; **Quảng Ninh** : *Đỗ Quang Khánh*, 7A2 Trọng điểm Uông Bí, **Hải Phòng** : *Trần Mai Anh, Vũ Thanh Bình* 8T PTCS Chu Văn An, *Nguyễn Hoàng Long*, 9A1, PTCS Hồng Bàng, **Bắc Giang** : *Nguyễn Tuấn Trung*, 9T NK B6, **Bắc Ninh** : *Hoàng Tùng*, 9 NK Tiên Sơn ; **Hải Dương** : *Hoàng Thị Nguyệt Ánh*, 9A, *Nguyễn Phương Thảo, Nguyễn Phi Hùng*, 9T Nguyễn Trãi, **Hưng Yên** : *Đào Thị Phương Thuận*, 9 Văn NK Hưng Yên ; Phú Thọ : *Lê Mạnh Cường* ; **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Cao Thắng, 8B, Nguyễn Việt Hà*, 9B PTCS. Yên Lạc, *Lê Thảo Nguyên*, 9A , THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Quỳnh Trâm*, 9A THCS Vĩnh Yên, **Hà Tây** : *Trần Ngọc Diệp*, 9 K THCS Lê Lợi, Hà Đông ; **Thái Bình** : *Lê Thành Công*, 9B Phạm Huy Quang, Đông Hưng ; **Hà Nội** : *Trần Tất Đạt*, 9A₁ Chu Văn An, *Bùi Minh Quân*, 8A₁ THCS Giảng Võ, *Nguyễn Đình Hà*, 9A₁ Nguyễn Trường Tộ, *Lê Hoàng Tùng*, 9A Trưng Nhị, *Trần Anh Dũng*, 8A THCLC Từ Liêm ; **Nam Định** : *Trần Quốc Việt*, 8A CLC Giao Thủy, *Phạm Quang Đính*, 9A2, *Trần Quang Vinh*, 9CT Ý Yên, *Đặng Phương Thảo*, 8A2 Lương Thế Vinh, *Nguyễn Công Tuấn*, 9A6 Trần Đăng Ninh , *Phùng Văn Huân*, 9A THCS Giao Thủy, *Tống Anh Quân*, 8T *Đào Tiến Thành* 9T Hàn Thuyên, **Thanh Hóa** : *Trương Thanh Giáp* : 8A NK Hoằng Hóa, *Đỗ Giao Tiến*, 9L Lam Sơn , *Lê Tuấn Anh*, 9B THCS CLC Triệu Sơn, **Nghệ An** : *Nguyễn Xuân Giao*, 9TB Phan Bội Châu, *Vũ Văn Nguyễn*, Quỳnh Lưu I.*Nguyễn Văn Toản*, 9A CLC Diễn Châu ; **Hà Tĩnh** : *Lương Tiến Thành*, 9/2 Trường Lê Văn Thiêm ; **Quảng Bình** : *Hà Nhật Sang*, 8B THCS Hải Đình ; **Quảng Trị** : *Trần Việt Anh*, 9₂ THCS Đông Hà, Quảng Trị, Thừa Thiên – Huế ; *Phan Đình Ngọc*, Phú Lộc ; **Đà Nẵng** : Nguyễn Đình Chiểu, 9/5 Trần Hoàng Thiện, *Ngô Sĩ Việt Phú*, 9/1 THCS Nguyễn Khuyến ; **Quảng Nam** : *Huỳnh Minh Việt*, 9A Nguyễn Hiền, Điện Bàn ; Bình Định :*Nguyễn Lương Hoàng*, 9A Quốc học Quy Nhơn ;**Quảng Ngãi** : *Ngô Minh Trí*, 8I Trần Hưng Đạo ; *Trần Thị Bích Thủy*, 7I Trần Hưng Đạo ; **Khánh Hòa** : *Trần Tuấn Anh*, 9T Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Đắc Lắc** : *Dương Thành An*, 9T, *Ngô Quốc Anh* 9C ; Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc ; **Bình Thuận** : *Lưu Hải Vũ*, 9, Trần Hưng Đạo, Phan Thiết ; **Tây Ninh** : *Đào Duy Bình*, 7A₁ PTTH Dương Minh Châu, **Bà Rịa – Vũng Tàu** : *Nguyễn Thanh Bình*, 9T Lê Quý Đôn, **Bình Dương** : *Nguyễn Tiến Hùng*, PTTH Hùng Vương ; **TPHCM** : *Huỳnh Phúc Duy, Phan Minh Trường, Nguyễn Trường Hoàng Long*, 8¹ Hồng Bàng, Q5, *Khúc Ngọc Vinh*, 9/19 Hồng Bàng ; **Long An** : *Nguyễn Thành Tín*, 8₅ C2-3 Thủ Thừa ; **Bạc Liêu** : *Trần Thế Minh*, Lương Thế Nhân, 9A Chuyên BL.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/242 : *Trong mặt phẳng cho đường tròn (O, R) và một điểm P cố định không nằm trên đường tròn (OP = d ≠ R). Một dây cung MN thay đổi của đường tròn sao cho luôn được nhìn từ P dưới một góc vuông :* $\widehat{MPN} = 90^o$. *Tìm quỹ tích điểm Q, đối xứng với P qua MN. Biện luận.*

Lời giải. Gọi H là hình chiếu (vuông góc) của P trên MN, thế thì H là trung điểm của PQ ; S là trung điểm dây cung MN và ω là trung điểm của OP. Dễ thấy rằng :



$\omega S = \omega H = \dfrac{1}{2} OQ$; (1)

Lại có (công thức đường trung tuyến) ;

$2(SO^2 + SP^2) = OP^2 + 4\omega S^2$; (2)

Do đó

$\widehat{MPN} = 90^o \Leftrightarrow SP = \dfrac{1}{2} MN = SM$

$\Leftrightarrow SO^2 + SP^2 = SO^2 + SM^2 = OM^2$;

$\Leftrightarrow SO^2 + SP^2 = R^2$; (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$\widehat{MPN} = 90^o$

$\Leftrightarrow 4\omega S^2 = OQ^2 = 2R^2 - OP^2$; (4)

$\Leftrightarrow OQ = 2\omega S = \sqrt{2R^2 - OP^2}$

(nếu $OP = d \leq R\sqrt{2}$)

Ta đi đến kết luận :

1°) Nếu $OP = d < R\sqrt{2}$,

$\{Q = Đ(P) | MPN = 90^o\}$ là đường tròn tâm O, bán kính $\rho = \sqrt{2R^2 - OP^2}$

2°) Nếu $OP = d = R\sqrt{2}$, $\{Q\} = \{0\}$ (đường tròn điểm)

3°) Nếu $OP = d > R\sqrt{2}$, $\{Q\} = \phi$, tức không có qũy tích.

Nhận xét :

1°) Hầu hết các bạn tham gia giải bài toán này đều tách bạch hai phần chứng minh thuận đảo, nên lời giải thường dài dòng. Tuy nhiên, đối với bài toán này cũng như một số bài toán qũy tích khác, không nhất thiết phải trình bày riêng rẽ hai phần thuận đảo nếu những định lý hình học được sử dụng trong chứng minh có định lý đảo cũng đúng. Chẳng hạn như đối với bài toán này chúng ta đã sử dụng định lý sau đây : Một tam giác là vuông khi và chỉ khi có một đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó.

2°) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : *Nguyễn Đình Hà*, 9A1 Nguyễn Trường Tộ ; **Bắc Ninh :** *Hoàng Tùng*, 9 Trường PTCSNK Tiên Sơn ; **Bắc Giang :** *Chu Mạnh Dũng*, 9 PTCSNK Bắc Giang ; **Hải Dương :** *Tô Minh Hoàng*, 9 PTNK Hải Dương ; **Hải Phòng** *Vũ Ngọc Minh*, 8 T PTCS Chu Văn An ; *Nguyễn Hoàng Long*, 9A1 PTCS Hồng Bàng, *Phạm Đức Hiệp*, 8T PTCS Chu Văn An. **Thanh Hóa** : *Nguyễn Phi Lễ*, PTCSNK Hoằng Hóa **Quảng Nam** : *Huỳnh Minh Việt*, 9A, Trường Nguyễn Hiền, Điện Bàn ; **Bạc Liêu** :*Trần Thế Minh*, 9A PTTH chuyên Bạc Liêu

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T6/242 : *Giả sử x và y là các số nguyên dương sao cho x^2+y^2+6 chia hết cho xy. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ là lập phương của một số tự nhiên.*

Lời giải. (của bạn *Đoàn Mạnh Hà* 11CT Trần Phú Hải Phòng).

Giả sử $x^2+y^2+6=pxy$ $(p \in z^+)$ (1)

Trong tất cả các số nguyên dương (x, y) thỏa mãn (1).

Giả sử (x_o, y_o) là cặp số có x_o+y_o bé nhất. Không giảm tổng quát giả sử $x_o \leq y_o$.

Xét phương trình $y^2-px_oy+x_o^2+6=0$ (2)

Ta thấy y_o là nghiệm của (2). Gọi y_1 là nghiệm còn lại của (2) thì theo định lí Viet ta có

$$\begin{cases} y_o+y_1=px_o \ (3) \\ y_oy_1={x_o}^2+6 \ (4) \end{cases}$$

Ta có (x_o, y_o) thỏa mãn (1) do đó $y_o \leq y_1$.

•) Nếu $x_o=y_o$ thì từ (1)

$$p=2+\frac{6}{x_o^2} \to x_o=1 \to P=8.$$

•) Nếu $y_o=y_1$ thì từ (4) ta có

$(y_o-x_o)(y_o+x_o)=6$

Điều này không xảy ra vì y_o-x_o và y_o+x_o cùng tính chẵn lẻ mà $6=1.6=2.3$.

