G. POLYA

GIẢI MỘT BÀI TOÁN
NHƯ THẾ NÀO ?

Người dịch : HỒ THUẦN – BÙI TƯỜNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

312-2009/CXB/16-578/GD

Mã số : 8I694H9 - ĐTH

LỜI NGƯỜI DỊCH

Quyển sách "Giải một bài toán như thế nào ?" nguyên bản bằng tiếng Anh, đã được dịch ra nhiều thứ tiếng và được độc giả các nước hết sức hoan nghênh. Một nhà toán học nổi tiếng là Vanđơ Vacđen (Vander Varden) đã phát biểu : "mỗi học sinh, mỗi sinh viên, mỗi nhà bác học và đặc biệt mỗi nhà giáo đều nên đọc kĩ quyển sách này". Câu nói này có một ý nghĩa rõ rệt : để đọc và hiểu quyển sách này về đại bộ phận, chỉ cần có kiến thức phổ thông về toán (lớp chín). Tuy nhiên, về mặt lí luận thì sách này có thể đáp ứng cho mọi trình độ.

Rất tiếc là chúng tôi không có nguyên bản tiếng Anh, mà chỉ có các bản dịch tiếng Nga và vài thứ tiếng khác. Các bản dịch này nhiều khi về chi tiết lại không phù hợp hoàn toàn với nhau, do đó chúng tôi cũng đã gặp phải một số khó khăn nhất định, cũng vì vậy mà so với bất cứ bản dịch nào (bản dịch tiếng Nga chẳng hạn) thì bản dịch này cũng có nhiều điểm khác. Mong bạn đọc hiểu cho điều đó.

Trong khi dịch, chúng tôi có lược đi một số mục không quan trọng hoặc nếu đặt vào bản dịch tiếng Việt thì hoàn toàn vô nghĩa.

Rất mong các độc giả chỉ bảo cho những điều thiếu sót của chúng tôi trong bản dịch này.

LỜI TỰA

Một phát minh khoa học lớn cho phép giải quyết một vấn đề lớn, nhưng ngay cả trong việc giải một bài toán cũng có ít nhiều phát minh. Bài toán mà ta giải có thể là bình thường, nhưng nếu nó khêu gợi được trí tò mò và buộc ta phải sáng tạo và nếu tự mình giải được bài toán nào đó thì ta sẽ có thể biết được cái quyến rũ của sự sáng tạo cùng niềm vui thắng lợi.

Những tình cảm như vậy đến một tuổi nào đó, có thể khuấy động sự ham thích công việc trí óc và mãi mãi để lại dấu vết trong cá tính của người làm toán.

Thành thử người thầy dạy toán có rất nhiều thuận lợi. Nếu như người thầy dùng tất cả thời gian cho học sinh làm những bài tập tầm thường, thì sẽ làm cho học sinh mất hết hứng thú, trở ngại cho việc phát triển trí tuệ của các em và như vậy người thầy đã không biết sử dụng những thuận lợi của mình. Nhưng nếu người thầy khêu gợi được trí tò mò của học sinh bằng cách đưa cho học sinh những bài tập phù hợp với trình độ, giúp học sinh giải các bài toán bằng cách đặt ra câu hỏi gợi ý, thì người thầy có thể mang lại cho học sinh hứng thú của sự suy nghĩ độc lập và những phương tiện để đạt được kết quả.

Người học sinh cũng có những thuận lợi đặc biệt. Tất nhiên, những thuận lợi này sẽ mất đi nếu người học sinh xem toán học như là một môn học mà sau kì thi cuối cùng thì càng quên nhanh càng tốt. Ngay đối với một học sinh ít nhiều có khiếu về toán, những thuận lợi đó cũng có thể mất đi bởi vì cũng như những người khác, bản thân người học sinh đó phải tự thấy được năng khiếu và sở thích của mình. Mà nếu như không bao giờ ăn bánh nhân đậu thì ta không thể biết được là mình có thích thú bánh đó không. Nhưng có thể là ta sẽ phát hiện ra rằng một bài toán cũng hấp dẫn như một trò chơi ô chữ, hay một công việc trí óc căng thẳng cũng có thể xem như một trận đấu bóng hào hứng. Chừng nào mà người học sinh đã thích thú toán học thì khó mà quên được môn đó và rất có thể là toán học sẽ chiếm một vị trí nhất định trong cuộc đời của anh ta. Anh ta cũng có thể yêu toán một cách tài tử, hoặc sử dụng toán làm công cụ trong công tác chuyên môn, hoặc cũng có thể lấy đó làm nghề nghiệp hay tham vọng chính của đời mình.

Tác giả nhớ lại hồi còn là một sinh viên có khá nhiều tham vọng, khao khát muốn hiểu biết thấu đáo toán học và vật lí. Anh sinh viên đó đã nghe nhiều buổi nói chuyện, đọc nhiều sách và đã cố tìm hiểu các cách giải và những sự kiện đã trình bày, nhưng có một câu hỏi luôn luôn ám ảnh anh ta "cách giải này đúng thật, nhưng làm thế nào để có thể nghĩ ra một cách giải khác ? Sự kiện này đã được kiểm nghiệm, nhưng làm thế nào để phát hiện ra những sự kiện như vậy ? Và làm thế nào để tự mình phát hiện ra được ?". Khi tác giả dạy toán ở một trường đại học, luôn hi vọng rằng một trong số sinh viên giỏi của mình sẽ đặt ra những câu hỏi tương tự và mình sẽ cố làm thoả mãn sự tò mò của họ. Chính vì cố tìm hiểu không phải cách giải một bài toán này hay bài toán khác, mà còn cả những lập luận cùng quá trình giải toán, đồng thời giải thích những lập luận và quá trình đó, mà tác giả đã viết cuốn sách này. Mong rằng cuốn sách có thể giúp cho các nhà giáo có mong muốn phát triển khả năng giải toán của học sinh cũng như giúp các học sinh muốn phát triển khả năng giải toán của mình.

Tuy cuốn sách này đặc biệt đáp ứng những đòi hỏi của học sinh và các thầy dạy toán, nó cũng có ích cho những ai muốn hiểu đường lối và các phương tiện dẫn tới những sáng kiến và phát minh. Mặt khác, vấn đề này cũng được rất nhiều người quan tâm đến. Những cột mà các báo và tạp chí phổ thông dành cho các trò chơi ô chữ và những câu đố khác chứng tỏ rằng có nhiều người đã bỏ thì giờ để giải những bài toán không có lợi ích thực tế. Sau cái mong muốn giải một bài toán cụ thể có thể còn có một sự tò mò sâu sắc, một sự mong muốn hiểu được những đường lối và phương tiện, lập luận và quá trình dẫn tới cách giải.

Cuốn sách này được soạn một cách khá gọn gàng và đơn giản, là kết quả của một sự nghiên cứu lâu dài và nghiêm túc các phương pháp giải toán ; việc nghiên cứu các phương pháp này là đối tượng của "nghệ thuật phát minh" bây giờ không còn thịnh hành nữa nhưng một thời đã rất thịnh hành và rất có thể có nhiều triển vọng sau này. Trong khi nghiên cứu các phương pháp giải toán, chúng tôi đã thấy một hình thái thứ hai của toán học. Thực vậy, toán học có hai mặt, vừa là khoa học chặt chẽ của Ơclit nhưng đồng thời cũng còn là một cái gì khác nữa. Toán học trình bày theo lối Ơclit là một khoa học hệ thống suy diễn. Nhưng toán học trong quá trình hình thành là một khoa học thực nghiệm, quy nạp. Cả hai hình thái đó đều lâu dài cũng như bản thân toán học. Tuy nhiên, hình thái thứ hai về một phương diện nào đó, là một điều mới đối với chúng ta. Không bao giờ người ta trình bày cho học sinh và cả thầy giáo cũng như quần chúng đông đảo một kiến thức toán học đúng y như trong quá trình phát sinh của nó.

Đối tượng của "thuật" liên quan chặt chẽ với nhiều ngành khoa học khác, nhiều bộ phận riêng biệt của nó có thể xem không những chỉ thuộc về toán học mà còn thuộc về kiến thức sư phạm và cả triết học nữa. Tác giả tuy biết rõ là có thể có những lời phê bình thuộc lĩnh vực các môn khoa học nói trên và có ý thức rất rõ về khả năng hạn chế của mình, vẫn có thể tự hào một điều là bản thân có một số kinh nghiệm nhất định về việc giải toán và việc dạy toán cho nhiều trình độ khác nhau.

Đối tượng của cuốn sách này sẽ được xét kĩ và chi tiết hơn trong một cuốn sách cùng tác giả "Toán học và những suy luận có lí" đã được dịch sang tiếng Việt.

Chúng tôi xin cảm ơn rất nhiều các bạn đồng nghiệp đã khuyến khích và hết lòng giúp đỡ chúng tôi trong nhiều năm viết cuốn sách này.

Trường Đại học Stanford

G. POLYA

MỞ ĐẦU

Toàn bộ nội dung của sách này xoay quanh một bảng những câu hỏi và lời khuyên (gợi ý). Bảng này được in ở cuối sách. Tất cả các câu hỏi hay lời khuyên (gợi ý) rút ra từ bảng này đều in nghiêng ; chúng ta sẽ gọi tắt bảng đó là "bảng" hay "bảng của chúng ta".

Chúng ta sẽ xét chi tiết mục đích của bảng, chứng tỏ rằng các ví dụ về lợi ích thực tế có thể rút ra được từ bảng đó như thế nào, giải thích những khái niệm và những quá trình suy luận dựa vào đó để thành lập bảng. Để giải thích sơ bộ, có thể nói vắn tắt như sau, nếu chính bạn cần đến những câu hỏi, lời khuyên này và biết cách sử dụng chúng, thì chúng có thể giúp bạn giải bài toán của mình. Nếu bạn cần đến những câu hỏi và lời khuyên này cho một học sinh của bạn thì bạn có thể giúp em đó giải bài toán.

Sách này chia làm ba phần.

Phần thứ nhất lấy tên là "Trong lớp", gồm 20 mục. Dẫn chứng lấy ở các mục này đều được đánh số bằng chữ in đậm nét, chẳng hạn "mục 7".

Các mục 1 – 5 xét về mục đích của bảng trên những nét tổng quát nhất. Các mục 6 – 17 giải thích thế nào là "những phần chính", thế nào là "những câu hỏi chính", trong những mục này có xét một ví dụ thực hành, mục 18 – 20 chứa những ví dụ tiếp sau.

Phần thứ hai rất ngắn, lấy tên là "Giải một bài toán như thế nào". Phần này được viết dưới hình thức đối thoại : một người thầy trả lời những câu hỏi ngắn của một học sinh, cả hai thầy và trò đều ít nhiều được lí tưởng hoá.

Phần thứ ba là phần lớn nhất, lấy tên là "Tự điển con" ; sau này ta sẽ gọi tắt là "Tự điển". Nó gồm 64 mục sắp xếp theo thứ tự vần chữ cái. Chẳng hạn ý nghĩa của từ ngữ "thuật phát minh", được giải thích trong mục tương ứng của "tự điển" khi dẫn chứng ngay cả trong văn bản. Một số mục trong các mục mang tính chất đặc biệt hơn : những chỗ như vậy in trong dấu ngoặc vuông. Một số mục của "tự điển" liên quan chặt chẽ với phần thứ nhất, chúng bổ sung cho phần này bằng những minh hoạ và những lời bình luận chính xác hơn, những mục còn lại ít nhiều đều có mặt trong khuôn khổ của phần thứ nhất, giải thích những nguyên lí cơ bản *nằm trong cơ sở của phần này. Mục "Thuật phát minh hiện đại" đóng vai trò chủ chốt. Nó vạch ra mối liên hệ giữa các mục chính của "Tự điển" và dàn bài chung; nó gồm cả những chỉ dẫn về cách dùng những điểm đặc biệt khác của bảng vì tính muôn màu muôn vẻ của những vấn đề nói tới trong các mục của tự điển, ở đây tự điển đã được quan niệm theo một dàn bài chung, có một số mục khá dài, dành cho việc tranh luận một cách có hệ thống, nhưng gọn gàng về một số vấn đề có tính chất chung. Những mục khác gồm những lời bình luận chính xác hơn, một số khác là những sự kiện lịch sử, những đoạn văn trích dẫn những câu châm ngôn và cả những mẩu chuyện vui.*

Không nên đọc "Tự điển" nhanh quá, văn bản của nó thường ngắn gọn và súc tích. Độc giả có thể tuỳ ý sử dụng "Tự điển" để có thể biết một vấn đề nào đó. Nếu vấn đề đó nảy ra trong khi giải bài toán của mình hay của học sinh, thì việc tra "Tự điển" lại càng có ích. Chúng tôi nhiều lần nhắc tới "học sinh" và "người thầy" chúng ta sẽ hiểu "học sinh" là một học sinh trung học hay sinh viên đại học, hay bất cứ một người nào học toán. Cũng như thế, chúng ta sẽ hiểu "người thầy" có thể là giáo viên trung học, đại học, hay bất kì một người nào quan tâm tới phương pháp giảng bài dạy toán. Tác giả khi thì đứng ở địa vị học sinh, khi thì ở địa vị người thầy (thường đứng ở địa vị này, trong phần thứ nhất). Tuy nhiên, thông thường – nhất là trong phần thứ ba – quan điểm của tác giả không phải là của người thầy cũng không phải là của học sinh mà là quan điểm của một người mong muốn giải được bài toán của mình.

PHẦN THỨ NHẤT

TRONG LỚP HỌC

MỤC ĐÍCH CỦA BẢNG

1. Giúp đỡ học sinh

Giúp đỡ học sinh là một trong những nhiệm vụ quan trọng nhất mà người thầy nhất thiết phải làm. Nhiệm vụ đó không phải là dễ, nó đòi hỏi phải có thời gian và kinh nghiệm, sự tận tâm và những nguyên tắc đúng đắn. Người học sinh với sự nỗ lực của bản thân phải thu được càng nhiều càng tốt những kinh nghiệm làm việc độc lập. Nhưng nếu anh ta một mình đứng trước một bài toán mà không có một sự giúp đỡ nào, hay nhận được sự giúp đỡ quá ít, thì không thể tiến bộ được. Mặt khác, nếu thầy giáo giúp đỡ nhiều quá thì học sinh sẽ chẳng còn gì phải làm. Thầy giáo phải giúp đỡ một cách vừa phải, không nhiều quá, cũng không ít quá và làm sao để lại cho học sinh một *phần công việc hợp lí*.

Nếu khả năng của học sinh bị hạn chế, thầy giáo ít nhất cũng phải làm cho học sinh có cảm giác rằng anh ta tự làm lấy. Do đó, sự giúp đỡ của thầy giáo cần phải kín đáo và không bắt học sinh phải lệ thuộc vào mình.

Tốt nhất là giúp học sinh một cách tự nhiên. Thầy giáo phải đặt địa vị mình là một học sinh trước một vấn đề, cố gắng hiểu xem học sinh đó nghĩ gì, đặt một câu hỏi hay hướng dẫn các bước suy luận mà *học sinh có thể tự mình nghĩ ra được.*

2. Câu hỏi, lời khuyên, các quá trình suy luận

Trong khi cố gắng giúp đỡ học sinh một cách có hiệu quả và tự nhiên, nhưng không bắt học sinh phải lệ thuộc vào mình, thầy giáo tất nhiên vẫn phải liên tiếp đề ra những câu hỏi và hướng dẫn các bước suy luận. Chẳng hạn, khi giải rất nhiều bài toán, cần đặt ra những câu hỏi *cái gì là chưa biết* ? Chúng ta có thể đặt câu hỏi đó bằng nhiều cách khác : *"Người ta hỏi gì ? Anh muốn tìm gì ? Anh phải tìm những gì ?"*. Mục đích của những câu hỏi này nhằm buộc học sinh phải tập trung sự chú ý vào cái chưa biết. Đôi khi người ta đạt được kết quả đó một cách tự nhiên hơn bằng cách khuyên. *Hãy nhìn kĩ vào cái chưa biết.*

Câu hỏi và lời khuyên cùng có một mục đích chung nhằm gợi ý ra cùng một quá trình suy luận, chúng tôi nghĩ rằng việc tập hợp và sắp xếp những câu hỏi và những lời khuyên điển hình để giải những bài toán với các học sinh là rất tiện lợi. Bảng mà chúng tôi trình bày gồm những câu hỏi và lời khuyên chọn lọc và sắp xếp cẩn thận. Nếu độc giả đã làm quen với bảng tới mức có thể thấy được một hành động khuyên bảo ẩn sau mỗi lời khuyên, thì độc giả sẽ thấy rõ ràng bảng trên gián tiếp nói đến những quá trình *suy luận có lợi đặc biệt cho việc giải những bài toán*. Những quá trình suy luận đó đã được ghi theo một trình tự thông thường nhất.

3. Tính tổng quát

Là một đặc trưng quan trọng của những câu hỏi và lời khuyên nằm trong bảng. Hãy lấy những câu hỏi : *"Cái gì là chưa biết ? Cái gì đã cho biết ? Điều kiện của bài toán là gì ?"* Những câu hỏi đó được áp dụng một cách tổng quát, trong tất cả các loại bài toán đều có thể đặt ra những câu hỏi đó. Việc sử dụng chúng không bị hạn chế với bất kì một bài toán có nội dung cụ thể nào. Dù là một bài toán đại số hay hình học, một bài toán toán học hay phi toán học, lí thuyết hay thực hành, một bài toán nghiêm túc hay chỉ là một câu đố đơn giản thì cũng vậy, những câu hỏi vẫn có giá trị và có thể giúp ta giải bài toán.

Thực ra thì cũng có *sự hạn chế*, nhưng nó không liên quan gì tới đề bài toán. Một số câu hỏi, một số lời khuyên trong bảng chỉ áp dụng được cho "những bài toán về tìm tòi" mà không phải là những "bài toán về chứng minh". Đối với một bài toán loại sau, phải dùng những câu hỏi khác (xem những bài toán về tìm tòi, những bài toán về chứng minh).

4. Lương tri

Những câu hỏi và lời khuyên trong bảng đều tổng quát, ngoài ra chúng rất tự nhiên, đơn giản, hiển nhiên và đều bắt nguồn từ lương tri thông thường. Xét lời khuyên : *"Hãy xét kĩ cái chưa biết và hãy cố nghĩ tới một bài toán quen thuộc có cùng ẩn số hay có ẩn số tương tự"*. Lời khuyên đó khuyên anh làm cái việc mà lúc anh đói bụng thì anh muốn kiếm một thứ gì để ăn và anh nghĩ tới những cách quen thuộc để kiếm ra nó. Có khi anh gặp một bài toán dựng hình (dựng một tam giác chẳng hạn, anh nghĩ tới những cách thức thông thường để dựng một tam giác). Khi gặp một bài toán bất kì nào đó anh muốn tìm một cái chưa biết và nghĩ tới những cách quen thuộc để tìm một cái chưa biết thuộc loại này hay một cái chưa biết tương tự. Làm như vậy, anh đã theo đúng lời khuyên rút ra từ trong bảng. Anh đã đi đúng đường : lời khuyên là đúng, nó vạch cho anh một con đường để dẫn tới thành công.

Tất cả những câu hỏi trong bảng đều tự nhiên, đơn giản, hiển nhiên, thể hiện lương tri thông thường nhưng sự thể hiện này có tính chất tổng quát. Những câu hỏi và lời khuyên của bảng giúp ta một cách xử trí, mà cách xử trí này thì một người có ít nhiều lương tri, thực sự muốn giải bài toán một cách nghiêm túc, tự nhiên sẽ nghĩ đến.

Nhưng một người xử trí đúng như vậy, thường không quan tâm tới việc mô tả chính xác cách xử trí của mình và có thể là không có khả năng làm, như vậy bảng của chúng tôi sẽ thử cố làm việc đó.

5. Thầy giáo và học sinh. Sự bắt chước và thực hành

Khi thầy giáo lấy một câu hỏi hay một lời khuyên từ trong bảng ra cho học sinh là nhằm hai mục đích : trước hết là giúp học sinh giải một bài toán cụ thể, sau nữa là phát triển những khả năng của học sinh để họ có thể tự lực giải những bài toán sau này. Kinh nghiệm chứng tỏ rằng các câu hỏi và lời khuyên của bảng nếu dùng đúng, thường giúp nhiều cho các em học sinh. Chúng có hai đặc điểm chung : lương tri và tổng quát.

Vì thể hiện lương tri, nên chúng thường nảy ra một cách tự nhiên, các em học sinh đều có thể nghĩ tới được. Vì tổng quát, nên chúng giúp đỡ không gò bó, mà chỉ vạch một hướng chung, để cho người học sinh còn nhiều việc phải làm.

Tuy nhiên, hai mục đích mà chúng tôi vừa nói liên hệ mật thiết với nhau. Nếu như thực tế, người học sinh đạt được tới chỗ giải được bài toán của mình, thì từ đó em đó cũng phát triển luôn khả năng giải các bài toán nói chung. Vậy, không nên quên rằng, những câu hỏi và những lời khuyên của chúng tôi là tổng quát và áp dụng được cho nhiều trường hợp. Nếu dùng nhiều lần một câu hỏi, người học sinh sẽ chú ý đến nó một cách trực giác và em đó có thể tự đặt ra được câu hỏi trong những trường hợp tương tự. Nếu các em tự đặt được câu hỏi đó nhiều lần thì cuối cùng các em có thể rút ra được những ý kiến xác đáng.

Nhờ sự thành công đó, học sinh dần dần sẽ khám phá ra cách dùng những câu hỏi và tới lúc này các em đã thực sự lĩnh hội được nó.

Người học sinh có thể nhớ một số những câu hỏi trong bảng tới mức độ là cuối cùng em có thể đặt được câu hỏi đúng chỗ, đúng lúc và thực hiện một cách tự nhiên, có hiệu quả trong quá trình suy luận tương ứng. Người học sinh đó chắc chắn là đã rút ra được hết những cái lợi của bảng này. Người thầy làm thế nào để đạt được kết quả tốt như vậy.

Giải một bài toán là một nghệ thuật do thực hành mà có, cũng như việc bơi chẳng hạn. Vậy mà sự khéo léo thực hành lại đạt được bằng cách bắt chước và thí nghiệm. Khi tập bơi, người ta bắt chước những động tác chân tay của những người khác để giữ cho đầu nổi trên mặt nước và cuối cùng người ta học bơi bằng cách tập bơi thực sự. Khi giải các bài toán cũng phải quan sát và bắt chước những cái mà người khác đã làm và cuối cùng thì nắm được nghệ thuật đó bằng cách làm những bài tập. Thầy giáo muốn phát triển khả năng giải các bài toán của học sinh thì phải khiến cho các em thích thú những bài toán và đảm bảo cho các em thật nhiều điều kiện học hỏi (bắt chước) và thực hành.

Nếu thầy giáo muốn phát triển những quá trình suy nghĩ của học sinh tương ứng với những câu hỏi và lời khuyên trong bảng thì cần phải đặt ra cho các em các câu hỏi, nói với các em những lời khuyên, càng thường xuyên càng tốt nhưng phải sao cho tự nhiên. Mặt khác, khi giải một bài toán trong lớp, người thầy giáo phải ít nhiều "dàn cảnh" những ý của mình bằng cách đặt ra cho mình những câu hỏi như khi giúp đỡ học sinh. Như vậy, người học sinh chắc chắn sẽ khám phá ra cách sử dụng những câu hỏi và những lời khuyên, các em sẽ thu được những kiến thức quan trọng hơn cả những kiến thức về một mệnh đề toán học riêng biệt nào đó.

NHỮNG PHẦN CHÍNH CỦA BẢNG, NHỮNG CÂU HỎI CHÍNH

6. Bốn bước

Để tìm cách giải, chúng ta phải thay đổi nhiều lần quan điểm và cách nhìn bài toán, chúng ta phải luôn luôn thay đổi vị trí. Thoạt đầu, quan niệm của chúng ta về bài toán rất có thể là không đầy đủ, quan niệm của chúng ta sẽ khác đi khi chúng ta đã thu được một số kết quả và còn khác đi nữa khi chúng ta sắp sửa nắm được cách giải.

Để sắp xếp những câu hỏi và lời khuyên được thuận lợi, chúng tôi phân biệt bốn bước trong quá trình giải một bài toán. Trước hết, phải hiểu bài toán, thấy rõ là phải tìm cái gì. Thứ hai là phải nắm được mối quan hệ giữa các yếu tố khác nhau của bài toán, giữa cái chưa biết với những cái đã biết để tìm thấy cái ý của cách giải, để vạch ra được một *chương trình* (đề án). Thứ ba là *thực hiện* cái chương trình đó. Thứ tư là *nhìn lại* cách giải đã thu được một lần nữa, nghiên cứu và phân tích nó. Mỗi bước đều có tầm quan trọng của nó. Có thể người học sinh ngẫu nhiên tìm thấy một ý chói lọi (một sáng kiến) và bỏ qua những công việc chuẩn bị, đi thẳng tới cách giải. Những cái may như vậy tất nhiên là cần hoan nghênh, nếu không có một ý hay nào trong đầu mà bỏ qua một trong bốn bước thì kết quả có thể là chẳng ra gì. Kết quả xấu nhất sẽ xảy ra nếu người học sinh lao vào những tính toán hay dựng hình mà không *hiểu* bài toán. Nói chung, chỉ để ý tới những chi tiết mà không nhìn thấy mối quan hệ bản chất, không lập được một chương trình nào đó là hoàn toàn vô ích.

Học sinh có thể tránh được những sai lầm bằng cách *thử lại từng bước* khi thực hiện chương trình. Một phần lớn những kết quả hay của bài toán có thể mất đi, nếu học sinh không xem xét lại, không nghiên cứu và phân tích lại cách giải bài toán.

7. Hiểu cách đặt bài toán

Thật là ngờ nghệch nếu muốn trả lời một câu hỏi mà mình không hiểu và thật là đáng buồn nếu phải làm việc cho một mục đích mà mình không muốn đạt tới. Tuy nhiên, những chuyện đó vẫn thường thấy ở trong cũng như ở ngoài nhà trường và thầy giáo phải cố làm sao cho những sự việc đó không xảy ra trong lớp mình. Học sinh trước hết phải hiểu bài toán, nhưng như thế chưa đủ, mà còn phải *ham thích giải bài toán đó*. Nếu như người học sinh còn có chỗ chưa hiểu hay chưa ham thích, thì không phải bao giờ anh ta cũng có lỗi, bài toán phải được chọn lọc, không khó quá cũng không dễ quá và cần phải bỏ thời gian nào đó để trình bày bài toán được tự nhiên và lí thú.

Trước hết, đầu bài toán đọc lên phải dễ hiểu. Người thầy giáo có thể thử điều đó, trong một chừng mực nhất định, bằng cách để học sinh nhắc lại đầu bài và người học sinh phải tỏ ra là nhắc lại dễ dàng. Học sinh còn phải có thể chỉ ra được những phần chính của bài toán, cái chưa biết, những cái đã biết, điều kiện. Thành thử, người thầy giáo khó mà không dùng tới những câu hỏi : *"Cái gì chưa biết ? Những cái gì là đã cho trước ? Điều kiện của bài toán là gì ?"*

Người học sinh phải xem xét những yếu tố chính của bài toán một cách chăm chú, nhiều lần và ở nhiều mặt. Nếu bài toán liên quan tới một hình vẽ, thì phải *vẽ hình* và chỉ ra cái chưa biết và những cái đã biết. Nếu cần phải gọi tên những yếu tố đó, thì cần phải *đưa vào những kí hiệu thích hợp*, nếu đã chú ý chọn những kí hiệu thích hợp, người học sinh sẽ phải để ý tới những yếu tố đòi hỏi phải có kí hiệu riêng.

Một câu hỏi khác có thể đề ra trong giai đoạn chuẩn bị này với điều kiện không đòi hỏi một câu trả lời quyết định, mà chỉ là tạm thời, một giả định *có thể thoả mãn điều kiện của bài toán không ?* (Trong phần trình bày của phần II, ta sẽ chia việc "Hiểu cách đặt bài toán" ra làm hai giai đoạn "Chúng ta làm quen với bài toán" và "Chúng ta đi sâu vào bài toán").

8. Ví dụ

Chúng ta minh hoạ một số điểm nói trên bằng một ví dụ. Lấy một bài toán thật đơn giản : *Tìm đường chéo của một hình hộp chữ nhật, biết chiều dài, chiều rộng và chiều cao của nó.*

Để rút ra một điều bổ ích nào đó trong phần biện luận bài toán, người học sinh phải biết định lí Pi-ta-go và một số ứng dụng của nó trong hình học phẳng, nhưng có thể không cần nhiều kiến thức có hệ thống trong hình học không gian. Ở đây, người thầy chỉ cần dựa trên những hiểu biết thông thường của học sinh về những quan hệ trong không gian. Có thể khiến bài toán trở nên lí thú bằng cách làm cho nó được cụ thể. Thực vậy, lớp học là một hình chữ nhật có thể đo được, ước lượng gần đúng được kích thước các chiều, học sinh phải tìm, "phải đo gián tiếp" đường chéo của lớp học. Người thầy chỉ cho biết chiều dài, chiều rộng và chiều cao của gian phòng, chỉ rõ đường chéo của gian phòng bằng một động tác và làm cho hình vẽ trên bảng được sinh động bằng cách nhiều lần trở lại nhìn ngắm lớp học.

Cuộc đối thoại giữa thầy giáo và học sinh có thể bắt đầu như sau :

"Cái gì là chưa biết ?"

"Độ dài đường chéo một hình hộp chữ nhật".

"Những cái gì đã cho biết ?"

"Chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp".

"Hãy đưa vào một kí hiệu thích hợp". Ta kí hiệu cái chưa biết bằng chữ gì ?

"x"

"Em chọn những chữ nào để chỉ chiều dài, chiều rộng và chiều cao ?".

"a, b, c".

"Cái gì là điều kiện liên hệ giữa a, b, c và x ?"

"x là đường chéo của hình hộp chữ nhật ; a, b, c là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của nó".

"Bài toán có nghĩa không ? Tôi muốn nói, điều kiện có đủ để xác định cái chưa biết không ?".

"Điều kiện là đủ. Nếu biết a, b, c thì biết được hình hộp. Nếu hình hộp được xác định thì đường chéo của nó cũng được xác định".

9. Đề ra một chương trình

Chúng ta có được một chương trình khi chúng ta ít nhất biết được trên những nét lớn là phải thực hiện những phép tính, những suy luận những phép dựng hình nào để tìm được cái chưa biết. Từ lúc mà chúng ta hiểu bài toán tới lúc đề ra được một chương trình, con đường có thể dài và quanh co. Vậy mà bước cơ bản trong việc giải bài toán là đề ra được cái ý của chương trình. Ý này có thể thành hình dần dần. Hoặc là sau những lần thử dường như không có kết quả và những do dự kéo dài, bỗng nhiên như một ánh chớp, người ta có được một "ý chói lọi", một sáng kiến. Cách tốt nhất mà người thầy có thể giúp học sinh là đưa anh ta tới cái ý chói lọi đó một cách không gò bó. Những câu hỏi và lời khuyên mà chúng tôi vừa nói nhằm mục đích làm nảy sinh ra những ý như vậy. Để có thể đặt mình ở địa vị người học sinh, người thầy phải nghĩ tới những kinh nghiệm của bản thân mình, nhớ lại những khó khăn và những thành công của mình trong việc giải các bài toán. Hiển nhiên là chúng ta đều biết rằng khó mà có được một ý hay khi mà bản thân mình hiểu biết quá ít đối tượng và hoàn toàn không thể có được một ý hay khi mình không biết gì về đối tượng đó. Những "ý hay" dựa trên kinh nghiệm đã trải qua và dựa trên những kiến thức mới có. Một cố gắng đơn thuần của trí nhớ không đủ để làm nảy ra một ý hay, nhưng cũng không thể có một ý hay nếu không nhớ tới một số những sự việc liên quan tới vấn đề. Chỉ có mỗi vật liệu, không thể làm được một cái nhà, nhưng không thể làm được một cái nhà mà không cần thu thập những vật liệu cần thiết. Những vật liệu cần thiết cho việc giải một bài toán toán học là một số những chi tiết đặc biệt của những kiến thức đã có từ trước như những bài toán đã giải, những định lí đã chứng minh, thành thử, khi bắt đầu công việc thì một điều rất thích đáng là đặt câu hỏi sau : *Anh có biết một bài toán nào gần giống với bài toán của anh không ?*

Cái khó là nói chung có vô số bài toán có thể liên quan tới bài toán của chúng ta, tức là có những nét chung với bài toán đó. Làm thế nào để chọn được một hay một số bài thực sự có ích cho việc giải bài toán hiện tại. Đây là lời khuyên cho phép ta khám phá ra một nét chung có tính chất cốt yếu : *Hãy xét cho kĩ cái chưa biết và thử nghĩ tới một bài toán quen thuộc đối với anh cũng chứa cái chưa biết đó hay một cái chưa biết tương tự.*

Thật là may mắn nếu chúng ta nhớ ra được một bài toán đã giải, liên hệ chặt chẽ với bài toán trước mắt. Bây giờ, chúng ta hãy cố gắng tận dụng cái may mắn đó.

Đây là một bài toán gần giống với bài toán của anh và đã được giải rồi. Anh có thể dùng được bài toán đó làm gì cho bài toán mới này không ?

Những câu hỏi trên đây, nếu hiểu kĩ và suy nghĩ kĩ, thường giúp cho quá trình suy diễn được trọn vẹn và đúng đắn. Nhưng không phải bao giờ cũng như vậy vì đó không phải là những phép thánh.

Khi đó, chúng ta cần tìm một điểm tiếp xúc khác và khảo sát mọi hình thái có thể có của bài toán.

Anh có thể phát biểu bài toán một cách khác không ?

Một số câu hỏi trong bảng gợi cho chúng ta một số phương tiện đặc biệt để biến đổi bài toán, như là sự tổng quát hoá, sự cá biệt, cách dùng sự tương tự, cách bỏ qua một phần điều kiện của bài toán ... tất cả những chi tiết đó đều quan trọng nhưng lúc này chúng ta chưa thể xem xét chúng. Một sự sửa đổi bài toán có thể dẫn tới một bài toán phụ thích hợp với trường hợp của ta. *Nếu anh không giải được bài toán đã cho, thì trước hết hãy thử giải bài toán gần giống nó.*

Bằng cách thử dùng những bài toán hay những định lí đã biết, bằng cách xét những biến đổi khác nhau có thể, bằng cách thử nghiệm những bài toán phụ khác, chúng ta có thể bị lạc xa bài toán ban đầu và có nguy cơ hoàn toàn không thấy lại được nó nữa. Chính khi đó, câu hỏi có ích này đưa chúng ta trở về bài toán ban đầu.

Anh đã dùng hết những cái đã cho chưa ? Anh đã dùng hết điều kiện chưa ?

10. Ví dụ

Chúng ta trở lại ví dụ đã xét ở mục 8, chúng ta đã dựng bài toán này khi mà học sinh đã bắt đầu hiểu bài toán và tỏ ra thích thú về nó. Bây giờ có thể là học sinh đã có những ý kiến riêng, những sáng kiến nào đó.

Nếu người thầy, sau khi chăm chú quan sát toàn lớp, không thể phát hiện ra một dấu hiệu nào về sáng kiến trong học sinh của mình, thì cần tiếp tục đối thoại với họ. Người thầy phải sẵn sàng nhắc lại, bằng cách thay đổi chút ít, những câu hỏi mà học sinh không trả lời được cũng như phải sẵn sàng chịu đựng sự im lặng của học sinh (biểu thị dưới đây bằng những chấm chấm).

"Em có biết một bài toán nào gần giống với bài toán này không ?

....

"Hãy xét kĩ cái chưa biết! Em có biết một bài toán nào cũng có cái chưa biết này không ?"

....

"Trong bài toán này, cái chưa biết là gì ?".

"Đường chéo của hình hộp".

"Em đã gặp một bài toán nào cũng có cái chưa biết này không ?"

"Không, em chưa giải một bài toán nào về đường chéo của một hình hộp."

"Em đã gặp một bài toán nào cũng có cái chưa biết tương tự như vậy không ?"

....

"Có phải đường chéo là một đoạn thẳng không ? Các em đã có khi nào giải một bài toán chưa biết là độ dài một đoạn thẳng không ?"

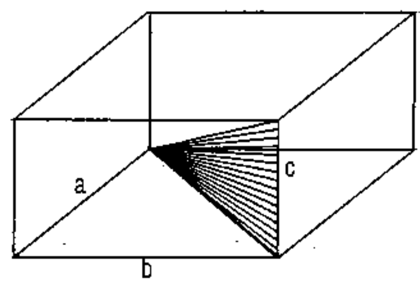
"Tất nhiên là em đã giải những bài toán như vậy, chẳng hạn, khi phải tìm cạnh của tam giác vuông".

"Rất đúng. Đó là một bài toán gần giống bài toán hiện tại và em đã giải rồi. Em có thể dùng nó làm gì không ?"

....

"Hãy nhìn đây, bài toán mà các em nhớ được đó có liên quan tới một tam giác. Trong hình vẽ các em có thấy tam giác nào không ?".

Chúng ta hi vọng rằng lời gợi ý này đủ rõ ràng để làm nảy ra cái ý về cách giải, là làm xuất hiện một tam giác vuông (gạch chéo trên hình 1) mà đường chéo phải tìm là cạnh huyền.



Hình 1

Tuy nhiên, người thầy cần phải chuẩn bị cả trường hợp mà câu gợi ý chưa kéo được học sinh ra khỏi "điểm chết", khi đó người thầy phải sẵn sàng dùng một loạt những câu gợi ý ngày một rõ ràng hơn.

"Em có muốn làm xuất hiện trong hình vẽ một tam giác không ? Em muốn làm xuất hiện một tam giác loại nào ?".

"Các em vẫn chưa tìm được đường chéo ? Nhưng các em đã nói là biết cách tìm cạnh của một tam giác. Vậy thì các em phải làm gì ?".

"Các em có thể tìm đường chéo nếu nó là cạnh của một tam giác không ?".

Khi mà cuối cùng, với sự giúp đỡ của thầy, học sinh đã làm xuất hiện được phần tử phụ có tính chất quyết định (tam giác vuông gạch chéo trên hình 1) thì người thầy trước khi khuyến khích họ lao vào những tính toán thực sự, phải biết chắc rằng học sinh của mình đã thấy được sau đấy phải làm gì.

"Tôi nghĩ rằng, việc chúng ta vẽ tam giác đó là đúng. Bây giờ các em có một tam giác, nhưng các em đã có cái chưa biết chưa ?".

"Cái chưa biết chính là cạnh huyền của tam giác vuông. Em có thể tính được nó bằng định lí Pi-ta-go".

"Điều đó đúng nếu như đã biết độ dài của những cạnh kia. Nhưng các em đã biết chưa ?".

"Một trong những độ dài đó đã cho trước. Còn độ dài kia, em nghĩ rằng tìm nó không phải là khó. Thực vậy, cạnh kia chính là cạnh huyền của một tam giác vuông khác".

"Rất đúng. Tôi thấy rằng bây giờ các em đã có một chương trình rồi".

11. Thực hiện chương trình

Đề ra được một chương trình tìm được ý của cách giải không phải là dễ. Muốn đạt được kết quả, đòi hỏi phải có nhiều điều kiện : những kiến thức có sẵn, những thói quen suy nghĩ, sự tập trung và cả sự may mắn nữa. Thực hiện chương trình thì dễ dàng hơn nhiều, ở đây đòi hỏi chủ yếu là sự kiên nhẫn.

Chương trình chỉ vạch ra những nét tổng quát. Chúng ta phải bảo đảm cho những chi tiết phù hợp với những nét tổng quát đó. Do đó, phải kiên nhẫn khảo sát lần lượt từng chi tiết một cho tới khi tất cả đều rõ ràng, không còn có những chỗ mơ hồ, có thể che giấu một sự sai lầm.

Nếu người học sinh thực sự đề ra được chương trình thì khi đó người thầy có thể nghỉ ngơi chút ít. Điều tai hại là người học sinh có thể quên mất chương trình. Điều này dễ dàng xảy ra nếu người học sinh nhận được chương trình từ bên ngoài, do người thầy đem đến cho. Nhưng nếu như người học sinh tự mình động não tìm lấy chương trình dù cho có sự gợi ý và nếu em đó đề ra được cái ý cuối cùng một cách thoải mái, thì em đó sẽ không dễ gì quên chương trình đó.

Tuy nhiên, người thầy cần đòi hỏi học sinh *thử lại mỗi một chi tiết* của chương trình.

Chúng ta có thể tin chắc vào sự đúng đắn của một chi tiết trong sự lập luận chắc chắn hoặc bằng "trực giác" hoặc bằng "lôgic". Chúng ta có thể tập trung sự chú ý để xác nhận một chi tiết cho đến khi không còn mảy may nghi ngờ về sự đúng đắn của nó. Chúng ta còn có thể làm sáng tỏ điều chúng ta quan tâm bằng cách suy diễn theo những quy tắc lôgic (sự khác nhau giữa "trực giác" và "chứng minh lôgic" khá là rõ ràng trong nhiều trường hợp quan trọng ; còn sự khảo sát sâu xa hơn về vấn đề này, ta dành cho các nhà triết học). Vấn đề quan trọng là người học sinh phải tin chắc vào sự đúng đắn của mỗi chi tiết. Trong một số trường hợp, người thầy cần nhấn mạnh sự khác nhau giữa "thấy" và chứng minh. *Em có thấy rõ ràng chi tiết này là đúng không ? Nhưng em có thể chứng minh rằng nó là đúng không ?*

12. Ví dụ

Chúng ta trở lại bài toán mà chúng ta đã để lại ở cuối mục 10. Cuối cùng, người học sinh đã có ý về cách giải. Em đó đã tìm thấy tam giác vuông mà cái chưa biết x là cạnh huyền, một cạnh là chiều cao cho trước c, còn cạnh kia là đường chéo của mặt đáy hình hộp. Cần chú ý để học sinh đưa vào một cách kí hiệu thích hợp. Em cần chọn y để biểu diễn cạnh kia, tức là đường chéo của mặt đáy có các cạnh là *a và b*. Em đó có thể quan niệm rõ ràng hơn về cách giải của bài toán ở chỗ làm xuất hiện một bài toán phụ mà ẩn số là y. Sau hết, lần lượt xét hai tam giác vuông (xem hình 1), ta có thể viết :

$$x^2 = y^2 + c^2$$

$$y^2 = a^2 + b^2$$

từ đó, khử biến phụ y, ta có :

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Người thầy không có lí do gì làm học sinh phải ngừng lại nếu anh ta thực hiện tốt các bước đó, nhưng có thể khuyên các em *thử lại từng bước một*. Chẳng hạn, có thể hỏi :

"Em có thấy rõ tam giác mà các cạnh là x, y và c là tam giác vuông không ?"

Với câu hỏi đó, người học sinh sẽ trả lời rất thật thà là *"có"*, nhưng em đó sẽ rất lúng túng nếu người thầy không thoả mãn với sự tin chắc trực giác đó mà tiếp tục hỏi :

"Nhưng em có thể chứng minh rằng tam giác đó chính là một tam giác vuông không ?".

Tốt hơn hết là người thầy đừng đặt câu hỏi đó nếu như trong lớp chưa thực sự thành thạo về hình học không gian. Và ngay trong trường hợp học sinh đã quen với hình học không gian, người ta vẫn ngại rằng việc trả lời một câu hỏi đột ngột như vậy là một khó khăn chính đối với đa số học sinh.

13. Phân tích cách giải

Ngay cả những học sinh giỏi cũng vậy, sau khi đã tìm thấy lời giải và trình bày sáng sủa lí luận của mình cũng đều có xu hướng gấp sách lại và làm việc khác. Làm như vậy, em đó đã bỏ mất một giai đoạn quan trọng và rất bổ ích cho việc học hỏi. Nhìn lại cách giải tìm ra, khảo sát và phân tích lại kết quả và con đường đã đi, các em có thể củng cố những kiến thức của mình và phát triển khả năng giải các bài toán. Một người thầy giỏi phải hiểu và làm cho học sinh hiểu rằng không có một bài toán nào là hoàn toàn kết thúc. Bao giờ cũng còn lại một cái gì để suy nghĩ. Có đầy đủ kiên nhẫn và chịu khó suy nghĩ sâu sắc, ta có thể hoàn thiện cách giải và trong mọi trường hợp, bao giờ cũng hiểu được cách giải sâu sắc hơn.

Bây giờ học sinh đã thực hiện chương trình. Các em đã biết lời giải, thử lại mỗi bước lập luận và có nhiều lí do chính đáng để tin rằng cách giải của mình là đúng. Dẫu sao thì vẫn có thể có nhầm lẫn, nhất là trong trường hợp lí luận dài và quanh co. Do đó, việc thử lại là cần thiết. Đặc biệt là nếu như có một phương tiện nhanh chóng và trực quan để thử xem kết quả hay sự lập luận có đúng không thì không được bỏ qua. *Em có thể thử lại kết quả đó không ? Em có thể thử lại sự lập luận đó không ?*

Để tin chắc vào sự tồn tại của một vật hay chứng minh rằng vật đó có một tính chất nào đó, chúng ta nhìn nó, sờ vào nó, thích thấy được nó bằng hai giác quan khác nhau. Cũng như vậy, chúng ta cũng muốn tin chắc vào điều xác nhận của chúng ta bằng hai cách chứng minh khác nhau : "*Em có thể có được kết quả bằng một cách khác không ?*". Cố nhiên, chúng ta thích một lí luận ngắn và đơn giản hơn là một lí luận dài và phức tạp : *Em có thể nhìn thấy ngay điều đó không ?*

Một trong những nhiệm vụ quan trọng hàng đầu của người thầy là không được làm cho học sinh có ấn tượng là những bài toán không có quan hệ gì với nhau và nói chung không có quan hệ gì với phần còn lại của vũ trụ. Chúng ta có thể tìm thấy sự liên hệ của bài toán này với những bài toán khác khi chúng ta nhìn lại cách giải bài toán đó.

Học sinh sẽ thấy rõ rằng việc nhìn lại cách giải như vậy là thực sự bổ ích nếu như các em đã cố gắng một cách chân thực để tìm ra lời giải đó và nếu như các em có ý thức là đã làm việc có kết quả. Khi đó, học sinh muốn thấy được là sự cố gắng đó có thể mang lại cho mình một cái gì khác và cần phải làm gì để những lần sau cũng thu được kết quả tốt như vậy. *Em có thể dùng kết quả và phương pháp đã tìm ra cho một bài toán khác không ?*

14. Ví dụ

Ở mục 12, cuối cùng học sinh đã có được cách giải : nếu ba cạnh của một hình hộp chữ nhật, cùng xuất phát từ một đỉnh là a, b, c thì đường chéo sẽ bằng $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Em có thể thử lại kết quả đó không ? Người thầy không thể chờ đợi một câu trả lời thoả đáng ở những học sinh ít kinh nghiệm. Tuy nhiên, người học sinh cần phải sớm biết rằng những bài toán "bằng chữ" rất có lợi cho những bài toán hoàn toàn bằng số. Bài toán "bằng chữ" thì kết quả có thể thử bằng nhiều cách mà một bài toán bằng số ta không làm được. Ví dụ của chúng ta tuy đơn giản nhưng cũng chứng minh được điều đó. Dựa trên kết quả, người thầy có thể đặt ra nhiều câu hỏi mà học sinh có thể dễ dàng trả lời là "có" trong lúc chỉ một câu trả lời "không" cũng đủ chứng tỏ có một sai lầm nghiêm trọng trong kết quả.

Em có dùng hết tất cả những cái cho biết trước không ? Tất cả những cái cho biết trước a, b, c có mặt trong công thức tính đường chéo không ?

"Chiều dài, chiều rộng và chiều cao đóng một vai trò như nhau trong bài toán của chúng ta, bài toán đối xứng với a, b, c. Vậy, trong công thức tính đường chéo tìm được, a, b và c đóng vai trò đối xứng không ? Công thức có giữ nguyên khi đổi chỗ a, b, c, với nhau không ?

"Bài toán của chúng ta là một bài toán trong không gian phải tìm đường chéo một hình hộp chữ nhật cho biết kích thước các chiều là a, b, c. Nó cũng tương tự như một bài toán hình học phẳng : tìm đường chéo của một hình chữ nhật cho biết các cạnh a và b. Kết quả bài toán trong không gian của chúng ta có tương tự với kết quả bài toán trong mặt phẳng không ?

"Nếu chiều cao c giảm dần và mất hẳn, hình hộp trở thành hình chữ nhật. Nếu trong công thức ta lấy c = 0, ta có thu được công thức đúng cho đường chéo của hình chữ nhật không ?"

"Nếu chiều cao c tăng lên, đường chéo cũng tăng lên. Từ công thức, chúng ta có suy ra được điều đó không ?. "Nếu ba chiều a, b, c của hình hộp tăng theo cùng một tỉ lệ thì đường chéo cũng tăng theo tỉ lệ đó. Nếu trong công thức, ta thay a, b, c, theo thứ tự bằng 100a, 100b, 100c, biểu thức của đường chéo cũng phải nhân lên với 100. Có đúng như vậy không ?

"Nếu a, b, c đo bằng mét, công thức cũng cho ta độ dài của đường chéo tính ra mét, nhưng nếu ta tính các độ dài ra cen-ti-met, công thức vẫn đúng. Có thực như vậy không ?" (Hai câu hỏi sau cùng thực chất là tương đương ; xem mục nói về thứ nguyên). Những câu hỏi trên có lợi về nhiều mặt. Trước hết, một học sinh thông minh có một ấn tượng rõ rệt là công thức của chúng ta có thể kiểm tra lại được bằng rất nhiều cách. Trước kia, anh ta tin chắc rằng công thức đó đúng vì anh ta đã lập công thức đó rất cẩn thận. Nhưng bây giờ, lòng tin của anh ta càng tăng thêm vì lòng tin đó bắt nguồn từ một nguyên nhân khác, thuộc về loại "tất nhiên thực nghiệm". Như vậy, nhờ những câu hỏi trên, những chi tiết của công thức mang một ý nghĩa mới, một sợi dây nối liền giữa chúng với những sự kiện khác. Do đó, có nhiều khả năng để công thức khắc sâu vào trí nhớ và những kiến thức của học sinh nhờ đó được củng cố. Sau hết, người ta dễ dàng sửa đổi những câu hỏi đó và đem dùng cho những bài toán khác tương tự. Với một kinh nghiệm nào đó trong khi giải những bài toán cùng loại, một học sinh thông minh có thể thấy được

những ý chung nằm trong những câu hỏi đó, tức là sử dụng tất cả những cái đã cho biết trước, biến đổi những cái đã biết, sử dụng sự đối xứng, sự tương tự. Nếu em nào có được thói quen tiến hành sự khảo sát theo những hướng đó, thì điều đó có nghĩa là em đó đã có một bước tiến căn bản trong nghệ thuật giải các bài toán.

Em có thể thử lại cách lập luận không ? Trong những trường hợp khó khăn và quan trọng có thể cần thiết phải thử lại cách lập luận-từng bước một. Nói chung, chỉ cần chọn một số điểm "mấu chốt" để thử lại. Trong trường hợp của chúng ta có thể khuyên nên xét thêm một vấn đề phụ, không lí thú lắm, là khi nào thì bài toán không có lời giải. Em có thể *chứng minh* rằng tam giác có các cạnh là x, y và c là một tam giác vuông không ? (xem cuối mục 12). *Em có thể dùng kết quả hay phương pháp giải này cho một bài toán khác không ?*

Sau một vài ví dụ, khi học sinh đã tự tin ở sức mình thì các em có thể tìm thấy dễ dàng các ứng dụng mà thực chất là các thể hiện cụ thể của bài toán đặt dưới dạng trừu tượng.

Chính người thầy đã dùng sự giải thích cụ thể đó khi lấy phòng học thay thế cho hình hộp trong bài toán. Một học sinh ít có khiếu về toán, có thể đề nghị tính đường chéo của phòng ăn thay cho lớp học. Nếu học sinh không nghĩ được gì hơn nữa, thì người thầy có thể đặt ra một bài toán hơi khác, chẳng hạn : "Biết chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp chữ nhật, tìm khoảng cách giữa tâm và một trong những đỉnh của nó".

Khi đó học sinh có thể dùng *kết quả* của bài toán họ vừa giải xong bằng cách nhận xét rằng khoảng cách phải tìm bằng nửa đường chéo họ vừa tính được. Hoặc là họ có thể dùng *phương pháp* làm xuất hiện trong hình vẽ những tam giác thích hợp (trong trường hợp này, cách làm sau kém phần hiển nhiên và không hay bằng). Sau ứng dụng đó, người thầy có thể xét bốn đường chéo của hình hộp và sáu hình chóp mà sáu mặt là các cạnh bên. Khi trí tưởng tượng của học sinh đã được thức tỉnh, người thầy có thể quay lại câu hỏi của mình : *"Chúng ta có thể dùng kết quả hay phương pháp này cho một bài toán khác không ?"*. Bây giờ thì có nhiều khả năng là học sinh có thể tìm được một sự giải thích cụ thể bổ ích hơn, chẳng hạn như :

"Người ta cần dựng một cột cao 8m tại tâm của một mái nhà phẳng hình chữ nhật dài 21m, rộng 16m. Để giữ cột cần bốn dây cáp dài bằng nhau, các dây cáp đều xuất phát từ một điểm cách ngọn cột 2m và chăng tới bốn góc mái. Hỏi chiều dài của mỗi dây cáp ?".

Học sinh có thể dùng *phương pháp* của bài toán mà các em đã giải một cách chi tiết bằng cách làm xuất hiện một tam giác vuông trong mặt phẳng thẳng đứng và một tam giác vuông khác trong mặt phẳng nằm ngang. Hoặc là các em có thể dùng *kết quả* bằng cách tưởng tượng ra một hình hộp chữ nhật mà đường chéo x là một trong bốn dây cáp, còn các cạnh là :

$$a = 10,5 \qquad b = 8 \qquad c = 6$$

Áp dụng trực tiếp công thức, ta có : $x = 14,5$.

