https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

10 2006 Số 352

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

CHÚC MỪNG

TRƯỜNG ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI TUỔI 50

KHỐI THPT CHUYÊN ĐH VINH 40 NĂM

Nhóm seminar Giải tích - Đại số tại trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

Tập thể giáo viên tổ Toán - Tin khối THPT Chuyên Đại học Vinh

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỘT TRONG NHỮNG CÁI NÔI ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

Hiệu trưởng
GS.TSKH.Nguyễn Văn Mậu

Cách đây vừa tròn nửa thế kỉ, năm 1956, trong muôn vàn khó khăn của thời kì hàn gắn vết thương chiến tranh, Thủ tướng Chính phủ đã kí quyết định thành lập năm trường đại học đầu tiên của nước Việt nam Dân chủ Cộng hoà. Một trong năm trường đại học đó là trường Đại học Tổng hợp Hà Nội - trường đại học khoa học cơ bản đầu tiên của đất nước.

Từ trường Đại học Tổng hợp Hà Nội đã ra đời hai trường đại học cơ bản đầu ngành của đất nước trong giai đoạn phát triển cuối thế kỉ XX: trường Đại học Khoa học Tự nhiên (ĐHKHTN) và trường Đại học Khoa học Xã hội và Nhân văn thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội (ĐHQGHN).

Sau 50 năm xây dựng và trưởng thành, trường ĐHKHTN- ĐHQGHN ngày nay đã trở thành một trong những trung tâm đào tạo và nghiên cứu khoa học hàng đầu của đất nước. Đội ngũ cán bộ giảng dạy và nghiên cứu khoa học gồm 125 Giáo sư, Phó Giáo sư, hơn 350 Thạc sĩ, Tiến sĩ và Tiến sĩ Khoa học đang đảm nhận đào tạo gần 10.000 sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh, học sinh hệ THPT chuyên.

Nhà trường chính là nơi khởi nguồn các loại hình đào tạo tài năng cho đất nước. Năm 1965, lớp Chuyên Toán đầu tiên đã ra đời tại Khu sơ tán Đại Từ, Bắc Thái. Ngày nay hệ THPT chuyên của Nhà trường đã lớn mạnh cả về số lượng và chất lượng với sự ra đời các lớp chuyên Tin, chuyên Lí, chuyên Hoá, chuyên Sinh. Được nhúng trong môi trường đào tạo của một trường đại học khoa học cơ bản hàng đầu của đất nước với hàng trăm nhà khoa học giỏi, khối THPT chuyên của Nhà trường thực sự là cái nôi đào tạo nhân tài cho đất nước.

Từ nguồn đào tạo quý báu này, hàng nghìn cán bộ tài năng trưởng thành và phục vụ cho sự nghiệp xây dựng đất nước, trong số đó có những nhà khoa học ưu tú như GS.TSKH *Đào Trọng Thi*, Giám đốc ĐHQGHN; GS.TSKH *Trần Văn Nhung*, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo,...

Với thành tựu 40 năm đào tạo tài năng cho đất nước, Khối THPT chuyên Toán-Tin của Trường đã vinh dự được Nhà nước tặng danh hiệu Anh hùng Lao động (năm 2005).

Chương trình đào tạo Cử nhân Khoa học tài năng lần đầu tiên được thực hiện cách đây gần mười năm cũng góp phần tạo tiền đề cho Nhà trường sớm thực hiện được mục tiêu trở thành một trường đại học nghiên cứu tiên tiến.

Năm 1974, một cán bộ giảng dạy đầu tiên của Trường bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ tại Hội đồng Khoa học trong nước, mở đầu thời kì đào tạo đội ngũ cán bộ khoa học trình độ cao từ trong nước.

Kế thừa truyền thống vẻ vang của trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, Trường ĐHKHTN-ĐHGQHN trên con đường hội nhập với các nền giáo dục đại học hiện đại của khu vực và Quốc tế đã có những bước tiến dài về phía trước. Trong các giảng đường của Nhà trường hầu như không lúc nào vắng bóng những Hội thảo khoa học Quốc tế, những lớp chuyên đề do các nhà khoa học nước ngoài đến thuyết trình giảng dạy trong khuôn khổ những chương trình về hợp tác đào tạo và nghiên cứu khoa học.

Tập thể các cán bộ giảng dạy của Trường ĐHKHTN cũng là các nhà sư phạm tâm huyết với sự nghiệp giáo dục đào tạo, hàng năm đã công bố vài trăm công trình nghiên cứu trong và ngoài nước, tham gia viết hàng chục giáo trình, sách tham khảo, thẩm định sách giáo khoa, giảng dạy các lớp bồi dưỡng giáo viên trong các dịp hè.

Với những thành tựu đạt được, trường ĐHKHTN - ĐHQGHN đã vinh dự được Nhà nước tặng thưởng danh hiệu và phần thưởng cao quý: Đơn vị Anh hùng thời kì đổi mới (năm 2000), Huân chương Hồ Chí Minh (năm 2001).

Khai thác thêm MỘT BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC để giải toán

TRỊNH XUÂN LƯU
(Hà Nội)

Thường tâm lí của các bạn học sinh khi gặp những bài toán bất đẳng thức (BĐT) hay bài toán cực trị thì cảm thấy bất an và tự hỏi: Liệu mình có làm được không? Bài viết này muốn trao đổi với các bạn cách giải một số bài toán cùng dạng mà có thể nhìn theo hướng của một BĐT quen thuộc trong chương trình phổ thông.

Trong chương trình phổ thông ta biết các bất đẳng thức cơ bản sau:

* Với hai số dương x_1, x_2 luôn có

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ge\frac{4}{x_1+x_2} \qquad (1)$$

* Với ba số dương x_1, x_2, x_3 ta có

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\ge\frac{9}{x_1+x_2+x_3} \qquad (2)$$

* Mở rộng hơn, với $x_i>0$ ($i=1, 2,..., n$) thì

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\ge\frac{n^2}{x_1+x_2+...+x_n} \qquad (3)$$

Cả ba BĐT trên đều có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_i = x_j$ với mọi i, j ($i \ne j$). Dễ dàng chứng minh được chúng bằng cách áp dụng BĐT Cauchy hoặc Bunhiacovski

Tổng quát hơn, với $b_i > 0$ ($i=1, 2,..., n$) thì luôn có

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n} \qquad (4)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}.$$

Bạn đọc có thể chứng minh BĐT (4) bằng cách áp dụng BĐT Bunhiacovski (xem bài *Một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng* THTT số 328, tháng 10-2004).

Ta có thể áp dụng các BĐT trên để giải một số bài toán sau đây.

✪ **Bài toán 1.** *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}$$
$$\ge\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+2c+a}\ge\frac{2}{a+2b+c};$$

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+2a+b}\ge\frac{2}{b+2c+a};$$

$$\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{2}{c+2a+b}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên, ta nhận được BĐT cần chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+3b=b+2c+a\\ b+3c=c+2a+b\\ c+3a=a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.\square$$

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thoả mãn abc= ab+bc+ca thì* $\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}<\frac{3}{16}$.

Lời giải

Từ $abc = ab + bc + ca$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Đặt $x=\frac{1}{a}$; $y=\frac{1}{b}$; $z=\frac{1}{c}$ thì $x + y + z = 1$.

Áp dụng BĐT (3) ta có

$$a+2b+3c=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\geq\frac{36}{x+2y+3z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+2b+3c}\leq\frac{x+2y+3z}{36}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b+2c+3a}\leq\frac{y+2z+3x}{36};$$

$$\frac{1}{c+2a+3b}\leq\frac{z+2x+3y}{36}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên dẫn đến

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+2c}$$

$$\leq\frac{6(x+y+z)}{36}=\frac{1}{6}<\frac{3}{16}.\ \square$$

✪ **Bài toán 3.** *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$B=\frac{a^6}{b^3+c^3}+\frac{b^6}{c^3+a^3}+\frac{c^6}{a^3+b^3}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$.

Lời giải. Áp dụng BĐT (4) ta có

$$B\geq\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{2(a^3+b^3+c^3)}=\frac{a^3+b^3+c^3}{2}.$$

Theo BĐT Bunhiacovski

$$9(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\geq\left[3(a^2+b^2+c^2)\right]^2\geq(a+b+c)^4$$

suy ra $a^3+b^3+c^3\geq\frac{1}{9}\Rightarrow B\geq\frac{1}{18}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng $\frac{1}{18}$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. $\square$

✪ **Bài toán 4.** *Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Biến đổi vế trái của BĐT trên và áp dụng BĐT (4) ta có

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ba}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ca+cb}$$

$$=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Mặt khác, theo BĐT Cauchy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq3\sqrt{\frac{1}{abc}}=3.$$

Từ đó ta suy ra BĐT cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

✪ **Bài toán 5.** *Chứng minh rằng*

$$\frac{2x}{x^6+y^4}+\frac{2y}{y^6+z^4}+\frac{2z}{z^6+x^4}\leq\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}$$

với x, y, z là các số dương.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng BĐT (4), ta có

$$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}=\frac{x^2}{x^6}+\frac{1}{y^4}\geq\frac{(x+1)^2}{x^6+y^4}\geq\frac{4x}{x^6+y^4}.$$

(Xem tiếp trang 7)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10
THPT chuyên ĐẠI HỌC VINH
năm học 2006-2007

Môn Toán

VÒNG 1
(*Thời gian làm bài : 150 phút*)

Câu 1. (*2 điểm*)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì

$n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

Câu 2. (*3 điểm*)

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y = 19 \\ xy(x-1)(y-2) = -20. \end{cases}$$

b) Giải phương trình

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3.$$

Câu 3. (*1,5 điểm*)

Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 6x - 5)^{2006}$.

Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{3+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{17}}$.

Câu 4. (*3,5 điểm*)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Gọi EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (E thuộc $(O; R)$ và F thuộc $(O'; R')$). Đường thẳng AB cắt EF tại K. Gọi I là điểm đối xứng của A qua K (A nằm giữa B và I).

a) Có nhận xét gì về tứ giác $AEIF$?

b) Gọi M là trung điểm của OO'. Cho biết $MA = MO'$. Hãy tính độ dài EF theo R và R'.

VÒNG 2
(*Thời gian làm bài : 150 phút*)

Câu 5. (*1,5 điểm*)

Tìm số nguyên dương a sao cho

$a^{1966} + a^{2006} + 1$ là số nguyên tố.

Câu 6. (*3 điểm*)

a) Giải phương trình

$$x^4 + 4x^3 - 8x - 12 = 0.$$

b) Xác định số nguyên m để phương trình sau có nghiệm nguyên

$$x^2 - m(m+1)x + 3m - 1 = 0.$$

Câu 7. (*1,5 điểm*)

Chứng minh rằng $a^2b^2(a^2 + b^2) \leq 128$, với a, b là các số thực dương thoả mãn hệ thức $a + b = 4$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 8. (*4 điểm*)

Cho tam giác đều ABC, có O là trung điểm của cạnh BC. Vẽ góc xOy bằng 60^0 sao cho các tia Ox, Oy cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh rằng $BC^2 = 4BE.FC$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi góc xOy quay xung quanh O sao cho các tia Ox, Oy vẫn cắt các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC.

LÊ QUỐC HÁN - LÊ XUÂN SƠN
(giới thiệu)

ĐẶT MUA TẠP CHÍ THTT DÀI HẠN TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC

Lời giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội

năm học 2006 - 2007

(Đề thi đã đăng trên THTT số 351, tháng 9 năm 2006)

NGÀY THỨ NHẤT

Câu 1. $P = 3 + \frac{a}{b-c}A + \frac{b}{c-a}B + \frac{c}{a-b}C$,

với $A = \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}$; $B = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a}$;

$C = \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$. Ta có

$$\frac{a}{b-c}A = \frac{a}{(b-c)bc}[(ab-ac)-(b^2-c^2)]$$

$$= \frac{a(b-c)[a-(b+c)]}{(b-c)bc} = \frac{2a^3}{abc}.$$

Tương tự $B = \frac{2b^3}{abc}$; $C = \frac{2c^3}{abc}$.

Do đó $P = 3 + \frac{2}{abc}(a^3+b^3+c^3)$

$$= 3 + \frac{2}{abc}[(-b-c)^3 + b^3 + c^3]$$

$$= 3 + \frac{2}{abc}[-3bc(b+c)] = 9.$$

Câu 2. Ta có

$T = (x+y)(x+z) = x(x+y+z) + yz$

$\geq 2\sqrt{x(x+y+z)yz} = 2.$

$$T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+z)=1 \\ yz=1 \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Chọn $y = z = 1$ thì ĐK trên trở thành

$$\begin{cases} x(x+2)=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 2, chẳng hạn khi $(x; y; z) = (\sqrt{2}-1; 1; 1)$.

Câu 3. $\begin{cases} xz = x+4 & (1) \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14 & (2) \\ x^2 + z^2 = 35 - y^2 & (3) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được $y^2 = 2x + 7$ (4)

Thế (4) vào (3) ta có

$x^2 + z^2 = 35 - (2x+7) = 36 - 2(x+4)$

$= 36 - 2xz$ (do (1))

Do đó $(x+z)^2 = 36 \Leftrightarrow x + z = \pm 6$.

• Trường hợp $x + z = 6$ ta có $z = 6 - x$ (5)

thế (5) vào (1) ta được

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$.

Với $x = 1$, thế vào (5) và (4) được $z = 5$; $y = \pm 3$.

Với $x = 4$, ta được $z = 2$; $y = \pm\sqrt{15}$.

• Trường hợp $x + z = -6$ ta có

$x(-6-x) = x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$.

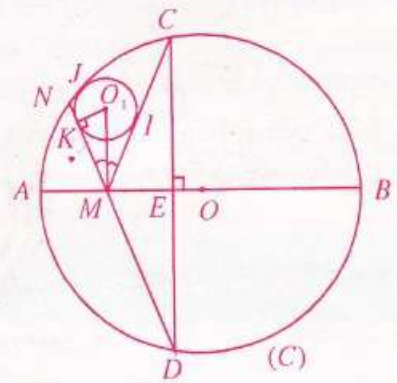
Với $x = \frac{-7-\sqrt{33}}{2}$ thế vào (4) ta thấy PT ẩn y vô nghiệm.

Với $x = \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$ tìm được

$$y = \pm\sqrt[4]{33};\ z = \frac{-5-\sqrt{33}}{2}.$$

Câu 4. 1) Tam giác MCD cân ở M nên $\widehat{MCE} = \widehat{MDC} = \frac{1}{2}\widehat{KMC}$, mặt khác

$\widehat{O_1MK} = \frac{1}{2}\widehat{KMC}$. Do đó $\Delta O_1KM \backsim \Delta MEC$.



2) Ta có $OA = \frac{a+b+c}{2}$ nên $OO_1 = \frac{a+b+c}{2} - r$.

Vì $\Delta O_1KM \backsim \Delta MEC$ và CE là đường cao của tam giác vuông CAB nên

$$\frac{MK}{O_1K} = \frac{CE}{ME} \Rightarrow KM = \frac{O_1K.CE}{ME} = \frac{r\sqrt{EA.EB}}{b}$$

$$\Rightarrow KM = \frac{r\sqrt{(a+b)c}}{b}.$$

Ta có $O_1M^2 = O_1K^2 + KM^2$

$$= r^2 + \frac{r^2(a+b)c}{b^2} \Rightarrow O_1M = \frac{r}{b}\sqrt{b^2+ac+bc}.$$

3) Tam giác O_1MO vuông ở M, vì vậy $OO_1^2 = OM^2 + O_1M^2$ hay

$$\left(\frac{a+b+c}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)^2 + r^2 + \frac{r^2(a+b)c}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow -(a+b+c)r = -(a+b+c)a + a^2 + \frac{r^2(a+b)c}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)cr^2 + b^2(a+b+c)r - (a+b)ab^2 = 0.$$

Xem đây là PT bậc hai ẩn r, trong đó biệt thức

$$\Delta = b^4(a+b+c)^2 + 4b^2ac(a+b)(b+c)$$
$$= b^2[b(a+b+c) + 2ac]^2.$$

Từ đó

$$r = \frac{-b^2(a+b+c) + b[b(a+b+c)+2ac]}{2c(a+b)} = \frac{ab}{a+b}.$$

Hay $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Câu 5. Đặt $a = \overline{xy}$, $b = \overline{ztu}$ thì

$a + b = \sqrt{1000a+b}$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 1000(a+b) + 999b = 0.$

Suy ra $x_1 = a + b$ là một nghiệm của PT

$$x^2 - 1000x + 999b = 0 \qquad (1)$$

Gọi x_2 là nghiệm thứ hai. Theo định lí Viète ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1x_2 = 999b \end{cases} \qquad (2)$$

Vì 999 = 27.37 và 1000 không chia hết cho 3 và 37, nên từ (2) chỉ xảy ra hai khả năng:

a) Trong hai số x_1, x_2 có một số là bội của 27 và 37, số kia không chia hết cho 3 và không chia hết cho 37.

Vì PT (1) có hai nghiệm dương, nên từ (2) suy ra x_1, x_2 nhỏ hơn 2.999. Do đó nếu x_1 (hay x_2) chia hết cho 999 thì $x_1 = 999$ (hay $x_2 = 999$) suy ra $x_2 = 1$ (tương ứng $x_1 = 1$) khi đó $b = 1$. Vô lí vì $b = \overline{ztu}$.

b) Trong hai số x_1, x_2 có một số là bội của 27, số kia là bội của 37.