•) Nếu $x_o<y_o<y_1 \to y_o \geq x_o+1$, $y_1 \geq x_o+2$.

Từ (4) suy ra $x_o^2+6 \geq (x_o+1)(x_o+2) \to 4 \geq 3x_o \to x_o=1 \to y_oy_1=7 \to y_o=1$ và $y_1=7$ vô lý vì $x_o<y_o$.

Tóm lại ta phải có $p=8=2^3$

Nhận xét : Bài toán này có nhiều bạn giải đúng và cũng nhiều bạn giải sai. Nhiều bạn khẳng định rằng chỉ có cặp (1, 1) và (1,7) là thỏa mãn điều kiện bài toán. Thực ra có vô số cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn (1) Chẳng hạn xét dãy (u_n) với $u_o=u_1=1$, $u_{n+2}=8u_{n+n}-u_n$. Khi đó dễ dàng kiểm tra được (u_n, u_{n+1}) thỏa mãn (1) với mọi n.

Các bạn sau đây có lời giải khá tốt ; *Phạm Viết Ngọc* 12A Ngô Sĩ Liên,**Bắc Giang**, *Trần Nam Dũng* 12CT Phan Bội Châu, Vinh, *Trần Văn Hòe* 10 NK Trần Phú **Hải Phòng** *Cao Thế Thu*, 11A PTTH chuyên **Vĩnh Phú**,*Nguyễn Văn Quang* 10T Lam Sơn **Thanh Hóa**, *Triệu Tuấn Đạt* 8T Chu Văn An. **Hải Phòng**, *Lê Thành Công*, 9B Phạm Huy Quang, Đông Hưng, *Thái Bình*, *Trần Ngọc Diệp* 9K Lê Lợi TX Hà Đông **Hà Tây**, *Ngô Sỹ Việt Phú* 9T Nguyễn Khuyến **Đà Nẵng**, *Hoàng Tùng* 9T Tiên Sơn **Bắc Ninh**. *Nguyễn Quang Bằng* 10T PTTH Nguyễn Trãi **Hải Dương**,*Trần Tuấn Anh* 9T Lê Quý Đôn Nha Trang **Khánh Hòa** *Nguyễn Phương Thiện* 10B Toán ĐHKHTN **Hà Nội**, *Lê Quang Nẫm* 12CT PTHồ Chí Minh. *Trần Việt Dũng* 12A3 chuyên Lê Quý Đôn **Đà Nẵng**, *Nguyễn Xuân Thành* 8T PTCS Chu Văn An *Nguyễn Ngọc Chiến*, 12A1 PTTH chuyên **Yên Bái**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/242 : *Chứng minh rằng với đa thức tùy ý P(x) bậc n ≥ 1 có n nghiệm thực khác nhau $x_1, x_2, ..., x_n$ ta có đẳng thức :*

$$\frac{P''(x_1)}{[P'(x_1)]^3}+\frac{P''(x_2)}{[P'(x_2)]^3}+...+\frac{P''(x_n)}{[P'(x_n)]^3}=0.$$

Lời giải : Không mất tổng quát, giả sử $P(x)=(x-x_1).(x-x_2)...(x-x_n)$. Viết biểu thức $\dfrac{1}{P^2(x)}$ dưới dạng :

$$\frac{1}{P^2(x)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{x-x_i}+\frac{b_i}{(x-x_i)^2}\right] \qquad (1)$$

trong đó a_i, b_i $(i=\overline{1,n})$ là các hằng số mà ta sẽ xác định ở sau.

Với mỗi $i=\overline{1,n}$, ta viết lại (1) dưới dạng :

$$1=P^2(x).\frac{a_i}{x-x_i}+P^2(x).\frac{b_i}{(x-x_i)^2}+P^2(x) \times \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\frac{a_j}{(x-x_j)}+\frac{b_j}{(x-x_j)^2}\right] \qquad (2)$$

Cho $x \to x_i$, với lưu ý rằng :

$$\lim_{x\to x_i} P^2(x)\frac{a_i}{x-x_i}=0,$$

$$\lim_{x\to x_i} P^2(x)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\frac{a_j}{x-x_j}+\frac{b_j}{(x-x_j)^2}\right]=0$$

và $\lim\limits_{x \to x_i} P^2(x) \dfrac{b_i}{(x-x_i)^2} =$

$$= b_i \lim_{x \to x_i} \left[\frac{P(x) - P(x_i)}{x - x_i} \right]^2 = b_i [P'(x_i)]^2$$

từ (2) ta được :

$$b_i = \frac{1}{[P'(x_i)]^2} \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Lấy đạo hàm cả 2 vế của (2) ta có :

$$0 = 2P(x)P'(x)\frac{a_i}{x - x_i} - P^2(x) \cdot \frac{a_i}{(x-x_i)^2} +$$

$$+ 2P(x)P'(x)\frac{b_i}{(x-x_i)^2} -$$

$$-P^2(x)\frac{2b_i(x-x_i)}{(x-x_i)^4} + 2P(x)P'(x) \times$$

$$\times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left[\frac{a_j}{x - x_j} + \frac{b_j}{(x-x_j)^2} \right] -$$

$$-P^2(x) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} \left[\frac{a_j}{(x-x_j)^2} + \frac{2b_j}{(x-x_j)^3} \right] \qquad (3)$$

$\forall i = \overline{1, n}.$

Cho $x \to x_i$, với lưu ý rằng :

$$\lim_{x \to x_i} \frac{P(x)}{x - x_i} = P'(x_i), \quad \lim_{x \to x_i} P(x) = 0$$

và $$\lim_{x \to x_i} \frac{P'(x) - \dfrac{P(x)}{x - x_i}}{x - x_i} = \lim_{x \to x_i} \frac{(x - x_i)P'(x) - P(x)}{(x-x_i)^2}$$

$$= \lim_{x \to x_i} \frac{P'(x) + (x - x_i)P''(x) - P'(x)}{2(x - x_i)} = \frac{1}{2}P''(x_i)$$

(theo quy tắc Lopital), từ (3) ta được :

$$0 = a_i [P'(x_i)]^2 + b_i P'(x_i) P''(x_i) \ \forall i = \overline{1, n}.$$

$$\Rightarrow a_i = -b_i \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = -\frac{P''(x_i)}{[P'(x_i)]^3} \ \forall i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{[P'(x_i)]^3}.$$

Mặt khác, sau khi nhân cả 2 vế của (1) với x rồi cho $x \to \infty$ ta sẽ được $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0.$

Suy ra : $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{P''(x_i)}{[P'(x_i)]^3} = 0$ (Đpcm)

Nhận xét : Tòa soạn nhận được Lời giải của 11 bạn gửi tới. Trong số đó có 8 bạn cho lời giải sai vì đã mắc phải sai lầm cơ bản sau : $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i B_i = = (\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n} B_i)$ (! ?). Trong 3 bạn còn lại có 2 bạn (ở TP **Hồ Chí Minh**) cho lời giải thiếu chính xác và một bạn (ở Đông Anh – **Hà Nội**) cho lời giải quá rườm rà.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/242. *Trong tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng*

$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geqslant 4 - \sqrt{3}.$$

Lời giải (của đa số các bạn).

Giả sử $A \geqslant \frac{2\pi}{3}$. Khi đó $\frac{A}{2} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có

$$tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} = \frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{B+C}{2} + \cos\dfrac{B-C}{2}\right)}$$

$$\geqslant \frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{B+C}{2} + 1\right)}$$

$$= \frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos^2\dfrac{B+C}{4}}$$

$$= 2tg\frac{B+C}{4} = 2tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$$

Do vậy

$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geqslant tg\frac{A}{2} + 2tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right) \ (*)$$

Nhận xét rằng hàm số $f(A) = tg\frac{A}{2} + 2tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)$ đồng biến trong $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$. Thật vậy,

$$f'(A) = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{A}{2}} - \frac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A}{4}\right) - \cos^2\dfrac{A}{2}}{2\cos^2\dfrac{A}{2}\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{A}{4}\right)} > 0.$$

Do đó, từ (*) ta có :

$$tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geqslant$$
$$\geqslant tg\frac{\pi}{3}+2tg\frac{\pi}{12}=4-\sqrt{3}$$

(do $tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$).

Rõ ràng, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=\frac{2\pi}{3}$; $B=C=\frac{\pi}{6}$.

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn chứng minh trực tiếp bất đẳng thức : $tg\frac{A}{2}+2tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right) \geqslant tg\frac{\pi}{3}+2tg\frac{\pi}{12}$; không sử dụng đạo hàm.

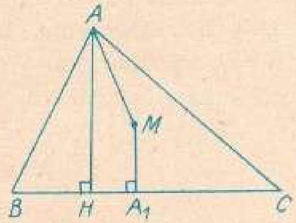
2) Số lượng các bạn giải được bài này tương đối nhiều, từ nhiều tỉnh trong cả nước.