Những ví dụ khác sẽ được nêu ra trong mục : "*Em có thể dùng kết quả để làm gì không ?*".

15. Những phương pháp khác nhau

Chúng ta lại tiếp tục nghiên cứu bài toán đã xét ở những mục 8, 10, 12 và 14. Công việc chủ chốt là việc đề ra được chương trình đã nói tới trong mục 10. Chú ý rằng, người thầy có thể làm theo một cách khác, xuất phát điểm như ở mục 10, người thầy có thể đặt ra những câu hỏi như sau : "*Em có biết bài toán nào gần giống với bài toán này không ?*".

"Em có biết bài toán nào *tương tự* không ?". Em thấy rằng bài toán đặt ra cho em là một bài toán hình học trong không gian. Em có thể nghĩ ra một bài toán hình học tương tự nhưng đơn giản hơn trong mặt phẳng không ?

"Bài toán của em có liên quan tới một hình trong không gian, tới đường chéo của một hình hộp chữ nhật. Đối với một hình trong mặt phẳng thì bài toán tương tự sẽ như thế nào ? Ta phải xét đường chéo của hình gì ?"

"Hình chữ nhật".

Giả sử học sinh rất chậm hiểu, thờ ơ và không thể nghĩ trước điều gì, thì cuối cùng dù muốn hay không, em đó cũng phải tham dự vào việc giải bài toán tới một chừng mực nào đó, dù là rất ít. Ngoài ra, nếu học sinh quá chậm hiểu, thì người thầy không nên bắt đầu với bài toán về hình hộp mà không cho chuẩn bị trước bằng bài toán tương tự về hình chữ nhật.

Bây giờ, có thể tiếp tục như sau :

"*Đây là một bài toán gần giống với bài toán hiện tại mà em đã giải rồi. Em có thể dùng nó để làm gì không ?*".

"*Em phải thêm vào đó một phần tử phụ nào để có thể dùng được nó ?*".

Cuối cùng, người thầy có thể dẫn dắt học sinh tới cái ý cần thiết. Cái ý đó là quan niệm đường chéo của hình hộp đã cho như đường chéo của một hình chữ nhật nào đó (thiết diện của hình hộp với mặt phẳng đi qua hai cạnh đối). Cái ý này về thực chất cũng là cái ý trước (mục 10) nhưng cách làm thì khác. Ở mục 10, thông qua cái chưa biết, ta thiết lập sự tiếp xúc với những kiến thức đã có của học sinh, học sinh nghĩ tới một bài toán mình đã giải vì rằng cái chưa biết của các em cũng là cái chưa biết của bài toán đang giải. Trong mục này, chính sự tương tự đã làm nảy ra cái ý của cách giải.

16. Phương pháp hỏi của thầy giáo

Như chúng ta đã trình bày trong những mục 8, 10, 12, 14, 15 thực chất là như sau : bắt đầu bằng một câu hỏi tổng quát hay một lời khuyên lấy trong bảng, sau đó, nếu cần thiết, đi dần từng bước tới những câu hỏi chính xác và cụ thể hơn cho tới khi tìm thấy câu hỏi gợi ra được cách giải trong đầu học sinh. Nếu như phải giúp học sinh thực hiện cái ý của mình, thì cũng bắt đầu bằng một câu hỏi tổng quát hay một lời khuyên lấy trong bảng, sau đó, nếu cần thiết đi tới một câu hỏi đặc biệt hơn và cứ tiếp tục như vậy. Bảng của chúng tôi, hiển nhiên chỉ dùng cho phần lớn những trường hợp đơn giản, nhưng rõ ràng là còn có thể được hoàn thiện hơn. Tuy nhiên, vấn đề quan trọng là lời khuyên bảo ban đầu phải đơn giản, tự nhiên và tổng quát và bảng phải đủ ngắn gọn.

Những lời khuyên phải đơn giản và tự nhiên, như vậy thì mới dễ sử dụng. Lời khuyên phải tổng quát, nghĩa là không phải chúng chỉ áp dụng được cho bài toán đang xét mà là áp dụng được cho những bài toán thuộc đủ các loại sao cho chúng góp phần làm phát triển *những khả năng* của học sinh chứ không phải chỉ một kĩ xảo riêng biệt nào đó.

Bảng phải ngắn sao cho có thể thường xuyên nhắc lại những câu hỏi mà không thấy giả tạo ngay cả trong nhiều trường hợp khác nhau. Như vậy thì cuối cùng, học sinh có thể thấm nhuần những câu hỏi đó và các câu hỏi này sẽ góp vào việc phát triển một *thói quen của trí óc.*

Cần thiết phải đi dần tới những lời khuyên mỗi lúc một chính xác hơn để học sinh có thể tự làm được nhiều việc chừng nào hay chừng ấy.

Cách hỏi không cứng nhắc chút nào và đó là một ưu điểm của nó vì ở đây mọi hệ thống có tính chất máy móc, giáo điều đều không tốt. Phương pháp của chúng tôi có ít nhiều linh hoạt co giãn, nó thừa nhận nhiều cách đề cập đến bài toán (mục 15) có thể cần thiết phải áp dụng các câu hỏi đó sao cho chúng có thể *vào thẳng trong đầu học sinh.* Nếu độc giả muốn thử dùng phương pháp của chúng tôi ở trong lớp học thì cần phải thận trọng. Cần phải nghiên cứu kĩ ví dụ ở mục 8 và những ví dụ sau này ở các mục 18, 19 và 20. Cần phải chuẩn bị chu đáo những ví dụ đã chọn ra, đồng thời phải xét đến nhiều cách khác nhau để cập bài toán. Bắt đầu bằng một vài lần thử, sẽ thấy được là nên sử dụng phương pháp như thế nào, học sinh tiếp nhận phương pháp đó ra sao và cần một thời gian bao nhiêu.

17. Câu hỏi tốt và câu hỏi tồi

Hiểu rõ phương pháp đặt câu hỏi trình bày ở trên, sẽ cho phép ta đánh giá một số lời khuyên học sinh khi giúp các em giải các bài toán. Ta trở lại tình hình như ở đầu mục 10, khi đã đặt câu hỏi : *Em có biết một bài toán nào gần giống với bài toán của em không ?* Nhưng cũng có thể, với chủ ý giúp học sinh, người thầy dùng một câu hỏi khác thay thế cho câu hỏi trên : *Em có thể áp dụng định lí Pi-ta-go ở đây được không ?* Dù là có thiện ý, một câu hỏi như vậy thật tai hại. Chúng ta hãy tìm hiểu những điều kiện trong đó câu hỏi được đặt ra, khi đó ta sẽ thấy rõ có cả một loạt những trở ngại chống lại sự giúp đỡ theo kiểu đó. Thực vậy :

1) Nếu học sinh đã gần tìm ra cách giải, các em có thể hiểu được lời khuyên nằm trong câu hỏi trên, nhưng trong trường hợp ngược lại, rất có thể người học sinh hoàn toàn không thấy được mục đích của câu hỏi. Thành thử câu hỏi chẳng giúp ích gì cho học sinh trong khi các em cần sự giúp đỡ hơn lúc nào hết.

2) Nếu học sinh hiểu lời khuyên, các em sẽ khám phá ra tất cả và sẽ chẳng còn phải làm gì nhiều.

3) Câu hỏi có tính chất quá đặc biệt. Ngay như nếu người học sinh có thể dùng nó để giải bài toán đã cho, em đó sẽ không rút ra được điều gì cho những bài toán sau này. Câu hỏi không có gì bổ ích.

4) Ngay cả khi người học sinh hiểu lời khuyên, em đó có thể không hiểu được tại sao thầy giáo lại có ý nghĩ đặt ra câu hỏi đó.

Và người học sinh làm thế nào để tìm ra được một câu hỏi như vậy ? Câu hỏi đó đến một cách đột ngột, không tự nhiên giống như con thỏ mà nhà ảo thuật lấy trong mũ ra. Nó không bổ ích gì. Còn với phương pháp nói trong mục 10 hay trong mục 15, ta không hề gặp phải một trở ngại nào trên đây cả.

NHỮNG VÍ DỤ KHÁC

18. Bài toán dựng hình

Dựng một hình vuông nội tiếp trong một tam giác, sao cho hai đỉnh của hình vuông nằm trên cạnh đáy của tam giác, còn hai đỉnh kia nằm trên các cạnh còn lại của tam giác.

"Cái gì là chưa biết ?"

"Một hình vuông"

"Những cái gì đã biết ?"

"Một tam giác, có vậy thôi"

"Điều kiện của bài toán là gì ?"

"Bốn đỉnh của hình vuông phải nằm trên chu vi của tam giác, hai đỉnh trên cạnh đáy, còn hai đỉnh theo thứ tự trên hai cạnh kia".

"Có thể thoả mãn được điều kiện của bài toán không ?"

"Em nghĩ rằng được, nhưng chưa biết chính xác".

"Bài toán đối với em không phải là dễ. Nếu em không giải được nó, thì trước hết hãy thử giải một bài toán cùng loại. Em có thể làm thoả mãn một phần của các điều kiện không ?".

"Nhưng một phần của các điều kiện nghĩa là thế nào ?"

"Đây nhé, các điều kiện được đặt ra cho mọi đỉnh của hình vuông có tất cả bao nhiêu đỉnh ?"

"Bốn đỉnh"

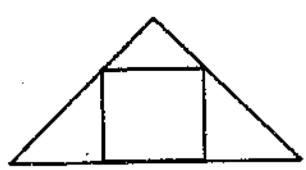
"Một phần của các điều kiện sẽ đặt ra không phải cho cả bốn đỉnh, mà cho một số đỉnh ít hơn, em hãy giữ lại một phần các điều kiện thôi và bỏ qua phần còn lại".

"Phần các điều kiện nào dễ thoả mãn nhất ?"

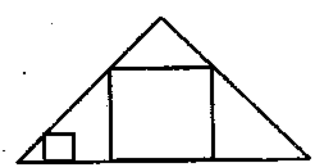
"Có thể vẽ được dễ dàng một hình vuông mà hai đỉnh nằm trên chu vi hình tam giác và ngay cả một hình vuông mà ba đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác".

"Hãy vẽ hình đi"

Người học sinh vẽ hình 2.



Hình 2



Hình 3

"Em chỉ giữ lại một phần các điều kiện và đã bỏ qua phần còn lại. Bây giờ, cái chưa biết được xác định đến chừng mực nào ?"

"Hình vuông không được xác định nếu nó chỉ có ba đỉnh nằm trên ba cạnh của tam giác".

"Đúng. Hãy vẽ hình!"

Học sinh vẽ hình 3.

"Như em đã nói, hình vuông không được xác định bởi phần các điều kiện mà em giữ lại. Nó có thể biến đổi như thế nào ?"

....

"Em đã có ba đỉnh của hình vuông nằm trên chu vi của tam giác, còn đỉnh thứ tư thì chưa đúng chỗ của nó. Như em đã nói, hình vuông đó không xác định, nó có thể thay đổi, do đó, đỉnh thứ tư có thể dời chỗ. Nó phải dời chỗ như thế nào ?"

....

"Em hãy thử thí nghiệm xem. Hãy vẽ những hình vuông khác có ba đỉnh trên ba cạnh giống như hai hình vuông vừa vẽ. Vẽ những hình vuông nhỏ và to. Em thử xem quỹ tích của đỉnh thứ tư là gì ? Đỉnh thứ tư dời chỗ như thế nào khi hình vuông thay đổi ?"

Người thầy đã dẫn học sinh rất gần tới ý của cách giải. Nếu học sinh đủ trình độ đoán nhận rằng quỹ tích của đỉnh thứ tư là một đường thẳng thì anh ta đã giải được bài toán.

19. Bài toán chứng minh

Hai góc nằm trong hai mặt phẳng khác nhau nhưng mỗi cạnh của góc này thì song song và cùng chiều với cạnh tương ứng của góc kia. Chứng minh rằng, hai góc đó bằng nhau.

Đây là một trong những định lí cơ bản của hình học không gian. Có thể ra bài toán này cho những học sinh có ít nhiều kinh nghiệm về hình học phẳng và biết được những kiến thức sơ bộ về hình học không gian. (Định lí mà chúng tôi vừa phát biểu và sắp chứng minh thực ra là mệnh đề thứ 10 trong tập XI của Oclit). Chúng tôi sẽ in nghiêng không những các câu hỏi và lời khuyên lấy từ trong bảng mà còn cả những câu hỏi và lời khuyên khác tương ứng với chúng, chẳng hạn những "bài toán về chứng minh" tương ứng với những "bài toán về tìm tòi". (Chúng tôi đã lập sự tương ứng đó một cách có hệ thống trong mục những bài toán về tìm tòi, những bài toán về chứng minh 5, 6).

"Giả thiết của định lí là gì ?"

"Hai góc nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Mỗi cạnh của góc này thì song song và cùng chiều với cạnh tương ứng của góc kia".

"Kết luận của định lí là gì ?"

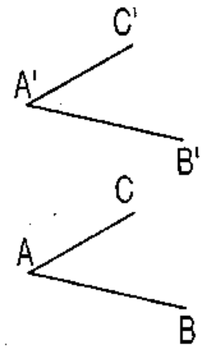
"Hai góc đó bằng nhau".

"Hãy vẽ hình và đưa vào các kí hiệu thích hợp".

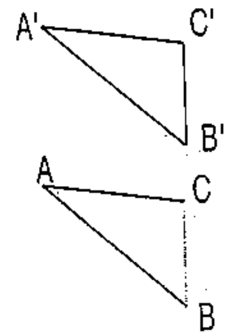
Học sinh vẽ hình, giống như hình 4 và chọn những chữ cho hình vẽ với một sự giúp đỡ ít nhiều của thầy giáo.

"Giả thiết của định lí là gì ? Hãy phát biểu nó bằng cách dùng những kí hiệu đã đưa vào".

"BAC và $B'A'C'$ nằm trong những mặt phẳng khác nhau. Ta có $AB \parallel A'B'$ và $AC \parallel A'C'$. Ngoài ra, AB cùng chiều với $A'B'$ và AC cùng chiều với $A'C'$".



Hình 4



Hình 5

"Kết luận của định lí là gì ?".

"$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$"

"Hãy xét kĩ kết luận và thử nghĩ tới một định lí quen thuộc có cùng một kết luận như vậy, hay một kết luận tương tự".

"Nếu hai tam giác bằng nhau thì các góc tương ứng bằng nhau đôi một".

"Rất đúng. Đó là một định lí có liên quan tới bài toán của em và đã được chứng minh. Em có thể dùng nó để làm gì không ?"

"Em nghĩ rằng có thể, nhưng chưa thấy rõ phải làm thế nào ?".

"Có cần phải đưa vào một phần tử phụ để có thể dùng được định lí trên không ?"

....

"Đây nhé! Định lí em vừa phát biểu rất đúng đó liên quan tới những tam giác, một cặp tam giác bằng nhau. Trong hình vẽ của em, có các tam giác không ?"

"Không, nhưng em có thể làm xuất hiện được. Em nối B với C và B' với C'. Khi đó, em có hai tam giác ABC và $A'B'C'$" (Hình 5).

"Đúng, nhưng những tam giác đó dùng để làm gì ?"

"Dùng để chứng minh kết luận của định lí là các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{B'A'C'}$ bằng nhau".

"Đúng, nếu như đó là điều em muốn chứng minh thì em cần tới những tam giác như thế nào ?"

"Những tam giác bằng nhau. Vâng, đúng thế, em có thể chọn B, C, B', C' sao cho :

$$AB = A'B' \text{ và } AC = A'C'$$

"Rất đúng. Bây giờ, em muốn chứng minh cái gì ?".

"Em muốn chứng minh hai tam giác đó bằng nhau :

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Nếu chứng minh được điều đó, thì suy ra ngay được kết luận $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$".

"Rất khá! Em đã có một cái đích mới là đi chứng minh một kết luận mới. Hãy xét kĩ kết luận và thử nghĩ tới một định lí quen thuộc đối với em có cùng một kết luận như vậy, hay có một kết luận tương tự".

"Hai tam giác bằng nhau nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh tương ứng của tam giác kia".

"Đúng, ở đây bất cứ một định lí nào khác đều không sử dụng được. Đây lại là một định lí có liên quan tới bài toán của em và đã được chứng minh. Em có thể dùng nó để làm gì không ?".

"Có, nếu như em biết được BC = B'C'".

"Đúng. Vậy mục đích bây giờ là gì ?".

"Hãy thử nghĩ tới một định lí quen thuộc có cùng một kết luận tương tự".

"Em biết một định lí, kết thúc bằng : "... khi đó hai đoạn thẳng bằng nhau". Nhưng nó không phù hợp với trường hợp này.

"Em có cần đưa vào một phần tử phụ để có thể dùng được định lí đó không ?".

....

"Đây nhé, làm thế nào mà chứng minh được BC = B'C' trong khi không có một quan hệ nào trong hình vẽ giữa BC và B'C'".

....

"Em đã dùng tới giả thiết chưa ? Giả thiết của bài toán là gì ?".

"Chúng ta giả sử rằng AB // A'B', AC // A'C'. Em phải dùng tới giả thiết đó".

"Em đã tận dụng toàn bộ giả thiết chưa ? Em nói AB // A'B' đối với AB và A'B' có phải em chỉ biết có thế thôi không ?".

"Không, AB còn bằng A'B' theo cách dựng. Những đoạn thẳng đó song song và bằng nhau. AC và A'C' cũng vậy".

"Hai đoạn thẳng song song và có độ dài bằng nhau".

"Đó là một hình có ích lợi. Em đã gặp ở đâu chưa ?".

"Đúng rồi! Ở hình bình hành! Em nối A với A', B với B' và C với C'".

"Ý đó được. Bây giờ trong hình vẽ của em có bao nhiêu hình bình hành tất cả ?".

"Hai, không phải, ba, không phải, có hai. Em muốn nói có hai hình mà ta có thể chứng tỏ ngay là hình bình hành. Còn một hình thứ ba cũng có vẻ là hình bình hành. Em hi vọng rằng có thể chứng minh nó đúng là hình bình hành và khi đó là chứng minh xong".

Ngay những câu trả lời trước cũng đã chứng tỏ em học sinh đó là thông minh. Đến nhận xét cuối cùng này thì điều đó không còn nghi ngờ gì nữa.

Em học sinh đó có khả năng đoán nhận một kết quả toán học và phân biệt rõ ràng được việc đoán nhận và việc chứng minh.

Em đó cũng đã hiểu rằng cái mà người ta đoán nhận có thể ít nhiều thừa nhận được. Học sinh đó đã thực sự biết sử dụng những kiến thức toán học ; em đó đã có một kinh nghiệm thực hành nhất định trong việc giải các bài toán, có thể tìm ra và khai thác đến cùng một ý hay.

20. Bài toán xác định vận tốc của một quá trình

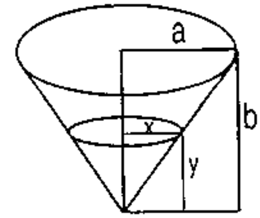
Nước chảy vào một bình chứa hình nón với một vận tốc r (thể tích nước chảy vào trong một đơn vị thời gian). Bình chứa có dạng một hình nón tròn xoay trục thẳng đứng, đỉnh quay xuống dưới, bán kính đáy bằng a, chiều cao hình nón bằng b. Tìm vận tốc mực nước dâng lên tại thời điểm mà độ cao của cột nước bằng y. Tìm giá trị bằng số của nó nếu $a = 4m$, $b = 3m$, $r = 2m^3/phút$, $y = 1m$.

Giả thiết rằng học sinh đều biết những quy tắc đơn giản của phép tính vi phân và khái niệm "vận tốc biến thiên" của những đại lượng biến đổi.

"Những cái gì đã cho biết ?"

"Bán kính đáy của hình nón a = 4m ; chiều cao của hình nón b = 3m ; vận tốc nước chảy vào trong bình r = $2m^3$/phút và độ cao của cột nước tại một thời điểm xác định y = 1m".

"Đúng. Đầu bài toán như đã khuyên ta nên tạm thời để những giá trị bằng số sang một bên và lí luận bằng những chữ, biểu diễn cái chưa biết theo a, b, r, y và sau cùng, khi đã có được biểu thức đại số của cái chưa biết sẽ thay những giá trị bằng số vào. Chúng ta làm theo lời khuyên đó. Cái gì là chưa biết ?".



Hình 6

"Vận tốc dâng lên của mực nước, khi chiều cao cột nước bằng y".

"Thế nghĩa là thế nào ? Em có thể diễn tả bằng cách nói khác không ?"

"Vận tốc biến thiên của chiều cao cột nước".

"Đúng; đó là vận tốc biến thiên của y. Nhưng thế nào là "vận tốc biến thiên". Em hãy trở lại định nghĩa lần nữa ?"

"Vận tốc biến thiên của hàm số là đạo hàm".

"Đúng. Nhưng y có phải là một hàm số không ?

Như chúng ta đã nói, chúng ta không để ý tới giá trị bằng số của nó. Em có thể nghĩ rằng y biến thiên không ?"

"Có : y là chiều cao của cột nước, tăng lên theo thời gian".

"Vậy y là hàm số của gì ?".

"Của thời gian t".

"Tốt. *Hãy đưa vào một kí hiệu thích hợp. Ta biểu diễn vận tốc biến thiên của y bằng kí hiệu toán học như thế nào ?".*

$$"\frac{dy}{dt}"$$

"V là gì ?"

"Là thể tích nước trong bình tại thời điểm t".

$$\frac{dy}{dv}$$

"Rất tốt. Vậy em cần biểu diễn theo $\frac{dy}{dt}$ *a, b,* $\frac{dy}{dt}$ và y. *Em sẽ làm như thế nào ?"*

"Nếu em không giải được bài toán này thì trước hết hãy thử giải một bài toán giống với nó. Nếu em chưa thấy được mối quan hệ giữa $\frac{dy}{dt}$ và những cái đã cho biết, hãy thử làm xuất hiện một mối quan hệ đơn giản hơn nhiều có thể dùng làm bàn đạp trong việc giải bài toán".

....

"Em không thấy có những quan hệ khác nữa sao ? Chẳng hạn, giữa y và V có độc lập đối với nhau không ?"

"Không, khi y tăng, V cũng tăng".

"Vậy có một quan hệ giữa y và V. Quan hệ đó là gì ?".

"*V* là thể tích hình nón với chiều cao *y*. Nhưng em chưa biết bán kính đáy".

"Nhưng dù sao thì cũng có thể xét được. Cho nó một cái tên nào đó, chẳng hạn *x*".

"$V = \dfrac{\pi x^2 y}{3}$"

"Đúng. Nhưng em biết gì về x ? x có phụ thuộc vào y không ?"

"Có. Khi chiều cao y của cột nước tăng, bán kính x của mặt biến đổi cũng tăng theo".

"Vậy, giữa x và y có liên hệ với nhau. Mối liên hệ đó là gì ?".

"Đúng rồi. Suy từ những tam giác đồng dạng, ta có :

$$x : y = a : b"$$

"Thấy không, chúng ta đã tìm được một hệ thức nữa, phải cố lợi dụng nó. Nhớ rằng, chúng ta muốn biết một hệ thức giữa x và y".

"Em có :

$$x = \frac{ay}{b}$$

$$V = \frac{\pi a^2}{3b^2} y^2$$

"Rất đúng. Tôi cho rằng hệ thức cuối cùng là một cơ sở tốt để xuất phát, có phải không ? Nhưng không được quên mục đích của chúng ta. Cái gì là chưa biết ?".

"Cái chưa biết là $\dfrac{dy}{dt}$"

"Em cần tìm một hệ thức giữa $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dV}{dt}$ và những đại lượng khác. Nhưng ở đây, em đã có một hệ thức giữa y, V và những đại lượng còn lại. Vậy phải làm gì ?".

"Lấy đạo hàm! Đúng rồi!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{3b^2} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Đó là lời giải".

"Rất khá! Còn việc tính với những giá trị bằng số ?".

"Nếu a = 4, b = 3, $\dfrac{dV}{dt}$ = r = 2, y = 1 thì khi đó :

$$2 = \frac{\pi.16.1}{27} \cdot \frac{dy}{dt}"$$

PHẦN THỨ HAI

GIẢI MỘT BÀI TOÁN NHƯ THẾ NÀO ?

ĐỐI THOẠI

1. Làm quen với bài toán

Tôi phải bắt đầu từ đâu ? Hãy bắt đầu với đầu đề bài toán.

Tôi có thể làm gì ? Phải thấy được toàn bộ bài toán, càng rõ ràng, sáng sủa càng tốt. Lúc này đừng quan tâm tới những chi tiết.

Làm như thế, tôi được lợi gì ? Anh phải hiểu bài toán, làm quen với nó, phải thấm bài toán. Sự chú ý vào bài toán sẽ làm cho trí nhớ thêm mạnh và chuẩn bị cho việc tập hợp những vấn đề có liên quan.

2. Đi sâu vào nghiên cứu bài toán

Tôi phải bắt đầu từ đâu ? Tôi nhắc lại là bắt đầu với đầu đề bài toán. Bắt đầu cho tới khi nào bài toán đã trở nên khá rõ ràng, khá khắc sâu vào trí nhớ sao cho anh có thể không nghĩ đến nó trong một lát mà vẫn không sợ "quên" hết.

Tôi có thể làm gì ? Tách ra những yếu tố chính của bài toán. Nếu là một bài toán về chứng minh thì những yếu tố chính là giả thiết và kết luận, còn nếu là bài toán về tìm tòi thì đó là cái chưa biết (ẩn), những cái đã cho biết và điều kiện của bài toán, thoạt đầu theo thứ tự lần lượt sau đó, xét tới những tổ hợp của chúng ; thiết lập những quan hệ có thể có được giữa một chi tiết và những chi tiết khác và giữa mỗi chi tiết với toàn bộ bài toán.

Làm như thế tôi được lợi gì ? Chuẩn bị như vậy, anh có thể vạch ra những chi tiết của bài toán mà sau này, có thể đóng một vài trò nhất định.

3. Tìm ý hay

Tôi phải bắt đầu từ đâu ? Phải bắt đầu khảo sát những yếu tố chính của bài toán. Chỉ bắt đầu khi nào anh đã hệ thống được trong đầu những yếu tố chính đó, khi đã quan niệm về chúng một cách rõ ràng nhờ công việc đã làm trên và chỉ khi anh cảm thấy trí nhớ của anh minh mẫn và đã tuân theo anh.

Tôi có thể làm gì ? Hãy xét bài toán của anh dưới nhiều khía cạnh khác nhau và tìm những điểm tiếp xúc với những kiến thức đã có. Hãy khảo sát bài toán trên nhiều mặt. Hãy khảo sát những yếu tố khác nhau, cũng như những chi tiết khác nhau nhiều lượt với những quan điểm khác nhau. Tổ hợp những chi tiết đó lại theo nhiều cách và bắt đầu nghiên cứu chúng trên nhiều mặt. Thử cố rút ra từ mỗi chi tiết đó một ý nghĩa mới, một cách giải thích mới của toàn bộ bài toán.

Hãy tìm những điểm tiếp xúc với những kiến thức mới có được. Thử nhớ lại, đối với những bài toán trước đây, trong những trường hợp tương tự, cái gì đã giúp anh. Cố nhận ra cái gì quen thuộc trong bài toán anh đang khảo sát và tìm ra cái gì có ích trong những cái đã biết.

Tôi có thể bắt đầu từ cái gì ? Một ý hay có thể là một ý quyết định, chỉ ngay ra cho anh con đường đi tới đích.

Có thể dùng một ý hay như thế nào ? Ý đó sẽ chỉ ra cho anh toàn bộ con đường, hay một phần con đường, nó còn khuyên anh phải làm như thế nào. Những ý đó ít nhiều không đầy đủ, nhưng dù sao cũng là tốt rồi.

Tôi có thể làm gì nếu có một ý không đầy đủ ? Phải nghiên cứu ý đó. Nếu nó tỏ ra có lợi trong một chừng mực nào đó thì phải khảo sát nó một cách chi tiết. Nếu thấy rằng có thể dựa vào ý đó được thì phải thử xem nó có thể dẫn anh tới đâu và lại tiếp tục nghiên cứu tình hình mới. Xét tình hình mới trên nhiều mặt của nó và tìm những điểm tiếp xúc với những kiến thức có trước đây.

Làm như vậy có lợi gì ? Anh có thể có may mắn tìm được một ý khác và ý này có thể sẽ dẫn anh thẳng tới cách giải. Cũng có thể là nó dẫn anh tới những nhận xét khác. Có thể là một số những nhận xét đó làm anh đi chệch đường. Tuy nhiên, nên mừng với mọi ý mới dù rằng nó không quan trọng lắm hay còn mơ hồ, bởi vì chính nó lại có thể kéo theo một ý phụ làm cho nó thêm chính xác nếu như nó còn mơ hồ hoặc là ý phụ này có thể làm cho nó tốt hơn nếu như nó chưa hay lắm. Ngay cả trong một lúc nào đó mà anh chưa có một ý mới nào thực sự tốt, anh vẫn có quyền vui sướng nếu như quan niệm của anh về bài toán trở nên đầy đủ hơn, có hệ thống hơn, thuần nhất hơn hay là cân đối hơn.

4. Thực hiện chương trình

Tôi phải bắt đầu từ đâu ? Anh phải bắt đầu từ cái ý hay đã dẫn anh tới cách giải. Anh hãy bắt đầu khi anh tin chắc đã nắm được ý chính và đã cảm thấy tự mình có khả năng phân tích được mọi chi tiết có thể cần đến.

Tôi có thể làm gì ? Hãy củng cố những thành công bước đầu của anh. Thực hiện một cách chi tiết những phép tính đại số hay hình học mà anh đã sơ bộ làm trước đây. Kiểm tra lại mỗi bước bằng những suy luận lôgic hay bằng trực giác, hay nếu có thể được bằng cả hai cách. Nếu bài toán của anh quá phức tạp thì có thể chia thành những bước "lớn" và những bước "nhỏ", mỗi bước lớn gồm nhiều bước nhỏ. Trước hết xét những bước lớn trước rồi tiếp đến những bước nhỏ.

5. Nhìn lại cách giải

Tôi phải bắt đầu từ đâu ? Bắt đầu với cách giải đầy đủ và đúng trong mọi chi tiết.

Tôi có thể làm gì ? Xem bài toán trên nhiều mặt của nó và tìm những điểm tiếp xúc với những kiến thức đã có trước.

Hãy xét những chi tiết của cách giải và cố làm cho chúng được thật đơn giản, chú ý tới những phần lớn trong cách giải và thử làm cho chúng được gọn hơn, cố gắng nhìn bao quát toàn bộ bài toán.

Cố gắng hoàn thiện những phần nhỏ và những phần lớn trong cách giải, cuối cùng tìm cách hoàn thiện toàn bộ cách giải, làm cho cách giải sáng sủa một cách trực giác. Hãy sắp xếp nó một cách tự nhiên trong hệ thống những kiến thức có trước của anh. Hãy xét kĩ lưỡng phương pháp mà anh đã theo, cố gắng cho được cái phần chủ yếu của nó và đem áp dụng cho những bài toán khác. Hãy xét kĩ lưỡng kết quả của bài toán và thử mang áp dụng vào những bài toán khác.

Làm như vậy được lợi gì ? Anh có thể tìm thấy một cách giải khác tốt hơn, phát hiện ra những sự kiện mới và bổ ích. Trong mọi trường hợp, nếu anh có thói quen xem lại kĩ càng các cách giải, anh sẽ thu được những kiến thức rất có hệ thống và sẵn sàng để đem ứng dụng, anh sẽ phát triển được khả năng giải toán của mình.

PHẦN THỨ BA

TỰ ĐIỂN CON

Trong "tự điển" này, tác giả giải thích chi tiết các vấn đề trình bày trong bảng ở cuối quyển sách và một số vấn đề khác có liên quan đến phương pháp giải toán. Các vấn đề được trình bày theo thứ tự a, b, c.

Anh có biết một bài toán nào giống nó không ?

Thực tế khó mà đề ra được một bài toán hoàn toàn mới, không giống một chút nào với các bài toán khác, hay là không có một điểm nào chung với một bài toán trước đây đã giải. Nếu như có một bài toán như vậy, nó vị tất đã giải được. Thực vậy, khi giải một bài toán, ta luôn luôn phải lợi dụng những bài toán đã giải, dùng kết quả, phương pháp hay kinh nghiệm đã có để giải các bài toán đó. Hiển nhiên, những bài toán ta dùng tới, phải có liên hệ nào đó với bài toán hiện có. Do đó mà có câu hỏi trên.

Thông thường, không khó khăn lắm để ta nhớ lại những bài đã giải. Trái lại, có nguy cơ là nhớ được nhiều quá và không biết chọn bài toán nào thực sự có ích. Phải chọn những bài toán nào gần nhất với bài toán đang xét. Phải xét kĩ cái chưa biết, hay tìm một bài toán đã giải trước đây liên hệ với bài toán hiện có bằng sự tổng quát hoá, sự cá biệt hoá và sự tương tự.

Mục đích của câu hỏi trên đây nhằm huy động những kiến thức có từ trước ("tiến tới và đạt tới" ở mục 1) chúng ta giữ trong trí nhớ cái bản chất của những kiến thức toán học dưới dạng những định lí đã chứng minh. Do đó mà câu hỏi : *"Anh có biết một định lí nào có thể dùng được không ?"* đặc biệt thích hợp với trường hợp của "bài toán về chứng minh", tức là khi ta phải chứng minh hay bác bỏ một định lí nào cho trước.

Anh có dùng hết mọi dữ kiện cho trước chưa ?

Trong quá trình giải bài toán nhờ vào những kiến thức của chúng ta không ngừng được tập trung mà sau cùng chúng ta hiểu bài toán sâu sắc và đầy đủ hơn lúc ban đầu (xem mục "tiến tới và đạt được" mục 1). Nhưng như vậy thì lúc này công việc sẽ ra sao ? Chúng ta đã có mọi cái cần thiết chưa ? Chúng ta đã hoàn toàn hiểu bài toán chưa ? *Anh có dùng hết mọi dữ kiện cho trước chưa ? Có dùng tất cả các điều kiện không ?* (Câu hỏi tương ứng với "bài toán về chứng minh" là...).

Anh có dùng hết mọi giả thiết của định lí chưa ?

1. Để minh hoạ điều nói trên, ta trở lại "bài toán về hình hộp" đã nói ở mục 8 (và được xét trong các mục 10, 12, 14, 15). Có thể có học sinh sau khi có ý nghĩ tính đường chéo của một mặt : $\sqrt{a^2 + b^2}$, thì không nghĩ thêm được gì nữa. Thầy giáo khi đó có thể giúp anh ta bằng cách hỏi : *"Anh có dùng hết mọi dữ kiện cho trước chưa ?"* Người học sinh không thể không nhận thấy là trong công thức $\sqrt{a^2 + b^2}$ không có chứa số c đã cho. Do đó, anh ta cần phải tìm cách đưa số c vào. Thành thử, anh ta có nhiều khả năng để nhận ra tam giác vuông có các cạnh là $\sqrt{a^2 + b^2}$ và c còn cạnh huyền chính là đường chéo của hình hộp phải tìm (xem một ví dụ khác trong "các phần tử phụ" mục 3). Những câu hỏi của bảng mà ta xét ở đây đều rất quan trọng. Ví dụ trên đã nói rõ vai trò của chúng trong việc xây dựng cách giải. Chúng có thể giúp ta tìm thấy điểm yếu trong quan niệm của ta về bài toán, giúp ta phát hiện phần tử còn thiếu. Thực vậy, một khi ta đã thấy thiếu một phần tử cần thiết, thì tất nhiên ta sẽ cố tìm cách đưa nó vào. Như vậy, chúng ta đã có một chìa khoá, một cái hướng tìm kiếm nhất định có thể đưa ta tới một ý quyết định.

2. Những câu hỏi của chúng tôi không những giúp cho việc xây dựng cách giải mà còn giúp thử lại cách giải nữa. Để hiểu rõ hơn, ta giả sử phải thử lại chứng minh một định lí mà giả thiết gồm ba phần đều quan trọng. Điều đó có nghĩa là nếu bỏ đi một trong ba phần đó thì định lí không còn đúng nữa.

Trong chứng minh, ta có dùng hết toàn bộ *giả thiết* không ? Ta có dùng tới phần thứ nhất của giả thiết không ? Cụ thể dùng ở đâu ? Phần thứ hai dùng ở đâu ? Phần thứ ba dùng ở đâu ? Khi trả lời những câu hỏi đó, chúng ta đã thử lại chứng minh.

Cách thử này rất có hiệu quả, bổ ích và hầu như cần thiết để hiểu định lí một cách sâu sắc, đặc biệt là nếu chứng minh của nó dài và phức tạp, điều này mọi người đọc thông minh đều hiểu rõ.

3. Mục đích những câu hỏi ở đây nhằm xem ta quan niệm bài toán có đầy đủ không. Quan niệm đó chắc chắn sẽ không đầy đủ nếu ta bỏ qua một dữ kiện quan trọng, một điều kiện của giả thiết ; cũng như nếu ta không nắm được ý nghĩa của một thuật ngữ nào đó, liên quan tới một khái niệm quan trọng. Do đó, để biết rõ ta đã hiểu bài toán đầy đủ tới đâu, chúng ta phải đặt câu hỏi sau : *Anh đã chú ý tới tất cả những khái niệm cốt yếu có trong bài toán chưa ?* (xem mục "Định nghĩa" mục 7).

4. Những nhận xét trên, có những hạn chế cần được bổ sung thêm. Thực vậy, chúng chỉ áp dụng trực tiếp được cho những bài toán "đặt đúng" và "có nghĩa". Một bài toán về tìm tòi gọi là đặt đúng và có nghĩa phải chứa tất cả những dữ kiện cần thiết và không có dữ kiện nào thừa. Điều kiện của bài toán phải vừa vặn đủ, nghĩa là không được mâu thuẫn và không được thừa. Khi giải một bài toán loại này, hiển nhiên chúng ta cần dùng tất cả những dữ kiện và toàn bộ điều kiện.

Đối tượng của một "bài toán về chứng minh" là một định lí toán học. Nếu một bài toán như vậy mà đặt đúng và có nghĩa, thì mọi dữ kiện trong giả thiết của định lí đều là cốt yếu cho kết luận của nó.

Khi chứng minh một định lí như vậy, tất nhiên ta cần dùng tất cả các dữ kiện của giả thiết. Những bài toán, trong các sách giáo khoa trung học, đúng ra, thường là đặt đúng và có nghĩa. Tuy nhiên, ta không nên sao nhãng tinh thần phê bình ; mỗi khi có một chút nghi ngờ, ta phải tự hỏi : "có thể thoả mãn điều kiện của bài toán không ?". Bằng cách thử trả lời câu hỏi đó, hay một câu hỏi tương tự, chúng ta có thể đi tới chỗ tin chắc ít nhất là đến một chừng mực nào đó rằng bài toán của ta đã được đặt đúng cách.

Câu hỏi làm nhan đề cho mục này và những câu hỏi tương tự chỉ có thể đặt ra dưới dạng này trong trường hợp mà chúng ta biết được bài toán là có nghĩa và đặt đúng, hay là chúng ta không có cơ sở nào để đặt giả thiết ngược lại.

5. Có những bài toán không phải toán học được "đặt đúng" theo nghĩa đã xác định. Chẳng hạn, những bài toán hay về đánh cờ chỉ được có một lời giải duy nhất, trên bàn cờ không được có một quân nào thừa, ...

Tuy nhiên, những bài toán thực tiễn thường là rất xa tình trạng có thể đặt đúng. Trong trường hợp này để áp dụng những câu hỏi trong mục này, cần phải xét lại chúng một cách cẩn thận từ đầu.

Bạn đã gặp bài toán đó lần nào chưa ?

Có thể là bạn đã giải bài toán một lần rồi, hay ít ra bạn đã có lần nghe nói đến hay đã giải một bài toán hoàn toàn tương tự ; đó là những khả năng mà ta chớ nên bỏ qua. Bạn hãy thử nhớ lại. *Ta đã gặp bài toán này lần nào chưa ? Hay là ta đã gặp nó dưới một dạng hơi khác ?* Ngay nếu câu trả lời là không, thì những loại câu hỏi như vậy cũng có thể "huy động" được những kiến thức cần thiết.

Vấn đề trên đây thường được hiểu theo nghĩa rộng hơn nhiều. Muốn tìm được lời giải, ta phải tìm lại trong trí nhớ những kiến thức thích hợp, có thể áp dụng được vào bài toán (xem mục : "tiến tới và đạt được"), lẽ dĩ nhiên ta chưa thể thấy trước được là phải cần đến những phần kiến thức nào, nhưng có một số khả năng nào đó mà ta không nên bỏ qua. Chẳng hạn, bài toán hiện tại có thể có một đặc điểm nào đó mà ta đã gặp và đã sử dụng trong một bài toán cũ. Như vậy, nếu một đặc điểm nào đó của bài toán hiện tại làm ta chú ý vì có thể là quan trọng, thì ta hãy cố nhớ lại xem là đã gặp đặc điểm đó ở đâu, trong bài toán nào. Đặc điểm đó là gì ? Nó có quen thuộc không ? *Ta đã gặp nó lần nào chưa ?*

Bài toán về tìm tòi (tìm ẩn), bài toán về chứng minh.

Ta sẽ thực hiện một sự đối chiếu song song giữa hai loại bài toán này.

1. Mục đích của "bài toán về tìm tòi" là tìm ra một đối tượng nào đó là cái chưa biết của bài toán, cái chưa biết còn gọi là cái phải tìm, là ẩn, cái mà người ta hỏi. Những "bài toán về tìm tòi" có thể là lí thuyết hay thực hành, trừu tượng hay cụ thể, là những bài toán nghiêm túc hay chỉ là những câu đố đơn giản. Ta có thể tìm cái chưa biết đủ các loại, cố gắng tìm ra, nhận được, kiếm được, làm ra hay là dựng mọi loại đối tượng. Trong truyện trinh thám, cái chưa biết là thủ phạm ; trong việc đánh cờ là một nước đi ; trong đại số sơ cấp là một số ; trong một bài dựng hình là một hình vẽ.

2. Mục đích của "bài toán về chứng minh" là chứng minh một điều đã được phát biểu rõ ràng là đúng hay sai.

Một nhân chứng xác nhận rằng thủ phạm ở nhà anh ta trong một đêm nào đó và ông chánh án phải phát hiện ra lời xác nhận trên có đúng không và phải dựa trên những cơ sở chắc chắn nhất để chứng tỏ rằng sự phát hiện của mình là đúng. Đối với ông ta, đó là "một bài toán chứng minh". Việc chứng minh định lí Pi-ta-go là một bài toán chứng minh khác. Ở đây, ta không nói "chứng minh hay bác bỏ" định lí Pi-ta-go. Mặc dầu là về một phương diện nào đó nên đưa vào, trong trường hợp trên đây có thể bỏ qua điều đó, vì chúng ta biết rằng khả năng bác bỏ định lí Pi-ta-go là không đáng kể.

3. Những yếu tố chính của một "bài toán về tìm tòi" là *cái chưa biết, những cái đã biết và các điều kiện* của bài toán. Nếu ta phải dựng một tam giác có các cạnh a, b, c thì cái chưa biết là một tam giác, những cái đã biết là ba độ dài a, b, c và các điều kiện là các cạnh của tam giác phải dựng theo thứ tự có những độ dài như trên. Nếu ta phải dựng một tam giác có các chiều cao a, b, c thì cái chưa biết là một đối tượng cùng loại với bài toán trên, những cái đã biết cũng vậy, nhưng các điều kiện liên hệ giữa cái chưa biết với những cái đã biết thì khác.

4. Nếu một "bài toán chứng minh" là một bài toán có dạng thông thường nhất, thì cái yếu tố chính của nó sẽ là *giả thiết* và *kết luận* của định lí mà ta cần chứng minh hay bác bỏ.

"Nếu bốn cạnh của một tứ giác mà bằng nhau, thì hai đường chéo của nó sẽ vuông góc với nhau". Phần thứ hai của câu là kết luận, phần thứ nhất bắt đầu bằng chữ "nếu" là giả thiết. Mọi định lí toán học không phải bao giờ cũng có thể chia ra một cách hiển nhiên làm giả thiết và kết luận. Điều đó không thể có được chẳng hạn trong trường hợp sau : "có một số vô hạn các số nguyên tố".

5. Để giải hoàn toàn được một "bài toán về tìm tòi" cần phải biết một cách chính xác các yếu tố chính, cái chưa biết, những cái đã biết và các điều kiện của bài toán.

Trong bảng có chứa nhiều câu hỏi và lời khuyên có liên quan tới những yếu tố đó.

Cái chưa biết là gì ? Những cái đã biết là gì ? Chia các điều kiện ra thành những bộ phận khác nhau.

Hãy tìm quan hệ giữa cái chưa biết và những cái đã biết.

Hãy xét kĩ cái chưa biết, thử nghĩ tới một bài toán quen thuộc và cũng chứa cái chưa biết đó hay một cái chưa biết tương tự.

Hãy chỉ giữ một phần của các điều kiện và bỏ qua phần còn lại. Bây giờ cái chưa biết được xác định đến mức độ nào ? Nó có thể biến đổi như thế nào ? Anh có thể rút ra từ những cái đã biết một phần tử có ích không ? Có thể nghĩ tới những cái cho biết khác cho phép anh xác định cái chưa biết không ? Anh có thể thay đổi cái chưa biết, hoặc những cái đã biết hoặc thay đổi cả hai nếu cần thiết sao cho cái chưa biết mới và những cái đã biết mới gần với nhau hơn không ? Anh đã sử dụng tất cả những cái đã biết chưa ? Anh đã dùng toàn bộ điều kiện chưa ?

6. Nếu phải giải một "bài toán chứng minh" thì cần phải biết thật chính xác phần chính của nó là giả thiết và kết luận. Đối với những yếu tố này, cũng có những câu hỏi và lời khuyên có ích tương ứng với phần trong bảng đặc biệt dành cho những "bài toán về tìm tòi".

Giả thiết là gì ? Kết luận là gì ?

Hãy phân biệt những phần khác nhau của giả thiết.

Hãy tìm mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận. Hãy xét kĩ kết luận. Thử nghĩ tới một định lí quen biết có cùng một kết luận hay một kết luận tương tự, hãy giữ một phần của giả thiết thôi và bỏ qua phần còn lại. Kết luận có còn đúng không ? Anh có thể, từ giả thiết, rút ra một điều gì có ích không ? Có thể thay đổi giả thiết hay kết luận, hay là thay đổi cả hai nếu thấy cần thiết, sao cho giả thiết mới và kết luận mới gần với nhau hơn không ?

Anh đã dùng toàn bộ giả thiết chưa ?

7. Những "bài toán về tìm tòi" quan trọng hơn trong toán học sơ cấp, còn những "bài toán chứng minh" quan trọng hơn trong toán học cao cấp. Trong sách này, tác giả đặc biệt xoáy vào những "bài toán về tìm tòi" nhưng cũng mong lập lại được sự cân đối và trình bày vấn đề được đầy đủ hơn trong một dịp khác.

Bài toán phụ

Mục đích của ta không phải là giải bài toán này, mà chỉ vì ta hi vọng rằng khi xét nó, ta sẽ đi gần tới cách giải bài toán ban đầu. Cái đích ta muốn đạt tới là cách giải bài toán ban đầu, cách giải bài toán phụ chỉ là một phương tiện mà nhờ nó để đạt tới đích.

Một con bướm cố bay qua cửa kính, gắng công nhiều lần vô ích. Mà không chịu thử sang cửa sổ bên cạnh để mở, nơi nó đã bay vào trong phòng. Con người có suy nghĩ hành động thông minh hơn. Cái ưu việt của con người là ở chỗ có khả năng tránh được trở ngại mà mình không khắc phục trực diện được, có khả năng nghĩ ra được một bài toán phụ thích hợp nếu như bài toán ban đầu khó giải.

Việc tìm một bài toán phụ là một quá trình suy luận quan trọng. Khả năng đặt bài toán phụ một cách rõ ràng, hiểu thấu được mục đích của nó chỉ là một phương tiện để đạt tới mục đích chính, là một thành công tinh tế của trí tuệ. Vì vậy, việc học (hay dạy) cách vận dụng những bài toán phụ một cách thông minh là rất quan trọng.

1. *Ví dụ.* Tìm x, thoả mãn phương trình :

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Để ý rằng $x^4 = (x^2)^2$, ta thấy ngay là nên kí hiệu :

$$y = x^2$$

Ta đi tới một bài toán mới : tìm y, thoả mãn phương trình :

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

Bài toán mới là bài toán phụ. Ta có thể dùng nó làm phương tiện để giải bài toán ban đầu, ẩn số của bài toán phụ y được gọi là *ẩn số phụ.*

2. *Ví dụ.* Tìm đường chéo của hình hộp chữ nhật, cho biết ba cạnh cùng chung một đỉnh của nó.

Khi tìm cách giải bài toán này (mục 8) bằng sự tương tự (mục 15), chúng ta có thể đi tới một bài toán khác : tìm đường chéo của hình chữ nhật nếu cho biết độ dài hai cạnh cùng chung một đỉnh của nó.

Bài toán mới đó là bài toán phụ, chúng ta khảo sát nó với hi vọng rút ra từ đó một điều bổ ích cho việc giải bài toán ban đầu.

3. *Lợi ích.* Cái lợi mà ta có được, khi xét bài toán phụ có thể mang những tính chất khác nhau. Ta có thể dùng *kết quả* của bài toán phụ. Chẳng hạn trong ví dụ 1, khi giải phương trình đặc biệt đối với y, ta tìm thấy y có thể bằng 4 và 9. Ta kết luận rằng hoặc $x^2 = 4$, hoặc $x^2 = 9$. Từ đó, ta tìm được mọi nghiệm của phương trình ban đầu. Trong những trường hợp khác, ta lại dùng *phương pháp* của bài toán phụ. Chẳng hạn trong ví dụ 2, bài toán phụ liên quan tới hình học phẳng, nó tương tự với bài toán ban đầu trong không gian, nhưng đơn giản hơn, ta khảo sát một cách thông minh bài toán phụ loại tương tự với hi vọng là nó sẽ bổ ích, nó cho ta điều kiện làm quen với những phương pháp nhất định những phép tính nhất định, với cái công cụ mà cuối cùng chúng ta có thể dùng nó để giải bài toán ban đầu. Trong ví dụ 2, việc chọn bài toán phụ như vậy là rất đạt. Phân tích kĩ bài toán phụ đó, ta sẽ thấy rằng có thể dùng cả phương pháp và kết quả của nó (xem mục 15 và mục "*Anh có dùng hết mọi dữ kiện cho trước chưa ?*).

4. *Nguy hiểm.* Thời gian và sức lực của chúng ta để giải bài toán phụ, không phải là được dùng trực tiếp cho mục đích của ta. Nếu việc khảo sát bài toán phụ không có kết quả thì thời gian và sức lực bỏ ra là vô ích. Vì vậy, cần phải có kinh nghiệm chọn bài toán phụ theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, bài toán phụ có thể dễ làm hơn bài toán xuất phát, nó có thể tỏ ra bổ ích và quyến rũ ghê gớm.

Đôi khi bài toán phụ có lợi ở chỗ là nó mới và nó đem lại những khả năng chưa khai thác. Chúng ta chọn bài toán phụ vì việc tìm cách giải trực tiếp bài toán ban đầu đều không có kết quả và chỉ dẫn tới sự mệt mỏi.

5. Làm thế nào để tìm ra bài toán phụ. Việc giải bài toán ban đầu thường phụ thuộc vào chỗ có tìm được bài toán phụ thích hợp hay không. Khốn nỗi lại không có một phương pháp toàn năng cho phép tìm được bài toán phụ, cũng như không có một phương pháp toàn mĩ, luôn dẫn tới cách giải. Tuy nhiên có những câu hỏi và lời khuyên có ích, chẳng hạn như *hãy xét cái chưa biết.* Chúng ta thường tìm được bài toán phụ có ích bằng cách *biến đổi bài toán.*

6. *Các bài toán tương đương.* Hai bài toán là *tương đương*, nếu như cách giải bài toán này dẫn tới cách giải bài toán kia. Như vậy, trong ví dụ 1, bài toán ban đầu và bài toán phụ là tương đương. Ta xét những định lí sau :

A– Trong mỗi tam giác đều mỗi góc bằng 60°.

B– Nếu trong một tam giác mà ba góc bằng nhau, thì mỗi góc đều bằng 60°.

Đó là định lí khác nhau. Giả thiết của chúng có chứa những khái niệm khác nhau. Trong định lí A nói tới các cạnh bằng nhau, trong định lí B nói tới các góc bằng nhau.

Nhưng trong hai định lí đó, định lí này hệ quả của định lí kia. Do đó, bài toán chứng minh định lí A tương đương với bài toán chứng minh định lí B.

Nếu như phải chứng minh định lí A, ta có thể làm cho bài toán trở nên dễ dàng hơn, bằng cách đưa vào bài toán phụ là chứng minh định lí B. Chứng minh định lí B có dễ hơn định A một chút và điều quan trọng hơn là ta phải *thấy trước* được rằng bài toán B là có thể thừa nhận được ngay từ đầu. Đúng như vậy, định lí B, trong đó chỉ nói tới các góc, tỏ ra "thuần nhất" hơn định lí A trong đó nói tới cả các góc và các cạnh. Việc chuyển bài toán ban đầu sang bài toán phụ sẽ gọi là một phép rút gọn *thuận nghịch* hoặc là *hai chiều*, hoặc là *tương đương* nếu như bài toán ban đầu vì bài toán phụ là tương đương. Như vậy, phép rút gọn trong ví dụ 1 cũng vậy ; phép rút gọn thuận nghịch, như ta đã thấy là phương pháp quan trọng và tốt nhất để đưa vào bài toán phụ. Tuy nhiên, bài toán phụ không tương đương với bài toán đầu cũng rất quan trọng (xem ví dụ 2).