– Nếu $x_1 = 27m$, $x_2 = 37n$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

Từ (2) suy ra $27m + 37n = 1000 \Rightarrow n = 9k+1$.

Thay $n = 9k + 1$ vào $27m + 37n = 1000$ được $3m + 37k = 107 \Rightarrow k = 3l + 2$ ($l \in \mathbb{N}$). Do đó

$$m + 37l = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = 11. \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = 27m = 27.11 = 297$; $x_2 = 1000 - x_1 = 703$, từ đó $b = 209$, $a = 88$. Vậy $x = y = 8$, $t = 0$, $z = 2$, $u = 9$.

– Nếu $x_1 = 37n$, $x_2 = 27m$ ($m, n \in \mathbb{N}$) thì lập luận tương tự có $x_1 = 703$, $x_2 = 297$, $b = 209$, $a = 494$, điều này vô lý (vì $a = \overline{xy} < 100$).

Đáp số: $x = y = 8$, $z = 2$, $t = 0$, $u = 9$.

NGÀY THỨ HAI

Câu 6. Ta có PT

$$(3x+4)(x+1)(6x+7)^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow (6x+8)(6x+6)(6x+7)^2 = 72.$$

Đặt $t = 6x + 7 \Leftrightarrow x = \frac{t-7}{6}$, PT trở thành

$(t+1)(t-1)t^2 = 72 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3.$

PT đã cho có hai nghiệm: $-\frac{2}{3}$ và $-\frac{5}{3}$.

Câu 7. PT đã cho có dạng

$$2y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x$$
$$\Leftrightarrow (y^2+y)^2 + 2(y^2+y) = x^2 + x$$
$$\Leftrightarrow (y^2+y+1)^2 = x^2 + x + 1 \qquad (1)$$

Với mọi x nguyên không âm ta có

$$x^2 < x^2 + x + 1 \le x^2 + 2x + 1 \qquad (2)$$

Do đó nếu x, y nguyên không âm thỏa mãn (1) thì từ (2) có $x^2 < (y^2+y+1)^2 \le (x+1)^2$.

Đáp số: $x = y = 0$.

Câu 8. Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}=a \\ \sqrt{x_1.x_2}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2a \\ x_1.x_2=b^2. \end{cases}$$

Suy ra x_1 và x_2 là hai nghiệm của PT

$$x^2-2ax+b^2=0.$$

Ta cần chứng minh $\Delta' = a^2-b^2=0$.

Theo giả thiết $\dfrac{a}{b}=\dfrac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1.x_2}}$ là một số nguyên dương nên $\dfrac{x_1+x_2}{2\sqrt{x_1.x_2}}=n,\ n\in\mathbb{Z}^+$.

Suy ra $\sqrt{x_1.x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2n}\in\mathbb{Q}\Rightarrow x_1x_2$ là số chính phương nên $b=\sqrt{x_1.x_2}\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow a=b.n\in\mathbb{Z}^+$.

Mặt khác $x_{1,2}=a\pm\sqrt{\Delta'}$ nguyên dương, a nguyên dương suy ra $\sqrt{\Delta'}$ là số nguyên (không âm). Do đó tồn tại m nguyên không âm sao cho

$m=\sqrt{\Delta'}=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(bn)^2-b^2}=b\sqrt{n^2-1}$

$\Rightarrow\sqrt{n^2-1}=\dfrac{m}{b}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{n^2-1}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z}\ (k\geq 0)$ sao cho $\sqrt{n^2-1}=k$

$\Rightarrow n^2-1=k^2$, do $k^2<n^2=k^2+1\leq(k+1)^2$

$\Rightarrow n^2=(k+1)^2$ khi đó $k=0$.

$\Rightarrow\sqrt{n^2-1}=0\Rightarrow\Delta'=0$ (đpcm).

Câu 9. 1) (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Có $\widehat{MBA}=\widehat{EMN}$, $\widehat{ABN}=\widehat{ENM}$

$\Rightarrow\widehat{MBN}=\widehat{MBA}+\widehat{ABN}=\widehat{EMN}+\widehat{ENM}$.

$=180^\circ-\widehat{MEN}$

$\Rightarrow$ tứ giác $EMBN$ nội tiếp.

2) Gọi I là giao điểm của O_1O_2 và AB. Tam giác O_1AB đều cạnh bằng 1cm, suy ra $AI=\dfrac{1}{2}$cm ;

$O_1I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$cm và $O_2I=\sqrt{r_2^2-AI^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$cm.

Do đó $O_1O_2=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$cm.

3) Vì $\Delta MNB\backsim\Delta O_1O_2B$ nên $\dfrac{NB}{MB}=\dfrac{O_2B}{O_1B}=2$;

$\dfrac{MN}{O_1O_2}=\dfrac{NB}{O_2B}=\dfrac{MB}{O_1B}=MB$;

$\Delta EMB\backsim\Delta NAB\Rightarrow\dfrac{EM}{NA}=\dfrac{EB}{NB}=\dfrac{MB}{AB}=MB$;

$\Delta EBN\backsim\Delta MBA\Rightarrow\dfrac{EN}{AM}=\dfrac{NB}{AB}=\dfrac{EB}{MB}=NB$.

Suy ra $2EM=2MB.NA$ và $EN=2MB.AM$

Do đó $2EM+EN=2MB(NA+MA)=2MB.MN$.

Mặt khác $MN=MB.O_1O_2$ nên $2EM+EN=2MB^2.O_1O_2$. Từ $MB\leq MO_1+O_1B=2$

suy ra $2EM+EN\leq 8O_1O_2=4(\sqrt{15}+\sqrt{3})$.

4) Nếu A, B, E thẳng hàng thì $\widehat{MBE}=\widehat{EMN}=\widehat{MNE}=\widehat{NBE}$. Khi đó $\widehat{MO_1A}=\widehat{NO_2A}$

$\Rightarrow\widehat{MAO_1}=\widehat{NAO_2}$ suy ra MN là phân giác ngoài của góc $\widehat{O_1AO_2}$.

Câu 10. Đặt $T=\{0;3;9\}$, ta thấy T có tính chất: nếu $t,u\in T$ và $t>u$ thì $t-u\in E$.

Giả sử $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{700}$ là tất cả các phần tử của tập X. Từ giả thiết ta có $a_i\neq a_j$ nếu $i\neq j$.

Xét tập hợp

$M=\{(t;a_i)\mid t\in T, a_i\in X, i=1,2,3,\ldots,700\}$.

Vì số phần tử của T bằng 3, của X bằng 700 nên M có 2100 phần tử. Với mỗi phần tử $(t;a_i)\in M$ ta đặt tương ứng với tổng $t+a_i$.

Vì $0\leq t\leq 9$ và $1\leq a_i\leq 2006$ nên $1\leq t+a_i\leq 2015$. Các tổng $t+a_i$ có thể nhận nhiều nhất là 2015 giá trị khác nhau. Do đó tồn tại hai phần tử khác nhau $(t;a_i)$ và $(u;a_j)$ của M sao cho

$$t+a_i=u+a_j \qquad (1)$$

Nếu $t=u$ thì từ $a_i=a_j$, suy ra $(t;a_i)=(u;a_j)$ trái với giả thiết $(t;a_i)$ và $(u;a_j)$ là hai phần tử khác nhau của M.

Nếu $t>u$ thì từ (1) suy ra $a_j-a_i=t-u\in E$.

Nếu $t<u$ thì $a_i-a_j=u-t\in E$.

Vậy trong tập X đã cho luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x-y\in E$.

LƯU XUÂN TÌNH
(GV khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)
(giới thiệu)

KHAI THÁC THÊM... *(Tiếp trang 2)*

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\geq\frac{4y}{y^6+z^4}\ ;\ \frac{1}{z^4}+\frac{1}{x^4}\geq\frac{4z}{z^6+x^4}.$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được BĐT cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.□

Có rất nhiều bài toán có thể giải bằng cách nhìn theo hướng các BĐT (3), (4), các bạn thử tìm và giải nhé. Còn bây giờ các bạn hãy thử luyện tập với một số bài sau.

Bài 1. Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$.

Bài 2. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$$

với a, b, c là các số thực dương.

Bài 3. Cho các số thực dương x, y, z, t thoả mãn $xyzt = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)}+\frac{1}{y^3(xz+zt+tx)}+\frac{1}{z^3(xt+ty+yx)}+\frac{1}{t^3(xy+yz+zx)}\geq\frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^8}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^8}{(b^2+c^2)^2}+\frac{c^8}{(c^2+a^2)^2}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca=1$.

Bài 5. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

❋ TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI TỔ CHỨC LỄ MỪNG THỌ GS. NGUYỄN CẢNH TOÀN 80 TUỔI

Sáng 28.9.2006 tại Hội trường B1 nhà B, trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã tổ chức mừng sinh nhật lần thứ 80 của GS. TSKH. NGND. Nguyễn Cảnh Toàn, nguyên Hiệu trưởng nhà trường, nguyên Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, nguyên Tổng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Đến dự có GS. Nguyễn Thiện Nhân, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, ông Nguyễn Mạnh Cầm, nguyên Phó Thủ tướng, Chủ tịch Hội Khuyến học Việt Nam và hơn 100 đại biểu các Viện, Trường đại học, Tạp chí THTT và các giáo sư, thầy cô, sinh viên... Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tặng hoa GS. Nguyễn Cảnh Toàn. Nhân dịp này NXB Đại học Sư phạm và gia đình GS đã xuất bản Tuyển tập các bài viết về giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn.

VKT

❋ KỈ NIỆM 55 NĂM KHOA TOÁN – TIN ĐHSP HÀ NỘI

Ngày 29.9.2006 các thế hệ thầy trò Khoa Toán - Tin trường ĐHSP Hà Nội đã tề tựu trong niềm vui nhân kỉ niệm 55 năm thành lập Khoa. Hiện nay Khoa có 63 cán bộ công nhân viên, trong đó có 9 Giáo sư và Phó Giáo sư. 30 Tiến sĩ và Tiến sĩ Khoa học, 24 Thạc sĩ. Chỉ riêng số sinh viên chính quy đang đào tạo tại Khoa đã là 700. Khoa là đơn vị đầu tiên trong các trường đại học trong nước đào tạo chương trình song ngữ Pháp - Việt cho sinh viên, liên kết đào tạo với 8 trường Đại học, Viện ở nước ngoài cho bậc Sau đại học. Riêng 5 năm gần đây đã có 10 nghiên cứu sinh bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ, 76 sinh viên đoạt giải kì thi Olympic Toán, Tin; học sinh khối Chuyên đạt 6 huy chương Quốc tế và khu vực Châu Á Thái Bình Dương môn Toán, Tin. Năm 2001 Khoa đã được Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng Nhì. Khoa Toán - Tin luôn là khoa tiêu biểu của trường ĐHSP trọng điểm Quốc gia.

BÍNH NAM HÀ

Tiếp cận và khai thác MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC từ những phương cách khác nhau

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

II. Khai thác bài toán theo những hướng khác nhau

1. Bài toán cực trị xuất phát (gốc) là một bài toán cực trị hình học trong mặt phẳng, liên quan đến độ dài đoạn thẳng, cụ thể là chu vi của một tứ giác nội tiếp một đường tròn cho trước có hai đường chéo vuông góc ở một điểm cố định cho trước nằm trong đường tròn đó. Bây giờ thay chu vi bởi diện tích, ta có ngay bài toán tương tự phát biểu như sau:

Bài toán 1. *Trong các tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn (O; a) cho trước sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau ở một điểm P cố định nằm trong đường tròn (OP = d < a), hãy xác định tứ giác có diện tích lớn nhất và tứ giác có diện tích nhỏ nhất và tính các diện tích đó theo a và d.*

Nếu đặt $\widehat{AOB} = 2x$, $\widehat{BOC} = 2y$, $\widehat{COD} = 2z$, $\widehat{DOA} = 2t$ thì lúc đó $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = x$, ..., $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = t$, ta có $0 < x, y, z, t < \frac{\pi}{2}$, $x + z = y + t = \frac{\pi}{2}$, $\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin y} = \frac{CD}{\sin z} = \frac{DA}{\sin t} = 2a$.

Để ý rằng x, y được ràng buộc bởi điều kiện $\sin 2x.\sin 2y = \frac{b^2}{a^2}$. Ta có bài toán cực trị lượng giác sau:

Bài toán 2. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác sau*

$$f(x, y) = \sin x + \cos x + \sin y + \cos y,$$

với $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\sin 2x.\sin 2y = k^2 \ (0 < k \le 1).$$

2. Ngoài ra, lẽ tự nhiên chúng ta liên tưởng đến bài toán tương tự (mở rộng) trong hình học không gian. Sự tương tự này khá phong phú vì sự "liên tưởng" này có thể xuất phát từ những cách nhìn khác nhau hoặc xét theo những khía cạnh, góc độ khác nhau. Chẳng hạn, thay đường tròn bởi mặt cầu, góc vuông bởi góc tam diện vuông, tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc bởi hình bát diện nội tiếp mặt cầu, là hợp của hai chóp tứ giác có chung đáy và có ba đường chéo (cũng là ba dây cung của mặt cầu) đồng quy tại một điểm cố định nằm trong mặt cầu và vuông góc với nhau từng đôi một. Thế thì ta có các bài toán tương tự trong không gian như sau:

Cho mặt cầu (𝒞) tâm O, bán kính a và một điểm P cố định nằm trong mặt cầu (OP = d < a). Xét các hình bát diện lồi 𝒦(C.ABA'B'.C') nội tiếp mặt cầu (𝒞) nói trên sao cho các dây cung AA', BB', CC' của (𝒞) cũng là các đường chéo của 𝒦, đôi một vuông góc với nhau ở điểm P.

Bài toán 3. *Hãy xác định hình bát diện có thể tích lớn nhất và hình bát diện có thể tích nhỏ nhất và tính các thể tích đó theo a và d.*

Bài toán 4. *Hãy xác định bát diện $\mathcal{K}_1$ có tổng độ dài các cạnh (trên các mặt) lớn nhất và hình bát diện $\mathcal{K}_2$ có tổng độ dài các cạnh nhỏ nhất và tính các độ dài lớn nhất l_M và nhỏ nhất l_m theo a và d.*

Bài toán 5. *Hãy xác định hình bát diện $\mathcal{K}_0$ có diện tích toàn phần lớn nhất và hình bát diện $\mathcal{K}'_0$ có diện tích toàn phần nhỏ nhất và tính các diện tích S_0, S'_0 đó theo a và d.*

Chú thích và gợi ý hướng giải bài toán 4 và tổng quát hóa bài toán đó

Để giải bài toán 4, trước hết chúng ta hãy phát biểu nội dung bài toán 4 sang ngôn ngữ đại số (trên cơ sở tổng quát hóa bài toán cực trị đại số được phát biểu trong lời giải 2 dưới dạng ngôn ngữ đại số của nội dung bài toán cực trị hình học gốc ở trên). Rồi từ đó chúng ta đề xuất được một *bài toán mới tổng quát hơn nữa về cực trị đại số* sau đây.

Bài toán 6. (*Bài toán cực trị đại số*).

a) Phát biểu bài toán

Xét 2n biến số thực dương x_i, x'_i ($i = 1, 2, ..., n$) thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} a-\sqrt{a^2-b^2} \le x_i, x'_i \le a+\sqrt{a^2-b^2} & (1) \\ x_i x'_i = b^2 \ (0 < b \le a) & (2) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+x'^2_i\right) = 4a^2+2(n-2)b^2, (n \ge 2) & (3) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất p_M và giá trị nhỏ nhất p_m của hàm 2n biến x_i, x'_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$), ($n \ge 2$) sau đây:

$$p(x_1; x'_1; ...; x_n; x'_n) = \sum_{1\le i<j\le n}\left(\sqrt{x_i^2+x_j^2}+\sqrt{x_i^2+x'^2_j}+\sqrt{x'^2_i+x_j^2}+\sqrt{x'^2_i+x'^2_j}\right) (*)$$

Chú thích: Nếu đặt $p_{ij} = p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$ thì (*) được viết gọn lại hơn như sau:

$$p(x_1; x'_1; ...; x_n; x'_n) = \sum_{1\le i<j\le n} p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$$

và dưới dấu $\sum$ có tất cả $\frac{1}{2}(n-1)n = C_n^2$ hàm $p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$ của bốn biến x_i, x'_i, x_j, x'_j với $1 \le i < j \le n$, trong đó $p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$ có dạng là tổng của bốn căn thức bậc hai ở vế phải của (*).

b) Gợi ý phương án giải

Đặt $X_i = x_i + x'_i$, $X_j = x_j + x'_j$;

$$x_i^2 + x'^2_i + x_j^2 + x'^2_j = 4a_{ij}^2; x_o = 2b, X_o = 2a.$$

Thế thì $4b^2 = 4x_i x'_i \le X_i^2 \le 4a_{ij}^2$;

$$X_i^2 + X_j^2 = 4a_{ij}^2 + 4b^2.$$

Từ đó, hãy thiết lập các BĐT và ĐT sau:

$$2b = x_o \le X_i \le 2a_{ij} \le 2a$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 4a^2 + 2(n-2)b^2 + 2nb^2$$

$$= 4a^2 + 4(n-1)b^2 = X_o^2 + (n-1)x_o^2$$

$$p_{ij}^2 = (X_i + X_j)^2 + 4a_{ij}(X_i + X_j) + 4(a_{ij}^2 + b^2)$$

$$p_{ij} \le p_{ij_M} = 2\left(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\right)$$

$$p_{ij} \ge p_{ij_m} = 4\sqrt{a_{ij}(a_{ij} + b)}.$$

c) Đáp số

$$p_M = (n-1)\left(\sqrt{2n(2a^2+(n-2)b^2)} + \sqrt{2n(a^2+(n-1)b^2)}\right) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow X_1 = X_2 = ... = X_n = \frac{2}{n}\sqrt{na^2+n(n-1)b^2};$$

$$p_m = 4\left((n-1)\sqrt{a(a+b)} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)b\sqrt{2}\right) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_i = x_i + x'_i = 2a, (i \in \{1, 2, ...n\}) \\ X_j = 2b, j \ne i. \end{cases}$$

Chú thích.