Đồng Tháp : *Nguyễn Đăng Triển* (12T THCB TXCL). **Cần Thơ :** *Trần Lê Minh* (10F Thốt Nốt). **Phú Yên :** *Đoàn Ngọc Khải* (11 Lương Văn Chánh). **Bến Tre :** *Nguyễn Nhật Nam* (12A TH Bến Tre). **Sơn La :** *Trần Xuân Thọ* (11T, Năng khiếu Sơn La). **Khánh Hòa :** *Trần Tuấn Anh* (9T, Lê Quý Đôn). **Lâm Đồng :** *Tô Thu Hiền* (12A2, Bảo Lộc). **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Lương Anh Hùng* (11A1, chuyên ban Vũng Tàu). **Vĩnh Long :** *Nguyễn Minh Trường* (12T Vĩnh Long). **Quảng Nam :** *Phạm Đạt Minh Triết* (12A2 Hoàng Ngọc Huệ). **Bình Định :** *Nguyễn Đình Tuấn* (12A3 Nguyễn Trân, Hoài Nhơn) **Ninh Bình :** *Lê Văn Cường, Vũ Hải Châu* (11 Lương Văn Tụy) **Nam Định :** *Phan Tuấn Giang, Trần Quang Vinh* (9CT, Ý Yên) *Đỗ Huy Đại* (12A, Lý Tự Trọng). **Quảng Bình :** *Trần Hữu Lực* (12CT, Đồng Hới), *Trần Chí Hà* (11CT, Đồng Hới). **Hà Nội :** *Nguyễn Khánh Trình* (11 Amsterdam), *Ngô Quang Hiển* (11A1 Lý Thái Tổ). *Nguyễn Đình Vinh* (12A ĐHSP). *Đoàn Huy Hiền, Đỗ Đức Hạnh, Phạm Minh Ngọc, Nguyễn Mạnh Hà* (ĐHKHTN). *Nguyễn Đức Mạnh* (12A Cổ loa). *Hoàng Vân* (12C Đống Đa). TP **HCM :** *Lê Quang Nẫm* (12CT), *Nguyễn Lê Lực* (12CT) ; *Nguyễn Duy Việt* (12A1 Lê Quý Đôn). **Hải Phòng :** *Phạm Thu Hương, Đặng Anh Tuấn, Phạm Dương Hiển, Vũ Huy Toàn, Đoàn Mạnh Hà* (Trần Phú). *Nguyễn Quang Huy* (12A1 Ngô Quyền). **Thanh Hóa :** *Nguyễn Việt Cường 11, Mai Anh Thắng* (12A Ba Đình, Nga Sơn). *Mai Văn Dương* (12A1 Ba Đình Nga Sơn). *Trịnh Quang Hòa* (11A1, Yên Định). *Nguyễn Văn Quang* (10T Lam Sơn). **Nghệ An :** *Nguyễn Đình Quân* (10A1 Phan Bội Châu), *Phan Việt Dương* (11A1 Hà Huy Tập), *Hoàng Minh Sơn* (10G1 Nghi Lộc), *Nguyễn Văn Tăng* (12A, CT). *Nguyễn Quốc Hùng* (11A1 Huỳnh Thúc Kháng). *Nguyễn Ngọc Hà* (12T Phan Bội Châu). **Buôn Ma Thuột** *Lê Thế Tân, Lê Đình Bình* (12T Nguyễn Du). **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hoàng Anh, Nguyễn Duy Tân, Cao Thế Thu, Nguyễn Minh Tú* (12A chuyên Vĩnh Phúc). **Yên Bái :** *Vũ Nguyên Thức, Đỗ Năng Tùng, Bùi Văn Sỹ, Nguyễn Trọng Tuấn, Nguyễn Kiên, Lê Minh Đức, Trần Anh Quân, Dương Quang Huy, Lê Hồng Hải, Nguyễn Trọng Hiển* (Chuyên Yên Bái). **Bắc Giang :** *Vũ Duy Tuấn, Nguyễn Tiến Mạnh, Hoàng Việt Hà* (NK Ngô Sỹ Liên). **Phú Thọ :** *Nguyễn Kim Số* (11A Thanh Ba), *Nguyễn Minh Phương* (12A Hùng Vương). **Quảng Ngãi :** *Trương Quang Trí* (12A1 Sơn Tịnh). **Thái Bình :** *Nguyễn Hoài Thanh* (11A1 Bắc Thụy trì), *Nguyễn Hợp Đồng* (12A Quỳnh Phụ). **Thừa Thiên Huế :** *Hoàng Trung Hiếu, Trần Bá Đan, Lê Văn Hóa* (ĐHKH Huế). **Hải Dương :** *Trần Đại Nghĩa, Nguyễn Dũng, Vũ Văn Tân, Nguyễn Quỳnh Điệp, Nguyễn Huy Khương, Đào Thu Mai* (NK Nguyễn Trãi), *Phạm Văn Hoằng* (11A1 Ninh Giang), *Phạm Đình Dương* (12A Bình Giang). **Đà Nẵng :** *Nguyễn Tấn Cường* (11A1 Lê Quý Đôn). **Hà Tây :** *Lê Xuân Đại* (12A1 Nguyễn Đức).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/242. *Giả sử M là một điểm thuộc miền tam giác ABC. Chứng minh rằng MA + MB + MC > 6r trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Đặt x, y, z là các khoảng cách từ M tương ứng tới các cạnh BC, CA, AB. Hạ đường cao AH và đường vuông góc MA_1 xuống BC, ta có $AM + MA_1 \geqslant AH$ hay là $AM \geqslant 2S_{ABC} : BC - x$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A_1 \equiv H$). Với BM, CM ta cũng có các bất đẳng thức tương tự, và thu được kết quả sau đây bằng cách cộng chúng vế với vế :



$$AM+BM+CM \leqslant$$
$$\leqslant 2S_{ABC}\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)-(x+y+z)=$$
$$=r(BC+CA+AB)\left(\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}\right)-$$
$$-(x+y+z)(1)$$

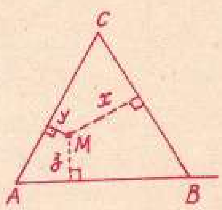
Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy, ta có hạng tử thứ nhất của (1) lớn hơn hoặc bằng 9r, còn theo bất đẳng thức Ecđốtsơ (*) thì 0,5 (BC + CA + AB) ⩾ (x + y + z). Đem thay vào (1), suy được đpcm (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều, nhận M làm tâm)

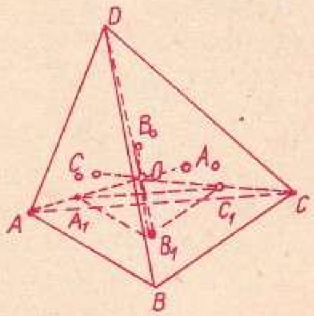
Nhận xét. Có 115 bài giải, tất cả đều giải đúng. Ngoài cách giải trên, còn nhiều cách giải khác trong đó phải dùng những bất đẳng thức tuy chứng minh không khó nhưng bài giải không nêu rõ tài liệu tham khảo, chẳng hạn $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$. Bài giải tốt gồm có : **Phú Thọ** : Nguyễn Ngọc Thắng (9^{a1} PTCS Bán Công Phong Châu) ; **Hà Nội** : Phạm Tuấn Lê (10 Tin Hà Nội – Amsterdam). **Yên Bái** : Trần Anh Quân (12 A_1 PTTH Chuyên). **Bắc Ninh** : Hoàng Tùng (9 Toán Năng Khiếu Tiên Sơn). **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Duy Tân (11 A PTTH Chuyên). **Ninh Bình** : Lê văn Cường (11 Toán PTTH Lương Văn Tuy Tx Ninh Bình). **Quảng Bình** : Trần Hữu Lực (12 Ct PTTH Năng Khiếu Đồng Hới). **Huế** : Trần Bá Đôn (11 CTĐHKH). **Đắc Lắc** : Lê Thế Tân (12 Toán chuyên Nguyễn Du Tp Buôn Ma Thuột).

ĐẶNG VIỄN

(*) Tuyển Tập 30 năm Tạp chí TH & TT tr.254.

Bài T10/2H2 : *Giả sử M là một điểm chuyển động trong miền tam giác ABC, là đáy của tứ diện đều ABCD. Gọi A', B' và C' là hình chiếu vuông góc của M lần lượt trên các mặt BCD, CDA và DAB. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác A'B'C' chuyển động trong một miền tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong tứ diện và song song với đáy ABC.*





Lời giải 1

Gọi x, y, và z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB và h là chiều cao của tam giác đều ABC. Thế thì ta có :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{x}{h}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{h}\overrightarrow{OB} + \frac{z}{h}\overrightarrow{OB} \text{ ; } (\forall O) \qquad (1)$$

Lại gọi A_o, B_o và C_o lần lượt là trọng tâm các mặt (tam giác đều) BCD, CDA và DAB ; thế thì ta có :

$$\frac{MA'}{AA_o} = \frac{v(MBCD)}{v(ABCD)} = \frac{s(MBC)}{s(ABC)} = \frac{x}{h}$$

Vì $\overrightarrow{MA'} \parallel \overrightarrow{AA_o}$, nên ta được : $\overrightarrow{MA'} = \frac{x}{h}\overrightarrow{AA_o} = -\frac{4}{3}\frac{x}{h}\overrightarrow{OA}$;

Tương tự, ta được :

$$\overrightarrow{MB'} = -\frac{4}{3}\frac{y}{h}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{MC'} = -\frac{4}{3}\frac{z}{h}\overrightarrow{OC} \text{ ; } (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{OM} \text{ ; } \qquad (3)$$

Vì G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, nên :

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = 3\overrightarrow{MG} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra :

M là trọng tâm tam giác $A'B'C'$, cần và đủ là :

$$3\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{OM} \text{ , hay : } \overrightarrow{OG} = \frac{5}{9}\overrightarrow{OM} \qquad (5)$$

Vậy $V = V_0^{5/9}$ (M) là ảnh của M trong phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \frac{5}{9}$. Ta đi đến kết luận :

Khi M chuyển động trong miền tam giác ABC thì G chuyển động trong miền tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trong tứ diện và song song với đáy ABC, trong đó A_1, B_1 và C_1 được xác định bởi :