7. *Những chuỗi các bài toán phụ tương đương thường gặp trong những suy luận toán học.* Ta phải giải bài toán A : ta không giải được nó nhưng phát hiện được là A tương đương với một bài toán B khác, khi xét bài B, ta có thể đi tới bài toán thứ ba C, tương đương với B. Tiếp tục như vậy đi từ C tới D và tất nhiên cứ như thế cho tới khi bài toán cuối cùng L mà cách giải của nó đã biết hoặc là rất đơn giản. Vì mỗi bài toán đều tương đương với bài toán đứng trước nó nên bài toán sau cùng L sẽ tương đương với bài toán A.

Thành thử, chúng ta rút ra được cách giải bài toán A từ bài toán L, là mắt xích cuối cùng trong chuỗi các bài toán phụ, chuỗi phụ kiểu như thế này được các nhà toán học Hi Lạp chú ý tới, như một đoạn của Páppuýt đã xác nhận. Để minh hoạ, chúng ta lại xét ví dụ 1. Ta gọi (A) là điều kiện buộc ẩn số x :

$$\text{(A) } x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Một trong những cách giải là ta biến điều kiện đó thành một điều kiện khác mà ta gọi là (B) :

$$\text{(B) } (2x^2)^2 - 2(2x^2).13 + 144 = 0$$

Ta chú ý rằng các điều kiện A và B là khác nhau. Có thể nói chúng chỉ hơi khác nhau : tất nhiên dễ thấy là chúng tương đương nhưng không nhất thiết là đồng nhất với nhau.

Việc đi từ (A) tới (B) không những chỉ hợp pháp mà là có mục đích rõ ràng, hiển nhiên, đối với tất cả những ai đã quen giải phương trình bậc hai. Tiếp tục theo hướng đó, chúng ta lại biến đổi điều kiện (B) thành một điều kiện (C) khác :

$$\text{(C)}\ (2x^2)^2 - 2\,(2x^2).\,13 + 169 = 25$$

Tiếp tục tính toán chi tiết, ta liên tiếp có :

$$\text{(D)}\ (2x^2 - 13)^2 = 25$$

$$\text{(E)}\ 2x^2 - 13 = \pm 5$$

$$\text{(F)}\ x^2 = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$\text{(G)}\ x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}$$

$$\text{(H)}\ x = 3,\ \text{hay}\ -3,\ \text{hay}\ 2,\ \text{hay}\ -2.$$

Mỗi một phép rút gọn mà ta thực hiện như vậy đều là thuận nghịch. Do đó, điều kiện cuối cùng (H) tương đương với điều kiện ban đầu (A), thành thử các số 3, –3, 2, –2 là tất cả các nghiệm của phương trình ban đầu. Như vậy, trên đây ta đã có được từ điều kiện ban đầu (A), một dãy điều kiện (B), (C), (D), ... mà trong đó, mỗi điều kiện đều tương đương với điều kiện đứng trước nó. Điểm này đáng chú ý hơn cả, vì các điều kiện tương đương được thoả mãn bởi cùng những đối tượng như nhau. Do đó, bằng cách đi tìm mọi nghiệm, thoả mãn một điều kiện mới, tương đương chúng ta sẽ có được mọi nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu.

Nhưng khi chuyển từ điều kiện ban đầu sang một điều kiện hẹp hơn, chúng ta sẽ bị mất nghiệm, còn như khi chuyển sang một điều kiện rộng hơn, chúng ta sẽ nhận được những nghiệm thừa, thứ yếu khác hẳn với bài toán ban đầu.

Nếu như, trong khi thực hiện một dãy những phép rút gọn mà mới đầu chúng ta chuyển sang một điều kiện hẹp hơn, rồi sau đó chuyển sang một điều kiện rộng hơn, thì chúng ta có thể hoàn toàn mất dấu vết của bài toán đầu.

Để tránh sự nguy hiểm đó, thì mỗi lần đưa vào một điều kiện mới, chúng ta nhất thiết phải thử lại cẩn thận xem có tương đương với điều kiện ban đầu không. Vấn đề đó sẽ quan trọng hơn nhiều nếu như ta có không phải một phương trình mà là một hệ phương trình, hay là nếu như các điều kiện không được biểu diễn bằng các phương trình, chẳng hạn như trong các bài toán dựng hình.

(Hãy so sánh với mục "Páppuýt" đặc biệt ở mục 2, 3, 4, 8 có trình bày một chuỗi các "bài toán về tìm tòi", trong mỗi bài toán đó đều có ẩn số mới. Sự sắp xếp các bài toán trong chuỗi không phải là tất yếu. Ví dụ mà ta vừa xét ở trên, khác hẳn ở chỗ : mỗi bài toán của các chuỗi đều có cùng một ẩn số như nhau và chỉ khác nhau ở dạng của điều kiện. Hiển nhiên mọi sự hạn chế đó đều không phải tất yếu).

8. *Phép rút gọn một chiều.* Giả sử ta có hai bài toán A và B đều chưa giải. Nếu như chúng ta có thể giải được bài toán A thì cũng sẽ giải được hoàn toàn bài toán B ; nhưng điều ngược lại không đúng : nếu chúng ta có thể giải được bài toán B thì có thể là ta thu được những hiểu biết nhất định về bài toán A, nhưng không phải là biết giải bài toán B thì ta hoàn toàn giải được bài toán A. Trong trường hợp này tốt hơn là đi giải bài toán A. Như vậy việc giải bài toán A đem lại nhiều hơn cách giải bài toán B. Có thể nói, bài toán A có *nhiều hiệu quả hơn* còn bài toán B *ít hiệu quả hơn.*

Nếu như ta đi từ bài toán xuất phát tới một bài toán nhiều hiệu quả hơn, hay ít hiệu quả hơn, thì ta sẽ gọi bước đó là *phép rút gọn một chiều.* Cả hai phép rút gọn một chiều, ít nhiều đều phiêu lưu hơn so với phép rút gọn hai chiều (thuận nghịch). Ví dụ 2 của chúng ta minh hoạ phép rút gọn một chiều đi tới bài toán ít hiệu quả hơn. Thực vậy, nếu chúng ta có thể giải bài toán ban đầu về tìm đường chéo hình hộp có các cạnh a, b, c, thì chúng ta có thể chuyển dễ dàng sang bài toán phụ bằng cách đặt c = 0 và có được hình chữ nhật với các cạnh a, b. Ví dụ khác về phép rút gọn một chiều đi đến bài toán ít hiệu quả hơn được trình bày trong mục "Sự cá biệt hoá" và các mục 3, 4, 5. Những ví dụ chứng tỏ rằng chúng ta có thể may mắn tránh được việc dùng bài toán phụ ít hiệu quả hơn bằng cách đưa vào một số khảo sát phụ, dẫn ta tới cách giải bài toán ban đầu.

Phép rút gọn một chiều đi đến một bài toán nhiều hiệu quả hơn cũng có thể có ích (xem "sự tổng quát hoá", mục 2 và phép rút gọn từ bài toán thứ nhất tới bài toán thứ hai trong mục "Phép quy nạp toán học" các mục 1, 2). Bài toán nhiều hiệu quả hơn có thể là dễ hơn. Đó chính là "nghịch lí của nhà phát minh".

Biến đổi bài toán

Một con bướm cố bay qua cửa kính, cố gắng để thoát ra ngoài nhiều lần nhưng vô ích, mà không chịu thử sang cửa sổ bên cạnh để mở, nơi nó đã bay vào trong phòng, có lẽ, con chuột nhắt hành động khôn ngoan hơn. Bị nhốt trong bẫy, nó tìm cách chui thoát ra giữa hai thanh chắn này, rồi giữa hai thanh chắn khác và cứ thế thử mọi cách có thể. Một con người, trong mọi trường hợp giải toán phải biết thay đổi dự định của mình một cách thông minh hơn, phải biết xem xét mọi khả năng có thể một cách có ý thức hơn.

Con người phải biết học ở những sai lầm và những thiếu sót của mình "thua keo này bày keo khác", trong câu châm ngôn đó bao hàm lời khuyên sáng suốt của nhân dân. Con bướm, con chuột và con người đều làm theo lời khuyên đó, nhưng con người đạt được thành công hơn, chính vì đã biết *biến đổi bài toán* một cách thông minh hơn.

1. Cuối cùng, khi đã tìm được cách giải, chúng ta hiểu bài toán chính xác và rõ ràng hơn lúc ban đầu. Để đi từ quan niệm ban đầu về bài toán tới một quan niệm chính xác hơn, đầy đủ hơn, chúng ta đã nghiên cứu bài toán theo nhiều quan điểm khác nhau, khảo sát nó dưới nhiều khía cạnh khác nhau.

Thành công trong việc giải bài toán phụ thuộc vào việc chọn con đường đúng và phụ thuộc vào việc ta tấn công pháo đài có đúng mặt yếu của nó hay không.

Để thấy được con đường nào đúng hơn, phía nào dễ qua hơn, ta phải xét bài toán theo nhiều quan điểm khác nhau, đề cập bài toán theo nhiều cách, phải *biến đổi bài toán*.

2. Sự biến đổi bài toán là cốt yếu. Sự kiện này có thể giải thích bằng nhiều cách. Chẳng hạn, muốn đi tới cách giải một bài toán, ta phải huy động và tổ chức những kiến thức đã có từ trước. Chúng ta cần phải nhớ lại và vận dụng hàng loạt những yếu tố cần thiết cho việc giải toán. Việc biến đổi bài toán giúp ta nhớ lại những yếu tố đó.

Bằng cách nào ? Chúng ta nhờ một loại "liên hệ" hay là "liên tưởng", có nghĩa là điều mà chúng ta đang suy nghĩ, quan tâm tới lúc này có khuynh hướng gợi lại trong trí nhớ của ta, cái có liên quan với nó trước kia. (Đây không phải chỗ cũng chưa phải lúc trình bày chi tiết lí thuyết về sự liên tưởng và những giới hạn của nó). *Bằng cách biến đổi* bài toán, chúng ta mang lại những chi tiết mới và như vậy đã tạo ra những liên hệ mới, những khả năng mới làm sống lại trong trí nhớ những cái gì liên quan tới bài toán của ta.

3. Không có một sự tập trung cao độ thì đừng hi vọng giải được một bài toán nghiêm túc. Nhưng một sự tập trung chú ý vào một đối tượng, căng thẳng như vậy, chóng làm ta mệt mỏi. Để sự tập trung của chúng ta không bị giảm sút, cần phải thay đổi không ngừng đối tượng của chúng ta. Nếu công việc tiến hành có kết quả thì chúng ta luôn có cái để mà nghiên cứu, có những vấn đề mới để khảo sát và như vậy là duy trì được sự chú ý và lòng phấn khởi của chúng ta.

Nhưng nếu chúng ta dẫm chân tại chỗ thì sự chăm chú sẽ ít đi, sự thích thú giảm sút, ta sẽ thấy mệt mỏi với bài toán, tư tưởng của ta bắt đầu phân tán và có nguy cơ xa rời mất bài toán.

Để tránh cái nguy cơ đó, chúng ta phải *đặt một câu hỏi mới*, liên quan tới bài toán. Câu hỏi này mở ra cho ta những khả năng chưa được khai thác liên hệ với những kiến thức trước đây, cho ta hi vọng thiết lập được những liên hệ có ích. Câu hỏi mới *lại thu hút được sự chú ý của chúng ta vì rằng nó biến đổi bài toán* và chỉ cho ta thấy những khía cạnh mới của nó.

4. *Ví dụ* : Tìm thể tích khối chóp cụt, đáy là hình vuông, cho biết cạnh của đáy dưới là a, của đáy trên là b và chiều cao là h.

Bài toán này có thể ra cho những học sinh đã biết các công thức tính thể tích hình lăng trụ và hình chóp. Nếu học sinh không đề ra được ý kiến nào để giải bài toán thì thầy giáo có thể bắt đầu bằng cách *biến đổi các dữ kiện*. Chúng ta bắt đầu xét hình chóp cụt, trong đó $a > b$. Khi cạnh b tăng cho tới lúc bằng a thì sao ? Hình chóp cụt thành hình lăng trụ và thể tích ta xét sẽ bằng a^2h. Khi cạnh b giảm cho tới 0 thì sao ? Hình chóp cụt trở thành hình chóp và thể tích phải tìm sẽ bằng $\frac{a^2h}{3}$. Việc biến đổi các dữ kiện như vậy trước hết làm bài toán trở nên bổ ích. Ngoài ra, nó còn có thể gợi ý bằng cách này hay cách khác dùng những kết quả đã biết về hình lăng trụ và hình chóp. Trong mọi trường hợp, chúng ta đã tìm được một số tính chất của kết quả cuối cùng, cụ thể là công thức phải tìm thoả mãn điều kiện nó có thể đưa về dạng a^2h với $b = a$ và $\frac{a^2h}{3}$ với $b = 0$. Biết trước được những tính chất của kết quả phải tìm thì những tính chất đó có thể gợi cho ta những chỉ dẫn quý giá. Trong mọi trường hợp khi tìm thấy công thức cuối cùng, ta đều có thể thử lại. Như vậy, ta trả lời được câu hỏi : anh có thể thử lại kết quả đó không ? (xem mục này điểm 2).

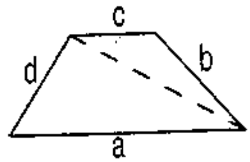
5. *Ví dụ* : Dựng một hình thang, cho biết các cạnh a, b, c, d.

Giả sử a là đáy dưới, c là đáy trên, a và c song song nhưng không bằng nhau, b và d không song song. Chúng ta bắt đầu biến đổi các dữ kiện của bài toán nếu như không có ý gì khác.

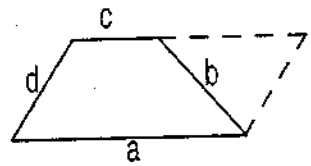
Ta bắt đầu với hình thang trong đó $a > c$.

Nếu cạnh c giảm tới 0 thì sao ? Hình thang trở thành tam giác. Nhưng tam giác là một hình đơn giản và quen thuộc mà chúng ta có thể dựng được theo những dữ kiện khác nhau. Có thể là tam giác đó giúp ta trong việc dựng hình thang. Ta thử làm như vậy bằng cách kẻ một đường phụ, là đường chéo của hình thang (hình 7). Xét tam giác đó, ta thấy hình như nó chẳng giúp ta được gì ? Ta biết hai cạnh a và d, nhưng ta lại cần có ba điều kiện.

Ta hãy thử một cách khác. Khi c tăng cho đến lúc bằng a thì sao ?



Hình 7



Hình 8

Hình thang trở thành hình bình hành (hình 8). Ta có thể dùng nó làm gì không ? Chú ý tới tam giác mà chúng ta thêm vào hình thang ban đầu để làm thành hình bình hành. Ta dựng dễ dàng tam giác này theo các cạnh đã biết b, d và $a - c$ bằng cách biến đổi bài toán ban đầu (dựng hình thang), đi tới một bài toán phụ dễ làm hơn (dựng tam giác). Dùng kết quả của bài toán phụ, chúng ta giải dễ dàng bài toán ban đầu (chỉ cần hoàn thành việc dựng hình bình hành).

Ví dụ chúng ta có tính cách điển hình. Lần thử đầu tiên của chúng ta không thành công cũng là điển hình.

Tuy nhiên, xem lại cách giải ta nhận thấy rằng lần biến đổi thứ nhất không phải là vô ích. Nó có ý nghĩa của nó, cụ thể là : nó cho phép ta nghĩ tới việc dựng một tam giác, làm phương tiện để giải bài toán. Thực vậy, chúng ta đã thành công trong lần thứ thứ hai bằng cách sửa đổi cách biến đổi thứ nhất. Trong cả hai trường hợp, chúng ta đã biến đổi cạnh c, lần đầu giảm và lần sau tăng nó.

6. Trong ví dụ trên, ta thường phải xét nhiều cách biến đổi khác nhau của bài toán. Ta cần phải biến đổi bài toán, tìm những cách phát biểu khác, biến đổi nó cho tới khi tìm được bài toán có lợi cho ta. Ta có thể rút ra những bài học từ một trường hợp không thành công, vì trong một lần thử không thành công có thể có một ý hay *bằng cách sửa đổi nó*, chúng ta có thể đi tới một lần thử kết quả hơn.

7. Có một loạt những phương pháp xác định để biến đổi bài toán, thường là có ích. Trong đó, các phương pháp, chẳng hạn có những cách biến đổi như quay về định nghĩa, phân tích và lập tổ hợp mới, đưa vào những phần tử phụ, sự tổng quát hoá, sự cá biệt và sự tương tự.

8. Để việc sử dụng bảng được tốt thì việc đề ra những câu hỏi như đã nói ở trên (điểm 3) có một ý nghĩa to lớn. Những câu hỏi mới có thể làm chúng ta lại thích thú với việc tìm cách giải bài toán.

Thầy giáo có thể dùng bảng của chúng tôi để giúp học sinh. Nhưng có những học sinh không cần tới sự giúp đỡ vì đối với họ thì thầy giáo không cần đặt ra một câu hỏi nào và cho phép họ được tự mình làm việc, như vậy rõ ràng là thích hợp với việc phát triển sự suy nghĩ độc lập của họ.

Hiển nhiên là nếu học sinh gặp khó khăn trong việc giải toán thì thầy giáo nên cố tìm một câu hỏi hay một lời khuyên thích hợp mà giúp đỡ các em. Nếu không, học sinh chán ngán bài toán, buông trôi để nó bay mất, hết hứng thú về bài toán, phạm phải một sai lầm nghiêm trọng nào đó thì thật là tai hại. Chúng ta có thể dùng bảng để giải những bài toán riêng của chúng ta. Muốn dùng bảng có kết quả, phải theo sự chỉ dẫn đã nói trên. Trường hợp công việc trôi chảy, khi mà trong quá trình giải bài toán, những nhận xét mới cứ tự nó nảy sinh ra thì lẽ tất nhiên ta không nên cản trở việc đó bằng những câu hỏi không cần thiết.

Nhưng khi chúng ta phải dừng lại, trong đầu không có ý gì mới, thì có nguy cơ là bài toán làm ta chán nản. Trong trường hợp này, ta phải nghĩ tới một ý tổng quát có thể giúp ích chúng ta, nghĩ tới một câu hỏi hay lời khuyên thích hợp của bảng. Và chúng ta vui vẻ đón nhận bất kì một câu hỏi mới nào có thể giúp ta tìm ra con đường mới để giải bài toán, nó có thể làm ta trở lại thích thú với bài toán, buộc chúng ta tiếp tục làm việc và suy nghĩ về bài toán.

Bônđanô Bécna (1781 – 1848)

Nhà lôgic và toán học, ông đã dành một phần lớn trong tác phẩm quan trọng trình bày về lôgic cho vấn đề "thuật phát minh" (tập III, trang 293 – 575). Về phần này của tác phẩm, ông viết :

"Ở đây, tôi hoàn toàn không có ý định mô tả một quá trình tìm tòi phát minh nào đó, mà đã từ lâu những người có tài cũng chưa biết tới. Về vấn đề này, tôi cũng không hứa trước là sẽ đem lại một điều gì hoàn toàn mới. Nhưng tôi cố gắng trình bày rõ ràng những quy tắc và những phương tiện của việc tìm tòi khoa học mà những nhà khoa học đã đi theo, thậm chí nhiều khi không có ý thức. Dù rằng không có ảo tưởng là sẽ hoàn toàn thành công trong công trình này, tôi luôn luôn hi vọng rằng sự đóng góp nhỏ bé của mình làm người khác vừa lòng và sẽ có những áp dụng về sau".

Bổ đề

Có nghĩa là "định lí phụ". Thuật ngữ này gốc ở chữ Hi Lạp có thể dịch nó một cách thật sát là "cái được thừa nhận".

Ví dụ : Khi tìm cách chứng minh một định lí A, ta sẽ giả thiết có tồn tại một định lí B khác. Nếu B đúng, hiển nhiên ta có thể dùng nó để chứng minh A.

Ta thừa nhận tạm thời B là đúng, chưa chứng minh nó và tiếp tục chứng minh định lí A. Định lí B công nhận như vậy, là một định lí phụ đối với định lí

A cho trước. Sự giải thích ngắn gọn này minh hoạ đầy đủ ý nghĩa hiện nay của chữ "bổ đề".

Các bài toán thực tiễn

Về nhiều phương diện chúng khác xa những bài toán thuần tuý toán học. Tuy nhiên, các lí luận và phương pháp chính để giải thì về căn bản là như nhau. Hơn nữa, những bài toán thực tiễn của người kĩ sư nói chung có bao gồm một phần toán học. Sau đây chúng tôi sẽ trình bày những điểm khác nhau, những điểm tương tự và các mối liên hệ giữa hai loại bài toán đó.

1. Xây dựng một công trình thuỷ lợi trên một dòng sông là một bài toán thực tiễn đáng chú ý. Không cần có kiến thức chuyên môn mới hiểu được điều đó. Ở các thời kì cổ sơ của loài người, xa kỉ nguyên khoa học, người ta cũng sử dụng các đập nước, chẳng hạn trong lưu vực sông Nin (Ai cập) và ở nhiều nơi khác mà mùa màng phụ thuộc vào nước sông.

Ta hãy xét vấn đề xây dựng một đập nước quy mô hiện đại.

Đâu là ẩn ? Một bài toán thực tiễn về loại này có nhiều ẩn : vị trí chính xác của đập, hình dạng, kích thước, nguyên vật liệu cần dùng, ...

Đâu là điều kiện ? Có nhiều, ta không thể trả lời vắn tắt được. Trong một đề án lớn lao như vậy, phải thoả mãn nhiều nhu cầu kinh tế, mà càng gây ít thiệt hại càng tốt cho các nhu cầu cơ bản khác. Chiếc đập phải cung cấp điện, cung cấp nước vào ruộng, hay nước cho các nhu cầu khác và phải cho phép ta kiểm soát được thời kì nước lũ. Nhưng cái đập phải ít cản trở sự đi lại của thuyền bè trên dòng sông, sự phát triển các loại cá có ích và không làm hỏng một môi trường cảnh quan đẹp... Và dĩ nhiên, giá thành phải càng thấp càng tốt và thời gian xây dựng phải ngắn.

Đâu là dữ kiện ? Khối lượng các dữ kiện mà ta phải chú ý đến thì thật là nhiều đến kinh khủng. Cần những dữ kiện về trắc địa liên quan đến dòng song và các chi nhánh cho nó ; những dữ kiện về địa chất cần cho sự vững chắc của các nền móng, về nước thấm, về các vật liệu xây dựng có thể tìm được tại chỗ ... về thuỷ văn cho biết những kì nước lũ hằng năm, về kinh tế cho biết giá trị các ruộng đất được tưới, giá cả các vật liệu xây dựng và sức lao động ...

Ví dụ này chứng tỏ rằng các ẩn, các dữ kiện, các điều kiện trong một bài toán thực tế là phức tạp hơn và không được xác định rõ ràng như trong một bài toán thuần tuý toán học.

2. Muốn giải một bài toán bất kì, cần có một vốn kiến thức tối thiểu. Người kĩ sư hiện đại có thể sử dụng đồng thời những kiến thức hoàn toàn chuyên môn, một lí thuyết khoa học về sức bền vật liệu, kinh nghiệm bản thân trong việc xây dựng và kinh nghiệm trong các sách kĩ thuật. Tuy không có được những kiến thức rộng rãi như vậy, nhưng chúng ta cũng có thể cố gắng tưởng tượng xem một người xây dựng đập thời cổ Hi Lạp đã lí luận như thế nào. Dĩ nhiên, ông ta đã có dịp xem nhiều đập khác hay những đê điều và công trình thuỷ lợi khác. Ông đã nhìn thấy sông khi nước lũ, mang theo nhiều thứ mà nó đã cuốn trôi và gây áp lực hai bên bờ. Có thể ông ta đã tham gia sửa chữa nhưng nơi bị nước lụt phá loại. Có thể ông đã chứng kiến một cái đập bị vỡ do nước quá mạnh. Chắc chắn ông đã nghe nói đến nhiều đập chịu đựng hàng thế kỉ và nhiều tai hoạ khi đập bị vỡ thình lình. Chắc chắn trong đầu óc của ông có những ý nghĩ về áp lực của nước trên mặt đất, sức chịu đựng và sức ép của các vật liệu trong đập.

Tuy nhiên, một nhà xây dựng như vậy không hề có một quan niệm rõ ràng, định lượng, khoa học về áp suất các chất lỏng hay về các lực đàn hồi trong các cố thể, mà quan niệm đó lại là một bộ phận cơ sở trong kiến thức của một kĩ sư hiện đại. Nhưng ngay người kĩ sư hiện đại, cũng sử dụng rất nhiều kiến thức chưa đạt đến một trình độ khoa học chính xác, những điều hiểu biết của anh ta về sức phá hoại của nước, về đất bồi, về sức dẻo và nhiều tính chất khác của một số vật liệu chưa được xác định rõ ràng, hầu hết đều mang một tính chất thực nghiệm.

Ví dụ này chứng tỏ rằng, những kiến thức cần thiết và những quan niệm được sử dụng trong các bài toán thực tế là phức tạp hơn và không được xác định rõ ràng như trong các bài toán thuần tuý toán học.

3. Kết hợp với điều nhận xét ở cuối điểm 1 về các ẩn, dữ kiện và điều kiện, chúng ta có thể nói vắn tắt rằng, trong các bài toán thực tế, tất cả đều phức tạp hơn và không rõ ràng như trong các bài toán thuần tuý toán học. Đó là điều khác nhau cơ bản giữa hai loại bài toán đó và từ đó lại đưa đến nhiều sự khác nhau nữa, tuy nhiên, các lập luận và phương pháp cơ bản để đạt được lời giải thì đều như nhau trong cả hai loại bài toán.

Thông thường, người ta thừa nhận rằng những bài toán thực tiễn đòi hỏi nhiều kinh nghiệm hơn : điều đó cũng có thể. Tuy nhiên, theo ý kiến chúng tôi thì sự khác nhau chủ yếu nằm trong bản chất của các kiến thức cần thiết, chứ không phải trong cách giải quyết của chúng ta. Dù là bài toán nào chăng nữa thì bao giờ ta cũng phải nhờ đến những kinh nghiệm có từ trước và tự đặt cho mình những câu hỏi : *Ta đã gặp bài toán này dưới dạng hơi khác chưa ? Ta có biết một bài toán nào cùng loại không ?*.

Để giải quyết một bài toán thuần tuý toán học, chúng ta xuất phát từ những quan niệm rất rõ ràng, tương đối có trật tự trong ý nghĩ của ta. Với một bài toán thực tế nhiều khi ta phải xuất phát từ những ý nghĩ mơ hồ và việc làm sáng tỏ các khái niệm có khi lại là một bộ phận quan trọng của bài toán. Ngành y học hiện nay có nhiều điều kiện để chẩn đoán các bệnh truyền nhiễm hơn trước thời kì Pastơ vì khi đó khái niệm về truyền nhiễm còn rất mơ hồ. *Ta đã để ý đến mọi khái niệm thiết yếu của bài toán hay chưa ?* Đó là một câu hỏi bổ ích cho các loại bài toán, nhưng cách sử dụng nó thay đổi rất nhiều tuỳ theo bản chất các khái niệm mà ta gặp phải.

Trong một bài toán thuần tuý toán học, mọi dữ kiện và điều kiện đều là cần thiết và phải để ý. Trong các bài toán thực tế, ta có vô số các dữ kiện và điều kiện, tất nhiên ta phải chiếu cố đến chúng càng nhiều càng tốt, nhưng dẫu sao thì cũng phải bỏ qua một số. Ta trở lại trường hợp của người xây dựng. Ông phải chú ý đến lợi ích công cộng và những quyền lợi kinh tế quan trọng nhất, nhưng lại phải hi sinh những quyền lợi của một vài cá nhân hay những thiệt thòi thứ yếu. Những dữ kiện của bài toán này quả là vô tận. Chẳng hạn, ông muốn thu thập càng nhiều chi tiết càng tốt về tính chất của đất mà ông sẽ xây dựng công trình, nhưng vì không thể bỏ mất quá nhiều thời gian để thu thập những dữ kiện về địa chất, nên ông phải bằng lòng với những tài liệu đã có và như vậy là kết quả về tương lai sẽ có phần nào không chắc chắn.

Bạn đã sử dụng mọi dữ kiện hay chưa ? Đã sử dụng toàn bộ điều kiện hay chưa ? Ta không thể nào trốn tránh được các câu hỏi đó khi phải giải các bài toán thuần tuý toán học. Trong bài toán thực tế, có thể sửa đổi các câu hỏi trên như sau. Bạn đã sử dụng những dữ kiện nào *có thể góp phần đáng kể vào việc tìm ra lời giải hay chưa* ? Bạn đã sử dụng những điều kiện nào *có thể có ảnh hưởng đáng kể đến lời giải hay chưa ?* Sau khi đã sắp xếp các điều hiểu biết mà ta đã có được, sau khi đã tìm hiểu thêm những chi tiết khác nếu cần thiết thì sẽ đến một lúc mà ta phải chấm dứt các cuộc tìm hiểu, tuy biết chắc chắn rằng như vậy là đã bỏ qua mất một số điểm. "Sợ nguy hiểm thì đừng đi biển". Sự thật thì bao giờ cũng có rất nhiều dữ kiện không có ảnh hưởng đáng kể đến kết cục của lời giải.

4. Những người xây dựng đập thời cổ Ai Cập phải thoả mãn với những kinh nghiệm của bản thân họ vì họ không thể dựa vào cái gì khác. Ngược lại, người kĩ sư hiện đại không thể chỉ dựa trên kinh nghiệm, đặc biệt nếu đề án của anh ta nhằm xây dựng một công trình mới và táo bạo. Anh ta phải tính toán sức chịu đựng của đập đang dự kiến làm, trông thấy trước một cách chính xác những ứng lực trong các bộ phận, điều đó buộc anh ta phải áp dụng lí thuyết đàn hồi (được xác nhận rất đúng trong các công trình bằng bê tông cốt sắt). Nhưng muốn làm điều đó, anh ta phải có một kiến thức rất rộng rãi về toán học và như vậy, bài toán thực tế của nhà kĩ sư đã dẫn đến một bài toán thuần tuý toán học.

Bài toán này thuộc một chuyên môn khá hẹp nên chúng tôi không đề cập đến ở đây, mà chỉ nêu lên một nhận xét có tính chất chung. Muốn đạt và giải một bài toán thuần tuý toán học xuất phát từ những vấn đề thực tiễn thì thông thường, chúng ta giới hạn trong việc *tính gần đúng*, vì ta đã buộc phải bỏ qua một số dữ kiện và điều kiện phụ của bài toán thực tiễn. Vì vậy, phải công nhận một sự thiếu chính xác phần nào trong khi tính toán, đặc biệt là nếu làm như vậy thì tính toán đơn giản đi nhiều.

5. Việc tính gần đúng thì kể ra cũng có nhiều điều bổ ích đáng nói. Nhưng vì chưa biết rõ "hành lí" toán học của độc giả, nên chúng tôi chỉ đề cập đến một ví dụ lí thú mà muốn hiểu thì chỉ cần trực giác.

Việc lập các bản đồ địa lí là một bài toán thực tế. Muốn vẽ bản đồ thì thông thường người ta thừa nhận quả đất là một hình cầu, điều đó chỉ là một giả thiết gần đúng không phù hợp với thực tế. Diện tích Trái Đất không thể xác định bằng toán học và ta biết rằng quả đất dẹt ở hai đầu. Tuy nhiên, nếu xem nó như một quả cầu thì chúng ta có thể lập địa đồ dễ dàng hơn nhiều, ta có lợi nhiều về mặt giản đơn mà không mất gì mấy về tính chính xác. Để thấy rõ điều đó, ta tưởng tượng một quả bóng lớn có hình dạng giống hệt quả đất với đường kính ở xích đạo bằng 3 mét. Khi đó thì khoảng cách giữa các cực của quả bóng, dĩ nhiên bé hơn đường kính vì quả đất bị dẹt, nhưng cũng chỉ bé hơn có một centimét.

Như vậy là hình cầu có thể biểu thị gần đúng quả đất, mà biểu thị rất tốt.

Các danh từ (từ ngữ) cũ và mới

Các danh từ cũ và mới dùng để mô tả hoạt động của trí óc khi giải các bài toán thường là mơ hồ. Sự hoạt động này lại rất quen thuộc, nhưng cũng như mọi thứ trừu tượng, nó khó mô tả khi không nghiên cứu một cách hệ thống thì ta không thể dùng các danh từ chuyên môn, mà nếu dùng các danh từ thông thường, bán chuyên môn thì các danh từ này thường bị lẫn lộn vì ý nghĩa của chúng thường thay đổi tuỳ theo tác giả.

Sau đây, chúng tôi nêu một số các danh từ mới đã được dùng trong việc này mà một số danh từ cũ, trong đó có một số mà chúng tôi đã có dụng ý không dùng đến và một số đã được dùng mặc dù là mơ hồ. Chúng tôi sẽ cố gắng kết hợp nhiều ví dụ cụ thể.

1. *Phép phân tích* đã được Pappus định nghĩa rõ ràng : nó chỉ một lối lí luận điển hình là đi từ ẩn (hay kết luận) để trở lại các dữ kiện (hay giả thiết). Rủi một điều là ý nghĩa của danh từ này dần dần bị biến đổi và hiện nay trở thành khác hẳn (phân tích hoá học, phân tích lôgic...), vì vậy, chúng tôi đã tránh không dùng danh từ này, tuy rất tiếc.

2. *Điều kiện* liên hệ ẩn số với các dữ kiện. Đó là một danh từ rõ ràng và có ích. Nhiều khi cần phân chia điều kiện ra nhiều phần. Nhưng mỗi phần đó thường cũng lại được gọi là một điều kiện. Điều mơ hồ này cũng có thể tránh được bằng cách dùng một danh từ mới để chỉ các phần của điều kiện, chẳng hạn, ta có thể gọi mỗi phần đó là một điểm, một "điều kiện"[1].

3. *Giả thiết* chỉ một bộ phận quan trọng của một định lí toán học. Với ý nghĩa đó, danh từ này hoàn toàn rõ ràng và đầy đủ. Điều khó khăn ở đây là nhiều khi một bộ phận của giả thiết cũng được gọi là một giả thiết, do đó có thể lẫn lộn. Cách bổ khuyết cũng như trên.

Rủi một điều là nhiều khi ta phải dùng danh từ "giả thiết" để chỉ một ý kiến chưa chắc chắn, một điều dự đoán. Trong một ngữ cảnh cụ thể thì điều lẫn lộn này sẽ không xảy ra được.

4. *Lí luận giật lùi*. Danh từ này có một số tác giả dùng với ý nghĩa là "phân tích". Chúng tôi dùng đến, nhưng chỉ một vài nơi mà thôi.

5. Danh từ *tổng hợp* cũng được Pappus sử dụng với một nghĩa xác định. Nhưng vì những lí do tương tự như với dùng từ "phân tích", nên chúng tôi cũng phải tránh danh từ này.

Các phần tử phụ

Lúc giải bài toán xong thì quan niệm của ta về bài toán trên sẽ toàn bộ, đầy đủ hơn nhiều so với lúc đầu (xem "đi và đạt tới" mục 1). Trong khi đi dần tới cách giải, chúng ta bổ sung thêm những phần tử mới vào các phần tử khảo sát lúc đầu. Phần tử mà ta đưa vào với hi vọng nó giúp ta tiến tới tìm được cách giải bài toán, gọi là *phần tử phụ*.

1. Có nhiều loại phần tử phụ, khi giải bài toán hình, ta có thể bổ sung hình vẽ bằng những đường mới – *những đường phụ* (những đoạn thẳng). Khi giải bài toán đại số, ta có thể đưa vào *ẩn số phụ* (xem mục "các bài toán phụ" điểm 1). *Định lí phụ* là định lí mà ta đưa vào với hi vọng nhờ nó ta có thể đi dần tới cách giải bài toán ban đầu.

(1) Khi không sợ lẫn lộn, chúng tôi vẫn gọi mỗi phần đó là một điều kiện vì thấy không có cách gì hơn (người dịch)

2. Những ý nghĩ dẫn ta tới việc đưa vào những phần tử phụ có thể rất khác nhau. Thật là vui mừng nếu như ta nhớ lại được *một bài toán tương tự với bài toán của chúng ta đã giải rồi.* Rất có thể là bài toán đó được dùng tới, nhưng ta còn chưa biết là phải làm như thế nào. Chẳng hạn, ta đang cố giải một bài toán hình. Giả sử trong một bài toán tương tự nào đó trước đây đã giải rồi mà ta nhớ lại được là có nói đến những tam giác nào đó.

Trong khi đó, trên hình vẽ của ta không có một tam giác nào cả. Để có thể lợi dụng bài toán phụ đã tìm thấy thì hình vẽ của ta phải có chứa một tam giác. Như vậy, chúng ta phải đưa vào một tam giác như thế bằng cách bổ sung hình vẽ bằng những đoạn thẳng phụ thích hợp. Nói chung, nếu ta đã sớm nhớ được cách giải của một bài toán tương tự và muốn lợi dụng nó để giải bài toán đã cho, thì nên đặt câu hỏi : Nên đưa vào phần tử phụ nào để có thể lợi dụng được bài toán trước đây ? (Ví dụ trong mục 10 là điển hình).

Bằng cách trở lại các định nghĩa, chúng ta cũng thấy sự tất yếu phải đưa vào những phần tử phụ. Chẳng hạn, khi cho định nghĩa của đường tròn, chúng ta phải nhớ ngay tới tâm và bán kính của nó và chỉ rõ ra trên hình vẽ đang xét. Nếu không, ta không thể rút ra được một lợi ích cụ thể từ định nghĩa đó. Phát biểu định nghĩa mà không vẽ gì cả có nghĩa là nghiên cứu bằng lời nói suông.

Những cố gắng dùng những kết quả đã biết và sự trở về với định nghĩa là những lí do thông thường nhất buộc phải đưa vào những yếu tố phụ, nhưng không phải chỉ có vậy.

Quan điểm của ta về bài toán có thể thay đổi sau khi bài toán được bổ sung những phần tử mới, làm cho nó được đầy đủ hơn, liên hệ chặt chẽ hơn với những kiến thức có trước và có đủ khả năng gợi cho ta con đường đi tới cách giải.

Tuy nhiên, khi bổ sung những phần tử mới, chúng ta thường không hiểu rõ được ngay là có thể dùng chúng như thế nào.

Chúng ta chỉ cảm thấy rằng đã có được "một ý chói lọi" trong quan niệm mới về bài toán sau khi đã bổ sung những phần tử phụ nhất định.

Cái lí do buộc phải đưa vào một phần tử phụ nào đó có thể là khác nhau nhưng lí do đó là phải có. Không nên đưa vào những phần tử mà không có một lí do nào cả.

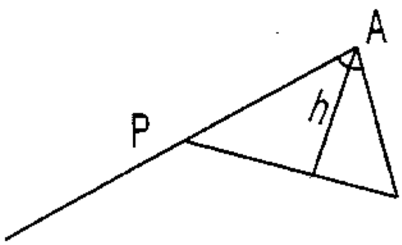
3. *Ví dụ* : Dựng một tam giác cho biết một góc với một đỉnh của nó, chiều cao kẻ từ đỉnh đó và chu vi của nó.

Chúng ta đưa vào những *kí hiệu thích hợp.* Ta kí hiệu α là góc cho trước, h là chiều cao cho trước kẻ từ đỉnh A mà góc tại đó bằng α và p là chu vi cho trước.

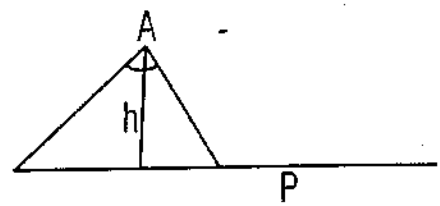
Chúng ta vẽ hình trên đó có ghi những kí hiệu α và h.

Anh đã dùng hết mọi cái cho biết trước chưa ?

Chưa, vì trên hình vẽ chưa có đoạn thẳng nào có độ dài p, bằng chu vi của tam giác. Do đó, ta phải đưa p vào. Nhưng đưa vào như thế nào ?



Hình 9



Hình 10

Ta có thể thử đưa p vào bằng nhiều cách khác nhau. Nhưng cách làm biểu diễn ở hình 9, 10 không được tốt. Tìm cách giải thích tại sao lại không tốt, ta đi tới kết luận rằng nguyên nhân chính là sự thiếu đối xứng.

Thực vậy, trong một tam giác mà ba cạnh a, b, c chưa biết (ta kí hiệu như thường lệ : a là cạnh đối diện với góc A). Ta biết rằng :

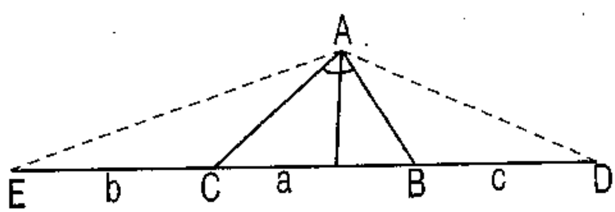
$$a + b + c = p$$

Như vậy, các cạnh b và c đóng một vai trò như nhau ; chúng có thể đổi lẫn cho nhau ; bài toán của chúng ta đối xứng với các cạnh b và c, ý nghĩ đó có thể gợi ý cho ta phải đưa đoạn thẳng có độ dài p vào như ở hình 11. Trên đường kéo dài của cạnh a, ta đặt đoạn CE có độ dài bằng b ở một phía, còn phía kia đặt đoạn BD có độ dài c. Thành thử trên hình vẽ (h.11) ta dựng được đoạn ED có độ dài :

$$b + a + c = p$$

Dù rằng có rất ít kinh nghiệm giải bài toán dựng hình chúng ta cũng không quên đưa vào cùng với ED, các đoạn thẳng phụ AD và AE mà mỗi đoạn đều là đáy của một tam giác cân.

Thực vậy, đưa vào bài toán những phần tử đặc biệt đơn giản và quen thuộc là luôn luôn có ý nghĩa.



Hình 11

Những phần tử như vậy chính là các tam giác cân trong trường hợp ta đang xét. Chúng ta đã đưa vào những đoạn thẳng phụ một cách rất có kết quả. Khảo sát hình vẽ mới, ta phát triển được một hệ thức đơn giản giữa góc $\widehat{EAD}$ và góc α. Thực vậy, dùng những tam giác cân ABD và ACE, ta thấy rằng $\widehat{DAE} = \frac{\alpha}{2} + 90^o$. Sau chú ý đó, hiển nhiên là phải cố dựng được tam giác DAE. Thành thử việc giải bài toán ban đầu dẫn tới việc giải một bài toán phụ nào đó, rất đơn giản.

4. Các thầy giáo và các tác giả những sách giáo khoa không nên quên rằng học sinh và độc giả có suy nghĩ sẽ không hài lòng nếu ta giới thiệu với họ một chứng minh làm sẵn, trong đó mỗi bước đều đã được thử nghiệm là đúng, vì họ muốn biết cơ sở và mục đích của mỗi bước phải làm. Việc đưa vào một phần tử phụ là một bước làm ta phải chú ý ngay. Nếu như có một đường phụ tài tình xuất hiện đột ngột trên hình vẽ thì người học sinh hay độc giả có suy nghĩ sẽ thấy thất vọng và cảm thấy như bị đánh lừa. Toán học chỉ bổ ích khi nó bồi bổ cho sự nhanh trí và khả năng suy luận của chúng ta.

Nhưng sự nhanh trí và khả năng suy luận không thể được bồi bổ nếu như lí do và mục đích của các bước đập mạnh vào mắt ta hơn cả lại không được giải thích rõ ràng. Sự giải thích từng bước nhờ các chú ý thích hợp (như ở điểm 3) hay những câu hỏi và lời khuyên chọn lọc cẩn thận đòi hỏi nhiều công sức và thời gian (như ở những mục 10, 18, 19, 20). Nhưng những sự giải thích như vậy có thể xứng đáng với công sức bỏ ra.

Các quy tắc của phát minh

Quy tắc thứ nhất là phải có khả năng (thông minh) và có may mắn. Quy tắc thứ hai là phải kiên trì, nhẫn nại không thoái lui khi những ý tưởng hay chưa xuất hiện.

Chúng tôi thấy cần phải nhắc độc giả một điều, dầu có phần nào thô bạo là nhiều khi cố gắng vẫn đưa đến thất bại. Thiết lập nên những quy tắc có hiệu lực mà nhờ đó có thể giải tất cả các bài toán là một việc còn nên làm hơn là tìm các kim thạch như xưa kia các nhà giả kim thuật đã mất công tìm kiếm. Nhưng những quy tắc như vậy sẽ là ảo thuật, mà ảo thuật thì không thể có được. Tìm được những quy tắc chắc chắn có thể áp dụng được cho mọi loại bài toán, đó chỉ là một ảo tưởng không thể nào thực hiện được.

Người nghiên cứu đứng đắn không đi tìm những quy tắc như vậy mà có thể cố gắng tìm hiểu các phương pháp điển hình của quá trình suy nghĩ, hình dạng và các giai đoạn của lí luận có ích đặc biệt cho việc giải các bài toán. Những phương pháp này, mọi người có lương tri đều có thể sử dụng được. Trong các phương pháp này, ta gặp nhiều câu hỏi và lời gợi ý thường được nhắc đi nhắc lại : đó là, những câu hỏi mà những người thông minh thường tự đặt cho mình và những người thầy xứng đáng với danh hiệu đó đặt ra cho học sinh. Sử dụng các câu hỏi và điều gợi ý đó, gom góp lại trong một bảng có lẽ không lí thú bằng sử dụng các kim thạch, nhưng ít ra ta cũng có thể có được một bảng như vậy. Bảng mà chúng tôi trình bày ở đây gồm nhiều câu hỏi thuộc loại nói trên.

Các quy tắc về giảng dạy

Quy tắc thứ nhất là phải nắm vững điều mình dạy. Quy tắc thứ hai là phải biết nhiều hơn nội dung chương trình dạy.

Tác giả quyển sách này nghĩ rằng đối với nhà giáo cũng cần có những quy tắc, nếu không thì quyển sách này đã chẳng ra đời. Tuy nhiên, chúng ta không nên quên rằng một giáo viên về toán phải biết rõ những điều mình dạy và nếu anh muốn truyền cho học sinh của mình lối suy nghĩ thích hợp khi giải toán thì bản thân anh cũng phải quen thuộc với lối suy nghĩ đó.

Các quy tắc về hành văn

Quy tắc thứ nhất là phải biết rõ điều mình muốn nói, quy tắc thứ hai là khi muốn nói hai điều thì phải lần lượt phát biểu điều này trước, điều kia sau, chứ đừng phát biểu cùng một lúc.

Chẩn đoán

Chúng tôi dùng chữ này như một thuật ngữ đặc biệt thuận lợi trong những vấn đề giáo dục và ở đây có nghĩa là : "Sự đánh giá chính xác công việc của học sinh". Hiển nhiên là điểm số cho biết về mặt đó nhưng chỉ một cách khái quát, người thầy giáo muốn hoàn thiện công việc của học sinh phải có một sự đánh giá chi tiết hơn những ưu, khuyết điểm của từng học sinh, chẳng khác gì một người thầy thuốc muốn hoàn thiện sức khoẻ của một bệnh nhân thì cần phải có chẩn đoán bệnh.

Ở đây, chúng tôi đặc biệt chú ý tới thái độ của học sinh đối với việc giải các bài toán. Đánh giá như thế nào ? Tốt hơn là nên phân biệt bốn giai đoạn trong quá trình giải một bài toán. Thực vậy, cách xử trí của học sinh trong các giai đoạn đó đủ để đánh giá các em không ?

Cái thiếu sót phổ biến nhất trong khi giải bài toán là hiểu bài toán không đầy đủ, chứng tỏ thiếu tập trung tư tưởng. Còn đối với việc đề ra một chương trình, tìm cái ý chung của cách giải thường có hai sai lầm đối lập nhau.

Một số người lao vào tính toán và dựng hình không có chương trình, không có một ý chung ; một số khác chờ đợi một cách thụ động một ý nào đó đến với mình, không làm gì để thúc đẩy ý đó mau xuất hiện.

Trong việc thực hiện chương trình, khuyết điểm phổ biến là sự cẩu thả, thiếu kiên nhẫn trong việc thử lại các chi tiết chính. Đặc biệt phổ biến là học sinh không *thử lại kết quả* gì cả. Các em thường hài lòng sau khi đã tìm được cách giải, gấp vở lại và không hề sửng sốt về những kết quả vô lí nhất.

Người thầy một khi đã chẩn đoán được khuyết điểm nói trên của học sinh, có hi vọng giúp học sinh sửa chữa được nếu như người thầy cứ xoáy vào một số câu hỏi thích hợp của bảng mà hỏi học sinh.

Có thể nghiệm lại kết quả hay không ? Có thể nghiệm lại cách suy luận không ?

Một câu trả lời khẳng định ở đây có thể củng cố lòng tin tưởng của chúng ta vào sự đúng đắn của lời giải và đồng thời cũng củng cố thêm kiến thức của ta.

1. Ta có thể nghiệm lại các kết quả bằng số bằng cách so sánh với những số thường thấy trong thực tế hàng ngày, ở đây chỉ cần đến lương tri thông thường là đủ. Những bài toán đặt ra do nhu cầu thực tiễn hay tính tò mò tự nhiên, thường dựa trên những sự kiện có thật, do đó ta có thể nghĩ rằng mọi người đều không quên tìm cách so sánh nói trên. Tuy nhiên, tất cả các thầy giáo đều biết rằng trong vấn đề này có những học sinh đã đi đến những kết quả quá sức vô lí, mà không hề biết lấy làm lạ, như khi tìm thấy chiều dài của một chiếc thuyền con là 1613 mét và tuổi của một sĩ quan già là 8 tuổi rưỡi. Điều đó không nhất thiết là do ngu xuẩn mà có lẽ chủ yếu là do sự xa rời thực tế trong những bài toán giả tạo.

2. Với những bài toán "bằng chữ" thì có nhiều cách nghiệm lại kết quả phong phú hơn và bổ ích hơn là với những bài toán bằng số (mục 14). Ta lấy một ví dụ khác, xét một hình chóp cụt đáy vuông. Nếu cạnh của đáy dưới bằng a, cạnh đáy trên bằng b, chiều cao là h, thì thể tích là :

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3}h$$

Ta có thể nghiệm lại kết quả này *trong những trường hợp riêng*. Thật vậy, nếu b = a, hình chóp cụt trở thành một hình lăng trụ và công thức trên cho a^2h, nếu b = 0, hình chóp cụt trở thành hình chóp và công thức trên cho $\frac{a^2h}{3}$. Ta có thể áp dụng cách *xét thứ nguyên*, vì khi đó thể tích biểu thị qua lập phương của chiều dài. Ta cũng có thể nghiệm lại công thức bằng cách *cho các dữ kiện biến thiên.* Vì nếu các dữ kiện tăng thì giá trị của công thức cũng tăng theo.

Những cách nghiệm lại như vậy không những có thể áp dụng cho kết quả cuối cùng mà còn có thể áp dụng cho các kết quả trung gian. Dù sao thì các cách đó cũng có ích trong việc giải thích công việc phụ mà chúng ta bắt buộc phải làm (xem mục biến đổi bài toán, mục 4). Để sử dụng các cách đó, ta có thể tổng quát hoá một "bài toán bằng số" và biến đổi nó thành một "bài toán bằng chữ" (xem mục tổng quát hoá, mục 3).

3. Có thể nghiệm lại cách lí luận không ? Khi nghiệm lại cách lí luận từng bước, ta tránh lặp lại nguyên văn, vì như vậy trước hết là rất chán, không bổ ích và làm mệt trí óc, sau nữa, vì nếu giữ lại những điều kiện cũ thì khá chắc chắn là chúng ta sẽ gặp lại những khó khăn cũ. Nếu ta thấy cần thiết phải duyệt lại toàn bộ lí luận, từng bước thì ít nhất ta cũng phải thay đổi thứ tự các giai đoạn, cách ghép các giai đoạn với nhau, đưa vào ít nhiều điều sửa đổi.

4. Một công việc đỡ mệt nhọc và bổ ích hơn là : nhắc lại các điểm yếu trong lí luận của chúng ta và ưu tiên xét lại các điểm đó, khi làm việc đó thì câu hỏi sau đây có thể có ích lợi : *ta đã sử dụng hết tất cả các dữ kiện hay chưa ?*

5. Rõ ràng là những tri thức phi toán học của chúng ta không hoàn toàn căn cứ trên những chứng minh lôgic. Phần chủ yếu nhất của các tri thức thông thường của chúng ta được thường xuyên nghiệm lại và củng cố do kinh nghiệm hằng ngày. Trong khoa học tự nhiên người ta thực hiện một cách có hệ thống hơn những thí nghiệm quan sát và thí nghiệm đo lường kết hợp với lí luận toán học. Những kiến thức toán học của chúng ta có thể chỉ hoàn toàn căn cứ vào sự chứng minh lôgic.

Đó là một vấn đề thuộc về lĩnh vực triết học mà ta không thể thảo luận ở đây. Chắc chắn là các tri thức toán học của chúng ta, của anh, của tôi hay của các em học sinh, không phải chỉ căn cứ vào lí luận lôgic. Bất cứ kiến thức sâu sắc nào cũng đều dựa vào trên một cơ sở thực nghiệm rộng rãi, cơ sở này thường xuyên được mở rộng mỗi khi kết quả của một bài toán được thí nghiệm xác minh.

Có thể phát biểu bài toán dưới một hình thức khác hay không ?

Các câu hỏi này có mục đích đưa đến một sự biến đổi bài toán.

Bạn hãy quay lại các định nghĩa (xem mục định nghĩa).

Có thể tìm được kết quả bằng cách khác không ?

Khi một cách giải dài và phức tạp, thì ta có thể nghĩ rằng có một cách giải khác, sáng sủa hơn và ngắn gọn hơn. *Ta có thể tìm kết quả bằng cách nào khác không ? Có thể nhìn thấy kết quả ngay lập tức không ?* Ngay khi lời giải mà ta đã tìm được là đã tốt rồi, thì việc tìm được một lời giải khác cũng vẫn có lợi. Thật là sung sướng khi thấy rằng kết quả tìm được xác nhận nhờ hai lí luận khác nhau, cũng như chúng ta thích biết được một vật nào đó nhờ hai giác quan khác nhau. Có được một chứng cớ rồi, chúng ta còn muốn tìm thêm một chứng cớ nữa cũng như chúng ta muốn sờ vào một vật mà ta đã trông thấy.

Điều đó có nghĩa là : hai chứng cớ có giá trị hơn là một.

Ví dụ tìm diện tích xung quanh S của một hình nón cụt, biết bán kính của đáy dưới R, bán kính của đáy trên r và chiều cao h.

Có nhiều cách giải bài toán này. Nếu giả sử ta biết công thức dùng để tính diện tích xung quanh của một hình nón thì vì một hình nón cụt có được bằng cách từ một hình nón ấy đi một hình nón bé hơn, nên diện tích xung quanh của nó bằng hiệu giữa các diện tích xung quanh của hai hình nón, chỉ cần biểu thị nó qua R, r và h. Phát biểu ý đó, cuối cùng ta đi đến công thức :

$$S = \pi (R + r) \cdot \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

Khi đã đạt kết quả này (sau các phép tính phần nào dài dòng), ta có thể tìm một lí luận khác rõ ràng hơn và gọn hơn. *Có thể tìm được kết quả này bằng cách khác không ? Có thể nhìn thấy kết quả này ngay lập tức không ?*

Muốn tìm kết quả này một cách trực tiếp hơn, ta thử xét ý nghĩa hình học của nó. Ta có thể nhận thấy rằng :

$$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

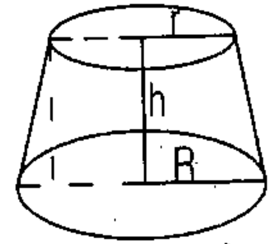
là chiều dài của đường sinh, ta gọi đường sinh là một trong các cạnh không song song của hình thang cân sinh ra nón cụt khi quay xung quanh đường thẳng nối các trung điểm của các cạnh song song (hình 12). Ta cũng có thể nhận thấy rằng :

$$\pi (R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

là trung bình cộng các chu vi của hai đáy. Ta lại cũng có thể viết :

$$\pi (R + r) = \frac{2\pi(R + r)}{2}$$

và đó là chu vi của thiết diện trung bình của hình nón cụt.



Hình 12

Các cách giải thích trên đây cho phép ta nhìn vấn đề theo một khía cạnh mới và phát biểu :

Diện tích = chu vi thiết diện trung bình × đường sinh.

Đến đây, dĩ nhiên ta nhớ đến quy tắc diện tích hình thang :

Diện tích = đường trung bình × chiều cao.

(Đường trung bình song song với các đáy của hình thang và chia chiều cao ra hai phần bằng nhau). So sánh hai công thức trên đây, ta thấy được "ngay lập tức" toàn bộ kết quả về hình nón cụt ; khi đó, ta cảm thấy rằng có thể chứng minh nhanh chóng và trực tiếp một kết quả mà ta tìm được nhờ những phép tính dài dòng.

Ví dụ trên đây là điển hình. Vì nó chưa hoàn toàn thoả mãn với phương pháp mà ta đã dùng để đạt được kết quả nên ta tìm cách cải tiến, biến đổi phương pháp đó. Muốn vậy, chúng ta phân tích cách giải, với hi vọng là sẽ hiểu được nó sâu hơn, nhìn lại nó dưới một khía cạnh khác. Bước đầu ta có thể chỉ thành công trong việc giải thích theo quan điểm mới một vài phần nhỏ của kết quả tìm được. Sau đó, ta có thể có hi vọng nhìn lại một vài phần khác nhau theo quan điểm mới.

Nhờ nghiên cứu liên tiếp từng chi tiết một, bằng nhiều cách, cuối cùng chúng ta có thể nhìn được toàn bộ vấn đề dưới một ánh sáng hoàn toàn khác trước và do đó rút ra một cách chứng minh mới.

Tất cả những điều nói trên thuộc về phương pháp của một nhà toán học điêu luyện nghiên cứu một vấn đề tinh vi, hơn là của một người học trò bắt đầu với một bài toán sơ cấp. Nói cho đúng thì nhà toán học, do kiến thức rộng, bắt buộc phải nhớ lại quá nhiều và như vậy phải thực hiện một lí luận phức tạp không cần thiết, nhưng nhược điểm đó được bù lại ở chỗ là một nhà toán học có kinh nghiệm lại có nhiều điều kiện hơn người mới bắt đầu trong việc cân nhắc phương pháp nào thích hợp để giải thích một phần kết quả, cuối cùng có thể chế biến được toàn bộ kết quả cũ.

Tuy nhiên, ngay trong những lớp học sơ cấp, nhiều khi học sinh cũng có thể đưa ra một lời giải phức tạp không cần thiết. Khi đó người thầy phải chỉ dẫn cho họ thấy, dù chỉ một vài lần, không những phương pháp giải bài toán một cách gọn gàng, mà còn phải làm thế nào để tìm được lời giải nhanh hơn ngay trong bản thân kết quả mình đã tìm ra (xem thêm mục : Chứng minh bằng phản chứng và chứng minh gián tiếp).

Có thể thoả mãn điều kiện của bài toán không ?

Điều kiện có đủ để tìm ra cái chưa biết không ? Hay là không đủ ? Hay là thừa ? Hay là có mâu thuẫn ?

Những câu hỏi này thường có ích trong thời kì đầu của việc giải bài toán, khi chưa cần một câu trả lời quyết định, mà chỉ là một câu trả lời sơ bộ, một sự phỏng đoán. Ta xem thêm những ví dụ ở mục 8, 18.

Nhìn thấy trước những đặc điểm của kết quả phải tìm là rất có lợi. Thực vậy, khi chúng ta đã có một ý nào đó về kết quả phải tìm thì chúng ta sẽ biết rõ hơn là phải đi theo hướng nào. Một đặc điểm quan trọng của bài toán là số các nghiệm mà nó có thể có và trong tất cả các bài toán, thì những bài toán thừa nhận một lời giải duy nhất là bổ ích hơn cả. Chúng ta thiên về coi những bài toán có một lời giải duy nhất là những bài toán "hợp lí". Bài toán của ta có "hợp lí" theo nghĩa đó không ? Nếu ta trả lời được câu hỏi đó, dù là chỉ bằng một sự phỏng đoán có vẻ đúng, thì sự hứng thú của ta đối với bài toán sẽ tăng lên và chúng ta có thể làm việc tốt hơn.

Cái lợi của câu hỏi đó càng hiển nhiên nếu ta trả lời được câu hỏi đó một cách dễ dàng. Ngược lại, nếu khó tìm thấy câu trả lời thì công sức chúng ta dốc vào để tìm ra nó có thể vượt quá cái lợi ích có thể rút ra được. *Với câu hỏi "có thể thoả mãn điều kiện của bài toán hay không ?"* và những câu hỏi khác có liên quan tới nó thì cũng vậy.

Chúng ta cần đặt những câu hỏi đó vì nói chung các câu đó là dễ trả lời đúng, nhưng không cần dừng lại ở những câu hỏi đó nếu thấy câu trả lời là khó khăn và tối nghĩa.

Đối với những "bài toán về chứng minh", những câu hỏi tương ứng sẽ là : "*Định lí có vẻ đúng hay không ? Hay là định lí xem ra có vẻ là vô lí ?*". Cách đặt câu hỏi như vậy chứng tỏ người ta chỉ chờ đợi một sự phỏng đoán, một câu trả lời sơ bộ mà thôi.

Có thể sử dụng kết quả tìm được không ?

Tìm được cách giải một bài toán là một điều phát minh. Nếu bài toán không khó, thì phát minh đó có ít giá trị, nhưng dù sao thì cũng là một điều phát minh.

Sau khi đã đạt được điều đó, dù là nhỏ, ta cần luôn luôn tự hỏi : đằng sau cái đó có ẩn náu một điều gì khác nữa, lật đi lật lại các khả năng mới, cố gắng sử dụng một lần nữa phương pháp đã đưa bạn đến thành công. Hãy khai thác kết quả. *Bạn có thể sử dụng kết quả hoặc phương pháp đã tìm ra cho một bài toán nào khác không ?*

1. Cũng dễ nghĩ ra các bài toán mới, miễn là chúng ta đã có ít nhiều kinh nghiệm về những phương pháp biến đổi chủ yếu như : tổng quát hoá, xét trường hợp riêng (cá biệt hoá), trường hợp tương tự, khai triển và tổ hợp lại. Xuất phát từ bài toán đã giải, ta có thể tìm được những bài toán mới theo các cách trên đây, rồi xuất phát từ những bài toán mới này ta lại tìm được những bài toán mới và cứ thế mãi. Về mặt lí thuyết thì không có giới hạn, nhưng thực tế thì ta không thể nào đi quá xa được vì các bài toán mới này thường không giải nổi. Mặt khác, ta có thể tưởng tượng ra những bài toán mới giải được bằng cách dùng bài toán cũ. Nhưng thường thì các bài toán mới này lại không bổ ích gì.

Tìm được một bài toán mới vừa bổ ích lại vừa có thể giải được, không phải là việc dễ, cần phải có kinh nghiệm, sở trường, may mắn. Tuy vậy, mỗi khi đã giải được một bài toán thì ta không nên quên đi tìm một bài toán mới. Giữa các bài toán hay và một vài loại nấm có những điểm giống nhau : chúng xuất hiện thành từng nhóm. Khi đã tìm được một cái, thì nên nhìn quanh đấy, rất có thể còn nhiều nữa ở xung quanh.

2. Để minh hoạ cho các điều trình bày trên đây, chúng tôi nêu lại ví dụ ở các mục 8, 10, 12, 14, 15. Ta xuất phát từ bài toán sau đây :

Biết ba cạnh (chiều dài, chiều rộng và chiều cao) của một hình hộp chữ nhật, tìm đường chéo của nó.

Nếu ta biết cách giải bài toán này thì ta có thể giải dễ dàng một trong các bài toán sau đây (hai bài toán đầu đã được trình bày khá đầy đủ ở mục 14).

Biết ba cạnh của một hình hộp chữ nhật, tìm bán kính của hình cầu ngoại tiếp.

Mặt đáy của một hình chóp là một hình chữ nhật mà tâm là chân đường cao của hình chóp. Biết đường cao này và các cạnh của đáy, tìm các cạnh bên.

Biết các toạ độ vuông góc (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) của hai điểm trong không gian, tìm khoảng cách giữa hai điểm ấy.

Cũng dễ giải các bài toán này vì chúng cũng chẳng khác gì bài toán đầu tiên mà ta đã biết cách giải. Trong mỗi trường hợp trên ta đã đưa thêm vào một khái niệm mới, mặt cầu ngoại tiếp, hình chóp, toạ độ vuông góc. Khử các khái niệm này cũng dễ như là đưa vào, vì vậy, chúng ta chỉ cần khử chúng đi là trở lại được bài toán ban đầu.

Các bài toán trên đây cũng có phần nào bổ ích vì bản thân những khái niệm thêm vào là bổ ích. Chẳng hạn, bài toán cuối cùng thì rất quan trọng do khái niệm toạ độ vuông góc.

3. Đây cũng là một bài toán dễ giải nếu biết cách giải bài toán đầu tiên : biết chiều dài, chiều rộng và đường chéo của một hình hộp chữ nhật, tìm đường cao.

Cách giải bài toán ban đầu chung quy cũng chỉ là lập một hệ thức giữa bốn đại lượng, ba kích thước và đường chéo của hình hộp. Nếu cho trước ba đại lượng thì ta tính được đại lượng thứ tư nhờ hệ thức nói trên, tức là giải được bài toán mới.

Ví dụ mới-này chỉ cho ta cách tìm những bài toán dễ dàng bằng cách xuất phát từ một bài toán đã giải rồi, xem ẩn của bài toán ban đầu như là một dữ kiện và xem một dữ kiện nào đó như là ẩn. Hệ thức giữa ẩn và các dữ kiện trong cả hai trường hợp đều như nhau ; nếu ta tìm được hệ thức đó trong trường hợp đầu thì ta cũng dùng được nó trong trường hợp thứ hai.

Cách tiến hành như trên, tức là thay đổi vai trò các dữ kiện và ẩn, khác rất nhiều so với cách mà ta đã trình bày ở điểm2.

4. Bây giờ ta xét một cách khác để tìm những bài toán mới.

Đây là một cách mở rộng *tổng quát hoá*, bài toán ban đầu mà ta có thể nghĩ đến một cách tự nhiên : tìm đường chéo của một hình hộp biết ba cạnh xuất phát từ một đầu của đường chéo đó và ba góc gồm giữa các cạnh đó.

Bằng cách *xét trường hợp riêng*, ta có được bài toán sau đây : tìm đường chéo của một hình lập phương biết cạnh của nó.

Bằng phương pháp *tương tự* ta sa vào một nguồn vô tận bài toán mới. Xin nêu một vài bài suy từ các bài đã xét ở điểm 2. Tìm đường chéo của một hình bát diện đều cho biết cạnh của nó. Biết các toạ độ địa dư của hai điểm trên mặt quả đất (xem như mặt cầu) tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm đó.

Tất cả các bài toán trên đây đều bổ ích, nhưng chỉ có bài toán mà ta đã nêu lên bằng cách xét trường hợp đặc biệt là có thể giải được trực tiếp nhờ lời giải của bài toán ban đầu.

5. Cuối cùng, ta có thể tưởng tượng những bài toán mới bằng cách xem một số yếu tố của bài toán cũ là đại lượng biến đổi.

Một trường hợp đặc biệt của bài toán nêu ở điểm 2 là : tìm bán kính của hình cầu ngoại tiếp với một hình hộp lập phương đã biết cạnh. Ta xem hình lập phương và tâm chung của hình lập phương và hình cầu như là những dữ kiện cố định và cho biến đổi bán kính của hình cầu. Khi bán kính này bé, hình cầu nằm trong hình lập phương. Khi bán kính tăng thì hình cầu cũng lớn lên (như một quả cầu bằng cao su khi được bơm hơi). Đến một lúc nào đó, hình cầu chạm phải các mặt của hình lập phương ; ít lâu sau, chạm các cạnh, sau nữa đi qua các đỉnh. Tính bán kính tại mỗi thời điểm giới hạn đó ?

6. Kinh nghiệm học toán của một người học sinh sẽ không bao giờ đầy đủ nếu các em chưa hề giải một bài toán *mà chính mình đặt ra*. Bằng cách chỉ dẫn cho học sinh làm thế nào để từ một bài toán cũ rút ra một bài toán mới, người thầy có thể khêu gợi trí tò mò của các em. Người thầy có thể dành cho học sinh một phần phát minh, chẳng hạn như trong bài toán về quả cầu phình dần trên kia (điểm 5) bằng cách đặt câu hỏi "Các anh thử xem nên tính cách gì ? Những giá trị nào của bán kính là đặc biệt bổ ích ?".

Đặt phương trình

Đặt phương trình cũng giống như dịch từ tiếng này sang tiếng khác (xem mục kí hiệu, điểm 1). Cách so sánh này có thể làm sáng tỏ bản chất một số khó khăn mà các thầy giáo cũng như học sinh thường gặp.

1. Đặt phương trình là biểu thị một điều kiện nào đó nhờ các kí hiệu, là dịch từ ngôn ngữ thông thường sang công thức toán học. Những khó khăn mà ta thường gặp khi đặt phương trình cũng giống hệt như các khó khăn của người phiên dịch. Muốn dịch một câu từ tiếng Anh sang tiếng Việt[1], cần có hai điều kiện. Trước hết, phải hiểu tường tận câu tiếng Anh và ngoài ra, phải quen thuộc với cách diễn tả trong tiếng Việt. Khi cần diễn tả một điều kiện ra kí hiệu toán học thì tình hình cũng giống như vậy. Một mặt cần phải hiểu điều kiện đó một cách tường tận, mặt khác phải quen thuộc với các cách diễn tả toán học.

Cũng dễ dịch một bài tiếng Anh ra tiếng Việt, trong trường hợp có thể dịch từng chữ. Nhưng có nhiều đặc ngữ mà ta không thể dịch từng chữ một. Nếu bài văn tiếng Anh mà chứa nhiều đặc ngữ như vậy thì việc dịch sẽ trở nên khó khăn, khi đó ta phải chú trọng nhiều không phải từng chữ, mà chính là ý nghĩa đại cương của bài văn và trước khi dịch có lẽ ta phải biến đổi nó đi.

Khi đặt phương trình thì cũng giống hệt như thế. Trong trường hợp đơn giản ta có thể đặt một cách máy móc. Trong các trường hợp phức tạp hơn thì giả thiết có những yếu tố mà ta không thể phiên dịch ngay ra kí hiệu được, khi ấy ta cần tập trung nhiều không phải vào đầu đề mà vào ý nghĩa của vấn đề. Và trong những trường hợp như vậy, trước hết ta phải biến đổi điều kiện đã nêu ra.

Dù sao thì cũng phải hiểu rõ điều kiện, phân biệt các phần khác nhau và tự hỏi : có thể viết thành công thức hay không ? Trong các trường hợp đơn giản, ta có thể phân tích điều kiện ra thành những yếu tố dễ dàng phiên dịch ra kí hiệu toán học. Trong các trường hợp khó hơn thì làm như vậy không phải là dễ.

---

(1) Nguyên văn : Từ tiếng Anh sang tiếng Pháp (ND)

2. *Tìm hai số mà tổng bằng 78 và tích bằng 1296.*

Ta hãy phát biểu bài toán.

Bằng ngôn ngữ thông thường :	Bằng ngôn ngữ toán học :
Tìm hai số mà	x, y
tổng bằng 78	$x + y = 78$
và tích bằng 1296	$xy = 1296$

Ở đây, đề bài được phân chia một cách dễ dàng ra nhiều phần, mà mỗi phần thì có thể diễn tả tức khắc bằng ngôn ngữ toán học.

3. *Tìm cạnh đáy và chiều cao của một hình lăng trụ đáy vuông biết thể tích là $63cm^3$ và diện tích là $102cm^2$.*

Đâu là ẩn ? Cạnh của đáy x và chiều cao của hình lăng trụ y.

Đâu là dữ kiện ? Thể tích là $63cm^3$ và diện tích $102cm^2$.

Đâu là điều kiện ? Hình lăng trụ mà đáy là hình vuông, cạnh là x và chiều cao bằng y phải có thể tích là $63cm^3$ và diện tích là $102cm^2$.

Phân biệt các phần khác nhau của điều kiện. Có hai phần, *một thuộc thể tích, một thuộc diện tích.*

Ta phân chia dễ dàng toàn bộ điều kiện ra hai phần trên. Nhưng chưa thể diễn tả ra ngay bằng ngôn ngữ toán học. Ta phải biết tính thể tích và các phần của diện tích. Tuy nhiên, nếu kiến thức hình học của ta khá đầy đủ, thì ta có thể phát biểu dễ dàng hai phần của điều kiện một cách khác để có thể phiên dịch ra phương trình. Muốn vậy, ta viết lại đề toán dưới một dạng khác.

Bằng ngôn ngữ thông thường :	Bằng ngôn ngữ toán học :
Tìm cạnh đáy và chiều cao của một hình lăng trụ đáy vuông.	x, y
Thể tích đã cho	$63cm^2$
Diện tích mặt đáy là một hình vuông cạnh là x	x^2
và chiều cao y cho	y
ta thể tích là tích của chúng.	$x^2y = 63$

2) Diện tích đã cho.	$102cm^2$
Nó gồm hai hình vuông cạnh x	$2x^2$
và bốn hình chữ nhật đáy là x và chiều cao y	$4xy$
mà tổng cho ta diện tích.	$2x^2 + 4xy = 102$

4. *Biết phương trình một đường thẳng và các toạ độ của một điểm, tìm điểm đối xứng của điểm đó qua đường thẳng đã cho.*

Ở đây, ta có một bài toán về hình học giải tích.

Đâu là ẩn ? Một điểm mà toạ độ là p, q.

Đâu là dữ kiện ? Phương trình của một đường thẳng $y = mx + n$ và một điểm có toạ độ a, b.

Đâu là điều kiện ? Các điểm (a, b) và (p, q) đối xứng qua đường thẳng $y = mx + n$.

Ở đây, có một khó khăn căn bản là chia điều kiện ra các phần khác nhau để có thể diễn tả theo ngôn ngữ của hình học giải tích. Cần phải hiểu bản chất của điều khó khăn ấy. Một cách phân chia có thể rất đúng về mặt lôgic nhưng lại không ích lợi gì. Điều cần ở đây là phân chia thành những phần có thể phiên dịch ra ngôn ngữ toán học. Muốn thế ta hãy *quay về định nghĩa* của sự đối xứng qua một đường thẳng. Ta có thể diễn tả sau đây :

Điểm đã cho và điểm phải tìm quan hệ với nhau như sau :	(a, b) (p, q)
1) Đoạn thẳng nối chúng thẳng góc với đường thẳng đã cho.	$\dfrac{p-b}{p-a} = \dfrac{1}{m}$
2) Trung điểm của đoạn thẳng đó nằm trên đường thẳng đã cho.	$\dfrac{b+q}{2} = m\dfrac{a+p}{2} + n$

Đây là một bài toán đã giải có liên quan tới bài toán của anh

Đó là một tin mừng : một bài toán đã biết cách giải và có liên quan tới bài toán phải làm, chắc chắn sẽ làm chúng ta vui mừng và càng tốt nếu như mối liên hệ càng chặt chẽ và cách giải càng đơn giản. Một bài toán như vậy có rất nhiều khả năng giúp ta giải bài toán đang làm. Hoàn cảnh ta xét ở đây vừa có tính chất điển hình lại vừa quan trọng. Để thấy rõ điều đó, chúng ta đem so sánh với hoàn cảnh trong đó ta nghiên cứu bài toán phụ. Trong cả hai trường hợp, để giải một bài toán A nào đó, chúng ta đưa vào và xét một bài toán B khác, với hi vọng dùng sự khảo sát đó để giải bài toán A. Sự khác nhau là ở chỗ quan hệ giữa bài toán A của ta đối với bài toán B. Ở đây, chúng ta đã nhớ lại được một bài toán cũ B mà chúng ta đã biết cách giải nhưng còn chưa biết cách dùng nó. Còn ở kia, chúng ta đã nghĩ ra một bài toán mới B ; ta đã biết là phải dùng B như thế nào nhưng chưa biết cách giải nó. Hai hoàn cảnh khác nhau ở chỗ cái khó khăn của B gây cho chúng ta. Một khi khắc phục được khó khăn đó, ta có thể dùng bài toán B một cách như nhau trong cả hai trường hợp, nghĩa là dùng hoặc là kết quả hoặc phương pháp (xem mục "bài toán phụ") (mục 3) hay là dùng cả hai, nếu thấy tiện. Trong hoàn cảnh ta đang xét, chúng ta biết rõ cách giải bài toán B, nhưng còn chưa biết cách dùng nó. Do đó, ta đặt ra những câu hỏi sau : *Anh có thể dùng nó để làm gì không ? Anh có thể áp dụng kết quả của nó không ? Anh có thể áp dụng phương pháp của nó không ?*

Cái ý định dùng một bài toán đã giải ảnh hưởng rõ rệt tới quan niệm của ta đối với bài toán hiện có. Trong khi đi tìm một liên hệ giữa chúng, ta đưa vào trong bài toán mới có những yếu tố tương ứng với những yếu tố quan trọng trong bài toán cũ. Chẳng hạn, nếu bài toán của ta là một bài toán trong không gian như xác định một hình cầu ngoại tiếp quanh một tứ diện cho trước, thì ta có thể nghĩ tới một bài toán tương tự đã giải trong hình học phẳng là xác định một vòng tròn ngoại tiếp quanh một tam giác cho trước. Hơn nữa, trong bài toán sau, chúng ta cần tới các trung trực của ba cạnh của tam giác. Đương nhiên là nên thử đưa vào bài toán đang xét những phần tử tương tự. Thành thử chúng ta nghĩ tới việc chọn các mặt phẳng trung trực của các cạnh của tứ diện làm các phần tử phụ tương ứng.

Nhờ có ý đó, ta dễ dàng tìm thấy cách giải bài toán hình trong không gian bằng cách đi từ sự tương tự giữa nó với bài toán trong hình học phẳng mà ta nhớ được.

Ví dụ đó là điển hình. Chính việc khảo sát bài toán có liên quan đã giải, dẫn ta tới việc đưa vào những phần tử phụ và nhờ việc đưa vào những phần tử thích hợp như vậy mà chúng ta đã lợi dụng được nhiều nhất bài toán vừa nhớ lại để giải bài toán ban đầu. Đó chính là điều ta muốn nhấn mạnh khi mà nghĩ tới cách dùng bài toán đã giải, chúng ta tự hỏi : *"Có cần phải đưa vào một phần tử phụ nào đó để có thể dùng được bài toán cũ không ?"*.

Đây là một định lí đã chứng minh và có liên quan với định lí của anh.

Đây là một cách thay đổi hình thức của chú ý đang xem xét đã được minh hoạ bằng một ví dụ ở mục 19.

Đề-các (Rơnê) (1596 – 1650)

Là một nhà triết học và toán học lớn có ý định đưa ra một phương pháp vạn năng để giải các bài toán. Tuy nhiên, cuốn "Những quy tắc làm phương hướng cho sự suy nghĩ" không viết xong. Những đoạn trong tác phẩm đó, tìm thấy trong bản thảo và được in sau khi ông mất, chứa nhiều tài liệu về cách giải các bài toán hơn tác phẩm nổi tiếng nhất của ông "discours de la Méthode"(1) mặc dù tác phẩm này viết sau cuốn "Những quy tắc". Hình như trong những dòng sau đây, Đề-các giải thích nguồn gốc tác phẩm "Những quy tắc" của mình.

"Khi còn trẻ, tôi đã được nghe nói đến những phát minh tài tình và tôi đã thử tìm xem tự mình có thể phát minh ra chúng được không mà không đọc các công trình trong đó có trình bày các phát minh đó và dần dần thấy rằng như vậy đã làm theo những quy tắc nhất định".

Định nghĩa

Định nghĩa một từ là phát biểu nghĩa của nó theo những từ khác mà ta giả sử là đã thông dụng.

1. Trong toán học có hai loại từ chuyên môn. Một số được xem hoàn toàn như những từ ban đầu, không định nghĩa. Một số khác được xem như những từ dẫn xuất và được định nghĩa bằng cách dùng những từ ban đầu, hoặc những từ dẫn xuất nhưng đã định nghĩa trước. Vì thế mà người ta không định nghĩa những khái niệm đầu tiên như là điểm, đường thẳng, mặt phẳng(2). Ngược lại, người ta đã định nghĩa một cách lôgic những khái niệm như là "phân giác của một góc", "đường tròn", "parabol".

Từ cuối cùng này có thể định nghĩa như sau : *Parabol* là quỹ tích các điểm cách đều một điểm cố định và một đường thẳng cố định. Điểm cố định gọi là *tiêu điểm của parabol, đường thẳng cố định gọi là đường chuẩn* của parabol, ở đây tất cả các phần tử mà ta nói đến đều giả thiết là nằm trong một mặt phẳng, điểm cố định (tiêu điểm) không nằm trên đường thẳng cố định (đường chuẩn).

---

(1) "Luận về phương pháp"

(2) *Vấn đề này thì quan niệm đã thay đổi từ thời Ơclit và các môn đệ của ông. Những người này đã định nghĩa điểm, đường thẳng và mặt phẳng. Tuy nhiên, các "định nghĩa" đó nói chung không lôgic mà chỉ là những cách minh hoạ trực giác. Những cách minh hoạ đó dĩ nhiên có thể và rất nên làm trong khi giảng dạy.*

Như vậy là ta xem như độc giả chưa biết nghĩa của các từ parabol, tiêu điểm, đường chuẩn. Ngược lại, ta giả sử độc giả đã biết nghĩa của mỗi từ còn lại như là điểm, đường thẳng, mặt phẳng, khoảng cách từ một điểm đến một điểm khác, cố định, quỹ tích, ...

2. Các định nghĩa trong tự điển về hình thức không khác nhiều so với các định nghĩa toán học, nhưng các định nghĩa đó đã được viết theo một tinh thần khác.

Tác giả quyển tự điển thực ra chỉ chú ý đến nghĩa thông thường của các chữ, họ thừa nhận một cách tự nhiên nghĩa thông thường đó và ghi nó lại, càng rõ càng tốt, dưới dạng một định nghĩa.

Trái lại, nhà toán học thì lại không chú ý đến nghĩa thông thường của các từ chuyên môn hay ít ra, đó không phải là công việc chủ yếu của họ. Các chữ "đường tròn" hay "parabol" hay bất cứ từ chuyên môn nào khác – có nghĩa gì trong ngôn ngữ thông thường, điều đó đối với họ không quan hệ gì. Định nghĩa toán học *tạo ra* ý nghĩa của danh từ toán học.

3. *Ví dụ :* Dựng các giao điểm của một đường thẳng đã cho với một parabol cho bởi tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

Cách chúng ta đề cập đến bất cứ bài toán nào tất nhiên phụ thuộc vào tình hình kiến thức của chúng ta. Đối với bài toán trên thì đó là những kiến thức về các tính chất của parabol. Nếu chúng ta biết được nhiều tính chất của parabol thì ta cố gắng sử dụng các kiến thức đó sao cho có ích. *Bạn có biết một định lí nào dùng được vào đây không ? Bạn có biết một bài toán nào đó liên quan với bài toán này không ?* Nếu các kiến thức của chúng ta về parabol bị hạn chế thì các danh từ như parabol, tiêu điểm, đường chuẩn làm chúng ta khó chịu và lẽ tất nhiên, ta muốn được thoát khỏi các danh từ đó. Muốn thế thì phải làm thế nào ? Ta hãy lắng nghe cuộc hội thoại giữa thầy giáo và người học sinh đang thảo luận về bài toán trên. Họ đã chọn xong một kí pháp thích hợp : P là một trong các giao điểm phải tìm. F là tiêu điểm, d là đường chuẩn, c là đường thẳng cắt parabol.

– Cái gì chưa biết ?

– Điểm P.

– Cái gì đã cho ?

– Các đường thẳng c, d và điểm F.

– Điều kiện là gì ?

– P là một giao điểm của đường thẳng c và parabol mà đường chuẩn là d, tiêu điểm là F.

– Đúng. Tôi biết rằng em chưa học về parabol, nhưng tôi nghĩ rằng em có thể nói parabol là gì.

– Parabol là quỹ tích các điểm cách đều tiêu điểm và đường chuẩn.

– Đúng. Em đã nhớ kĩ định nghĩa. Nhưng còn phải biết cách sử dụng định nghĩa đó. *Phải luôn nhớ lại các định nghĩa*. Biết định nghĩa của parabol, em có thể nói gì về điểm P ?

– P nằm trên parabol. Vậy P cách đều d và F.

– Đúng lắm! *Vẽ hình đi.*

Người học sinh vẽ trong hình 13 các đoạn PF và PQ, đoạn này thẳng góc với d.

"Bây giờ, em *có thể phát biểu bài toán một cách khác hay không ?"*

....

– Em có thể phát biểu một cách khác điều kiện của bài toán bằng cách dùng những đoạn mà em đã vẽ không ?

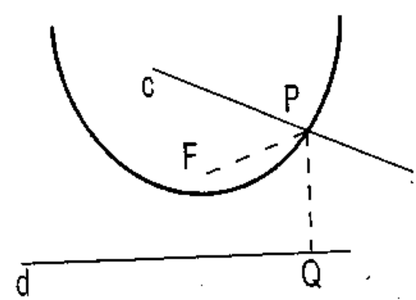
– P là một điểm của đường thẳng c sao cho $PF = PQ$.

– Đúng. Nhưng cố gắng phát biểu rõ PQ là gì ?

– Là đường thẳng góc biểu thị khoảng cách từ P đến d:

– Đúng. Bây giờ em có thể phát biểu bài toán một cách khác ? Nhưng cố gắng phát biểu rõ ràng, nói đủ câu và đúng văn phạm.

– Dựng một điểm P trên đường thẳng đã cho c, cách đều điểm F và đường thẳng đã cho d.



Hình 13

– Em hãy so sánh cách phát biểu mới này với cách phát biểu cũ. Trong cách phát biểu cũ ta gặp toàn những danh từ chuyên môn, ít thông dụng : parabol, tiêu điểm, đường chuẩn ; nó có vẻ trịnh trọng, phô trương. Bây giờ thì không còn các danh từ đó nữa. Em đã bỏ được tất cả cái gì long trọng. Tốt lắm.

4. *Khử các danh từ chuyên môn*, đó là kết quả mà ta đã đạt được trong ví dụ trên. Chúng ta đã xuất phát từ một đề toán chứa nhiều danh từ như vậy (parabol, tiêu điểm, đường chuẩn) và cuối cùng đi đến một đầu đề mới hoàn toàn không chứa những danh từ đó.

Muốn khử một từ chuyên môn, phải hiểu định nghĩa của nó ; nhưng như thế chưa đủ, còn phải biết sử dụng định nghĩa đó. Trong ví dụ trên, hiểu định nghĩa của parabol chưa đủ, giai đoạn quyết định đã được đánh dấu bằng cách đưa vào các đoạn PF và PQ bằng nhau, mà sự bằng nhau đó là nằm ngay trong định nghĩa của parabol. Đó là một quá trình điển hình. Trước hết, để quan niệm bài toán ta đưa vào những yếu tố thích hợp ; rồi căn cứ trên định nghĩa, ta thiết lập những sự tương quan này phản ánh toàn bộ ý nghĩa của danh từ ; như vậy là ta đã sử dụng toàn bộ định nghĩa của danh từ chuyên môn và do đó khử được nó.

Quá trình mà chúng ta đã mô tả trên đây-có thể mệnh danh là : *nhớ lại định nghĩa*.

Khi nhớ lại định nghĩa của một từ chuyên môn, ta đã loại được từ này, nhưng thay vào đó ta đã đưa vào những yếu tố mới và những tương quan mới. Do đó, quan niệm của chúng ta về bài toán có thể biến đổi quan trọng. Dù sao thì cũng không tránh khỏi một cách phát biểu mới, một *sự biến đổi bài toán*.

5. *Các định nghĩa và định lí đã biết*. Nếu khi nghe đến danh từ "parabol" mà chúng ta chỉ có một ý nghĩa mơ hồ về hình dạng của đường cong mà không biết thêm gì nữa, thì như vậy rõ ràng là kiến thức của ta chưa đủ để giải bài toán nói trên hay bất cứ bài toán nào về parabol. Như vậy thì ta cần đến những loại kiến thức gì ?

Ta có thể nói rằng môn hình học gồm những tiện đề, những định nghĩa và định lí. Đường parabol không nằm trong các tiên đề vì các tiên đề chỉ đả động đến những từ đầu tiên như điểm, đường thẳng, ... Mọi lí luận hình học, mọi lí giải về những bài toán có liên quan đến parabol nhất thiết phải động chạm đến hoặc định nghĩa của nó, hoặc một định lí nói về nó. Vậy, muốn giải một bài toán thuộc loại này, điều tối thiểu là phải biết định nghĩa của parabol, nhưng ngoài ra cũng cần biết thêm một số định lí.

Tất cả những điều mà chúng ta đã nói về parabol lẽ tất nhiên cũng đúng cho mọi khái niệm dẫn xuất khác. Khi chúng ta bắt đầu giải một bài toán thuộc loại nói trên, thì chúng ta chưa thể biết ngay là nên dùng định nghĩa hay một định lí nào đó có liên quan, nhưng có điều chắc chắn là chúng ta phải dùng cái này hoặc cái kia.

Tuy nhiên, có những trường hợp mà ta không có quyền chọn. Một người chỉ biết có định nghĩa của khái niệm mà không biết thêm gì nữa thì bắt buộc phải sử dụng định nghĩa đó. Nhưng nếu chúng ta biết nhiều định lí có thể áp dụng cho khái niệm đó, nếu ta có nhiều kinh nghiệm về cách vận dụng các định lí đó, thì rất có triển vọng là chúng ta chọn được một định lí có ích.

6. *Các định nghĩa khác nhau*. Mặt cầu thường được định nghĩa là quỹ tích các điểm cách một điểm cho trước một khoảng nhất định, các điểm nói trên nằm trong không gian chứ không phải giới hạn trong mặt phẳng. Ta cũng có thể định nghĩa mặt cầu là một mặt sinh bởi một đường tròn quay quanh một đường kính của nó. Ngoài ra, còn có nhiều định nghĩa khác về mặt cầu và ta cũng có thể tìm thêm những định nghĩa khác mới nữa.

Khi bài toán phải giải bao hàm một khái niệm dẫn xuất như "mặt cầu" hay "parabol" và nếu chúng ta muốn quay về định nghĩa của khái niệm đó thì chúng ta có quyền chọn. Rất nhiều điều sẽ phụ thuộc vào cách chọn một định nghĩa hoàn toàn thích hợp.

Tìm diện tích của mặt cầu là một bài toán quan trọng và khó ở thời Acsimet. Ông đã phải chọn định nghĩa mặt cầu trong số các định nghĩa mà chúng ta đã nêu trên, ông đã chọn cách quan niệm mặt cầu là một mặt sinh bởi một đường tròn quay quanh một đường kính cố định. Ông vẽ nội tiếp trong đường tròn một đa giác đều có một số chẵn cạnh sao cho hai đầu mút của đường kính cố định là hai đỉnh đối diện. Đa giác đều đó xấp xỉ với đường tròn và khi quay cùng đường tròn thì sinh ra một mặt lồi gồm hai mặt nón có đỉnh trùng với hai đầu đường kính cố định và nhiều mặt nón cụt. Mặt lồi đó xấp xỉ với mặt cầu, Acsimet đã dùng nó để tính diện tích mặt cầu. Nếu chúng ta chọn cách quan niệm mặt cầu là quỹ tích những điểm cách đều tâm điểm, thì như vậy ta không thể nghĩ ra một diện tích đơn giản nào xấp xỉ bằng diện tích của nó.

7. Việc sử dụng định nghĩa không những đóng một vai trò quan trọng trong quá trình giải một bài toán mà còn quan trọng trong việc nghiệm lại cách giải có đúng đắn hay không.

Nếu một người nào đó, với một quan niệm mơ hồ về mặt cầu mà đưa ra một lời giải mới về bài toán Acsimet thì nhất định cách giải của anh ta sẽ không tốt. Ngay nếu anh ta hình dung rõ ràng mặt cầu nhưng lại không sử dụng khái niệm đó trong lí luận thì cũng không có gì chứng tỏ là anh đã nắm được vấn đề và lập luận của anh ta sẽ không đứng vững. Vì vậy, khi nghe anh ta phát biểu, chúng ta chờ đón một điều gì quan trọng về mặt cầu mà anh rút ra từ định nghĩa hay một định lí nào đó. Nếu điều quan trọng đó anh ta không phát biểu được, thì cách giải của anh ta sẽ không tốt.

Bằng cách đó ta có thể nghiệm lại không những các lí luận của người khác, mà dĩ nhiên cả những lí luận của anh ta nữa. *Bạn đã xét tất cả các khái niệm cốt yếu của bài toán hay chưa ?* Bạn đã sử dụng các khái niệm đó như thế nào ? Bạn đã sử dụng nội dung của các khái niệm đó rút ra từ định nghĩa của chúng chưa ? Bạn đã sử dụng mọi sự kiện chủ yếu, mọi định lí mà bạn biết được về các khái niệm đó chưa ?

Nhớ lại định nghĩa là rất quan trọng để xét xem một lí luận có đứng vững hay không, đó là điều mà Patcan đã từng nhấn mạnh và chính Patcan đã cho ta quy tắc "substituer mentalement les définition à la place des définis", có nghĩa là "thay nhẩm trong trí các định nghĩa cho các từ được định nghĩa". Nhớ lại các định nghĩa cũng là điều rất quan trọng để tìm một lời giải. Hađaman cũng đã từng nhấn mạnh điều đó (xem quyển Bài giải hình học của ông, chú thích A).

8. Vậy thì việc nhớ lại định nghĩa là một thủ thuật quan trọng của trí óc. Để hiểu biết ý nghĩa của điều đó, trước hết ta phải thấy tầm quan trọng của ngay bản thân các danh từ. Nói cho cùng thì ta không thể vận dụng trí óc mà lại không dùng đến các từ, đến các dấu hiệu, các kí hiệu này hay kí hiệu khác, như vậy các danh từ và kí hiệu là có sức mạnh. Các dân tộc cổ sơ còn cho rằng chúng có ma thuật. Chúng ta có thể hiểu được nguyên nhân các điều mê tín đó nhưng tất nhiên là không đồng tình với họ. Chúng ta cần hiểu rằng sức mạnh của một tiếng không phải ở âm vang của nó, ở giọng của người đọc mà chính là ở các ý nghĩa mà tiếng đó gợi ra và nói cho cùng là ở các sự kiện đã làm cơ sở cho các ý nghĩa đó.

Như vậy thì đằng sau các danh từ ta phải tìm ra ý nghĩa và các sự kiện. Đó là một điều hợp lí. Khi nhớ lại các định nghĩa, nhà toán học tìm cách thiết lập những tương quan giữa các đối tượng toán học mà các danh từ chuyên môn che giấu ; cũng như nhà vật lí, đằng sau các danh từ chuyên môn, tìm hiểu các thí nghiệm chính xác ; hoặc như bất cứ người nào có ít nhiều lương tri bao giờ cũng thích các sự thật khắc nghiệt của các sự kiện hơn là phỉnh phờ của những lời nói trống rỗng.

Đối xứng

Danh từ này có hai nghĩa : một nghĩa hình học, thông thường nhất và là nghĩa riêng và một nghĩa lôgic, tổng quát hơn và không được thông dụng bằng.

Trong hình học không gian sơ cấp, người ta xét hai loại đối xứng : đối xứng qua mặt phẳng (mặt phẳng đối xứng). Thân hình người ta, bề ngoài thì trông hình như là đối xứng, nhưng thật ra thì không phải vì rất nhiều bộ phận bên trong được xếp đặt một cách không đối xứng. Trái lại, một tượng đá có thể hoàn toàn đối xứng qua một mặt phẳng đứng và hai nửa của một cái tượng hình như có thể đổi chỗ cho nhau.

Theo nghĩa tổng quát thì một tập hợp gọi là đối xứng nếu nó gồm những phần tử có thể đổi chỗ cho nhau được. Có nhiều loại đối xứng khác nhau do số phần tử hoán vị được và do những phương pháp dùng trong khi hoán vị đó. Chẳng hạn, hình lập phương có một tính đối xứng rất đặc biệt, vì sáu mặt của nó có thể hoán vị cho nhau, cũng như 8 đỉnh và 12 cạnh của nó. Cũng vậy, biểu thức :

$$yz + zx + xy$$

là đối xứng, vì trong đó ta có thể đổi chỗ hai chữ bất kì mà không thay đổi giá trị của nó.

Phép đối xứng theo nghĩa tổng quát chiếm một địa vị quan trọng trong vấn đề ở đây. Nếu một bài toán đối xứng về một phương diện nào đó thì một điều có lợi là nên tìm những phần tử nào có thể hoán vị cho nhau và đối với các phần tử này có một cách xử trí như nhau (xem mục *phần tử phụ*, mục 3).

Bao giờ cũng nên xử trí một cách "đối xứng" đối với những cái gì đối xứng và không nên vội thủ tiêu một sự đối xứng tự nhiên, tuy nhiên điều đó không phải bao giờ cũng làm được. Một đôi găng tay rõ ràng là đối xứng, nhưng không ai lại sử dụng găng tay một cách "đối xứng" bằng cách xỏ cùng một lúc hai chiếc găng mà là từng chiếc một.

Nhờ tính đối xứng, ta cũng có thể nghiệm lại kết quả (xem mục 14).

Đưa về trường hợp riêng (cá biệt hoá)

Đó là đi từ sự khảo sát một tập hợp đối tượng sang một tập hợp nhỏ hơn – hay chỉ một đối tượng – chứa trong tập hợp đầu. Điều này đôi khi có ích để giải toán.

1. *Ví dụ* : Cho một tam giác, r là bán kính của đường tròn nội tiếp, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và h là chiều cao lớn nhất. Ta có :

$$r + R \leq h$$

Cần phải chứng minh (hay phủ định) định lí này. Đây là một "bài toán chứng minh".

Bài toán này không phải thuộc loại phổ biến và cũng khó nhớ một định lí về tam giác có kết luận tương tự. Nếu ta chưa tìm được một định lí như vậy, thì ta thử nghiệm lại định lí trên *trong một trường hợp* đặc biệt, chẳng hạn khi tam giác là đều thì :

$$r = \frac{h}{3}, \qquad R = \frac{2h}{3}$$

và định lí đúng.

Nếu chưa có ý kiến gì khác thì ta thử nghiệm lại trong một *trường hợp đặc biệt rộng hơn* : với tam giác cân. Hình dạng của tam giác cân thay đổi khi góc ở đỉnh thay đổi, có hai trường hợp giới hạn là khi góc ở đỉnh bằng 0° và bằng 180°. Trong trường hợp đầu, cạnh đáy bằng không và :

$$r = 0, \quad R = \frac{1}{2}h$$

Định lí cũng đúng. Trong trường hợp hai, ta có :

$$r = 0, \quad R = \infty, \quad h = 0$$

Vậy định lí sai. Bài toán giải xong.

Nhân tiện đây, ta để ý rằng với các tam giác cân rất dẹt, khi góc ở đỉnh gần bằng 180°, thì mệnh đề trên cũng đã tỏ ra sai rồi. Như vậy, ta không cần dùng đến các trường hợp giới hạn trên đây, vì các trường hợp này có thể xem là không "chính thức lắm".

2. "Ngoại lệ củng cố quy tắc"[1]. Câu ngạn ngữ này chỉ là một điều bông đùa. Muốn được đúng đắn, ta phải nói trái lại : chỉ một trường hợp ngoại lệ cũng đủ để phủ định một cách chắc chắn cái điều mà người ta mệnh danh là quy tắc tổng quát. Vì chính phương pháp thông dụng nhất để phủ định một mệnh đề nào đó là : tìm ra một đối tượng không chịu theo mệnh đề đó ; một vài tác giả gọi đối tượng đó là *một phản ví dụ*.

Cho một mệnh đề mà ta giả thiết là tổng quát và liên quan tới một tập hợp đối tượng nào đó. Để phủ nhận nó, ta đưa về một trường hợp đặc biệt, bằng cách chọn trong tập hợp đó một đối tượng không chịu tuân theo mệnh đề. Ví dụ trên chỉ rõ cách thức tiến hành như thế nào trước hết ta có thể xét bất cứ trường hợp riêng nào mà nhờ đó ta có thể nghiệm lại mệnh đề một cách dễ dàng. Nếu trường hợp này, mệnh đề không được nghiệm đúng, thì nó bị phủ định ngay tức khắc và công việc của ta thế là xong. Nếu ngược lại, mệnh đề được xác nhận, thì sự khảo sát của ta có thể không phải là vô ích và nó có thể gợi ý cho chúng ta về phương hướng để tiến hành việc nghiên cứu. Chẳng hạn, ta có thể sửa đổi trường hợp vừa xét, tìm một trường hợp riêng rộng hơn, xét các trường hợp giới hạn, như ở điểm 1.

Các trường hợp giới hạn thường là đặc biệt bổ ích. Nếu ta giả sử một điều khẳng định nào đó có thể áp dụng cho tất cả các loài có vú thì điều đó phải áp dụng được cho một loài có vú, rất đặc biệt là cá voi. Nếu xét cho kĩ, có thể là ta phải đi đến chỗ phủ nhận điều khẳng định tổng quát kia, vì các trường hợp giới hạn này nhiều khi bị các nhà sáng tác ra quy tắc tổng quát bỏ quên. Nếu ngược lại ta nhận thấy mệnh đề tổng quát cũng đúng ngay cho cả trường hợp giới hạn, thì điều đó làm cho ta càng tin tưởng ở quy tắc tổng quát, vì trong trường hợp giới hạn thì quy tắc rất dễ bị phủ nhận.

3. *Ví dụ* : Cho biết tốc độ và vị trí của hai chiếc thuyền tại một lúc nào đó, mỗi thuyền đi theo đường thẳng với tốc độ không đổi. Tìm khoảng cách giữa hai chiếc thuyền khi chúng gần nhau nhất.

---

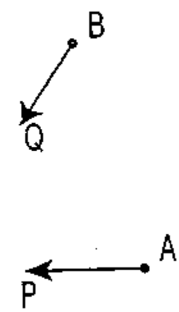
(1) Tục ngữ pháp : L'exception confirme la règle

Đâu là ẩn ? Đó là khoảng cách ngắn nhất giữa hai thuyền, xem như là hai điểm.

Đâu là dữ kiện ? Cách vị trí ban đầu và vận tốc của mỗi điểm. Các tốc độ này không đổi về chiều và giá trị tuyệt đối.

Đâu là điều kiện ? Phải tính khoảng cách giữa các động tử khi nó ngắn nhất.

Vẽ hình đi và dùng một kí hiệu thích hợp : Trong hình vẽ, các điểm A và B chỉ vị trí ban đầu của các thuyền, các vectơ chỉ vận tốc của chúng.



Hình 14

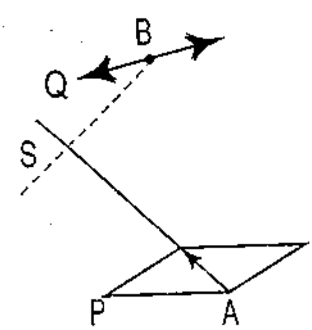
Đâu là ẩn ? Khoảng cách ngắn nhất giữa hai thuyền.

Bài toán đã rõ, tuy nhiên nếu ta chỉ dùng các phương tiện sơ cấp, thì ta chưa biết phải giải như thế nào. Bài toán này không thuộc loại dễ nhất và cái khó khăn ở đây là có "quá nhiều yếu tố thay đổi". Các vị trí *A* và *B*, cũng như các vận tốc *AP* và *BQ* có thể cho nhiều cách, nói cách khác, các điểm *A*, *B*, *P*, *Q* có thể chọn tuỳ ý. Lời giải phải thích hợp với bất kì trường hợp nào và cảm tưởng "có quá nhiều yếu tố thay đổi" có thể đưa đến câu hỏi và trả lời sau đây : ta có thể nghĩ ra một bài toán tương tự như vậy mà đơn giản hơn không. Một bài toán mà kém tổng quát hơn không ?

Rõ ràng có một trường hợp giới hạn, trong đó có một vận tốc bằng 0. Khi đó, khoảng cách ngắn nhất là đường thẳng góc hạ từ điểm đầu sang đường thẳng quỹ đạo của điểm thứ hai.

4. Nếu ta trực giác nhận thấy rằng trường hợp giới hạn này có thể có một vai trò nào đó, thì ta có thể gọi đấy là một sáng kiến.

Đây là trường hợp riêng của bài toán đã cho. *Có thể sử dụng nó ? Có thể sử dụng kết quả của nó không ? Có cần phải đưa thêm vào một yếu tố phụ nào đó để sử dụng nó không ?* Làm thế nào để sử dụng kết quả trong trường hợp điểm B đứng yên và vào trường hợp mà B chuyển động ? Ta biết rằng sự đứng yên là một *trường hợp đặc biệt* của chuyển động. Và ngay chuyển động cũng là tương đối. Vì vậy, dẫu B có vận tốc như thế nào thì ta cũng có quyền xem nó là đứng yên! Cụ thể, nếu ta cho tất cả hệ thống một chuyển động đều thì các vị trí tương đối không thay đổi. Ở đây, ta cho hệ thống một chuyển động đối ngược với



Hình 15

chuyển động của điểm B. Đó là yếu tố phụ mà ta phải thêm vào để sử dụng kết quả trên. Trong hình, ta thấy rõ cách dựng khoảng cách ngắn nhất BS.

5. Cách giải trên đây có một ý nghĩa đáng chú ý về mặt lôgic.

Muốn giải bài toán ban đầu (điểm 3, 4), đầu tiên chúng ta đã giải một bài toán khác mà ta gọi là bài toán phụ, bài toán này là trường hợp đặc biệt của bài toán ban đầu. Trong khi bài toán ban đầu khá tế nhị, thì bài toán phụ lại rất dễ. Vì bài toán phụ là một trường hợp riêng, nên nó có ít tham vọng hơn bài toán ban đầu. Làm thế nào để giải bài toán ban đầu từ bài toán phụ ? Chỉ cần đưa vào một nhận xét về sự tương đối của chuyển động.

Ta có thể giải được bài toán ban đầu nhờ hai điều nhận xét : Trước hết, nghĩ ra được bài toán phụ. Sau nữa, ta đã có nhận xét quan trọng nhờ đó ta có thể chuyển qua bài toán ban đầu. Như vậy, ta đã giải bài toán qua hai giai đoạn, cũng như người ta đã vượt qua một con suối nhờ hai bước nếu ở giữa suối có một tảng đá mà ta có thể đặt chân lên đấy.

Tóm lại, ta đã sử dụng bài toán phụ như một bàn đạp.

6. Việc đưa về trường hợp đặc biệt còn có những công dụng khác mà ta không thể nói ở đây : chỉ nhắc một điều mà nhờ nó ta có thể kiểm tra lại kết quả (xem mục : *có thể nghiệm lại kết quả hay không ?*).

Người thầy giáo nhiều khi cũng cần một lối quy về trường hợp riêng bằng cách *giải thích cụ thể* các vấn đề trừu tượng. Chẳng hạn, nếu bài toán có bao gồm một hình hộp chữ nhật, thì người thầy có thể lấy ví dụ là phòng học. Trong hình học không gian, thầy có thể lấy một góc lớp học để làm ví dụ về hệ toạ độ, nền nhà và các tường là các mặt phẳng toạ độ. Để giải thích khái niệm về mặt tròn xoay, có thể vạch một đường cong trên cửa rồi quay nhẹ cánh cửa. Đó là những phương tiện giản đơn, nhưng có thể giúp học sinh thu nhận bài học dễ dàng, vậy ta không nên bỏ qua. Vì là môn học trừu tượng nên môn toán càng được trình bày cụ thể thì càng có lợi.

Giáo điều và tinh thông

Là hai thái độ trái ngược đề cập tới các quy tắc.

1. Áp dụng quy tắc một cách máy móc cứng nhắc, không tự đặt cho mình những câu hỏi cần thiết, không tìm xem quy tắc đó có thích hợp hay không, đó là giáo điều. Người giáo điều chỉ là những kẻ đáng thương hại, không hề hiểu biết gì về các quy tắc mà họ áp dụng một cách thiếu suy nghĩ. Nhưng cũng có những người giáo điều đạt được kết quả rực rỡ : đó là những người có hiểu biết về các quy tắc của họ – ít ra cũng là lúc khởi đầu, trước khi trở thành giáo điều – đã chọn được một quy tắc tốt, có thể áp dụng cho nhiều trường hợp và chỉ thỉnh thoảng mới bị hỏng mà thôi.

Áp dụng quy tắc một cách tự nhiên thoải mái, nhận định kĩ càng các trường hợp thích hợp và không bao giờ để cho danh từ làm lu mờ mục đích của hành động hay che đậy các dịp tốt mà hoàn cảnh có thể đưa đến đó là sự tinh thông.

2. Các câu hỏi và những lời khuyên ở trong bảng của chúng tôi có thể dùng cho các nhà giáo cũng như những người nào cần giải toán. Nhưng trước hết phải hiểu các điều đó, mò mẫm các phương pháp sử dụng những điều đó và sau nhiều thất bại và thành công liên tiếp thì mới có kinh nghiệm trong việc sử dụng. Sau nữa, không bao giờ sử dụng một cách giáo điều, nghĩa là không bao giờ đặt một câu hỏi mà không suy nghĩ, điều đó phải thành một thói quen vững chắc. Phải được chuẩn bị để tiếp thu những câu hỏi và những lời khuyên về nhiều mặt và phải sử dụng lương tri của bản thân mình. Nếu bạn phải nghiên cứu một vấn đề khó và bổ ích, thì mỗi điều bạn định làm phải xuất phát từ một sự nghiên cứu kĩ lưỡng vấn đề đó. Nếu bạn muốn giúp cho học sinh thì các lời khuyên của bạn phải xuất phát từ một sự hiểu biết và thông cảm về những khó khăn của anh ta.

Nếu bạn thấy nhất thiết phải dựa trên một quy tắc và như vậy cũng đã thiên về giáo điều rồi đấy, thì bạn hãy nhớ kĩ quy tắc này : điều trước tiên là hãy sử dụng trí thông minh của mình.

Hãy xét kĩ cái chưa biết

Đó là một lời khuyên đã có từ xưa. Trong tiếng La Tinh, người ta nói : "respice finem" nghĩa là : nhìn kĩ kết cục. Bạn hãy nhớ kĩ điều mà bạn đi tìm. Đừng quên mục đích. Đừng quên điều người ta hỏi *xét kĩ cái chưa biết* ? *Xét kĩ kết luận.*

Hai cách dịch câu "respice finem" đó rất thích hợp cho việc giải toán.

Khi tập trung tư tưởng vào mục đích và hướng tất cả nghị lực vào việc thực hiện mục đích đó, chúng ta dễ nhìn thấy các phương tiện để đi tới kết quả.

Những phương tiện nào ? Làm thế nào để đạt được kết quả ? Bạn đã thấy ai đạt được một kết quả tương tự hay chưa ? Người ta làm thế nào để đạt được kết quả ấy ? *Bạn hãy thử nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay có ẩn tương tự. Thử nhớ lại một định lí quen thuộc có cùng kết luận hay có kết luận tương tự.*

1. Hãy xét các bài toán tìm ẩn với câu gợi ý : "*Thử nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn*". So sánh với câu : "*Bạn có biết một bài toán nào có liên quan*".

Câu sau này tổng quát hơn câu trước. Hai bài toán liên quan với nhau thì nhất thiết có một số điểm chung ; điểm chung đó có thể là những đối tượng khái niệm, dữ kiện hay một phần của giả thiết, ...

Còn câu gợi ý đầu tiên nhấn mạnh trên một điểm chung đặc biệt : hai bài toán phải có cùng ẩn. Có nghĩa, trong hai trường hợp, ẩn phải là một đối tượng thuộc cùng một loại, chẳng hạn độ dài của một đoạn thẳng.

So với câu gợi ý tổng quát thì câu gợi ý đặc biệt này có phần nào "tiết kiệm" hơn. Thật vậy, ở đây ta có thể tiết kiệm sức lực chỉ nghiên cứu cái ẩn mà thôi. Bài toán có lược đồ sau đây :

"Biết..., tìm độ dài của đoạn thẳng".

Một điểm tiết kiệm khác là trong việc "lựa chọn". Có vô số bài toán có thể có liên quan với bài toán đã cho. Nếu chỉ xét ẩn thôi, thì ta có thể giới hạn việc lựa chọn lại trong phạm vi những bài toán có cùng ẩn với bài đã cho.

Và lẽ tất nhiên, ngay trong các bài này, trước tiên cũng chỉ xét những bài toán cơ bản nhất và quen thuộc nhất.

2. Bài toán đề ra cho chúng ta có dạng :

"Biết..., tìm độ dài của đoạn thẳng".

Những bài toán đơn giản nhất và quen thuộc nhất thuộc loại này là những bài toán về tam giác : biết ba phần tử của một tam giác, tìm một cạnh. Nhớ lại điều đó ta có thể tìm được một điểm có thể áp dụng vào bài toán hiện tại. *Đây là một bài toán liên quan với bài toán đã cho mà ta đã biết cách giải. Có thể sử dụng nó không ? Có thể sử dụng được kết quả của nó không ?* Muốn sử dụng những kết quả quen thuộc về tam giác ta phải dùng đến một tam giác trong hình vẽ của ta. Trong hình vẽ này có tam giác nào không ? Nếu không ta có thể làm xuất hiện ra một tam giác để có thể lợi dụng được các kết quả đã biết. *Có nên đưa thêm vào một yếu tố phụ hay không ?*

Có nhiều bài toán đơn giản mà ẩn là cạnh của một tam giác các bài toán này khác nhau ở dữ kiện. Chẳng hạn có thể cho trước một cạnh và hai góc, hay một góc và hai cạnh với các vị trí khác nhau của góc đối với các cạnh đã cho. Tất cả các bài toán này đều đặc biệt đơn giản trong trường hợp tam giác vuông góc. Tập trung suy nghĩ vào bài toán đã cho, ta tìm xem phải đưa vào loại tam giác nào và bài toán nào đã giải (với cùng ẩn) thích hợp nhất với mục đích hiện tại của ta.

Sau khi đã làm xuất hiện tam giác phụ thích hợp, đôi khi ta có thể chưa nhìn thấy ba phần tử của nó mà đó là một điều kiện nhất thiết phải có. Nếu khi đó ta thấy có thể xác định được các phần tử còn thiếu, thì như vậy là ta đã tiến được một bước, ta đã nắm được đường lối để giải bài toán.

3. Quá trình trên đây (điểm 1 và 2) đã được minh hoạ ở mục 10. Cũng dễ dàng nêu lên các ví dụ tương tự. Sự thật thì ta có thể giải quyết được hầu hết các "bài toán tìm ẩn" trong các lớp dưới, bằng cách sử dụng đúng lúc câu gợi ý :

Thử nhớ lại bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay có ẩn tương tự.

Phải đề cập đến các bài toán đó theo một lược đồ xác định và trước hết phải xét ẩn :

Biết..., tìm độ dài của đoạn thẳng.

Biết..., tìm góc.

Biết..., tìm thể tích của tứ diện.

Biết..., dựng một điểm.

Nếu có một ít kinh nghiệm giải các bài toán sơ cấp ta sẽ nhớ lại dễ dàng một vài bài toán đơn giản (hay những bài toán đơn giản) có cùng ẩn. Nếu bài toán đã cho không thuộc vào loại trên thì tự nhiên ta sẽ cố tìm cách lợi dụng kết quả của các bài toán đơn giản đó. Ta cố gắng thử đưa thêm vào một yếu tố có ích và như vậy là ta có được một cách xuất phát tốt.

Trong mỗi một trường hợp trên, trình tự giải bài toán rất hiển nhiên vì ta đã có cơ sở để phỏng đoán đường lối giải.

(1) Ẩn phải được xem là cạnh của một tam giác. Chỉ cần đưa vào một tam giác thích hợp với ba phần tử đã biết hoặc dễ tìm thấy.

(2) Ẩn là góc của một tam giác chỉ việc đưa vào một tam giác thích hợp.

(3) Ẩn có thể tìm được nếu biết diện tích mặt đáy và chiều cao. Chỉ cần xác định diện tích một mặt và chiều cao tương ứng.

(4) Ẩn phải được xem là giao điểm của hai quỹ tích (đường tròn, đường thẳng). Chỉ cần xác định các quỹ tích đó theo các điều kiện đã cho.

Trong mỗi trường hợp, ta đều sử dụng một bài toán đơn giản có cùng ẩn. Làm như vậy tất nhiên ta có thể gặp khó khăn, nhưng dù sao thì ta cũng được một ý nghĩ đầu tiên làm xuất phát điểm và đó đã là một thuận lợi lớn.

4. Ta sẽ không có được thuận lợi đó nếu ta không tìm được một bài toán đã giải mà có cùng ẩn. Khi đó ta khó đi đến kết quả hơn.

"Tìm diện tích một hình cầu có bán kính cho trước".

Bài toán này đã được Acsimet giải rồi. Có thể nói là không có bài toán nào có cùng ẩn mà lại đơn giản hơn và như vậy chắc chắn là Acsimet đã không sử dụng được kết quả của một bài toán nào khác. Vì vậy mà cách giải bài toán trên đây có thể xem là một trong các phát minh toán học quan trọng nhất.

"Tìm diện tích một hình cầu nội tiếp trong một tứ diện có sáu cạnh cho trước". Người nào đã biết kết quả của Acsimet thì giải được bài toán này dễ dàng, chỉ cần biểu thị bán kính của hình cầu nội tiếp theo sáu cạnh của tứ diện. Tất nhiên, cũng không phải đơn giản lắm, nhưng dẫu sao thì các khó khăn ở đây cũng không thể so sánh được với các khó khăn trong bài toán của Acsimet.

Biết hay không biết một bài toán đã giải mà có cùng ẩn, điều đó thường là tất cả sự khác nhau giữa một bài toán dễ và một bài toán khó.

5. Khi Acsimet đã tính được diện tích mặt cầu thì như ta đã nói : ông không biết một bài toán nào đã giải sẵn mà có cùng ẩn ; nhưng ông đã biết nhiều bài toán có ẩn tương tự. Thật vậy, có những mặt cong mà diện tích có thể tính dễ dàng hơn diện tích mặt cầu và ở thời đó, người ta cũng đã biết rồi như là diện tích của mặt trụ, mặt nón, mặt nón cụt. Chắc chắn là nhà bác học của ta đã khảo sát kĩ lưỡng các trường hợp tương tự đó, vì khi tìm diện tích mặt cầu ông đã xem nó gần đúng là một diện tích kết hợp gồm hai mặt nón và nhiều mặt nón cụt (xem mục *Định nghĩa* điểm 6).

Như vậy, nếu ta không tìm được một bài toán đã giải sẵn có cùng ẩn, thì ta cố gắng tìm một bài toán có ẩn tương tự. Các bài toán thuộc loại liên quan mật thiết đến bài toán đã cho và do đó khó lợi dụng hơn, nhưng cũng có thể hướng dẫn ta trong việc tìm tòi và ta không nên bỏ qua.

6. Ta thêm một vài điều chú thích về các "bài toán chứng minh" : tương tự như những điều đã bàn về các bài toán "tìm ẩn".

Chẳng hạn, ta cần chứng minh (hay phủ nhận) một định lí đã phát triển rõ ràng. Mọi định lí đã được chứng minh mà có liên quan ít nhiều với định lí đã nêu trên đều có thể giúp ích được. Tuy nhiên, ta có thể thấy rằng trong số các định lí đó thì những định lí nào có cùng kết luận sẽ là trực tiếp bổ ích hơn cả. Vì vậy mà ta phải *xét kĩ kết luận*, nói cách khác, ta xét định lí mà chú trọng đặc biệt đến kết luận. Cách tiến hành như vậy có thể hình dung như sau :

"Nếu..., thì các góc bằng nhau".

Ta hãy nhớ lại một định lí quen thuộc có cùng kết luận hay có kết luận tương tự. Đặc biệt, ta hãy nhớ lại các định lí cùng loại, đơn giản và quen thuộc. Chẳng hạn, ta có thể nhớ lại định lí sau đây : "Hai tam giác đồng dạng có các góc tương ứng bằng nhau". *Đó là một định lí có liên quan đến định lí đã cho và đã được chứng minh rồi. Có thể lợi dụng được nó không ? Có cần đưa thêm vào một yếu tố phụ thì mới sử dụng được không ?*

Như vậy, ta có thể quan niệm được cách tiến hành như sau : tìm cách chứng minh sự bằng nhau của các góc như những tam giác đồng dạng. Muốn vậy, ta phải đưa vào hai tam giác chứa các góc nói trên và chứng minh là chúng đồng dạng. Cái đó có thể là một điểm xuất phát tốt.

7. Ta hãy tóm tắt lại. Khi nhớ lại các bài toán đã giải sẵn có cùng ẩn hay có ẩn tương tự (hay những định lí đã chứng minh có cùng kết luận hay có kết luận tương tự), ta có nhiều hi vọng đi đúng hướng và có thể hình dung được cách tiến hành để giải bài toán. Cố gắng nhớ lại các bài toán như vậy, đó là một phương pháp rất tự nhiên và dễ hiểu. Một điều lạ là một phương pháp đơn giản và phong phú như vậy lại không thật phổ biến. Dù sao thì học sinh và thầy giáo cũng còn phải biết làm thế nào để sử dụng câu gợi ý : *Hãy xét kĩ ẩn, hãy nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay có ẩn tương tự.*

Hệ quả (hệ luận)

Là một định lí mà ta có thể rút ra dễ dàng từ một định lí khác đã được chứng minh.

Hình vẽ

Hình vẽ là đối tượng nghiên cứu trong các bài toán hình. Tuy nhiên, chúng cũng giúp đắc lực trong việc giải những bài toán rất khác nhau mà thoạt nhìn chẳng có gì là hình học cả. Vì vậy có hai lí do quan trọng buộc ta phải khảo sát vai trò của hình vẽ khi giải các bài toán.

1. Nếu ta có một bài toán hình thì chúng ta phải xét một hình vẽ đó.

Chúng ta có thể tưởng tượng ra hình vẽ đó trong đầu hoặc vẽ ra giấy. Trong một số trường hợp chỉ nên tưởng tượng trong đầu mà không nên vẽ ra giấy. Tuy nhiên, nếu chúng ta còn phải lần lượt xét những chi tiết khác nhau thì nên *vẽ hình*. Nếu có nhiều chi tiết mà ta không thể hình dung ra tất cả cùng một lúc, thì khi đó trên giấy chúng sẽ hiện ra đồng thời. Cái chi tiết mà ta nhớ lại trong đầu có thể bị quên mất nhưng cũng chi tiết đó khi đã được vẽ trên giấy thì giữ được mãi và bất cứ lúc nào ta cũng có thể trở lại với nó.

Quay trở về với chi tiết đó, chúng ta sẽ phục hồi lại những suy luận trước đó và sự lĩnh hội được chi tiết đó làm cho công việc dễ dàng rất nhiều.

2. Bây giờ ta xét một cách tỉ mỉ hơn vai trò của hình vẽ khi giải các bài toán dựng hình.

Ta bắt đầu xét bài toán tương tự một cách chi tiết, trước hết bằng cách vẽ hình có chứa cái chưa biết và những cái đã biết liên hệ với nhau theo các điều kiện của bài toán. Để trình bày bài toán một cách rõ ràng, ta phải xét từng dữ kiện một, từng phần của giả thiết một ; sau đó ta hợp nhất các phần lại bằng cách xét giả thiết trong toàn bộ của nó. Trong khi đó, ta cố gắng bao quát cùng một lúc mọi liên hệ khác nhau quy định bởi giả thiết của bài toán, khó mà có thể xử sự với một số rất nhiều chi tiết đó, phân tích chúng rồi hợp nhất lại, nếu như không có một hình vẽ trên giấy ở trước mặt. Mặt khác, chừng nào bài toán còn chưa giải được thì chúng ta còn phải tự hỏi là có thể hay không thể dựng được hình vẽ phải tìm. Có thể hoàn toàn thoả mãn các điều kiện của bài toán không ? Chúng ta không có quyền nói "có thể được" khi chưa có cách giải cuối cùng.

Tuy nhiên, chúng ta thừa nhận rằng có thể được và ta vẽ một hình trên đó các dữ kiện và những cái chưa biết liên hệ với nhau theo quy định của các điều kiện.

Có thể nghĩ rằng vẽ hình như vậy, ta đã dùng tới một sự thừa nhận không hợp pháp. Nhưng không phải như vậy. Nói cho đúng hơn, không phải bao giờ cũng như vậy. Chúng ta làm đúng nếu như đi khảo sát bài toán, chúng ta thừa nhận *khả năng* tồn tại một đối tượng thoả mãn các điều kiện buộc cho cái chưa biết và có những quan hệ bắt buộc với những cái đã biết. Đồng thời, chỉ cần ta đừng lẫn lộn khả năng tồn tại một đối tượng như vậy với lòng tin là nó tồn tại. Hành động của ông chánh án không thể coi là sai nếu như ông ta, trong khi hỏi cung bị cáo đã nêu ra giả thuyết về sự phạm tội của bị cáo nhưng với điều kiện không gán cho giả thuyết đó một giá trị hoàn toàn chắc chắn. Nhà toán học, không được có một định kiến nào và phải gác sự phán đoán của mình sang một bên cho tới khi mà sự khảo sát đã đem lại kết quả quyết định ; phương pháp giải một bài toán dựng hình bắt đầu bằng cách vẽ hình trong đó giả thiết rằng các điều kiện đã được thoả mãn, là do các nhà hình học Hi Lạp đề ra. Ta thấy rõ nội dung của phương pháp đó trong câu nói ngắn và hơi bí hiểm của Páppuýt : "Hãy thừa nhận rằng cái người ta bắt phải làm là đã được làm rồi". Lời khuyên sau đây không gọn bằng nhưng rõ ràng hơn : *Hãy vẽ một hình vẽ giả định thừa nhận rằng mọi điều kiện của bài toán đều được thoả mãn.*

Lời khuyên đó áp dụng cho những bài toán dựng hình nhưng không có lí gì lại giới hạn nó cho riêng loại bài toán này. Ta có thể mở rộng nó cho tất cả "những bài toán về tìm tòi" bằng cách phát biểu nó dưới dạng tổng quát sau : *Hãy xét một hoàn cảnh giả định trong đó mọi điều kiện của bài toán đều được thoả mãn.*

Hãy so sánh với "Páppuýt" mục 6.

3. Bây giờ ta xét một số đặc điểm của việc vẽ hình thực sự.

(I) Nên hình vẽ như thế nào một cách chính xác hay gần đúng, nên vẽ với các dụng cụ hay bằng tay ? Cả hai cách đều có những cái lợi của nó. Về nguyên tắc, những hình vẽ chính xác trong hình học đóng một vai trò như các phép đo chính xác trong vật lí. Nhưng trong thực hành, chúng không quan trọng bằng vì những định lí hình học có nhiều cách thử nghiệm hơn so với những định luật vật lí. Tuy nhiên, những người mới làm toán hình nên vẽ nhiều hình vẽ càng chính xác càng tốt để có một cơ sở kinh nghiệm.

Một hình vẽ đúng có thể khiến ta phát minh ra một định lí hình học dù là rất nhỏ bé. Tuy nhiên, để tiến hành sự suy luận thì nói chung, chỉ cần vẽ hình cẩn thận bằng tay, vì cách này tốn ít thời gian. Hiển nhiên là hình vẽ không nên trở thành vô lí, những đường thẳng không thể uốn khúc và một vòng tròn không thể giống như một củ khoai tây. Đôi khi một hình vẽ sai có thể đưa ta tới một kết luận sai lầm ; nhưng sự nguy hiểm không phải là lớn và ta có thể tránh được bằng nhiều cách, đặc biệt là đổi cách vẽ hình. Cái nguy hiểm đó sẽ hoàn toàn không có nếu như ta tập trung chú ý vào những quan hệ lôgic và nếu như ta hiểu rằng hình vẽ là một hỗ trợ chứ không phải là cơ sở cho những kết luận của ta ; chính những quan hệ lôgic mới là cơ cở thực sự (điểm này được minh hoạ bằng một số nghịch lí quen biết trên cơ sở một số hình cố ý vẽ sai).

(II) Các phần tử trên hình vẽ nhất thiết phải đứng ở những vị trí quy định, còn thứ tự để dựng chúng thì không quan trọng. Do đó nên chọn một thứ thuận lợi nhất. Chẳng hạn, để minh hoạ việc chia một góc ra ba phần bằng nhau, ta muốn dựng hai góc a và b sao mà $a = 3b$. Xuất phát từ một góc a nào đó, ta không thể dùng thước và compa để dựng b được. Nhưng nếu bắt đầu từ một góc b nào đó khá nhỏ, ta sẽ dựng được góc a ngay.

(III) Hình vẽ của ta phải có tính tổng quát ; các phần tử khác không nên làm xuất hiện những quan hệ đặc biệt mà bài toán không đòi hỏi. Chẳng hạn, các đoạn thẳng không được vẽ bằng nhau hay vuông góc với nhau, những tam giác không nên vẽ cân hay vuông nếu như bài toán không đòi hỏi như vậy. Tam giác mà các góc bằng 45°, 60° và 75° theo một nghĩa nhất định khác xa với cả tam giác cân lẫn tam giác vuông. Nếu muốn có một tam giác "dạng tổng quát" thì ta nên vẽ một tam giác gần giống như tam giác nói trên.

(IV) Để làm nổi bật các vai trò khác nhau của các đường trong hình vẽ, ta có thể vẽ những đường bằng những nét đậm, nhạt, đường liền hay đường rời (chấm

chấm) hay có thể dùng những màu khác nhau. Ta vẽ một đường bằng một nét rất mảnh nếu ta chưa hẳn định dùng nó làm một đường phụ. Ta có thể vẽ đỏ những phần tử cho trước và dùng những màu khác nhau để nêu bật những phần quan trọng, như hai tam giác đồng dạng dùng cùng một màu.

(V) Để minh hoạ những bài toán hình trong không gian thì nên dùng những mô hình ba chiều hay những hình phẳng trên giấy hay trên bảng ? Mô hình thì rất tốt, nhưng làm chúng thì rất phiền, còn như mua thì lại khá đắt. Cho nên chúng ta phải bằng lòng dùng những hình vẽ mặc dù đôi khi khó hình dung ra chúng. Những người mới làm quen với toán hình không gian thì nên làm một vài thực nghiệm với các mô hình bằng bìa cứng tự làm lấy. Có thể dùng những đồ vật thông thường để minh hoạ các khái niệm hình học. Chẳng hạn, một chiếc hộp, một viên gạch, một lớp học có thể biểu diễn một hình hộp chữ nhật, một cái bút chì biểu diễn một hình trụ, cái chụp đèn tượng trưng cho hình nón cụt, ...

4. Những hình vẽ trên giấy đều dễ vẽ, dễ nhận, dễ nhớ. Những hình phẳng đều quen thuộc đối với ta và những bài toán liên quan tới chúng đều đặc biệt dễ lĩnh hội. Do đó, ta có thể lợi dụng được nó, nếu như ta tìm được một cách biểu diễn hình học gần đúng cho những đối tượng không phải hình học.

Thực vậy, những biểu diễn hình học, như những đồ thị và biểu đồ các loại đều được dùng trong mọi ngành khoa học không những chỉ trong vật lí, hoá học hay khoa học tự nhiên mà còn cả trong kinh tế học gần đúng, chúng ta hãy thử diễn tả tất cả theo ngôn ngữ của các hình và đưa tất cả các bài toán về những bài toán hình.

Thành thử, ngay cả khi bài toán của anh không phải là bài toán hình, anh cũng có thể thử.

Vẽ một hình : tìm một biểu diễn hình học rõ ràng, sáng sủa cho những bài toán không phải toán hình có thể cho phép tiến một bước rõ rệt tới cách giải.

Hoạt động của tiềm thức

Một buổi tối nọ, tôi muốn nói chuyện với một người bạn về một nhà văn nào đó, nhưng tôi không thể nào nhớ được tên nhà văn ấy. Tôi lấy làm bực tức vì tôi nhớ rất kĩ một quyển tiểu thuyết của ông ta. Tôi lại còn nhớ cả một vài chuyện về ông, tóm lại, tôi nhớ lại tất cả những điều mà tôi biết về ông ấy, chỉ trừ có tên và mọi cố gắng của tôi đều vô hiệu. Thế mà sáng mai tôi ngủ dậy, chưa kịp nghĩ đến câu chuyện tối qua thì cái tên của nhà văn đột nhiên xuất hiện trong trí tôi mà không phải cố gắng một tí nào.

Mỗi người chúng ta chắc chắn đều có kinh nghiệm bản thân như vậy và tất cả những người nào thích toán và hay giải toán có lẽ cũng đều có kinh nghiệm đó trong quá trình làm việc của họ. Nhiều khi ta phải bó tay trước một bài toán mặc dù đã cố gắng rất nhiều. Nhưng sau một đêm nghỉ ngơi hay vài ngày bỏ dở thì có thể bất chợt một tia sáng loé lên trong ý nghĩ của ta và ta có thể giải bài toán dễ dàng. Ở đây, tính chất của vấn đề không quan trọng : một danh từ bị quên, một chữ khó trong trò chơi đố chữ, cũng như lời giải của một vấn đề toán học đều có thể xuất hiện trong ý nghĩ theo cách ấy.

Những điều nhận xét trên đây cho ta cảm tưởng như có một sự hoạt động của tiềm thức. Quả thật như một bài toán, sau một thời gian bỏ quên, có thể hiện lại một cách sáng sủa hơn trước. Cái gì đã soi sáng nó, cái gì đã dẫn nó đến gần lời giải ? Cũng là bản thân chúng ta mà thôi, nhưng chúng ta đã hoạt động trong *tiềm thức*. Cũng khó mà đưa ra được một cách giải thích khác, mặc dù các nhà tâm lí học cũng đang phác hoạ một cách trả lời không giống như trên và có thể một ngày kia sẽ được đầy đủ hơn.

Nhưng dù học thuyết về sự hoạt động tiềm thức có giá trị nhiều hay ít, thì nó cũng cần được chú ý đến vì rằng, đối với sự suy nghĩ có ý thức có một giới hạn không nên vượt qua và đôi khi cũng nên xếp lại bài toán trong một thời gian "qua một đêm ngủ người ta trở nên sáng suốt hơn", một câu ngạn ngữ cổ nói như vậy.

Bằng cách trì hoãn lại ngày mai, ta có thể thu được nhiều kết quả hơn và với công sức ít hơn. Tuy nhiên, ta không được bỏ dở một bài toán trước khi đạt được một kết quả nào đó, nếu về sau nhất thiết phải trở lại bài toán này. Không nên chấm dứt công việc dù chỉ là tạm thời – trước khi đã giải quyết được một chi tiết nào đó, trước khi làm sáng tỏ được phần nào một khía cạnh của vấn đề.

Chỉ có những bài toán mà ta đã tập trung suy nghĩ nhiều thì khi trở lại mới được biến đổi, sáng ra. Hình như sự cố gắng có ý thức và lao động trí óc là cần thiết để buộc tiềm thức làm việc. Nếu không phải như vậy thì hoá ra vấn đề lại quá dễ dàng, vì khi đó chúng ta có thể giải các bài toán khó nhất bằng cách đi ngủ để chờ đợi những ý kiến hay.

Trước kia, người ta xem một sáng kiến như là linh cảm, do trời phú. Phải xứng đáng với điều đó bằng lao động hay ít ra bằng những ý muốn nồng nhiệt[1].

---

(1) *Về một công trình nghiên cứu tỉ mỉ hơn "về tiềm thức" độc giả có thể tìm thấy trong quyển "tâm lí của sự sáng tạo trong lĩnh vực toán học" Psychologie de l'invention mathématique của Jacques Hadamard (chú thích của tác giả)*

Khái quát

Đó là việc chuyển từ việc khảo sát một đối tượng nào đó sang khảo sát một nhóm đối tượng nào đó có chứa đối tượng này, từ việc khảo sát một nhóm hẹp đối tượng sang việc khảo sát một nhóm đối tượng quan trọng hơn và bao hàm nhóm thứ nhất.

1. Nếu chẳng hạn ta gặp tổng :

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

và ta để ý nó có thể biểu thị dưới dạng :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Khi đó, lẽ tự nhiên nảy ra câu hỏi : Phải chăng tổng của các lập phương liên tiếp như là :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

luôn luôn là một bình phương ? Đó là một ví dụ về khái quát. Điều khái quát này rất bổ ích vì nó dẫn từ một nhận xét riêng biệt đến một quy luật phổ biến quan trọng. Trong toán học cũng như trong vật lí hay khoa học tự nhiên, nhiều kết quả đã đạt được nhờ cách khái quát như vậy (xem mục : Quy nạp và quy nạp toán học).

2. Có thể dựa vào khái quát để giải một bài toán. Ta xét bài toán hình học không gian sau đây : "Một đường thẳng và một hình bát diện đều có một vị trí tương đối cho trước, Tìm mặt phẳng qua đường thẳng và chia thể tích hình bát diện ra hai phần bằng nhau". Bài toán này có vẻ khó, nhưng ta có thể nghĩ đến bài toán sau đây tổng quát hơn : "Một đường thẳng và một cố thể có một *tâm đối xứng* nằm trong một vị trí tương đối cho trước, tìm mặt phẳng đi qua đường thẳng phải tìm, dĩ nhiên đi qua tâm đối xứng của cố thể ; nó được xác định do đường thẳng và tâm đối xứng đó. Vì hình bát diện cũng có một tâm đối xứng, nên bài toán đầu tiên cũng đồng thời được giải quyết.

Ta để ý rằng, bài toán sau tuy tổng quát hơn bài toán đầu, nhưng lại dễ hơn nhiều. Thực ra thì phương pháp chủ yếu mà ta đã dùng để giải bài toán đầu là *sáng tạo ra bài toán sau*. Làm như vậy, ta nhìn thấy vai trò của tâm đối xứng ; ta *làm xuất hiện* tính chất căn bản của hình bát diện trong bài toán đã cho, đó là : nó có tâm đối xứng.

Đôi khi, bài toán tổng quát hơn lại dễ giải hơn ; điều đó tưởng chừng như mâu thuẫn, nhưng ví dụ trên chứng tỏ rằng nó chẳng có gì là đặc biệt. Bằng cách nghĩ ra bài toán tổng quát, ta đã vượt qua được khó khăn rất lớn của bài toán đặc biệt.

Sau việc sáng tạo đó, công việc còn lại chỉ là phụ. Như vậy, trong trường hợp này, việc giải bài toán tổng quát chỉ là một phần – phần phụ – của việc giải bài toán đặc biệt (xem mục : Nghịch lí của người sáng tạo).

3. Tìm thể tích của một hình chóp cụt đáy vuông, biết rằng cạnh đáy dưới bằng 10cm, cạnh đáy trên bằng 5cm và chiều cao bằng 6cm. Thay các số 10, 5 và 6 bởi a, b, h ta đã khái quát bài toán ? Ta được bài toán khác bài toán ban đầu, mà ta có thể phát triển như sau : "Tìm thể tích hình chóp cụt đáy vuông, biết cạnh đáy dưới bằng a, cạnh đáy trên bằng b, chiều cao bằng h". Kiểu khái quát như vậy có thể rất có lợi. Chuyển từ một bài toán "bằng số" sang một bài toán "bằng chữ", chúng ta có thể có được nhiều khả năng mới ; chẳng hạn, chúng ta có thể cho biến đổi các dữ kiện và như vậy có thể nghiệm lại các kết quả bằng nhiều cách (xem mục : Có thể nghiệm lại các kết quả hay không, điểm 2 ; biến đổi bài toán, điểm 4).

Kí hiệu

1. Muốn làm sáng tỏ sự ích lợi của một kí hiệu chọn thích hợp và quen biết, chúng ta thử cộng nhiều số khá lớn với giả thiết là chúng ta không được phép dùng chữ số Ả Rập mà chỉ có quyền dùng chữ số La Mã. Như vậy thì những số như MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII sẽ đưa ta đến đâu ? Khó mà nói hết được tầm quan trọng của các kí hiệu toán học. Các nhà toán học hiện đại nhờ có hệ thập phân mà có được một ưu thế rất lớn so với các nhà toán học thời thượng cổ. Một học sinh trung bình ngày nay biết rất rõ kí hiệu phổ biến của đại số, hình học giải tích, phép tính vi phân và tích phân và như vậy là rất thuận tiện so với các nhà toán học Hi Lạp khi cần giải các bài toán về diện tích hay thể tích mà trước kia muốn giải được phải có thiên tài Acsimet.

Có một mối liên hệ mật thiết giữa ngôn ngữ và tư duy, ngôn ngữ làm cho tư duy phát triển. Nhiều nhà triết học và ngữ ngôn còn đi xa hơn nữa và khẳng định rằng không có ngôn ngữ thì không có tư duy.

Điều khẳng định này kể cũng quá đáng. Nếu ta có một ít kinh nghiệm về vận dụng toán học thì chúng ta thấy rằng có thể suy nghĩ có kết quả không cần lời nói mà chỉ cần nhìn vào hình vẽ và thao tác với các kí hiệu đại số. Hình vẽ và kí hiệu liên hệ mật thiết với lí luận toán học. Trong khi lí luận mà dùng đến hình vẽ hay kí hiệu rất có lợi, như vậy chúng ta có thể sửa đổi điều khẳng định trên kia và xem tiếng nói là ngang hàng với những kí hiệu khác và nói rằng : "Nếu không có kí hiệu thì không có tư duy".

Dù sao thì công dụng của những kí hiệu toán học cũng tương tự như công dụng của tiếng nói, kí hiệu toán học ví như một thứ ngôn ngữ, đặc biệt một thứ tiếng rất hay hoàn toàn thích ứng với mục đích của mình, súc tích và rõ ràng với những quy tắc không hề có ngoại lệ như đối với các ngôn ngữ thông thường.

Đứng trên quan điểm đó, ta có thể nói rằng việc đặt phương trình là một cách phiên dịch từ ngôn ngữ thông thường sang ngôn ngữ các kí hiệu toán học.

2. Một số các kí hiệu như các dấu +, −, =, ... đã có một ý nghĩa nhất định ; trái lại, những kí hiệu khác như các chữ cái La Tinh và Hi Lạp thường dùng với những ý nghĩa khác nhau tuỳ theo từng bài toán. Khi ta khảo sát một bài toán mới, ta phải chọn một số kí hiệu, *đưa kí hiệu vào một cách thích hợp*. Ở đây, ta có thể nhận xét tương tự như với ngôn ngữ thông thường ; nhiều tiếng nói có ý nghĩa thay đổi tuỳ theo câu văn : Khi cần phải diễn tả rõ ràng, phải chọn cẩn thận từng tiếng nói.

Việc chọn kí hiệu là một giai đoạn quan trọng trong khi giải một bài toán ; vì vậy, ta phải chọn một cách thận trọng. Thời gian mà ta dành để chọn kí hiệu sẽ được trả công rất hậu về sau, bởi thời gian tiết kiệm được nhờ tránh khỏi mọi sự do dự và lẫn lộn.

Để được hướng dẫn trong việc chọn đó, ta phải nghiên cứu kĩ càng mọi yếu tố của bài toán. Cách kí hiệu thích hợp có ý nghĩa hàng đầu để giúp ta hiểu được bài toán.

3. Một kí hiệu tốt phải thoả mãn những yêu cầu sau : có nội dung và dễ nhớ ; nó phải tránh được mọi lối giải thích không rõ ràng.Thứ tự các kí hiệu và sự tương quan giữa chúng phải làm ta liên tưởng đến thứ tự và sự tương quan giữa các đối tượng tương ứng.

4. Trước hết, các dấu hiệu không được *nhập nhằng*. Chẳng hạn, trong cùng một vấn đề không bao giờ được dùng một kí hiệu để chỉ hai đối tượng khác nhau. Nếu trong một bài toán ta đã gọi a là một độ dài nào đó thì không được gọi một phần tử nào khác là a. Dĩ nhiên, trong một bài toán khác thì có thể dùng chữ a với một nghĩa khác.

Tuy không được dùng một kí hiệu để chỉ hai đối tượng khác nhau nhưng ta có quyền dùng những kí hiệu khác nhau để chỉ cùng một đối tượng, chẳng hạn, viết tích của a với b là :

$$a \times b,\ a \,.\, b \text{ và } ab$$

Nhưng mỗi khi thấy làm như vậy có lợi (tức là dùng hai hay nhiều kí hiệu khác nhau để chỉ một đối tượng) thì cũng phải thận trọng. Nói chung, nên dùng một kí hiệu cho một đối tượng và không bao giờ nên dùng nhiều kí hiệu không cần thiết.

5. Các dấu hiệu được chọn phải dễ nhớ và dễ nhận ; mỗi dấu hiệu phải nhắc ta tức khắc đến đối tượng tương ứng và ngược lại.

Một cách để có được kí hiệu dễ nhớ là dùng các chữ cái đầu tiên của tên đối tượng. Chẳng hạn ở mục 20, ta đã dùng chữ *r* để chỉ vận tốc (tiếng Anh – rate : vận tốc), *t* để chỉ thời gian (tiếng Anh – time : thời gian), *v* thể tích (tiếng Anh – volume : thể tích). Nhưng không phải bao giờ cũng làm được điều đó, chẳng hạn cũng ở mục 20, ta có xét đến bán kính nhưng ta không thể kí hiệu nó bằng chữ r[1] bởi vì chữ đó đã chỉ vận tốc. Có nhiều nguyên nhân khác hạn chế cách chọn kí hiệu dễ nhớ ; chúng ta sẽ lần lượt nói đến các nguyên nhân và phương pháp đó.

6. Một kí pháp không những giúp ta liên hệ với các khái niệm mà còn đặc biệt lợi ích là giúp ta quan niệm được bài toán khi thứ tự và quan hệ giữa các kí hiệu làm ta liên tưởng đến thứ tự và quan hệ giữa các đối tượng. Sau đây là một vài ví dụ dùng để minh hoạ điều đó.

(I) Để chỉ các đối tượng gần nhau trong bài toán, ta chọn trong các chữ theo thứ tự trong bảng chữ cái.

Như vậy, ta thường dùng những chữ cái đầu tiên như *a, b, c* để chỉ những đại lượng đã cho hay những hằng số và các chữ cuối như *x, y, z* để chỉ những đại lượng chưa biết hay biến thiên.

Mục 8 ta dùng chữ *a, b, c* để chỉ chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp, đó là những dữ kiện của bài toán ; cách kí hiệu đó có lẽ tốt hơn là cách dùng chữ cái đứng đầu tiên, chẳng hạn *l, w, h*[1]. Thật vậy, trong bài toán đã cho, kích thước đóng vai trò như nhau, ta nhấn mạnh điều đó bằng cách dùng ba chữ cái kề nhau. Ngoài ra, như chúng ta đã nói, các chữ đầu tiên *a, b, c* là những chữ thông dụng nhất để chỉ các đại lượng đã cho. Trong một bài toán khác mà ở đấy ba kích thước đóng vai trò khác nhau và cần phân biệt chiều nằm ngang và chiều thẳng đứng thì có lẽ nên dùng các chữ *l, w, h*.

(II) Để chỉ các đối tượng thuộc cùng một phạm trù, ta thường chọn những chữ thuộc cùng một tự mẫu và ta dùng những tự mẫu khác cho những phạm trù khác. Chẳng hạn, trong hình học phẳng ta thường dùng :

Chữ in hoa của tự mẫu La Tinh như *A, B, C* để chỉ các điểm ;

Chữ nhỏ như *a, b, c* để chỉ các đoạn thẳng ; chữ nhỏ Hi Lạp như α, β, γ... để chỉ các góc. Khi gặp hai đối tượng thuộc những phạm trù khác nhau, nhưng lại có

(1) Tiếng Anh Length : chiều dài ; width : chiều rộng ; height : chiều cao ; rate : vận tốc

quan hệ với nhau thì ta có thể dùng những chữ tương ứng trong các tự mẫu khác nhau, hoặc dùng chữ in và chữ nho, chẳng hạn A và a, B và b... Một ví dụ quen thuộc là cách kí hiệu trong tam giác :

A, B, C chỉ các đỉnh,

a, b, c chỉ các cạnh,

α, β, γ chỉ các góc,

ở đây ta hiểu a là cạnh đối với đỉnh A và góc ở A là α.

(III) Ở mục 20, các chữ *a, b, x và y* tỏ ra thích hợp để chỉ tính chất các phần tử và quan hệ giữa chúng với nhau. Các chữ a và b chứng tỏ rằng các đại lượng tương ứng là hằng số, còn các chữ x và y chỉ các biến số ; ngoài ra, a đứng trước b, cũng như x đứng trước y, chứng tỏ rằng quan hệ giữa a và b cũng giống như quan hệ giữa x và y. Sự thật thì a và x là nằm ngang, b và y là thẳng đứng và $a : b = x : y$.

7. Kí hiệu :

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG$$

chỉ rằng hai tam giác đồng dạng với nhau. Trong các tài liệu hiện đại, công thức ấy còn bao hàm một điều là trong hai tam giác đồng dạng đó, các đỉnh tương ứng với nhau theo thứ tự đã viết : A ứng với E, B với F, C với G. Nhưng sách cổ tự không sử dụng sự tương ứng đó, nên độc giả phải nhìn vào hình vẽ hay phải nhớ lại nội dung của vấn đề thì mới biết được sự tương ứng giữa các phần tử.

Cách kí hiệu hiện đại tốt hơn cách kí hiệu cổ. Nhờ nó ta có thể rút ra những hệ quả của công thức mà không cần nhìn hình vẽ. Chẳng hạn, ta có thể kết luận rằng :

$$\widehat{A} = \widehat{E}$$

$$AB : BC = EF : FG$$

và rút ra những tỉ số tương tự. Cách kí hiệu cổ không có ý nghĩa bằng và không cho phép rút ra những kết luận chính xác như vậy.

Ta có thể nói rằng, một kí pháp nào nhiều ý nghĩa hơn một kí pháp khác thì là *phong phú hơn*. Các kí hiệu hiện đại về tam giác đồng dạng phong phú hơn cách kí hiệu cổ, nó phản ánh thứ tự và quan hệ các đối tượng một cách đầy đủ hơn và do đó, cho phép rút ra nhiều hệ quả hơn.

8. Những từ có *nghĩa phụ* ; đó là những từ mà đem đặt vào trong một số câu, nghĩa của chúng có thể bị ảnh hưởng ít nhiều và thêm vào nghĩa thông thường (nghĩa đầu tiên) chúng nhận một màu sắc mới, một sự biến đổi nào đó. Vì vậy, muốn biết thật đúng, ta phải chọn trong số những từ gần đồng nghĩa từ nào mà nghĩa phụ thích hợp nhất trong câu.

Trong kí pháp toán học cũng thế. Những kí hiệu có thể nhận một ý nghĩa phụ nào đó khi đặt chúng vào trong bài, khi chọn các kí hiệu ta phải để ý đến điều đó. Ta hãy minh hoạ điều đó bằng những ví dụ.

Mỗi một chữ có nghĩa nhất định, phổ dụng ; chẳng hạn, chữ *e* thường chỉ cơ số của lôgarit tự nhiên, *i* chỉ đơn vị ảo $\sqrt{-1}$, π chỉ tỉ số của đường tròn với đường kính của nó. Nói chung, chỉ nên dùng các kí hiệu ấy theo nghĩa cổ truyền của chúng ; vì rằng, nếu chúng ta dùng chúng theo một nghĩa khác, thì nghĩa quen thuộc của chúng có thể ám ảnh trí óc của ta, làm cho chúng ta lúng túng và có khi nhầm lẫn. Tuy nhiên, ta để ý rằng các nghĩa phụ nói trên, nhiều khi nguy hiểm, lại làm lúng túng cho học sinh ít hơn là nhà toán học, vì kiến thức của học sinh còn ít ỏi ; nhà toán học phải có đầy đủ kinh nghiệm để vượt qua những loại khó khăn đó.

Nghĩa phụ của một kí hiệu cũng có thể có ích lợi nếu ta biết sử dụng khéo léo. Một kí pháp đã dùng có thể giúp cho người nghiên cứu bằng cách nhắc lại một phương pháp bổ ích ; tất nhiên, cần phân biệt rõ ràng nghĩa đầu tiên (nghĩa hiện tại) của kí hiệu với nghĩa phụ. Một *kí pháp cố định* (như kí pháp cổ truyền cho các phần tử của tam giác mà chúng ta đã có dịp xét đến điểm 6 (II)) có nhiều thuận lợi lớn ; dùng nó nhiều lần, nó sẽ nhắc chúng ta nhớ đến các phương pháp đã sử dụng ; những công thức viết với một kí pháp cố định thì dễ nhớ hơn, tất nhiên, chúng ta phải mở rộng tầm mắt khi cần thiết phải dùng một kí pháp cổ truyền theo một nghĩa hơi khác thông thường của nó.

9. Khi ta cần chọn một trong nhiều kí pháp, thì ta có thể thiên về cách này bởi một lí do nào đó và thiên về một cách kia bởi một lí do khác. Cần có kinh nghiệm mới chọn được cách thích hợp. Tuy nhiên, cũng cần biết các thuận lợi và trở ngại trình bày trên kia. Dù sao thì cũng nên nhớ là cần đặt nhiều chú ý vào việc chọn kí pháp, việc chọn phải có *lí do xác đáng*.

10. Không phải chỉ có những học sinh kém trong lớp học mới ghét môn đại số mà còn có cả những học sinh rất thông minh. Trong các kí pháp bao giờ cũng có một cái gì độc đáo và giả tạo ; và thật mệt óc nếu phải học một kí pháp mới. Học sinh thông minh có thể ngại làm điều đó nếu không biết rõ lí do. Sở dĩ họ ghét môn đại số vì họ không được thầy giáo luôn luôn chỉ bảo cho họ biết sự ích lợi của *ngôn ngữ kí hiệu toán học đối với trí óc như thế nào*. Chỉ bảo cho họ điều đó là một nhiệm vụ quan trọng của thầy giáo, không thể thiếu được.

Các nhận xét trên đây theo ý chúng tôi có phần nào bổ ích (xem thêm mục : Đặt phương trình). Có thể khuyên học sinh thử lại một công thức (xem đó là một bài tập hay) nhờ biện luận theo các đặc trưng của nó (xem mục 14 và mục : Có thể nghiệm lại kết quả hay không ?).

Kiểm nghiệm bằng cách dùng thứ nguyên

Đó là một phương tiện quen thuộc, nhanh chóng mà công hiệu để kiểm tra các công thức hình học hay vật lí và *Fourier* đã nêu lên tầm quan trọng từ lâu (xem quyển : Lí thuyết giải tích về nhiệt, mục 160 – 162, của ông).

1. Để nhớ lại quá trình thực hiện điều nói trên, ta hãy xét một hình nón cụt đáy tròn. Gọi :

R là bán kính của đáy dưới,

r là bán kính của đáy trên,

h là chiều cao,

S là diện tích xung quanh.

Nếu ta biết R, r, h thì rõ ràng S được xác định. Ta được biểu thức :

$$S = \pi (R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

mà ta muốn kiểm tra bằng thứ nguyên.

Thứ nguyên của một đại lượng hình học rất dễ xác định. Chẳng hạn, R, r *và* h là những độ dài, đo bằng centimét nếu dùng đơn vị khoa học. Diện tích S do bằng centimét vuông ; đơn vị là cm^2. Còn $\pi = 3,14159...$ là một số ; nhưng muốn đo một đại lượng thuần tuý bằng số, ta phải biểu thị nó ra "cm^0" ($cm^0 = 1$).

Mọi hạng thức của một tổng phải có cùng thứ nguyên, đó cũng là thứ nguyên của tổng. Chẳng hạn, R, r *và* $R + r$ được biểu thị với cùng một đơn vị, "*cm*" ; hai hạng thức $(R - r)^2$ và h^2 đều được biểu thị ra "cm^2".

Thứ nguyên của một tích là tích các thứ nguyên của các nhân tử. Đối với các luỹ thừa cũng có một quy tắc tương tự. Thay các đại lượng bởi đơn vị đo chúng, ta được :

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}$$

Như vậy là đúng. Vậy công thức có thể đảm bảo : nó đã qua được sự kiểm nghiệm theo thứ nguyên.

Xem các ví dụ khác ở mục 14 và mục "*Có thể nghiệm lại kết quả hay không ?*", điểm 2.

2. Ta có thể nhờ thứ nguyên mà kiểm tra kết quả cuối cùng hay các kết quả trung gian của một bài toán, do bản thân mình giải hay do một người khác giải (một phương pháp rất tốt để nhận thấy những sai lầm trong các bài thi) ; cũng có thể áp dụng lối kiểm tra đó cho các công thức mà ta nhớ lại hay những công thức mà ta dự đoán.

Nếu chẳng hạn, ta nhớ lại các công thức $4\pi r^2$ và $\frac{4}{3}\pi r^3$ cho diện tích và thể tích của hình cầu, nhưng lại quên không biết là công thức nào cho diện tích, công thức nào cho thể tích thì ta chỉ cần nhìn vào thứ nguyên là biết ngay.

3. Trong vật lí thì lối kiểm tra còn quan trọng hơn trong hình học.

Ta xét một con lắc đơn, tức là một vật nhỏ và nặng treo ở đầu sợi dây mà chiều dài xem như không thay đổi và trọng lượng không đáng kể, giả sử l là chiều dài sợi dây, g là gia tốc của trường hấp dẫn và T là chu kì của con lắc.

Bằng những nhận xét về cơ học, người ta thấy rằng T chỉ phụ thuộc l và g. Nhưng phụ thuộc như thế nào ? Ta có thể nhớ lại hay dự đoán rằng :

$$T = cl^m g^n$$

với c, m, n là những hằng số nào đó. Nói cách khác, ta giả sử T tỉ lệ với các luỹ thừa nào đó, l^m, g^n của l và g.

Ta hãy xét thứ nguyên. Vì T là thời gian nên nó đo bằng giây, mà ta kí hiệu là s. Đơn vị cho độ dài l là "cm", cho gia tốc g là $cm\, s^{-2}$ và của hằng số c là 1. Phương trình thứ nguyên viết ;

$$s = 1.(cm)^m\,(cm\, s^{-2})^n$$

hay

$$s = (cm)^{m+n}\, s^{-2n}$$

So sánh các luỹ thừa ở hai vế, ta được :

$$0 = m + n,\ 1 = -2n$$

do đó :

$$n = -\frac{1}{2},\ m = \frac{1}{2}$$

Và công thức cho chu kì T phải có dạng :

$$T = cl^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}} = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Trong trường hợp trên đây, việc kiểm tra có thể cho ta biết được nhiều điều nhưng không phải tất cả. Trước hết, nó không cho ta biết giá trị của hằng số c

(đúng ra là bằng 2π), sau nữa, nó không chỉ rõ phạm vi áp dụng của công thức. Thật ra thì công thức trên chỉ áp dụng được cho những dao động bé, mà cũng chỉ là gần đúng (chỉ đúng với các dao động "vô cùng bé"). Dù sao thì cách khảo sát trên cũng đã cho ta thấy trước một cách nhanh chóng và đơn giản một phần căn bản của một kết quả, mà muốn tìm được toàn bộ thì phải cần đến những phương tiện quan trọng hơn nhiều. Trong nhiều trường hợp tương tự, ta cũng nhận thấy điều đó.

Lépnit (Gôtphorit Vilhem) (1646 – 1716)

Nhà triết học và toán học nổi tiếng, dự định viết "thuật phát minh" nhưng không thực hiện được.

Tuy nhiên, nhiều đoạn rải rác trong tác phẩm của ông chứng tỏ ông đã nuôi nhiều ý nghĩ bổ ích về vấn đề này mà ông luôn nhấn mạnh tầm quan trọng của nó.

Chẳng hạn, ông đã viết : "Không có gì quan trọng hơn là biết được những nguồn phát minh và theo ý tôi chúng còn bổ ích hơn ngay cả những phát minh".

Lí luận giật lùi

Muốn hiểu cách xử trí của người, phải so sánh với các loài vật. Các loài vật cũng có những "bài toán" phải giải và khoa tâm lí thực nghiệm trong mấy chục năm gần đây đã có những bước tiến căn bản trong việc nghiên cứu một số động vật đã "giải các bài toán đó" như thế nào. Ở đây, chúng ta không thể trình bày tất cả những điều nghiên cứu đó mà chỉ giới thiệu sơ qua một thí nghiệm đơn giản và bổ ích với mục đích minh hoạ cho phương pháp phân tích, hay phương pháp lí luận giật lùi. Chúng ta đã gặp phương pháp đó trong mục nói về Pappus, một nhà triết học đã mô tả nhiều phương pháp phân tích.

1. Ta thử tìm một cách trả lời cho câu đố sau đây : *Làm thế nào để mang 6 lít nước từ sông về, nếu trong tay chỉ có hai thùng, một thùng 4 lít, một thùng 9 lít.*

Hình 16

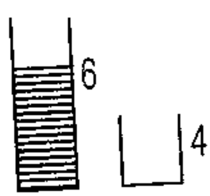
Ta hãy hình dung rõ ràng các công cụ lao động của chúng ta, đó là hai chiếc thùng (*đâu là dữ kiện ?*), tưởng tượng chúng ta là hình trụ, có đáy bằng nhau, chiều cao bằng 9 và 4 (hình 16). Nếu trên mặt bên có chia độ thì bài toán rất dễ giải quyết. Nhưng vì không có chia độ nên bài toán trở nên khó khăn.

Ta chưa biết cách làm thế nào để đong được 6 lít một cách chính xác ; nhưng có thể đo được một lượng khác hay không ? (*Nếu chưa giải được bài toán đặt ra, thì trước hết hãy thử giải một bài toán có liên quan. Từ các dữ kiện có thể rút ra một điều gì bổ ích ?*). Ta hãy mò mẫm một ít. Ta có thể đổ đầy thùng lớn. Nếu từ thùng lớn ta trút sang thùng bé thì còn lại trong thùng lớn 5 lít. Làm thế nào để có được 6 lít ? Chúng ta có hai cái thùng, ta còn có thể...

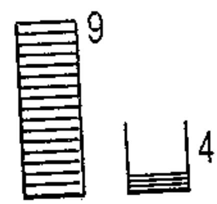
Như vậy, ta đã hành động như hầu hết những người nào gặp phải bài toán ấy. Từ hai thùng không, ta thử một cách, rồi một cách khác, lần lượt đổ đầy rồi lại trút ra và sau mỗi lần thất bại, ta lại tiếp tục và tìm cách khác. Ta đã tiến bộ, phát xuất từ tình hình lúc đầu và đi dần tới kết quả mong muốn, nói cách khác, đi từ các dữ kiện tới cái chưa biết. Có thể là sau nhiều lần thử, ta sẽ thành công, nhưng như vậy chỉ là may rủi.

2. Đối với những người nghiên cứu thông minh thì họ lại không làm như vậy. Họ không phải mất thì giờ để thử nhiều cách mà sẽ lí luận giật lùi.

Ta phải làm cái gì ? (*Đâu là ẩn ?*). Ta hãy hình dung rõ ràng tình hình cuối cùng mà ta muốn đi đến. Ta hãy tưởng tượng có trước mặt thùng lớn chứa 6 lít và thùng nhỏ không có nước, như ở hình 17, (*Ta xuất phát từ điều phải tìm và giả sử rằng điều phải tìm là đã tìm được*).



Hình 17

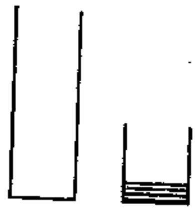


Hình 18

Ta có thể có được tình hình cuối cùng từ tình hình nào trước đó ? Páppuýt có nói : *tìm xem kết quả cuối cùng có thể có được từ kết quả nào trước đó ?* Ta có thể đổ đầy thùng lớn, tức là có 9 lít ; nhưng lại phải lấy ra đúng 3 lít : Muốn thế... trong thùng bé phải có sẵn một lít rồi. Đấy là một ý kiến! (hình 18) (chúng ta đã bước được một bước không phải dễ và không phải ai cũng làm ngay được điều đó. Và một khi biết được ý nghĩa của lí luận trên, ta có thể trông thấy được đường hướng của lời giải).

Nhưng làm thế nào để có được tình hình biểu thị bởi hình vẽ trên đây ? (*xem kết quả trước nữa*). Vì lượng nước là vô hạn nên tình hình ở hình trên quy về tình hình ở hình 19 ; hay hình 20.

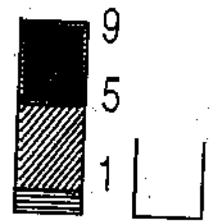
Rõ ràng là, nếu có được một trong các tình hình ở hình 18, 19, 20 thì sẽ có được hai tình hình kia, nhưng không dễ gì có được tình hình ở hình 20, trừ khi *chúng ta đã gặp nó*, đã thấy một cách tình cờ trong các lần thử trước. Bằng cách thí nghiệm nhiều lần, ta có thể được một trường hợp tương tự và nhớ lại rằng tình hình ở hình 20 có thể suy từ hình 21.



Hình 19

Hình 20

Bằng cách đổ đầy thùng lớn, rồi từ thùng lớn đổ ra thùng bé hai lần, cuối cùng ta tìm được kết quả mong muốn. Như vậy, nhờ phương pháp phân tích, nhờ *lí luận giật lùi* ta đã tìm được các cách làm thích hợp.



Hình 21

Bây giờ, ta chỉ cần đảo lộn quá trình bằng cách *xuất phát từ điểm cuối cùng đạt được trong phép phân tích* : thực hiện tình hình ở hình 21, rồi chuyển sang hình 20, 19, 18, 17 : *bằng cách đi lộn lại, cuối cùng ta tìm được điều phải tìm*,

3. Người Hi Lạp cho rằng chính Platôn đã phát minh ra phương pháp phân tích. Điều đó chưa chắc đã hoàn toàn đúng, nhưng dầu cho Platôn không phải là người sáng tạo ra đầu tiên, người ta cũng thấy cần thiết phải quy nó cho nhà triết học nổi tiếng này.

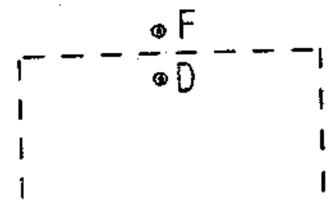
Rõ ràng là trong phương pháp phân tích có một cái gì khá sâu sắc. Khi bắt buộc phải đi quanh co, phải đi xa ra khỏi đích, để rồi trở lộn lại, không được đi theo con đường dẫn trực tiếp đến mục đích, điều đó gây ra một số khó khăn về mặt tư tưởng. Để khám phá ra trình tự các bước thích hợp, ta phải theo một trật tự hoàn toàn trái ngược với trình tự thực tế, điều đó nếu ta không trình bày cẩn thận thì có thể gây một số phản ứng về mặt tâm lí và ngăn trở một học sinh thông minh hiểu được phương pháp.

Tuy nhiên, không cần phải có biệt tài mới giải được một bài toán cụ thể bằng cách đi giật lùi, chỉ cần tập trung suy nghĩ vào mục đích, hình dung kết quả cuối cùng, có thể đạt kết quả đó từ kết quả nào trước nó ? Tự đặt câu hỏi đó cũng là một điều tự nhiên và như vậy là đã đi giật lùi. Những bài toán từ thời cổ sơ cũng có thể dẫn đến động tác đó (xem mục pápquýt, điểm 4).

Đó là một phương pháp thuộc về lương tri thông thường mà ai cũng có thể hiểu được và chắc chắn là nó đã được các nhà toán học trước Platôn sử dụng đến. Điều mà người ta có thể xem là một kì công xứng đáng với thiên tài của Platôn đó là đã phát biểu phương pháp một cách tổng quát, đã trình bày nó thành một thao tác điển hình để giải các bài toán thuần tuý toán học cũng như các bài toán thường ngày.

4. Bây giờ ta xét một thí nghiệm về tâm lí nếu độc giả có thể tha thứ cho cách chuyển tiếp khá thô bạo từ Platôn sang gà, chó và khỉ.

Một hàng rào chắn song giới hạn ba cạnh của một hình chữ nhật, còn cạnh thứ tư thì để trống (hình 22).



Hình 22

Đặt một con chó ở một phía của hàng rào, tại D và một đĩa thức ăn ở bên kia hàng rào, tại F. Đối với con chó, bài toán này tương đối dễ. Đầu tiên, có lẽ nó cũng thử nhảy thẳng qua, nhưng không được, nên nó chạy quanh ngay ra phía sau và đến được đĩa thức ăn. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, chẳng hạn nếu các điểm D và F quá gần nhau thì lời giải không dễ như thế, còn chó có thể mất một số thì giờ để sủa, cào, nhảy lên hàng rào trước khi nảy ra "sáng kiến" là phải vòng quanh.

Nghiên cứu hành động của các súc vật khác trong tình hình này cũng là một điều lí thú. Đối với con khỉ thì bài toán rất dễ dàng (cũng như đối với một em bé lên bốn : đối với em bé thì dùng một đồ chơi có lẽ công hiệu hơn một đĩa thức ăn). Nhưng đặc biệt, đối với một con gà thì bài toán trở nên khó lạ lùng và nó sẽ chạy lung tung bên trong hàng rào và có thể mất một thời gian rất lâu để đạt được thức ăn, nếu may mà đạt được. Dù sao thì cũng là sau khi đã chạy nhiều và nếu có thành công thì cũng chỉ là tình cờ mà thôi.

5. Ta không thể xây dựng một lí thuyết tổng quát từ một thí nghiệm duy nhất và đơn giản như trên. Nhưng kể cũng không có hại gì nếu từ đó ta suy ra một số điều tương tự rõ rệt với điều kiện là ta phải sẵn sàng thẩm tra và đánh giá các kết quả đó.

Đi vòng quanh một chướng ngại, đó là điều mà chúng ta thường làm khi phải giải bất cứ bài toán nào như vậy, thí nghiệm trên đây có một giá trị có thể nói là tương tự. Ở đây, con gà cũng giống như những người giải bài toán bằng mò mẫm, sau nhiều lần thử liên tiếp và nếu thành công thì cũng do may rủi và không hiểu được nguyên nhân của sự thành công đó. Con chó cào cấu, nhảy, sủa trước khi đi vòng đã giải bài toán của nó như chúng ta đã làm với bài toán về hai thùng chứa nước. Tưởng tượng hai thùng có chia độ chỉ rõ mực nước trong các thùng đó, cũng giống như cào đất một cách vô ích ; điều đó chỉ kích thích chúng ta tiếp tục nghiên cứu. Chúng ta cũng vậy, trước tiên bao giờ cũng tìm cách đi thẳng đến đích và sau đó thì mới có ý nghĩ đi vòng quanh. Con chó sau khi quan sát tình hình một cách nhanh chóng đã đi vòng quanh hàng rào, điều đó cho ta có cảm giác, đúng hay là sai, rằng nó có một trực giác "cao cấp".

Cũng không nên trách con gà là ngu xuẩn. Vì thực ra thì cũng không dễ gì quay lại, đi xa ra khỏi đích, tiến bước mà không dán mắt vào mục đích mong muốn. Giữa những sự khó khăn của con gà và của chúng ta có một sự tương tự rõ rệt.

Nếu anh không giải được bài toán hiện có thì cũng đừng quá buồn phiền ; hãy đi tìm một kết quả dễ hơn, bằng cách *trước hết thử giải một bài toán giống với bài toán của anh*.

Thành công đó có thể động viên anh và khiến anh có can đảm tấn công vào bài toán ban đầu. Đừng quên rằng, cái ưu việt của con người là chỗ biết tránh chướng ngại vật mà mình không thể trực tiếp vượt qua được và có thể nghĩ ra một bài toán phụ thích hợp trong trường hợp bài toán ban đầu có vẻ không giải được.

Anh có thể nghĩ ra một bài toán giống với bài toán của anh nhưng dễ làm hơn không ? Bây giờ, cần phải *nghĩ ra* một bài toán như vậy chứ không phải chỉ là nhớ lại một bài toán đã làm như khi tự đặt câu hỏi : "*Anh có biết bài toán nào giống nó không ?*".

Những câu hỏi khác của bảng trong phần đầu của mục này đều có một mục đích chung : sự biến đổi bài toán. Có nhiều cách để đạt mục đích này như sự tổng quát hoá, sự cá biệt hoá, sự tương tự và những cách khác trong sự phân tích và thành lập những tổ hợp mới.

Nghịch lí của người phát minh

Một kế hoạch phức tạp hơn có thể có nhiều triển vọng thực hiện hơn.

Điều phát biểu đó có vẻ ngược đời. Tuy nhiên, khi ta chuyển từ một bài toán này sang một bài toán khác thì nhiều khi ta nhận thấy rằng, bài toán mới tuy đưa lại nhiều hiệu quả hơn bài toán cũ nhưng lại dễ giải hơn. Có thể một lúc trả lời nhiều câu hỏi lại dễ dàng hơn là chỉ trả lời có một câu hỏi duy nhất, chứng minh một định lí tổng quát hay giải một bài toán tổng quát lại dễ dàng hơn.

Nghịch lí này sẽ biến mất nếu ta xét kĩ một số ví dụ (*Tổng quát hoá*, điểm 2. *Phép quy nạp và quy nạp toán học*, điểm 7). Nhưng bài toán đưa lại nhiều hiệu quả hơn có thể có nhiều triển vọng giải quyết hơn, với điều kiện là nó phải được căn cứ không phải trên óc tự phụ và những điều khảo sát nông nổi mà trên sự hiểu biết sâu sắc về bản chất của vấn đề.

Người đọc sách thông minh

Khi đọc sách toán, có điều mong muốn :

Thứ nhất là xác định được bước chứng minh đang đọc là đúng.

Thứ hai là hiểu rõ được mục đích của bước đó.

Người nghe thông minh khi nghe giảng toán cũng có những mong muốn như vậy.

Nếu anh ta không tin rằng bước chứng minh đó là đúng, thậm chí còn nghi ngờ nữa, anh ta có thể phản đối và nêu ra một câu hỏi. Nhưng nếu anh ta không hiểu lí do và mục đích của bước chứng minh đó thì anh ta cũng không thể phát biểu câu phản đối. Trong trường hợp này, anh ta không phản đối mà chỉ hoang mang, buồn bực và mất hết dòng suy nghĩ.

Một ông thầy hay một tác giả thông minh phải có ý thức về hai điểm đó. Tất nhiên, cần phải viết và nói đúng, nhưng như thế chưa đủ. Một sự suy luận trình bày đúng trong sách hay trên bảng vẫn có thể khó hiểu và chẳng có bổ ích gì, nếu không nêu được mục đích của các giai đoạn nối tiếp, nếu như người đọc và người nghe không thể hiểu tác giả làm cách nào để có được sự chứng minh như vậy, nếu như sự trình bày không gợi cho anh ta tự tìm được một chứng minh tương tự.

Những câu hỏi và lời khuyên trong bảng của chúng tôi có thể giúp tác giả và thầy giáo nhấn mạnh mục đích và lí do sự lập luận. Về mặt này, một câu hỏi rất có ích là : *Anh đã dùng hết mọi dữ kiện hay chưa ?* Ta có thể tìm thấy trong câu hỏi này cái lí do để xét tới một dữ kiện chưa dùng đến.

Người đọc và người nghe cũng có thể dùng những câu hỏi đó để hiểu được tại sao tác giả hay thầy giáo lại đặc biệt xét tới một yếu tố này khác ; anh ta có thể cảm thấy rằng nếu đặt được câu hỏi này thì có thể tìm thấy các bước đó trong chứng minh.

Người giải toán thông thạo

Thường đặt ra những câu hỏi tương tự như trong bảng của chúng tôi, có thể là anh ta tự mình đi tới những câu hỏi loại đó cũng có thể là nghe được một câu hỏi như vậy của một người nào đó và anh ta đã tự mình khám phá ra là phải dùng nó như thế nào để giải các bài toán.

Có thể là chính anh ta cũng không có ý thức là mình đã luôn luôn nhắc đi nhắc lại câu hỏi ấy. Có thể anh ta đặc biệt yêu thích một câu hỏi nào đó ; anh ta biết rằng câu hỏi đó là một phần nhỏ của sự lập luận đúng trong một giai đoạn nhất định và anh ta biết rằng cách đề cập vấn đề của mình là đúng đắn vì đã đề xuất được câu hỏi đúng.

Đối với một người giải toán thông thạo, những câu hỏi và lời khuyên trong bảng của chúng tôi cũng rất có ích. Anh ta có thể hiểu kĩ những sự giải thích và những ví dụ minh hoạ, có thể đoán được cách sử dụng đúng những câu hỏi đó. Nhưng anh ta chỉ có thể hiểu một cách đầy đủ một khi đã tìm thấy được trong công việc của mình cái phương pháp mà câu hỏi cố gợi ra cho anh ta. Và tự mình thử dùng cách đặt câu hỏi để thấy được lợi ích của nó, anh ta sẽ học được cách áp dụng đúng câu hỏi đó.

Người giải toán thông thạo phải luôn sẵn sàng đặt ra tất cả những câu hỏi của bảng, nhưng không nên đặt ra một câu hỏi nào chưa cần thiết.

Thực vậy, anh ta chỉ quyết định dùng khi trường hợp đang xét giống với một trường hợp mà anh ta đã áp dụng cũng câu hỏi này một cách có kết quả.

Trước hết, anh ta phải cố gắng hiểu bài toán một cách rõ ràng và đầy đủ tới mức có thể ; nhưng như vậy chưa đủ. Anh ta cần tập trung mọi chú ý vào bài toán, tha thiết mong muốn giải được nó.

Nếu anh ta không có mong muốn thực sự giải bài toán, tốt hơn là nên thôi đi. Bí quyết của thắng lợi chân chính, không có gì bí ẩn cả, chỉ là sự dốc toàn tâm toàn ý vào việc giải bài toán đặt ra.

Nhà toán học tương lai

Phải nhanh trí trong khi giải các bài toán, nhưng như vậy chưa đủ. Còn cần phải biết giải các bài toán quan trọng khi cần thiết. Vì vậy, trước hết cần phải phát hiện xem mình có khiếu đối với những loại bài toán nào.

Phần việc quan trọng đối với anh ta là xem lại cách giải đã tìm ra. Bằng cách phân tích quá trình công việc của mình và cách giải trọn vẹn, anh ta có thể tìm được nhiều điều bổ ích cho việc nghiên cứu. Có thể là anh ta suy nghĩ về chỗ khó của bài toán và về cái ý chủ đạo của nó. Có thể anh ta cố gắng vạch rõ cái gì đã gây trở ngại và cái gì cuối cùng đã giúp anh ta. Có thể là anh ta chú ý tới những ý trực giác, *có thể thấy được kết quả ngay từ phút đầu không ?* Anh ta có thể áp dụng nhiều phương pháp khác nhau : *có thể đi tới kết quả một cách khác không ?* Có thể là anh ta cố hiểu bài toán của mình một cách sâu sắc hơn bằng cách so sánh với các bài toán đã giải trước đây.

Anh ta có thể thử đề ra những bài toán mới có thể giải được dựa trên cơ sở công việc vừa hoàn thành : *kết quả của bài toán hay phương pháp giải của nó có thể dùng cho một bài toán khác không ?* Lĩnh hội một cách đầy đủ bài toán vừa giải xong, anh ta đã thu được những kiến thức rất có hệ thống trong đầu, sẵn sàng để đem ứng dụng. Nhà toán học tương lai cũng như mọi người tự học bằng cách thực hành và bắt chước.

Anh ta phải tìm một điển hình để bắt chước, quan sát ông thầy vẫn cổ vũ mình, đọ sức với các bạn có khả năng. Sau đó và có lẽ là điều quan trọng nhất, anh ta sẽ đọc không phải chỉ những sách giáo khoa thông thường mà còn đọc các tác giả tên tuổi cho tới khi tìm được một quyển sách thích hợp, tự nhiên thấy cần bắt chước. Anh ta vui thích và sẽ tìm cái gì đối với anh ta là đơn giản, bổ ích hay là đẹp. Anh ta cần giải những bài toán, chọn những bài hợp với khả năng của mình, suy nghĩ về cách giải của chúng và đề ra những bài toán mới. Bằng con đường đó và những cách khác, anh ta phải khám phá ra điều quan trọng đầu tiên là phải biết được mình thích cái gì, không thích cái gì, biết được sở trường và những thích thú riêng của mình.

Những câu tục ngữ sáng suốt

Việc giải các bài toán là một phần không thể tách ra được khỏi hoạt động của con người. Thật vậy, phần lớn sự suy nghĩ của chúng ta đều có liên quan đến việc giải các bài toán. Khi ta không mơ mộng hoặc nghĩ vẩn vơ thì bao giờ ý nghĩ của ta cũng hướng về một mục đích nhất định ; chúng ta tìm các phương tiện để đạt mục đích đó, để giải một bài toán.

Có người thành công nhiều, có người thành công ít trong việc giải các bài toán đặt ra cho họ. Chúng ta nhận thấy sự khác nhau đó, chúng ta đã tranh cãi, bình luận và hình như có một số câu tục ngữ còn ghi lại bản chất của những điều nhận xét đó. Dù sao thì cũng có nhiều tục ngữ đã nêu bật được quá trình suy luận để giải một bài toán, những điều nhận xét thuộc lương tri bình thường, những "thủ thuật" và những điều sai lầm điển hình. Trong các câu tục ngữ đó ta nhận thấy nhiều nhận xét sâu sắc, nhiều khi tinh vi, nhưng không được trình bày một cách có hệ thống, khoa học, do đó nhiều khi tối nghĩa và chứa đựng mâu thuẫn. Nhiều câu tục ngữ có thể đối lập với một câu tục ngữ dẫn tới nhiều cách giải thích. Thật là buồn cười nếu nghĩ rằng các tục ngữ là một nguồn chân lí vạn năng, nhưng nếu không nhận thấy rằng các tục ngữ mô tả được các phương pháp nghiên cứu một cách cụ thể trực quan thì đó cũng là một điều thiếu sót lớn.

Nếu thu thập được các tục ngữ có liên quan đến việc phác hoạ một đề án (chương trình), tìm các phương tiện, chọn cách tốt nhất, tóm lại tất cả những tục ngữ nói về cách giải một bài toán thì thiết nghĩ đó cũng là một điều bổ ích. Ở đây, chúng tôi không có điều kiện để làm tốt việc đó, chúng tôi chỉ xin dẫn ra một vài câu để minh hoạ cho các giai đoạn chính của việc giải một bài toán đã nhấn mạnh trong bảng, mà chúng tôi đã nhiều lần nhắc đi nhắc lại, cụ thể ở các mục từ 6 đến 14. Những tục ngữ dẫn ra được in bằng chữ nghiêng.

1. Điều cần thiết trước tiên là phải hiểu bài toán.

Hiểu sai thì trả lời sai. Ta phải thấy rõ mục đích.

Trước khi bắt đầu, phải nghĩ đến kết quả cuối cùng.

Đó là một lời khuyên ; người La Tinh nói là : "respince finem". Rủi thay, lời khuyên đó không phải bao giờ cũng được để ý đến và nhiều khi chúng ta suy nghĩ, nói năng, thậm chí hành động lung tung, bậy bạ mà không hiểu rõ là kết quả sẽ đi đến đâu.

Phải suy nghĩ trước khi làm, uốn lưỡi bảy lần trước khi nói.

Nhưng chỉ hiểu bài toán cũng chưa đủ, mà còn phải có ý chí giải quyết nó. Nếu ta không có một ý chí sắt đá đó thì chắc chắn là ta không thể làm được việc đó ; nhưng nếu ta có ý chí đó thì nhất định có triển vọng. *Có chí thì nên.*

2. Xây dựng một đề án (chương trình, dàn bài), phác hoạ đại thể công việc mình sẽ làm, đó là điều cốt yếu để đạt được mục đích.

Thiên tài là một sự kiên nhẫn. *Có công mài sắt, có ngày nên kim. Kiến tha lâu đầy tổ.*

Nếu ta không thành công thì phải thử một phương pháp khác *tuỳ cơ ứng biến, thua keo này ta bày keo khác. Thuận gió bỏ buồm.* Làm hết sức mình.

Ngay từ đầu phải chuẩn bị tư tưởng là có thể thất bại và phải có sẵn sàng một phương pháp khác để dự trù.

3. Phải thực hiện đề án đúng lúc, tức là lúc nó đã *chín muồi*, không sớm quá. Người ta nói : *cẩn thận là mẹ để của thành công.* Nhưng mặt khác, cũng không nên quá dè dặt. *Sợ nguy hiểm thì đừng đi bể*, một câu tục ngữ phương tây đã nói thế.

Páppuýt (Pappus)

Một nhà toán học Hi Lạp nổi tiếng, có lẽ sống vào khoảng 300 năm trước công nguyên. Trong quyển 7 của năm "Tập toán" của ông, ông đã bàn đến một đề tài mà ông gọi là "α'ν∝λυόμενξ", ta có thể dịch là "nghệ thuật giải các bài toán". Phần dưới đây là cải biên một cách tự do của nguyên bản.

"Nghệ thuật giải toán" nói một cách vắn tắt là người ta tập hợp các nguyên lí dùng cho những người nào sau khi đã học xong tập "mở đầu", muốn tiến công vào các đề mục nghiên cứu toán học. Nó là công trình của ba người : Ơclit, tác giả tập "Nguyên lí", Apôlôniut và Aristốt. Nó dạy về các phương pháp phân tích và tổng hợp.

"Trong phép phân tích, xuất phát từ điều người ta hỏi, ta xem nó như đã được công nhận, rồi rút ra các hệ quả, rồi hệ quả của các hệ quả đó, đến khi nào đạt được một điểm mà ta có thể dùng làm xuất phát điểm cho một phép tổng hợp. Vì rằng phép phân tích ta thừa nhận rằng điều mà người ta đòi hỏi phải làm là đã làm xong, điều mà tìm là đã tìm được, điều phải chứng minh là đúng. Ta tìm xem muốn đạt được kết quả mong muốn thì phải đi từ kết quả nào trước đó, rồi muốn đạt được kết quả này thì phải đi từ kết quả nào trước nữa, ..., cho đến cuối cùng, ta tìm được một điều đã biết, hay đã được công nhận là đúng. Ta gọi quá trình đó là phép phân tích, hay lí luận giật lùi.

"Trong phép tổng hợp thì trái lại ta đảo ngược quá trình và xuất phát từ điểm đạt được cuối cùng trong phép phân tích, từ yếu tố đã biết hay đã được công nhận là đúng. Từ đó rút ra điều mà trong phép phân tích đã đi trước nó và cứ tiếp tục như thế cho đến khi đạt được kết quả đòi hỏi. Ta gọi quá trình đó là phép tổng hợp hay lí luận đi tới.

"Có hai loại phân tích, thứ nhất, phân tích các bài toán phải chứng minh, trong đó mục đích là thiết lập các định lí ; thứ nhì là phân tích các bài toán về tìm tòi, trong đó mục đích là tìm ẩn".

"Trong một bài toán chứng minh ta phải xác nhận hoặc phủ nhận một định lí A đã phát biểu rõ ràng. Ta chưa biết là A đúng hay sai ; nhưng từ A ta rút ra một định lí B khác, rồi từ B rút ra C, ... cho đến khi ta rơi vào một định lí cuối cùng L đã biết. Nếu L là đúng thì A cũng đúng với điều kiện là mọi kết quả trên kia đều có thể đảo ngược được. Từ L ta chứng minh K (trong phép phân tích đã đi trước L) rồi cứ từng bước một, cuối cùng ta chứng minh B từ C, rồi A từ B. Ngược lại, nếu L là sai thì A cũng sai nốt".

"Trong một bài toán về tìm tòi, ta phải tìm một ẩn số x thoả mãn một điều kiện đã phát biểu rõ ràng. Ta chưa biết điều kiện đó có được thoả mãn hay không, nhưng cứ công nhận là có một ẩn số x thoả mãn điều kiện đó, rồi rút ra một ẩn số y khác phải thoả mãn một điều kiện tương ứng, xong rồi ta liên hệ y với một ẩn số khác nữa, cho đến cuối cùng ta đi đến một ẩn số z mà ta có thể xác định được giá trị bằng một phương pháp đặc biệt. Nếu quả thật có một giá trị z thoả mãn điều kiện đã đặt ra thì có một ẩn số x thoả mãn điều kiện ban đầu, với giả thiết là mọi điều suy diễn nói trên đều đảo ngược được".

"Thoạt tiên, ta tìm được z, rồi biết z tìm ẩn số trước nó trong phép phân tích ; cứ tiếp tục như thế, cuối cùng ta đi đến y, rồi rút ra x và như vậy là đạt được mục đích. Nếu ngược lại, điều kiện đặt ra cho z không được thoả mãn, thì bài toán đối với x cũng không giải được".

Xin nhắc lại một lần nữa rằng tất cả điều trên đây không phải là dịch nguyên văn mà là cải biên của nguyên bản. Vì nguyên bản của Páppuýt rất quan trọng về nhiều phương diện nên ta cần bình luận về một số điểm khác nhau giữa nguyên bản và bản cải biên.

1. Trong bản cải biên, chúng tôi dùng một số danh từ chính xác hơn, có đưa vào các kí hiệu $A, B, ..., L, x, y, ..., z$ không có trong nguyên bản.

2. Trong bản cải biên, chúng tôi nói đến các "bài toán toán học", còn nguyên bản thì chỉ nói các "bài toán hình học". Điều đó, nêu lên rõ rằng các phương pháp của Páppuýt không hề bị giới hạn trong các bài toán hình học và cả trong các bài toán toán học. Chúng tôi sẽ minh hoạ điều đó bằng những ví dụ vì cần phải nhấn mạnh một điều là các phương pháp nói trên có một tính chất tổng quát và không phụ thuộc vào nội dung của vấn đề (xem mục 3).

3. *Ví dụ về đại số.* Tìm biến số x trong phương trình :

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

Đây là một bài toán "tìm ẩn số" không phải dễ đối với người mới học, mà quả thật nó đòi hỏi một khả năng vận dụng thành thạo phương pháp phân tích để có thể đi tới đích bằng cách dùng nhiều lần phép rút gọn.

Ngoài ra, nó còn đòi hỏi phải biết rõ một số các lớp phương trình đơn giản và phải có một ý nghĩ đúng hướng, một sự may mắn và sáng kiến thì mới nhận thấy rằng $4^x = (2x)^2$ và $4^{-x} = (2x)^{-2}$ và do đó có thể nên đưa vào một ẩn số mới.

$$y = 2^x$$

Mà quả thật, phép thế này rất lợi và phương trình tìm được theo y :

$$8(y^2 + \frac{1}{y^2}) - 54(y + \frac{1}{y}) + 101 = 0$$

tỏ ra đơn giản hơn phương trình ban đầu. Nhưng chưa phải là hết : nếu ta đi xa hơn nữa và có ý nghĩ đưa vào một biến số mới :

$$z = y + \frac{1}{y}$$

thì ta có :

$$8z^2 - 54z + 85 = 0$$

Phép phân tích chấm dứt ở đây, với giả thiết là đương sự biết giải các phương trình bậc hai.

Phép tổng hợp là gì ? Đó là việc thực hiện từng bước các phép tính mà nhờ phép phân tích ta có thể tiên đoán là có thể đưa đến kết quả.

Đương sự không cần có thêm những sáng kiến mới để kết thúc bài toán mà chỉ cần kiên nhẫn và chú ý để tính tất cả các ẩn số. Trình tự tính toán là ngược lại với trình tự sáng tạo, ta tìm đầu tiên z ($z = 5/2, 17/4$), rồi y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$) rồi cuối cùng x, biến số ban đầu ($x = 1, -1, 2, -2$). Phép tổng hợp nhắc lại từng bước phép phân tích và cũng dễ thấy trong ví dụ này tại sao phải làm như vậy.

4. *Ví dụ "Phi toán học"*. Một người cổ sơ muốn vượt qua một con suối, nhưng không qua được như thường ngày vì đêm qua có nước lũ. Vượt qua suối đã trở thành đầu đề của một bài toán. "Vượt qua suối", đó là ẩn x của bài toán. Người đó có thể nhớ lại là đã có lần vượt quá suối trên một thân cây đổ, anh ta tìm xung quanh thử xem có cây đổ nào không và cây đổ đó trở thành ẩn mới y, cây đổ không tìm được, nhưng bên cạnh suối có một khu rừng và anh ta muốn đẵn một cây. Có cách gì đẵn một cây để cho nó đổ ngang qua suối ? Đó là một tia sáng trong ý nghĩ đưa đến một ẩn mới : cần phải tác dụng vào cây đổ như thế nào để nó đổ đúng ngang qua suối ?

Nếu ta thừa nhận cách nói của Páppuýt thì ta phải gọi chuỗi ý nghĩ trên đây thuộc về phép phân tích. Nếu người cổ sơ thực hiện phép phân tích có kết quả thì anh ta có thể sáng chế ra một chiếc cầu hay một cái rìu. Còn phép tổng hợp thì sẽ thế nào ? Đó là chuyển biến ý nghĩ thành hành động mà hành động cuối cùng là đi qua suối nhờ cây đổ.

Cùng những yếu tố như nhau tạo thành phép phân tích và phép tổng hợp : trong trường hợp đầu là trí óc của con người làm việc, trong trường hợp sau là các bắp thịt ; phép phân tích gồm những ý nghĩ, phép tổng hợp gồm những hành động. Tuy nhiên, giữa chúng còn có sự phân biệt khác, đó là trình tự bị đảo lộn.

Vượt qua suối, đó là ý nghĩ chủ đạo từ đó phát xuất sự phân tích và cũng là hành động cuối cùng kết thúc phép tổng hợp.

5. Bản cải tiến gợi cho thấy có phần nào rõ ràng hơn nguyên bản về sự liên hệ tự nhiên giữa phép phân tích và phép tổng hợp. Phép phân tích đi đầu một cách tự nhiên, phép tổng hợp theo sau ; *phân tích là sáng tạo, là xây dựng kế hoạch, còn tổng hợp là thực hiện kế hoạch đó.*

6. Bản cải tiến không những giữ nguyên mà còn nhấn mạnh một số câu lí thú của nguyên bản : "ta thừa nhận rằng điều mà người ta đòi phải làm là đã làm xong, điều mà ta phải tìm là đã tìm được, điều phải chứng minh là đúng". Nghe ra có vẻ ngược đời, thừa nhận rằng bài toán phải giải là đã giải xong, đó chẳng phải là một điều kì quặc hay sao ? Lại thêm tối nghĩa nữa. Phải hiểu như thế nào ? Tuy nhiên, nếu ta nghiên cứu kĩ lưỡng và tìm cách vận dụng kinh nghiệm bản thân trong việc giải toán thì ý nghĩa của vấn đề có thể sáng tỏ được.

Trước hết, ta xét một "bài toán về tìm tòi". Gọi ẩn là x và các dữ kiện là a, b, c. Thừa nhận bài toán như đã giải rồi, tức là thừa nhận có một x nào đó thoả mãn điều kiện của bài toán ; nói cách khác giữa x và a, b, c có một hệ thức do giả thiết của bài toán quy định. Điều thừa nhận đấy chỉ là tạm thời (và kể ra thì cũng vô hại) và chỉ dùng để mở đầu phép phân tích mà thôi. Vì rằng nếu số x nói trên không có và nếu phép phân tích không đưa ta đến một cái gì cả thì cuối cùng nhất thiết nó sẽ đưa ta đến một bài toán không có lời giải : do đó, suy ra rằng bài toán ban đầu cũng không có lời giải. Như vậy là điều giả thiết của chúng ta là có ích lợi. Để khảo sát điều kiện của bài toán, ta phải quan niệm rõ hoặc hình dung bằng hình học những tương quan quy định bởi giả thiết x và a, b, c. Làm thế nào để quan niệm được điều đó nếu không giả thiết là x tồn tại thực sự ? Cuối cùng, giả thiết cũng rất tự nhiên. Người cổ sơ mà các ý nghĩ và hành động đã được bàn đến trên kia (điểm 4) đã tưởng tượng mình vượt qua suối trên một cây đổ ; trước khi có thể thực hiện được điều đó, anh ta đã xem bài toán như "đã giải được".

Mục đích của một "bài toán chứng minh" là chứng minh một định lí A nào đó. Ý kiến "thừa nhận A là đúng rồi" chỉ là để cho phép rút ra những hệ quả từ định lí đó, mặc dù định lí này chưa được chứng minh. Nếu vì một lối suy nghĩ hay triết lí riêng của mình mà không chịu làm điều đó thì sẽ không bao giờ bắt đầu được một phép phân tích nào.

So sánh với mục *"hình vẽ"*, điểm 2.

7. Trong bản cải tiến, ta nhắc lại hai lần câu "với điều kiện là tất cả các điều suy diễn đều đảo ngược được". Đó là một điểm mới thêm vào : nguyên bản không nói gì đến điều đó và vì thế gần đây đã bị chỉ trích (xem mục "bài toán phụ", điểm 6 về khái niệm "phép rút gọn thuận nghịch").

8. Trong bản cải tiến, "phép phân tích các bài toán chứng minh" được giải thích với những danh từ khác hẳn trong nguyên bản, nhưng nội dung thì không có gì thay đổi, vả lại, chúng tôi cũng không hề ngụ ý làm điều đó. Còn về phép phân tích "các bài toán tìm tòi" thì trong bản cải tiến nó được giải thích cụ thể hơn là trong nguyên bản ; ở đây rõ ràng là tác giả muốn mô tả một phương pháp tổng quát hơn, xây dựng một chuỗi bài toán phụ tương đương, như chúng tôi đã giải thích trong mục "bài toán phụ", điểm 7.

9. Trong rất nhiều sách hình học sơ cấp, người ta có nêu lên một số nhận xét về phép phân tích, phép tổng hợp và về việc "giả sử bài toán đã giải xong". Tập quán đó, không nghi ngờ gì nữa đã có từ thời Páppuýt, tuy rằng không có một sách nào xác nhận rõ ràng điều đó. Vấn đề này cũng khá quan trọng để có thể đề cập đến ngay cả trong các giáo trình sơ cấp nhưng nhiều khi bị giải thích sai lầm.

Một điều lạ là người ta chỉ đả động đến nó trong các sách hình học, điều đó chứng tỏ một sự kém hiểu biết chung về phương pháp này (xem trên đây).

Nếu những điều bình luận trên đây có thể góp phần nâng cao được sự hiểu biết đó thì như vậy cũng giải thích được tại sao chúng tôi đã dành nhiều thì giờ để phát triển các ý kiến trên.

Trong mục "Lí luận giật lùi", độc giả sẽ tìm thấy một ví dụ, một quan điểm khác và những nhận xét thêm về vấn đề này.

Phản chứng và chứng minh gián tiếp

Đó là hai phương pháp khác nhau nhưng thuộc cùng loại. Muốn chứng minh bằng phản chứng một mệnh đề nào đó, thì ta tìm cách rút từ mệnh đề đó một điều rõ ràng là vô lí. Đó là một phương pháp toán học tương tự như lối trào phúng, giễu cợt trong văn chương. Nhà văn trào phúng có một quan điểm nào đó rồi cường điệu lên đến mức thành buồn cười.

Trong cách chứng minh gián tiếp, người ta thiết lập sự đúng đắn của một mệnh đề nào đó bằng cách chứng minh rằng mệnh đề ngược lại là sai. Cũng tương tự như muốn cổ động cho một ứng cử viên, người ta tìm cách đả kích địch thủ của ứng cử viên đó.

Phản chứng và chứng minh gián tiếp là những phương pháp có thể giúp cho người nghiên cứu đạt được kết quả. Trái lại, nhiều nhà triết học và học sinh có ác cảm với phương pháp đó và điều đó cũng không có gì là lạ : những người trào phúng và nhà cổ động khéo léo không thể thoả mãn mọi người được. Ta hay minh hoạ bằng ví dụ công hiệu của hai phương pháp trên rồi sau đó ta sẽ bàn đến các ý kiến của những người đối lập.

1. *Chứng minh bằng phản chứng.* Viết một dãy các số sao cho tổng của chúng bằng 100 và khi viết mỗi chữ số từ 0 đến 9 chỉ được trùng có một lần thôi.

Đầu đề ở đây cũng cần giải thích.

Đâu là ẩn ? Một dãy những số, ở đây ta phải hiểu là số nguyên thông thường.

Đâu là dữ kiện ? Số 100.

Đâu là điều kiện ? Có hai phần. Trước hết, muốn viết dãy số phải dùng các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 và mỗi chữ số chỉ dùng một lần. Sau nữa, tổng các số đó phải bằng 100.

Chỉ giữ lại một phần điều kiện, bỏ qua phần kia. Ta xét dãy số 19, 28, 37, 46, 50. Mỗi chữ số chỉ xuất hiện có một lần. Nhưng dĩ nhiên, điều kiện sau không được thoả mãn, vì tổng các số đó là 180 chứ không phải 100. Nhưng ta có thể làm tốt hơn. "Thua keo này bày keo khác".

Chẳng hạn : $19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99$.

Điều kiện đầu cũng lại được thoả mãn, điều kiện sau thì suýt được thoả mãn vì ta có 99. Ta cũng có thể thoả mãn dễ dàng điều kiện sau nếu bỏ qua điều kiện đầu :

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100$$

Ở đây, chữ số 1 xuất hiện hai lần, còn chữ số 0 thì lại không xuất hiện. "Thua keo này...".

Sau nhiều lần thử lại vô hiệu, ta có thể ngờ rằng không thể có được số 100 bằng cách đó. Bài toán đặt ra bây giờ là :

Chứng minh rằng không thể đồng thời thoả mãn hai điều kiện đã nêu trên.

Ngay những học sinh giỏi cũng có thể cho bài toán này khó quá. Tuy nhiên, nếu tiến hành đúng hướng thì lời giải cũng khá đơn giản. Muốn vậy chỉ việc xét thêm những trường hợp trong đó cả *hai điều kiện đều được thoả mãn*, mặc dù ta đã có sự ngờ vực trên kia. Ta hãy tưởng tượng một dãy số mà tổng bằng 100. Mỗi số trong dãy gồm nhiều nhất là một chữ số có nghĩa hay hai chữ số có nghĩa. Có tất cả mười chữ số và các chữ số đó phải khác nhau. Nhưng tổng của mười chữ số chỉ là 45, vậy trong các chữ số đó phải có những chữ số có hai chữ số. Gọi tổng các chữ số đó là t. Ta có ngay :

$$10t + (45 - t) = 100$$

Do đó :

$$t = \frac{55}{9}$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết. Như vậy, nếu xuất phát từ hai điều kiện trên thì ta đi đến mâu thuẫn. Điều mâu thuẫn này chỉ có thể giải thích là do giả thiết ban đầu đã sai lầm và cả hai điều kiện không thể đồng thời được thoả mãn.

Lí luận trên đây là điển hình của chứng minh bằng phản chứng.

2. *Chú thích* : Ta trở lại lí luận trên và tìm cách hiểu các nét lớn của lí luận.

Ta muốn chứng tỏ rằng không thể thoả mãn đồng thời những điều kiện nào đó. Chỉ bằng cách khảo sát các điều kiện của giả thiết ta mới có thể tìm thấy yếu điểm của nó. Và ta phải xác định chỗ yếu điểm đó thì mới chứng minh được điều mong muốn. Như vậy, ta thấy rõ ràng phương pháp mà ta đã sử dụng vừa rồi có một tầm quan trọng phổ biến : Phải xét trường hợp trong đó mọi điều kiện đều được thoả mãn, tuy rằng trường hợp đó có vẻ vô lí.

Một bạn đọc có kinh nghiệm có thể phát hiện thêm ở đây một điều nữa. Điểm mấu chốt trong phương pháp của chúng ta là thiết lập phương trình theo t. Nhưng ta cũng có thể đi đến phương trình đó mà không hề nghi ngờ gì về điều kiện đặt ra. Muốn thiết lập một phương trình, ta phải phát biểu theo ngôn ngữ toán học rằng mọi điều kiện đều được thoả mãn, *mặc dù chưa biết rõ như vậy là có đúng sự thật hay không.*

Phương pháp dùng không phụ thuộc vào hi vọng của chúng ta. Ta hi vọng hoặc là tìm ra được ẩn thoả mãn điều kiện của bài toán hoặc là chứng minh rằng không thể thoả mãn được các điều kiện đặt ra.

Điều đó không quan trọng : Việc nghiên cứu trong cả hai trường hợp đều được thoả mãn và chỉ đến lúc kết thúc thì mới biết được hi vọng nào là đúng đắn.

So sánh với mục *"Hình vẽ"* và mục *"Páppuýt"*. Mọi phép phân tích kết thúc bằng sự phủ định định lí nêu ra, hoặc đi đến kết luận rằng "bài toán tìm ẩn" không có nghiệm, thực chất đều là phản chứng.

3. *Chứng minh gián tiếp*. Các số nguyên tố là : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, ..., mỗi số này không thể phân tích thành những thừa số bé hơn nó và lớn hơn 1 (điều kiện sau này loại số 1 ra vì có một bản chất khác nên số 1 không được xem là số nguyên tố). Các số nguyên tố là những số "đầu tiên" và mọi số nguyên (lớn hơn 1) đều có thể phân tích thành thừa số nguyên tố được.

Chẳng hạn :

$$630 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7$$

Có vô số nguyên tố hay không ? Khẳng định điều đó có lẽ cũng là một điều tự nhiên. Nếu dãy số nguyên tố là hữu hạn thì tất cả các số tự nhiên đều có thể phân tích thành một số hữu hạn phần tử "đầu tiên" và như vậy thì vũ trụ hoá ra "nghèo nàn" quá. Do đó, vấn đề đặt ra là chứng minh có vô số số nguyên tố.

Bài toán này khác rất nhiều các bài toán sơ cấp mà ta thường gặp và thoạt nhìn, có thể tưởng là rất khó. Tuy nhiên, như ta vừa nói, hình như cũng khó lòng mà có được một số nguyên tố cuối cùng, P chẳng hạn. Tại sao ?

Ta giả sử có một số nguyên tố P cuối cùng. Khi đó ta có thể viết ra toàn bộ dãy số nguyên tố : 2, 3, 5, 7, 11, ..., P. Vì sao giả thiết này có vẻ vô lí ? Có gì sai ? Có vì ta có thể lập ra số :

$$Q = (2 . 3 . 5 . 7 . 11 . ... P) + 1$$

Số Q này lớn hơn P nên theo giả thiết không phải là số nguyên tố. Vậy Q phải chia hết cho một số nguyên tố. Nhưng tất cả các số nguyên tố mà ta có lại chính là các số 1, 2, 3, 5, ..., P. Mà chia cho bất cứ số nào trong các số này thì ta cũng có số dư là 1 ; vậy Q không chia hết cho số nào cả. Ta gặp một điều sai lầm rõ ràng ; Q phải hoặc là một số nguyên tố, hoặc phải chia hết cho một số nguyên tố. Xuất phát từ giả thiết có một số nguyên tố cuối cùng P, ta đi đến một điều vô lí. Giải thích thế nào ? Chính là vì giả thiết đầu tiên của ta sai : không có số nguyên tố P cuối cùng. Như vậy, ta đã chứng minh được là có vô số số nguyên tố.

Cách chứng minh trên đây thuộc loại gián tiếp (đó cũng là một cách chứng minh nổi tiếng của chính Ơclit (xem Mệnh đề 20, quyển IX, tập Nguyên lí).

Chúng ta đã chứng minh định lí bằng cách phủ định định lí ngược lại. Như vậy, chúng ta đã phối hợp cách chứng minh gián tiếp và cách chứng minh bằng phản chứng.

4. *Phản đối*. Các phương pháp mà ta vừa trình bày trên đây đã vấp phải nhiều sự phản đối đáng kể ; tất cả các ý kiến phản đối đều là biến tướng của một ý kiến cơ bản. Chúng tôi trình bày ở đây một dạng thường gặp của ý kiến phản đối đó.

Tìm được một cách chứng minh đã là một thành công lớn của trí óc, nhưng hiểu nó tường tận còn đòi hỏi một sự cố gắng nào đó. Lẽ tự nhiên, do sự cố gắng đó đưa đến một lợi ích thiết thực, nghĩa là muốn rằng những điều lưu lại trong trí nhớ của chúng ta là những cái đúng, chứ không phải những cái sai hay vô lí.

Nhưng có lẽ cũng khó mà rút ra một điều đúng khi dùng cách phản chứng. Nội dung phương pháp này là xuất phát từ một giả thiết sai rồi rút ra những hệ quả lôgic nhưng cũng sai nốt, với một cái sai ngày càng hiển nhiên để cuối cùng đi đến một giả thiết hiển nhiên là sai. Để khỏi bận trí vì một loạt những điều sai lầm, thì cuối cùng ta nên quên tất cả, quên càng nhanh càng tốt, mà điều đó không phải dễ vì trong quá trình chứng minh ta đã phải nhớ tường tận từng chi tiết mới.

Bây giờ, ta phát triển vắn tắt câu phản đối thông thường đối với cách chứng minh gián tiếp : "Khi chú ý nghe một cách chứng minh như vậy, ta phải luôn luôn tập trung tư tưởng vào một giả thiết sai mà sau đó ta phải quên ngay, chứ không phải vào một định lí đúng mà ta phải nhớ".

Để đánh giá đúng đắn điều phản đối đó, ta phải phân biệt hai cách sử dụng phương pháp phản chứng : hoặc như một công cụ nghiên cứu, hoặc như một công cụ trình bày ; đối với cách chứng minh gián tiếp, ta cũng cần phân biệt như vậy.

Cũng phải công nhận rằng, phản chứng không phải là một phương pháp thật tốt để trình bày một cách giải, cách chứng minh đó có thể trở thành nặng nhọc cho người đọc hay người nghe. Mặc dù mọi lí luận đều đúng đắn, nhưng tất cả các tình hình nêu lên đều vô lí. Chỉ nói riêng cách diễn tả, nếu luôn luôn phải nhắc lại chỉ một điều, thì người nghe rất dễ chán ; những câu như "theo giả thiết", "như ta đã giả sử từ đầu"... phải được nhắc đi nhắc lại luôn. Một mặt ta phải quên các điều đã nêu ra, vì đó là vô lí, nhưng mặt khác ta phải nhớ các điều đó vì chúng là cơ sở của lí luận tiếp theo và điều mâu thuẫn bên trong đó cuối cùng có thể trở thành rất khó chịu.

Nhưng dù sao thì ta cũng không thể không dùng đến cách phản chứng làm một công cụ nghiên cứu. Ngay trong các ví dụ trên, ta cũng đã thấy rằng với nó ta đã đạt được một kết quả mà tất cả các phương pháp khác đều bó tay.

Tóm lại, đối với các nhà toán học có kinh nghiệm thì không có mâu thuẫn cơ bản giữa hai cách chứng minh. Kinh nghiệm cho biết rằng thông thường cũng dễ biến một cách chứng minh gián tiếp thành chứng minh trực tiếp, hay trình bày một điều phản chứng dưới một dạng nhẹ nhàng hơn, trong đó cách phản chứng có thể hoàn toàn biến mất. Nói một cách vắn tắt, nếu ta muốn khai thác các khả năng của mình đến mức tối đa, thì ta phải làm quen với cách phản chứng cũng như cách chứng minh gián tiếp. Tuy nhiên, một khi đã đạt kết quả bằng cách này hay cách khác, bao giờ ta cũng nên xét lại lời giải và tự hỏi : "*Có cách nào khác để tìm kết quả này không ?*".

Ta hãy xét một ví dụ :

5. *Trình bày phương pháp phản chứng một cách khác.* Ta trở lại lí luận ở điểm 1. Phương pháp phản chứng xuất phát từ một tình hình mà cuối cùng phải chỉ ra là vô lí. Tuy nhiên, ta cứ lấy phần của lí luận độc lập đối với giả thiết sai ban đầu và có chứa những tiên đề đúng. Trở lại bài toán trên kia, ta có thể nhận thấy một yếu tố quan trọng mà yếu tố này chắc chắn là đúng : nếu một dãy những số gồm một hay hai chữ số được viết thế nào để mỗi chữ số chỉ xuất hiện một lần thì tổng các số đó phải có dạng :

$$10t + (45 - t) = 9(t + 5)$$

Vậy tổng đó phải chia hết cho 9. Nhưng bài toán buộc tổng đó phải là 100. Điều đó có thể được không ? Không, vì 100 không chia hết cho 9.

Như vậy, cái phương pháp phản chứng đã dẫn ta đến lập luận vừa rồi, bây giờ đã biến mất hoàn toàn trong cách trình bày mới của chứng minh.

... Nhân tiện, ta để ý rằng chỉ cần biết tính chất chỉ đúng cho 9 để có thể nhìn thấy ngay toàn bộ lí luận.

6. *Biến đổi cách chứng minh gián tiếp.* Ta trở lại lí luận ở điểm 3. Ở đấy ta có thể thấy được một loạt những lập luận độc lập đối với bất cứ giả thiết sai nào ; tuy nhiên, để được tốt hơn, ta sẽ khảo sát lại ý nghĩa của bản thân bài toán ban đầu.

Khi ta khẳng định là có vô số nguyên tố thì điều đó có ý nghĩa gì ? Rõ ràng là : dẫu dãy số nguyên tố kéo dài bao nhiêu chăng nữa, như 2, 3, 5, 7, 11, ..., P, trong đó P là số nguyên tố cuối cùng của dãy thì vẫn còn một số tự nhiên khác. Như vậy, làm thế nào để chứng minh rằng dãy số nguyên tố đó không bao giờ kết thúc ? Rõ ràng, bằng cách tìm ra một số nguyên tố khác mọi số của dãy và bài toán "chứng minh" bây giờ được đưa về một bài toán "tìm ẩn" : *"Biết các số nguyên tố 2, 3, 5, ..., P, tìm một số nguyên tố mới N khác tất cả các số nguyên tố đã cho".*

Phát biểu được bài toán ban đầu dưới dạng này, ta đã bước một bước quyết định. Và bây giờ ta cũng dễ thấy là phải làm thế nào để sử dụng các phần chủ yếu của lí luận trước để đạt được kết quả mới. Thật vậy, số :

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times ... \times P) + 1$$

rõ ràng chia hết cho một số nguyên tố. Ta hãy lấy N là một số nguyên tố bất kì và là ước của Q (chẳng hạn ước bé nhất). Dĩ nhiên, nếu Q là một số nguyên tố thì $N = Q$. Rõ ràng là nếu chia Q cho bất kì số nào trong các số 2, 3, 5, ..., P, thì có số dư là 1. Do đó, không có số nào trong dãy đó chia hết cho Q. Nhưng đó là điều ta cần chứng minh : N là một số nguyên tố, khác với mọi số nguyên tố thuộc dãy trên.

Cách chứng minh trên cho ta một phương pháp rõ ràng để kéo dài vô hạn dãy số nguyên tố. Phương pháp này không có gì là gián tiếp cả vì ở đây ta không cần xét đến những trường hợp không thể xảy ra. Nhưng thực ra, cách chứng minh này đồng nhất với cách chứng minh gián tiếp trên kia.

Phân biệt các phần của giả thiết

Trước hết phải hiểu bài toán. Khi đã hiểu bài toán một cách bao quát, ta đi vào chi tiết và phân biệt những phần khác nhau, ẩn số, dữ kiện, giả thiết và nghiên cứu lần lượt các phần này. Làm xong điều đó thì các yếu tố nói trên trở nên rõ ràng trong ý nghĩ, nhưng ta chưa có một ý kiến nào bổ ích. Khi đó ta phải đi sâu hơn nữa vào từng chi tiết và khảo sát bản thân mỗi dữ kiện một. Tóm lại, khi đã hiểu giả thiết một cách tổng quát, ta phải *phân biệt các phần của giả thiết* và khảo sát riêng rẽ mỗi phần đó.

Đến đây, ta thấy rõ tầm quan trọng của việc gợi ý, nhằm kích thích một động tác tinh thần để đưa đến một quan niệm rõ ràng về bài toán bằng cách đi sâu hơn nữa vào chi tiết. Xem mục : *Phân tích và tổ hợp lại bài toán.*

Phân biệt các phần khác nhau của giả thiết và cố gắng diễn tả chúng. Chúng ta thường có dịp tự đặt câu hỏi đó khi ta *đặt phương trình*.

Phân chia và tổ hợp lại bài toán

Đó là hai động tác quan trọng của trí óc.

Giả sử, bạn đang chú ý quan sát một đối tượng : một cái nhà mà bạn muốn thuê, một bức điện quan trọng nhưng lại tối nghĩa, một dụng cụ mà bạn muốn biết công dụng và cách sử dụng, hay một bài toán mà bạn muốn giải. Bạn xem đối tượng như một thể thống nhất, nhưng cảm giác đó có lẽ không được rõ ràng lắm. Một chi tiết nào đó đập vào mắt bạn làm bạn chú ý. Rồi bạn lại tập trung vào một chi tiết khác, rồi một chi tiết khác nữa. Rất nhiều các chi tiết hiện ra, tổ hợp lại với nhau và một lúc sau bạn cũng nhìn lại đối tượng như một thể thống nhất, nhưng bây giờ lại nhìn thấy nó một cách khác. Bạn đã phân chia cái toàn thể ra nhiều phần, rồi tổ hợp các phần đó lại thành một cái toàn thể ít nhiều có khác trước.

1. Nếu đi vào chi tiết thì có thể bị ngập vào đấy. Những chi tiết quá nhiều hay quá nhỏ mọn làm cản trở ý nghĩ, không cho tập trung đầy đủ vào điểm căn bản, thậm chí không cho nhìn thấy điểm căn bản. Đó là trường hợp của một người chỉ thấy cây mà không thấy rừng.

Ta không nên mất thì giờ vào những chi tiết không cần thiết và phải để dành thời gian vào điều căn bản. Cái khó ở đây là chưa thể nói trước chi tiết nào là có ích và chi tiết nào là phù phiếm.

Do đó, trước hết phải hiểu bài toán một cách tổng thể. Khi đã hiểu rõ thì ta dễ có điều kiện hơn để xét xem những điểm chi tiết nào là căn bản. Khi đã nghiên cứu các điểm này (có lẽ cũng chỉ là một số ít) thì ta lại càng có điều kiện hơn để xác định xem trong số những chi tiết còn lại, cái nào cần phải khảo sát chặt chẽ. Ta phải nghiên cứu thật sát và phân chia bài toán từng bước và chú ý không đi quá xa khi chưa cần thiết.

Lẽ dĩ nhiên ông thầy không thể đòi hỏi học sinh mình phải thông thạo về điểm này ; trái lại, có nhiều học sinh có thói quen khờ dại là đột kích ngay vào các chi tiết trước khi hiểu bài toán về toàn bộ.

2. Bây giờ ta xét những bài toán về tìm tòi. Khi bài toán đã được hiểu trên toàn bộ, khi ta đã tìm được mục đích, ý chủ đạo thì phải đi vào chi tiết. Bắt đầu từ đâu ?

Trong hầu hết các trường hợp, nên bắt đầu bằng cách khảo sát các yếu tố chính : ẩn số, các dữ kiện, điều kiện và nên bắt đầu bằng những câu hỏi : *đâu là ẩn số, đâu là dữ kiện, điều kiện gồm những gì ?*

Đi sâu vào chi tiết hơn, ta phải làm gì ? Thường thường ta nên xét bản thân mỗi dữ kiện, phân biệt các yếu tố khác nhau của điều kiện và khảo sát từng yếu tố một.

Đặc biệt, nếu bài toán khá khó khăn thì đôi khi cần thiết phải thực hiện xa hơn nữa việc phân chia và khảo sát các chi tiết nhỏ hơn nữa. Chẳng hạn, có thể cần thiết phải trở lại định nghĩa của một số danh từ, đưa vào và xét những yếu tố mới bao hàm trong định nghĩa.

3. Sau khi đã phân chia bài toán, ta cố gắng tổ hợp lại một cách khác các yếu tố của nó. Chẳng hạn, ta có thể tìm cách tạo nên một bài toán mới, dễ hơn mà trong trường hợp cần thiết, ta có thể dùng như một bài toán phụ.

Dĩ nhiên, ta có nhiều cách để tổ hợp lại một bài toán. Đặc biệt với các bài toán khó, ta có thể có những cách tổ hợp riêng biệt, độc đáo và ta có thể nhìn thấy khả năng của người giải toán qua các tổ hợp độc đáo của họ. Tuy nhiên, cũng có một số tổ hợp điển hình, thông dụng, tương đối đơn giản và cũng đủ dùng trong trường hợp các bài toán ít phức tạp. Những cách tổ hợp đó ta cần biết rõ và trước hết nên tìm cách sử dụng chúng đã, nếu không được hãy nhờ đến những phương tiện ít hiển nhiên hơn.

Sau đây, chúng tôi phân loại theo hình thức các cách tổ hợp thông dụng nhất. Muốn biến đổi bài toán đã cho thành một bài toán khác, ta có thể :

1) Giữ nguyên ẩn và thay đổi các yếu khác (dữ kiện và giả thiết) ;

2) Giữ nguyên các dữ kiện và thay đổi các yếu tố khác (ẩn và giả thiết) ;

3) Thay đổi cả ẩn lẫn các dữ kiện.

4) Ta sẽ khảo sát các trường hợp này.

Các trường hợp 1) và 2) có phần nào dẫm lên nhau. Thật vậy, ta có thể giữ nguyên các ẩn, các dữ kiện và biến đổi được bài toán bằng cách chỉ thay đổi giả thiết. Chẳng hạn, hai bài toán sau đây, tuy rõ ràng là tương đương, nhưng không phải là một.

Dựng một tam giác đều cạnh, biết một cạnh.

Dựng một tam giác đều góc, biết một cạnh.

Một sự khác nhau theo kiểu trên giữa hai mệnh đề trong trường hợp hiện tại thì rất nhỏ, nhưng trong nhiều trường hợp khác thì có thể là căn bản. Các trường hợp này về một phương diện nào đó cũng rất quan trọng, nhưng vì thiếu chỗ nên chúng tôi không nói đến ở đây. So sánh với mục các *bài toán phụ*, điểm 7, chú thích cuối cùng.

4. Nhiều khi để biến đổi bài toán, ta nên giữ nguyên ẩn mà thay đổi các dữ kiện và giả thiết. Câu gợi ý "Hãy xét kĩ cái chưa biết" khuyên ta nên so sánh các bài toán có chung một ẩn. Ta có thể thử nhớ lại một bài toán cùng loại đã giải rồi và *thử nhìn lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay có một ẩn tương tự*. Nếu không tìm được một bài toán như vậy thì hãy cố gắng mà đặt ra : *Có thể đặt ra những dữ kiện khác để từ đó xác định được ẩn hay không ?*

Một bài toán mới càng liên quan chặt chẽ với bài toán đã cho thì càng có nhiều khả năng giúp ích. Vì vậy, khi giữ nguyên ẩn, ta cố gắng giữ nguyên một số dữ kiện và một số yếu tố của giả thiết và chỉ thay đổi càng ít càng tốt – một vài dữ kiện và một số ít yếu tố của giả thiết. Một phương pháp hay là : không để ý đến một số điểm, nhưng cũng không thêm gì vào, giữ nguyên ẩn, *chỉ giữ một phần của giả thiết, bỏ qua phần còn lại*, nhưng không đưa thêm điều kiện hay dữ kiện mới. Ở các điểm 7 và 8, ta sẽ gặp những ví dụ và lời bàn về vấn đề này.

5. *Trong lúc giữ nguyên các dữ kiện* ta có thể thử đưa vào một ẩn mới, có ích và dễ tìm được hơn, ẩn này phải tìm được từ các dữ kiện ban đầu. Khi ta đặt câu hỏi : *"từ các dữ kiện có thể rút ra một yếu tố có ích hay không ?"* thì chính là ta nghĩ đến một ẩn thuộc loại nói trên.

Ta để ý rằng, ở đây có hai điều kiện quan trọng : trước hết, ẩn mới phải dễ tìm hơn ẩn cũ, thứ nhì nó phải có ích, nghĩa là nó có thể giúp cho việc tìm ẩn của bài toán ban đầu. Nó cũng như hòn đá người ta đặt giữa suối. Hòn đá đó gần ta hơn là bờ bên kia và nếu đặt chân lên đó được thì ta có thể bước sang bờ bên kia.

Như vậy, ẩn mới phải dễ tìm và có ích ; nhưng trong thực tế nhiều khi ta không nên khắt khe như vậy mà có khi phải cố gắng tìm thử tất cả những gì có thể có ích, có khi cũng nên thử tìm một ẩn có liên hệ mật thiết với ẩn cũ dù rằng lúc đầu nó không có vẻ gì là dễ tìm lắm.

Chẳng hạn, nếu ta phải tìm đường chéo của một hình hộp (như ở điểm 8) ta có thể lấy ẩn mới là đường chéo của một mặt. Nguyên nhân của cách chọn đó là, hoặc ta biết rằng nếu tìm được đường chéo của một mặt thì có thể tìm được đường chéo của hình hộp (như ở điểm 10) ; hoặc ta nghĩ rằng có thể tìm dễ dàng đường chéo của một mặt và ta ngờ rằng nó có thể giúp ta tìm đường chéo của cố thể (so sánh với mục : *"Anh có dùng hết mọi dữ kiện cho trước chưa ?"*.

Nếu bài toán của ta là dựng một vòng tròn thì điều phải tìm là tâm và bán kính ; ta có thể nói một bài toán như vậy gồm hai phần. Có khi phần này lại dễ tìm hơn phần kia. Vì vậy, trong mỗi trường hợp này nên đặt câu hỏi : *"có thể giải một phần bài toán hay không ?"*. Khi đặt câu hỏi đó, ta cân nhắc thiết hơn : có nên chỉ xét riêng tâm điểm – hay bán kính – và chọn cái này hay cái kia làm ẩn mới ? Một câu hỏi như vậy nhiều khi rất bổ ích. Trong các bài toán phức tạp hơn hay trong toán học cao cấp, điều quyết định là biết phân biệt và giải riêng một phần của bài toán, dễ hơn phần còn lại, nhưng lại là phần căn bản.

6. *Khi thay đổi cả ẩn và cả dữ kiện*, thì ta càng đi xa ra khỏi con đường ban đầu, điều đó dĩ nhiên ta có thể cho là không nên ; mà quả thật, ta cảm thấy là làm như vậy thì có thể quên mất bài toán ban đầu. Tuy vậy, ta có thể bắt buộc phải làm như vậy vì các phép biến đổi thông thường khác không đưa đến một ẩn dễ tìm hay có ích. Thậm chí ta có thể đi rất xa khỏi bài toán ban đầu nếu có đầy đủ lí do là bài toán mới sẽ đưa đến kết quả.

Ta có thể thay đổi ẩn hay các dữ kiện, hay cả hai nếu cần thiết để cho ẩn mới và các dữ kiện mới gần nhau hơn không ?

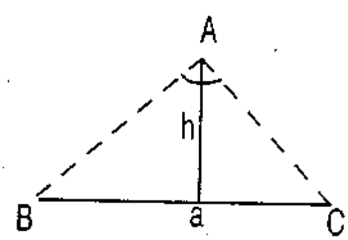
Một phương pháp hay để biến đổi vừa ẩn vừa các dữ kiện là : thay ẩn bằng một trong các dữ kiện và ngược lại (xem mục : *Có thể sử dụng kết quả tìm được không ?* điểm 3).

7. *Ví dụ* : Dựng một tam giác, biết một cạnh a, chiều cao h thẳng góc với a và góc $\propto$ đối với cạnh a.

Đâu là ẩn ? Một tam giác.

Đâu là dữ kiện ? Hai chiều dài a, h và một góc $\propto$.

Nếu ta có ít nhiều kinh nghiệm về toán dựng hình thì ta thử đưa loại bài toán này về việc dựng một điểm. Ta vạch một đoạn BC bằng cạnh a đã cho ; khi đó chỉ còn phải xác định đỉnh A của tam giác, đối diện với a (hình 23).



Hình 23

Thực tế, ta có một bài toán mới.

Đâu là ẩn ? Điểm A.

Đâu là dữ kiện ? Một chiều dài h, một góc $\propto$ và hai điểm B và C có vị trí cho trước.

Đâu là giả thiết ? Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC phải bằng h và $\widehat{BAC} = \propto$.

Như vậy là ta đã biến đổi bài toán bằng cách thay đổi cả ẩn và dữ kiện : Ẩn mới là một điểm, ẩn cũ là một tam giác. Một số dữ kiện trong hai trường hợp vẫn giữ nguyên, chiều dài h và góc α, nhưng trong bài toán ban đầu ta có một chiều dài a, còn bây giờ thì có hai điểm B và C.

Bài toán mới không khó. Câu gợi ý sau đây đưa ta đến sát lời giải.

Phân biệt các phần khác nhau của giả thiết. Giả thiết gồm hai phần, một phần thuộc về chiều dài h, phần kia về góc α. Đỉnh chưa biết phải :

1) Nằm cách đường thẳng BC một khoảng h ;

2) Là đỉnh của một góc bằng α và có các cạnh qua B và C.

Nếu ta chỉ giữ một phần của giả thiết và bỏ qua phần sau, thì điểm phải tìm chưa được hoàn toàn xác định. Quả vậy, có rất nhiều điểm có thể thoả mãn phần đầu của giả thiết, cụ thể là các điểm nằm trên đường thẳng song song với BC và cách nó một khoảng là h. Đường thẳng song song đó là quỹ tích các điểm thoả mãn điều kiện đầu của giả thiết. Ta lại biết rằng, quỹ tích các điểm thoả mãn điều kiện sau là cung vòng tròn qua B và C. Khi đã xác định được hai quỹ tích đó thì giao điểm của chúng là điểm phải tìm.

Quá trình trên đây có phần nào bổ ích. Muốn giải các bài toán về dựng hình, ta thường dùng cách lí luận đó : đưa bài toán về việc dựng một điểm và dựng điểm đó như là giao điểm của hai quỹ tích.

Nhưng trong quá trình trên,có một giai đoạn có ý nghĩa tổng quát : muốn giải tất cả các "bài toán về tìm tòi" ta có thể áp dụng phương pháp : *Chỉ giữ một phần giả thiết, bỏ qua phần kia*. Làm như vậy ta "giảm nhẹ" điều kiện của bài toán, ta hạn chế ẩn ít hơn. *Khi đó ẩn được xác định trong chừng mực nào và có thể thay đổi như thế nào ?* Đặt câu hỏi đó thực chất có nghĩa là đặt một bài toán mới. Nếu ẩn là một điểm trong mặt phẳng (như trong ví dụ trên) thì cách giải bài toán mới này là xác định quỹ tích của điểm đó. Nếu ẩn thuộc một loại đối tượng toán học khác (chẳng hạn là một hình vuông ở mục 18), thì ta phải biết mô tả đúng đắn, biết đặc trưng một cách chính xác một nhóm đối tượng. Ngay cả khi nếu ẩn không phải là một đối tượng toán học (như trong ví dụ sau đây – điểm 8) thì cũng nên nghiên cứu, đặc trưng, mô tả hay liệt kê ra danh sách các đối tượng có thể thoả mãn một phần các điều kiện của ẩn.

8. *Ví dụ* : Trong một bài toán về đố chữ, người ta hỏi từ gì gồm có năm chữ và chỉ một bộ phận máy có thể quay theo hai chiều ?

Đâu là ẩn ? Một từ.

Đâu là giả thiết ? (phải thoả mãn điều kiện gì ?). Từ đó phải gồm năm chữ chỉ một bộ phận của máy. Nó có thể là một từ chuyên môn. *Giả thiết đã đủ để xác định ẩn hay chưa ?* Chưa. Hay nói đúng hơn, có thể là đủ, nhưng chỉ riêng phần rõ ràng của giả thiết(2) thì chắc chắn là chưa đủ. Rất nhiều từ có thể thoả mãn điều kiện đó : êcơru, bielơ...

Giả thiết được phát biểu một cách mơ hồ (với dụng ý, tất nhiên). Nếu trong một máy không có một bộ phận nào có thể hoạt động "theo hai chiều" thì ta có thể nghĩ rằng người ta muốn nói "dọc theo hai chiều". Giải thích điều bí ẩn như thế kể cũng hay và ta hãy đi sâu vào cách giải thích đó.

Hãy phân biệt các phần khác nhau của giả thiết. Giả thiết gồm hai phần, một phần về ý nghĩa của từ, một phần về chính tả của từ. Từ phải tìm là :

1) Một từ ngắn chỉ một bộ phận máy.

2) Một từ năm chữ mà nếu đọc ngược lại thì cũng lại chỉ một bộ phận máy.

Nếu ta chỉ giữ lại một phần của giả thiết và bỏ qua phần kia, thì ẩn không được xác định hoàn toàn. Rất nhiều từ thoả mãn điều kiện ban đầu, ta có một loại "quỹ tích". Ta có thể "mô tả" quỹ tích đó, "theo dõi" nó cho đến "giao điểm" với "quỹ tích" của điều kiện thứ hai. Ý nghĩ tự nhiên là bám vào điều kiện đầu, nhớ lại các từ có đúng nghĩa đòi hỏi và xét từng từ một xem nó có thể đọc theo hai chiều hay không. Có thể ta phải thử nhiều từ trước khi tìm được từ đúng êcơru, bielơ, ...

... "Rotor", đúng rồi(3)

9. Ở điểm 3 ta đã phân loại các khả năng để có được một bài toán mới bằng cách tổ hợp một số yếu tố của bài toán cũ. Nếu ta làm xuất hiện không phải một mà là hai hay nhiều bài toán mới thì các khả năng của chúng ta lại tăng thêm ; ta nên ghi lại mà không cần phải phân loại.

Cũng có thể có những khả năng khác nữa. Đặc biệt lời giải một bài toán "tìm ẩn" có thể phụ thuộc vào việc giải một bài toán "chứng minh". Chúng tôi chỉ nêu lên khả năng đó thôi, chứ không nói gì thêm nữa vì không có chỗ trong tài liệu nhỏ này.

10. Về các "bài toán chứng minh", chúng tôi chỉ nêu thêm một vài chú thích vắn tắt, kể ra cũng tương tự như các điều bình luận trên về các bài toán "tìm ẩn" (2 đến 9).

---

(1) *Để cho thích hợp, chúng tôi có sửa đổi một vài chi tiết nhỏ (N.D)*

(2) *"phần rõ ràng" của giả thiết là : "trong một máy" và "năm chữ" (N.D)*

(3) *Chữ "rotor" dịch ra tiếng Việt là "phần quay", hay rôtô. Tuy nhiên, để câu đố có ý nghĩa, chúng* tôi viết nguyên văn tiếng Anh.

Một khi đã hiểu bài toán này về đại thể, nói chung ta phải xét các phần chính đó là giả thiết và kết luận của định lí. Ta phải hiểu thật rõ ràng các điều : "*Đâu là giả thiết ? Đâu là kết luận ?*". Nếu phải xét các điểm chi tiết hơn thì ta phải phân biệt những yếu tố khác nhau của giả thiết và xét bản thân mỗi yếu tố đó. Sau đó, ta có thể khảo sát các chi tiết khác và như vậy xúc tiến từng bước việc phân chia bài toán.

Sau khi đã phân chia bài toán, ta hãy thử tổ hợp lại một cách khác, chẳng hạn làm thế nào để tạo ra một định lí mới. Có thể xảy ra ba trường hợp.

1) Ta có thể giữ kết luận và thay đổi giả thiết. Trước hết, ta thử nhớ lại một định lí cùng loại : "*Hãy khảo sát kết luận và thử tìm một định lí quen thuộc có cùng kết luận hay có kết luận tương tự*". Nếu không nhớ được thì ta có thể thử đặt ra một định lí như vậy : *có thể tìm được một giả thiết khác, từ đó rút ra được kết luận trên ?* Ta có thể thay đổi giả thiết bằng cách bỏ qua một yếu tố của nó : *chỉ giữ một phần giả thiết, bỏ qua phần kia ; kết luận còn có giá trị hay không ?*

2) Giữ giả thiết và thay đổi kết luận. *Từ giả thiết có thể rút ra được một điều gì có ích ?*

3) Thay đổi cả giả thiết lẫn kết luận. Nếu chỉ thay đổi một cái mà không có kết quả thì càng nên thử thay đổi cả hai : *có thể hay không thể thay đổi giả thiết hay kết luận, hay cả hai nếu cần thiết để đưa giả thiết mới và kết luận mới lại gần nhau hơn không ?*

Ở đây, chúng tôi không đặt vấn đề phân loại các trường hợp có thể có được khi chúng ta đưa vào các bài toán mới hay khi chúng ta liên hệ một bài toán chứng minh với một bài toán "tìm ẩn" thích hợp.

Quyết tâm, hi vọng, thành công

Đừng tưởng rằng giải một bài toán chỉ là một công việc hoàn toàn của trí óc ; ở đây, sự quyết tâm đóng một vài trò quan trọng. Nếu không có nhiệt tình thì chỉ có thể giảng trong lớp học một cách buồn tẻ. Nhưng muốn giải quyết một vấn đề khoa học đúng đắn, cần có nghị lực để lao động lâu dài, gian khổ để vượt qua những thất vọng chua cay.

1. Sự quyết tâm cũng phụ thuộc vào chỗ ta hi vọng hay thất vọng. Khi ta nghĩ là đã gần đạt được mục đích thì ta dễ kiên nhẫn hơn, nhưng nếu gặp một khó khăn mà ta chưa nhìn thấy hướng giải quyết thì thật là gay go. Ta rất vui mừng khi thấy những dự kiến của ta là đúng, ta dễ chán nản khi con đường mà ta đang đi một cách tin tưởng thình lình bị chặn ngang : ta dao động.

"Không cần phải hi vọng mới khởi công, không cần phải thành công mới kiên nhẫn". Đó là nghị lực sắt đá, đó là vinh dự và nhiệm vụ của con người biết phụng sự một lí tưởng cao quý. Tuy nhiên, đối với người làm khoa học thì không hẳn như thế, mà phải cần có một hi vọng nào đó thì mới khởi công và một chút thành công nào đó thì mới tiếp tục. Trong công tác khoa học, cần có một sự cân nhắc giữa sự kiên nhẫn và triển vọng của vấn đề. Nếu một bài toán nào đó mà chưa tỏ ra có bổ ích thì ta chưa nên đề cập đến vội ; nếu nó có nhiều hứa hẹn lớn lao thì ta hiến dâng tất cả tâm sức. Khi ta đã tự đặt cho mình một mục tiêu phấn đấu thì ta đừng rời bỏ mục tiêu đó, nhưng đồng thời cũng không nên làm rắc rối vấn đề khi không cần thiết. Ta không coi thường những kết quả nhỏ, trái lại : *nếu bạn chưa giải được bài toán đặt ra thì trước hết tìm cách giải một bài toán có liên quan.*

2. Khi một học sinh phạm một sai lầm nghiêm trọng và khi anh ta tỏ ra quá ư chậm chạp thì thường là do cùng một nguyên nhân : anh ta không hề có ý muốn giải quyết bài toán, anh ta không muốn hiểu bài toán một cách đúng đắn và tất nhiên không hiểu được. Vì vậy, người thầy giáo muốn thực sự giúp đỡ học sinh thì trước hết phải khêu gợi trí tò mò, lòng hiếu học của học sinh và phải truyền cho họ lòng ham muốn đạt được kết quả. Cũng phải cho học sinh một thời gian nào đó để suy nghĩ, sau thời gian đó có thể học sinh sẽ có được sự quyết tâm làm việc.

Giải các bài toán là một trường học nghị lực, khi giải các bài toán khó, người học sinh tập kiên trì mặc dù thất bại, biết quý những bước tiến nhỏ, biết tìm đâu là ý chính, biết tập trung tất cả khả năng suy nghĩ. Nếu ở trường, người học sinh chưa có dịp để làm quen với những cảm xúc khác nhau nảy sinh trong khi cố gắng giải bài toán thì như vậy là công việc giáo dục toán học đã thất bại về căn bản.

Quy nạp và quy nạp toán học

Quy nạp là một quá trình nhận thức những quy luật chung bằng cách quan sát và so sánh những trường hợp riêng. Nó được dùng trong các khoa học và cả toán học. Còn như quy nạp toán học thì chỉ dùng trong toán học để chứng minh một loại định lí nào đó. Thật không may ở chỗ hai tên gọi lại liên quan với nhau, vì rằng giữa hai phương pháp này hầu như không có một liên hệ lôgic nào. Tuy nhiên, cũng có một liên hệ thực tế vì người ta thường đồng thời dùng hai phương pháp đó.

Ta minh hoạ cả hai phương pháp đó bằng ví dụ sau :

1. Một cách ngẫu nhiên, ta có thể nhận xét rằng vế trái của đẳng thức : $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ gồm những lập phương của các số tự nhiên liên tiếp, còn vế phải là một bình phương. Từ đó ta có thể viết đẳng thức dưới dạng sau :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

Khi đó ta có thể tự hỏi là tổng những lập phương các số tự nhiên liên tiếp có luôn luôn là một bình phương không.

Đặt câu hỏi đó, ta giống như một nhà tự nhiên học sau khi đã nhận xét một loại cây hay một sự cấu tạo địa chất đặc biệt, đã đề ra vấn đề tổng quát. Câu hỏi tổng quát của ta liên quan tới tổng các lập phương liên tiếp.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

Chúng ta nhờ trường hợp riêng n = 4 mà đi tới đó.

Ta có thể làm gì để trả lời câu hỏi tổng quát đó ? Ta sẽ làm như nhà tự nhiên học, tức là tìm những trường hợp riêng khác.

Nếu $n = 2$ hay 3 thì lại càng đơn giản hơn.

Nếu $n = 5$, ta đi tới trường hợp sau :

Để được liên tiếp và đầy đủ, ta thêm cả trường hợp n = 1.

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 8 = 9 = 3^2$

$1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$

$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$

$1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2$

Sự kiện các tổng khác nhau của các lập phương liên tiếp là những bình phương không thể cho là ngẫu nhiên được. Trong trường hợp tương tự như vậy, nhà tự nhiên học không còn nghi ngờ gì về tính đúng đắn của quy luật tổng quát suy ra được từ những trường hợp riêng mà mình đã quan sát. Quy luật tổng quát đó hầu như đã được chứng minh bằng cách thận trọng hơn, mặc dầu trong thâm tâm cũng nghĩ như vậy. Nhà toán học chỉ có thể nói là phép quy nạp đã gợi cho ta định lí sau :

"Tổng của n lập phương đầu tiên là một bình phương".

2. Ta đã đi đến giả thiết về sự tồn tại một quy luật đáng chú ý và hơi bí ẩn.

Tại sao tổng của các lập phương liên tiếp lại là những bình phương ?

Trong trường hợp này, nhà tự nhiên học sẽ làm thế nào ? Ông ta sẽ tiếp tục nghiên cứu giả thuyết của mình và có thể đi theo nhiều hướng khác nhau. Chẳng hạn lại tìm tòi và tích luỹ thêm những thực nghiệm mới. Nếu ta muốn làm như vậy thì phải xét tới những trường hợp sau đó trong n = 6, 7, ... Nhà tự nhiên học có thể xét lại những sự kiện đã dẫn tới chỗ phát biểu giả thuyết của mình ; ông ta so sánh chúng với nhau một cách thận trọng, có rút ra một tính quy luật sâu sắc hơn, một sự tương tự mới. Đó là con đường mà chúng ta sẽ làm theo.

Ta xét lại những trường hợp trong đó n = 1, 2, 3, 4, 5, mà ta đã sắp xếp thành một bảng.

Tại sao tất cả các tổng đó đều là những bình phương ? Ta có thể nói gì về những bình phương ? Căn bậc hai của chúng theo thứ tự bằng 1, 3, 6, 10, 15. Ta có thể nói gì về những căn bậc hai đó ? Trong mọi trường hợp, chúng hình như tăng theo một quy luật nào đó. Chúng tăng như thế nào ?

$$3 - 1 = 2, \qquad 6 - 3 = 3, \qquad 10 - 6 = 4, \qquad 15 - 10 = 5$$

Những hiệu đó tăng theo một quy luật đáng chú ý. Ta nhận thấy một quy luật của dãy số 1, 3, 6, 10, 15.

$1 = 1$

$3 = 1 + 2$

$6 = 1 + 2 + 3$

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Nếu sự đều đặn đó là tổng quát (khó mà chối điều đó) thì định lí mà chúng ta còn hoài nghi, bây giờ có một dạng chính xác hơn.

Với n = 1, 2, 3, ..., ta có :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

3. Chính nhờ quy nạp mà ta đã có được quy luật phát biểu trên. Thực ra thì cả quá trình lí luận, dù chỉ mới một chiều và chưa hoàn chỉnh nhưng hợp lí đã cho ta hình dung được phương pháp đó (quy nạp). Phép quy nạp cố gắng phát hiện ra các quy luật và các liên hệ ẩn giấu đằng sau các hiện tượng quan sát được bề ngoài.

Và sự liên hệ, các phương tiện quen thuộc nhất của nó là sự tổng quát hoá, sự cá biệt hoá và sự tương tự. Thực hiện sự tổng quát hoá nhằm hiểu thêm các sự kiện quan sát được ; nó dựa trên cơ sở của sự tương tự và được nghiệm lại bằng các trường hợp riêng mới, chúng tôi không nói tới những điều nhận xét thêm về phương pháp quy nạp trong đó các nhà triết học còn nhiều điểm chưa thống nhất với nhau. Nhưng cần nói thêm là rất nhiều kết quả toán học thoạt tiên có được bằng quy nạp, rồi sau đó mới được chứng minh. Toán học đem trình bày chặt chẽ là một khoa học suy diễn, có hệ thống, nhưng toán học trong lúc hình thành là một khoa học thực nghiệm, quy nạp.

4. Trong toán học cũng như trong các khoa học tự nhiên, ta có thể dùng quan sát và quy nạp để khám phá ra những quy luật tổng quát, nhưng giữa chúng có sự khác nhau. Trong các khoa học tự nhiên, thực ra không có gì cao hơn sự quan sát và quy nạp ; còn như trong toán học còn có chứng minh chặt chẽ.

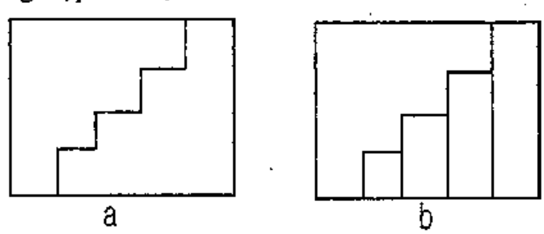
Sau khi đã dành ít nhiều thời gian cho công việc thực nghiệm thuần tuý thì nên thay đổi cách nhìn vấn đề. Ta sẽ lí luận chặt chẽ. Giả sử ta khám phá ra một kết quả lí thú, nhưng lí luận dẫn ta tới đó chỉ mới là phần nào hợp lí thực nghiệm, tạm thời, có tính chất giúp ta tìm ra kết quả. Ta hãy thử cố xác nhận kết quả đó một cách khẳng định bằng một chứng minh chặt chẽ.

Bây giờ, ta đi tới một "bài toán chứng minh" : chứng minh rằng kết quả nêu ở trên là đúng (xem 2 ở trên).

Có thể làm đơn giản bài toán được. Ta đã biết rằng :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Trong mọi trường hợp, hệ thức đó đều dễ nghiệm lại. Xét một hình chữ nhật có các cạnh bằng n và $n + 1$, chia nó làm hai phần bằng một đường gấp khúc như ở hình 24a (ứng với trường hợp $n = 4$).



Hình 24

Mỗi nửa đều có "dạng các bậc thang" và có diện tích biểu diễn bởi công thức $1 + 2 + ... + n$.

Trường hợp n = 4, diện tích đó bằng 1 + 2 + 3 + 4 (xem hình 24b). Mặt khác, diện tích hình bậc thang là một nửa nó, điều đó chứng tỏ rằng công thức là đúng.

Như vậy, ta có thể biến đổi kết quả tìm ra bằng quy nạp và biểu diễn nó như sau :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (1)$$

5. Nếu ta không có một ý nào về cách chứng minh kết quả đó thì ít nhất ta cũng có thể thử lại nó. Ta thử cho trường hợp đầu tiên mà ta chưa biết, tức là với n = 6. Với giá trị này, công thức cho ta :

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left[\frac{6 \times 7}{2}\right]^2$$

Thực hiện xong các phép tính, ta thấy rằng đẳng thức đúng vì cả hai vế đều bằng 441. Ta có thể tiếp tục thử nhiều nữa. Công thức có lẽ là tổng quát, tức là đúng với mọi giá trị của n. Nhưng nó có còn đúng không khi ta đi từ một giá trị n bất kì tới giá trị tiếp theo là $n + 1$.

Áp dụng công thức ở trên, ta phải có :

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \qquad (2)$$

Bây giờ có một cách thử rất đơn giản.

Chỉ cần trừ đẳng thức này với đẳng thức (1) ở trên, ta có :

$$(n + 1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Điều đó thử lại dễ dàng. Ta có thể viết vế thứ hai như sau :

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left[(n+2)^2 - n^2\right] = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left[n^2 + 4n + 4 - n^2\right]$$

$$\left(\frac{n+1}{4}\right)^2 (4n + 4) = (n + 1)^2 (n + 1) = (n + 1)^3$$

Như vậy, công thức ta tìm được bằng thực nghiệm đã được thử lại chặt chẽ.

Ta hãy làm rõ ý nghĩa của phép thử đó.

Ta chắc chắn là đã có :

$$(n + 1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Nhưng ta còn chưa biết đẳng thức sau đây có đúng không ?

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Nhưng *nếu* ta biết rằng nó đúng thì ta có thể suy ra bằng cách thêm vào đẳng thức đã thiết lập được ở trên, rằng đẳng thức sau đây cũng đúng :

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Đó chính là biểu thức (1), chỉ khác là $(n + 1)$ thay thế cho n. Nhưng ta đã biết rằng điều giả định của ta đã đúng với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ và 6. Theo trên giả định đó, đã đúng với $n = 6$, cũng phải đúng với $n = 7$; đã đúng với $n = 7$, nó cũng sẽ đúng với $n = 8$ và cứ như thế mà tiếp tục.

Công thức đúng với mọi giá trị của n, vậy nó là tổng quát.

6. Chứng minh trên có thể xem là mẫu mực cho rất nhiều trường hợp tương tự. Vậy thì những nét cơ bản của nó là gì ?

Điều khẳng định mà ta cần chứng minh phải được phát biểu rõ ràng, chính xác trước.

Nó phụ thuộc một số tự nhiên n.

Điều khẳng định đó phải được "xác định" đến mức khiến ta có thể thử được là nó còn đúng không khi đi từ một số tự nhiên n sang số tự nhiên tiếp theo $n + 1$.

Nếu ta đã thử được có kết quả điều đó, thì ta có thể dùng kinh nghiệm có được trong quá trình thử để đi đến kết luận rằng điều khẳng định phải đúng với $n + 1$, nếu như nó đã đúng với n. Có được điều đó rồi, ta chỉ cần biết rằng điều khẳng định đúng với trường hợp $n = 1$; khi đó nó sẽ đúng với $n = 2$, rồi với $n = 3$ và cứ thế tiếp tục. Bằng cách đi từ một số nguyên bất kì tới một số nguyên liền sau nó, ta đã chứng minh tính chất tổng quát của điều khẳng định.

Phương pháp chứng minh này rất hay dùng và xứng đáng có một tên gọi. Ta có thể gọi nó là phép "chứng minh từ n tới $n + 1$" hay đơn giản hơn là phép "chuyển tới một số nguyên tiếp sau". Đáng tiếc là do một sự ngẫu nhiên, phương pháp này mang cái tên không tiện lợi là "quy nạp toán học". Điều khẳng định mà ta vừa chứng minh trên đây có thể có một nguồn gốc nào đó nhưng đứng về phương diện lôgic thì nguồn gốc đó chẳng quan trọng lắm. Thế mà, trong nhiều trường hợp như trường hợp ta vừa xét một cách chi tiết ở trên thì nguồn gốc lại là quy nạp. Ta đã đi tới nó bằng con đường thực nghiệm. Thành thử, chứng minh có vẻ như là một bổ sung toán học cho quy nạp. Điều đó giải thích tên gọi của phương pháp.

7. Bây giờ ta qua một điểm khác, khá tinh tế, nhưng cần thiết cho những ai muốn tự mình khám phá ra những chứng minh. Trong phần trình bày ở trên, bằng quan sát và quy nạp, chúng ta đã tìm ra liên tiếp hai điều khẳng định trong đó thì điều thứ hai xét trong điểm 2 chính xác hơn điều thứ nhất xét trong điểm 1. Bằng cách nghiên cứu chính xác hơn điều thứ hai, ta đã tìm ra một phương pháp thử tính quy luật của việc chuyển từ n tới $n + 1$ và như vậy, bằng phương pháp quy nạp "toán học", ta đã có thể tìm được chứng minh của định lí.

Nếu ta xuất phát từ điều khẳng định thứ nhất và chưa có được những sự chính xác do điều khẳng định thứ hai đem lại thì vị tất, ta đã có thể tìm thấy chứng minh đó.

Thực vậy, điều khẳng định thứ nhất ít chính xác hơn, ít "xác định" hơn, khó nắm được hơn, khó chứng minh và khó thử nghiệm lại hơn điều khẳng định thứ hai.

Đi từ điều khẳng định thứ nhất tới điều khẳng định thứ hai, từ phát biểu ít chính xác hơn đến phát biểu chính xác hơn là đã góp một phần quan trọng vào chứng minh cuối cùng.

Kết luận này có vẻ nghịch lí về một phương diện nào đó. Thực vậy, điều khẳng định thứ hai mạnh hơn ; nó trực tiếp kéo theo điều khẳng định thứ nhất trong khi đó từ điều thứ nhất, ít nhiều có mơ hồ, khó mà rút ra điều thứ hai rõ hơn nó.

Đó là "nghịch lí của người phát minh".

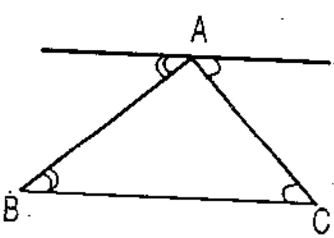
Tại sao cần phải có những chứng minh ?

Người ta có kể một giai thoại về Newton, khi còn là một sinh viên trẻ, theo thời bấy giờ, ông bắt đầu nghiên cứu hình học bằng việc đọc bộ "Nguyên lí" của Ơclit. Ông đọc các định lí thấy chúng là đúng và bỏ qua những chứng minh. Ông tự hỏi, tại sao người ta lại mất công đi chứng minh những chân lí hiển nhiên như vậy.

Nhưng nhiều năm sau, ông thay đổi ý kiến và rất tán thành Ơclit.

Dù là cũ hay không, giai thoại đó cũng dẫn tới câu hỏi : tại sao ta cần phải học hay trình bày những chứng minh ? Trong ba cách : không chứng minh gì cả, chứng minh tất cả và chứng minh một phần thì đằng nào tốt hơn ? Và nếu chứng minh một phần thì là phần nào ?

1. *Những chứng minh đầy đủ.* Đối với một số nhà lôgic thì chỉ có những chứng minh đầy đủ. Những chứng minh như vậy không được có một thiếu sót nào, sơ hở nào, một sự nghi ngờ nào và nếu không được như thế thì không còn là một chứng minh nữa. Trong đời sống hàng ngày, trong luật học, trong vật lí có tồn tại những chứng minh hoàn toàn đúng theo định nghĩa đó không ? Trong thực tế thì không có.



Hình 25

Thành thử, khó mà hiểu được tại sao lại có thể có ý nghĩ về sự tồn tại của những chứng minh đầy đủ như vậy. Có thể nói, hơi quá một chút, ý nghĩ đó là do ở một người và ở một cuốn sách : Ơclit và bộ "Nguyên lí" của ông.

Trong mọi trường hợp, ngay bây giờ, việc nghiên cứu những cơ sở của hình học phẳng đều cho ta điều kiện tốt để có được khái niệm về chứng minh đầy đủ.

Ta hãy lấy chứng minh của định lí : "*Trong một tam giác, tổng các góc bằng 180°*[1]" làm ví dụ. Hình 25 rất quen thuộc với đa số chúng ta, không đòi hỏi những sự giải thích đặc biệt.

Từ A, ta vẽ một đường song song với BC. Các góc B và C theo thứ tự bằng các góc ngoài tạo thành tại đỉnh A, vì các góc so le trong bằng nhau. Như vậy, ba góc của tam giác bằng ba góc có đỉnh chung tại A và làm thành một góc bẹt, bằng hai góc vuông. Định lí đã được chứng minh.

Nếu một học sinh học xong chương trình toán mà không thực sự hiểu những chứng minh loại này, thì người thầy thật đáng trách. Thực vậy, ta cần phải phân loại mọi thứ theo những mức độ quan trọng khác nhau.

Nếu người ta không dạy cho học sinh một khái niệm riêng này hay một khái niệm riêng khác của hình học, thì điều đó không quan trọng lắm vì sau này cũng ít khi dùng tới nó. Nhưng nếu bỏ qua không dạy những chứng minh hình học, thì người học sinh sẽ không biết tới những ví dụ hay nhất, đơn giản nhất của phép chứng minh chính xác và mất một dịp tốt nhất trong đời để làm quen với khái niệm "lí luận chặt chẽ", không có khái niệm đó, người học sinh luôn luôn không có tiêu chuẩn để đánh giá những "chứng minh" mà cuộc sống hiện đại đưa lại cho anh ta.

Nói tóm lại, nếu nhà trường nhằm trao cho học sinh khái niệm về lập luận trực giác và phép suy luận lôgic thì nhất thiết phải dành một phần cho những chứng minh hình học.

2. *Hệ lôgic*. Hình học, như đã được trình bày trong bộ "Nguyên lí" của Ơclit không đơn thuần là một tập hợp những sự kiện, mà là một hệ lôgic. Những tiên đề, định nghĩa và định lí, trong đó không phải được sắp xếp một cách ngẫu nhiên mà là theo một thứ tự không thể chê vào đâu được. Mỗi một định lí đều được đặt ở chỗ sao cho nó được suy từ những tiên đề, những định nghĩa và những định lí đứng trước nó. Có thể coi cách sắp xếp đó là một thành công chủ yếu của Ơclit và hệ lôgic đó là ưu điểm căn bản của bộ "Nguyên lí". Hình học Ơclit không phải chỉ là một hệ lôgic, nó chính là một mẫu mực điển hình đầu tiên và lớn nhất của loại hệ thống này, mà các nhà khoa học khác đã và sẽ còn cố noi theo. Còn như đối với

---

(1) Trong mệnh đề 32, quyển 1 của bộ nguyên lí của Ơclit chứng minh sau đây không phải của Ơclit ; người Hi Lạp biết từ trước.

các khoa học rất xa với hình học như tâm lí học và luật học thì có cần dập theo cái lôgic chặt chẽ này không ? Vấn đề đó còn phải tranh cãi, nhưng chỉ có những ai đã làm quen ít nhiều với hệ Ơclit mới có đủ tư cách tham gia tranh luận thực sự.

Một hệ hình học được xây dựng trên những chứng minh. Mỗi định lí đều liên kết với những tiên đề, định lí và định nghĩa đứng trước nó bằng một chứng minh. Nếu không hiểu được những chứng minh đó thì cũng không thể hiểu được bản chất cốt yếu nhất của hệ.

Tóm lại, nếu nhà trường muốn trao cho học sinh khái niệm về hệ lôgic thì phải dành một phần cho những chứng minh hình học.

3. *Hệ thuật nhớ.* Tác giả không cho rằng những khái niệm về lập luận trực quan, về chứng minh chặt chẽ, về hệ lôgic là thừa và không cần thiết đối với bất kì người nào.

Tuy nhiên có những trường hợp, vì không có thời gian hay vì một lí do nào khác, việc nghiên cứu những khái niệm đó không được xem là quan trọng tuyệt đối, nhưng ngay trong những trường hợp đó cũng nên nghiên cứu các chứng minh.

Các chứng minh bảo đảm cho sự vững vàng của kiến thức, khiến hệ lôgic lằm thành một khối thống nhất và giúp ta nhớ được các yếu tố muôn màu muôn vẻ của khối thống nhất đó. Lấy ví dụ đã trình ở bày trên (hình 25). Hình vẽ cho ta thấy rõ ràng là tổng các góc trong một tam giác bằng 180^0, bằng cách liên hệ sự kiện đó với sự kiện là các góc so le trong bằng nhau.

Mà những sự kiện liên hệ với nhau thì bổ ích hơn và dễ nhớ hơn những sự kiện riêng biệt. Thành thử hình vẽ khắc sâu vào trong trí ta hai định lí hình học liên quan với nhau và cuối cùng cả hình vẽ và định lí trở thành của riêng không thể tách rời được khỏi ý thức chúng ta. Bây giờ ta xét trường hợp không cần thiết phải thu nhận được những khái niệm chung mà chỉ cần nắm được một số kiến thức nhất định. Ngay trong trường hợp này, những kiến thức cũng cần phải được truyền thụ theo một hệ thống nào đó vì rằng những chi tiết riêng biệt rất dễ quên, khó mà nhớ được. Mọi liên hệ đơn giản, tự nhiên và liên kết được chặt chẽ các kiến thức đều đáng hoan nghênh.

Một hệ như vậy không cần phải dựa trên cơ sở lôgic mà chỉ cần giúp trí nhớ một cách có hiệu quả. Như người ta gọi, nó phải là một *hệ thuật nhớ.* Cần nói thêm là ngay trong một hệ thuật nhớ thuần tuý, những chứng minh đều có lợi, nhất là nếu chúng đơn giản. Chẳng hạn, học sinh phải học định lí về tổng các góc trong một tam giác và định lí về các góc so le trong. Có thể có cách nào khác đơn giản hơn, tự nhiên hơn và có hiệu quả hơn như ở hình 25 không ?

Tóm lại, ngay cả khi không gán cho những khái niệm lôgic tổng quát một ý nghĩa quan trọng đặc biệt, các chứng minh vẫn có ích vì đó là thuật nhớ.

4. *Hệ của "sách dạy nấu ăn"*. Chúng tôi đã trình bày những cái lợi của các chứng minh, nhưng cũng không hề có ý nghĩ là mọi chứng minh đều phải thực hiện đầy đủ.

Ngược lại, có những trường hợp vị tất đã như vậy. Chẳng hạn, việc dạy phép tính vi phân và phép tính tích phân cho các sinh viên kĩ thuật. Một sự trình bày chặt chẽ theo yêu cầu hiện đại về phép tính vi phân đòi hỏi những chứng minh khó và tinh tế. Nhưng các kĩ sư học nó cốt để áp dụng. Họ không có đủ thời gian, không có chuẩn bị trước, không có hứng thú vượt qua những chứng minh dài và đánh giá những cái tinh vi trong đó. Do đó mà người ta có khuynh hướng tước bỏ tất cả những chứng minh ; nhưng làm như vậy chúng ta đã đưa phép tính vi phân về trình độ của những thực đơn cho nhà bếp.

"Sách dạy nấu ăn" trình bày một cách chi tiết về thành phần của các món ăn và cách thực nấu nướng mà không hề nói tới cơ sở lí luận hay thực nghiệm của những chỉ dẫn hay những phương pháp đó. Để biết món put-đinh[1] như thế nào thì cần phải nếm nó. Sách dạy nấu ăn hoàn toàn đáp ứng được mục đích của nó. Nó không cần dựa trên một hệ lôgic hay một hệ thuật nhớ nào vì rằng người ta viết các thực đơn rồi in ra chứ không ai nhớ thuộc lòng. Đối với tác giả của giáo trình phép tính vi phân hay một giáo sư đại học thì hoàn toàn không phải thế, cả hai sẽ không đạt được mục đích của mình nếu như họ theo sát với hệ thống của sách dạy nấu ăn. Nếu như dạy các phương pháp mà không có chứng minh, không cho biết những lí do thì không thể hiểu được. Nếu đưa ra những quy tắc mà không giải thích thì những quy tắc này vì không có liên hệ với nhau, nên rất dễ quên. Toán học không thể thử nghiệm theo lối của món put-đinh. Nếu loại ra tất cả mọi hình thức của suy luận thì một giáo trình phép tính vi phân sẽ trở thành một bản kê khai rời rạc không có khả năng đem lại một kiến thức gì có thể lĩnh hội được.

5. *Những chứng minh không đầy đủ*. Cách tốt nhất để giải quyết tình trạng "tiến thoái lưỡng nan" giữa một chứng minh quá dài và lối "sách dạy nấu ăn" là dùng phép chứng minh không đầy đủ. Nói như vậy không phải là quá đáng. Đối với một nhà lôgic, một chứng minh không đầy đủ không phải là một chứng minh. Tất nhiên, phải phân biệt một cách thận trọng với những chứng minh đầy đủ. Không phân biệt những chứng minh không đầy đủ và chứng minh đầy đủ với nhau đã là không tốt, mà dùng cái này thay cho cái kia lại càng không tốt. Thật khó chịu khi thấy tác giả

(1) Món ăn của người Anh làm từ bột và hoa quả

một cuốn sách giáo khoa trình bày một chứng minh không đầy đủ, một cách mập mờ với một sự do dự rõ rệt giữa cái xấu hổ và ý muốn làm cho người đọc tưởng rằng chứng minh đó là đầy đủ. Nhưng những chứng minh không đầy đủ có thể có lợi khi người ta dùng chúng một cách thích đáng, có mức độ.

Chúng nhằm mục đích, không phải là thay thế cho những chứng minh đầy đủ, một điều mà không phải bao giờ cũng làm được, mà là đem lại cho việc trình bày -một cái gì bổ ích và có hệ thống.

Ví dụ 1. Một phương trình đại số bậc n có đúng n nghiệm. Gauxơ gọi đó là định lí cơ bản của đại số, là một định lí thường phải trình bày cho những học sinh không được hoặc ít được chuẩn bị để hiểu chứng minh của nó ; họ chỉ biết rằng một phương trình bậc nhất có một nghiệm. Một phương trình bậc hai có hai nghiệm. Tuy nhiên, trong định lí khó chứng minh này có một phần dễ chứng minh là : không một phương trình bậc *n* nào có quá *n* nghiệm phân biệt. Những sự kiện kể trên có làm thành một chứng minh đầy đủ của định lí cơ bản không ? Tuyệt nhiên không. Tuy nhiên, chúng đủ để giới thiệu định lí một cách bổ ích và thừa nhận được, đồng thời giúp học sinh dễ nhớ được định lí và đó là điều chủ yếu.

Ví dụ 2. Tổng của hai góc hợp bởi các cạnh của một tam diện lớn hơn góc thứ ba.

Rõ ràng là có thể đưa định lí này về việc xác nhận rằng trong *một tam giác cầu, tổng của hai cạnh lớn hơn cạnh thứ ba*. Nhận định như vậy, tất nhiên ta nghĩ tới sự tương tự giữa tam giác cầu và tam giác thẳng. Những nhận xét như vậy có làm thành một chứng minh không ? Không. Nhưng chúng giúp ta hiểu và nhớ được định lí nói trên. Ví dụ thứ nhất của ta có ý nghĩa lịch sử. Trong vòng 250 năm, các nhà toán học tin ở định lí cơ bản mà không biết chứng minh đầy đủ của nó ; thực vậy, họ cũng chỉ lập luận không hơn gì ta làm ở trên đây. Ví dụ thứ hai chứng tỏ rằng sự tương tự là một nguồn đoán nhận quan trọng. Trong toán học, cũng như các nhà khoa học tự nhiên và vật lí, sự phát minh thường nảy sinh từ sự quan sát, sự tương tự và từ sự quy nạp. Những phương tiện này sử dụng một cách khéo léo để lập một chứng minh không đầy đủ mà ta có thể thừa nhận, được các nhà vật lí và kĩ sư rất ưa thích (xem thêm "quy nạp" và quy nạp toán học" các điểm 1, 2, 3).

Vai trò và lợi ích của những chứng minh không đầy đủ được giải thích một phần trong việc nghiên cứu quá trình giải một bài toán. Một kinh nghiệm trong việc giải toán chứng tỏ rằng cái ý ban đầu của một chứng minh thường là không đầy đủ.

Nhận xét chủ yếu, mối liên hệ chính, mầm mống của chứng minh có thể nằm trong đó, nhưng những chi tiết thường là tinh vi thì chưa có ngay. Một số rất ít tác giả có tài chỉ nêu ra cái mấu chốt của chứng minh, cái ý chính dưới dạng đơn giản nhất và chỉ ra đặc tính của những chi tiết còn lại. Những chứng minh như vậy, tuy chưa đầy đủ, nhưng có thể bổ ích hơn nhiều so với một chứng minh trình bày với các chi tiết cặn kẽ.

Tóm lại, những chứng minh không đầy đủ có thể dùng làm một phương tiện của thuật nhớ, nhưng cố nhiên không thể thay thế cho những chứng minh đầy đủ, khi ta muốn trình bày đủ mạch lạc và khi không cần có thứ tự lôgic chặt chẽ.

Bao che cho những chứng minh không đầy đủ thì rất nguy hiểm. Có mấy quy tắc sau đây để ngăn ngừa một sự lạm dụng rất có thể có. Trước hết, nếu là chứng minh không đầy đủ thì phải nói rõ bằng một cách nào đó. Sau đó không một tác giả hay một thầy giáo nào được quyền trình bày một chứng minh không đầy đủ của một định lí, nếu như không biết rõ chứng minh đầy đủ của định lí đó.

Sau hết, phải thú nhận rằng, trình bày thật hay một chứng minh không đầy đủ không phải là việc dễ.

Thuật phát minh (Heuristic)

Danh từ này xưa kia chỉ một môn khoa học đã được định nghĩa một cách khá mập mờ ; môn này khi thì được xem là một bộ phận của lôgic, khi thì xem là thuộc tâm lí học. Thường thì nó được trình bày trên các nét lớn và ít khi được trình bày một cách chi tiết. Ngày nay, nó hầu như bị quên lãng. Đối tượng của nó là nghiên cứu các quy tắc và các phương pháp của việc phát minh và sáng tạo. Ta có thể tìm thấy một số di tích của việc nghiên cứu này trong những tài liệu bình luận về Ơclit ; đặc biệt, có một đoạn của Páppuýt rất bổ ích. Nhưng quen thuộc nhất trong đó tác giả cố gắng xây dựng một "thuật phát minh" có hệ thống, là những sách của Đề-các và Lépnit, cả hai đều là những nhà toán học và triết học nổi tiếng. Bônđanô cũng có một tác phẩm nói chi tiết về thuật phát minh, trong đó ông cố gắng làm sống lại môn học này dưới một dạng hiện đại (xem mục *Thuật phát minh hiện đại*).

Thuật phát minh hiện đại

Tìm hiểu phương pháp đã đưa đến lời giải của các bài toán, đặc biệt các thao tác điển hình mà trí óc dùng đến khi áp dụng phương pháp đó. Việc nghiên cứu đứng đắn về thuật phát minh phải chú trọng đến tình hình lôgic, cũng như tâm lí. Tuy không coi thường các công trình của Páppuýt, Đề-các, Lépnit hay Bônđanô, nhưng nó phải chú trọng đến kinh nghiệm khách quan. Một kinh nghiệm đúc kết từ việc giải toán và từ các phương pháp mà nhiều người đã sử dụng, đó chính là cơ sở của việc nghiên cứu thuật phát minh. Trong việc nghiên cứu này, ta sẽ không bỏ qua một loại bài toán nào và sẽ tìm cách phát hiện các nét chung cho các phương pháp khác nhau, rồi xác định các đặc trưng, chúng không phụ thuộc vào đầu đề của bài toán. Việc nghiên cứu này nhằm những mục đích thực tiễn ; một sự hiểu biết về các thao tác của trí óc điển hình trong việc giải toán có thể ảnh hưởng tốt đến các phương pháp giảng dạy, cụ thể về toán học.

Tài liệu này là một cố gắng đầu tiên để thực hiện chương trình đó. Ta hãy xét xem các mục trong tự điển có thể góp phần vào việc đó như thế nào.

1. Bảng của chúng tôi nêu lên các thao tác điển hình của trí óc khi giải toán, các câu hỏi và câu gợi ý trong bảng chính cũng nhằm vào các thao tác đó. Một số câu hỏi đã được mô tả lại trong phần thứ hai và một số khác được giải thích kĩ càng ở phần 1, có kèm theo ví dụ minh hoạ.

Khi muốn tìm hiểu một cách đầy đủ hơn về một câu hỏi hay gợi ý nào của bảng thì ta phải tra cứu mục tương ứng của tự điển có đầu đề của 15 mục trong bảng : *Đâu là ẩn ? Có thể thoả mãn điều kiện của bài toán hay không ? Có thể sử dụng kết quả tìm được hay không ?*

2. Phương pháp đưa đến lời giải các bài toán nói chung là phức tạp và có nhiều khía cạnh khác nhau. Trong 12 đề mục chính của tự điển, chúng ta nghiên cứu một cách khá chi tiết một số các khía cạnh đó.

Khi chúng ta làm việc hăng say thì chúng ta cảm thấy rõ sự tiến bộ, rất sung sướng khi tiến bộ nhanh chóng và chán nản khi tiến bộ chậm chạp. Muốn tiến bộ và đạt được kết quả trong việc giải toán thì cái giá là quan trọng nhất.

Mục tiến bộ và thành tựu nói về vấn đề đó, bạn nên đọc ngay đi.

Khi ta giải một bài toán, ta lần lượt xét mọi khía cạnh của nó, lật đi lật lại vấn đề trong trí óc, cần thiết phải *biến đổi bài toán*. Ta có thể biến đổi bằng cách *phân chia và tổ hợp lại* các yếu tố của bài toán, trở về *định nghĩa* một số danh từ ; ta cũng có thể sử dụng các phương tiện của phép *tổng quát hoá, phép tương tự ...*

Ta phải phân biệt cẩn thận các bài toán tìm ẩn và các bài toán chứng minh. Bảng của chúng ta đặc biệt thích ứng với loại bài toán ban đầu, muốn áp dụng nó cho các loại bài toán sau thì cần phải xét lại, sửa đổi một vài câu hỏi.

Trong tất cả các loại bài toán, cần thiết phải sử dụng các kí hiệu thích hợp và các hình vẽ.

3. Phương pháp đưa đến lời giải các bài toán thường xuất hiện với nhiều vẻ khác nhau. Trong tài liệu này, chúng tôi không đề cập đến tất cả các khía cạnh đó vì chúng tôi nghĩ rằng, trong một quyển sách nhỏ chưa có đủ chỗ để nghiên cứu các điểm quan trọng tế nhị hoặc thuộc một phạm vi chuyên môn quá hẹp.

Một lí luận tạm thời, tuy chỉ là hợp lí thôi, nhưng cũng có giá trị nhất định trong việc tìm ra lời giải, nhưng ta không được công nhận nó như một cách chứng minh. Mỗi một người cần dự đoán, xây dựng các giả thiết, nhưng còn phải *khảo sát* các giả thiết đó.

Đối với chúng ta thì việc xét lược đồ lôgic có một ý nghĩa lớn nhưng không nên đưa vào các danh từ quá chuyên môn. Chỉ có hai mục nói về các phương diện tâm lí ; đó là mục : *quyết tâm, hi vọng, thành công và hoạt động tiềm thức* và một mục nói về tâm lí động vật (xem : *lí luận giật lùi*).

Chúng tôi đã nhấn mạnh rằng tất cả các loại bài toán, đặc biệt các *bài toán thực tiễn* và cả những câu đố, cũng thuộc về thuật phát minh. Chúng tôi cũng đã nhấn mạnh rằng người nghiên cứu đúng đắn không thể thừa nhận những *quy tắc vạn năng*, thuật phát minh bàn về thái độ, cách xử lí của con người trước các bài toán. Điều này ngay từ thời cổ sơ con người hình như cũng đã đề cập đến và có lẽ đã được phản ánh trong *tinh thần các câu tục ngữ.*

4. Chúng tôi đã đưa vào tài liệu này một số mục về các vấn đề chi tiết và giải thích khá cặn kẽ về các vấn đề trong phạm vi cần thiết.

Một số mục đề cập đến các vấn đề chung được trình bày chi tiết vì chúng rất quan trọng đối với thầy giáo và học trò như mục Páppuýt, lí luận giật lùi, phản chứng và chứng minh gián tiếp, quy nạp và quy nạp toán học, đặt phương trình khảo sát thứ nguyên và tại sao phải chứng minh. Một số mục nhằm phục vụ các thầy giáo, chẳng hạn mục *bài toán điển hình, chẩn đoán*, một số khác nhằm giúp các học sinh trên trung bình như là *người giải toán thông thạo, người đọc sách thông minh và nhà toán học tương lai.*

Cần để ý rằng, các mục đối thoại giữa thầy giáo và học sinh (mục 8, 10, 18, 19, 20 và nhiều nơi khác) có thể làm mẫu không những cho thầy giáo khi hướng dẫn học sinh mà còn cho cả những người tự học cần giải toán. Mô tả ý nghĩ như một cuộc đối thoại với chính mình, điều đó không phải là sai. Những cuộc đối thoại nói trên làm nảy sinh ra sự tiến bộ ; người giải toán tự nói với chính mình và có thể tiến bộ trong các điều kiện tương tự.

5. Chúng tôi sẽ không kể hết tất cả các đề mục còn lại mà chỉ nêu ra một vài đề mục và xếp đặt theo từng chủ đề.

Một số mục nói về lịch sử như mục *Đề-các, Lépnit, Bônđanô, thuật phát minh, các danh từ cũ mới và Páppuýt.*

Một số đề mục khác giải thích các danh từ chuyên môn : *giả thiết, hệ quả, bổ đề.*

6. Thuật phát minh nhằm tổng quát hoá, nhằm nghiên cứu các phương pháp không phụ thuộc vào vấn đề cụ thể nào và ứng dụng được cho các loại bài toán. Tuy nhiên, về nguyên tắc, tài liệu chỉ trình bày những ví dụ về toán sơ cấp, điều đó cũng hạn chế một phần nào việc nghiên cứu của chúng ta, nhưng chúng tôi hi vọng là đường hướng chính sẽ không bị ảnh hưởng. Thật vậy, các bài toán thuộc về toán học sơ cấp cũng khá phong phú và việc nghiên cứu các phương pháp giải những bài toán đó cũng rất lí thú và dễ hiểu. Ngoài ra, các bài toán thực tiễn cũng được đề cập, mặc dù chúng được xét ít hơn. Còn về các bài toán thuần tuý toán học khó hơn thì không bao giờ được đề cập đến một cách trực tiếp, nhưng chính đó là hậu phương của tài liệu này. Nhà toán học nào có kinh nghiệm muốn đi sâu vào vấn đề này thì có thể dễ dàng bổ sung công việc của chúng tôi bằng những ví dụ trong kinh nghiệm bản thân, nhằm tự làm sáng tỏ những vấn đề mà chúng tôi chỉ minh hoạ bằng ví dụ sơ cấp.

Thực hiện chương trình (đề án)

Phác hoạ một chương trình (đề án) và thực hiện nó cho có kết quả là hai việc khác nhau. Với các bài toán thì cũng vậy. Giữa sự phác hoạ (đề án) và sự thực hiện đề án đó, tính chất của công việc có khác nhau.

1. Chúng ta có thể bằng lòng với những suy luận tạm thời và "nghe được" để cuối cùng đi đến suy luận chặt chẽ. Cũng ví như người ta dùng giàn gỗ chống tạm một cái cầu trong khi xây dựng. Khi công việc xây dựng đã tiến hành đến một giai đoạn nào đó thì người ta phá dần đi và chiếc cầu tự nó phải đứng vững được. Tương tự như vậy, khi cách giải đã gần xong thì ta vứt bỏ mọi suy luận tạm thời và chỉ là "nghe được" và kết quả phải được trình bày với suy luận chặt chẽ.

Khi ta phác hoạ đề án để đưa đến lời giải, ta không ngần ngại gì mà không dùng một suy luận tạm thời, có tính chất mò mẫm vì bất cứ điều gì có thể đưa đến một ý đúng thì điều đó là chính đáng. Nhưng khi thực hiện đề án thì phải thay đổi quan điểm đó và chỉ được thừa nhận những lí do quyết định và chặt chẽ. *Khi thực hiện đề án, phải nghiệm lại mọi chi tiết. Bạn có thể thấy rõ ràng rằng mọi chi tiết đều đúng đắn hay không ?*

Khi lập đề án, ta có thể tự do "mò mẫm" bao nhiêu thì khi thực hiện đề án ta phải nghiệm lại cẩn thận bấy nhiêu.

2. Ta phải chú trọng đến trình tự phải theo để thực hiện các chi tiết của đề án, nhất là khi gặp một bài toán phức tạp. Không được quên một chi tiết nào, phải hiểu sự liên hệ của mỗi chi tiết với toàn bộ và sự liên hệ giữa các giai đoạn quan trọng với nhau. Nếu vậy là ta phải tiến hành có thứ tự.

Đặc biệt, khi chưa có đầy đủ lí do để nói rằng các suy luận chính của chúng ta là đúng đắn thì không nên vội xét các chi tiết phụ. Nếu có một chỗ sơ hở trong toàn bộ thì hà tất phải mất thì giờ để nghiệm lại một chi tiết không quan trọng.

Trình tự mà chúng ta nên theo để khảo sát các chi tiết của một bài toán có thể rất khác với trình tự mà chúng ta đã tìm ra các chi tiết đó ; và cuối cùng, lúc trình bày lời giải trên giấy thì có thể ta lại phải theo một trình tự khác nữa. Trong bộ "Nguyên lí" của Ơclit, các chi tiết trong suy luận được trình bày theo một thứ tự vững chắc và hệ thống, điều đó đã được nhiều người noi theo, nhưng cũng đã bị nhiều người công kích.

3. Trong tập "Nguyên lí" của Ơclit, mọi lập luận đều đi theo con đường : từ các dữ kiện đến các ẩn số trong các bài toán về tính toán, từ giả thiết đến kết luận trong các bài toán về chứng minh. Một yếu tố mới như điểm, đường ... đều là hệ quả tất nhiên của các dữ kiện hay các yếu tố đã tìm ra từ trước. Mọi điều khẳng định mới cũng đều được chứng minh dựa trên giả thiết hay trên các điều đã được chứng minh trước đây. Mọi yếu tố mới, mỗi điều khẳng định mới đều được nghiên cứu ngay khi chúng mới xuất hiện lần đầu tiên và như vậy chỉ được nghiên cứu có một lần.

Do đó, ta có thể tập trung chú ý vào giai đoạn trước mắt của suy luận mà không cần nhìn lại các giai đoạn đã qua hay các giai đoạn chưa đến. Yếu tố cuối cùng phải nghiệm lại là kết luận của định lí. Nếu mỗi giai đoạn đều thực hiện tốt thì toàn bộ suy luận sẽ đứng vững.

Chúng tôi tha thiết khuyên độc giả nên sử dụng cách trình bày theo lối Ơclit, mỗi khi cần khảo sát lại chi tiết các suy luận. Đặc biệt, nếu nó là suy luận của bản thân chúng ta, có khi dài và phức tạp, nhưng đã được khảo sát trong các nét lớn và đã đến giai đoạn chỉ cần xét lại các chi tiết mà thôi thì điều tốt nhất là viết toàn bộ suy luận đó theo lối Ơclit.

Ngược lại, khi ta muốn truyền lại lập luận của ta cho một người khác chưa hề biết gì về suy luận đó thì cách trình bày theo lối Ơclit không phải bao giờ cũng nên theo. Cách trình bày của Ơclit hoàn toàn tốt khi cần nhấn mạnh mỗi điểm riêng biệt. Nhưng nó lại không hoàn toàn thích hợp nếu ta muốn nhấn mạnh đến mấu chốt của suy luận. Người độc giả thông minh có thể thử lại dễ dàng một giai đoạn, nhưng lại rất khó nhìn thấy nguồn gốc, mục đích của từng giai đoạn và sự liên hệ của các giai đoạn trong toàn bộ. Đó chính là vì cách trình bày của Ơclit đã đi theo một trình tự mà hầu như lúc nào cũng ngược lại với trình tự tự nhiên khi sáng tạo (cách trình bày của Ơclit theo trình tự "tổng hợp" một cách chặt chẽ (xem mục Páppuýt, đặc biệt các điểm 3, 4 và 5).

4. Tóm lại, cách trình bày của Ơclit đi từ dữ kiện đến ẩn số, từ giả thiết đến kết luận ; nó là hoàn hảo khi cần nghiệm lại một lập luận về chi tiết, nhưng nó không thích hợp lắm khi muốn làm cho người khác hiểu các nét lớn của suy luận.

Đối với học sinh thì nên khảo sát các suy luận của bản thân mình theo lối Ơclit, nghiệm lại mỗi chi tiết và đi từ dữ kiện đến ẩn số ; tuy nhiên, cũng không nên buộc họ phải nhất thiết theo trình tự đó một cách cứng nhắc. Đối với nhà giáo thì không nên trình bày đa số các chứng minh của mình hoàn toàn theo lối Ơclit, nhưng cách trình bày này có thể rất bổ ích một khi mà học sinh đã nhờ có hướng dẫn mà nắm được ý chính của lời giải. Cuối cùng, chúng ta có thể, trong một chừng mực nào đó, tán thành ý kiến của một số tác giả đã sơ bộ phác hoạ ý chính một cách trực giác trước khi trình bày toàn bộ các chi tiết theo trình tự Ơclit.

5. Để được bảo đảm chắc chắn về các kết quả của mình, nhà toán học cố gắng nhìn thấy các kết quả đó một cách trực giác và đưa ra một suy luận lôgic. *Bạn có thể nhìn thấy sự đúng đắn của các kết quả đó một cách rõ ràng không ? Có thể chứng minh rằng nó là đúng hay không ?* Ở đây, nhà toán học giống như người phụ nữ đi mua sắm, khi muốn chắc chắn về phẩm chất của một loại vải thì phải nhìn tận nơi và sờ đến thứ vải đó. Trực giác và suy luận lôgic là hai cách khác nhau để nhận thức chân lí, cũng tương tự như có hai giác quan để biết một vật : thị giác và xúc giác.

Trực giác có thể đi trước và đi trước xa suy luận lôgic. Bất cứ một học sinh thông minh nào, tuy chưa học hình học không gian một cách hệ thống cũng đều có thể thấy được rằng hai đường thẳng song song với một đường thứ ba thì song song với nhau (ba đường thẳng có thể nằm trong một mặt phẳng hay không). Tuy nhiên, để chứng minh điều đó như trong quyển II của bộ "Nguyên lí" của Ơclit, cần có chuẩn bị lâu dài, tỉ mỉ, tài tình.

Việc sử dụng các quy tắc của lôgic và các công thức đại số có thể đi xa hơn nhiều so với trực giác. Mọi người (hay hầu hết mọi người) đều có thể quan niệm tức khắc rằng ba đường thẳng lấy một cách tình cờ, chia cắt mặt phẳng ra bảy phần. Nhưng hầu như không một ai có thể thấy được, dù có tập trung tư tưởng đến cao độ, rằng năm mặt phẳng lấy tình cờ chia không gian ra làm hai mươi sáu phần. Tuy nhiên, ta có thể chứng minh chặt chẽ rằng con số đó đúng là 26 và cách chứng minh cũng không dài và khó lắm.

Khi thực hiện chương trình, chúng ta nghiệm lại từng chi tiết một ; muốn thế, ta có thể dựa trên trực giác hoặc dựa trên các quy tắc lôgic ; có khi thì trực giác đi trước, có khi lại là lí luận lôgic đi trước, cả hai phương tiện đó cũng là một sự tập dượt bổ ích và lí thú. *Bạn có thể thấy rõ ràng rằng giai đoạn trước mắt của suy luận là đúng đắn ?* Có, tôi có thể nhìn thấy rõ ràng điều đó ; khi đó trực giác đi đầu ; nhưng có thể kết hợp trực giác với suy luận lôgic ? *Bạn có thể đồng thời chứng minh bằng suy luận ?*

Cố gắng chứng minh bằng suy luận những điều mình đã nhìn thấy bằng trực giác, đó là một cách tập dượt về trí óc tuyệt hay. Rủi thay, trong lớp học ta thường không có đủ thì giờ để làm việc đó. Ví dụ, ở các mục 12 và 14 là tiểu biểu cho vấn đề này.

Tiến tới và đạt được

Bạn đã tiến bộ được chút nào chưa ? Kết cục căn bản là như thế nào ? Đó là một câu hỏi mà ta có thể tự đặt ra khi giải một bài toán, hay đặt ra cho học sinh khi ta hướng dẫn họ làm toán. Và như vậy, ta dần dần có thói quen nhận xét một cách khá chắc chắn những tiến bộ và thành tựu trong những trường hợp cụ thể đó. Bước chuyển sang trình bày vấn đề một cách tổng quát không phải là đơn giản.

Dù sao, muốn trình bày việc nghiên cứu về thuật tìm tòi cho khá đầy đủ thì ta phải cố mà nhận thức cho rõ ràng đâu là những nét chính về tiến bộ và thành tựu của chúng ta khi giải bài toán.

1. Muốn giải một bài toán, ta phải có một số hiểu biết nào đó về chủ đề và chọn trong số các kiến thức của ta, cái nào là cần thiết. Sau khi chọn như vậy thì quan niệm của ta về bài toán sẽ phong phú hơn lúc đầu nhiều ; vậy, chúng ta đã thêm gì vào đấy ? Đó là những điều mà ta đã rút ra trong trí nhớ. Muốn có được lời giải, ta phải nhớ lại các sự kiện cốt yếu, nhớ lại các bài toán đã giải trước, những định lí đã biết, những định nghĩa nếu là một bài toán thuần tuý toán học. Ta có thể xem việc rút ra những yếu tố cần thiết từ trong kí ức như là một hình thức *động viên.*

2. Tuy nhiên, muốn giải một bài toán mà chỉ nhớ lại những sự kiện riêng biệt thì chưa đủ, mà phải tổ hợp chúng lại với nhau cho thích nghi với bài toán trước mặt. Khi giải một bài toán thuần tuý toán học chẳng hạn, ta phải xây dựng từ các vật liệu do trí nhớ đưa lại, một suy luận hoàn toàn thích ứng với hoàn cảnh. Sự hoạt động đó gồm có sự làm cho thích nghi và tổ hợp, có thể gọi là công việc *tổ chức.*

3. Thực ra, không thể tách rời huy động với tổ chức. Nếu chúng ta tập trung suy nghĩ vào một bài toán thì ta chỉ nhớ lại những sự kiện ít nhiều có liên quan đến mục đích của ta và chỉ tổ chức các vật liệu mà ta đã nhớ ra và đã huy động được.

Việc huy động và tổ chức là hai mặt của cùng một quá trình phức tạp, quá trình này còn bao gồm nhiều mặt khác.

4. Một phương diện khác của sự tiến bộ là : *cách quan niệm của chúng ta thay đổi*. Do những yếu tố mà ta đã nhớ lại được, mà ta đã làm cho thích nghi với bài toán nên quan niệm của chúng ta về bài toán sau này được phong phú hơn nhiều so với lúc đầu. Muốn chuyển từ quan niệm ban đầu sang một quan niệm mới đầy đủ hơn, thích hợp hơn, ta phải xét mọi khía cạnh khác nhau của bài toán. Trong thực tế, ta không thể nào có được tiến bộ mà không *biến đổi bài toán*.

5. Trong quá trình tiến bộ, ta càng ngày càng nhìn rõ dần mục tiêu cuối cùng, điều đó chứng tỏ là ta đã đi gần đến mục tiêu. Khi đó, ta càng ngày càng *tiên đoán* được rõ ràng hơn những điều phải làm để đi đến lời giải. Khi giải một bài toán thuần tuý toán học, ta có thể trông trước (với ít nhiều may rủi) là có thể dùng một định lí nào đó, là có lẽ nên nhớ lại một bài toán nào đó đã giải rồi hay cần thiết phải nhớ lại định nghĩa của một danh từ chuyên môn nào đó. Những điều tiên đoán này không phải là tuyệt đối mà chỉ thích hợp mà thôi. Ta chỉ chắc chắn sau khi có lời giải hoàn toàn ; nhưng trước đó, nhiều khi ta phải bằng lòng với những ước đoán. Nếu không nhờ đến những điều nhận xét tạm thời thì không bao giờ ta có thể đi đến lời giải chắc chắn được.

6. Tiến bộ là gì ? Đó là đạt được những kết quả trong việc huy động và tổ chức các kiến thức, có được những biến đổi trong quan niệm về các điều cần phải làm để đi đến kết quả cuối cùng. Sự tiến bộ đó có thể rất chậm không cảm thấy được, nhưng thỉnh thoảng nó lại đột biến thình lình, theo bước nhảy vọt. Sự tiến triển đột nghiên đó gọi là một *sáng kiến*. Sáng kiến là gì ? Đó là một sự thay đổi thình lình và căn bản về quan điểm, về cách nhìn vấn đề, về cách thấy trước những giai đoạn đưa đến kết quả.

7. Các điều nhận xét trên đây tạo thành "hậu trường" của những câu hỏi và điều gợi ý trong bảng của chúng tôi.

Một số lớn các câu hỏi và gợi ý đó có mục đích trực tiếp là huy động các kiến thức cũ. *Bạn đã gặp bài toán đó lần nào chưa ? Hay đã gặp nó dưới một dạng hơi khác ? Bạn có biết một bài toán nào có liên quan ? Một định lí có thể sử dụng được ? Xét kĩ cái chưa biết. Thử nhớ lại một bài toán nào quen thuộc có cùng ẩn hay có ẩn tương tự.*

Có những trường hợp ta nghĩ rằng đã thu thập những vật liệu cần thiết và lúc đó ta tìm cách tổ chức tốt hơn những điều mà ta đã động viên. *Đây là một bài toán có liên quan đến bài toán hiện tại mà bạn đã có lần giải rồi. Có thể sử dụng được kết quả của nó không ? Hãy sử dụng phương pháp ? Có cần phải đưa thêm một yếu tố phụ thì mới sử dụng được không ?*

Có những trường hợp khác cũng điển hình, trong đó ta cho là chưa thu thập được đầy đủ vật liệu. Ta tự hỏi còn thiếu cái gì ? *Anh đã sử dụng tất cả các dữ kiện hay chưa ? Đã xét toàn bộ điều kiện chưa. Đã xét đến mọi khái niệm cốt yếu của bài toán chưa ?*

Một số câu hỏi có mục đích trực tiếp làm biến đổi bài toán. *Có thể phát biểu bài toán một cách khác không ? Một cách khác nữa ?* Nhiều câu hỏi có mục đích biến đổi bài toán nhờ những phương tiện đặc biệt, như là trở về *định nghĩa, sử dụng phương pháp tương tự, tổng quát hoá, đưa về trường hợp đặc biệt, phân tích và tổ hợp lại bài toán.*

Nhiều câu hỏi khác có mục đích gợi ý cách *tiên đoán* tính chất của lời giải phải tìm : *Có thể thoả mãn được điều kiện của bài toán hay không ? Điều kiện đó có đủ để xác định ẩn hay không ? Hay chưa đủ ? Hay là thừa ? Hay mâu thuẫn ?*

Những câu hỏi và gợi ý trong bảng không đả động đến *sáng kiến* nhưng thực ra tất cả đều nhằm gợi ra sáng kiến. Khi tìm cách hiểu bài toán, thực tế ta đã chuẩn bị điều kiện sáng kiến ; khi phác hoạ đề án, ta tìm cách làm phát sinh sáng kiến. Khi đã phát sinh được một "ý loé sáng" ta áp dụng nó bằng cách nhìn lại quá trình và kết quả của cách giải ta tìm cách khai thác nó đến cùng.

Tương tự

Tương tự là một loại giống nhau. Những vật giống nhau phù hợp với nhau theo một quan hệ nào đó trong khi các vật tương tự phù hợp nhau theo *những quan hệ* giữa các phần tử tương ứng.

1. Hình chữ nhật tương tự với hình hộp chữ nhật. Thực vậy, những quan hệ giữa các cạnh của hình chữ nhật giống như những quan hệ giữa các mặt của hình hộp chữ nhật.

Mỗi cạnh của hình hộp chữ nhật chỉ song song và bằng cạnh đối diện, vuông góc với những cạnh còn lại.

Ta quy ước gọi các cạnh của hình chữ nhật là những phần tử biên và cũng gọi các mặt của hình hộp như vậy. Khi đó, ta có thể kết hợp hai điều xác nhận trên làm một, áp dụng được cho cả hai hình.

Mỗi một "phần tử biên" chỉ song song với một phần tử biên khác và bằng phần tử đó, còn thì vuông góc với các phần tử biên còn lại.

Như vậy, chúng ta đã biểu diễn những quan hệ xác định, chung cho hai hệ đối tượng mà ta so sánh là các cạnh của hình chữ nhật và các mặt biên của hình hộp. Sự tương tự giữa các hệ đó là ở tính phổ biến của các quan hệ.

2. Tư duy chúng ta đầy rẫy những sự tương tự : tiếng nói thông thường hàng ngày và những sự suy diễn tầm thường, ngôn ngữ của các tác phẩm nghệ thuật và những thành tựu khoa học cao xa. Mức độ của sự tương tự có thể khác nhau. Người ta thường sử dụng những sự tương tự khó hiểu, mơ hồ, không đầy đủ và không hoàn toàn rõ ràng, tuy rằng sự tương tự có thể đạt được mức độ chính xác của toán học. Ta không nên coi thường mọi hình thức tương tự nào, mỗi một sự tương tự đều có thể đóng một vai trò nhất định trong việc tìm ra lời giải các bài toán.

3. Chúng ta có thể coi là may mắn nếu như chúng ta tìm được một *bài toán tương tự đơn giản hơn* bài toán đã cho. Ở mục 15, trong bài toán đầu tiên về đường chéo của hình hộp chữ nhật ; chúng ta đã đi tới cách giải, bằng cách xét bài toán tương tự đơn giản hơn về đường chéo của hình chữ nhật. Ở đây, ta xét thêm một ví dụ thuộc loại này. Giả sử, ta phải giải bài toán sau : *Hãy tìm trọng tâm của một tứ diện thuần nhất.*

Đây không phải là một bài toán dễ giải nếu như không biết phép tính tích phân và chút ít cơ học. Nó là một bài toán khoa học nghiêm túc thời Acsimet và Galilê.

Nếu ta muốn giải bài toán này, trong khi chỉ có những kiến thức sơ bộ tối thiểu thì cần phải tìm một bài toán tương tự đơn giản hơn.

Tự nhiên là chúng ta nghĩ đến bài toán tương ứng trong mặt phẳng.

Tìm trọng tâm của một tam giác thuần nhất.

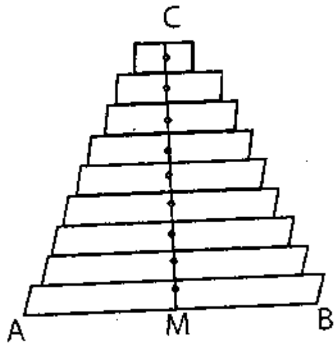
Bây giờ, ta có hai câu hỏi chứ không phải một. Nhưng trả lời hai câu hỏi này còn đơn giản hơn là chỉ trả lời một câu, với điều kiện là hai câu hỏi đó liên hệ với nhau một cách hợp lí.

4. Tạm thời để hai bài toán ban đầu về tứ diện sang một bên, chúng ta tập trung chú ý vào bài toán tương tự về tam giác, đơn giản hơn. Có lẽ tự nhiên chúng ta nghĩ tới nguyên lí sau đây :

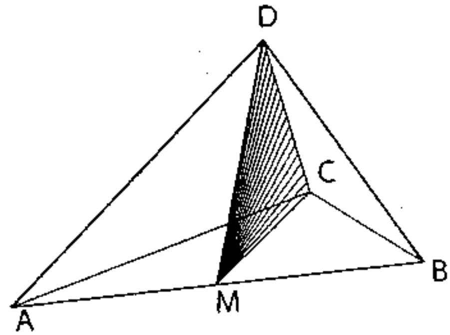
Nếu một hệ S gồm những hạt có khối lượng sao cho trọng tâm riêng của chúng cũng nằm trên một mặt phẳng thì trọng tâm của cả hệ S cũng sẽ nằm trên mặt phẳng đó.

Nguyên lí này cho ta mọi cái cần thiết để khảo sát trường hợp một tam giác.

Thứ nhất, từ nguyên lí trên, ta suy ra rằng trọng tâm của tam giác nằm trên mặt phẳng của tam giác. Thứ hai, ta có thể coi tam giác gồm những sợi thẳng, mỗi sợi là một hình bình hành "vô cùng hẹp" có đáy song song với cạnh của tam giác (cạnh AB trên hình 26). Trọng tâm của mỗi giải (là một hình bình hành bất kì) rõ ràng trùng với tâm của nó. Tâm của các giải nằm trên đoạn thẳng nối đỉnh C, đối diện cạnh AB với trung điểm M của AB (h. 26).



Hình 26



Hình 27

Một mặt phẳng bất kì đi qua trung tuyến CM của tam giác sẽ chứa các trọng tâm của mọi giải song song tạo thành một tam giác.

Thành thử, ta đi tới kết luận là trọng tâm của cả tam giác nằm trên đường trung tuyến nói trên.

Cũng suy luận như vậy, ta thấy trọng tâm của tam giác cũng phải nằm trên hai trung tuyến kia, tức là trọng tâm trùng với *giao điểm của ba trung tuyến*.

Bây giờ, cần chứng tỏ bằng hình học thuần tuý (không phụ thuộc vào các giả thiết cơ học) rằng ba trung tuyến của tam giác cắt nhau tại một điểm.

5. Sau khi trường hợp tam giác đã khảo sát thì trường hợp tứ diện cũng không có khó khăn đặc biệt gì. Trên đây, chúng ta đã giải một bài toán tương tự với bài đã cho. Giải xong bài toán đó, chúng ta đã có trong tay *một bài toán mẫu để theo*. Trong khi giải bài toán tương tự, mà bây giờ ta dùng làm bài toán mẫu, chúng ta đã coi tam giác ABC như gồm những sợi song song với một cạnh, AB chẳng hạn. Bây giờ, ta sẽ coi tứ diện $ABCD$ như gồm những sợi song song với một cạnh, như AB chẳng hạn.

Các trung điểm của những sợi tạo thành một tam giác nằm trên một đường thẳng, đó là trung tuyến nối trung điểm M của AB với đỉnh đối diện C.

Các trung điểm của các sợi tạo nên một tứ diện sẽ nằm trên một mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và cạnh đối diện CD (h. 27). Ta có thể gọi mặt phẳng MCD đó là trung diện của tứ diện.

Trong trường hợp tam giác, ta có ba trung tuyến, mà mỗi trung tuyến này đều chứa trọng tâm của tam giác. Do đó, ba trung tuyến này phải cắt nhau tại một điểm là trọng tâm tứ diện.

6. Như vậy, bài toán tìm trọng tâm một tứ diện đã được giải quyết. Để kết thúc cách giải cần chứng minh thuần tuý bằng hình học rằng sáu trung diện của một tứ diện đồng quy ở một điểm.

Khi giải bài toán tìm trọng tâm một tam giác đồng chất, chúng ta có là, để bổ sung cho cách giải cần chứng tỏ rằng ba trung tuyến của một tam giác đồng quy. Bài toán này tương tự với bài toán về tứ diện nhưng rõ ràng là đơn giản hơn.

Một lần nữa, đối với bài toán về tứ diện, chúng ta có thể dùng bài toán tương tự về tam giác, đơn giản hơn dưới đây (bài toán này như giả thiết đã giải). Thực vậy, xét ba trung diện đi qua ba cạnh DA, DB, DC có cùng đỉnh chung D.

Mỗi trung diện này sẽ đi qua trung điểm của cạnh đối diện (chẳng hạn trung diện qua DC sẽ đi qua M, xem h.27). Như vậy, ba trung diện đó cắt mặt phẳng của tam giác ABC theo ba trung tuyến của nó. Nhưng ba trung tuyến này giao nhau tại một điểm (là kết quả của bài toán tương tự đơn giản hơn). Giao điểm này, cũng như điểm D, là điểm chung của ba trung diện. Một đường thẳng đi qua hai điểm chung cho ba mặt phẳng, tất nhiên sẽ thuộc cả ba mặt phẳng đó.

Chúng ta đã chứng minh rằng ba trung diện đi qua đỉnh D chứa một đường thẳng chung. Điều đó cũng đúng với những bộ ba trung diện đi qua A cũng như qua B và C.

Bằng cách đối chiếu những sự kiện đó, ta dễ dàng chứng tỏ rằng sáu trung diện cùng đi qua một điểm (ba trung diện đi qua ba cạnh của tam giác ABC cắt nhau tại một điểm), ba đường thẳng, giao tuyến của từng cặp trung diện một cũng đi qua giao điểm đó. Nhưng, như ta đã chứng minh, qua mỗi giao tuyến đó còn có một mặt trung diện nữa đi qua.

7. Trong những điểm 5 và 6; chúng ta đã dùng một bài toán tương tự đơn giản hơn có liên quan tới một tam giác để giải bài toán về tứ diện. Tuy nhiên, hai trường hợp khác nhau ở một điểm quan trọng. Ở điểm 5, chúng ta đã dùng *phương pháp* của một bài toán tương tự đơn giản hơn và ta đã dập khuôn theo cách đó.

Trong điểm 6, chúng ta đã dùng kết quả của một bài toán tương tự đơn giản hơn mà không cần biết tới làm thế nào để có kết quả đó. Đôi khi, ta còn có thể đồng thời dùng *phương pháp* và kết quả của một bài toán tương tự đơn giản hơn.

Ví dụ trên chứng tỏ điều đó, nếu chúng ta coi những điểm 5 và 6 như những giai đoạn khác nhau của cùng một bài toán.

Ví dụ của chúng ta có tính cách điển hình. Để giải một bài toán, chúng ta thường dùng một bài toán tương tự đơn giản hơn bằng cách sử dụng hoặc *phương pháp*, hoặc kết quả của nó, hoặc là cả hai.

Hiển nhiên là, trong một số trường hợp khó khăn thì có thể có những điều phức tạp hơn. Đặc biệt, có thể xảy ra trường hợp là cách giải bài toán tương tự không áp dụng được trực tiếp để giải bài toán cho trước.

Khi đó, cần phải coi lại cách giải, sửa đổi nó cho tới khi tìm thấy một cách giải có thể áp dụng được cho bài toán ban đầu.

8. Luôn luôn nên đoán nhận trước kết quả, hay ít ra một số những đặc điểm của nó tới một chừng mực nào đó. Những sự đoán nhận như vậy thường dựa trên cơ sở của sự tương tự.

Giả sử, ta đã biết rằng trọng tâm của một tam giác đồng chất trùng với trọng tâm của ba đỉnh (tức là ba chất điểm cùng khối lượng, đặt tại ba đỉnh của tam giác). Biết điều đó, chúng ta đoán trước được rằng trọng tâm của một tứ diện đồng chất trùng với trọng tâm của bốn đỉnh của nó.

Sự phỏng đoán đó là một "sự suy luận bằng tương tự". Biết rằng tam giác và tứ diện giống nhau về nhiều điểm, chúng ta phỏng đoán rằng chúng còn giống nhau ở một điểm khác nữa.

Thật là ngớ ngẩn, nếu ta coi những sự phỏng đoán có vẻ đúng là hoàn toàn chắc chắn, nhưng lại càng ngớ ngẩn hơn nếu ta coi thường những sự phỏng đoán đó.

Sự suy luận bằng tương tự là một hình thức suy luận thông thường nhất và có thể là quan trọng nhất.

Nó dẫn chúng ta tới những phỏng đoán ít nhiều thừa nhận được và có thể kiểm tra bằng thực nghiệm hay bằng một sự suy luận chặt chẽ hơn. Nhà hoá học khi thí nghiệm trên các con vật để có thể đoán trước tác dụng của những thí nghiệm đó với con người, đã rút ra những kết luận bằng sự tương tự.

Một cậu bé mà tôi biết cũng làm tương tự như vậy. Người ta mang con chó mà cậu bé rất yêu thích đến nhà người thú y, cậu bé hỏi :

"Người thú y là ai ?".

"Là người thầy thuốc của những con vật".

"Nhưng con vật nào là thầy thuốc của những con vật".

9. Kết luận rút ra từ sự tương tự *giữa một số lớn* những sự kiện song song bao giờ cũng chắc chắn hơn là kết luận rút ra từ một số ít sự kiện, nhưng ở đây chất lượng của chúng còn quan trọng hơn số lượng.

Một sự tương tự chính xác còn có giá trị hơn là một sự giống nhau mơ hồ : những sự kiện sắp xếp có hệ thống gợi cho ta một ý sâu sắc hơn là những sự kiện tập hợp một cách ngẫu nhiên.

Trên đây (trong điểm 8) chúng ta đã đặt một giả thiết về trọng tâm của tứ diện. Giả thiết này dựa trên sự tương tự : trường hợp tứ diện tương tự với trường hợp tam giác. Chúng ta có thể làm cho giả thiết của ta được vững vàng hơn bằng cách xét thêm một trường hợp tương tự, trường hợp một thanh đồng chất. Bằng cách so sánh các hình, theo nhiều điểm, chúng ta phát hiện được sự tương tự giữa đoạn thẳng, tam giác và tứ diện.

Đoạn thẳng thuộc về đường thẳng nào đó, tam giác thuộc về một mặt phẳng, còn tứ diện thuộc về không gian. Đoạn thẳng là một hình một chiều đơn giản nhất, tam giác là một đa giác đơn giản nhất và tứ diện là một đa diện đơn giản nhất. Đoạn thẳng có hai phần tử biên không chiều (hai điểm giới hạn), các điểm trong của đoạn làm thành một tập hợp một chiều.

Tam giác có ba phần tử biên không chiều và ba phần tử biên một chiều (ba đỉnh, ba cạnh), các điểm trong làm thành một tập hợp hai chiều. Tứ diện có bốn phần tử biên không chiều, sáu phần tử biên một chiều, bốn phần tử biên hai chiều (bốn đỉnh, sáu cạnh, bốn mặt), các điểm trong của nó làm thành một tập hợp ba chiều.

Với các số đó, ta hãy lập một bảng. Những số ở các cột biểu diễn số những phần tử theo thứ tự có số chiều là không, một, hai và ba ; còn những số trong các hàng theo thứ tự ứng với đoạn thẳng, tam giác và tứ diện :

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Không cần phải thật quen với các hệ số của nhị thức mới biết được bảng trên là một phần của bảng Patcan. Chúng ta tìm thấy ở đây một tính quy luật đáng chú ý liên hệ giữa các trường hợp đoạn thẳng, tam giác và tứ diện.

10. Nếu chúng ta đã tin chắc rằng giữa các đối tượng mà ta đem so sánh có một liên hệ chặt chẽ thì "những suy luận bằng tương tự", tương tự như trường hợp mà chúng ta vừa nói có một giá trị không chối cãi được.

Trọng tâm của một đoạn đồng nhất trùng với trọng tâm hai đầu mút của đoạn. Trọng tâm của một tam giác đồng chất trùng với trọng tâm ba đỉnh của nó. Tại sao lại không thể phỏng đoán rằng trọng tâm của một tứ diện đồng chất trùng với trọng tâm bốn đỉnh của nó ?

Mặt khác, trọng tâm của đoạn thẳng đồng chất chia khoảng cách giữa hai đầu mút của đoạn theo tỉ số 1 : 1. Trọng tâm của tam giác đồng chất chia khoảng cách giữa một đỉnh bất kì và trung điểm của cạnh đối diện theo tỉ số 2 : 1. Ta không thể không nghĩ rằng, trọng tâm của một tứ diện đồng chất chia khoảng cách giữa một đỉnh bất kì và trọng tâm của mặt đối diện theo tỉ số 3 : 1.

Dường như những điều trên đây hướng ta nghĩ tới có thể mở rộng những sự kiện đang xét cho trường hợp *n* chiều. Dù đúng với ba số chiều đầu tiên (n = 1, 2, 3) thì khó mà lại không đúng với những giá trị lớn hơn của n. Giả thiết này là [illegible] "suy luận bằng quy nạp"; nó chứng tỏ rằng, phép quy nạp dựa trên cơ sở [illegible] tương tự một cách tự nhiên.

(Xem quy nạp và quy nạp toán học).

11. Chúng ta chấm dứt mục này bằng cách xét những trường hợp quan trọng, trong đó sự tương tự đạt tới tính chính xác của khái niệm toán học.

(I) Hai hệ đối tượng toán học S và S' sao cho những quan hệ xác định giữa các đối tượng của S tuân theo cùng những quy luật chi phối những quan hệ giữa các đối tượng của S'.

Loại tương tự này có thể được minh hoạ bằng ví dụ đã nêu ở đoạn 1 chỉ cần lấy S là các cạnh của hình chữ nhật và S' là các mặt biên của hình hộp.

(II) Giữa các phần tử của hai hệ S và S' có một sự liên hệ một đối một, bảo toàn một số quan hệ nào đó. Điều đó có nghĩa là nếu có quan hệ nào đó giữa các phần tử của một hệ thì giữa các phần tử tương ứng của hệ kia cũng có quan hệ đó. Mối liên hệ đó giữa hai hệ đối tượng là một loại tương tự chính xác mà ta gọi là sự đẳng cấu.

(III) Giả sử có một liên hệ một đối nhiều giữa hai hệ S và S' bảo toàn một số quan hệ nào đó. Sự tương ứng được gọi là phép đồng cấu. Nó đóng một vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học cao cấp, đặc biệt là trong lí thuyết nhóm. Ở đây, chúng ta không xét nó một cách chi tiết, phép đồng cấu cũng có thể coi là một loại tương tự rất chính xác.

Ý chói lọi

Một "ý hay" hay một sáng kiến, đó là những thành ngữ thông thường diễn tả một sự đột ngột đi tới cách giải bài toán, xem mục "tiến bộ và thành tựu". Sự nảy sinh ra một ý chói lọi thì ai cũng đều biết, nhưng mô tả nó thì thật là khó và cần phải nhờ tới uy tín cổ xưa của Aristốt để tìm thấy một cách mô tả rõ ràng.

Đa số đều đồng ý rằng, sự nảy ra một ý chói lọi phụ thuộc vào sự "sáng trí" của chúng ta. Aristốt đã định nghĩa sự "sáng trí" như sau : "sự sáng trí là khả năng, bằng cách phỏng đoán, khám phá ra những liên hệ cốt yếu của sự vật trong một khoảng thời gian nhỏ không đáng kể. Chẳng hạn, khi anh thấy một người nói với một người giàu với một cách như thế nào đó, anh có thể đoán ngay là người ấy có vay tiền của người kia. Hay là, nếu anh quan sát thấy phần sáng của Mặt trăng luôn luôn ở phía Mặt trời, anh có thể thấy ngay được nguyên nhân điều đó bằng cách phỏng đoán rằng Mặt trăng được Mặt trời chiếu sáng".

Ví dụ thứ nhất không tồi nhưng tầm thường : sự phát hiện về những người giàu có và tiền bạc, thực ra không đòi hỏi phải "sáng trí" nhiều : trong trường hợp này, cái nảy sinh ra đó không nên gọi là rất chói lọi. Ngược lại, ví dụ thứ hai gây cho mỗi người chúng ta một ấn tượng sâu sắc nếu chúng ta cố đặt nó vào hoàn cảnh của người đầu tiên viết ra những dòng trích dẫn trên.

Chúng ta nên nhớ rằng vào thời Aristốt, muốn biết giờ người ta phải nhìn Mặt trời và các Vì sao, vì lúc đó chưa có đồng hồ và muốn ra đi về đêm thì phải quan tâm đến các tuần trăng vì lúc đó không có đèn lồng ngoài phố. Họ có một sự hiểu biết về trời đất tốt hơn nhiều so với người đương thời sống ở thành phố và họ không rối trí, lầm lạc về những bài báo quàng xiên, phổ biến môn thiên văn. Họ thấy Mặt trăng như một cái đĩa dẹt, cũng như Mặt trời, nhưng ít sáng chói hơn nhiều. Hiển nhiên là họ ngạc nhiên khi quan sát thấy hình dạng và vị trí của Mặt trăng thay đổi không ngừng. Có khi họ quan sát Mặt trăng vào ban ngày, lúc Mặt trời mọc, lúc mặt trời lặn và nhận ra rằng : "phần sáng của Mặt trăng luôn luôn đối diện với Mặt trời". Đó là một thành công đáng kể. Sau đó, họ phát hiện rằng những hình thái biến đổi của Mặt trăng giống như của một quả cầu khi ta nhìn từ nhiều phía mà quả cầu này được chiếu sáng sao cho một nửa thì sáng, một nửa thì tối.

Họ đã bắt đầu cho rằng Mặt trời và Mặt trăng không phải là những đĩa dẹt mà là có dạng của những thể cầu, một thể chiếu sáng, còn thể kia được chiếu sáng. Họ đã nắm được mối liên hệ bản chất của hiện tượng và thay đổi tức khắc "trong một khoảng thời gian nhỏ không đáng kể" những quan niệm ban đầu của họ. Trong ý nghĩ của họ đã có một bước nhảy vọt ; một ý chói lọi đã đến trong đầu, không thể gọi nó là tầm thường được.

MUỐN GIẢI MỘT BÀI TOÁN, PHẢI LẦN LƯỢT

I – Hiểu rõ bài toán

II – Xây dựng một chương trình (một dữ kiện)

– Tìm sự liên hệ giữa các dữ kiện và cái chưa biết (ẩn).

– Có thể phải xét đến các bài toán phụ nếu chưa tìm được trực tiếp sự liên hệ đó.

– Cuối cùng phải xây dựng được một chương trình, một dữ kiện và cách giải.

III – Thực hiện chương trình (đề án)

IV – Khảo sát lời giải đã tìm được

I – Hiểu rõ bài toán

Đâu là ẩn ? Đâu là dữ kiện ? Đâu là điều kiện ? Có thể thoả mãn được điều kiện hay không ? Điều kiện có đủ để xác định được ẩn không ? Hay chưa đủ ? Hay thừa ? Hay có mâu thuẫn ?

– Vẽ hình. Sử dụng một kí hiệu thích hợp.

– Phân biệt các phần khác nhau của điều kiện. Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức không ?

II – Xây dựng một chương trình

Bạn đã gặp bài toán này lần nào chưa ? Hay đã gặp bài toán này ở một dạng hơi khác ?

– *Bạn có biết một bài toán nào có liên quan không ?* Một định lí có thể dùng được không ?

– *Xét kĩ cái chưa biết (ẩn) và* thử nhớ lại một bài toán quen thuộc có cùng ẩn hay có ẩn tương tự.

– *Đây là một bài toán có liên quan mà bạn đã có lần giải rồi. Có thể sử dụng nó không ?* Có thể sử dụng kết quả của nó không ? Hay sử dụng phương pháp ? Có cần phải đưa thêm một số yếu tố phụ thì mới sử dụng được nó không ?

– Có thể phát biểu bài toán một cách khác không ? Một cách khác nữa ? Quay về các định nghĩa.

– Nếu bạn chưa giải được bài toán đã đề ra, thì hãy thử giải một bài toán có liên quan. Bạn có thể nghĩ ra một bài toán có liên quan mà dễ hơn không ? Một bài toán tổng quát hơn ? Một trường hợp riêng ? Một bài toán tương tự ? Bạn có thể giải một phần bài toán không ? Hãy giữ lại một phần của điều kiện, bỏ qua phần kia. Khi đó, ẩn được xác định đến một chừng mực nào đó ; nó biến đổi như thế nào ? Bạn có thể từ các dữ kiện rút ra một yếu tố có ích không ? Bạn có thể nghĩ ra những dữ kiện khác có thể giúp bạn xác định được ẩn không ? Có thể thay đổi ẩn, hay các dữ kiện, hay cả hai nếu cần thiết, sao cho ẩn mới và các dữ kiện mới được gần nhau không ?

– Bạn đã sử dụng mọi dữ kiện hay chưa ? Đã sử dụng toàn bộ điều kiện hay chưa ? Đã để ý đến mọi khái niệm chủ yếu trong bài toán chưa ?

III – Thực hiện chương trình

Khi thực hiện chương trình *hãy kiểm tra lại từng bước*. Bạn đã thấy rõ ràng là mỗi bước đều đúng chưa ? Bạn có thể chứng minh là nó đúng không ?

IV – Khảo sát lời giải đã tìm được (nghiên cứu cách giải đã tìm ra)

– Bạn có thể kiểm tra lại kết quả ? Bạn có thể kiểm tra lại toàn bộ quá trình giải bài toán không ?

– Có thể tìm được kết quả một cách khác không ? Có thể thấy trực tiếp ngay kết quả không ?

– Bạn có thể sử dụng kết quả hay phương pháp đó cho một bài toán nào khác không ?

PHỤ LỤC

(Phụ lục này chỉ có trong bản dịch Nga văn. Nó là cải biên bản của Polya).

Giải một bài toán như thế nào ?

1. Hiểu đề toán.

2. Tìm con đường đi từ cái chưa biết đến cái đã cho bằng cách xét các bài toán phụ, nếu cần ("phân tích").

3. Thực hiện ý chính đã có được về cách giải ("tổng hợp").

4. Kiểm tra lại lời giải và phê phán.

+

1. Bài toán nói gì ? Cái gì là dữ kiện ? Cái gì phải tìm ? Cái dữ kiện đã đủ để xác định được cái phải tìm hay chưa ? hay chưa đủ ? hay thừa ?

Có thể phát biểu bài toán một cách khác ?

Có thể tìm quan hệ giữa bài toán đã cho và một bài toán nào khác mà ta đã biết cách giải không ? Hay một bài toán mà ta có thể giải dễ dàng hơn ?

Phải nhắc lại các câu hỏi này mỗi khi gặp chướng ngại khiến ta phải dừng lại, khi giải các bài toán phụ. Ngoài ra, mọi dữ kiện của bài toán đã được sử dụng chưa ?

2. Phát biểu các quan hệ giữa cái đã cho và cái chưa biết.

Biến đổi các yếu tố chưa biết : Thử đưa vào các ẩn mới, gần các dữ kiện của bài toán hơn.

Chỉ giải một phần bài toán đã thoả mãn một phần các điều kiện thôi : khi đó cái chưa biết được xác định đến mức độ nào ? (quỹ tích).

Tổng quát hoá. Cá biệt hoá. Sử dụng sự tương tự.

3. Kiểm tra lại từng bước, chỉ công nhận những điều thật rõ ràng hay đã được tính toán thật cẩn thận (Đề Các).

4. Kết quả có đúng không ? Vì sao ? Có thể kiểm tra được không ? Có con đường nào khác để đi đến cùng kết quả đó không ? Có con đường ngắn hơn không ? Trên con đường đã đi còn có thể "hái" thêm những kết quả nào khác ?

MỤC LỤC