* Với $n = 2$ thì $p_M = 2\left(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)$ và $p_m = 4\sqrt{a(a+b)}$; ta thấy lại kết quả đã thu được ở phần I (các lời giải 1, 2).

* Với $n = 3$ (và do đó $2n = 6$) thì nội dung bài toán 6 chính là *nội dung ngôn ngữ đại số của bài toán 4*. Bởi vậy, cho $n = 3$ vào các vế phải của các biểu thức (4) và (5) ở trên ta được ngay tức khắc đáp số của bài toán 4.

*) Tương đối *dễ hơn cả* là các bài toán 1, 2, 3 dành cho bạn đọc tự giải xem là *bài tập*, Bạn nào có điều kiện về thời gian và muốn tập thể thao về trí tuệ, xin *hãy thử sức* với các bài toán 4 và 5. Chúc các bạn thành công.

Cuộc thi vui TOLITI 2006

(Do ba tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lí và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường đồng tổ chức trong cả năm 2006)

ĐỀ ĐỢT 4

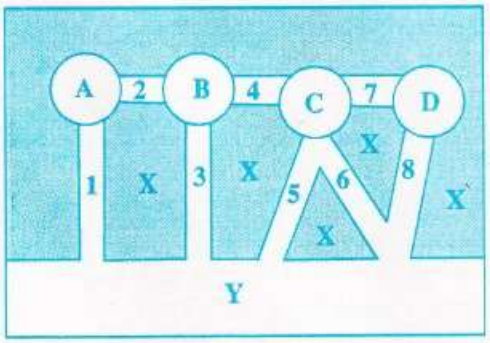
TOLITI-10. Ba cục đồng

Có ba cục đồng hình lập phương giống hệt nhau A, B và C. Cục A có nhiệt độ 200°C còn B và C đều có nhiệt độ bằng 0°C. Người ta muốn làm lạnh A đến 50°C và nhờ đó làm nóng B và C đến 75°C bằng cách cho A, B, C trao đổi nhiệt với nhau. Hỏi điều đó có làm được không? Nếu có, thì làm như thế nào? Bỏ qua sự trao đổi nhiệt giữa ba cục đồng và không khí.

TOLITI-11. Tám cầu bốn đảo

A, B, C, D là bốn đảo được nối với nhau và với đất liền **Y** bằng tám cây cầu. **X** là biển. Bắt đầu từ đảo **B** hãy đi một lộ trình sao cho qua mỗi cây cầu chỉ một lần, qua tất cả các đảo và về đất liền.

Nếu bắt đầu từ **C** cũng với yêu cầu như vậy bạn sẽ đi thế nào ?



TOLITI-12. Ném bi

An mới được dọn đến một tòa nhà 20 tầng. An rất thích thú muốn kiểm tra xem bắt đầu từ tầng nhà nào khi thả hòn bi ve xuống sẽ bị vỡ. Trong tay An chỉ có đúng 2 hòn bi ve để ném thử. Hỏi An phải ném thử tối thiểu bao nhiêu lần để trả lời được câu hỏi do chính mình đưa ra. Các bạn có thể giúp An được không?

GIẢI THƯỞNG TOLITI 6 THÁNG ĐẦU NĂM 2006

Sau khi tổng kết điểm của đợt 1 và đợt 2, ba tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lí và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường thống nhất trao giải 6 tháng đầu năm 2006 cho hai bạn sau:

1. NGUYỄN BÌNH, 11A1, THPT Nam Tiền Hải, Thái Bình;

2. NGUYỄN NGỌC LÂM, 10B Lí, Khối THPT chuyên ĐHKHTN, Hà Nội.

Cuộc thi còn một đợt 4 này sẽ tổng kết vào cuối năm và trao giải chính sau 4 đợt của cuộc thi vào đầu năm 2007. Mong các bạn tích cực hưởng ứng.

BAN TỔ CHỨC

Đáp án các bài TOLITI đợt 3

Tháng 7/2006

TOLITI-7. Bình nước

Đáp án : Bình sẽ lệch về bên trái. Cục nhôm chịu tác dụng lực đẩy $\rho_1 \frac{\rho_0}{\rho_1}$, trong đó P_1 là trọng lượng của cục nhôm, ρ_1 là khối lượng riêng của nhôm và ρ_0 là khối lượng riêng của nước. Do đó, cục nhôm tác dụng lên đáy bình một lực là

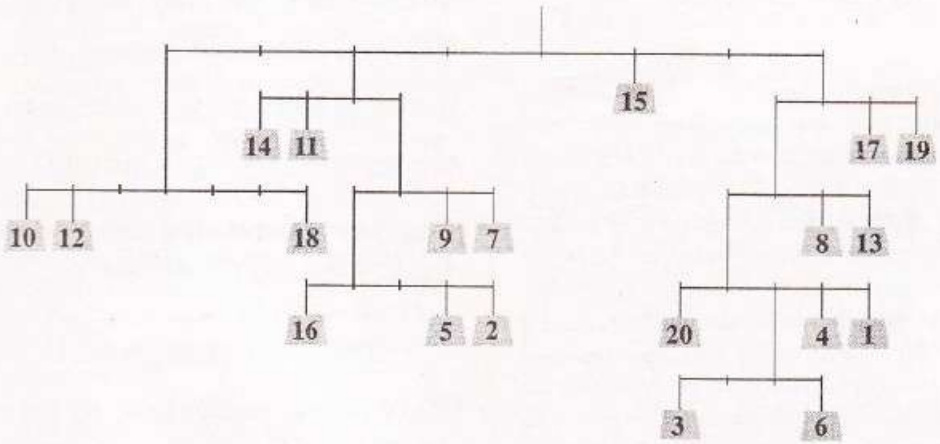
$$F_1 = P_1 - P_1 \frac{\rho_0}{\rho_1} = 5 - 5\frac{10^3}{2,7.10^3} \approx 3,15(\text{N}).$$

Tương tự, cục chì tác dụng lên đáy bình một lực là $F_2 = P_2 - P_2 \frac{\rho_0}{\rho_2} = 4 - 4\frac{10^3}{11,3.10^3} \approx 3,65(\text{N})$.

Vì $F_2 > F_1$, nên bình bị nghiêng về bên đặt cục chì, tức là bình bị lệch về phía bên trái.

TOLITI.8. Cân bằng hoàn hảo

Đáp án:



TOLITI-9. Trồng cây

Đáp án: Không thể.

Nhận xét rằng khi trồng thêm cây theo yêu cầu thì tổng chu vi của miền chứa các ô có cây không tăng lên. Ta biết tổng chu vi của các ô được trồng cây không vượt quá 36, trong khi đó cả vườn có chu vi 40, do đó không thể làm được công việc này.

NHẬN XÉT. Các bạn có lời giải tốt đợt 3 là:

Bắc Ninh : *Trần Dịch Phong*, 12 Toán, THPT chuyên tỉnh Bắc Ninh;

Nghệ An : *Võ Hà Tĩnh*, 45A4, THPT chuyên, Đại học Vinh;

Khánh Hòa : *Võ Thái Thông*, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh;

Cần Thơ : *Lê Tuấn Tú*, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

VŨ KIM - HOÀNG TRỌNG

TOÁN HỌC CAO CẤP

GIỚI THIỆU VỀ

Hàm đặc trưng và tập hợp mờ

NGUYỄN THANH LÂM
(GV THPT Chu Văn An, Hà Nội)

Từ lâu, qua chương trình toán phổ thông, các bạn học sinh đã được làm quen với các khái niệm toán học quan trọng như: tập hợp, ánh xạ, hàm số. Với các khái niệm này, các bạn có nhiều thuận lợi trong việc tiếp cận với toán học hiện đại, bên cạnh việc đào sâu tìm hiểu toán sơ cấp. Đặc biệt, khái niệm ánh xạ - hàm số đã được nhiều thày cô giáo và học sinh đề cao, tư tưởng ánh xạ - hàm số được coi là tư tưởng xuyên suốt trong việc dạy và học toán ở phổ thông.

Trong phạm vi bài viết này, thông qua khái niệm về tập hợp mờ, chúng tôi muốn đề cập đến một khía cạnh: Người làm toán có thể diễn đạt một tập hợp bằng ánh xạ - hàm số. Những ý tưởng này, chẳng những đã làm cho các khái niệm toán học hoàn thiện hơn mà còn làm cho các công cụ toán học sắc bén hơn, toán học gần với cuộc sống hơn.

A. Tập hợp mờ (Fuzzy sets)

Khái niệm *tập hợp mờ* do L. A. Zadeh đề xướng năm 1965. Ý tưởng về tập hợp mờ xuất phát từ khái niệm *hàm đặc trưng* của một tập hợp con A trong một tập hợp X nào đó. Mỗi tập hợp con A được ứng với duy nhất một hàm đặc trưng của nó, kí hiệu là χ_A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in A \\ 0 \text{ nếu } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Gọi $\chi_A^{-1}(1)$ là tập hợp các nghịch ảnh của 1 qua ánh xạ χ_A. Rõ ràng khi đó $A = \chi_A^{-1}(1)$. Điều này gợi ý cho chúng ta đồng nhất một tập hợp A trong X với hàm đặc trưng χ_A của nó.

Một ví dụ quen biết về hàm đặc trưng là hàm số Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Rõ ràng hàm D là hàm đặc trưng của tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ trong tập hợp số thực $\mathbb{R}$. Vậy $\mathbb{Q} = D^{-1}(1)$, như sự gợi ý trên, ta có thể đồng nhất tập hợp $\mathbb{Q}$ với hàm Dirichlet D.

Tổng quát hóa khái niệm này: Với mỗi tập hợp $A \subseteq X$, ta cho ứng với một hàm số

$$f_A : X \to [0 ; 1]$$
$$x \mapsto f_A(x) \text{ với } f_A(x) \in [0; 1].$$

Chỉ có thể xảy ra một trong ba khả năng sau, ứng với mỗi $x \in A$:

1) $f_A(x) = 0$. Điều này tương đương với phần tử $x \notin A$ (nghĩa là $x \in X \setminus A$).

2) $f_A(x) = 1$. Điều này tương đương với phần tử $x \in A$.

3) $0 < f_A(x) < 1$. Ta đặt $f_A(x) = a$, điều này tương đương với việc khẳng định khả năng để phần tử $x \in A$ chỉ với xác suất là a.

Suy luận trên cho phép ta đồng nhất một hàm số $f_A : X \to [0; 1]$ với tập hợp $A \subseteq X$, coi f_A là hình ảnh biểu thị tập hợp A và ngược lại: Tập hợp A trong X là một cái bóng (tuy chưa thật rõ

ràng lắm) của một hàm số f_A từ X đến đoạn [0; 1]. Vậy ta đưa ra định nghĩa như sau:

Cho X là một tập hợp nào đó: Một tập hợp mờ *trong X là một hàm* $A: X \to [0; 1]$.

(Như vậy theo định nghĩa này, với $A, B \subseteq X$ thì χ_A, χ_B cũng là các tập hợp mờ trong X).

B. Các quan hệ và các phép toán trên tập hợp mờ

Bây giờ ta kí hiệu họ tất cả các tập hợp mờ trong X là $F(X)$ và xây dựng các quan hệ và phép toán trên $F(X)$ như sau.

1) Với $A, B \in F(X)$, ta nói rằng A là tập con của B và kí hiệu $A \subseteq B$, nếu $A(x) \le B(x)$, với mọi x thuộc X.

Tương tự $A = B$, nếu $A(x) = B(x)$ với mọi x thuộc X.

2) Cho tập hợp mờ $A \in F(X)$. Tập hợp mờ $A' \in F(X)$ được gọi là phần bù của A và kí hiệu $A' = X \setminus A$, nếu $A'(x) = 1 - A(x)$ với mọi x thuộc X.

3) Ta kí hiệu *giá* của tập hợp mờ A bằng supp$A$ và hiểu như sau: supp$A = \{x \in X: A(x) > 0\}$.

Một điểm mờ là một tập hợp mờ mà giá của nó chỉ gồm có một phần tử x. Ta nói $\tilde{x}$ là một điểm mờ của tập hợp mờ A và kí hiệu: $\tilde{x} \in A$, nếu $\tilde{x}(x) \le A(x)$, với x là giá của $\tilde{x}$.

4) Giao và hợp của hai tập hợp mờ A và B được định nghĩa như sau:

$(A \cap B)(x) = \text{Min}\{A(x), B(x)\}$ với mọi x thuộc X.

$(A \cup B)(x) = \text{Max}\{A(x), B(x)\}$ với mọi x thuộc X.

Bạn đọc dễ dàng kiểm tra tính hợp lí của các định nghĩa trên. Chẳng hạn khi định nghĩa hợp của hai tập hợp mờ A và B trong X (ta cũng kí hiệu là $A \cup B$) là hàm $A \cup B: X \to [0 ; 1]$, ở đó quy tắc lấy $(A \cup B)(x) = \text{Max}\{A(x), B(x)\}$ với mọi x thuộc X. Do A, B là các tập hợp mờ nên $A(x), B(x)$ xác định và $0 \le A(x) \le 1$, $0 \le B(x) \le 1$, $\forall x \in X$. Vì thế $\text{Max}\{A(x), B(x)\}$ xác định và $0 \le \text{Max}\{A(x), B(x)\} \le 1$. Điều này chứng tỏ $A \cup B$ là một hàm từ X đến đoạn [0; 1], suy ra $A \cup B$ cũng là một tập hợp mờ trong X.

Ngoài ra, để dễ thấy hình ảnh về tập hợp $A \subseteq X$ là "cái bóng" của một tập hợp mờ $f_A \in F(X)$, bạn đọc có thể thử khi tập mờ f_A được chọn là hàm đặc trưng χ_A như sau:

Trong quan hệ bao hàm trên $F(X)$: $\chi_A \subseteq \chi_B \Leftrightarrow \chi_A(x) \le \chi_B(x)$ với mọi x thuộc X. Ta thấy rõ nếu $x \in A \subseteq X$ thì $\chi_A(x) = 1$. Do vậy, để $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$ cần và đủ là $\chi_B(x) = 1$, tức là $x \in B$, hay cũng có $A \subseteq B$. Chứng minh này đã cho ta kết luận: Nếu trong họ các tập hợp mờ $F(X)$ có quan hệ $\chi_A \subseteq \chi_B$ thì trong X cũng có quan hệ $A \subseteq B$ và ngược lại.

Cũng lập luận tương tự, nếu trong họ các tập mờ $F(X)$ có quan hệ $\chi_A = \chi_B$ thì trong X cũng có quan hệ $A = B$.

Bây giờ, ta thử xem tập giao giữa hai tập hợp mờ χ_A và χ_B trong $F(x)$ có gì đặc biệt. Theo định nghĩa:

$(\chi_A \cap \chi_B)(x) = \text{Min}\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$ với mọi $x \in X$. Giả sử $(\chi_A \cap \chi_B)(x) = 1$, điều này tương đương với $\text{Min}\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = 1 \Leftrightarrow \chi_A(x) = 1$ và $\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.

Vậy $(\chi_A \cap \chi_B)(x) = 1$ khi và chỉ khi $x \in A \cap B$, do đó ta cũng có: $(\chi_A \cap \chi_B)(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \notin A \cap B$.

Điều này chứng tỏ $\chi_A \cap \chi_B$ là hàm đặc trưng của tập hợp $A \cap B$. Nhận định này chẳng những cho ta thấy đứng ngay sau tập hợp mờ $\chi_A \cap \chi_B$ là tập hợp $A \cap B$, mà còn giúp ta hiểu vì sao phải định nghĩa tập mờ $(A \cap B)(x) = \text{Min}\{A(x), B(x)\}$ với mọi x thuộc X. Với phép hợp và phần bù trên $F(X)$, bạn đọc có thể tự kiểm tra các kết quả sau:

$$\begin{cases} (\chi_A \cup \chi_B)(x) = 1 \text{ khi và chỉ khi } x \in A \cup B \\ (\chi_A \cup \chi_B)(x) = 0 \text{ khi và chỉ khi } x \notin A \cup B \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X \setminus \chi_A)(x) = 1 \text{ khi và chỉ khi } x \in X \setminus A \\ (X \setminus \chi_A)(x) = 0 \text{ khi và chỉ khi } x \notin X \setminus A. \end{cases}$$

Tất cả những điều nói trên đưa ta đến một kết luận: *Khi tập hợp mờ trong F(X) là hàm đặc trưng χ_A thì tập hợp A trong X là "cái bóng" khá rõ nét của χ_A*. Trí tưởng tượng đã khá phong phú rồi, ta mạnh dạn thay tập hợp mờ χ_A bằng một tập hợp mờ f_A tùy ý và thấy kết luận kia vẫn còn đúng, mặc dù "cái bóng" của f_A có mờ dần đi, nhạt dần đi. Đó là do tập giá trị của hàm $f_A(x)$ lúc này không chỉ gồm hai số 0 và 1, mà còn có nhiều giá trị khác nữa thuộc khoảng (0; 1). Phải chăng đây cũng là lí do để người ta đặt tên cho các tập hợp thuộc họ $F(X)$ là tập hợp mờ.