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{OC}} = \frac{5}{9}$$

Lời giải 2 (của Đoàn Mạnh Hà, 11T, PTTHNK Trần Phú, Hải Phòng) Giả sử M là một điểm tùy ý nằm trong tứ diện đều $ABCD$; A', B' C' và D' lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt BCD, CDA, DAB và ABC. Gọi O là trọng tâm của tứ diện đều ABC và $D_o = (DO) \cap (ABC)$ (D_o cũng là trọng tâm của mặt ABC). Thế thì ta có :

$$\frac{MD'}{OD_o} = \frac{v(MABC)}{v(OABC)} = \frac{v(MABC)}{\frac{1}{4}v(ABCD)}, \text{ hay là :}$$

$$v(ABCD)\ MD' = \frac{4}{3}v(MABC)\ .\ DO$$

Vì $MD' \parallel DO$, nên ta được :

$$v(ABCD)\overrightarrow{MD'} = \frac{4}{3}v(MABC)(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MD}) \text{ ;}$$

Chứng minh tương tự ta được các hệ thức sau :

$$v(ABCD)\overrightarrow{MA'} = \frac{4}{3}v(MBCD)\ .\ (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA})$$

$$v(ABCD)\overrightarrow{MB'} = \frac{4}{3}v(MCDA)\ .\ (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB})$$

$$v(ABCD)\overrightarrow{MC'} = \frac{4}{3}v(MDAB)\ .\ (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC})$$

Mặt khác, lại có (vì $M \in$ Miền tứ diện $ABCD$) :

$$v(MBCD)\ .\ \overrightarrow{MA} + v(MCDA)\overrightarrow{MB} + v(MDAB)\overrightarrow{MC} + v(MABC)\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{O}$$

và : $v(MBCD) + v(MCDA) + v(MDAB) + v(MABC) = v(ABCD)$.

Từ các hệ thức trên ta được :

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MO}.$$

Đặc biệt, $M \in$ miền tam giác $[ABC]$ thì $M \equiv D'$ và ta được :

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MO}.$$

Do đó :

G là trọng tâm $A'B'C' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{5}{9}\overrightarrow{OM}$.

Từ đó suy ra :

$\{M\}$ = Miền $[ABC] \Leftrightarrow \{G\}$ = Miền $[A_1B_1C_1]$

$k = 5/9$
$= V_0$ (Miền [ABC]).

Nhận xét : 1°). Tuy bài toán không hỏi quỹ tích của G, nhưng nhiều bạn đã đặt vấn đề tìm quỹ tích của G và cho lời giải đúng và chặt chẽ. Có ba bạn sử dụng phương pháp tọa độ cũng đi đến kết quả. Đáng tiếc, cũng còn một đôi bạn giải sai.

2°) Bạn *Đỗ Đức Hạnh* 11T, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội còn sử dụng phương pháp tâm tỉ cự, đặc biệt sử dụng tính chất chiếu được của tâm tỉ cự vào việc giải bài toán trên. Bạn *Nguyễn Công Minh*, 11T, trường PTTH Hà Nội - Amsterdam còn đề xuất bài toán tổng quát : Thay tứ diện đều bằng tứ diện bất kì, thay phép chiếu vuông góc bằng phép chiếu song song lên các mặt theo phương ảnh đường trọng tuyến tương ứng.

3°) Ngoài ba bạn *Hà, Hạnh* và *Công*, các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Tiến Mạnh*, 12A, PTTHNK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**, *Đặng Anh Tuấn*, 12T, Trần Phú, **Hải Phòng** ; *TRần Nam Dũng*, 12T PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Lê Quang Nẫm* 12T, PTNK ĐHQG thành phố **Hồ Chí Minh.**

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/242 : *Khi quả bóng tennis rơi từ độ cao H xuống va chạm vào chiếc vợt tennis đứng yên, thì nó nảy lên đến độ cao nhỏ hơn, chỉ bằng 0,9H. Hỏi phải cho chiếc vợt tennis chuyển động lên phía trên với vận tốc lúc sắp va chạm bằng bao nhiêu để quả bóng lại nảy lên đến độ cao H như trước.*

Hướng dẫn giải. Gọi W là cơ năng của quả bóng lúc trước khi va chạm. Theo đề bài, sau khi va chạm cơ năng của quả bóng chỉ còn bằng $0,9W$, còn $0,1W$ biến thành nhiệt. Để khảo sát chuyển động của quả bóng, chọn hệ quy chiếu chuyển động cùng với vợt lên trên với vận tốc u (u là vận tốc phải tìm) ; trong hệ quy chiếu này, vợt đứng yên, còn quả bóng ở độ cao H có vận tốc u hướng xuống, Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng (xét lúc trước va chạm) ta có :

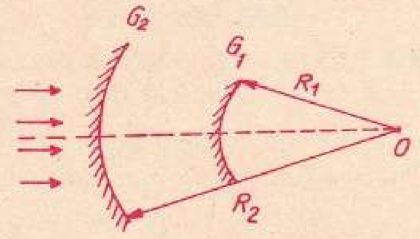
$$0,9\left(mgH + \frac{mu^2}{2}\right) = mgH.$$

Suy ra $u = \dfrac{\sqrt{2gH}}{3}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Ngô Trí Lê Minh*, 12A$_1$, PTTH Hà Huy Tập, Vinh (**Nghệ An**) ; *Nguyễn Phúc Hải*, 12 B$_1$, TH chuyên ban Uông Bí, **Quảng Ninh**.

MAI ANH

Bài L2/242. : *Nhờ hệ gương cầu đồng tâm người ta nhận được ảnh của Mặt trời trên màn (hình vẽ). Có thể thay hệ bằng một thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự f bằng bao nhiêu để cũng cho ảnh cùng kích thước ? Biết rằng bán kính của các phương $R_1 = 12cm$, $R_2 = 30cm$.*



Hướng dẫn giải. Từ sơ đồ tạo ảnh qua hệ gương ($AB \xrightarrow{G_1} A_1B_1 \xrightarrow{G_2} A_2B_2$) và qua thấu kính ($AB \xrightarrow{L} A'B'$) tính độ phóng đại k qua hệ và k' qua thấu kính. Từ điều kiện đề bài $A_2B_2 = A'B'$, suy ra phải có $|k| = |k'|$.

Muốn vậy $\left|\dfrac{d_1' d_2'}{d_1 d_2}\right| = \left|-\dfrac{f}{d_1}\right|$, tìm được

$$f = \frac{R_1R_2}{\alpha(R_2 - R_1)} = 10cm.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Nguyễn Trung Dũng, 10L, trường Lê Hồng Phóng*, **Nam Ninh** ; *Hồ Linh Phi*, 12 Lí Phan Bội Châu, Vinh *(Nghệ An)* ; *Trịnh Minh Tuấn* 12A2, PTTH Bỉm Sơn **Thanh Hóa** ; *Lưu thị Minh Nguyệt*, 11A chuyên **Vĩnh Phú** ; *Lê Hải Thành* 11 Lí, Trung học Năng khiếu, **Quảng Bình**.

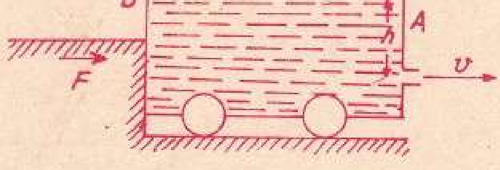
MAI ANH

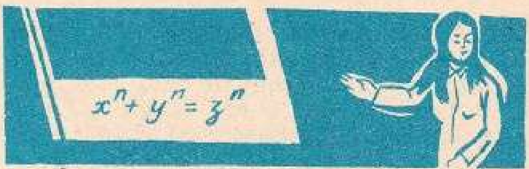
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

(Tiếp theo trang 10)

Bài L2/246 : *Một xe chở nước, chứa đầy nước, có thể lăn không ma sát trên một mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Nước có khối lượng riêng là D. Nếu một tia nước nằm ngang, có tiết diện là a chảy qua lỗ A với vận tốc $v = \sqrt{2gh}$ thì ngoại lực F tác dụng vào thành B của xe phải bằng bao nhiêu ?*

TÔ GIANG
(Hà Nội)





ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/246 : *Cho một tam giác có số đo các cạnh là x, y, z nguyên thỏa mãn*

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 20 = 0$$

Chứng minh : đó là tam giác đều.

TRƯƠNG CÔNG CƯỜNG
(Lâm Đồng)

Bài T2/246 : *Giải phương trình*

$$x + 3(2 - 3x^2)^2 = 2$$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T3/246 : *Cho số thực a thỏa mãn* $a^5 - a^3 + a - 2 = 0$. *Chứng minh rằng :*

$$\frac{a^{16} + a^{12} + 7a^8 + 12a^4 + 12}{a^{12} + 7a^8 + 7a^4 + 12} < \sqrt[3]{4}$$

ĐOÀN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Bài T4/246 : *Qua đỉnh B và C của tam giác ABC vẽ các tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Các tiếp tuyến này cắt nhau tại M. Gọi N là trung điểm của BC. Chứng minh :* $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(Thanh Hóa)

Bài T5/246 : *Cho tam giác ABC. Biết rằng* $\hat{A} = 2\hat{B} = 4\hat{C}$. *Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} .$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/246 : *Cho hai biểu thức*

$$M = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}$$

$$N = \frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1}$$

Trong đó $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ *là các số thực dương. Chứng minh rằng trong hai biểu thức trên có ít nhất một biểu thức không nhỏ hơn* $\frac{n}{2}$.

NGÔ VĂN THÁI
(Thái Bình)

Bài T7/246 : *Chứng minh rằng phương trình*

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2 + (xy)^2$$

không có nghiệm nguyên dương.

TRẦN NAM DŨNG
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/246 : *Tìm tất cả các hàm*

$$f : (1, +\infty) \rightarrow (0 ; +\infty)$$

thỏa mãn : $f(x^{1964}) = f^{1996}(x)$, $\forall x$.

TÔ XUÂN HẢI
(Hải Dương)

Bài T9/246 : *: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh :*

$$\frac{AB}{CD} + \frac{CD}{AB} + \frac{BC}{AD} + \frac{AD}{BC} \leqslant \frac{IA}{IC} + \frac{IC}{IA} + \frac{IB}{ID} + \frac{ID}{IB}$$

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T10/246 : *Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, có độ dài các cạnh là AB = a ; BC = b. Điểm M chuyển động trên đường tròn. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của S = MA + MB + MC + MD.*

NGÔ VĂN HIỆP
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/246 : *Cho đoạn mạch có sơ đồ như hình vẽ. Cho* $L_1 = \frac{2}{\pi}$ (H), $C_1 = \frac{10^{-4}}{\pi}$ (F).

Hiệu điện thế xoay chiều giữa hai đầu A và B là $u = 120\sqrt{2}\, sin(100\pi t)$ (V).

Cường độ dòng điện chạy trong mạch $i = 1{,}2\sqrt{2}\, sin(100\pi t)$ (A). *X là đoạn mạch gồm hai trong ba phần tử R, L hoặc C mắc nối tiếp hoặc song song. Hãy xác định cấu tạo của đoạn mạch X.*

ĐỖ VĂN TOÀN
(ĐHSP Vinh)

(Xem tiếp trang 9)

problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/246. *Suppose that the measures of the sides of a triangle are three integers x, y, z satisfying the relation :*

$$2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0\,.$$

Prove that the triangle is equilateral.

T2/246. *Solve the equation*

$$x+3(2-3x^2)^2=2\,.$$

T3/246. *Let a be a real number satisfying the equation*

$$a^5-a^3+a-2=0.$$

Prove that :

$$\frac{a^{16}+a^{12}+7a^8+12a^4+12}{a^{12}+7a^8+7a^4+12}<\sqrt[3]{4}\,.$$

T4/246. *The tangents of the circumcircle of a triangle ABC at B and at C intersect at M. Let N be the midpoint of BC. Prove that :*

$$\widehat{BAM}=\widehat{CAN}.$$

T5/246. *Suppose that the angles of a triangle ABC satisfy the relations, $\widehat{A}=2\widehat{B}=4\widehat{C}$. Prove that :*

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T5/246. *Consider the expressions*

$$M=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$

$$N=\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_n}{n_{x-1}+x_1},$$

where $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are positive numbers. Prove that at least one of these expressions is not less than $\frac{n}{2}$.

T7/246. *Prove that the equation*

$$x^3+y^3=(x+y)^2+(xy)^2$$

has no positive integer solution.

T8/246. *Find all functions $f:(1\,;+)\to(0\,;+\infty)$ satisfying the condition : $f(x^{1964})=f^{1996}(x)$ for all x.*

T9/246. *The two diagonals AC and BD of a quadrilateral ABCD, inscribed in a circle, intersect at I. Prove that :*

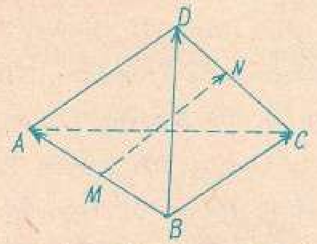
$$\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}+\frac{BC}{AD}+\frac{AD}{BC}\leqslant\frac{IA}{IC}+\frac{IC}{IA}+\frac{IB}{ID}+\frac{ID}{IB}$$

T10/246. *Let be given a rectangle ABCD with sides AB = a, BC = b, inscribed in a circle with center O. A point M moves on the circle. Find the greatest and the least values of S = MA + MB + MC + MD.*

ĐỀ THI TUYỂN ...

(Tiếp theo bìa 3)

Câu VB. 1) (0,75 điểm)



Kí hiệu $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{c}$. Do là tứ diện đều :

$\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=a^2$, $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}=\frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

$\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$

$MN=\sqrt{\overrightarrow{MN}^2}=$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}\right)^2}$

$\Rightarrow MN=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

2) (1,25 điểm) $n=C^3_{20000}$, $m=C^1_{100}\cdot C^2_{5000}$

$$p=\frac{m}{n}=\frac{100\,.\,\dfrac{5000\,.\,4999}{2}}{\dfrac{2000\,.\,19999\,.\,19998}{2\,.\,3}}$$

$p\approx 0{,}0009$

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
NĂM HỌC 1995 - 1996

Cuộc thi lần này được đông đảo bạn đọc tham gia trong đó có gần 2000 bạn thường xuyên gửi bài giải. Tất cả có 500 bạn được nêu tên trên tạp chí vì có lời giải tốt.

Đặc biệt, một nét mới là trong cuộc thi này đã có nhiều bạn ở các tỉnh miền núi Bắc Bộ và các bạn ở miền Tây Nam Bộ tham gia. Trong số đó một số bạn đã đoạt giải.

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI

A.MÔN TOÁN

I.Giải xuất sắc :

Trần Tuấn Anh, 8T Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa.

II.Giải nhất

1.*Nguyễn Vũ Hưng*, 12D Chuyên ngữ, Đại học Quốc Gia Hà Nội
2.*Dương Văn Yên*, 11T Phan Bội Châu, Nghệ An
3.*Trần Nam Dũng*, 10 chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An
4.*Nguyễn Việt Dũng*, 10 chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An
5.*Mai Ngọc Kha*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định.
6.*Bùi Viết Lộc*, 9A Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội
7.*Bùi Đăng Quang*, 9A chuyên Tam Đảo, Vĩnh Phúc
8.*Phạm Minh Hùng*, 9T Nguyễn Du, Gò Vấp, Thành phố HCM
9.*Đoàn Phương*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
10.*Hà Thanh Tuấn*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
11. Trần Tất Đạt, 8A Chu Văn An, Hà Nội
12. *Nguyễn Trọng Kiên*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
13. *Vũ Trần Cường*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định

III.Giải nhì

1. *Đinh Trung Hằng*, 12M Mari Quyri, Hà Nội
2. *Phan Duy Hùng*, 12 THPT Đào Duy Từ, Quảng Bình
3. *Lê Anh Vũ*, 12 chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế.
4. *Trần Nguyên Ngọc*, 11B Đại học Tổng hợp, ĐHQG Hà Nội
5. *Nguyễn Quang Nguyên*, 11 chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây
6. *Nguyễn Ngọc Hưng*, 11 Lam Sơn, Thanh Hóa
7. *Lê Văn An*, 11 chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An
8. *Nguyễn Xuân Sơn*, 11 Chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An
9. *Đỗ Ngọc Anh*, $10A_1$ Lê Hồng Phong, Nam Định
10. *Đỗ Hồng Sơn*, 10T Lam Sơn Thanh Hóa.
11. *Nguyễn Anh Tú*, 9CT Từ Liêm, Hà Nội
12. *Phạm Quang Vinh*, 9A Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội
13. *Phạm Hoàng Anh*, 9 chuyên VT Thường Tín, Hà Tây
14. *Nguyễn Văn Quang*, 9T Lam Sơn, Thanh Hóa
15. *Nguyễn Tuấn Anh*, 9T Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc
16. *Trần Minh Toàn*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định

IV. Giải ba

1. *Nguyễn Quang Hải*, 12 chuyên toán Hùng Vương, Phú Thọ
2. *Nguyễn Nhật Nam*, $12A_1$ PTTH Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu
3. *Nguyễn Minh Tuấn*, 11 Đào Duy Từ, Quảng Bình
4. *Phạm Hoài Lăng*, 11CT Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai
5. *Nguyễn Sĩ Phong*, 10A chuyên toán ĐHSP, ĐHQG Hà Nội
6. *Phan Linh*, 10T Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội
7. *Hoàng Phương Đông*, 9A THCS Cốc Lếu, Lào Cai
8. *Nguyễn Thị Ngọc Anh*, 9T Lê Hồng Phong, Yên Bái
9. *Nguyễn Lan Anh*, 9A Trưng Nhị, Hà Nội
10. *Trần Ngọc Anh*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định
11. *Phạm Thu Hương*, $9A_1$ Hồng Bàng, Hải Phòng
12. *Cao Xuân Sinh*, 9T Nga Liên, Nga Sơn, Thanh Hóa.
13. *Trần Như Quang*, 9 chuyên Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên - Huế
14. *Võ Chí Thành*, 9T chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi.
15. *Đặng Thu Hương*, 8T chuyên Phú Thọ.
16. *Nguyễn Như Chuẩn*, 8NK Thuận Thành, Bắc Giang.
17. *Nguyễn Hoàng Lam*, 8A Chu Văn An, Hà Nội
18. *Phạm Ngọc Hưng*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
19. *Nguyễn Văn Trung*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
20. *Nguyễn Thái Bảo*, 8A Diễn Xuân, Diễn Châu, Nghệ An
21. *Chung Nhân Phú*, 8T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn, thành phố HCM
22. *Phạm Thị Vân Giang*, 8A chuyên Bạc Liêu.
23. *Phạm Đình Quốc Hưng*, 7T Trần Đăng Ninh, Nam Định.