C. Vài ứng dụng của tập hợp mờ

Tiếp tục phát triển ý tưởng về tập hợp mờ như thế, năm 1968 C.L. Chang đã đưa ra khái niệm tôpô mờ (Fuzzy Topology) $\mathcal{F}$. Không gian tôpô mờ $(X, \mathcal{F})$ của Chang là sự tổng quát của các không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ thông thường bởi một lẽ đơn giản: Mọi không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ đều có thể xem như một không gian tôpô mờ bằng cách quy định *các tập mở mờ* là hàm đặc trưng của các tập mở của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$.

Đi xa hơn, năm 1994 hai nhà toán học O.Hadzic và Z.Ovcin đã chuyển khái niệm tập hợp mờ sang khái niệm *số mờ* (Fuzzy number) bằng cách thay tập nguồn X của hàm f_A bằng tập hợp số thực $\mathbb{R}$ và cho thêm một số tính chất khác. Dựa vào khái niệm số mờ, hai tác giả trên đã xây dựng thành công *không gian Mêtric mờ* $(X, d, L, \mathbb{R})$, là một sự tổng quát của các không gian Mêtric. Hiện nay, một nhóm chuyên gia của Viện Toán học Việt Nam (trong đó có người thầy của tôi: PGS. TS Đỗ Hồng Tân) nghiên cứu cách mở rộng *Nguyên lí ánh xạ co* của S. Banach trên cái "nền" không gian mới này và bước đầu đã thu được một số kết quả.

Tư tưởng táo bạo cùng sự lao động sáng tạo không mệt mỏi của các nhà toán học trong lĩnh vực *tập hợp mờ - số mờ*, làm mọi người trong chúng ta phải khâm phục. Các bạn trẻ yêu toán dù đang đứng ở vị trí nào: đang học toán, đang dạy toán hay đang nghiên cứu toán, đều mong muốn được đóng góp một phần công sức của mình vào việc truyền bá, xây dựng nền toán học hiện đại cho nước nhà. Cuối cùng, nhân ngày Nhà giáo Việt Nam sắp tới, qua tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, tác giả bài viết này xin chuyển đến các thầy cô giáo ở Viện Toán học Việt Nam cùng các bạn đồng nghiệp yêu quý lời chúc mừng trân trọng nhất.

PROBLEMS ... *(Tiếp trang 17)*

Calculate the value of the expression

$$A = 2a_{2006}^2 + a_{2006}.a_{2007} + a_{2007}^2.$$

T9/352. Let N_m be the set of all integers not less then a given integer m. Find all functions $f: N_m \to N_m$ satisfying the condition:

$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ for all x, y in N_m.

T10/352. Suppose that the system of equations

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 1 \\ y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$$

has a unique solution (x_0, y_0) with $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Prove that $\dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{y_0} = 8\cos^3\dfrac{\pi}{7}$.

T11/352. The measures of the sides of a triangle ABC are $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ and the measures of its altitudes issued respectively from A, B, C are h_a, h_b, h_c. Take A_1 on the side BC so that the incircles of triangles ABA_1, ACA_1 have equal radii r_A. One defines r_B, r_C analogously. Prove that

$$2(r_A + r_B + r_C) + p \le h_a + h_b + h_c.$$

where p is the semiperimeter of triangle ABC.

T12/352. Let be given a triangular pyramid $S.MNP$ such that $\widehat{MSN} + \widehat{NSP} + \widehat{PSM} = 180^o$. Prove that $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$ where α, β, γ are the measures of the dihedral angles with sides SM, SN, SP respectively.

Xếp số vào bảng

1			
	9		5
		14	

HOÀNG XUÂN VINH
(NXB Giáo dục tại TP Hà Nội)

Hãy sắp xếp tám trong chín số sau: 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 13, 15; mỗi số một lần vào các ô trống ở bảng trên để được một bảng hoàn chỉnh thỏa mãn: Tổng các số ở mỗi hàng bằng nhau, tổng các số ở mỗi cột bằng nhau.

MẠNG ĐƯỜNG... *(Tiếp trang 29)*

Các bạn có lời giải đúng là:

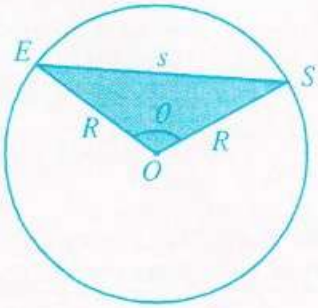
1) *Trần Thế Phúc*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP **Hải Dương**.
2) *Tạ Đức Thành*, 8A3, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ**.
3) *Nguyễn Phi Hùng*, 10CT, khối PTCT, trường ĐHKHTN Huế, **Thừa Thiên – Huế**.
4) *Hồ Văn Pháp*, 11A1, THPT An Nhơn 1, **Bình Định**.

PHI PHI

Giải đáp bài

Tính thời gian dự báo động đất như thế nào?

Giả sử s là khoảng cách từ E đến S (hình vẽ).



Áp dụng định lí Côsin cho tam giác ESO ta được

$$ES^2 = EO^2 + SO^2 - 2EO.SO.\cos\theta$$

hay $\quad s^2 = 2R^2(1 - \cos\theta)$.

Suy ra $\quad s = R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$.

Vì sóng lan truyền theo đường thẳng với vận tốc không đổi nên $s = vt$.

Do đó $\quad vt = R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

hay $\quad t = \dfrac{R}{v}\sqrt{2(1-\cos\theta)}$.

Những bạn sau có lời giải đúng, gửi bài sớm về Tòa soạn: *Trần Văn Bảo*, 10A2, THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Đào Quang Huy*, 12A1, THPT Quế Võ I, **Bắc Ninh**; *Vũ Ngọc Quang*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**; *Mai Hiền Cường*, 11A5, THPT C Bình Lục, **Hà Nam**; *Nguyễn Thị Vân*, 10A3, THPT Nguyễn Quán Nho, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa**.

HỒNG QUANG

CÁC LỚP THCS

Bài T1/352. (Lớp 6) Tìm số có năm chữ số, biết rằng nếu đem số đó nhân với 2 thì được một số có sáu chữ số đôi một khác nhau và khác chữ số 0; nếu đem số đó nhân lần lượt với 5, 6, 7, 8, 11 thì cũng được tích là các số có sáu chữ số được viết bởi các chữ số như số nhận được khi nhân với 2 nhưng theo thứ tự khác.

PHẠM HUY THÔNG
(GV Hà Nội)

Bài T2/352. (Lớp 7) Cho a, b, c, d, m, n là các số nguyên dương sao cho $ab = cd$. Chứng minh rằng số $A = a^{2n+1} + b^{2m+1} + c^{2n+1} + d^{2m+1}$ là hợp số.

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD-ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T3/352. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^5 - y^5 - xy = 32$.

NGUYỄN DUY QUỐC
(GV THPT Chu Văn An, Phan Rang, Ninh Thuận)

Bài T4/352. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}} + \frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}} + \frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

ĐỖ VĂN TA
(SV K27E Khoa Toán ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T5/352. Tìm các số thực x và y thoả mãn

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ (x^3 + y^3)(x^7 + y^7) = x^{11} + y^{11}. \end{cases}$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hoà)

Bài T6/352. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. AF cắt BE tại M, CE cắt DF tại N. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{MA}{MF} + \frac{MB}{ME} + \frac{NC}{NE} + \frac{ND}{NF}$.

VŨ ANH NAM
(GV THCS Từ Liêm, Nam Ban, Lâm Đồng)

Bài T7/352. Lấy ba điểm A, B, C trên đường tròn tâm O bán kính R sao cho $CB - CA = R$ và $CA.\ CB = R^2$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

HOÀNG TIẾN TRUNG
(SV Khoá 49 lớp X18 Đại học Xây dựng)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/352. Dãy số (a_i) $(i = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi :

$a_1 = 1;\ a_2 = -1;$

$a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$ với $n = 3, 4, ...$

Tính giá trị của biểu thức

$$A = 2a_{2006}^2 + a_{2006}a_{2007} + a_{2007}^2.$$

LÊ THỪA THÀNH
(GV THPTBC Nguyễn Hiền, Đà Nẵng)

Bài T9/352. Kí hiệu N_m là tập hợp tất cả các số nguyên không bé hơn số nguyên m cho trước. Tìm tất cả các hàm $f: N_m \to N_m$ thoả mãn $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \forall x, y \in N_m$.

NGUYỄN QUỐC KHÁNH
(SV K9 CNTN ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/352. Giả sử hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 1 \\ y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$$

có đúng một nghiệm (x_0, y_0) với $x_0 > 0$ và $y_0 > 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = 8\cos^3\frac{\pi}{7}$.

LÊ VĂN QUANG
(GV THPT Quốc Học Huế)

Bài T11/352. Tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C và p là nửa chu vi của tam giác. Lấy điểm A_1 thuộc cạnh BC sao cho đường tròn

nội tiếp các tam giác ABA_1, ACA_1 bằng nhau và gọi bán kính các đường tròn đó là r_A. Ta cũng định nghĩa tương tự cho r_B, r_C. Chứng minh rằng $2(r_A + r_B + r_C) + p \le h_a + h_b + h_c$.

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT Chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T12/352. Cho hình chóp tam giác $S.MNP$ có $\widehat{MSN} + \widehat{NSP} + \widehat{PSM} = 180^o$ và các góc phẳng nhị diện cạnh SM, SN, SP theo thứ tự là α, β, γ. Chứng minh rằng

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

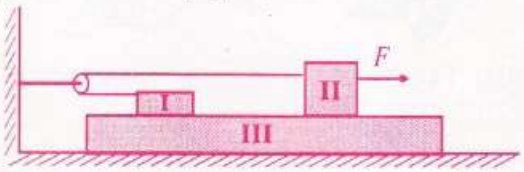
NGUYỄN ĐỨC ĐIỆP
(GV THPT Kinh Môn, Hải Dương)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/352. Một ôtô có khối lượng m = 1200kg. Sau khi bị hãm phanh cả bốn bánh, xe chuyển động chậm dần với gia tốc $a = 0,5\,g$ (lấy $g = 9,8$ m/s^2). Cho biết trọng tâm G của ôtô cách mặt đường 75 cm và nằm giữa hai trục xe trước và sau, chúng cách nhau 3,0 m. Tính độ lớn của lực ma sát mà mặt đường tác dụng lên các bánh trước và các bánh sau. Hỏi phanh trước hay phanh sau chóng hỏng hơn ?

TÔ GIANG *(Hà Nội)*
(Sưu tầm)

Bài L2/352. Hai vật I và II có khối lượng thứ tự là m, $2m$ được nối với nhau và đều nằm trên vật III có khối lượng $5m$ như hình vẽ.



Biết rằng dây nhẹ không giãn và khối lượng của ròng rọc không đáng kể. Bỏ qua ma sát ở ròng rọc và ma sát giữa vật III với sàn. Tác dụng một lực F nằm ngang lên vật II. Hệ số ma sát giữa các vật I, II với vật III là k. Tìm gia tốc của mỗi vật.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/352. (for 6th grade)

Find a 5-digit number such that by multiplying it by 2 we obtain a 6-digit number with six distinct nonzero digits and by multiplying it respectively by 5, 6, 7, 8, 11 we obtain five 6-digit numbers such that the digits of each number are the six above mentioned nonzero digits but written in another order.

T2/352. (for 7th grade)

Let a, b, c, d, m, n be positive integers such that $ab = cd$. Prove that the number

$$A = a^{2n+1} + b^{2m+1} + c^{2n+1} + d^{2m+1}$$

is a composite number.

T3/352. Find integral solutions of the equation

$$x^5 - y^5 - xy = 32.$$

T4/352. Let be given positive numbers a, b, c satisfying the condition $abc \ge 1$. Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}} + \frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}} + \frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

T5/352. Find real numbers x, y satisfying the conditions

$$\begin{cases} x + y \ge 4 \\ (x^3 + y^3)(x^7 + y^7) = x^{11} + y^{11}. \end{cases}$$

T6/352. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let E, F be the midpoints respectively of AD, BC. The lines AF, BE intersect at M, the lines CE, DF intersect at N. Find the least value of

$$P = \frac{MA}{MF} + \frac{MB}{ME} + \frac{NC}{NE} + \frac{ND}{NF}.$$

T7/352. Let A, B, C be three points lying on a circle with center O and radius R so that $CB - CA = R$ and $CA.CB = R^2$. Calculate the measures of the angles of triangle ABC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/352. The sequence of numbers (a_i) (i = 1, 2, 3, ...) is defined by: $a_1 = 1$; $a_2 = -1$;

$a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$ for n = 3, 4, ...

(Xem tiếp trang 14)

★**Bài T1/348.** *Tìm tất cả các số có bốn chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn điều kiện*

$$\overline{abcd} = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + 2006 \quad (1)$$

Lời giải. Từ điều kiện (1) suy ra $a \geq 2$. Mặt khác, vì b, c, d đều không lớn hơn 9 nên

$$\overline{abcd} \leq 2006 + 9^2(1 + 2 + 3 + 4)$$

hay $\overline{abcd} \leq 2816$, suy ra $a = 2$.

Thay $a = 2$ vào (1) được

$$\overline{bcd} = 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + 10 \quad (2)$$

Lập luận như trên từ (2) có

$\overline{bcd} \leq 9^2(2 + 3 + 4) + 10$ hay $\overline{bcd} \leq 739$, suy ra $b \leq 7$.

• Nếu $b = 7$ thì từ (2) có

$$\overline{7cd} = 3c^2 + 4d^2 + 108 \quad (3)$$

Vế phải của (3) không lớn hơn $9^2.7 + 108 = 675$, điều này mâu thuẫn.

• Nếu $b = 6$ thì từ (2) có

$$\overline{6cd} = 3c^2 + 4d^2 + 82 \quad (4)$$

Vế phải của (4) không lớn hơn $9^2.7 + 82 = 649$, suy ra $c \leq 4$, lúc đó vế phải của (4) không lớn hơn $3.4^2 + 4.9^2 + 82 = 454$, điều này mâu thuẫn.

Từ đây về sau ta thường gặp biểu thức $3c^2 + 4d^2 - 10c - d = c(3c - 10) + d(4d - 1)$, nên để tiện kiểm tra kết quả tính toán ta lập các bảng như sau:

c	0	1	2	3	4
$c(3c-10)$	0	−7	−8	−3	8
c	5	6	7	8	9
$c(3c-10)$	25	48	77	112	153
d	0	1	2	3	4
$d(4d-1)$	0	3	14	33	60
d	5	6	7	8	9
$d(4d-1)$	95	138	189	248	315

Nhận xét: Từ (2) dễ thấy c, d cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

• Nếu $b = 5$ thì từ (2) có

$$3c^2 + 4d^2 - 10c - d = 440 \quad (5)$$

Với $d \leq 7$ thì $3c^2 \geq 244$, nhưng điều này không xảy ra với $c \leq 9$ vì vậy chỉ thay d bằng 8 hoặc 9 vào (5) rồi sử dụng nhận xét và hai bảng trên, dẫn đến (5) vô nghiệm.

• Nếu b bằng 4, 3, 0 lập luận như trên đều dẫn đến vô nghiệm.

• Nếu $b = 2$ thì từ (2) có

$$3c^2 + 4d^2 - 10c - d = 182.$$

Lập luận như trên được nghiệm $d = 7$, $c = 1$.

• Nếu $b = 1$ thì từ (2) có

$$3c^2 + 4d^2 - 10c - d = 88.$$

Lập luận như trên được nghiệm $d = 5$, $c = 1$.

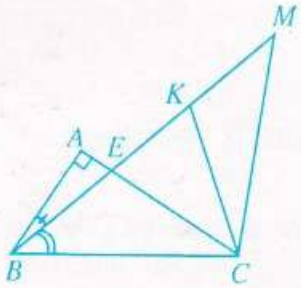
Vậy bài toán có hai nghiệm là $\overline{abcd}$ bằng 2217 và 2115. ❐

Nhận xét. Khi giải bài này cần biết sơ bộ đánh giá các giá trị $a = 2$ và $b \leq 7$ để đỡ tính toán. Bạn *Nguyễn Bảo Nhi*, 6, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa** giải tốt bài này.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/348.** *Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = 2\widehat{ABE}$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho EM = BC. Hãy so sánh số đo các góc $\widehat{MBC}$ và $\widehat{BMC}$.*

Lời giải. Dễ thấy $BE < BC < BM$. Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC$ ($K \in EM$). Ta có



$$\widehat{BCK} = \widehat{BKC} = \frac{180^\circ - \widehat{KBC}}{2}$$

$= 90^o - \widehat{ABE} = \widehat{AEB} = \widehat{KEC}$, suy ra ΔCEK cân tại C, do đó $CE = CK$ và $\widehat{CEB} = \widehat{CKM}$. Mặt khác, theo cách dựng điểm K ta có $BK = EM$ $\Rightarrow BE = KM$, suy ra $\Delta CEB = \Delta CKM$ (c.g.c). Vậy $\widehat{MBC} = \widehat{BMC}$.□

Nhận xét. 1) Bài toán này tương đối dễ và có nhiều cách giải. Xin nêu thêm hai hướng giải mà đa số các bạn đã làm.

Cách 2. Kẻ $MH \perp AC$ ($H \in AC$), MH cắt tia phân giác của góc EBC tại I, ta chứng minh được $IE = IC$, suy ra tam giác MEC cân tại M.