V. Giải khuyến khích

1. *Lê Văn Mạnh* 12 chuyên Hòa Bình
2. *Ngô Đức Duy*, 12 chuyên Trần Phú, Hải Phòng
3. *Trần Hoàng Việt*, 12A PTTH Chí Linh, Hải Dương
4. *Thái Minh Hoàng*, 12T, Vĩnh Long
5. *Lê Thái Nhân*, 12T, Vĩnh Long
6. *Nguyễn Hoàng Giang*, 11T PTNK Thái Nguyên
7. *Lê Tuấn Anh*, 11B chuyên toán, ĐHTH, ĐHQG Hà Nội

8. *Hà Duy Hưng*, 11 chuyên tin, Trần Phú, Hải Phòng
9. *Trịnh Hữu Trung*, 11T Lam Sơn, Thanh Hóa
10. *Nguyễn Ngọc Hưng*, 11T Lam Sơn, Thanh Hóa
11. *Hoàng Trung Tuyến*, 11A PTTH Hà Trung, Thanh Hóa
12. *Phạm Tuấn Anh*, 11A chuyên ĐHSP Vinh, Nghệ An
13. *Hồ Hữu Thọ*, 11A PTTH Nghĩa Đàn, Nghệ An
14. *Phạm Hồng Thái*, 11A, Đào Duy Từ, Quảng Bình
15. *Đàn Xuân Vinh*, 11T Quốc học Huế, Thừa Thiên – Huế
16. *Lê Triều Phong*, Lê Quý Đôn, Đà Nẵng
17. *Phan Anh Huy*, 11A_2 Lê Quý Đôn, Đà Nẵng
18. *Phan Thanh Hải*, 11T Thăng Long, Đà Lạt, Lâm Đồng
19. *Lương Xuân Thủy*, 11A Bến Tre
20. *Đặng Thành Trung*, 10 chuyên PTNK tỉnh Hải Dương
21. *Trần Phương*, 10, Hà Nội
22. *Nguyễn Anh Hoa*, 10A Lê Hồng Phong, Nam Định
23. *Phạm Anh Tuấn*, 10T Lam Sơn, Thanh Hóa
24. *Nguyễn Anh Dương*, Thanh Hóa
25. *Trần Hữu Lực*, Đào Duy Từ, Quảng Bình
26. *Nguyễn Lê Lực*, 10CT ĐH Tổng hợp TP. HCM
27. *Vũ Tuấn Anh*, 9CT THCS Năng khiếu Thái Nguyên
28. *Vũ Anh Tuấn*, 9CT THCS Năng khiếu Thái Nguyên
29. *Đỗ Thị Hòa Nhã*, THCS Năng khiếu Thái Nguyên
30. *Nguyễn Văn Mạnh*, 9T THCS Năng khiếu Thái Nguyên
31. *Lâm Mạnh Tường*, 9A THCS Hợp Giang, Cao Bằng
32. *Nguyễn Thu Hằng*, 9 Năng khiếu Bắc Ninh
33. *Phạm Hải Trung*, 9T Năng khiếu Tiên Sơn, Bắc Ninh
34. *Phùng Đức Dũng*, 9T Năng khiếu Bắc Giang
35. *Đào Mạnh Thắng*, 9B Chuyên Việt Trì, Phú Thọ
36. *Đặng Hoàng Việt Hà*
37. *Phạm Hải Trung*, 9T Tiên Sơn, Bắc Ninh
38. *Bùi Mạnh Hùng*, 9H Chuyên Trưng Vương, Hà Nội
39. *Vũ Thanh Hùng*, 9T Chuyên Đông Anh, Hà Nội
40. *Đỗ Minh Châu*, 9T Chuyên Đông Anh, Hà Nội
41. *Phan Chi*, 9A Chuyên ngữ, ĐH QG Hà Nội
42. *Nguyễn Thị Hồng Dung*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định
43. *Đỗ Quốc Bảo*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định
44. *Đỗ Anh Tuấn*, 9 Chuyên Thường Tín, Hà Tây
45. *Nguyễn Hà Duy*, 9T Chuyên Phú Xuyên, Hà Tây
46. *Cao Xuân Hòa*, 9A_1 Hồng Bàng, Hải Phòng
47. *Đoàn Mạnh Hà*, 9A Tiên Lãng, Hải Phòng
48. *Tạ Thành Định*, 9T Năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng
49. *Cao Thị Ly*, 9 Năng khiếu Vũ Thư, Thái Bình
50. *Hoàng Minh Dũng*, 9A THCS Xi măng Bỉm Sơn, Thanh Hóa
51. *Lê Thị Tâm*, 9A Hưng Dũng, Vinh, Nghệ An
52. *Trần Thị Thủy*, 9T Năng khiếu Hà Tĩnh
53. *Nguyễn Mỹ Hạnh*, 9T Năng khiếu Hà Tĩnh
54. *Võ Sĩ Nam*, 9CT Năng khiếu Đức Thọ, Hà Tĩnh
55. *Mai Tùng Sơn*, 9T Năng khiếu Hà Tĩnh
56. *Mai Thanh Việt*, 9A Quốc học Quy Nhơn, Bình Định
57. *Mai Xuân Hiếu*, 9A Đống Đa, Quy Nhơn, Bình Định
58. *Hồ Từ Vũ*, 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi
59. *Võ Trần Nguyên Lộc*, 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi
60. *Lê Hoàng Đức Khánh*, 9T Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, Quảng Ngãi
61. *Ngô Kiên Cường*, 9T Lê Khiết Quảng Ngãi
62. *Trần Thị Mỹ An*, 9A Lương Văn Chánh, Phú Yên
63. *Nguyễn Ngọc Minh*, 9A Lương Văn Chánh, Phú Yên
64. *Trần Minh Đông*, Lương Văn Chánh, Phú Yên
65. *Phạm Ngọc Tân*, Lương Văn Chánh, Phú Yên
66. *Hà Minh Ngọc*, 9/15 Trần Hưng Đạo, Biên Hòa, Đồng Nai
67. *Phạm Văn Tiến*, 9A_1 THCS Bán công Đầm Dơi, Cà Mau
68. *Nguyễn Hoàng Chương*, 8T Năng khiếu Thái Nguyên
69. *Phạm Tuấn Anh*, 8A Lương Thế Vinh, Hà Nội
70. *Ngô Anh Quân*, 8A Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội
71. *Đào Phương Bắc*, 8A Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội
72. *Nguyễn Minh Hoài*, 8A_1 Chu Văn An, Hà Nội
73. *Nguyễn Tuấn Anh*, 8 Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà Nội
74. *Phạm Thu Giang*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
75. *Đào Hoàng Anh*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định
76. *Trần Nguyên Thọ*, 8T Năng khiếu Thị xã Hà Tĩnh
77. *Đinh Cao Cường*, 8 Chuyên Ba Đồn, Quảng Trạch, Quảng Bình
78. *Nguyễn Minh Quân*, 8T Chuyên Nghĩa Hành, Quảng Ngãi
79. *Nguyễn Quang Trung*, 8A Chuyên KonTum
80. *Đoàn Ngọc Minh*, 8CT Hiệp Thành, Thủ Dầu Một, Bình Dương
81. *Nguyễn Chí Thành*, 8T_1 Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long
82. *Lê Hoàng Công*, 7T Phạm Huy Quang, Đông Hưng, Thái Bình
83. *Lương Thế Nhân*, 7CT Chuyên Bạc Liêu

B. MÔN VẬT LÝ

Giải nhất :

Phùng Duy Hưng, 11B, B_0 Chuyên lý ĐHTH, ĐHQG Hà Nội

Giải nhì :

Nguyễn Đình Thịnh, 11CL Phan Bội Châu, Nghệ An

(Xem tiếp trang 2)

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

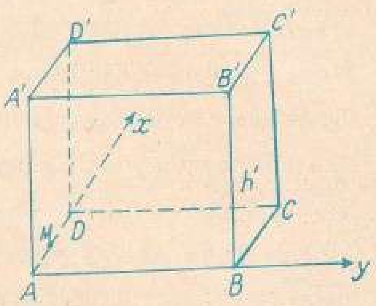
CHỌN HỆ TRỤC ĐỀ CÁC THÍCH HỢP ĐỂ GIẢI MỘT LỚP CÁC BÀI TOÁN

TRẦN NGUYÊN CHÂU
(PTTH Sào Nam - Duy Xuyên
Quảng Nam)

Trong quá trình tìm kiếm lời giải cho những bài toán về vectơ trong không gian, nhưng bạn chuẩn bị ôn thi đại học thấy vất vả, ở chỗ không biết bắt đầu từ đâu, biến đổi như thế nào ? Tôi nghĩ nếu ta chọn hệ trục Đề các thích hợp thì bài toán trở nên quen thuộc và có hướng giải rõ ràng. Tôi xin dẫn ra đây vài ví dụ.

Bài 1. (Câu Va đề 74 Tuyển sinh đại học).

Cho lập phương ABCDA'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BB' chứng minh $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AC}$.



Giải

Cho hệ trục tọa độ như hình vẽ. Lúc đó ta có

$A(0, 0, 0)$ $D(a, 0, 0)$.
$B(0, a, 0)$ $B'(0, a, a)$.
$C(a, a, 0)$ $A'(0, 0, a)$.

Với a là độ dài cạnh của lập phương.

M trung điểm AD nên $M\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$.

N trung điểm BB' nên $N\left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ còn $\overrightarrow{AC} = (a,a,0)$.

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AC}$$

đpcm.

Bài 2. *(IVa đề 123 Tuyển sinh Đại học).*

Cho hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D'. Đặt $\overrightarrow{B'A'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{c}$.

Gọi M là điểm chia AC' theo tỉ m nghĩa là $\overrightarrow{MA} : \overrightarrow{MC'} = m$

N là điểm chia CD' theo tỉ n. $\overrightarrow{NC} : \overrightarrow{ND'} = n$.

1) Biểu thị $\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'N}$ *theo* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *và m, n.*

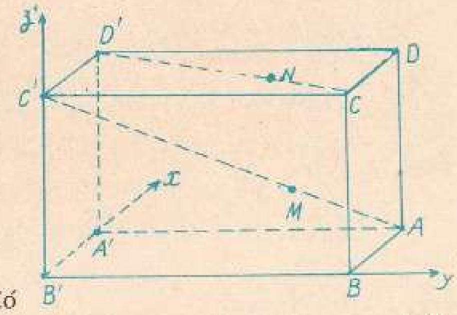
2) Xác định m, n để MN song song B'D.

3) Tính độ dài MN.

Giải

1) Biểu thị $\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'N}$

Chọn hệ trục như hình vẽ.



Lúc đó

$A'(a, 0, 0)$ $A(a, b, 0)$ với $a = |\vec{a}|$
$B'(0, 0, 0)$ $B(0, b, 0)$ $|\vec{b}| = b$
$C'(0, 0, c)$ $C(0, b, c)$ $|\vec{c}| = c$
$D'(a, 0, c)$ $D(a, b, c)$

Do

$$\overrightarrow{MA} : \overrightarrow{MC'} = m \Rightarrow M\left(\frac{a}{1-m}, \frac{b}{1-m}, \frac{-mc}{1-m}\right)$$

và $\overrightarrow{NC} : \overrightarrow{ND'} = n \Rightarrow N\left(\frac{-na}{1-n}, \frac{b}{1-n}, c\right)$

Vậy $\overrightarrow{B'M} = \left(\frac{a}{1-m}, \frac{b}{1-m}, \frac{-mc}{1-m}\right) =$

$$= \frac{\vec{a}}{1-m} + \frac{\vec{b}}{1-m} - \frac{m\vec{c}}{1-m}$$

$$\overrightarrow{B'N} = \left(\frac{-na}{1-n}, \frac{b}{1-n}, c\right) = \frac{-n\vec{a}}{1-n} + \frac{\vec{b}}{1-n} + \vec{c}$$

2) *Xác định m, n.*

$MN \parallel B'D \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương $\overrightarrow{B'D}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-na}{1-n} - \frac{a}{1-n}, \frac{b}{1-n} - \frac{b}{1-m}, c + \frac{mc}{1-m}\right) = (a, b, c).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{-na}{1-n} - \frac{a}{1-m}}{a} = \frac{\frac{b}{1-n} - \frac{b}{1-m}}{b}$$

$$= \frac{c + \frac{mc}{1-m}}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n}{1-n} - \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1-m} =$$

$$= 1 + \frac{m}{1-m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mn - 1 = -m + n \\ -m + m = 1 - n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -1 \end{cases}$$

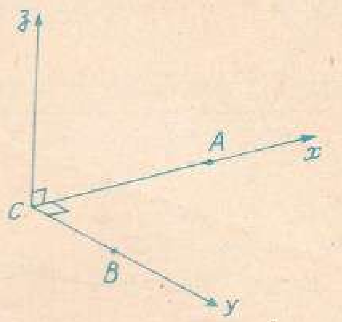
3) *Độ dài MN*

Có

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-na}{1-n} - \frac{a}{1-m}, \frac{b}{1-n} - \frac{b}{1-m}, c + \frac{mc}{1-m}\right)$$

$$MN = \sqrt{\begin{aligned} &\left(\frac{n}{1-n} + \frac{1}{1-m}\right)^2 a^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{1-m}\right)^2 (b^2) + \\ &+ \left(1 + \frac{m}{1-m}\right)^2 . c^2 \end{aligned}}$$

Bài 3. (Bài 10/149 Toán học tuổi trẻ 6/1986). *Cho ΔABC vuông ở C. Tìm những điểm P trong không gian thỏa $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 \leq \overrightarrow{PC}^2$.*



Giải

Ta trang bị hệ trục như hình vẽ

$A(a, 0, 0)$ $B(0, b, 0)$ $C(0, 0, 0)$

Gọi $P(x, y, z)$

$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 \leq \overrightarrow{PC}^2$

$\Leftrightarrow [(x-a)^2 + y^2 + z^2] + [x^2 + (y-b)^2 + z^2] \leq x^2 + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + z^2 + (y-b)^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \quad P(a, b, 0)$$

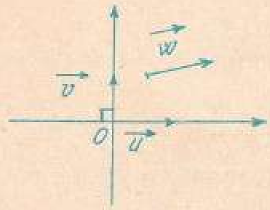
Vậy tập hợp cần tìm có 1 phần tử đó là đỉnh thứ 4 của hình chữ nhật $ACBP$.

Bài 4. (Câu Va đề 65 Tuyển sinh Đại học). *Cho $\vec{u}, \vec{v}$ có độ dài là 1. Chứng minh rằng. Với mọi $\vec{W}$ có độ dài 1 đồng phẳng với $\vec{u}, \vec{v}$ thì $\vec{a} = (\vec{u}.\vec{W})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{W})\vec{u}$ có độ dài không đổi.*

Giải

Theo đề cho có thể chọn $\vec{u} = (1, 0)$. $\vec{v} = (0, 1)$

Ta xây dựng hệ trục như hình vẽ.



Gọi $\vec{W} = (W_1, W_2)$

và theo đề ta có $W_1^2 + W_2^2 = 1$.

Vậy $(\vec{u}.\vec{W})\vec{v} = W_1(0, 1) = (0, W_1)$

$(\vec{v}.\vec{W})\vec{u} = W_2(1,0) = (W_2, 0)$

Vậy $\vec{a} = (W_2, -W_1)$

$|\vec{a}| = \sqrt{W_1^2 + W_1^2} = 1$ đpcm.

Để kết thúc bài viết này tôi xin mời các bạn cùng giải những bài tập sau.

Bài 1. (Câu Va đề 144 Tuyển sinh Đại học). *Cho lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi P, Q là điểm xác định bởi*

$$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{C'Q} = -\overrightarrow{C'D}.$$

a) Chứng minh PQ qua trung điểm M của BB'

b) Tính độ dài PQ

Bài 2. (Đề thi vào ĐH Tổng hợp Hà nội 1993). *Cho lập phương ABCDA'B'C'D' có các cạnh là 1. Trên BB', CD, A'D'. Lấy M, N, P = a (0 < a < 1)*

a) Chứng minh

$\overrightarrow{MN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + (a-1)\overrightarrow{AA'}$

b) Tính $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{AC'}$. Có thể nói gì về vị trí AC' đối với mp (MNP)

Bài 3. Cho lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Lấy điểm M thuộc AD', điểm N thuộc BD. Với $AM = DN = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$

a) Chứng minh với $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN ngắn nhất

b) Khi MN ngắn nhất hãy chứng minh.

1/ MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB

2/ MN // A'C

c) Chứng minh khi x đổi MN // (A'BCD'). (Đề 42 câu 5b).

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN NĂM 1997

TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI HÀ NỘI

Câu I.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số : $y = sinx - \cos^2 x + \frac{1}{2}$

Câu II.

1) Giải phương trình lượng giác sau :
$3(\text{cotg}x - \cos x) - 5(\text{tg}x - \sin x) = 2$

2) Tìm m để bất phương trình :
$\sqrt{(1 + 2x)(3 - x)} > m + (2x^2 - 5x + 3)$ thỏa mãn $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

Câu III.

1) Tìm đạo hàm của hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x = 0 \\ \dfrac{1 - cosx}{x} & \text{với } x \neq 0 \end{cases}$$

2) Cho $y = \sin^2 5x$. Tìm $y^{(n)}$

Câu IV.

1) Trong hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ cho ba điểm

$$H\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), K\left(0, \frac{1}{2}, 0\right), I\left(1, 1, \frac{1}{3}\right)$$

a) Viết phương trình giao tuyến của mặt phẳng $[HKI]$ với mặt phẳng $x + z = 0$ ở dạng chính tắc.

b) Tính cosin của góc phẳng tạo bởi mặt phẳng $[HKI]$ với mặt tọa độ Oxy.

2) Tính

$$\int_0^{1/9} \left(5^{3x} + \frac{x}{\sin^2(2x + 1)} + \frac{1}{\sqrt[3]{4x - 1}}\right) dx$$

Câu Va (CPB).

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x}$

2) Tìm m để hệ bất phương trình
$\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ (m - x^2)(x + m) < 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Câu Vb (THCB).

1) Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm tương ứng của các cạnh AB, CD và $CB = a$. Tính độ dài MN.

2) Một đợt xổ số phát hành 20000 vé trong đó có 1 giải nhất, 100 giải nhì, 200 giải ba, 1000 giải tư và 5000 giải khuyến khích. Tìm xác suất để một người mua 3 vé, trúng 1 giải nhì và 2 giải khuyến khích.

ĐÁP ÁN TÓM TẮT

Câu I :

1) (1 điểm) – Tập xác định : $x \neq 1$.

– Chiều biến thiên :

$$y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \quad 2$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 ; t(0) = -2 \\ x = 2 ; t(2) = 2 \end{array}\right.$$

– Tiệm cận đứng :
$x = 1$ vì $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

– Tiệm cận xiên :
$y = x - 1$ vì $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$

– Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

– Đồ thị không cắt Ox, cắt Oy tại $(0, -2)$ và có tâm đối xứng $(1 ; 0)$ – Các bạn tự vẽ.

2) (1 điểm). Ta có $y = \sin^2 x + sinx - \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sin x \in [-1 ; 1]$ đưa về tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của $y = t^2 + t - \frac{1}{2}$ với $t \in [-1 ; 1]$. Vì $y' = 2t + 1$ nên có bảng biến thiên :

t	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y		$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$	

Do đó $y_{LN} = \frac{3}{2}$; $y_{BN} = -\frac{3}{4}$.

Câu II :

1) (1 điểm). Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$

Phương trình đưa về dạng :

$$(\cos x + \sin x - \sin x\cos x)\left(\frac{3}{sinx} - \frac{5}{cosx}\right) = 0$$

* Xét : $\cos x + \sin x - \sin x\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ dẫn đến $t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$, chỉ có $t = 1 - \sqrt{2} \in [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

Khi đó : $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} \Leftrightarrow$
$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2} - 2}{2}\right) + 2k\pi \ (k \in Z)$.