Cách 3. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên tia đối của tia ED lấy điểm N sao cho $EN = EM$. Đặt $\widehat{ABE} = x$, $\widehat{EBC} = 2x$ rồi chứng minh $\widehat{BMC} = 2x$.

2) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, chính xác:

Bắc Ninh: *Nguyễn Văn Luận*, 7A1, THCS TTr. Chờ, Yên Phong; **Phú Thọ:** *Hoàng Thị Hồng Nhung*, 7A1, THCS Lâm Thao, TX. Lâm Thao; **Hà Tây:** *Nguyễn Khắc Quý*, 7A1, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức; **Hà Nội:** *Trần Hà Lan*, 7A11, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Hải Phòng:** *Lê Mạnh Thắng*, 7B9, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chúng*, 7A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hóa:** *Trương Quốc Cường, Trịnh Quang Dũng*, 7A, *Lê Ngọc Linh*, 7B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Quảng Ngãi:** *Vũ Thị Như Ý, Hồ Tấn Vũ, Lâm Thị Mỹ Ly, Nguyễn Thị Diễm My, Nguyễn Thu Diễm, Nguyễn Thị Trâm*, 6A, THCS HànhTrung, *Nguyễn Tấn Linh*, 6B, THCS Hành Đức, *Lê Tường Vi*, 6A, *Nguyễn Thị Nhật Loan, Phan Quốc Bảo*, 7C, THCS Hành Phước, huyện Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** *Phan Minh Đức*, 7^1, THCS Nguyễn Du, Q. Gò Vấp, *Tô Nhã Quế Khanh*, 7A8, THCS Cầu Kiệu, Phú Nhuận; **Trà Vinh:** *Trần Hữu Nghĩa*, THCS TTr. Cầu Kè.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/348. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{4x-2006}+\frac{1}{5x+2004}=\frac{1}{15x-2007}-\frac{1}{6x-2005}.$$

Lời giải. Điều kiện $x \neq \frac{1003}{2}$; $x \neq -\frac{2004}{5}$; $x \neq \frac{669}{5}$; $x \neq \frac{2005}{6}$.

Nhận thấy

$(4x - 2006) + (5x + 2004) + (6x - 2005)$
$= 15x - 2007$, điều đó gợi cho ta đặt :

$a = 4x - 2006$; $b = 5x + 2004$; $c = 6x - 2005$ (1)

Thay vào phương trình ban đầu được

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Ta biến đổi hệ thức trên như sau

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$$
$$(a+b)\left[c(a+b+c)+ab\right]=0$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Từ đó $a + b = 0$ hoặc $b + c = 0$ hoặc $c + a = 0$, thay vào (1) ta được phương trình có ba nghiệm là $\frac{2}{9}$; $\frac{1}{11}$; $\frac{4011}{10}$.□

Nhận xét. 1) Bản chất lời giải là nhận thấy phương trình có thể quy về dạng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ và từ đó phân tích thành tích $(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

Một số bạn có cách trình bày khác, song thực chất vẫn là biến đổi phương trình về dạng tích như trên.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hoà Bình: *Vũ Thị Huyền*, 8A, THCS TT Kỳ Sơn, H Kỳ Sơn; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Luận*, 7A1, THCS TT Chờ, Yên Phong; **Hà Nội:** *Đặng Thuỳ Linh*, 9G, THCS Hữu Nghị Việt Nam – Angiêri, Thanh Xuân; *Trần Minh Đức* A, 7A11, THCS Giảng Võ, *Phạm Duy Long*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, *Phạm Đức Nam*, 8B, THCS Cự Khối, Q Long Biên; **Hải Dương:** *Mạc Đức Huy*, 7C, THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn; **Nam Định:** *Phạm Thị Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Hưng Yên:** *Hoàng Văn Công*, 8B, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; *Phạm Trường Sơn*, 8B, THCS Lê Quí Đôn, Kim Động; **Thái Bình:** *Nguyễn Quốc Trường*, 8A, THCS Nam Hưng, Tiền Hải, *Hà Thành Trung*, 8D, THCS TT Đông Hưng, Đông Hưng, *Trần Thị Hạnh*, 8A, THCS TT Vũ Thư, Vũ Thư; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Phương Hoa*, 8B, THCS Diễn Đồng, Diễn Châu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX Đông Hà, *Nguyễn Thị Ngọc Giao*, 6^5, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Triệu Phong; **Quảng Ngãi:** *Phan Nữ Như Huyền*, 7D, Tống Thị Thanh Hà, *Phạm Thị Hồng Vân*, 7E, *Cao Thị Nhật Linh*, 7G, *Phạm Thị Quỳnh Vy*, 8K, *Phan Quốc Bảo*, 7C, *Võ Thị Hồng Huyền*, 8C, THCS Hành Phước, *Võ Quang Duyệt*, 8A, *Võ Quang Viễn*, 7A, *Nguyễn Thị Trang*, 7H, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, *Đỗ Thị Anh Đào*, 8A1, THCS Phổ Cường, Đức Phổ; **Bình Thuận:** *Phạm Minh Quân*, 8/2, THCS Nguyễn Du, Phan Thiết; **Đăk Lăk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, KRông Buk, *Đinh Đắc Quảng Nam*, 8A, THCS 49 KRông Năng; *Nguyễn Hoàng Minh Trâm*, 6E, THCS Chu Văn An,

EaKar; **Sóc Trăng:** *Trang Nguyên Phát*, 7A5, THCS Kế Sách, Kế Sách; **TP Hồ Chí Minh:** *Bùi Trung Hiếu*, 8A5, THCS Vân Đồn; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T4/348. *Chứng minh rằng*

$$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)+2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)\ge 6 \qquad (1)$$

trong đó a, b, c là các số không nhỏ hơn 1.

Lời giải. Đặt vế trái của (1) là A. Ta sẽ chứng minh kết quả "mạnh" hơn là $A \ge 9$.

Cách 1. Từ $a \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$ có

$a^2 \ge 1, b^2 \ge 1, c^2 \ge 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^2}\ge\frac{1}{2a^2},\ \frac{1}{1+b^2}\ge\frac{1}{2b^2},\ \frac{1}{1+c^2}\ge\frac{1}{2c^2} \qquad (2)$$

Do (2) và BĐT Cauchy, ta có

$$A \ge ab+ac+bc+ba+ca+cb+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\ge 9\sqrt[9]{\frac{a^4b^4c^4}{a^2b^2c^2}} = 9\sqrt[9]{a^2b^2c^2} \ge 9.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Cách 2. Từ $a \ge 1, b \ge 1, c \ge 1$, suy ra

$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$

$= 2(ab+bc+ca) \ge 2(a+b+c) \ge a+b+c+3.$

Ta có $\quad 1+a^2 \ge 2a \Rightarrow a \ge \dfrac{2a^2}{1+a^2}$

Tương tự $\quad b \ge \dfrac{2b^2}{1+b^2};\ c \ge \dfrac{2c^2}{1+c^2}.$

Do đó $\quad a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$

$$\ge 2\left(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}\right)+3.$$

Vì vậy

$$A \ge 2\left(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)+3=9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$. ❐

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đã chứng minh bất đẳng thức "mạnh" hơn là: $A \ge 9 > 6$ và chỉ ra dấu đẳng thức trong (1) là không xảy ra.

2) Ngoài hai cách trình bày trên, còn nhiều hướng giải khác cũng được các bạn đưa ra và đều cho kết quả đúng. Chẳng hạn, có thể chứng minh BĐT

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge\frac{2}{1+xy}$$

rồi thay (x, y) lần lượt bằng (a, b); (b, c); (c, a).

Nhiều bạn đã có những mở rộng bài toán đã cho như sau:

• Chứng minh rằng

$$2(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)+2\left(\frac{1}{1+a_1^2}+\frac{1}{1+a_2^2}+...+\frac{1}{1+a_n^2}\right)\ge 3n$$

trong đó $a_i \ge 1$ với $i = 1, 2, ..., n$.

• Cho a_i, m là các số không nhỏ hơn 1 ($i = 1, 2, ..., n$). Chứng minh rằng

$$2\left(a_1^m.a_2+...+a_{n-1}^m a_n+a_n^m a_1\right)+(m+1)\left(\frac{m}{m+a_1^{m+1}}+...+\frac{m}{m+a_n^{m+1}}\right)\ge n(m+2).$$

3) Các bạn có lời giải tốt là:

Hải Dương: *Vũ Thanh Tú*, 9A2, THCS Vũ Hữu, Bình Giang; **Yên Bái:** *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, Nghĩa Lộ; **Nam Định:** *Phạm Thị Điệp*, 7A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Linh*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa;**Nghệ An:** *Tăng Văn Bình*, 8B, THCS Lý Nhật Quang Đô Lương, *Phạm Văn Quân*, 6C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đinh Tuấn Đông*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Kiên Giang:** *Vũ Đại Nghĩa*, 9/3, THCS Mai Thị Hồng Hạnh, Giồng Riềng, *Vũ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/348. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = 3xy+3yz+3zx-xyz$ *trong đó x, y, z là ba số dương thỏa mãn* $x^3+y^3+z^3=3$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$x^3+1+1 \ge 3x$;

$y^3+1+1 \ge 3y$;

$z^3+1+1 \ge 3z$.

Suy ra $\quad x^3+y^3+z^3+6 \ge 3(x+y+z)$

Do $x^3+y^3+z^3=3$ nên $0 < x+y+z \le 3 \qquad (1)$

Lại có $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \qquad (2)$

Chú ý vế phải của (2) không âm, từ (1) và (2) suy ra

$1 - xyz \le x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ (3)

Từ (3) và (1) dẫn đến

$P \le x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 1$

$= (x + y + z)^2 - 1 \le 3^2 - 1 = 8$

và $P = 8 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8 đạt được khi $x = y = z = 1$. ❐

Nhận xét. 1) Ngoài lời giải trên đây, nhiều bạn còn giải bằng cách sử dụng các BĐT Schur (đăng trong THTT số 348), BĐT Chebysev, BĐT Bunhiacovski song dài hơn.

2) Có một số bạn khi biến đổi vẫn nhầm lẫn như: trừ hai BĐT cùng chiều cho kết quả là một BĐT cùng chiều (!) hoặc đánh giá $3xy + 3yz + 3zx \le 9$ có dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$ rồi thay vào P để suy ra $P \le 9 - 1 = 8$ (!).

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

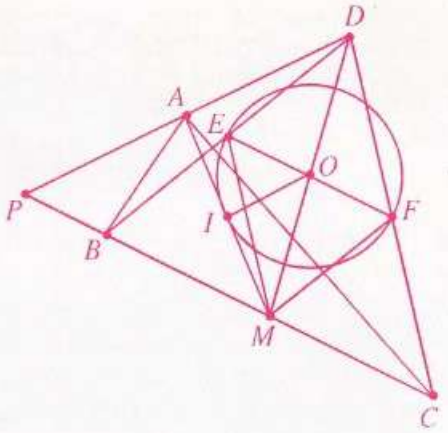
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Ngọc*, 7A1, *Tạ Thế Anh*, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; *Khổng Hoàng Thao*, 9A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch; **Nam Định:** *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Hưng Yên:** *Đoàn Thu Hà*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Hà Tĩnh:** *Trần Quang Biển*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Nghệ An:** *Dương Hoàng Hương*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Huy Linh*, 8B, THCS Yên Bái, Yên Định; **Quảng Bình:** *Đinh Thanh Hà*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Ngô Minh Thắng*, 9_1, THCS Nguyễn Khuyến, TP. Đà Nẵng; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, TP. Rạch Giá.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T6/348. *Cho tam giác ABC. P là điểm nằm trên đường thẳng BC. Trên tia đối của tia AP lấy điểm D sao cho* $AD = \frac{BC}{2}$. *Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của DB và DC. Chứng minh rằng đường tròn đường kính EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đường thẳng BC.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm của BC. Tứ giác $DEMF$ là hình bình hành do EM, FM là hai đường trung bình của tam giác DBC, suy ra DM và EF cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường.

Gọi I là trung điểm của AM thì I cố định.



OI là đường trung bình của tam giác AMD nên

$OI = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}BC$ (giả thiết). (1)

Lại có EF là đường trung bình của tam giác DBC nên $EF = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OI = \frac{1}{2}EF$.

Vậy, đường tròn đường kính EF (tâm O, bán kính $\frac{1}{4}BC$) luôn đi qua điểm cố định I khi P thay đổi trên đường thẳng BC. ❐

Nhận xét. 1) Bạn *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu, Nghĩa Lộ, **Yên Bái** có nhận xét là "Bài toán vẫn đúng nếu lấy D thuộc tia AP chứ không nhất thiết phải là tia đối của tia AP".

2) Bài toán trên có nhiều cách giải và đa số các bạn đều giải đúng. Tuy nhiên, một số bạn mắc sai lầm vì đã lập luận như sau "Nếu tam giác ABC có M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho $MN = \frac{1}{2}BC$ thì MN là đường trung bình của tam giác ABC".

3) Ngoài bạn *Cương*, các bạn sau đây cũng có lời giải ngắn gọn :

Hà Tây: *Đặng Khánh Hoà*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hoà, *Lê Thị Thuý*, 9C, THCS Yên Nghĩa, Hà Đông; *Phùng Bảo Châu*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hoà; **Quảng Ngãi**: *Vũ Nguyễn Hoàng Yến*, 9A, THCS Nghĩa Phương, Tư Nghĩa; *Trần Tấn Thanh*, 9A, THCS Hành Phước; **Đắk Lắk**: *Võ Văn Tuấn*, $9A_5$, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, *Lê Hồng Thiện*, 9E, THCS Chu Văn An, EaKar; **Bắc Giang**: *Hà Trọng Sỹ*, 9A, THCS Tân Thanh, Lạng Giang; **Kiên Giang**: *Vũ Đại Nghĩa*, 9_3, THCS Mai Thị Hồng Hạnh, Giồng Riềng. **Nghệ An**:

Nguyễn Xuân Dũng, 8A, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thái Bình**: *Hà Thành Trung*, 8D, THCS TTr. Đông Hưng; **Hải Phòng**: *Đặng Thuỳ Linh*, $9A_8$, THCS Trần Phú.

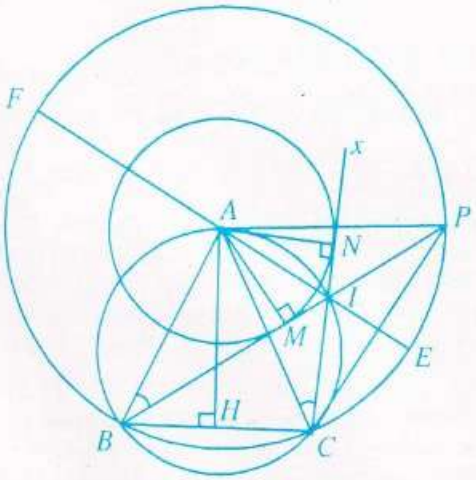
PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T7/348.** *Cho tam giác ABC có AB = AC = a, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính R với R < a. Từ B, C lần lượt kẻ các tiếp tuyến BM, CN (M, N là các tiếp điểm) với đường tròn trên sao cho chúng không đối xứng với nhau qua AH. Gọi giao điểm của các đường thẳng BM và CN là I.*

1) Tìm tập hợp điểm I khi R thay đổi.

2) Chứng minh rằng $IB.IC = |a^2 - d^2|$ với $AI = d$.

Lời giải. 1) * *Phần thuận*



• Nếu $R < AH$ thì A và I nằm cùng phía đối với đường thẳng BC (xem hình vẽ). Hai tam giác vuông ABM và ACN có $AB = AC$, $AM = AN$ nên $\Delta ABM = \Delta ACN$. Suy ra $\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$. Do đó I thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

• Nếu $AH < R < a$ thì A và I nằm về hai phía của đường thẳng BC. Lúc đó $\Delta ABM = \Delta ACN$ và $\widehat{BIC} + \widehat{MAN} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{BIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ nên tứ giác $ABIC$ nội tiếp.

Tóm lại trong mọi trường hợp I đều thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Giới hạn: Nếu $R = AH$ thì $I \equiv B$ hoặc $I \equiv C$ nhưng đây là trường hợp các tiếp tuyến BM, CN đối xứng nhau qua AH. Vậy $I \neq B, I \neq C$.

I chỉ có thể trùng A khi $R = 0$ tức là đường tròn suy biến thành điểm A. Vậy I thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC trừ các điểm B, C, A.

* *Phần đảo.* Lấy I' bất kì thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC khác B, C, A. Ta phải chứng minh rằng BI', CI' là hai tiếp tuyến của một đường tròn tâm A, bán kính $R < a$.

• Nếu I' thuộc cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa B thì $\widehat{AI'B} = \widehat{ACB}$, $\widehat{AI'x} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với $\widehat{AI'C}$). Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{AI'B} = \widehat{AI'x}$. Kẻ $AM' \perp BI'$, $AN' \perp Cx$ thì $AM' = AN'$. Do đó đường tròn tâm A bán kính AM' tiếp xúc với BI', CI'. Đường tròn này có bán kính $AM' < AB = a$.

• Nếu I' thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C hoặc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta chứng minh tương tự.

* *Kết luận:* Tập hợp điểm I là đường tròn ngoại tiếp ΔABC trừ các điểm B, C, A.

2) Giả sử đường tròn tâm A bán kính AB cắt đường thẳng BI lần nữa tại P và cắt đường thẳng AI tại E và F (E thuộc tia AI). Ta có $\Delta AIP = \Delta AIC$ (do đối xứng qua trục AI) nên $IC = IP$. Dễ thấy $\Delta IBF \backsim \Delta IEP$ suy ra $\dfrac{IB}{IF} = \dfrac{IE}{IP}$. Từ đó $IB.IC = IB.IP = IF.IE$.

• Xét trường hợp I thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Lúc đó $IB.IC = IF.IE = (AF + AI)(AE - AI) = (a + d)(a - d) = a^2 - d^2$.

• Xét trường hợp I thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Lúc đó $IB.IC = IF.IE = (AI + AF)(AI - AE) = (d + a)(d - a) = d^2 - a^2$.

Vậy $IB.IC = |a^2 - d^2|$. ❐

Nhận xét: 1) Nhiều bạn chưa làm đủ các bước của một bài quỹ tích.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Ngọc Trung*, 8A1, THCS Lâm Thao; **Hưng Yên:** *Đoàn Thu Hà*, 9A3, THCS Chu Mạnh

Trinh; **Bắc Giang:** *Hà Trọng Sỹ*, 9A, THCS Tân Thanh, Bắc Giang; **Vĩnh Phúc:** *Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Nội:** *Nguyễn Quý Tuấn*, 9A, THCS Lương Thế Vinh; **Hà Nam:** *Nguyễn Văn Hùng*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nam Định:** *Trần Thu Thủy*, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, *Trần Thị Hồng Vân*, 9D, Nguyễn Hiền, Nam Trực; **Nghệ An:** *Lưu Tuấn Anh*, 9A, THCS TTr. Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Tĩnh:** *Trần Quốc Luật*, 9B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Đắk Lắk:** *Nguyễn Hoàng Phương*, 9E, THCS Chu Văn An, Ea Kar, Đắk Lắk; **Kiên Giang:** *Võ Đức Huy*, 9/4, THCS Lê Quý Đôn, Rạch Giá.

VŨ KIM THỦY

★**Bài T8/348.** *Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{k} a_i \le \sum_{i=1}^{k} i(i+1)$ với $k = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n} \ge \frac{n}{n+1}.$$

Lời giải. (Theo bạn *Đặng Anh Tuấn*, 11A2, chuyên ĐHSP **Hà Nội**).

Ta chứng minh bài toán tổng quát hơn.

Cho 2n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) $b_i \le b_{i+1}$ *với* $i = 1, 2, ..., n-1$.

2) $\sum_{i=1}^{k} a_i \le \sum_{i=1}^{k} b_i$ *với* $k = 1, 2, ..., n$

Khi đó
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i} \qquad (1)$$

Chứng minh (1). Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^2}\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}\right)^2$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^2} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i} \qquad (2)$$

Đặt $B_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{b_i}$, $B_0 = 0$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}(B_i - B_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{b_{i+1}}\right)B_i + \frac{1}{b_n}B_n \qquad (3)$$

Lại có $B_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{b_i} = \sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{1}{b_l}-\frac{1}{b_{l+1}}\right)A_l + \frac{A_k}{b_k}$

ở đó $A_l = \sum_{i=1}^{l} a_i$. Vì $A_l \le B_l$ nên ta có

$$B_k \le \sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{1}{b_l}-\frac{1}{b_{l+1}}\right)B_l + \frac{B_k}{b_k} = \sum_{i=1}^{k}\frac{b_k}{b_k} = k \qquad (4)$$

Thành thử từ (3) và (4) ta được

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^2} \le \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{b_{i+1}}\right)i + \frac{n}{b_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}$$

Vậy (2) được chứng minh.

Áp dụng với $b_i = i(i+1)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ được

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \square$$

Nhận xét. 1) Trong lời giải ta đã nhiều lần sử dụng phép biến đổi Abel sau

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})y_i + x_n y_n$$

ở đó $y_i = \sum_{l=1}^{i} y_l$.

2) Khá nhiều bạn đã giải sai khi cho rằng

$$\sum_{l=1}^{n} a_l \le n(n+1)$$

hoặc cho rằng $a_i \le i(i+1)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phùng Đình Phúc*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Trịnh Ngọc Dương*, 10A1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Thành*, 11A1, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Ninh:** *Phạm Đức Hanh*, 10, THPT chuyên Hạ Long; **Hải Phòng:** *Đoàn Minh Duyên*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Gia Lai:** *Từ Đức Long*, 11 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Cần Thơ:** *Võ Quốc Bá Cẩn*, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T9/348.** *Xác định số nghiệm thực phân biệt nằm trong khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình*

$$e^{2\cos^2 x}(8\sin^6 x - 12\sin^4 x + 10\sin^2 x) = e + \frac{5}{2} \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $\sin^2 x = t$. Ta có $0 \le t \le 1$ và phương trình trên trở thành

$$e^{2(1-t)}(8t^3 - 12t^2 + 10t) = e + \frac{5}{2} \qquad (2)$$

Xét hàm số

$f(t) = e^{2(1-t)}(8t^3 - 12t^2 + 10t)$, $0 \le t \le 1$.

Ta có

$f'(t) = e^{2(1-t)}(24t^2 - 24t + 10 - 2(8t^3 - 12t^2 + 10t))$

$= -2.e^{2(1-t)}.g(t)$,

với $g(t) = 8t^3 - 24t^2 + 22t - 5$.

Chú ý $g'(t) = 2(12t^2 - 24t + 11)$,

$g'(t) = 0$ có hai nghiệm $t_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $t_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ ta thấy $g(t)$ đồng biến trên $[0; t_1]$ và nghịch biến trên $[t_1; 1]$, với $g(0) = -5$, $g(1) = 1$ do đó phương trình $g(t) = 0$, $0 \le t \le 1$ có nghiệm duy nhất $t = u$, $0 < u < t_1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ ta thấy $f(t)$ đồng biến trên $[0; u]$ và nghịch biến trên $[u; 1]$ với $f(0) = 0$, $f(1) = 6$. Chú ý rằng $0 < e + \frac{5}{2} < 6$, suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = v$, $0 < v < u$. Vì có bốn giá trị $x \in (0; 2\pi)$ để $\sin x = \pm\sqrt{v}$, nên phương trình (1) có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; 2\pi)$.❐

Nhận xét. Đây là bài toán dạng cơ bản, khá quen thuộc với các bạn học sinh THPT. Các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Hằng, Nghiêm Thị Hiền, Nguyễn Ngọc Lường*, 10A0, THPT Yên Phong I; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 11B8, THPT Bỉm Sơn, *Trần Hoàng Đạo*, 11B1, THPT Triệu Sơn I; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồ An*, 11A1, THPT Bắc Yên Thành, *Nguyễn Văn Trầm*, 11A1, THPT Diễn Châu III; **Hậu Giang:** *Dương Hữu Thành*, 11A3, THPT Long Mỹ.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★Bài T10/348. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số thực thỏa mãn điều kiện*

$$P(x).P(2x^2) = P(x^3 + x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Với đa thức hằng $P(x) \equiv a$, ta có $a^2 = a$ nên $a = 0$ hoặc $a = 1$. Ta thấy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra.

Xét trường hợp $P(x)$ khác hằng số

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $a_0 \ne 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Với $x = 0$ ta thu được $P(0) = a_n = 0$ hoặc $P(0) = a_n = 1$. Nếu $a_n = 0$ thì

$$P(x) = x^m Q(x),\ Q(0) \ne 0,\ m \in \mathbb{N}^*.$$

Thay vào điều kiện bài ra, ta thu được

$$(2x^2)^m Q(x)Q(2x^2) = (x^2+1)^m Q(x^3+x)$$

và $Q(0) = 0$, trái với giả thiết. Vậy nên $a_n = 1$. Đồng nhất hệ số bậc cao nhất ta thu được $a_0 = \frac{1}{2^n}$.

Từ điều kiện bài ra ta thấy nếu $P(x_0) = 0$ thì $P(x_0^3 + x_0) = 0$. Xét dãy số $x_{n+1} = x_n^3 + x_n$, ($n = 0, 1, 2, ...$), $x_0 \ne 0$, ta thấy $\{x_n\}$ là dãy số đơn điệu tăng khi $x_0 > 0$ và là dãy số đơn điệu giảm khi $x_0 < 0$. Từ đó suy ra nếu đa thức đã cho có một nghiệm thực khác 0 thì nó sẽ có vô số nghiệm thực. Điều này không thể xảy ra. Vậy $P(x) \ne 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra $P(x)$ chỉ có nghiệm phức: $z_1, z_2, ..., z_n$ và $|z_1||z_2|...|z_n| = 2^n$. Vậy nên tồn tại z_k với $|z_k| \ge 2$. Điều này dẫn đến $|z_k^2 + 1| \ge |z_k^2| - 1 \ge 3$ và vì vậy $|z_k^3 + z_k| \ge |z_k|$. Ta thu được $P(x)$ có vô số nghiệm, điều này không thể xảy ra. Vậy chỉ có hai đa thức $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài ra. ❐

Nhận xét. Đây là đề toán khó liên quan đến định lí cơ bản của đại số và cần có kiến thức về số phức. Các bạn chưa quen với việc sử dụng số phức nên gặp nhiều khó khăn trong cách trình bày. Đặc biệt, đa số đều suy luận sai rằng $|z_k^2 + 1| \ge 1$.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:, **Thái Nguyên:** *Nguyễn Hồng Phong*, 12T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Gia Lai:** *Lê Phúc Thịnh*, 10C3, THPT Hùng Vương, Pleiku; **Bến Tre:** *Lê Văn Chánh*, 11T, THPT Bến Tre.

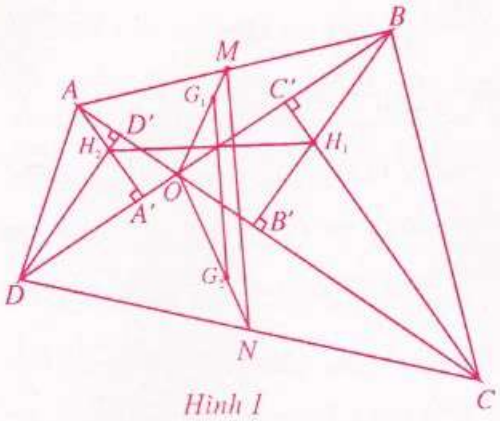
NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T11/348. *Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC, BD của một tứ giác lồi ABCD; G_1, G_2 tương ứng là trọng tâm các tam giác OAB, OCD ; H_1, H_2 tương ứng là trực tâm các tam giác OBC, ODA. Chứng minh rằng G_1G_2 vuông góc với H_1H_2.*

Lời giải.

Cách 1. Gọi A', C' là hình chiếu tương ứng của A, C trên BD; B', D' là hình chiếu tương ứng của B, D trên AC.

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Kí hiệu (M), (N) tương ứng là các đường tròn đường kính AB, CD (h. 1).



Hình 1

Dễ thấy $G_1G_2 // MN$ (1)

Từ sự đồng dạng của các tam giác ta có:

$$\begin{cases} \overline{H_1B}.\overline{H_1B'} = \overline{H_1C}.\overline{H_1C'} \\ \overline{H_2A}.\overline{H_2A'} = \overline{H_2D}.\overline{H_2D'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{P}H_1/(M) = \mathcal{P}H_1/(N) \\ \mathcal{P}H_2/(M) = \mathcal{P}H_2/(N) \end{cases}$$

$\Rightarrow H_1H_2$ là trục đẳng phương của hai đường tròn (M), (N) nên $MN \perp H_1H_2$ (2)

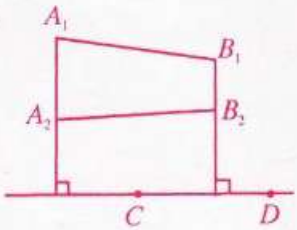
Từ (1), (2) suy ra $G_1G_2 \perp H_1H_2$.

Cách 2. Nhận xét:

$A_1A_2 \perp CD$, $B_1B_2 \perp CD$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1}.\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{CD}$ (h. 2).



Hình 2

Trở lại bài toán. Vẫn dùng các kí hiệu trong lời giải 1.

Ta có $\overrightarrow{G_1G_2}.\overrightarrow{H_1H_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{H_1H_2}$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{H_1H_2}$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{H_1H_2}+\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{H_1H_2}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA}\right) = 0$ (theo nhận xét).

Suy ra $G_1G_2 \perp H_1H_2$. □

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó và quen thuộc, nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Nhiều bạn sử dụng tích vô hướng chưa tốt, lời giải quá dài. Có thể giải bằng tam giác đồng dạng.

2) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Yên Bái: *Nguyễn Duy Cương*, 9A, THCS Tô Hiệu; **Bắc Giang:** *Nhữ Văn Vịnh*, 10A1, THPT Tân Yên II; **Bắc Ninh:** *Vũ Thị Thêu*, $10A_0$, THCS Yên Phong 1; **Hà Nội:** *Nguyễn Đình Trung*, 10T2, khối PT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Đại Chí*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Khánh Hòa*, 10A2, THPT Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; **Hải Phòng:** *Hồ Quý Phương*, 9/2, THCS Trưng Vương, TP Hải Phòng; **Vĩnh Long:** *Chương Công Danh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Thanh Hóa:** *Lê Trung Dũng*, 11A1, THPT Đông Sơn I; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Tuấn Khoa*, 10T, THPT TX. Cao Lãnh.

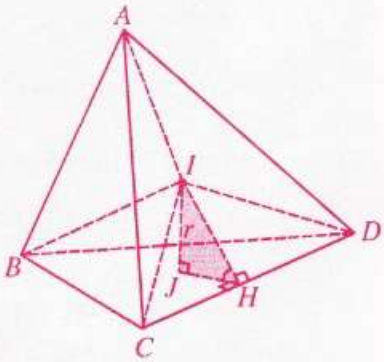
NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài T12/348.** *Gọi I và r theo thứ tự là tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Kí hiệu r_A, r_B, r_C, r_D theo thứ tự là bán kính mặt cầu nội tiếp các tứ diện $IBCD$, $IACD$, $IABD$, $IABC$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D} \le \frac{4+2\sqrt{6}}{r}.$$

Lời giải.

Kí hiệu $\widehat{XY}$ là góc phẳng nhị diện cạnh XY; S_A, S_B, S_C, S_D là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D. Dựng $IJ \perp \text{mp}(BCD)$ thì $IJ = r$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ I lên cạnh CD.



Vì $V_{IBCD} = \frac{1}{3}r.S_A = \frac{1}{3}r_A(S_A+S_{ICD}+S_{IBD}+S_{IBC})$,

nên $\frac{r}{r_A} = 1+\frac{S_{ICD}+S_{IBD}+S_{IBC}}{S_A}$ (1)

Mặt khác $r = IH\sin\widehat{IHJ} = IH\sin\frac{\widehat{CD}}{2}$.

Từ đó và từ công thức $V_{ABCD} = \frac{2S_A.S_B.\sin\widehat{CD}}{3CD}$

suy ra $\frac{S_{ICD}}{S_A} = \frac{2r.S_B.\cos\frac{\widehat{CD}}{2}}{3V_{ABCD}}$.

Lập luận tương tự đối với hai tỉ số $\frac{S_{IBD}}{S_A}$, $\frac{S_{IBC}}{S_A}$

thì từ (1) ta đi đến $\frac{r}{r_A} =$

$$= 1 + \frac{2r}{3V_{ABCD}}\left(S_B.\cos\frac{\widehat{CD}}{2} + S_C.\cos\frac{\widehat{BD}}{2} + S_D.\cos\frac{\widehat{BC}}{2}\right).$$

Thực hiện như trên đối với các tỉ số $\frac{r}{r_B}$, $\frac{r}{r_C}$, $\frac{r}{r_D}$

và lưu ý rằng $\cos\frac{x}{2} \le \frac{\sqrt{6}}{8}\cos x + \frac{7\sqrt{6}}{24}$, $x \in [0; \pi]$

(BĐT này tương đương với $\left(\cos\frac{x}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 \ge 0$)

ta nhận được

$$P = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_D}$$

$$\le \frac{4}{r} + \frac{2}{3V_{ABCD}}\left[\frac{\sqrt{6}}{8}\left((S_A+S_B).\cos\widehat{CD} + (S_A+S_C).\cos\widehat{BD}\right.\right.$$

$$+ (S_A+S_D).\cos\widehat{BC} + (S_C+S_D).\cos\widehat{AB}$$

$$\left. + (S_B+S_D).\cos\widehat{AC} + (S_B+S_C).\cos\widehat{AD}\right)$$

$$\left. + \frac{7\sqrt{6}}{8}(S_A+S_B+S_C+S_D)\right] \qquad (3)$$

Sử dụng *định lí hình chiếu* cho tứ diện $ABCD$

$S_A = S_B.\cos\widehat{CD} + S_C.\cos\widehat{BD} + S_D.\cos\widehat{BC}$

và tương tự cho S_B, S_C, S_D, sau đó thế vào vế phải của (3) có

$$P \le \frac{4}{r} + \frac{2}{3V_{ABCD}}\left[\sqrt{6}(S_A+S_B+S_C+S_D)\right]$$

$$= \frac{4}{r} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3V_{ABCD}}\right)\left(\frac{3V_{ABCD}}{r}\right) = \frac{4+2\sqrt{6}}{r} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos\frac{\widehat{AB}}{2} = \cos\frac{\widehat{AC}}{2} = \cos\frac{\widehat{AD}}{2} = \cos\frac{\widehat{BC}}{2} = \cos\frac{\widehat{CD}}{2}$$

$= \cos\frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ hay $\cos\widehat{AB} = \cos\widehat{AC} = \cos\widehat{AD}$

$= \cos\widehat{BC} = \cos\widehat{CD} = \cos\widehat{BD} = \frac{1}{3}$,

nghĩa là lúc đó tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều. ❐

Nhận xét. Đây là một đề toán được kết hợp giữa công thức tính thể tích tứ diện $V_{ABCD} = \frac{2S_{ABC}.S_{ABD}.\sin\widehat{AB}}{3AB}$,

bất đẳng thức lượng giác $\cos\frac{x}{2} \le \frac{\sqrt{6}}{8}\cos x + \frac{7\sqrt{6}}{24}$ ($0 \le x \le \pi$) và *định lí hình chiếu* của một hình tứ diện (chẳng hạn, xem cuốn *Các bài toán hình học không gian. VV. Praxolov – I.F. Sarigin*). Chỉ có bạn *Đặng Anh Tuấn*, 11A2, khối THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội** giải đúng bài này.

HỒ QUANG VINH

★ Bài L1/348. *Một vật nhỏ được treo vào đầu một lò xo nhẹ để tạo thành một con lắc lò xo. Tại thời điểm t = 0 (s) người ta đưa vật tới vị trí lò xo giãn Δl = 4 (cm) rồi truyền cho vật một vận tốc v = 20√15 (cm/s) hướng thẳng đứng xuống dưới thì thấy vật dao động điều hòa và có vận tốc cực đại v₀ = 40√5 (cm/s). Chọn trục tọa độ Ox theo phương thẳng đứng, gốc O ở vị trí bắt đầu thả vật, chiều dương hướng xuống dưới. Viết phương trình dao động của vật. Cho g = 10 (m/s²).*

Lời giải. Gọi Δl_0 là độ dãn của lò xo khi vật ở vị trí cân bằng thì vị trí cân bằng có tọa độ

$$x_0 = \Delta l_0 - \Delta l \qquad (1)$$

Phương trình dao động của vật có dạng

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) + x_0 \text{ (cm)} \qquad (2)$$

$\Rightarrow v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$ (cm/s) với

$$v_0 = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\sqrt{\frac{g}{\Delta l_0}} \qquad (3)$$

Theo đề bài, lúc $t = 0$ thì $x = 0$ và $v_0 = 40\sqrt{5}$ (cm/s), nên từ (1), (2) và (3) và thay số suy ra

$$\frac{(x-x_0)^2}{A^2}+\frac{v^2}{A^2\omega^2}=1 \Rightarrow \frac{x_0}{A^2}+\frac{v^2}{A^2\omega^2}=1$$

$\Rightarrow \Delta l_0^2 - 10\Delta l_0 + 16 = 0 \Rightarrow \Delta l_0 = 2$(cm) hoặc $\Delta l_0 = 8$ (cm).

• Với $\Delta l_0 = 2$(cm) thì $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l_0}} = 10\sqrt{5}$ (rad/s),

$x_0 = \Delta l_0 - \Delta l = -2$(cm) và $A = \frac{v_0}{\omega} = 4$(cm),

$\sin\varphi = -\frac{x_0}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Phương trình dao động là

$$x = 4\sin\left(10\sqrt{5}t + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \text{ (cm)}.$$

• Với $\Delta l_0 = 8$(cm) thì $\omega_2 = 5\sqrt{5}$ (rad/s);

$x_0 = 4$(cm), $A = 8$(cm) và $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Phương trình dao động là

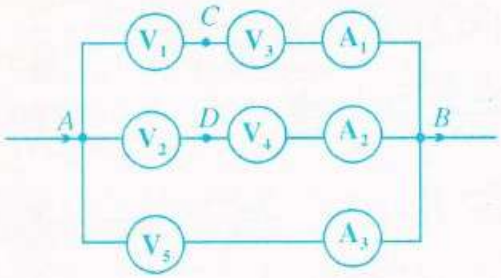
$$x = 8\sin\left(5\sqrt{5}t - \frac{\pi}{6}\right) + 4 \text{ (cm)}. \square$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đầy đủ và đáp số đúng:

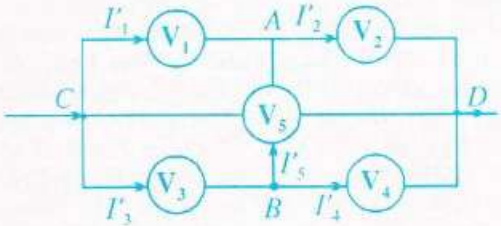
Vĩnh Phúc: *Lê Thanh Định*, 12A10 và *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Minh Tâm*, 12A1, THPT Đội Cấn, VĩnhTường; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Thu Hiền*, 12 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Nghệ An:** *Nguyễn Lê Thương*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, *Nguyễn Thu Mai*, khối 5, phường Hà Huy Tập, Vinh; **Quảng Ngãi:** *Lê Thị Thu Thảo*, 12 Toán, THPT chuyên Lê Khiết, *Mai Văn Định*, 12C1, THPT Trần Quang Diệu, Đức Lâm, Mộ Đức; **Hải Dương:** *Hoàng Tiến Đạt*, 11A9, THPT Hồng Quang, TP Hải Dương, *Trần Quang Minh*, *11K*, THPT Kim Thành;**Nam Định:** *Phạm Cao Kỳ*, 12C5, THPT Hải Hậu A; **Hà Tĩnh:** *Võ Tá Sơn*, 11A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ;**Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Liên*, 12A1, THPT Yên Định 2, Yên Định, *Phạm Văn Luận*, 11B4, THPT Bỉm Sơn, Bỉm Sơn.

MAI ANH

Bài L2/348. *Cho mạch điện như hình vẽ. Hiệu điện thế đặt vào hai điểm A, B là U không đổi. Số chỉ các vôn kế V_1, V_2, V_5 theo thứ tự là 9,6 (V), $\frac{24}{7}$ (V), 12 (V). Gọi số chỉ các ampe kế A_1, A_2, A_3 tương ứng là I_1, I_2, I_3 thì $I_1 = 2,8I_2 = 0,4I_3$. Hỏi nếu đặt hai điểm C, D vào hiệu điện thế trên thì số chỉ các vôn kế là bao nhiêu ? Cho rằng các ampe kế có điện trở không đáng kể.*



Lời giải. Gọi điện trở các vôn kế V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 lần lượt là R_1, R_2, R_3, R_4, R_5; hiệu điện thế đặt vào hai điểm A, B là U. Vì điện trở của các ampe kế không đáng kể nên $U_{AB} = U = 12$ (V).



Ta có

$$I_1 = \frac{U}{R_1+R_3} = \frac{9,6}{R_1} \Rightarrow R_1 = 4R_3 \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2+R_4} = \frac{24}{7R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{2}{5}R_4 \quad (2)$$

$$I_1 = 2,8I_2 \Rightarrow \frac{9,6}{R_1} = 2,8.\frac{24}{7R_2} \Rightarrow R_1 = R_2 \quad (3)$$

$$I_3 = \frac{U}{R_5} \Rightarrow R_5 = \frac{12.0,4}{I_1} = \frac{12.0,4}{9,6}R_1 = \frac{1}{2}R_1 \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có: $R_1 = 4R_3$, $R_2 = 4R_3$, $R_4 = 10R_3$, $R_5 = 2R_3$.

Khi đặt hiệu điện thế U vào hai điểm C, D; vì các ampe kế có điện trở không đáng kể, nên mạch điện được vẽ lại. Giả sử chiều dòng điện trong mạch điện như hình vẽ. Chọn điện thế tại D là 0 (V) thì điện thế tại C là 12 (V).

Tại A: $I'_1 + I'_5 = I'_2$; $\dfrac{V_C - V_A}{R_1} + \dfrac{V_B - V_A}{R_5} = \dfrac{V_A}{R_2}$

$$\Rightarrow \frac{12 - V_A}{4R_3} + \frac{V_B - V_A}{2R_3} = \frac{V_A}{4R_3} \Rightarrow 2V_A - V_B = 6 \qquad (5)$$

Tại B: $I'_3 = I'_5 + I'_4$; $\dfrac{V_C - V_B}{R_3} = \dfrac{V_B - V_A}{R_5} + \dfrac{V_B}{R_4}$

$$\Rightarrow \frac{12 - V_B}{R_3} = \frac{V_B - V_A}{2R_3} + \frac{V_B}{10R_3}$$

$$\Rightarrow 16V_B - 5V_A = 120 \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) ta tìm được $V_A = 8$ (V), $V_B = 10$ (V).

Vậy số chỉ của các vôn kế như sau:

V_1 là $V_C - V_A = 4$ (V); V_2 là $V_A - V_D = 8$ (V);

V_3 là $V_C - V_B = 2$ (V); V_4 là $V_B - V_D = 10$ (V);

V_5 là: $V_B - V_A = 2$ (V). □

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt và gọn: **Bắc Ninh**: *Trần Việt Long*, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, *Vũ Văn Ninh*, 9A, THCS Yên Phong, *Vũ Xuân Tùng*, 10A1, THPT Thuận Thành I; **Vĩnh Phúc**: *Đỗ Duy Chủng*, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, *Hoàng Mạnh Thắng*, 11A3, *Tạ Đức Mạnh*, 11A3, *Lỗ Tất Thắng*, 10A3, *Lê Thanh Định*, 12A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương**: *Trần Quang Minh*: 11K, THPT Kim Thành; **Hải Phòng**: *Võ Sĩ Cường*, 10 Lí, THPT Năng khiếu Trần Phú; **Quảng Ninh**: *Vũ Nam Phong*, 11E1, THPT Cẩm Phả; **Hưng Yên**: *Phạm Đức Linh*, 10 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình**: *Nguyễn Bình*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Thanh Hoá**: *Lê Bá Sơn*, 11F, THPT Lam Sơn, *Vũ Xuân Huy*, 11B5, THPT Quảng Xương II; **Nghệ An**: *Nguyễn Tất Nghĩa*, 11A3, *Nguyễn Đức Sơn*, A3 K34, *Trần Văn Thắng*, A3 K34, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Hoàng Viết Hợp*, 11A1, THPT Bắc Yên Thành, *Đậu Lệ Thuỷ*, 11A, THPT Quỳnh Lưu IV, *Phan Đình Thái*, 10G, THPT Nghĩa Đàn; **Bình Định**: *Lê Thanh Bình*, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi**: *Đỗ Nguyễn Tiến Thông*, 11A6, THPT Đức Phổ I; **Phú Yên**: *Hồ Vĩnh Hạ*, 11A3, THPT dân lập Duy Tân.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Các bạn gửi bài giải Đề ra kì này chú ý
- Ghi đầy đủ họ tên và địa chỉ vào mỗi bài giải.
- Không viết chung nhiều bài giải trên một tờ giấy.
- Thời hạn nhận bài giải là hai tháng tính từ ngày ra báo.

THTT

GIỚI THIỆU ĐỊNH LÍ...

(Tiếp trang 31)

$$= \left(\frac{c}{2} + \frac{2y}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{-c + 2x}{\sqrt{12}}\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{4} + \frac{cy}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{3} + \frac{c^2}{12} - \frac{cx}{3} + \frac{x^2}{3}.$$

Do $x^2 + y^2 = a^2$ và $2cx = a^2 - b^2 + c^2$ nên

$$QR^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{cy}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2S_{ABC}}{\sqrt{3}}.$$

Do vậy, nếu hoán vị a, b, c thì QR không đổi. Từ đó suy ra cả ba đoạn QR, RP, PQ đều bằng nhau, nghĩa là tam giác PQR đều.

(1) Theo http://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm

(2) Dr. W. Rutherford, trong "The Ladies Diary".

(3) ***First Consul***, chức vụ cao nhất trong nghị viện La Mã (cổ) và nghị viện Pháp thời đó.

(4) Institute de France (cơ quan lãnh đạo Hội khoa học Pháp).

(5) Palindrome có nghĩa là câu đọc xuôi ngược giống nhau. Trong Toán học, các số đọc xuôi ngược giống nhau, chẳng hạn 1345431, cũng được gọi là số hồi văn Palindrome.

(6) The possibility of [Napoléon] knowing enough geometry for this feat is as questionable as the possibility of his knowing enough English to compose the famous palindrome, ABLE WAS I ERE I SAW ELBA. Câu nói này là khẳng định dứt khoát rằng Napoléon không sáng tạo định lí này. Chúng ta biết, Napoléon rất yếu tiếng Anh, tuy nhiên, về cuối đời, khi bị giam ở đảo, ông miệt mài học tiếng Anh. Để ý, ERE là từ cổ, bây giờ là BEFORE.

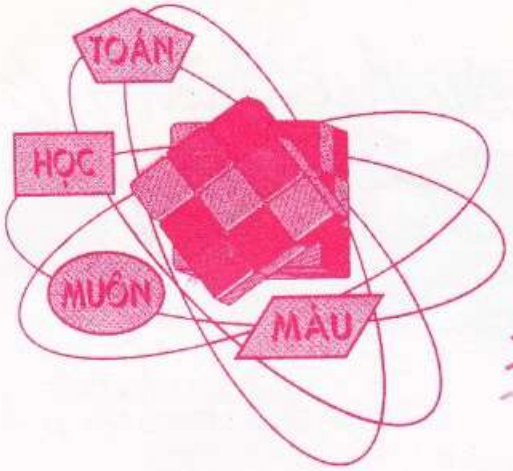
ĐÃ CÓ SÁCH

ẨN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

Phát hành từ 15.10.2006.

Giá bán lẻ 21.500 đồng.

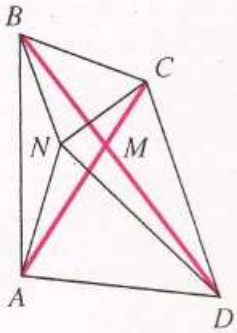
Độc giả muốn mua nhiều hãy liên hệ với Tòa soạn.



Giải đáp bài

MẠNG ĐƯỜNG NGẮN NHẤT

(Đề đăng trên THTT số 348 tháng 6/2006)



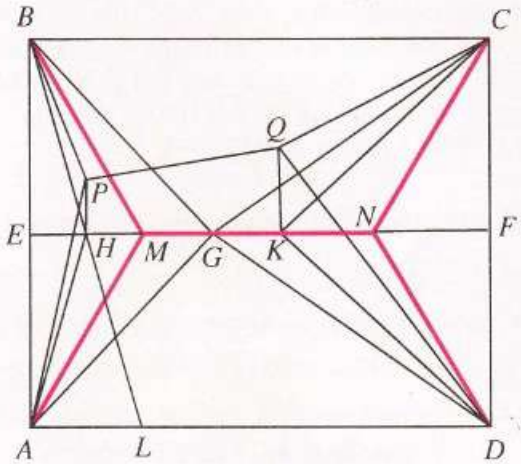
Hình 1

1) Trong tứ giác lồi $ABCD$ giả sử AC cắt BD tại M và N là một điểm bất kì (h. 1).

Dễ thấy
$(NA+NC) + (NB+ND)$
$\geq AC + BD$
$= MA+MB+MC+MD.$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi N trùng với M. Vậy M là điểm cần tìm.

2) Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$, $AD = b$ với $a \leq b$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD (h. 2).



Hình 2

Lấy các điểm M, N thuộc đoạn thẳng EF sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CND} = 120^\circ$ thì $MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $EM = \dfrac{MB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Đặt $x = MA + MB + MN + NC + ND$
$= MN + 4MB = EF + 4MB - 2EM = b + a\sqrt{3}$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng M, N là các điểm cần tìm.

Giả sử P, Q là hai điểm tùy ý, đặt
$y = PA + PB + PQ + QC + QD.$

Lấy H, K trên EF sao cho $PH \perp EF$ và $QK \perp EF$. (có thể P trùng H; Q trùng K; H trùng K).

Đặt $t = HA + HB + HK + KC + KD.$

Trên hình 2 dễ thấy $PQ \geq HK$;

$PA + PB = PL + PB \geq BL = HA + HB.$

Tương tự có $QC + QD \geq KC + KD.$

Từ ba bất đẳng thức này có $y \geq t$ nên ta chỉ cần chứng tỏ $t \geq x$.

Khi chứng minh ta chỉ cần xét tia HK cùng chiều với tia EF vì nếu ngược chiều thì t càng lớn hơn.

• Nếu HK và MN có điểm chung G thì M và N tương ứng là điểm Torricelli của tam giác GAB và GCD nên ta có
$t = (HA + HB + HG) + (GK + KC + KD)$
$\geq (MA + MB + MG) + (GN + NC + ND) = x.$

• Nếu HK và MN không có điểm chung, chẳng hạn đoạn HK thuộc tia ME, bạn đọc tự vẽ hình (nếu HK thuộc tia NF thì lập luận tương tự).

Xét tam giác KCD có điểm Torricelli là N nên

$KC + KD > KN + NC + ND$; tam giác NAB có điểm Torricelli là M nên
$HA + HB + HK + KN > MA + MB + MN.$

Cộng theo từng vế hai BĐT này được $t > x$.

Vậy tổng $x = MA + MB + MN + NC + ND$
$= b + a\sqrt{3}$ là mạng đường ngắn nhất.

(Xem tiếp trang 15)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Giới thiệu định lí Napoléon

NGUYỄN VĂN NHO
(NXB GD tại TP. Đà Nẵng)

1. Định lí Napoléon

Dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba tam giác đều BCM, CAN và ABP. Khi đó, các tâm Q, R, S của ba tam giác đều vừa dựng là các đỉnh của một tam giác đều.

2. Một chút lịch sử về định lí Napoléon[1]

Định lí Napoléon là một kết quả khá phổ biến trong toán học phổ thông. Thậm chí, tôi nghĩ các bạn đã từng gặp nó dưới dạng bài tập, nhưng đã không biết tên của nó. Tên gọi cho định lí này xuất hiện trên báo lần đầu tiên vào năm 1825[2]. Tiến sĩ Rutherford là tác giả bài báo, nhưng ông không phải là người đầu tiên phát minh. Mặc dù người ta thừa nhận rằng Napoléon Bonaparte là học sinh xuất sắc về Toán thời còn đi học, nhưng cho đến nay, không có bằng chứng để khẳng định rằng ông ta có mối liên hệ đến định lí này...

Các nhà nghiên cứu đã nhất trí rằng năng khiếu toán học là một yếu tố giúp Napoléon thành công trong lĩnh vực quân sự.

Sau khi trở thành Tổng tài thứ nhất[3], Napoléon đã hãnh diện khi được là thành viên của Viện Pháp quốc[4], ông mau chóng trở thành bạn bè gần gũi với các nhà toán học và khoa học thời đó, trong đó có Fourier, Monge, Laplace, Chaptal và Berthollet. Trong cuộc hành binh đến Ai Cập vào năm 1798, Napoléon đã mang theo 35000 quân cùng với một đội ngũ gồm 150 chuyên gia thuộc các lĩnh vực khác nhau, trong số đó có nhiều nhà toán học nổi tiếng thế giới như Monge, Fourier và Berthollet. Sau thắng lợi của cuộc hành binh này, nhiều nhà toán học đã nhận được chức vụ cao. Chẳng hạn, Laplace được đề bạt Bộ trưởng Bộ nội vụ, nhưng ông nhận trách nhiệm này chỉ trong 6 tuần. Có một giai thoại như sau : Khi Laplace tặng Napoléon bản sao một công trình lớn của mình, Napoléon xem qua và nói rằng trong tác phẩm này (về vũ trụ học) không hề có bóng dáng của Chúa - người đã sáng tạo. Laplace trả lời rằng "Thưa ngài, tôi đã không cần đến giả thuyết đó".

Riêng về chuyện Napoléon có thực sự phát minh ra định lí Napoléon hay không, Coxeter và Greitzer đã viết :

Nói rằng Napoléon có đủ kiến thức sâu sắc về Hình học nhằm chứng minh hoặc đưa ra định lí này thì cũng giống như nói rằng ông ta hiểu rõ Anh văn đến nỗi có thể sáng tạo ra một câu hồi vãn (*palindrome*[5]) nổi tiếng như là : ABLE WAS I ERE I SAW ELBA.[6]

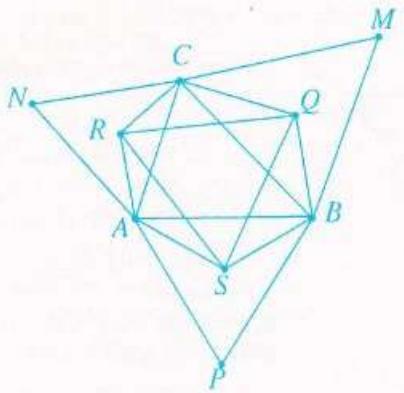
3. Một vài cách chứng minh định lí Napoléon

Trước tiên, ta có kết quả :

Tích của hai phép quay $Q_1(O_1,\varphi_1)$ và $Q_2(O_2,\varphi_2)$ là một phép quay hay một phép tịnh tiến tuỳ theo tổng $\varphi_1+\varphi_2=\varphi$ của các góc quay không là hoặc là bội của 2π (radian).

Việc chứng minh kết quả này xin dành cho bạn đọc. Thực ra, nó chính là một tính chất phổ biến của phép quay.

Giả sử tam giác *ABC* đã cho có thứ tự vòng tròn của các đỉnh ngược chiều kim đồng hồ như hình 1.



Hình 1

Cách 1. Xét hai phép quay có tâm lần lượt là R, S, góc quay cùng bằng $\frac{2\pi}{3}$, cùng chiều kim đồng hồ. Khi đó, theo kết quả trên, dễ dàng thấy được tích hai phép quay này là phép quay tâm Q, góc quay $\frac{\pi}{3}$, ngược chiều kim đồng hồ. Từ đó suy ra QRS là tam giác đều.

Cách 2. Dễ thấy rằng QBC, RCA và SAB là ba tam giác cân đồng dạng có góc ở đáy 30°. Xét phép quay tâm C, góc quay 30° ngược chiều kim đồng hồ và phép đồng dạng (dãn) tâm C, với tỉ số $k=\sqrt{3}$. Gọi f là tích của hai phép biến hình này. Qua f, ta có $Q \mapsto M$, $R \mapsto A$.

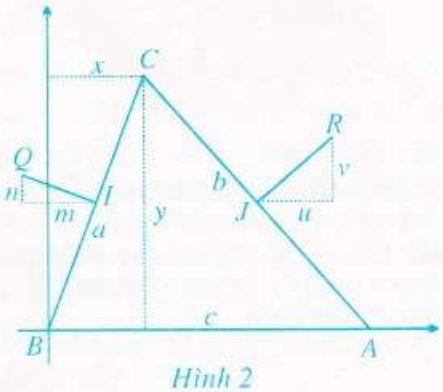
Tiếp theo, xét phép quay tâm B, góc quay 30° ngược chiều kim đồng hồ và phép đồng dạng (co) tâm B, với tỉ số $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Gọi g là tích của hai phép biến hình này. Qua g, ta có $M \mapsto Q$, $A \mapsto S$. Xét tích $g \circ f$. Dễ thấy rằng qua đó, ta có $Q \mapsto Q$, $R \mapsto S$.

Mặt khác, $k.h=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1$, tổng hai góc quay là 60° nên $g \circ f$ chính là một phép quay tâm Q, góc 60°, ngược chiều kim đồng hồ, biến R thành S. Vậy QRS là một tam giác đều. Ta được điều phải chứng minh.

Cách 3. Sử dụng phương pháp tọa độ, chứng tỏ ba cạnh PQ, QR, RP bằng nhau.

Chọn hệ trục vuông góc sao cho BA nằm trên trục hoành, B là gốc tọa độ.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và AC. Dễ dàng tính được $IQ = \frac{a}{\sqrt{12}}$. Từ đó, với các thành phần x, y, u, v và m, n như hình 2, ta có $m^2+n^2=\frac{a^2}{12}$ và $\frac{m}{n}=\frac{y}{x}$.



Hình 2

Tiếp theo, để ý $x^2+y^2=a^2$, ta được

$m=\frac{y}{\sqrt{12}}$ và $n=\frac{x}{\sqrt{12}}$.

Tương tự, ta cũng có

$u^2+v^2=\frac{b^2}{12}$, $\frac{u}{v}=\frac{y}{c-x}$ và $y^2+(c-x)^2=b^2$,

từ đó $u=\frac{y}{\sqrt{12}}$, $v=\frac{c-x}{\sqrt{12}}$.

Tọa độ của Q và R là

$Q\left(\frac{x}{2}-m;\frac{y}{2}+n\right)$ và $R\left(\frac{c+x}{2}+u;\frac{y}{2}+v\right)$.

Bình phương khoảng cách QR là

$$QR^2 = \left(\frac{x}{2}-m-\frac{c+x}{2}-u\right)^2+\left(\frac{y}{2}+n-\frac{y}{2}-v\right)^2$$

$$= \left(-\frac{c}{2}-u-m\right)^2+(n-v)^2 =$$

(Xem tiếp trang 28)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 352 (10-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục
NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI *Phó Tổng biên tập :* TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
Thư kí Toà soạn : ThS. VŨ KIM THỦY

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS .TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG, ThS. HỒ QUANG VINH.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Trịnh Xuân Lưu – Khai thác thêm một bất đẳng thức quen thuộc để giải toán

3 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Đại học Vinh, năm học 2006–2007.

6 Lời giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2006–2007.

7 Trường Đại học Sư phạm Hà Nội tổ chức Lễ mừng thọ GS. Nguyễn Cảnh Toàn 80 tuổi.

7 Kỉ niệm 55 năm khoa Toán - Tin ĐHSP Hà Nội

8 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Nguyễn Đăng Phất – Tiếp cận và khai thác một bài toán cực trị hình học từ những phương cách khác nhau.

10 **Cuộc thi vui TOLITI 2006.** Đề đợt 4.

11 Đáp án các bài TOLITI đợt 3.

12 **Giới thiệu về Toán học cao cấp – Introduction to Higher Mathematics**
Nguyễn Thanh Lâm - Hàm đặc trưng và tập hợp mờ

15 **Giải trí toán học – Math Recreation**

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/352, ..., T12/352, L1/352, L2/352.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 348.

29 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**

30 **Lịch sử toán học – History of Math**
Nguyễn Văn Nho – Giới thiệu định lí Napoléon .

Bìa 3: **Câu lạc bộ - Math Club**

Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Mĩ thuật :* MINH THƠ. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 283 Thích Quảng Đức, Thủ Dầu Một, Bình Dương. Tel : 0650.858330

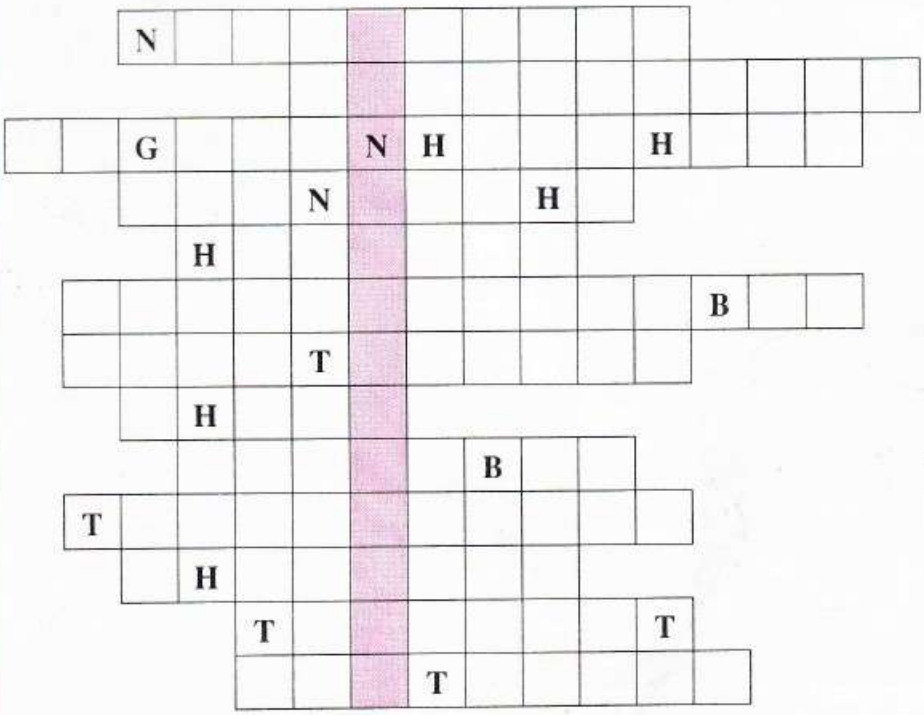
https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Câu lạc bộ

Ô chữ: Thầy trò và mái trường

Năm học mới đã đến. Ngày nhà giáo cũng sắp đến. Câu lạc bộ kì này thử tài hiểu biết thành ngữ, tục ngữ và tài đoán chữ của con nhà toán. Mỗi dòng được gợi ý như sau:

Dòng 1. Một chữ cũng là thầy.
Dòng 2. Không thầy ...
Dòng 3. Mẹ và cô.
Dòng 4. Thứ bậc của thầy trong xã hội xưa.
Dòng 5. Truyền thống của dân tộc ta.
Dòng 6. Học thầy ...
Dòng 7. Người có vai trò quan trọng trong mỗi trường.
Dòng 8. Người thầy... qua dòng sông kiến thức.
Dòng 9. Lao động tốn nhiều công sức trên lớp.
Dòng 10. Buổi tối miệt mài bên...
Dòng 11. Lao động tốn nhiều công sức ở nhà.
Dòng 12. Mừng khi học sinh cũ...
Dòng 13. Tình cảm của học sinh đã ra trường.



Các chữ thuộc các ô màu xếp theo một cột dọc có nghĩa là gì nhỉ? (Bạn tự thêm dấu cho các chữ nhé!)

Mời các bạn nhiệt tình hưởng ứng. Tháng 11 sẽ tặng quà các bạn giải đúng và gửi sớm (theo dấu bưu điện).

VŨ ĐÔ QUAN

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

KHỐI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

40 NĂM

Xây dựng và phát triển

TS.Mai Văn Tư
Trưởng khối THPT chuyên

Tháng 10 năm 1966, theo quyết định của Bộ Giáo dục và Đào tạo, lớp chuyên Toán đầu tiên gồm 36 học sinh của Khối Toán đặc biệt (tiền thân của Khối THPT chuyên Đại học Vinh) được long trọng khai giảng trên mảnh đất sơ tán Yên Dạ của xã miền núi Thạch Bình - Thạch Thành - Thanh Hóa.

Cuộc hành trình 40 năm qua của Khối THPT chuyên Đại học Vinh đầy khó khăn gian khổ, nhưng thấm đượm nghĩa tình. Biết bao cán bộ, giáo viên và học sinh đã dày công xây dựng nên bề dày truyền thống vẻ vang của Khối. Với yêu cầu và nhiệm vụ đào tạo ngày càng cao, Khối chủ trương đa dạng hóa các loại hình đào tạo, từng bước mở rộng hệ chuyên gắn liền với việc nâng cao chất lượng đào tạo tất cả các hệ. Từ một lớp chuyên Toán, đến năm 1996, Khối đào tạo thêm chuyên Tin. Năm 2003, Khối được phép đào tạo thêm chuyên Lí. Hiện nay, Khối đào tạo gần 1.300 học sinh các hệ. Từ khi thành lập đến nay, Khối đã đào tạo gần chục ngàn học sinh tốt nghiệp THPT. Phần lớn trong số đó đã tiếp tục học lên, nhiều người đã trở thành những chuyên viên giỏi, những nhà khoa học và những cán bộ quản lí xuất sắc của các trường Đại học, các viện nghiên cứu, các cơ quan nhà nước như GS.TSKH, Thiếu tướng *Phạm Thế Long* (học sinh khóa 2) là Chủ tịch hội Toán học Việt Nam, PGS.TS, Thiếu tướng *Lê Mỹ Tú* (học sinh khóa 1) là Giám đốc Học viện Mật mã Trung ương, GS.TSKH *Lê Tuấn Hoa* (học sinh khóa 6) là Phó Viện trưởng Viện Toán học kiêm Tổng thư kí Hội Toán học Việt Nam, PGS.TS *Trần Ngọc Giao* (học sinh khóa 2) là Giám đốc Học viện quản lí giáo dục, TS *Lê Thống Nhất* (Cựu giáo viên của khối - học sinh khóa 4) là Phó Tổng biên tập tạp chí Toán tuổi thơ và *Võ Văn Mai* (học sinh khóa 6) là một trong những doanh nhân thành đạt của Việt Nam. Hàng trăm học sinh của Khối trên mọi miền đất nước đã bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ. Trong số đó đã có hơn 100 người được Nhà nước phong học hàm Giáo sư, Phó Giáo sư.

Chất lượng đào tạo ngày một nâng cao. Năm học nào Khối cũng hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ giáo dục toàn diện. Hàng năm, học sinh của Khối thi đỗ tốt nghiệp 100%, trong đó gần 50% học sinh tốt nghiệp loại Giỏi, thi đỗ Đại học 100% đối với hệ chuyên, 85% đối với hệ không chuyên. Hầu hết số học sinh này được vào học tại các trường đại học có uy tín trong và ngoài nước. Chất lượng mũi nhọn cũng được chú ý đẩy mạnh, Khối đã tạo được một bước đột phá trong công tác phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, Tin, Vật lí. Cho đến nay, toàn khối đã có gần 100 học sinh giỏi Quốc gia, nhiều học sinh đoạt giải trong các cuộc thi giải Toán - Lí của các tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lí và Tuổi trẻ, đặc biệt có 10 học sinh đoạt giải Toán Quốc tế (IMO) và khu vực Châu Á Thái Bình Dương (APMO), đó là *Lê Ngọc Chuyên* (IMO-1976), *Nguyễn Tuấn Hùng* (IMO- 1978), *Nguyễn Trí Dũng* (APMO- 1996), *Nguyễn Xuân Tương* (APMO-1997), *Ngô Anh Tuấn* (APMO-1998), *Trần Đức Sơn* (APMO-1999), *Phan Đăng Khoa* (APMO-2000), *Mai Thanh Hoàng* (IMO-2002), *Phạm Thái Khánh Hiệp* (IMO-2002) và *Lê Hồng Quý* (IMO-2006).

Do những đóng góp to lớn của nhiều thế hệ thầy trò trong sự nghiệp giáo dục và đào tạo, Khối THPT chuyên Đại học Vinh đã vinh dự được tặng nhiều Bằng khen của UBND tỉnh Nghệ An, của Tổng liên đoàn Lao động Việt Nam, Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ về thành tích xuất sắc trong công tác đào tạo, nghiên cứu khoa học, bồi dưỡng học sinh giỏi. Đặc biệt, tháng 10 năm 2001, Khối THPT chuyên Đại học Vinh đã được Chủ tịch nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam tặng Huân chương Lao động hạng Ba.

ISSN : 0866-8035 **Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004**
Chỉ số : 12884 In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội **Giá : 5000 đồng**
Mã số : 8BT54M6 In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2006 **Năm nghìn đồng**