* Xét $\frac{3}{sinx} - \frac{5}{cosx} = 0 \Leftrightarrow tgx = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$
$x = arctg\frac{3}{5} + k\pi \ (k \in Z)$.

Tóm lại :

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2} - 2}{2}\right) + 2k\pi \\ x = arctg\frac{3}{5} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z).$$

2) (1 điểm) Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ thì $t \in \left[0 ; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$.

Bất phương trình thỏa mãn với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2} ; 3\right] \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - (m+6) > 0$ $\forall\, t \in \left[0 ; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

Ta có : $f'(t) = 2t + 1$ nên bảng biến thiên của $f(t)$ trên $\left[0 ; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$ là

t		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{7\sqrt{2}}{4}$	
f'(t)	−	0			+		+
f(t)				−(m+6)	↗		

Do đó : $f(t) > 0\ \ \forall\ t \in \left[0 ; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right] \Leftrightarrow -(m+6) > 0 \Leftrightarrow m < -6$.

Câu III. 1) (1 điểm)

Nếu $x \neq 0$ thì $f'(x) = \dfrac{x\sin x - 1 + \cos x}{x^2}$

Nếu $x = 0$ thì : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$.

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} . \sin\frac{x}{2} = 0 \neq 1 = f(0)$.

Chứng tỏ hàm số không liên tục tại $x = 0$ nên $f'(0)$ không tồn tại. Có thể dùng định nghĩa : $f'(0) = \lim\limits_{\Delta_x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta_x) - f(0)}{\Delta_x}$

2) (1 điểm). Ta có :

$y' = 5\sin 10x$

$y'' = 5 . 10 . \sin\left(10x + \frac{\pi}{2}\right)$

Từ đó dự đoán

$y^{(n)} = 5 . 10^{n-1} . \left[10x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$

và chứng minh dự đoán này đúng bằng phương pháp quy nạp toán học.

Câu IV. 1) (1,0 điểm) a) Phương trình mặt phẳng [HKI]

$$\begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 9z - 1 = 0$$

Giao tuyến $\begin{cases} 2x + 2y - 9z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ (*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = \frac{11}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$ vậy $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{\frac{11}{2}} = \dfrac{z}{1}$

b) $\cos\alpha = \pm\cos(\vec{n}, \vec{k})$, $\left(\begin{cases} \vec{n}(2, 2, -9) \\ \vec{k}(0, 0, 1) \end{cases}\right)$

$= \pm \dfrac{\vec{n}.\vec{k}}{|\vec{n}|\,|\vec{k}|} = \pm \dfrac{9}{\sqrt{89}}$.

2) (1,0 điểm) $I = I_1 + I_2 + I_3$

*) $I_1 = \int_0^{\frac{1}{9}} 5^{3x}\,dx = \dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}\Big|_0^{\frac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt[3]{5} - 1}{3\ln 5}$.

*) $I_3 = \int_0^{\frac{1}{9}} \dfrac{dx}{\sqrt[5]{4x-1}} = \dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{9}} (4x-1)^{-\frac{1}{5}}\,d(4x-1)$

$= \dfrac{5}{16}\sqrt[5]{(4x-1)^4}\Big|_0^{\frac{1}{9}} = \dfrac{5}{16}\left[\sqrt[5]{\left(\frac{5}{9}\right)^4} - 1\right]$

(*) $I_2 = \int_0^{\frac{1}{9}} \dfrac{x\,dx}{\sin^2(2x+1)} = -\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{9}} x\ d\,\mathrm{cotg}(2x+1)$

$= -\dfrac{1}{2}x\,\mathrm{cotg}(2x+1)\Big|_0^{\frac{1}{9}} + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{9}} \dfrac{\cos(2x+1)}{\sin(2x+1)}\,dx$

$= -\dfrac{1}{18}\mathrm{cotg}\dfrac{11}{9} + \dfrac{1}{4}\ln|\sin(2x+1)|\Big|_0^{\frac{1}{9}}$

$= -\dfrac{1}{18}\mathrm{cotg}\dfrac{11}{9} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sin\frac{11}{9}}{\sin 1}$.

Câu VA. 1) (0,5 điểm)

Ta có $\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|$, $\forall x \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -|x| \leq x\cos\frac{1}{x} \leq |x|$; $\forall x \neq 0$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = 0$

2) (1,5 điểm)

$\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 & (1) \\ (m - x^2)(x + m) < 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$

$f(x) = (m - x^2)(x + m) \geq 0\ \forall x \in [-1, 1]$ (*)

Điều kiện cần. $f(1) = (m-1)(m+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$

Điều kiện đủ. Ta chứng minh

$\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [-1, 1]$ (*)

(+) $m \leq -1$: $m - x^2 \leq -1 - x^2 < 0\ \forall x$; $m + x \leq -1 + x \leq 0\ \forall x \in [-1, 1]$

Vậy (*) thỏa mãn :

(+) $m \geq 1$: $m - x^2 \geq 1 - x^2 \geq 0\ \forall x \in [-1, 1]$; $m + x \geq 1 + x \geq 0\ \forall\ x \in [-1, 1]$

Vậy (*) cũng thỏa mãn

Kết luận : $\left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$ thỏa mãn đề bài.

(Xem tiếp trang 11)

ĐỂ HỢP LÔGIC HƠN

NGUYỄN HUY ĐOAN
(ĐHSP – ĐHQG Hà Nội)

Tài liệu giáo khoa thí điểm môn hình học ban KHTN lớp 11 của các tác giả Văn Như Cương và Nguyễn Mộng Hy định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bởi

$$\vec{a}\,\vec{b} = \frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right) \quad (1)$$

Một tính chất của tích vô hướng được phát biểu và chứng minh như sau : "Trong tam giác ABC ta có

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) \quad (2)$$

Chứng minh : Vì $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ nên

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \\ = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} \quad (3)$$

Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

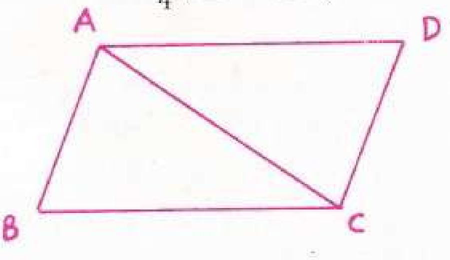
Sẽ không có gì đáng nói nếu (2) không được sử dụng để chứng minh một tính chất khác của tích vô hướng : tính phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng véctơ :

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}. \quad (4)$$

Bởi vì để chứng minh (2), ta đã dùng khai triển (3), nghĩa là đã phải sử dụng tính chất (4). Thành thử tác giả mắc phải vòng luẩn quẩn khi dùng (2) để chứng minh (4).

Theo tôi có thể dùng định nghĩa (1) để chứng minh (2) như sau : Dựng hình bình hành $ABDC$. Theo định nghĩa (1) có :

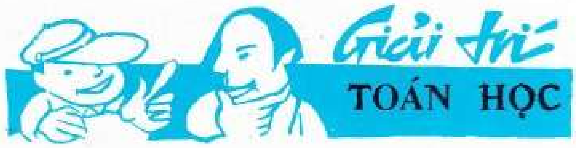
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2\right) \\ = \frac{1}{4}\left(AD^2 - BC^2\right) \quad (5)$$



Trong hình bình hành $ABCD$ có :

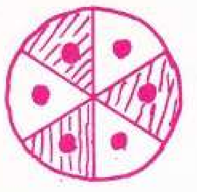
$$AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2 \quad (6)$$

Thế AD trong (5) bởi (6) ta đi đến (2) (đpcm).



Giải đáp bài

THU GOM CÁC ĐỒNG TIỀN



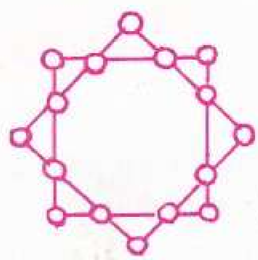
Ta gạch chéo 3 mảnh của hình tròn như trên hình vẽ bên. Khi đó ta có 3 mảnh được gạch chéo và 3 mảnh trắng. Tổng số các đồng tiền trong các mảnh có gạch chéo và tổng số đồng tiền trong các mảnh trắng là bằng nhau và bằng 3 (số lẻ). Sau một lần di chuyển bất kỳ ta thấy tổng số đồng tiền trong các mảnh có gạch chéo (hoặc trong các mảnh trắng) sẽ *tăng* hay *giảm* đi *một*. Vậy sau một *số chẵn* lần di chuyển tổng số các đồng tiền trong các ô có gạch chéo (hoặc trong các mảnh trắng) luôn luôn là một số lẻ.

Như vậy ta sẽ không thể có sau một số chẵn lần di chuyển thì tổng số các đồng tiền ở trong các mảnh có gạch chéo (hay trong các mảnh trắng) là số chẵn. Nghĩa là không thể gom tất cả các đồng tiền vào một mảnh sau một số chẵn lần di chuyển.

(Theo *Nguyễn Phương Thảo*, 9A, Nguyễn Trãi, TP **Hải Dương** ; *Đặng Ngọc Dương*, 8A, PTCS TT Hiệp Hòa, **Bắc Giang**).

BÌNH PHƯƠNG

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH VUÔNG



Hãy điền các số tự nhiên từ 1 đến 16 vào các ô tròn ở hình bên sao cho tổng các số trong các ô trên các cạnh của mỗi hình vuông đều bằng nhau.

HOÀNG MINH PHÚC

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT46M7

Sắp chữ tại TTCBĐH NXBGD
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng