https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

5 2014 Số 443

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 51

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kỉ niệm 60 năm chiến thắng Điện Biên Phủ

(7/5/1954 - 7/5/2014)

Câu lạc bộ

MỘT SỐ YẾU TỐ TẠO NÊN THẮNG LỢI ĐIỆN BIÊN PHỦ

Trong những yếu tố tạo nên thắng lợi Điện Biên Phủ chỉ xin nêu ra dưới đây một số yếu tố mang nét riêng của chiến dịch Điện Biên Phủ (cd ĐBP), mỗi yếu tố được đánh số tương ứng với số dòng trong ô chữ kể từ trên xuống. Bạn hãy tìm các yếu tố đó và điền vào ô chữ để phát hiện xem các chữ gì ở cột và dòng sẫm màu trong ô chữ nhé!

Dòng 1. Bộ Chỉ huy cd ĐBP quyết định mở các mặt trận ở Thượng Lào, Trung Lào, Hạ Lào, Tây Nguyên và đồng bằng Bắc Bộ nhằm …(1), tạo điều kiện cho ta bao vây ĐBP.

Dòng 2. Đại tướng Võ Nguyên Giáp vừa chỉ huy đánh giặc, vừa dùng chính sách…(2), đưa thư hoặc dùng loa kêu gọi địch đầu hàng nên lấy Đồn Bản Kéo không tốn đạn, giảm thương vong khi tấn công khu trung tâm Mường Thanh.

Dòng 3. Phương pháp…(3) giúp quân ta không bị phát hiện khi mở đường hầm tiến gần lô cốt địch, đưa thuốc nổ vào lòng đồi A1.

Dòng 4. Yếu tố quan trọng nhất trong chiến tranh là ý chí Quyết chiến…(4) của quân và dân ta.

Dòng 5. Chiến thuật …(5) của bộ binh khi đánh địch khá gần ở khu trung tâm Mường Thanh.

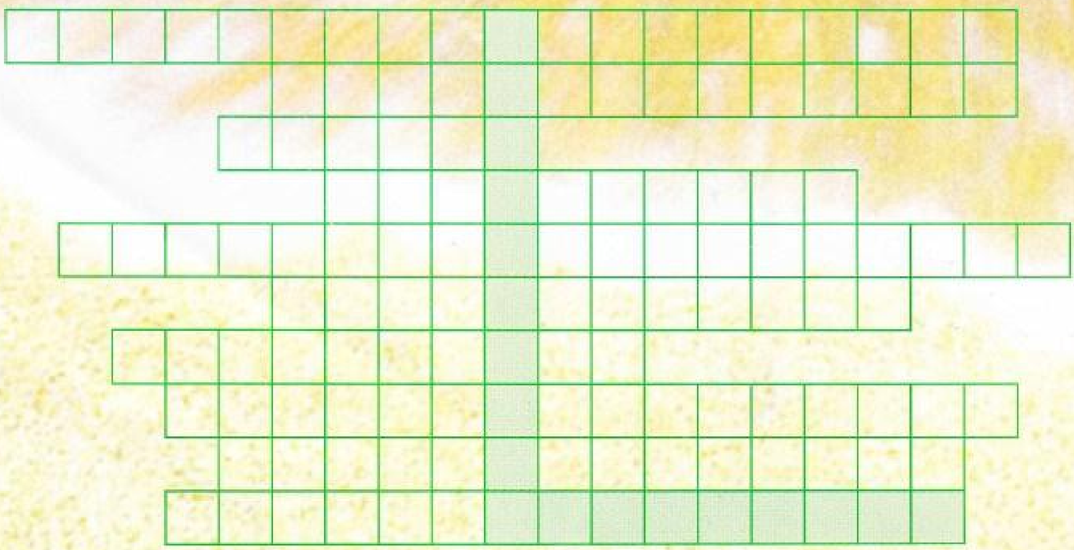
Dòng 6. Bộ đội ta đã đào hệ thống…(6) chằng chịt, dài khoảng 100 km.

Dòng 7. Để …(7) phải đào khoảng 250 m^3 đất đá cho mỗi hầm, đổ đất sỏi trên nắp dày 3m.

Dòng 8. Sau khi nghiên cứu kĩ tình hình mặt trận ĐBP, Đại tướng Võ Nguyên Giáp đã bỏ kế hoạch *Đánh nhanh thắng nhanh*, chọn phương châm…(8).

Dòng 9. Bộ đội ta đã …(9), từ đường rộng 1m thành đường rộng 3m với chiều dài khoảng trên 80km để chuyển pháo lớn vào trận địa.

Dòng 10. Trong cd ĐBP đã huy động khoảng 260000 …(10), trên 20000 xe thồ, trên 9000 xe trâu, xe cút kít, xe ngựa, gần 12000 bè mảng, cung cấp khoảng 25000 tấn lương thực, thực phẩm.



VÂN KHANH

CHUẨN HOÁ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG THUẦN NHẤT

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi
Cam Nghĩa - Cam Ranh - Khánh Hoà)

Trước hết ta nhắc lại bất đẳng thức (BĐT) đối xứng thuần nhất tức là bất đẳng thức vừa đối xứng vừa thuần nhất:

- Một bất đẳng thức được gọi là BĐT đối xứng nếu hoán vị hai biến bất kì thì BĐT đó không đổi (các biến có vai trò như nhau).
- Một bất đẳng thức được gọi là BĐT thuần nhất nếu nhân mỗi biến với một số $t > 0$ thì BĐT đó không đổi.

Để chứng minh BĐT đối xứng thuần nhất ta có thể chuẩn hoá (chọn một giá trị nào đó cho một biểu thức đối xứng) rồi đi chứng minh BĐT đối xứng có điều kiện.

Sau đây là một số bài toán minh hoạ:

Bài toán 1. *Chứng minh rằng*

$$x^4 + y^4 + 4x^2y^2 \ge 3xy(x^2 + y^2) \quad (1)$$

Lời giải. BĐT (1) đối xứng vì hoán vị x và y thì (1) không đổi và BĐT (1) thuần nhất vì thay x, y lần lượt bằng tx, ty $(t > 0)$ thì (1) không đổi. Từ đó ta có thể giả sử $x^2 + y^2 = 1$.

Suy ra $xy \le \frac{1}{2}$. BĐT (1) trở thành:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2x^2y^2 \ge 3xy$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y^2 - 3xy + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (2xy-1)(xy-1) \ge 0$$

(BĐT này đúng vì $xy \le \frac{1}{2}$).

Vậy BĐT (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng*

$$3(x^4 + y^4 + z^4) \ge (x+y+z)(x^3 + y^3 + z^3) \quad (2a)$$

Lời giải. BĐT (2a) đối xứng thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $x + y + z = 3$.

Khi đó BĐT (2a)

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 \ge x^3 + y^3 + z^3 \quad (2b)$$

Ta có: $x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1)$

$$= (x-1)^2(x^2 + x + 1) \ge 0$$

$\Rightarrow x^4 \ge x^3 + x - 1$. Tương tự $y^4 \ge y^3 + y - 1$, $z^4 \ge z^3 + z - 1$.

Cộng ba BĐT cùng chiều và kết hợp với $x + y + z = 3$ ta được BĐT (2b).

Suy ra BĐT (2a) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$. ❐

Bài toán 3. *Với $x; y; z \ge 0$, chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \quad (3)$$

Lời giải. BĐT (3) đối xứng thuần nhất, ta có thể giả sử $xy + yz + zx = 3$

Khi đó $x + y + z \ge 3$ và $xyz \le 1$. Ta có:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz \ge 3.3 - 1 = 8.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} = 1 \le \sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$. ❐

Bài toán 4. *Cho $x > 0$, $y > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^4 + y^4}{(x+y)^4} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \ge \frac{5}{8} \quad (4)$$

Lời giải. BĐT (4) đối xứng thuần nhất, ta có thể giả sử $x + y = 1$, suy ra $\sqrt{xy} \le \frac{1}{2}$.

Khi đó BĐT (4) $\Leftrightarrow x^4+y^4+\sqrt{xy}\ge\frac{5}{8}$

$\Leftrightarrow (1-2t^2)^2-2t^4+t\ge\frac{5}{8}$ (với $t=\sqrt{xy}$ và $0<t\le\frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow 16t^4-32t^2+8t+3\ge 0$

$\Leftrightarrow (4t^2-3)(4t^2-1)+8t(1-2t)\ge 0$ (BĐT này luôn đúng với $0<t\le\frac{1}{2}$). Vậy BĐT (4) đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y$. ❐

✪ **Bài toán 5.** *Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z(x+y)}{z^2(x+y)^2}\le\frac{6}{5}\ (5)$$

Lời giải. BĐT (5) đối xứng thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $x+y+z=1$.

Ta có: $1-2x+2x^2=1-2x(1-x)\ge 1-\frac{(x+1)^2}{4}$

$$=\frac{(1-x)(3+x)}{4}.$$

Suy ra: $\frac{x(1-x)}{1-2x+2x^2}\le\frac{4x}{3+x}=4-\frac{12}{3+x}.$

Tương tự $\frac{y(1-y)}{1-2y+2y^2}\le 4-\frac{12}{3+y}$,

$$\frac{z(1-z)}{1-2z+2z^2}\le 4-\frac{12}{3+z}.$$

Từ đó BĐT (5) có

$$\text{VT (5)}=\frac{x(1-x)}{1-2x+2x^2}+\frac{y(1-y)}{1-2y+2y^2}+\frac{z(1-z)}{1-2z+2z^2}$$

$$\le 12-12\left(\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3+y}+\frac{1}{3+z}\right)$$

$$\le 12-12.\frac{(1+1+1)^2}{3+x+3+y+3+z}$$

$$=12\left(1-\frac{9}{10}\right)=\frac{6}{5}\text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$. ❐

BÀI TẬP

Với $x,\ y,\ z>0$. Chứng minh các BĐT sau đây:

1. $\frac{x^3+y^3}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.

2. $3(x^3+y^3+z^3)\ge(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$.

3. $\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\ge x+y+z$.

4. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\le 2(x^3+y^3+z^3)$.

5. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$

$$\ge(xy+yz+zx)\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

6. $\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}\le 8.$

7. $\frac{(y+z-x)^2}{(y+z)^2+x^2}+\frac{(z+x-y)^2}{(z+x)^2+y^2}+\frac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}\ge\frac{3}{5}.$

Tin tức

GIẢI THƯỞNG ABEL NĂM 2014

Viện Hàn Lâm Khoa học và Văn chương Na Uy vừa quyết định trao Giải thưởng Abel năm 2014 cho nhà toán học người Nga *Yakov G. Sinai* (78 tuổi) thuộc Đại học Princeton, Mỹ và Viện Vật lí lí thuyết Landau, Viện Hàn lâm Khoa học Nga vì những cống hiến nền tảng cho các Hệ động lực, Lí thuyết ergodic và Vật lí Toán.

Yakov G. Sinai sẽ nhận giải thưởng này từ lễ trao giải tổ chức tại Oslo, Na Uy ngày 20/5/2014.

LÊ MAI

(nguồn: http:://www.abelprize.no/)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH BẮC NINH

NĂM HỌC 2012 - 2013

(Đề thi đăng trên TH&TT số 442, tháng 4 năm 2014)

VÒNG 1

Câu 1. a) $x=\frac{2}{3}$. b) $x\ge 5$.

c) $A=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}.\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=2.$

Câu 2. Hàm số $y=mx+1$. (1)

a) Đồ thị của (1) đi qua $A(1;4)$ khi $m=3$. Vì $m>0$ nên (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đồ thị của (1) song song với $d \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=m \\ m+1\ne 1\end{cases}$

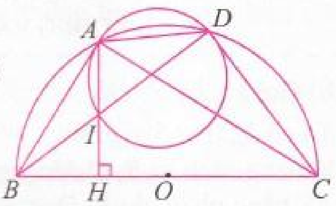
$\Leftrightarrow m=1$. Vậy $m=1$ thỏa mãn.

Câu 3. Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x km/giờ, $x>0$.

Ta có phương trình: $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{36}{60}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12\\x=-15.\end{array}\right.$

Do $x>0$ nên vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 km/giờ.

Câu 4.



a) Ta có $\widehat{BDC}=\widehat{IHC}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn và $AH\perp BC$)

$\Rightarrow \widehat{IDC}+\widehat{IHC}=180^\circ \Rightarrow IHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) ΔABI và ΔDBA có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{BAI}=\widehat{ADB}$ $(=\widehat{ACB})$ nên chúng đồng dạng $\Rightarrow \frac{BA}{BI}=\frac{BD}{BA}$

$\Rightarrow AB^2=BI.BD.$

c) Theo phần b) ta có $\widehat{BAI}=\widehat{ADI}$, suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAID với mọi D $\in \overset{\frown}{AC}$ và A là tiếp điểm. Mặt khác, $AB\perp AC$ tại A nên AC luôn đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔAID. Mà AC cố định, suy ra đpcm.

Câu 5. a) Ta có: $x^2+2y^2-3xy+2x-4y+3=0$
$\Leftrightarrow (x-2y)(x-y+2)=-3.$

Do x, y nguyên nên $x-2y$, $x-y+2$ nguyên. Mà $-3=(-1).3=1.(-3)$ nên có bốn trường hợp xảy ra. Xét từng trường hợp, kết hợp với điều kiện x, y nguyên dương ta được các giá trị $(x;y)$ cần tìm là $(1;2)$ và $(3;2)$.

b) Do $\widehat{BAD}$, $\widehat{BCD}$ tù nên A, C nằm trong đường tròn đường kính $BD\Rightarrow AC<BD$.

VÒNG 2

Câu 1. a) Ta có:

$$A=\frac{(x+2)+(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=1.$$

b) Ta có: $x=\frac{(\sqrt{3}-1).\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(\sqrt{20}+1)^2}+3}=\sqrt{5}-2$

$\Rightarrow x^2+4x-2=-1\Rightarrow P=(x^2+4x-2)^{2013}=-1.$

Câu 2. a) Tính được $\Delta'=2>0\Rightarrow$ đpcm.

b) Theo định lí Viète, $x_1+x_2=2m$

$\Rightarrow 2x_1^2+4mx_2+2m^2-9$

$=(2x_1^2-4mx_1+2m^2-1)+4(mx_1+mx_2)-8$

$=0+8m^2-8=8(m-1)(m+1)<0\Leftrightarrow -1<m<1.$

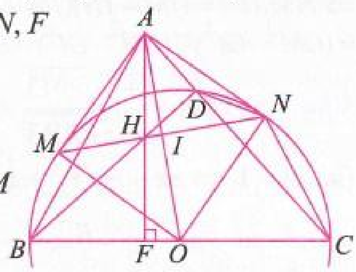
Câu 3. a) Từ giả thiết suy ra $x-y>0$

$\Rightarrow x-y=x^3+y^3>x^3-y^3$

$\Rightarrow x^2+xy+y^2<1\Rightarrow x^2+y^2<1.$

b) Cộng theo từng vế các phương trình của hệ: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0\Leftrightarrow x=y=z=1.$

Câu 4. a) Do M, N, F cùng nhìn đoạn AO dưới góc 90° $\Rightarrow$ đpcm.



b) Ta có $AN=AM$ (tính chất tiếp tuyến).

Từ phần a) ta suy ra $\widehat{ANM}=\widehat{AFN}$. (1)

Gọi D là giao của AC và (O), ta có $BD\perp AC$ và $H\in BD$. Ta có các cặp tam giác đồng dạng là ADH và AFC; ADN và ANC (g.g).

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TỈNH THÁI BÌNH

NĂM HỌC 2013 - 2014

Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, Tin

(*Thời gian làm bài: 150 phút*)

Bài 1. (3 *điểm*) 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-(x+y)y+1=0 \\ (x^2+1)(x+y-2)+y=0. \end{cases}$$

2) Giải phương trình:

$$x+4\sqrt{7-x}=4\sqrt{x-1}+\sqrt{(7-x)(x-1)}+1.$$

Bài 2. (2 *điểm*) Giải các phương trình:

1) Tìm số nguyên dương x lớn nhất sao cho 23^{x+13} là một ước số của 2013! (kí hiệu $2013!=1.2.3...2013$).

2) Tìm số nguyên dương n sao cho

$$A=(n+3)(4n^2+14n+7)$$

là một số chính phương.

Bài 3. (1 *điểm*) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 4(a+b+c)$.

Bài 4. (3 *điểm*) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Qua B kẻ đường thẳng cắt đường tròn tâm C bán kính CA tại D và E (D là điểm nằm trong tam giác ABC). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\widehat{BDM}=\dfrac{1}{2}\widehat{ACD}$.

1) Chứng minh rằng:

a) $BH.BC=BD.BE$ và tứ giác $DHCE$ nội tiếp đường tròn.

b) HA là phân giác của $\widehat{DHE}$.

2) Gọi N là giao điểm của MD và AH. Chứng minh D là trung điểm của MN.

Bài 5. (1 *điểm*) Cho 2013 đa thức $P_i(x)=x^2+x+a_i$ ($i=1; 2; 3; ...; 2013$) thỏa mãn: $a_{k+1}-a_k=\alpha$ (α là hằng số, $k=1; 2; 3; ...; 2012$) và đa thức $Q(x)=P_1(x)+P_2(x)+...+P_{2013}(x)$ có nghiệm thực.

1) Chứng minh đa thức $P_{1007}(x)$ có nghiệm.

2) Trong 2013 đa thức $P_i(x)$ trên, có nhiều nhất bao nhiêu đa thức vô nghiệm?

DƯƠNG VĂN THANH (*giới thiệu*)

Suy ra $AH.AF=AD.AC=AN^2\Rightarrow\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{AN}{AF}$

$\Rightarrow$ hai tam giác ANH, AFN đồng dạng (c.g.c)

$\Rightarrow\widehat{ANH}=\widehat{AFN}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANM}=\widehat{ANH}\Rightarrow H\in MN$.

c) Từ phần a) suy ra $HM.HN=HA.HF$.

Gọi $I=AO\cap MN$ thì I là trung điểm của MN

$\Rightarrow HM.HN=(IM-IH)(IM+IH)=IM^2-IH^2$

$=(OM^2-OI^2)-(OH^2-OI^2)=R^2-OH^2\Rightarrow$ đpcm.

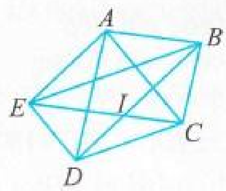
Câu 5. a) Ta có $\dfrac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}}=\dfrac{m}{n}$ với $m, n\in\mathbb{N}^*$,

$(m,n)=1\Leftrightarrow nx-my=(mz-ny)\sqrt{2013}$

$\Rightarrow nx-my=mz-ny=0\Rightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{m}{n}\Rightarrow xz=y^2$.

Vì $x^2+y^2+z^2=(x+z)^2-2xz+y^2=(x+z)^2-y^2$ $=(x+z+y)(x+z-y)$ là số nguyên tố và $x+z+y>1$, suy ra $x^2+y^2+z^2=x+z+y$ và $x+z-y=1$. Suy ra $x=y=z=1$ (thỏa mãn).

b) Gọi $I=EC\cap DB$.



Ta có $S_{BAE}=S_{DAE}$ nên khoảng cách từ B, D đến AE bằng nhau, do B, D cùng phía đối với đường thẳng AE nên $BD\,//\,AE$.

Tương tự ta có $AB\,//\,CE$

$\Rightarrow ABIE$ là hình bình hành

$\Rightarrow S_{IBE}=S_{ABE}=1$. Đặt $S_{ICD}=x$ $(0<x<1)$ ta có:

$S_{IBC}=S_{BCD}-S_{ICD}=1-x=S_{ECD}-S_{ICD}=S_{IED}$.

Ta lại có: $\dfrac{S_{ICD}}{S_{IDE}}=\dfrac{IC}{IE}=\dfrac{S_{IBC}}{S_{IBE}}$ hay $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1-x}{1}\Leftrightarrow$

$x^2-3x+1=0$, nghiệm thỏa mãn là $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow S_{IED}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow S_{ABCDE}=$

$=S_{EAB}+S_{EBI}+S_{BCD}+S_{IED}=3+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

MỘT SỐ DẠNG TOÁN

VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ THƯỜNG GẶP GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM

PHẠM TRỌNG THƯ
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

Những năm gần đây trong đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng thường có câu giải phương trình (PT), bất phương trình (BPT), hệ phương trình (HPT) liên quan đến tham số. Có lẽ đây là dạng toán mà nhiều học sinh lúng túng nhất. Trong bài viết này tác giả chỉ trình bày một số dạng toán mà chúng ta thường hay gặp (như xác định tham số để PT, BPT và HPT có nghiệm, có k nghiệm, nghiệm đúng với mọi x thuộc tập D nào đó,...) và phương pháp giải các dạng toán đó là khảo sát hàm số bằng đạo hàm hay còn gọi là phương pháp đạo hàm. Chúng tôi muốn nêu ra điều đó qua các thí dụ điển hình để giúp các bạn tìm hiểu thêm các dạng toán trên.

★**Thí dụ 1.** *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm*

$$2\sqrt{-x^2-2x+3}-(m-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}\right)+m+1=0 \ (1).$$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x},\ x\in[-3;\ 1]$. Ta có:

$t^2=4+2\sqrt{(x+3)(1-x)} \Rightarrow 2\sqrt{-x^2-2x+3}=t^2-4.$

Mà $2\sqrt{(x+3)(1-x)}\le(x+3)+(1-x)=4$ nên $2\le t\le 2\sqrt{2}$.

Với điều kiện t trên, PT (1) trở thành:

$$t^2-(m-1)t+m-3=0 \Leftrightarrow m=\frac{t^2+t-3}{t-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t-3}{t-1}$ trên đoạn $\left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$

có $f'(t)=\dfrac{t^2-2t+2}{(t-1)^2}>0,\ \forall t\in\left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$ nên hàm số đồng biến trên $\left[2;\ 2\sqrt{2}\right]$.

Vậy PT (1) có nghiệm khi

$$f(2)\le m\le f\left(2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 3\le m\le\frac{13+12\sqrt{2}}{7}.$$

★**Thí dụ 2.** *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm*

$$(8m-3)\sqrt{x+3}+2(3m-2)\sqrt{1-x}+2m-1=0 \ (2).$$

Lời giải. ĐK: $-3\le x\le 1$.

Với điều kiện trên, PT (2) trở thành:

$$2m\left(4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1\right)=3\sqrt{x+3}+4\sqrt{1-x}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{1-x}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1}=2m \ (*).$$

Vì $\left(\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=4$ nên có thể đặt

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \sqrt{1-x}=2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases} \text{ với } 0\le t\le 1.$$

Khi đó PT(*) trở thành $\dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}=2m.$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}$ trên đoạn $[0;\ 1]$;

có $f'(t)=-\dfrac{52t^2+8t+60}{(5t^2-16t-7)^2}<0,\ \forall t\in[0;\ 1]$

nên hàm số nghịch biến trên $[0;\ 1]$.

Vậy PT (2) có nghiệm khi $f(1)\le 2m\le f(0)$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{18}\le m\le\dfrac{9}{14}$. □

Lưu ý. Thí dụ 1, 2 đã sử dụng tính chất:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại $\min\limits_{x\in D} f(x)=m,\ \max\limits_{x\in D} f(x)=M$ thì PT $f(x)=k$ có nghiệm trên D khi và chỉ khi $m\le k\le M$.

★Thí dụ 3 (Khối A-2008). *Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt:*
$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m\ (m\in\mathbb{R})$ (3).

Lời giải. ĐK: $0\le x\le 6$.

Đặt $f(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$, $x\in[0;\,6]$. Ta có

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{(6-x)^3}-\sqrt[4]{(2x)^3}}{2\sqrt[4]{(2x)^3.(6-x)^3}}+\frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}.\sqrt{6-x}},$$

$\forall x\in(0;\,6)$.

Nhận thấy hai số hạng của $f'(x)$ luôn cùng dấu với nhau nên $f'(x)=0\Leftrightarrow 6-x=2x\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng biến thiên

x	0		2		6
$f'(x)$	|	+	0	−	|
$f(x)$	$2\sqrt[4]{6}+2\sqrt{6}$	↗	$3\sqrt{2}+6$	↘	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy PT (3) có hai nghiệm phân biệt khi $2\sqrt[4]{6}+2\sqrt{6}\le m<3\sqrt{2}+6$.

Lưu ý. Thí dụ 3 là bài toán khó về ứng dụng khảo sát hàm số để biện luận nghiệm của PT. Việc tính đạo hàm và xét dấu của đạo hàm là không đơn giản. Đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng tính toán thật tốt mới giải được.

★Thí dụ 4. *Cho bất phương trình*

$$m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\ge 0\ (4).$$

Tìm m để (4) nghiệm đúng với mọi $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}$.

Theo giả thiết $x\in\left[0;\,1+\sqrt{3}\right]$ nên $t\in[1;\,2]$.

Với điều kiện t trên, BPT (4) trở thành $m(t+1)\ge t^2-2\Leftrightarrow m\ge\dfrac{t^2-2}{t+1}$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ trên đoạn $[1;\,2]$; có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in[1;\,2]$ nên hàm số đồng biến trên $[1;\,2]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) nghiệm đúng với mọi $t\in[1;\,2]\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{t\in[1;\,2]}f(t)=f(2)=\dfrac{2}{3}$.

★Thí dụ 5. *Cho bất phương trình*

$$4^x-2014m.2^{x-1}+3-1007m\le 0\quad (5).$$

Tìm m để (5) có nghiệm.

Lời giải. Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Với điều kiện t trên, BPT (5) trở thành $t^2+3\le 1007m(t+1)\Leftrightarrow\dfrac{t^2+3}{t+1}\le 1007m$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t+1}$ trên $(0;\,+\infty)$; có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$ (do $t>0$).

Lập bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	|	−	0	+	
$f(t)$	3	↘	2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

BPT (5) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t>0$ $\Leftrightarrow 1007m\ge\min\limits_{t\in(0;\,+\infty)}f(t)=f(1)=2\Leftrightarrow m\ge\dfrac{2}{1007}$.

★Thí dụ 6. *Cho bất phương trình*

$$9^{2x^2-x}+2(1-2014m).6^{2x^2-x}+(2014m+1)4^{2x^2-x}\ge 0 (6).$$

Tìm m để (6) nghiệm đúng với mọi $|x|\ge\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. Chia hai vế BPT (6) cho 4^{2x^2-x} và đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$, ta được:

$$t^2+2(1-2014m)t+2014m+1\ge 0\quad (*)$$

Với $|x|\ge\dfrac{1}{2}$ thì $2x^2-x\ge 0\Rightarrow t\ge 1$.

Với điều kiện t trên, BPT (*) trở thành $\dfrac{t^2+2t+1}{2t-1} \ge 2014m$ (**).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{2t-1}$ trên $[1;+\infty)$; có

$f'(t)=\dfrac{2t^2-2t-4}{(2t-1)^2}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$ (do $t>0$).

Lập bảng biến thiên

t	1	2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$4 \searrow$	3	$\nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (**) nghiệm đúng với mọi $t \ge 1$

$\Leftrightarrow 2014m \le \min\limits_{t\in[1;+\infty)} f(t)=f(2)=3 \Leftrightarrow m \le \dfrac{3}{2014}$.

Lưu ý. Các thí dụ 4, 5 và 6 đã sử dụng một trong những tính chất:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại $\min\limits_{x\in D} f(x)=m$, $\max\limits_{x\in D} f(x)=M$ thì

- BPT $f(x)\ge k(m)$ có nghiệm $\forall x\in D$ khi và chỉ khi $k(m)\le \min\limits_{x\in D} f(x)$.
- BPT $f(x)\ge k(m)$ có nghiệm trên D khi và chỉ khi $k(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.
- BPT $f(x)\le k(m)$ có nghiệm $\forall x\in D$ khi và chỉ khi $\max\limits_{x\in D} f(x)\le k(m)$.
- BPT $f(x)\le k(m)$ có nghiệm trên D khi và chỉ khi $\min\limits_{x\in D} f(x)\le k(m)$.

★Thí dụ 7. *Tìm m để hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases}\log_5(4^x+144)-4\log_5 2\le 1+\log_5(2^{x-2}+1) & (7.1)\\ 3x^2-mx\sqrt{x}+16=0 & (7.2)\end{cases}.$$

Lời giải. Ta có

$(7.1) \Leftrightarrow \log_5\left(\dfrac{4^x+144}{16}\right)\le \log_5\left(5\left(2^{x-2}+1\right)\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{4^x+144}{16}\le 5\left(2^{x-2}+1\right)$ (*)

Đặt $u=2^x>0$ khi đó (*) có dạng:

$u^2-20u+64\le 0 \Leftrightarrow 4\le u\le 16$.

Suy ra $4\le 2^x\le 16 \Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

Với điều kiện trên, $(7.2)\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}=m$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}$ trên đoạn $[2;4]$; có

$f'(x)=\dfrac{6x^2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}(3x^2+16)}{x^3}=\dfrac{3\sqrt{x}(x^2-16)}{2x^3}\le 0$

$\forall x\in[2;4]$ nên hàm số nghịch biến trên $[2;4]$.

Vậy HPT đã cho có nghiệm khi $f(4)\le m\le f(2)$

$\Leftrightarrow 8\le m\le 7\sqrt{2}$.

★Thí dụ 8. *Tìm m để hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases}x-y+2014m=0 & (8.1)\\ y+\sqrt{xy}=2 & (8.2)\end{cases}.$$

Lời giải. Ta có

PT $(8.2)\Leftrightarrow \sqrt{xy}=2-y \Leftrightarrow \begin{cases}y\le 2\\ x=\dfrac{y^2-4y+4}{y}\end{cases}$.

Thay vào (8.1) ta được $\dfrac{y^2-4y+4}{y}-y+2014m=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4y-4}{y}=2014m$ (*).

HPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $y\le 2$.

Xét hàm số $f(y)=\dfrac{4y-4}{y}$ trên nửa khoảng $(-\infty;2]$; có $f'(y)=\dfrac{4}{y^2}>0\ \forall y\in(-\infty;2]$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;2]$.

Lập bảng biến thiên

y	$-\infty$	0	2
$f'(y)$	$+$	‖	$+$
$f(y)$	$4 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: HPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 2014m \in (-\infty;\ 2] \cup (4;\ +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{1}{1007}\right] \cup \left(\frac{2}{1007}; +\infty\right). \square$$

★**Thí dụ 9.** *Tìm m để hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} 5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x \\ \qquad +5\sqrt{6+x-x^2}+5 \quad (9.1) \\ |5-2x|+x^3-50x+53-2m \le 0 \quad (9.2) \end{cases}$$

Lời giải. Giải BPT(9.1). Điều kiện để BPT(9.1) có nghĩa là: $\begin{cases} 6+x-x^2 \ge 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 3$ (a).

Biến đổi bằng cách nhóm và đặt thừa số chung, ta có:

$$(x\log_2 x-5)\left(\sqrt{6+x-x^2}+1-x\right) > 0 \text{ (b)}$$

Do điều kiện (a) nên ta có:

$$x\log_2 x - 5 \le 3\log_2 3 - 5 < 0.$$

Vì thế (b) $\Leftrightarrow \sqrt{6+x-x^2}+1-x<0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6+x-x^2} < x-1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x \le 3.$$

Đối chiếu với điều kiện (a) ta được nghiệm của BPT(9.1) là $\frac{5}{2} < x \le 3$.

Khi đó: $(9.2) \Leftrightarrow 2x-5+x^3-50x+53-2m \le 0$

$$\Leftrightarrow x^3-48x+48 \le 2m \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-48x+48$ trên nửa khoảng $\left(\frac{5}{2};\ 3\right]$; có $f'(x)=3x^2-48<0\ \forall x \in \left(\frac{5}{2};\ 3\right]$ nên hàm số nghịch biến trên nửa khoảng $\left(\frac{5}{2}; 3\right]$.

Từ đó HPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $x \in \left(\frac{5}{2};\ 3\right] \Leftrightarrow 2m \ge \min\limits_{x\in\left(\frac{5}{3};\ 3\right]} f(x) = f(3) = -69$

$$\Leftrightarrow m \ge -\frac{69}{2}. \square$$

Lưu ý. Các thí dụ 7, 8, 9 có phương pháp như sau: Khi gặp HPT mà trong đó có một PT (hoặc BPT) không chứa tham số thì ta sẽ giải quyết PT (hoặc BPT) này trước. Từ PT (hoặc BPT) này ta sẽ tìm được tập nghiệm $x \in D$ (đối với HPT một ẩn) hoặc sẽ rút được ẩn này qua ẩn kia. Khi đó nghiệm của HPT phụ thuộc vào nghiệm của PT(hoặc BPT) thứ hai với phương pháp được trình bày ở các thí dụ trước.

BÀI TẬP

1. Cho phương trình $4\sqrt{x-1}+3m\sqrt{x+1}=\sqrt[4]{x^2-1}$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

2. Cho phương trình

$$4\sqrt{6+x-x^2}-3x=m\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\right).$$

Tìm m để phương trình có nghiệm.

3. Cho phương trình

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}}-2(1+a).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+4a+1=0.$$

Tìm a để phương trình có nghiệm.

4. Cho phương trình

$$\log_5^2 x+\sqrt{\log_5^2 x+1}+2014m-1=0.$$

Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;\ 5^{\sqrt{3}}\right]$.

5. Cho bất phương trình

$$\sqrt{(5+x)(7-x)} \le x^2-2x+m.$$

Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng mọi $x \in [-5;\ 7]$.

6. Cho bất phương trình $\sqrt{(m+2)x+m} \ge |x-1|$. Tìm m để bất phương trình có nghiệm trên đoạn $[0;\ 2]$.

7. Cho bất phương trình

$$a.2^{2x+1}+(2a-1).2^{x+2}+2a-1>0.$$

Tìm a để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

8. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 14^{2x+\sqrt{x+1}}-14^{2+\sqrt{x+1}}+2014x \le 2014 \\ x^2-2(m+1)x+4m+3=0 \end{cases}.$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

9. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+2\sqrt{x-2} \le \sqrt{5x+1} \\ |x-3|+x^3-29x+27-m \ge 0 \end{cases}.$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 9

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 (2 *điểm*). Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*H*) của hàm số đã cho.
2) Tìm *m* để đường thẳng $d: x + 3y + m = 0$ cắt (*H*) tại hai điểm *M*, *N* sao cho tam giác AMN vuông tại điểm $A(1;\ 0)$.

Câu 2 (1 *điểm*). Giải phương trình
$\sin 3x + 2\cos 2x = 3 + 4\sin x + \cos x(1 + \sin x)$.

Câu 3 (1 *điểm*). Giải bất phương trình
$$4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \le (x-1)(x^2-2).$$

Câu 4 (1 *điểm*). Tính tích phân
$$I = \int_0^1 \frac{3x + 2\ln(3x+1)}{(x+1)^2}\,dx.$$

Câu 5 (1 *điểm*). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, mặt bên *SAD* là tam giác vuông tại *S*, hình chiếu vuông góc của *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là điểm *H* thuộc cạnh *AD* sao cho $HA = 3HD$. Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Biết rằng $SA = 2\sqrt{3}a$ và đường thẳng *SC* tạo với đáy một góc 30°. Tính theo *a* thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (*SBC*).

Câu 6 (1 *điểm*). Giả sử *x*, *y*, *z* là các số thực không âm thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx)$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \sqrt{2(x+y+z)} - (y^2 + z^2).$$

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* có $M(2;\ 1)$ là trung điểm cạnh *AC*, điểm $H(0; -3)$ là chân đường cao kẻ từ *A*, điểm $E(23; -2)$ thuộc đường thẳng chứa trung tuyến kẻ từ *C*. Tìm tọa độ điểm *B* biết điểm *A* thuộc đường thẳng $d: 2x + 3y - 5 = 0$ và điểm *C* có hoành độ dương.

Câu 8.a (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$ và hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$, $(Q): x - 2y - 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc *d*, đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*).

Câu 9.a (1 *điểm*). Cho tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi *M* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau thuộc *E*. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc *M*. Tính xác suất để tổng các chữ số của số đó bằng 10.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hai điểm $A(1;\ 2)$, $B(4;\ 1)$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 5 = 0$. Viết phương trình đường tròn đi qua *A*, *B* và cắt Δ tại *C*, *D* sao cho $CD = 6$.

Câu 8.b (1 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $M(1;\ 1;\ 0)$ và hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$, $d_2: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) song song với d_1 và d_2 đồng thời cách *M* một khoảng bằng $\sqrt{6}$.

Câu 9.b (1 *điểm*). Tìm số nguyên dương *n* thỏa mãn
$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \frac{1}{5}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n = \frac{1}{156}.$$

LÊ XUÂN SƠN, TỪ ĐỨC THẢO
(GV THPT chuyên ĐH Vinh)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 8

Câu 1. 2) PT hoành độ giao điểm của (C) và Δ là $x^3-3x^2=k(x-2)-4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-x-2-k=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Đường thẳng Δ cắt (C) tại ba điểm A, B, D phân biệt khi và chỉ khi PT (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow k>-\dfrac{9}{4}$ và $k\neq 0$. Do $A(2;-4)$, nên hoành độ của B, D là nghiệm của PT (1). Giả sử $B\left(x_1;k(x_1-2)-4\right)$; $D\left(x_2;k(x_2-2)-4\right)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của PT (1). Ta có $BD=\sqrt{(1+k^2)(4k+9)}$. Gọi H là hình chiếu của M trên BD.

Ta thấy $MH=d(M,BD)=d(M,\Delta)=\dfrac{|k+6|}{\sqrt{k^2+1}}$.

$S_{MBD}=2\Leftrightarrow MH.BD=4\Leftrightarrow |k+6|\sqrt{4k+9}=4$ $\Leftrightarrow k=-2$.

Câu 2. PT đã cho tương đương với

$$\sin^2 x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{5\pi}{12} \text{ hoặc } \sin x=\sin\frac{-\pi}{12}.$$

Đáp số: $x=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi$; $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$;

$x=-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$; $x=\dfrac{13\pi}{12}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 3. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)^3+(x+y)=27y^3+3y & (1) \\ x^2(x^2-2)=2(1+4y) & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$, $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $f'(t)>0$. Từ đó PT (1) trở thành

$$f(x+y)=f(3y)\Leftrightarrow x+y=3y.$$

Thế vào PT (2) ta được $x^4=2x^2+4x+2$.

Hệ có hai nghiệm $(x;\ y)$ là

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+4\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2+4\sqrt{2}}}{4}\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+4\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2+4\sqrt{2}}}{4}\right).$$

Câu 4. Ta có $I=\displaystyle\int_e^{e^2}3x^2\ln x.dx-\int_e^{e^2}\frac{\sqrt[3]{\ln x-1}}{x}dx$.

Tính $I_1=\displaystyle\int_e^{e^2}3x^2\ln x dx$ bằng cách đặt

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=3x^2dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=x^3 \end{cases}$$

Tìm được $I_1=\dfrac{5e^6-2e^3}{3}$.

Tính $I_2=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\sqrt[3]{\ln x-1}}{x}dx$ bằng cách đặt

$$\sqrt[3]{\ln x-1}=t\Rightarrow \ln x=t^3+1\Rightarrow\frac{dx}{x}=3t^2dt.$$

Từ đó $I_2=\displaystyle\int_0^1 3t^3dt=\frac{3}{4}$.

Vậy $I=I_1-I_2=\dfrac{20e^6-8e^3-9}{12}$.

Câu 5. Gọi x là độ dài cạnh bên của lăng trụ; O là tâm ΔABC; I, M lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó $\varphi=\widehat{A'IM}$ hoặc $\varphi=180^o-\widehat{A'IM}$.

• *Trường hợp 1.* $\varphi=\widehat{A'IM}$. Từ định lí côsin cho $\Delta A'IM$ ta thấy $x=a$.

$$V_{A'BCC'B'}=2V_{A'.ABC}=\frac{2}{3}A'O.\,S_{ABC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Từ đó tìm được $a=\sqrt{2}$.

• *Trường hợp 2.* $\varphi = 180^o - \widehat{A'IM}$. Từ định lí côsin cho $\Delta A'IM$ ta thấy $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$$V_{A'.BCC'B'} = 2V_{A'.ABC} = \frac{2}{3}AO'.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

Từ giả thiết ta được $a = 2\sqrt[6]{2} > 2$ (không thoả mãn $0 < a < 2$). Tóm lại: $a = \sqrt{2}$.

Câu 6. Vì $a > 0, b > 0, \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ nên $a > 1, b > 1$.

Xét hàm $f(x) = x^b - b(x-1) - 1 \quad (x \geq 1; b > 1)$ có $f'(x) > 0$, khi $x > 1$, $f'(x) = 0$ khi $x = 1$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Do đó $f(a) > f(1) = 0, \ \forall a > 1$.

Như vậy $a^b > ab - b + 1, \quad \forall a > 1, \forall b > 1$.

Tương tự $b^a > ab - a + 1, \quad \forall a > 1, \forall b > 1$.

Suy ra $a^b + b^a > 2ab - (a+b) + 2 = ab + 2$.

Lại có $ab = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \geq 4$. Vậy $a^b + b^a > 6$.

Câu 7a. Đường tròn (ABC) có PT $x^2 + y^2 = 1$ (T'). Đường tròn (T) cắt (T') tại M, N thì $MN \perp OD$ $(O(0;0))$, hay $MN \perp Ox$. (T') có bán kính $R' = 1$, mà $MN = 2$ nên MN là đường kính của (T') $\Rightarrow M, N$ nằm trên Oy. Vậy (T) là đường tròn tâm D đi qua hai điểm (0; 1) và (0; –1).

Phương trình $(T): (x-2)^2 + y^2 = 5$.

Câu 8a. Có hai đường thẳng thoả mãn đề bài với PT tham số là

$$\Delta_1': \begin{cases} x = 1 - (4 - 2\sqrt{3})t \\ y = t \\ z = -1 + (7 - 4\sqrt{3})t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R});$$

$$\Delta_2': \begin{cases} x = 1 - (4 + 2\sqrt{3})t \\ y = t \\ z = -1 + (7 + 4\sqrt{3})t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 9a. Từ $A_n^3 + 4C_n^2 = 100 \Rightarrow n = 5$. Ta có

$$(2-3x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k . 2^{10-k} . 3^k (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{10} a_k x^k.$$

Để tìm hệ số nhỏ nhất trong khai triển ta chỉ cần xét hệ số ứng với x có số mũ lẻ. Đó là $a_7 = -2099520$.

Câu 7b. Gọi H' là điểm đối xứng của H qua BC, tìm được $H'(3; 3)$. PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC (đi qua M, N, H') là $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0$ (C). Từ đó tính được $BC = 3\sqrt{2}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} d(A, BC).BC = 6$ (đvdt).

Câu 8b.

Đáp số: $M\left(\dfrac{\sqrt{7}-13}{9}; \dfrac{4-\sqrt{7}}{9}; \dfrac{44-2\sqrt{7}}{9}\right)$.

Câu 9b. Ta có $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ (1).

Đặt $z = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ thì $z^3 = 1, \ 1 + z + z^2 = 0$

$$1 + z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}; \ 1 + z^2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Ta thấy

$$(1+z)^n = C_n^0 + zC_n^1 + z^2C_n^2 + z^3C_n^3 + \ldots + z^nC_n^n$$
$$= C_n^0 + zC_n^1 + z^2C_n^2 + C_n^3 + zC_n^4 + z^2C_n^5 + \ldots \ (2)$$
$$(1+z^2)^n = C_n^0 + z^2C_n^1 + z^4C_n^2 + z^6C_n^3 + \ldots + z^{2n}C_n^n$$
$$= C_n^0 + z^2C_n^1 + zC_n^2 + C_n^3 + z^2C_n^4 + zC_n^5 + \ldots \ (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$3\left(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots\right) = 2^n + (1+z)^n + (1+z^2)^n$$
$$= 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}$$
$$C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right) - 1$$

(n nguyên dương). Cho $n = 2014$ ta được

$$C_{2014}^3 + C_{2014}^6 + C_{2014}^9 + \ldots + C_{2014}^{2013}$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^{2014} + 2\cos\frac{2014\pi}{3}\right) - 1 = \frac{2^{2014} - 4}{3}.$$

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Yên Trung, Bắc Ninh)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

HÀNH TRÌNH QUA BÀI TOÁN OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ NĂM 2013

HOÀNG VĂN CƯỜNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

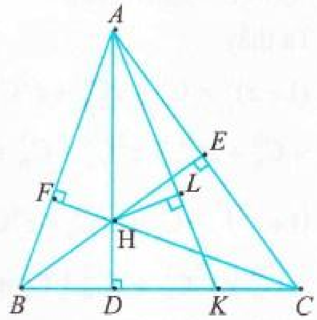
Bạn trẻ yêu toán thân mến! trong quá trình làm toán đôi khi bạn tự hỏi: Không biết bằng cách nào mà người ta có thể nghĩ ra các đề toán hay và phức tạp đến thế? Thực ra thì mọi bài toán đều bắt đầu từ những bài toán đơn giản nhất, chẳng hạn chúng ta cùng thực hiện một hành trình qua một bài toán thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2013 nhé!

Ta bắt đầu một hành trình như sau:

Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, khi đó từ các tứ giác BFHD, CEHD nội tiếp, ta có

$$\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AD} = \overline{AE}.\overline{AC} \quad (1)$$

Bây giờ ta lấy một điểm K bất kì trên cạnh BC và không trùng với điểm D, kẻ HL vuông góc với AK (h.1), khi đó tứ giác $DHLK$ là tứ giác nội tiếp và như vậy ta có các



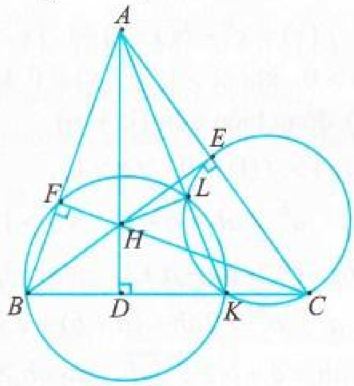
Hình 1

$$\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AD} = \overline{AL}.\overline{AK} = \overline{AE}.\overline{AC} \quad (2)$$

Từ đẳng thức (2) suy ra các tứ giác $BFLK$ và $CELK$ nội tiếp. Từ đây ta có bài toán sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC và khác với các điểm B, C và D, gọi L là hình chiếu của H trên AK. Chứng minh các tứ giác BFLK, CELK là tứ giác nội tiếp.*

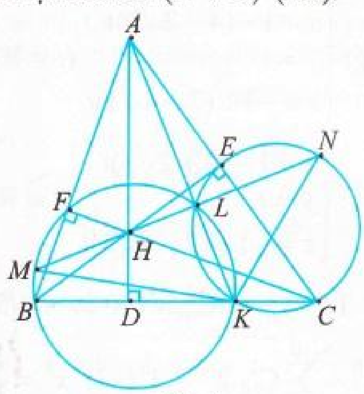
Tiếp theo, để ý rằng điểm L chính là giao điểm thứ hai khác điểm K của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFK và đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK, theo trên thì ba điểm K, L, A thẳng hàng. Từ đây ta có bài toán như sau:



Hình 2

Bài toán 2. *Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC và khác với các điểm B, C và D, đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK cắt nhau tại điểm L khác với điểm K. Chứng minh ba điểm K, L, A thẳng hàng và HL vuông góc với AK.*

Từ Bài toán 2, giả sử đường thẳng HL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tại điểm M $(M \neq L)$ và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK tại điểm N $(N \neq L)$ (h.3).

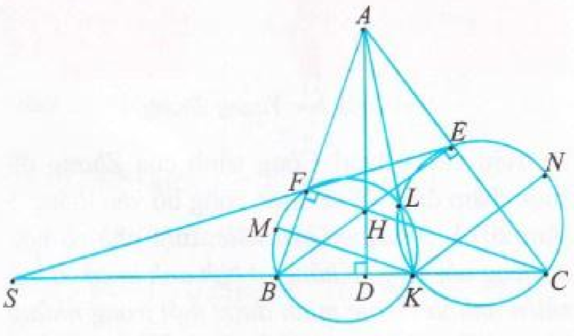


Hình 3

Khi đó từ $\widehat{KLM} = 90^\circ$, $\widehat{KLN} = 90^\circ$ nên KM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BFK và KN là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Từ đây ta đi đến bài toán thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2013 như sau:

Bài toán 3 (IMO – 2013). *Cho tam giác nhọn ABC, kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC và khác với các điểm B và C; kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.*

Từ Bài toán 3, giả thiết thêm rằng tam giác ABC không cân tại A, khi đó đường thẳng EF sẽ cắt đường thẳng BC tại một điểm S nào đó (h.4). Vấn đề đặt ra là với vị trí nào của điểm K trên BC thì đường thẳng HL đi qua điểm S?



Hình 4

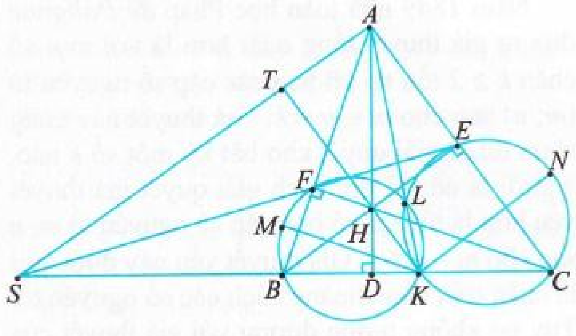
Nhận thấy, nếu đường thẳng HL đi qua S thì từ tứ giác $DHLK$ nội tiếp, nên $\overline{SD}.\overline{SK} = \overline{SH}.\overline{SL}$, thế nhưng năm điểm A, F, H, L, E thuộc đường tròn đường kính AH nên $\overline{SH}.\overline{SL} = \overline{SE}.\overline{SF}$. Từ đó suy ra $\overline{SD}.\overline{SK} = \overline{SE}.\overline{SF}$ (3)

Đẳng thức (3) chứng tỏ rằng tứ giác $DFEK$ nội tiếp, nhưng D, E, F là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ các đỉnh A, B, C, điều này buộc K phải là trung điểm của cạnh BC (đường tròn Euler đi qua chân của các đường cao và các trung điểm các cạnh của tam giác).

Ngược lại, nếu K là trung điểm của BC thì tứ giác $DFEK$ nội tiếp (tính chất của đường tròn Euler) suy ra $\overline{SD}.\overline{SK} = \overline{SE}.\overline{SF}$, chứng tỏ điểm S có cùng phương tích đối với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHLK$ và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác $AFHLE$. Do đó trục đẳng phương HL của chúng đi qua điểm S. Đến đây ta có thể phát biểu bài toán sau:

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn ABC và AB < AC, kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H; cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC và khác với các điểm B, C và D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK cắt nhau tại điểm thứ hai L khác với điểm K. Tìm vị trí của điểm K để các đường thẳng BC, HL, EF đồng quy.*

Từ Bài toán 4 với K là trung điểm của BC thì ba đường thẳng BC, HL, EF đồng quy tại S và như vậy tam giác ASK có AD, SL là những đường cao, do đó H cũng là trực tâm của tam giác ASK suy ra đường thẳng KH vuông góc với đường thẳng AS và $\overline{ST}.\overline{SA} = \overline{SE}.\overline{SF} = \overline{SB}.\overline{SC}$, nên T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (h.5). Đến đây ta có bài toán sau:



Hình 5

Bài toán 5. *Cho tam giác nhọn ABC và AB < AC, kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi S là giao điểm của các đường thẳng BC và EF, K là trung điểm của cạnh BC, đường thẳng KH cắt đường thẳng AS tại T. Chứng minh rằng KT vuông góc với AS và điểm T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Cuối cùng, từ tất cả quá trình trên ta thấy điểm H không nhất thiết là trực tâm của tam giác ABC, mà chỉ cần H là một điểm trên đường cao AD và E, F lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB thì các bài toán trên vẫn thực hiện được. Vì vậy ta có thể mở rộng thành bài toán như sau:

(*Xem tiếp trang* 15)

BẠN CÓ BIẾT ?

GIẢ THUYẾT SỐ NGUYÊN TỐ SINH ĐÔI VÀ Yitang Zhang

NGÔ VIỆT TRUNG
(Viện Toán học Việt Nam)

Số nguyên tố sinh đôi là một cặp số nguyên tố liền nhau có dạng (n; $n + 2$). Cặp số nguyên tố đầu tiên là (3; 5), sau đó là (5; 7), (11; 13),... Số nguyên tố sinh đôi cực hiếm. Tuy nhiên, cứ sau vài năm người ta lại tìm thấy một cặp số nguyên tố sinh đôi lớn hơn. Từ thời Hy Lạp cổ đại *Euclid* đã tin rằng có vô số các số nguyên tố sinh đôi. Đã hàng thế kỷ trôi qua mà vẫn chưa có ai chứng minh được điều này, đến mức nhiều người coi đó là một điều bí hiểm. Ngày nay người ta gọi điều này là *giả thuyết số nguyên tố sinh đôi*.

Năm 1849 nhà toán học Pháp *de Polignac* đưa ra giả thuyết tổng quát hơn là với mọi số chẵn $k \geq 2$ tồn tại vô hạn các cặp số nguyên tố (m; n) sao cho $m - n = k$. Giả thuyết này cũng chưa được giải quyết cho bất kỳ một số k nào. Người ta có thể tìm cách giải quyết giả thuyết yếu hơn là tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố m, n sao cho $m - n \leq k$. Giả thuyết yếu này được gọi là chặn trên cho khoảng cách các số nguyên tố. Tuy nó không tương đương với giả thuyết của *de Polignac*, nhưng trong trường hợp $k = 2$ thì nó chính là giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Nhiều nhà toán học cho rằng các phương pháp nghiên cứu hiện nay chưa đủ sức giải quyết ngay cả giả thuyết yếu trên. Nhà số học *Goldston* cho rằng "*Đây là một trong những vấn đề mà ta không chắc loài người có thể giải được*".

Ngày 17/4/2013 Tòa soạn một Tạp chí hàng đầu của Toán học nhận được bản thảo của một nhà toán học vô danh là *Yitang Zhang* khẳng định đã giải quyết được giả thuyết yếu trên cho $k = 70$ triệu. Tuy $k = 70$ triệu còn xa với mục tiêu $k = 2$, nhưng đây có thể coi là bước đi đột phá về giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Khoảng cách giữa 2 và 70 triệu tuy lớn nhưng vẫn không thấm thoát gì so với khoảng cách giữa

Nhà Toán học Yitang Zhang

70 triệu và vô hạn! Công trình của *Zhang* đã được thẩm định và sẽ được công bố vào tháng 3 năm 2014. *Andrew Granville*, một nhà số học có tiếng nói rằng "*Không ai biết anh ta cả. Bỗng nhiên anh ta chứng minh được một trong những kết quả lớn nhất trong lịch sử lý thuyết số.*"

Yitang Zhang sinh năm 1955 tại Trung Quốc. Năm 1985 ông sang Mỹ làm nghiên cứu sinh sau khi tham dự lớp cao học được tổ chức bởi nhà toán học nổi tiếng *Shiing-Shen Chern* ở Bắc Kinh. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1991 sau 7 năm làm nghiên cứu sinh tại Đại học Purdue dưới sự hướng dẫn của *Tzuong-Tsieng Moh*. Đề tài luận án do ông chọn là về giả thuyết Jacobi. Đây là một giả thuyết lâu đời được nhà toán học *Stefen Smale* (giải thưởng Fields năm 1966) coi là một trong 18 bài toán của thế kỷ 21. *Zhang* tưởng rằng mình đã chứng minh được giả thuyết này, nhưng sau đó người ta phát hiện ra một kết quả của *Moh* được *Zhang* dùng trong chứng minh của mình có vấn đề. Cho đến nay *Zhang* mới công bố hai công trình toán học. Ông là dạng nhà toán học chỉ chuyên tâm giải quyết các vấn đề khó.

Cuộc đời của *Zhang* có nhiều gian truân. Sau khi bảo vệ luận án tiến sĩ ông không xin được việc làm ở các trường đại học và ông đã phải làm nhiều việc thời vụ như dọn bàn, đưa đồ ăn, trực khách sạn, kế toán,... Mãi đến năm 1999 ông mới được nhận vào làm giảng viên ở Đại học New Hampshire nhưng không có chức danh chính thức và làm việc ở đó cho đến ngày nay. Ngay sau khi công bố kết quả trên, *Zhang* nhận được nhiều giải thưởng danh giá và được nhiều trường đại học danh tiếng trên thế giới mời đến làm việc. Tại Đại hội Toán học thế giới năm nay ở Seoul ông được mời làm báo cáo toàn thể đặc biệt, ngang hàng với các báo cáo giải thưởng Fields. Chú ý rằng giải thưởng Fields chỉ trao cho những người không quá 40 tuổi mà *Zhang* năm nay đã 59 tuổi rồi. Thông thường người ta thường cho rằng chỉ có những người trẻ tuổi mới có những kết quả đột phá trong toán học, nhưng trường hợp của ông lại khác.

Zhang bắt đầu nghiên cứu giả thuyết về chặn trên cho khoảng cách các số nguyên tố sau khi đọc một bài báo về vấn đề này. Trong ba năm sau đó, ông không nghĩ ra được cái gì cho ra hồn. "*Tôi quá mỏi mệt*", ông nói. Hè năm 2012, ông quyết định nghỉ một chút và đi thăm nhà một người bạn ở Colorado mà không mang bất kỳ tài liệu toán học nào theo mình. Tuy nhiên ông vẫn bị ám ảnh bởi giả thuyết chặn trên. Trong một lúc mơ màng ngoài vườn của bạn, ông chợt tìm ra ý tưởng cho lời giải. "*Tôi lập tức tin nó đúng*". Sau đó ông mất hơn nửa năm nữa để giải quyết các bước chứng minh. Theo ông, "*Có rất nhiều cơ may trong sự nghiệp của bạn nhưng quan trọng là bạn phải luôn luôn nghĩ*".

Zhang tự nhận mình là một người rụt rè, nhưng "*khi làm báo cáo và tập trung vào toán học, tôi quên mất sự rụt rè của tôi*". Có người hỏi ông có cảm thấy cay đắng về số phận long đong của mình không thì ông trả lời "*Cái đầu của tôi luôn bình thản. Tôi không quan tâm nhiều lắm đến tiền tài hay danh vọng. Tôi thích giữ im lặng và tiếp tục làm những gì mà tôi quan tâm*". Lại có người hỏi liệu ông có khuyên người khác làm theo ông không thì ông trả lời "*khó nói lắm*" và "*tôi chọn đường đi của mình và đó là con đường của riêng tôi*". Gần đây ông bắt đầu nghiên cứu một đề tài khác và không muốn thổ lộ cho người khác biết. Ông chỉ nói "*Hy vọng nó sẽ cho một kết quả tốt*". Theo *Tzuong-Tsieng Moh*, thầy của *Zhang*, thì ông thích câu nói của Khổng Tử rằng "*người biết nghề không sánh được với người yêu nghề, người yêu nghề không sánh được với người lấy nghề làm niềm vui*".

Kết quả của *Yitang Zhang* lập tức dẫn đến câu hỏi tại sao tồn tại vô số cặp số nguyên tố liền nhau có khoảng cách nhỏ hơn 70 triệu mà không bị chặn bởi một số nhỏ hơn? Thực ra, *Zhang* dùng chặn 70 triệu chỉ để làm cho chứng minh đơn giản hơn. Hiện nay, các nhà toán học đã đưa chặn trên xuống còn 252. Mọi người đều cho rằng khó có thể cải tiến các phương pháp quen biết để nhận được chặn trên cuối cùng là 2. Như vậy là chưa có gì đảm bảo cho việc giải quyết giả thuyết số nguyên tố sinh đôi trong một tương lai gần và giả thuyết này vẫn là một thách thức đối với trí tuệ con người.

HÀNH TRÌNH... (*Tiếp trang* 13)

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn ABC và AB < AC, kẻ đường cao AD và trên đoạn AD lấy một điểm H khác với các điểm A và D; gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh AC, AB, trên cạnh BC lấy điểm K khác với các điểm B, C và D; gọi L là hình chiếu của H trên AK.*

1) *Chứng minh các tứ giác BFLK, CELK là các tứ giác nội tiếp.*
2) *Kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.*
3) *Tìm vị trí của K trên BC sao cho 3 đường thẳng BC, HL, EF đồng quy.*

Các bạn hãy tự giải bài toán này nhé, và hãy tập sáng tạo ra nhiều bài toán hay. Chúc các bạn thành công.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/443 (Lớp 6). Cho 21 số nguyên đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện tổng của 11 số tùy ý trong chúng luôn lớn hơn tổng của 10 số còn lại. Biết trong 21 số này có một số bằng 101 và số lớn nhất bằng 2014. Tìm 19 số còn lại.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG
(Hà Nội)

Bài T2/443 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 40^o$ và $\widehat{ABC} = 60^o$. Hai điểm D và E lần lượt thuộc cạnh AC và AB sao cho $\widehat{CBD} = 40^o$ và $\widehat{BCE} = 70^o$. Gọi F là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.

TỐNG THÀNH VŨ
(Cao học Toán, K5, ĐH Hồng Đức, Thanh Hoá)

Bài T3/443. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt[3]{8x^3 + y^3} = \sqrt[3]{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1). \end{cases}$$

LẠI QUANG THỌ
(GV THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc)

Bài T4/443. Cho tam giác ABC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm E, D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADB cắt tia CE tại M và N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt tia BD tại I và K. Chứng minh rằng bốn điểm M, I, N, K cùng nằm trên một đường tròn.

LÊ XUÂN DƯƠNG
(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T5/443. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$
$$\geq \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán - Tin, ĐH KHTN, ĐHQG TP Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/443. Giải phương trình ẩn $x \in \mathbb{R}$:

$$(x^5 + x - 1)^5 + x^5 = 2.$$

TRIỆU VĂN HẢI
(K51B, Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/443. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{CBM} = \widehat{ACM}$ khi và chỉ khi $\frac{bx}{c} = \frac{cy}{a} = \frac{az}{b}$ với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

NGUYỄN TIẾN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

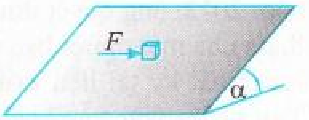
Bài T8/443. Cho x, y, z là ba số tùy ý thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm $\max P$ với

$$P = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(2-z).$$

NGÔ THANH TÙNG
(GV THPT Số 2, Đức Phổ, Quảng Ngãi)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/443. Một khối lập phương nhỏ, khối lượng $m = 100$g, đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng với mặt phẳng nằm ngang một góc $\alpha = 30^o$. Hệ số ma sát giữa khối lập phương và mặt phẳng là $\mu = 0{,}8$. Hãy xác định một lực F nằm ngang cực tiểu dùng để đẩy khối lập phương để nó bắt đầu chuyển động. Biết rằng lực F tác dụng trong mặt phẳng nghiêng.



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài L2/443. Từ một khối cầu thủy tinh có chiết suất $n = 1{,}5$ và bán kính $R = 10$cm, người ta tách ra hai chỏm cầu là hai thấu kính mỏng phẳng, lồi có đường kính rìa là 1cm và 2cm. Ghép sát hai thấu kính chung trục chính. Đặt trên trục chính này một nguồn sáng điểm, cách hệ thấu kính 1m. Ở phía bên kia của hệ thấu kính đặt một màn chắn vuông góc với trục chính. Tìm vị trí đặt màn để kích thước vết sáng thu được trên màn có diện tích nhỏ nhất.

NGUYỄN NHẬT HUY
(Hà Nội)

(Xem tiếp trang 28)

CUỘC THI GIẢI TOÁN ĐẶC BIỆT

KỈ NIỆM 50 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 50th ANNIVERSARY CONTEST

Bài T7/THCS.

Cho n số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) thỏa mãn $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ a_1 + a_2 \leq 2014 \\ a_3 + a_4 + \ldots + a_n \leq 2014 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/THCS.

Cho tam giác ABC cố định, nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm di động trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Gọi (K) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc với AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc với AB. (L) cắt PB tại T khác P. Chứng minh rằng đường thẳng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di động.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/THPT.

Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a + b > 0$. Xét dãy số (u_n) có $u_1 = \alpha > \max\{a, b\}$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + ab}{a+b}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - a}{u_{i+1} - b}$. Tính $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

CAO HẢI VÂN

(THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T8/THPT.

Cho 100 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ nằm trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập con X của $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ gồm 50 phần tử sao cho

$$\left|\sum_{i\in X} \overrightarrow{AA_i} - \sum_{i\in E\setminus X} \overrightarrow{AA_i}\right| \leq \sqrt{2}.$$

TRẦN NAM DŨNG

(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP Hồ Chí Minh)

T7/Junior.

The non-negative numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) satisfy $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ a_1 + a_2 \leq 2014 \\ a_3 + a_4 + \ldots + a_n \leq 2014 \end{cases}$.

Determine the greatest possible value of the expression $A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

T8/Junior.

Let ABC be a fixed triangle, inscribed in circle (O). Point P moves on the arc $\overset{\frown}{BC}$ of (O) that does not contain A. Let (K) be the circle through A, P and touches side AC. (K) meets PC at a second point S, differ from P. Let (L) be the circle through A, P and touches AB. (L) meets PB at a second point T, differ from P. Show that as P varies, the line ST passes through a fixed point.

T7/Senior.

The real numbers a and b are given so that $a + b > 0$. Let (u_n) be the sequence where $u_1 = \alpha > \max\{a, b\}$ and $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + ab}{a+b}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Put $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - a}{u_{i+1} - b}$. Find $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

T8/Senior.

Given 100 points $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ inside a square $ABCD$ whose side equal 1 unit. Prove that there exists a subset X of $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$ consisting of 50 elements such that

$$\left|\sum_{i\in X} \overrightarrow{AA_i} - \sum_{i\in E\setminus X} \overrightarrow{AA_i}\right| \leq \sqrt{2}.$$

Translated by LEMINHHA

Bài T1/439 (Lớp 6). *Cho số* $\overline{155*710*4*16}$. *Hỏi có thể thay ba dấu * bởi ba chữ số phân biệt nào trong các chữ số từ 1 đến 9 để số đó luôn chia hết cho 396?*

Lời giải. Đặt số cần tìm là $N = \overline{155a710b4c16}$ với $6 = 1 + 2 + 3 \le a + b + c \le 7 + 8 + 9 = 24$ (1)

Do $396 = 4.9.11$ mà ba số 4, 9, 11 nguyên tố sánh đôi nên cần tìm số N chia hết cho mỗi số 4, 9, 11.

- Vì số N có hai chữ số tận cùng là 16 nên N chia hết cho 4.
- Số N chia hết cho 9 khi tổng các chữ số $1 + 5 + 5 + 7 + 1 + 4 + 1 + 6 + a + b + c$ chia hết cho 9, tức là khi $(3 + a + b + c)$ chia hết cho 9, kết hợp với (1) thì $a + b + c$ chỉ có thể là 6, 15, 24 (2).
- Số N chia hết cho 11 khi hiệu số: $(5 + a + 1 + b + c + 6) - (1 + 5 + 7 + 4 + 1)$ chia hết cho 11, tức là khi $(a + b + c - 6)$ chia hết cho 11, kết hợp với (2) thì $a + b + c$ chỉ có thể là $6 = 1 + 2 + 3$.

Kết luận. Để số N chia hết cho 396 thì có thể thay (a, b, c) bởi mỗi bộ ba chữ số sau:

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1). ❐

➢**Nhận xét.** 1) Một số bạn khi giải bài này vẫn giữ ba dấu * nên không thấy rõ chữ số nào ở vị trí nào trong khi viết số N.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

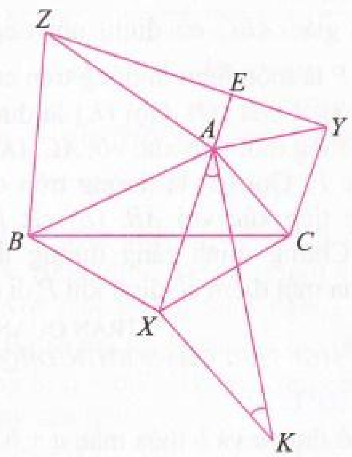
Phú Thọ: *Nguyễn Anh Kiệt,* 6D, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Bùi Thị Quỳnh,* 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao. **Hải Phòng:** *Ngô Mạnh Hoàng,* 6A1, THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng. **Nghệ An:** *Tăng Trung Nghĩa,* 6A, THCS Hòa Hiếu II, TX. Thái Hòa. **Quảng Ngãi:** *Phan Nguyễn Thiên Định, Võ Thành Trung,* 6A, THCS Phạm Văn Đồng, Hành Phước, Nghĩa Hành.

VIỆT HẢI

Bài T2/439 (Lớp 7). *Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng tam giác XBC cân tại X có góc BXC bằng* 120^o *và các tam giác YCA, ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ.*

Lời giải. Gọi E là giao điểm của XA với YZ.

Trên nửa mặt phẳng bờ XC không chứa A lấy điểm K sao cho $\Delta XCK = \Delta XBA$.



Ta có $XK = XA$ và $\widehat{KXC} = \widehat{AXB}$, suy ra $\widehat{AXK} = \widehat{BXC} = 120^o$, do đó $\widehat{XAK} = 30^o$.

Mặt khác, ta có $CK = BA = AZ$ (vì $\Delta XCK = \Delta XBA$ và ΔABZ đều); $CA = AY$ (vì ΔYCA đều);

$$\begin{aligned}\widehat{ACK} &= \widehat{ACB} + \widehat{BCX} + \widehat{XCK}\\ &= \widehat{C} + 30^o + \widehat{XBA} = \widehat{C} + 30^o + 30^o + \widehat{B}\\ &= 60^o + \left(180^o - \widehat{A}\right)\\ &= 240^o - \left(360^o - \widehat{YAC} - \widehat{ZAB} - \widehat{YAZ}\right) = \widehat{YAZ};\end{aligned}$$

suy ra $\Delta CAK = \Delta AYZ$ (c.g.c), do đó $\widehat{CAK} = \widehat{AYZ} = \widehat{EYA}$

Ta có $\widehat{EAY}+\widehat{CAK}=180^o-(\widehat{YAC}+\widehat{XAK})=90^o$, mà $\widehat{EAY}+\widehat{EYA}=90^o$, suy ra $\widehat{AEY}=90^o$.

Vậy $XA\perp YZ$. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán hay trong chương trình lớp 7. Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng điểm M đối xứng với X qua BC rồi chứng minh $MY = MZ = AX$, cũng suy ra kết quả.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Hữu Tùng*, 7A$_5$, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Thành Vinh*, 7A$_1$, THCS Hai Bà Trưng, T.X. Phúc Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Ngô Thị Ngọc Ánh*, *Cao Thị Vân Anh*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Võ Phương Tâm*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương Quỳnh Lưu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/439. *Tìm các số nguyên dương x, y thoả mãn điều kiện* $(x^2-9y^2)^2=33y+16$ (*)

Lời giải. Do $y\in\mathbb{Z}^+$ nên VP(*) > 0, ta có:

PT (*) $\Leftrightarrow x^2=(3y)^2\pm\sqrt{33y+16}$. (**)

– Xét $y = 1$, ta có $\left[\begin{array}{l}x^2=16\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm4\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$, kết hợp với điều kiện $x\in\mathbb{Z}^+$ suy ra $x = 4$.

– Xét $y\ge 2$. Trước hết ta luôn có:

$6y+1>6y-1>\sqrt{33y+16}$. Thật vậy, $6y-1>0$ nên $6y-1>\sqrt{33y+16}\Leftrightarrow 36y^2-12y+1>33y+16$ $\Leftrightarrow 9y(4y-5)-15>0$. Đây là bất đẳng thức đúng (do $y\ge2$ nên $9y(4y-5)-15>39>0$).

Từ đó ta có:

$$(3y)^2-\sqrt{33y+16}>(3y)^2-(6y-1)=(3y-1)^2$$
$$\Rightarrow(3y-1)^2<(3y)^2-\sqrt{33y+16}<(3y)^2;$$
$$(3y)^2+\sqrt{33y+16}<(3y)^2+(6y+1)=(3y+1)^2$$
$$\Rightarrow(3y)^2<(3y)^2+\sqrt{33y+16}<(3y+1)^2.$$

Kẹp giữa bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp nên $(3y)^2\pm\sqrt{33y+16}$ không thể là số chính phương. Suy ra với $y\ge2$ không tồn tại x thoả mãn (**) và (*).

Vậy có duy nhất một cặp số nguyên dương thoả mãn điều kiện (*) là $(x; y) = (4; 1)$. ❒

➤ **Nhận xét.** 1) Thật thú vị khi mỗi bạn được nêu tên dưới đây đều có những cách giải khác nhau. Các cách giải dù dài hay ngắn nhưng đều có đặc điểm chung là đã vận dụng rất linh hoạt việc biến đổi biểu thức cũng như các kiến thức đã biết để giải bài toán này.

2) Tạp chí TH&TT xin giới thiệu tóm tắt một số hướng giải mà các bạn đã gửi về để bạn đọc cùng tham khảo.

* Giới hạn giá trị của x rồi xét từng trường hợp để tìm y.

Nhận xét $x-3y\ne0$ dẫn đến $(x-3y)^2\ge1$, suy ra:

$$(x^2-9y^2)^2=(x-3y)^2(x+3y)^2\ge(x+3y)^2.$$

Tiếp tục nhận xét nếu $x\ge6$ thì $(x+3y)^2\ge(6+3y)^2=$ $=36+36y+9y^2>33y+16$, suy ra $x\in\{1;2;3;4;5\}$.

* Giới hạn giá trị của y rồi xét từng trường hợp để tìm x.

Cách 1. Cũng với $(x^2-9y^2)^2\ge(x+3y)^2>9y^2+6y$

$\Rightarrow 33y+16>9y^2+6y\Rightarrow 9y^2-27y-16<0$

$\Rightarrow(y+1)(y-4)<0\Rightarrow y<4\Rightarrow y\in\{1;2;3\}$. Thay thế, kiểm tra $33y+16$ có là số chính phương hay không…

Cách 2. Nhận xét

(*) $\Leftrightarrow(x^2-9y^2-4)(x^2-9y^2+4)=3.11.y$, trong đó VT là tích của hai thừa số nguyên cách nhau 8 đơn vị, suy ra

$\left[\begin{array}{l}y=1\\y=a(33a+8)\\y=a(33a-8)\end{array}\right.$ với a là số nguyên dương.

Sử dụng tính chất của số chính phương như ở trên để loại trường hợp thứ hai và trường hợp thứ ba.

* Xác định giá trị của $x-3y$. Đánh giá, từ (*) ta có:

$$(x+3y)(x-3y)^2=\frac{33y+16}{x+3y}<\frac{48y+16}{3y+x}\le\frac{48y+16}{3y+1}=16,$$

mà $x+3y\ge4$ suy ra $(x-3y)^2<4$. Kết hợp với điều kiện $(x-3y)^2\ge1$ trong nhận xét trên suy ra $(x-3y)^2=1$ và $(x+3y)^2=33y+16$. Từ đó:

Với $x=3y+1$ thì $(6y+1)^2=33y+16$

$\Leftrightarrow 7y^2+5y^2=7y+5$. Mà $7y^2\ge7y\Rightarrow5y^2\le5\Rightarrow y=1$.

Với $x=3y-1$ thì $(6y-1)^2=33y+16\Leftrightarrow36y^2=45y+15$, VT chia hết cho 9 còn VP không chia hết cho 9.

3) Sau đây là các bạn có lời giải đúng và khéo léo nhất: **Hà Tĩnh:** *Lê Thị Thu Uyên*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Hà Nam:** *Nhữ Ngọc Ánh*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm; *Ngô Nhật Long*, 9A$_2$, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Lâm*, 8C; *Ngô Thị Ngọc Ánh*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Nguyễn Văn Mạnh*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy*, 9A$_1$, THCS Yên Lạc, Thanh Liêm; **Đăk Lăk:** *Hoàng Huy Thông*, 9G, THCS Phan Chu Trinh, TP Buôn Ma Thuột; **Hà Nội:** *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Trí*, 9A6, THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/439. *Giải hệ phương trình :*

$$\text{(I)}\begin{cases}6(1-x)^2=\dfrac{1}{y} & (1)\\ 6(1-y)^2=\dfrac{1}{x} & (2)\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK : $x \neq 0, y \neq 0$. Khi đó từ hệ (I) suy ra :

$$y(1-x)^2 = x(1-y)^2 \left(=\frac{1}{6}\right)$$

$\Leftrightarrow x^2y - xy^2 - x + y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(xy-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ xy=1\end{array}\right.$.

– Nếu $x = y$, thay vào (1) ta được :

$$6(1-x)^2=\frac{1}{x} \Leftrightarrow 6x(1-2x+x^2)=1$$

$\Leftrightarrow 6x^3-12x^2+6x-1=0$

$\Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x+1=2x^3$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3=2x^3 \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{2}x$

$\Leftrightarrow x(2-\sqrt[3]{2})=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}=y$.

– Nếu $xy = 1$, thay vào (1) ta có :

$$6(1-x)^2=\frac{xy}{y} \Leftrightarrow 6x^2-13x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Với $x=\dfrac{2}{3}$, ta được $y=\dfrac{3}{2}$; với $x=\dfrac{3}{2}$, ta được $y=\dfrac{2}{3}$.

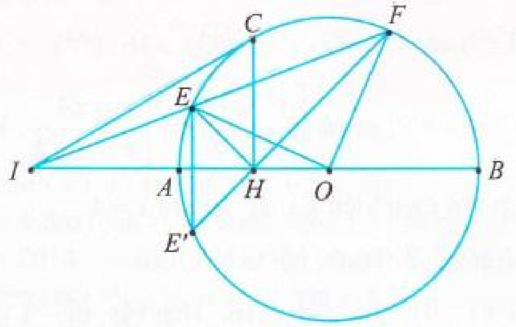
Các cặp số $(x ; y)$ bằng : $\left(\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}};\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{2}{3}\right)$ đều thỏa mãn hệ (I), do đó là nghiệm của (I). ❒

➤ **Nhận xét.** Hầu hết các bạn đều tìm ra đúng nghiệm, nhưng lời giải của một số bạn còn dài. Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Nguyễn Tiến Long*, 8A1 , *Tạ Anh Dũng*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hồng Anh, Phan Thị Nguyệt*, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Lê Phúc Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hiên*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nam:** *Ngô Nhật Long*, 9A2, THCS Trần Phú, Phủ Lý. **Thanh Hóa:** *Kiều Xuân Bích*, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; *Lê Quang Dũng*, 9D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Tiến*, 7A, THCS Nghĩa Liên, Nghĩa Đàn; *Phạm Quang Toàn*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; *Tăng Đức Thịnh, Ngô Trí Nguyên, Nguyễn Thanh Lâm*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Nam:** *Trần Hoàng Tiến*, 9/5, THCS Trần Quý Cáp; *Phan Thành Đạt*, 9/7, THCS Lê Quý Đôn; *Nguyễn Hiền Lương*, 9/3, THCS Ngô Quyền, Thăng Bình; **Đăk Lăk:** *Hoàng Huy Thông*, 9G, THCS Phan Chu Trinh, TP Buôn Ma Thuột.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/439. *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R và một điểm C nằm trên nửa đường tròn đó. Kẻ CH ⊥ AB (H khác O). Hai điểm E, F thay đổi trên nửa đường tròn (O) sao cho $\widehat{CHE}=\widehat{CHF}$. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Không giảm tính tổng quát có thể giả sử H nằm giữa A, O. Từ giả thiết suy ra $\widehat{EHA}=\widehat{FHO}$.

Cách 1. Gọi E' là điểm đối xứng với E qua AB, suy ra E' thuộc đường tròn (O). Ta có

$$\widehat{FHO}=\widehat{EHA}=\widehat{AHE'},$$

dẫn tới F, H, E' thẳng hàng.

Mặt khác, $\widehat{EHF}=2\widehat{FHC}=2\widehat{EE'F}=\widehat{EOF}$, nên tứ giác $EHOF$ nội tiếp.

Vậy $\widehat{EFO}=\widehat{EHA} \Rightarrow \widehat{IFO}=\widehat{FHO}$.

Gọi I là giao điểm của EF và AB, dễ thấy $\Delta IOF \backsim \Delta FOH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IO}{FO}=\dfrac{OF}{OH} \Rightarrow IO=\dfrac{OF^2}{OH}=\dfrac{R^2}{OH}$ không đổi.

Từ đó I là điểm cố định. Vậy EF luôn đi qua điểm I cố định.

Cách 2. Giả sử tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB tại I. Gọi F' là giao điểm thứ hai của IE với đường tròn (O). Ta sẽ chứng minh $F' \equiv F$.

Thật vậy, ta có $IC^2 = IE.IF'$ (1)

Lại có, ΔICO vuông tại C, có $CH \perp IO$ nên $IC^2 = IH.IO$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $IE.IF' = IH.IO$, suy ra tứ giác $EHOF'$ nội tiếp, ta có

$$\widehat{EHA} = \widehat{EF'O} = \widehat{F'EO} = \widehat{F'HO}.$$

Suy ra $\widehat{CHE} = \widehat{CHF'}$. Kết hợp với giả thiết $\widehat{CHE} = \widehat{CHF}$, suy ra $F' \equiv F$.

Vậy EF luôn đi qua điểm I cố định. ❒

≮Nhận xét. Có không nhiều bạn tham gia giải bài toán trên, một số bạn cho lời giải dài dòng. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả.

Hà Nội: *Lê Phúc Anh*, *Lê Duy Anh*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Hà Nam:** *Ngô Nhật Long*, 9A2, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nghệ An:** *Phạm Quang Toàn*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; **Đăk Lăk:** *Hoàng Huy Thông*, 9G, THCS Phan Chu Trinh, TP. Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T6/439. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}} = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}.$$

Lời giải. Điều kiện xác định $x \geq -2$.

Cách 1. Xét hiệu $(x+2)^3 - (6+x)^2 = x^3 + 5x^2 - 28$

$$= (x-2)(x^2 + 7x + 14).$$

Ta thấy $x^2 + 7x + 14 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi x.

* Nếu $x > 2$ thì $(x+2)^3 > (6+x)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} > \sqrt[3]{6+x} > 2.$ (1)

Áp dụng BĐT (1) khi thay x bởi $\sqrt{2+x}$ (> 2) ta được $\sqrt{2+\sqrt{2+x}} > \sqrt[3]{6+\sqrt{2+x}}$.

Do $\sqrt{2+x} > \sqrt[3]{6+x}$ nên ta có

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{2+x}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}$$

suy ra $\sqrt{2+\sqrt{2+x}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}$ (2)

Áp dụng BĐT (2) khi thay x bởi $\sqrt{2+x}$ (> 2) ta được $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt{2+x}}}$.

Do $\sqrt{2+x} > \sqrt[3]{6+x}$ nên ta có

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt{2+x}}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}.$$

Suy ra $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}$ (3)

Áp dụng BĐT (3) khi thay x bởi $\sqrt{2+x}$ (> 2) ta được

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt{2+x}}}}.$$

Do (1) nên ta có

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{6+\sqrt[3]{6+\sqrt{2+x}}}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}$$

Suy ra

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}} > \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}.$$

Như vậy phương trình đã cho không có nghiệm $x > 2$.

* Nếu $-2 \leq x < 2$ thì $(x+2)^3 < (6+x)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} < \sqrt[3]{6+x} < 2$ (4)

Sử dụng BĐT (4) và suy luận tương tự như trên, ta có

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}} < \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}.$$

Như vậy phương trình đã cho không có nghiệm $-2 \leq x < 2$.

* Với $x = 2$ thì mỗi vế của phương trình đều bằng 2.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Cách 2. Nhận thấy $x = -2$ không nghiệm đúng phương trình.

Với $x > -2$ đặt $f(x) = \sqrt{2+x}$ và $g(x) = \sqrt[3]{6+x}$ thì phương trình đã cho có dạng

$$f(f(f(f(x)))) = g(g(g(g(x)))).$$

Do $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$, $g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(6+x)^2}}$ đều dương với mọi $x > -2$, nên hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đồng biến trên $(-2, +\infty)$.

* Với $x > 2$ thì $f(x) > g(x) > 2$ nên

$$f(f(x)) > f(g(x)) > g(g(x)) > 2$$

$$\Rightarrow f(f(f(x))) > f(g(g(x))) > g(g(g(x))) > 2$$

$$\Rightarrow f(f(f(f(x)))) > f(g(g(g(x)))) > g(g(g(g(x)))).$$

Vậy VT > VP.

* Với $-2< x <2$ thì $f(x) < g(x) < 2$. Lập luận tương tự có VT < VP.

* Với $x = 2$ thử thấy thỏa mãn. ❒

➤**Nhận xét.** 1) Bài này có nhiều bạn tham gia và đều cho đáp số đúng. Tuy nhiên, một số bạn còn giải quá vắn tắt, thiếu lập luận. Kết quả của bài toán vẫn đúng cho trường hợp tổng quát:

Giải phương trình

$$\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+x}}}}$$

trong đó mỗi vế có n dấu căn.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Bá Trung*, 11 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Trương Thị Hoài Thu*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Tẩu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Tuấn*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Bùi Trung Hoàn, Lê Văn Bình*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** *Nguyễn Công Phúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hoà; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí*,11 T1, THPT chuyên Long An; **An Giang:** *Nguyễn Văn Cường*, 11A4, THPT Ba Chúc; **Phú Yên:** *Lê Văn Thiện*, 11TL10, THPT Nguyễn Huệ, TP. Tuy Hoà.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/439. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}4x^2=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2-y^3+3y-2\right) & (1)\\ \left(x^2+y^2\right)^2+1=x^2+2y & (2)\end{cases}$$

Lời giải. Từ (2), ta có

$$\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2+y^2\right)=-(y-1)^2\le 0$$

$$\Rightarrow 0\le x^2+y^2\le 1.$$

Do đó $|x|\le 1;\ \ |y|\le 1.$

Nếu $\sqrt{x^2+1}-1=0\Leftrightarrow x=0$, thay vào hệ phương trình, ta được: $\begin{cases}y^3-3y+2=0\\ y^4+1=2y\end{cases}\Leftrightarrow y=1.$

Như vậy $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Nếu $\sqrt{x^2+1}-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0$, nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{x^2+1}-1$, ta được

$$(1)\Leftrightarrow 4x^2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2\left(x^2-y^3+3y-2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow x^2+1-4\sqrt{x^2+1}+3=y^3-3y+2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3\right)=(y+2)(y-1)^2\ (4).$$

Với $x\ne 0;\ |x|\le 1;\ |y|\le 1$, ta có $\sqrt{x^2+1}-1>0$; $\sqrt{x^2+1}-3<0;\ (y+2)(y-1)^2\ge 0.$

Nên $\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3\right)<0<(y+2)(y-1)^2$, phương trình (4) không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$. ❒

➤**Nhận xét.** Nhiều bạn đã không xét $\sqrt{x^2+1}-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0$, khi nhân hai vế của (1) với $\sqrt{x^2+1}-1$ là không chặt chẽ. Một số bạn đã viết PT (3) $\Leftrightarrow x^2-4\sqrt{x^2+1}=y^3-3y-2$ và sử dụng đạo hàm, tìm tập giá trị của các hàm số:

$f(x)=x^2-4\sqrt{x^2+1};\ g(y)=y^3-3y-2$ với $x,y\in[-1;1]$;

được $x^2-4\sqrt{x^2+1}\le -4\le y^3-3y-2$; từ đó suy ra kết quả bài toán. Tuy nhiên làm như vậy dài và phức tạp.

Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Hà Nội: *Trần Mạnh Hùng*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Như Thiệp*, 12A1, THPT Trần Quốc Toản, Eakar; **Nghệ An:** *Phan Như Trịnh*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Tuấn*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc:** *Trương Thị Hoài Thu*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thanh*, 12A15, THPT Quế Võ, Quế Võ; **Cà Mau:** *Lê Minh Phương*, 12 chuyên Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP Cà Mau.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T8/439. *Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{R}{r}\ge\max\left\{\frac{1}{2};\ \sqrt{\frac{ab^3+bc^3+ca^3}{4S^2}};\ \sqrt{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{4S^2}}\right\}.$$

Lời giải. Với mọi số số thực x, y, z ta thấy

$$\left(x.\overrightarrow{OA}+y.\overrightarrow{OB}+z.\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0,$$ suy ra

$$(x+y+z)^2.R^2 \geq yz.a^2+zx.b^2+xy.c^2 \quad (1)$$

- Từ (1) cho $x=a$; $y=b$; $z=c$ và để ý đến $a+b+c=\dfrac{2S_{ABC}}{r}$ ta thu được $\dfrac{R}{r}\geq 2$ (2)
- Từ (1) cho $x=b$; $y=c$; $z=a$, ta được $(a+b+c)^2R^2 \geq ab^3+bc^3+ca^3$ (3)

Do $a+b+c=\dfrac{2S_{ABC}}{r}$ nên từ (3) ta có

$$\frac{R}{r}\geq\sqrt{\frac{ab^3+bc^3+ca^3}{4S^2}} \quad (4)$$

- Từ (1) cho $x=c$; $y=a$; $z=b$ ta được

$$\frac{R}{r}\geq\sqrt{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{4S^2}} \quad (5)$$

Từ (2), (4) và (5) suy ra

$$\frac{R}{r}\geq\max\left\{2;\sqrt{\frac{ab^3+bc^3+ca^3}{4S^2}};\sqrt{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{4S^2}}\right\}$$

$$\geq\max\left\{\frac{1}{2};\sqrt{\frac{ab^3+bc^3+ca^3}{4S^2}};\sqrt{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{4S^2}}\right\}$$

(đpcm). ❒

➢**Nhận xét.** Vì $\dfrac{R}{r}\geq 2$ nên trong kết luận của bài toán có thể thay số $\dfrac{1}{2}$ bởi số 2. Bạn *Trương Hoàng Duy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu, **Đồng Tháp** và bạn *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 10 Toán, PTNK – ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh** có lời giải đúng cho bài toán này.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/439. *Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ n sao cho 15^n+1 chia hết cho n.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Với $n=1$ thì hiển nhiên 15^n+1 chia hết cho n, nên $n=1$ là một nghiệm của bài toán.

Xét $n>1$ là nghiệm của bài toán. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n và k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho 15^k-1 chia hết cho p. Khi đó $15^{2n}-1=(15^n+1)(15^n-1)$ chia hết cho n nên $15^{2n}-1$ chia hết cho p. Nhận thấy $(15, p)=1$ nên theo định lý nhỏ Fermat thì $15^{p-1}-1$ chia hết cho p. Từ đó suy ra k đồng thời là ước của $p-1$ và $2n$. Vì k là ước của $p-1$ nên $k\leq p-1<p$.

Nếu k lẻ thì k là ước của của n và $k<p$ nên từ giả thiết p là ước nguyên tố lẻ nhỏ nhất của n suy ra $k=1$. Do đó p là ước của $15^k-1=14$.

Nếu k chẵn thì $k=2\ell$ với ℓ nguyên dương, khi đó $\ell<2\ell=k<p$ và k chia hết $2n$. Từ đó, $\ell<p$ và ℓ là ước của n nên $\ell=1$ và $k=2$. Do đó p là ước của $15^k-1=14\times 16$.

Vậy trong cả hai trường hợp, $p=7$, tức 15^n+1 chia hết cho 7, mâu thuẫn (do $15^n+1\equiv 2 \pmod 7$).

Tóm lại số lẻ n duy nhất thỏa mãn điều kiện 15^n+1 chia hết cho n là $n=1$. ❒

➢**Nhận xét.** Trên đây là lời giải của hầu hết các bài gửi tới Ban biên tập. Có một số bạn biết sử dụng tính chất nhân tính của hàm Euler số học để rút ngắn lời giải.

Các bạn sau đây có lời giải đúng.

Bắc Giang: *Nguyễn Thị Nhung*, 10T, THPT Chuyên Bắc Giang; **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường*, 10T, THPT Chuyên Bắc Ninh; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật*, 11T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Tuấn Điệp*, 11T2, THPT Ngô Gia Tự, Eakar; **Đồng Tháp:** *Trương Hoàng Duy*, 11T, THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu, Đồng Tháp; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Tuấn*, 10T1, THPT Chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung*, *Nguyễn Long Duy*, 11T1, THPT Chuyên Hưng Yên; **Hoà Bình:** *Đinh Chung Mừng*, 11 Chuyên Toán, THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình; **Nam Định:** *Nguyễn Văn Tấn*, 10T2, *Vũ Tuấn Anh* 12T2, THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định; **Nghệ An:** *Phạm Quang Toàn*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Tăng Trung Hiếu*, 11A1, THPT Thái Hòa, Nghệ An; **Phú Thọ:** *Nguyễn Văn Hậu*, 10T2, THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên; *Phạm Mạnh Hùng*, 10T, THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ; **Quảng Trị:** *Hoàng Lê Thái Hà*, 10T, THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; **Thái Bình:** *Vũ Văn Dũng*, 11T, THPT Chuyên Thái Bình; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hữu Huy* 9A1, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/439. *Tìm tất cả các cặp hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y\in\mathbb{R}$ ta có $f(x+g(y)) = x.f(y) - y.g(x) + g(x)$.*

Lời giải. Giả sử $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số thoả mãn bài toán.

Cho $y = 1$ ta có $f\left(x+g(1)\right) = xf(1)$.

Suy ra $f(x) = \left(x - g(1)\right).f(1),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x = 1$ thì $f(1) = \left(1-g(1)\right)f(1) \Rightarrow g(1).f(1) = 0$.

Có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $f(1) = 0$.

Khi đó $f(x) = \left(x-g(1)\right)f(1) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $-yg(x)+g(x) = 0,\ \forall x, y\in\mathbb{R}$. Cho $y = 0$ ta có $g(x) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Như vậy $f(x) = g(x) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy các hàm số này thoả mãn bài toán.

Trường hợp 2: $g(1) = 0, f(1)\neq 0$. Đặt $a = f(1)$.

Ta có $f(x) = \left(x-g(1)\right)f(1) = ax$.

Do đó $a\left(x+g(y)\right) = x.ay - yg(x) + g(x)$.

Cho $x = 1$ ta nhận được

$$a\left(1+g(y)\right) = ay \Rightarrow g(y) = y-1.$$

Suy ra $a(x+y-1) = x.ay - y(x-1) + (x-1)$.

Xét hệ số của xy ta có $a = 1$.

Như vậy $f(x) = x,\ g(x) = x-1$. Đẳng thức trên với $a = 1$ xác nhận các hàm số này cũng thoả mãn bài toán.

Kết luận: có hai cặp các hàm số thoả mãn bài toán $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) = 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ f(x) = x,\ g(x) = x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$. ❒

➢ **Nhận xét.** Đây là bài toán phương trình hàm dạng cơ bản (thuộc loại: xét các giá trị *x, y* đặc biệt).

Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Phạm Minh Hùng,* $10T_1$, THPT chuyên Hùng Vương; **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh,* $12T_2$, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Vũ Văn Dũng,* $11T_2$, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Nam:** *Lê Quốc Anh,* 11^1, THPT chuyên Bắc Quảng Nam; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Như Thiệp,* $12A_1$, THPT Trần Quốc Toản, Eakar; **Kiên Giang:** *Danh Trần Trí,* 12T, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật,* 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Long An:** *Nguyễn Minh Trí,* $11T_1$, THPT chuyên Long An; **Đồng Tháp:** *Trương Hoàng Duy,* 11T, THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/439. *Có n học sinh ($n\geq 2$) đứng thành hàng dọc. Cứ mỗi lần thầy giáo thổi còi thì có đúng hai học sinh đổi chỗ cho nhau. Hỏi sau một số lẻ lần thầy giáo thổi còi, ta có thể thấy tất cả các học sinh đều đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình hay không?*

Lời giải. Đánh số từ 1 đến n cho các bạn học sinh trong hàng dọc lúc đầu. Kí hiệu P_n là tập các hoán vị của $\{1, 2,\ldots n\}$.

Gọi $\Pi = (\Pi(1),\ldots,\Pi(n))$ là một hoán vị của $\{1, 2,\ldots n\}$, cặp $\left(\Pi(i), \Pi(j)\right)$ của Π gọi là một nghịch thế của Π nếu $i<j$ và $\Pi(i)>\Pi(j)$.

Xét ánh xạ $f_i : P_n\to P_n : f_i(\Pi)$ thu được từ Π bằng cách đổi chỗ hai vị trí kề nhau $\left(\Pi(i), \Pi(i+1)\right)$ và giữ nguyên các vị trí còn lại.

Cho $i, j\in\mathbb{N}^*$, $i<j\leq n$. Xét ánh xạ $f_{ij} : P_n\to P_n$:

$$f_{(i,j)} = f_i\circ f_{i+1}\circ f_{j-2}\circ\circ\circ f_{j-1}\circ f_{i+1}\circ f_1 \quad (1)$$

là hợp thành của $2(j-1)-1$ ánh xạ. Dễ thấy $f_{(i,j)}(\Pi)$ thu được từ Π bằng cách đổi vị trí của $\left(\Pi(i), \Pi(j)\right)$ và giữ nguyên các vị trí còn lại.

Gọi $T(\Pi)$ là số nghịch thế của hoán vị Π. Dễ thấy

$$T\left(f_i(\Pi)\right) = \begin{cases} T(\Pi)-1 & \text{nếu } \left(\Pi(i), \Pi(i+1)\right) \text{ là nghịch thế} \\ T(\Pi)+1 & \text{nếu } \left(\Pi(i), \Pi(i+1)\right) \text{ không là nghịch thế.}\end{cases}$$

Do vậy $T_j\left(f_i(\Pi)\right)\equiv T(\Pi)+1 \pmod 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$$T\left(f_{i,j}(\Pi)\right)\equiv T(\Pi)+1 \pmod 2 \quad (3)$$

Giả sử Π_k là thứ tự của n học sinh sau lần thổi còi thứ k của thầy giáo. Ta có $\Pi_k\in P_n$ và $\Pi_{k+1} = f_{(i,j)}(\Pi_k)$, với $1\leq i\leq j\leq n$ nào đó.

Theo (3) ta có $T\left(\Pi_{k+1}\right)\equiv T\left(\Pi_k\right)+1 \pmod 2$

Do đó $T(\Pi_k)\equiv T(\Pi_0)+k = k \pmod 2$ (vì $T(\Pi_0) = 0$). Nếu k lẻ thì $T(\Pi_k)\not\equiv 0 \pmod 2$ do đó $\Pi_k\neq\Pi_0$. Vậy sau một số lẻ lần thổi còi, tất cả các học sinh không thể đứng trở lại đúng vị trí ban đầu của mình. ❒

➤ **Nhận xét.** Bài này chỉ có 4 bạn tham gia giải là các bạn: **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh,* 12T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bình Định:** *Mai Tiến Luật,* 11T, *Trương Minh Nhật Quang,* 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Đạt,* 11T, THPT chuyên Lam Sơn.

Các bạn đã cho lời giải đúng nhưng lập luận chưa chặt chẽ.

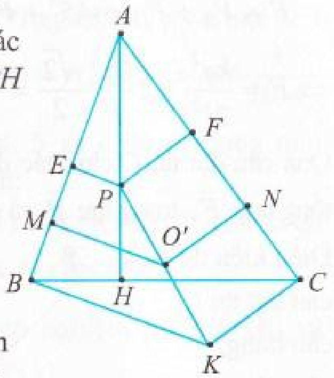
ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/439. *Cho tam giác nhọn ABC và đường cao AH (H ∈ BC). Một điểm P di chuyển trên đoạn AH. Các điểm E, F lần lượt là hình chiếu của P trên AB, AC.*

a) Chứng minh bốn điểm B, E, F, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi O' là tâm của đường tròn đi qua B, E, F, C. Chứng minh rằng PO' luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên đoạn AH.

Lời giải. (Hình vẽ).



a) Ta thấy các tứ giác *AEPF, BEPH, CFPH* nội tiếp. Vì *BEPH, CFPH* nội tiếp nên

$$\overline{AE}.\overline{AB}=\overline{AP}.\overline{AH}=\overline{AF}.\overline{AC}.$$

Do đó bốn điểm *B, E, F, C* cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi *K* là giao điểm của đường thẳng qua *B* vuông góc với *BA* và đường thẳng qua *C* vuông góc với *CA; M, N* theo thứ tự là trung điểm của *EB, FC*.

Vì $ME=MB; O'E=O'B; NF=NC; O'F=O'C$ nên $O'M \perp EB$; $O'N \perp FC$.

Kết hợp với $PE \perp AB; KB \perp AC; PF \perp AC;$ $KC \perp AC$, suy ra $O'M // PE // KB$; $O'N // PF // KC$.

Từ đó, chú ý rằng $\dfrac{\overline{ME}}{\overline{MB}}=-1=\dfrac{\overline{NE}}{\overline{NC}}$, suy ra ba điểm *P, O', K* thẳng hàng. Vậy *PO'* luôn đi qua một điểm cố định (điểm *K*). ❐

➤**Nhận xét.** 1) Bài toán này dễ, nhiều bạn tham gia giải. 2) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt:

Hà Nội: *Trần Mạnh Hùng,* 11TA, THPT chuyên Nguyễn Huệ, TP Hà Đông; *Lê Phúc Anh,* 9A, THCS Nguyễn Huy Tưởng, Đông Anh; **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh,* 12T2, *Nguyễn Văn Tấn,* 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Nam Định; **Hà Nam:** *Nguyễn Thị Lụa,* 10T, THPT chuyên Biên Hoà, TP Hà Nam; **Bắc Ninh:** *Lê Huy Cường,* 10T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP Bắc Ninh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thuý Quỳnh,* 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Long:** *Trần Duy Quân,* 11T, THPT chuyên Vĩnh Long, TP Vĩnh Long; **Đăk Lăk:** *Hoàng Huy Thông,* 9G, THCS Phan Châu Trinh, TP Buôn Ma Thuột; **Hưng Yên:** *Trần Bá Trung,* 11T, THPT chuyên Hưng Yên, TP Hưng Yên.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/439. *Một thanh đồng chất thiết diện đều có chiều dài l, có khối lượng riêng ρ_0, nổi thẳng đứng trong hai chất lỏng khác nhau không trộn lẫn, có khối lượng riêng ρ_1 và ρ_2 ($\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$). Một phần thanh nằm trong chất lỏng có khối lượng riêng ρ_1, đầu trên của thanh ngang mặt thoáng của chất lỏng đó; phần còn lại nằm trong chất lỏng kia.*

a) Tính công cần thực hiện để nhấn chìm thanh vào trong chất lỏng thứ hai (ρ_2).

b) Xác định chu kì dao động nhỏ của thanh theo phương thẳng đứng.

Lời giải. a) Kí hiệu *h* là chiều cao lớp chất lỏng có khối lượng riêng ρ_1. Điều kiện cân bằng của thanh:

$$\rho_0 gSl=\rho_1 gSh+\rho_2 gS(l-h) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow h=\frac{(\rho_2-\rho_0)l}{\rho_2-\rho_1} \qquad (2)$$

Khi đầu thanh của thanh dịch chuyển một đoạn *x*, lực cần nhấn thanh bằng:

$$F_x=\rho_1 gS(h-x)+\rho_2 gS(l-h+x)-\rho_0 gSl \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta được: $F_x=(\rho_2-\rho_1)gSx$.

Công để nhấn thanh chìm hoàn toàn vào chất lỏng ρ_2 là:

$$A=\int_0^h F_x \mathrm{d}x=\frac{(\rho_2-\rho_0)^2}{2(\rho_2-\rho_1)}gSl^2.$$

b) * Khi đầu trên của thanh ở dưới mặt thoáng một đoạn *x*, phương trình chuyển động của thanh là:

$$-\rho_1 gS(h-x)-\rho_2 gS(l-h+x)+\rho_0 gSl=mx'' \quad (4)$$

Kết hợp (1) và (4) ta được:

$$x'' = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0}\frac{g}{l}x.$$

Phương trình này chứng tỏ thanh dao động điều hòa với chu kỳ: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_0 l}{(\rho_2 - \rho_1)g}}$

* Khi đầu trên của thanh ở trên mặt thoáng một đoạn x, phương trình chuyển động của thanh là:

$$\rho_1 gSh + \rho_2 gS(l - h - x) - \rho_0 gSl = mx'' \quad (5)$$

Kết hợp (1) và (5) ta được:

$$x'' = -\frac{\rho_2}{\rho_0}\frac{g}{l}x$$

Phương trình này chứng tỏ thanh dao động điều hòa với chu kỳ: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_0 l}{\rho_2 g}}$.

Như vậy thanh sẽ dao động theo phương thẳng đứng với chu kì:

$$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\sqrt{\frac{\rho_0}{(\rho_2 - \rho_1)}} + \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_2}}\right]. ❒$$

➤**Nhận xét.** Bài toán chỉ đúng khi không xét đến sự thay đổi mực chất lỏng trong bình, nghĩa là thể tích của thanh rất nhỏ so với thể tích chất lỏng.

Chỉ có một bạn gửi lời giải nhưng cho kết quả sai.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/439. *Treo bốn quả cầu nhỏ giống hệt nhau vào một điểm O bằng bốn sợi dây mảnh, cách điện, có chiều dài l. Mỗi quả cầu có khối lượng m và điện tích q. Khi cân bằng, bốn điện tích nằm tại bốn đỉnh của hình vuông ABCD có cạnh dài l.*

a) Tính lực điện do ba điện tích đặt tại A, B, D tác dụng lên điện tích đặt tại C theo q, l và hằng số điện k.

b) Tính khối lượng m của mỗi quả cầu theo q, l và gia tốc trọng trường g.

Áp dụng bằng số:

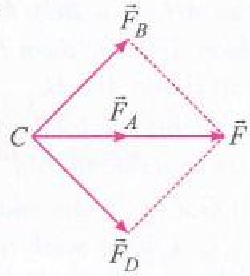
$q = 3.10^{-7}C$; $l = 20$cm;

$g = 10\,\text{m/s}^2$; $k = 9.10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2$.

Lời giải. a) Gọi $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_D$ lần lượt là lực điện do các điện tích đặt tại vị trí A, B, D tác dụng lên điện tích đặt tại C.

Về độ lớn, ta có: $F_A = \dfrac{kq^2}{2l^2}$; $F_D = F_B = \dfrac{kq^2}{l^2}$.

b) Lực tổng hợp tác dụng lên quả cầu đặt tại C là: $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_D$ (*)



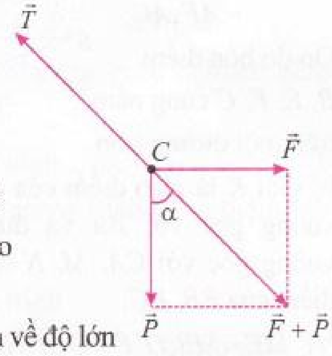
Do tính đối xứng nên lực tổng hợp $\vec{F}$ cùng phương với AC và có chiều hướng từ A tới C.

Chiếu phương trình (*) lên phương AC, ta thu được

$$F = F_A + F_D\cos 45^\circ + F_B\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow F = \frac{kq^2}{2l^2} + 2\frac{kq^2}{l^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{kq^2}{l^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right).$$

Quả cầu đặt tại C chịu tác dụng của ba lực: lực tổng hợp $\vec{F}$, trọng lực $\vec{P}$ và sức căng của dây $\vec{T}$.



Điều kiện để quả cầu đặt tại C cân bằng:

$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$.

Hợp lực của $\vec{F} + \vec{P}$ phải có phương theo dây treo OC.

Do góc $\alpha = 45^\circ$ nên về độ lớn

$$P = F \Leftrightarrow mg = \frac{kq^2}{l^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \Rightarrow m = \frac{kq^2}{gl^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right).$$

Thay số, tính được $m \approx 3{,}876.10^{-3}$kg. ❒

➤**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Long: *Trần Duy Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thanh Hoá:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Yên Bái:** *Lê Minh Dũng*, 11K, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nghệ An:** *Lê Xuân Bảo*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Dân*, *Lê Thị Bích Ngọc*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

ĐẶNG THANH HẢI

Kì thi chọn HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2014

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh vào đội tuyển quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 55 năm 2014 (IMO 2014) đã được tổ chức tại Hà Nội, trong hai ngày 25 và 26/3/2014.

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 48 học sinh tham dự kì thi tuyển chọn nói trên, gồm 2 học sinh đã tham dự lớp tập huấn chuẩn bị dự thi IMO 2013 do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức và 46 học sinh đạt từ 24,75 điểm trở lên trong kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán THPT năm 2014. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải 3 bài toán trong thời gian 270 phút; điểm tối đa của mỗi ngày thi là 21 điểm.

1. ĐỀ THI

Ngày thi thứ nhất, 25/3/2014

Bài 1. (*7 điểm*). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m$ với mọi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Bài 2. (*7 điểm*). Trong mặt phẳng tọa độ, cho tập hợp các điểm với tọa độ nguyên

$T = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{Z}; |x|, |y| \le 20; (x; y) \ne (0; 0)\}$.

Ta tô màu một số điểm của tập T sao cho với mỗi điểm $(x; y)$ thuộc T thì có đúng một trong hai điểm $(x; y)$ và $(-x; -y)$ được tô màu. Với mỗi cách tô màu như vậy, gọi N là số cặp điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thuộc T cùng được tô màu và thỏa mãn $x_1 \equiv 2x_2, y_1 \equiv 2y_2 \pmod{41}$. Hỏi N có thể nhận được những giá trị nào ?

Bài 3. (*7 điểm*). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$ và điểm D thay đổi trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E; các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại điểm F. Kí hiệu (O_1) là đường tròn nằm bên trong tam giác BED, tiếp xúc với các cạnh EB, ED và với đường tròn (O); kí hiệu (O_2) là đường tròn nằm bên trong tam giác CFD, tiếp xúc với các cạnh FC, FD và với đường tròn (O). Gọi M và N lần lượt là các tiếp điểm của (O_1) với BE và của (O_2) với CF.

a) Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng đi qua M và song song với CE cắt AC tại điểm P; đường thẳng đi qua N và song song với BF cắt AB tại điểm Q. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMP và ANQ cùng tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Ngày thi thứ hai, 26/3/2014

Bài 4. (*7 điểm*). Cho tam giác nhọn không cân ABC và P là một điểm thuộc đường cao AD. Gọi E và F lần lượt là các giao điểm của BP với AC và của CP với AB.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AEDF$ nội tiếp khi và chỉ khi $\dfrac{PA}{PD} = (\tan B + \tan C)\cot\dfrac{A}{2}$.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Cho P thay đổi trong đoạn AH. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB cắt đường thẳng CP tại điểm M; đường thẳng đi qua C và vuông góc với AC cắt đường thẳng BP tại điểm N. Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên MN. Chứng minh rằng tổng $\widehat{MAN} + \widehat{BKC}$ không đổi.

Bài 5. (*7 điểm*). Tìm tất cả các cặp đa thức hệ số nguyên $P(x)$, $Q(x)$ sao cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_0 = 2014$, $x_{2n+1} = P(x_{2n})$, $x_{2n+2} = Q(x_{2n+1})$ với $n = 0, 1, 2, ...$

thỏa mãn: với mọi m nguyên dương, tồn tại số hạng khác không của dãy chia hết cho m.

Bài 6. (*7 điểm*). Cho m, n, p là các số tự nhiên không đồng thời bằng 0. Không gian tọa độ được chia thành các khối lập phương đơn vị bởi các hệ mặt phẳng song song cách đều. Một cách điền vào mỗi khối lập phương đơn vị một trong các số 1, 2,..., 60 được gọi là cách điền *Điện Biên* nếu thỏa mãn: trong mỗi hình hộp chữ nhật với các mặt nằm trên các hệ mặt phẳng đã cho và có tập hợp độ dài ba cạnh xuất phát từ cùng một đỉnh là $\{2m + 1, 2n + 1, 2p + 1\}$, khối lập phương đơn vị có tâm trùng với tâm của hình hộp được điền một số bằng trung bình cộng của các số được điền vào các khối lập phương đơn vị ở các góc của hình hộp đó. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền *Điện Biên* ? Biết rằng hai cách điền là giống nhau nếu các số được điền vào tất cả các khối lập phương đơn vị có cùng tọa độ trong hai cách điền này là giống nhau.

2. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định chọn 6 học sinh có điểm thi cao nhất (có tên dưới đây) vào Đội tuyển quốc gia dự thi IMO 2014:

1. *Phạm Tuấn Huy*, h/s lớp 12 trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 31.5 điểm;
2. *Nguyễn Thế Hoàn*, h/s lớp 11 trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội, 28.0 điểm;
3. *Hồ Quốc Đăng Hưng*, h/s lớp 12 trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 26.25 điểm;
4. *Trần Hồng Quân*, h/s lớp 12 trường THPT chuyên Thái Bình, Tỉnh Thái Bình, 26.25 điểm;
5. *Vương Nguyễn Thùy Dương*, h/s lớp 12 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng, 25.0 điểm;
6. *Nguyễn Huy Tùng*, h/s lớp 12 trường THPT chuyên Trần Phú, TP. Hải Phòng, 23.5 điểm.

Ngày 16/4/2014, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 6 học sinh của Đội tuyển về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn chuẩn bị cho IMO 2014. Trường Đại học Sư phạm Hà Nội được Bộ Giáo dục và Đào tạo giao nhiệm vụ chủ trì công tác tập huấn đội tuyển, dưới sự giám sát của Bộ.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(*Tiếp trang 16*)

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/443 (For 6th grade). 21 distinct integers are chosen so that the sum of any subset of 11 numbers among them is always greater than the sum of the remaining 10. If one of them is 101, and the largest number is 2014, find the other 19 numbers.

T2/443 (For 7th grade). In a triangle ABC where $\widehat{BAC} = 40^o$ and $\widehat{ABC} = 60^o$, points D and E are chosen on the sides AC and AB respectively such that $\widehat{CBD} = 40^o$ and $\widehat{BCE} = 70^o$. BD and CE intersect at point F. Prove that AF is perpendicular to BC.

T3/443. Solve the following system of equations: $\begin{cases} 2\sqrt{2x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt[3]{8x^3 + y^3} = \sqrt[3]{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1). \end{cases}$

T4/443. In a triangle ABC, points E, D on the sides AB and AC respectively such that $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. The circumcircle of triangle ADB meets CE at M and N. The circumcircle of triangle AEC meets BD at I and K. Prove that the points M, I, N, K lie on a circle.

T5/443. Prove that for all positive real numbers a, b, c, the following inequality holds:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right).$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/443. Determine all real solutions of the equation: $(x^5 + x - 1)^5 + x^5 = 2$.

T7/443. Let M be a point inside a given triangle ABC and let x, y, z denote the distance from M onto BC, CA, AB respectively. Prove that $\widehat{BAM} = \widehat{CBM} = \widehat{ACM}$ if and only if $\frac{bx}{c} = \frac{cy}{a} = \frac{az}{b}$ where $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

T8/443. Let x, y, z be three arbitrary numbers from the interval $[0; 1]$. Determine the maximum value of P, where

$$P = \frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{z+x+1} + \frac{z}{x+y+1} + (1-x)(1-y)(2-z).$$

Translated by LEMINHHA

Vì sao cần có thống kê trong CHƯƠNG TRÌNH TOÁN THPT

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(GV Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

I. THỐNG KÊ LÀ GÌ?

Các thông tin dưới dạng số liệu đang tràn ngập trong cuộc sống hàng ngày của mỗi chúng ta. Công nghệ hiện đại có khả năng thu thập dữ liệu với số lượng rất lớn với chi phí thấp. Tuy nhiên dữ liệu vẫn chỉ đơn thuần là nguyên liệu thô. Nó chưa phải là thông tin và càng chưa phải là tri thức. Cần phải có một khoa học phân tích và giải thích dữ liệu, rút ra những thông tin hữu ích từ dữ liệu. Khoa học đó chính là Thống kê.

Vậy Thống kê là gì? Đó là một khoa học về những phương pháp và công cụ để

- Thu thập, tổ chức và trình bày dữ liệu.
- Thiết kế, phân tích và xử lý dữ liệu.
- Rút ra những thông tin, tri thức hữu ích từ dữ liệu.
- Ước lượng hiện tại, dự báo tương lai căn cứ trên dữ liệu.

Thống kê luôn đi song hành cùng lý thuyết xác suất, lĩnh vực toán học nghiên cứu các mô hình toán học về hiện tượng ngẫu nhiên và các phương pháp tính toán cái ngẫu nhiên. Ngôn ngữ Xác suất đóng vai trò nền tảng trong các suy luận thống kê.

Thống kê mang hương vị toán học nhưng không đơn giản là một ngành của toán học. Các bài toán cốt lõi của nó pha trộn với các bài toán của nhiều lĩnh vực nhằm đi sâu tìm hiểu bản chất của trí tuệ và tư duy.

II. VAI TRÒ CỦA THỐNG KÊ

Trong xã hội hiện đại, bất cứ chính quyền nào cũng có các cơ quan thống kê chuyên thu thập và xử lí các dữ liệu về dân số, giáo dục, tình hình phát triển kinh tế... để rút ra các thông tin và dựa vào đó mà hoạch định chính sách. Không có dữ liệu thống kê, nhà nước như người mù và điếc. Trong công tác nghiên cứu, việc nghiên cứu thường được bắt đầu bằng một ý tưởng, một giả thiết. Tiếp theo để thử nghiệm giả thiết đó, một quy trình khảo sát phải được tiến hành với các bước: thiết kế, thu thập dữ liệu, phân tích dữ liệu, và diễn dịch ý nghĩa của dữ liệu. Mỗi một bước trong quy trình đó đều có sự cống hiến quan trọng của thống kê. Thống kê trong phân tích dữ liệu lớn đã đạt được những kết quả tuyệt vời và Google đang đi tiên phong trong lĩnh vực này. Chẳng hạn chương trình dịch ngôn ngữ tự động của Google được xây dựng bởi các nhà Thống kê chứ không phải các nhà Ngôn ngữ học.

Hiện nay Thống kê đã được ứng dụng rộng rãi trong mọi lĩnh vực, từ khoa học tự nhiên kinh tế nông nghiệp y học cho tới các khoa học xã hội và nhân văn.

III. THỐNG KÊ TRONG CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN THPT

Thống kê là không những là một công cụ quan trọng trong công việc của các nhà chuyên môn thuộc nhiều ngành khác nhau mà nó cũng là một phần quan trọng trong các hoạt động thường ngày trong xã hội như kinh doanh, công nghiệp, quản lý xã hội. Thành thử để đáp ứng yêu cầu của cuộc sống hiện đại thì sự hiểu biết về Thống kê và tư duy thống kê là điều không thể thiếu đối với bất kỳ ai, dù công việc của người đó có liên quan trực tiếp đến các phương pháp thống kê hay không. Ngay từ đầu thế kỷ 20 nhà giáo dục người Anh *H.D. Well* đã tiên đoán: "*Trong tương lai không xa, kiến* *thức Thống kê và tư duy thống kê sẽ là một yếu tố không thể thiếu được trong học vấn phổ thông của mỗi người giống như khả năng biết đọc biết viết"*

Năm 1973 khi tổng kết công tác đổi mới giáo dục, UNESCO đã khẳng định Xác suất - Thống kê là một trong 9 quan điểm chủ chốt để xây dựng học vấn phổ thông trong thời đại ngày nay.

Vì vậy hiện nay ở hầu hết các nước trên thế giới, Xác suất - Thống kê đã được đưa vào trong chương trình phổ thông, nhiều nước đưa vào khá sớm. Ở nước ta, mãi đến lần thay SGK mới năm 2006, Xác suất - Thống kê mới được vào chương trình môn Toán với một nội dung rất hạn chế trong một chương ngắn "Thống kê" ở lớp 7, lớp 10 và chương "Tổ hợp và Xác suất" ở lớp 11. Theo tôi biết thì hầu hết các giáo viên đều bỏ không dạy hoặc dạy qua loa chương Thống kê vì họ chắc chắn rằng câu hỏi về Thống kê không bao giờ có mặt trong các kỳ thi. Những thứ mà đa số học sinh suốt đời không bao giờ dùng đến như số phức, các mẹo giải phương trình lượng giác, chứng minh bất đẳng thức, tính tích phân,.. thì lại được nhồi rất nhiều vào đầu học sinh để đối phó với thi cử và thường bị quên ngay sau mỗi kỳ thi.

Khi trả lời phỏng vấn Báo Giáo dục ngày 27-10-2013 (http://giaoduc.net.vn) PGS *Văn Như Cương* cho rằng "*Hiện nay, Chương trình Toán THPT thừa ít nhất 50%. Thừa nhiều kiến thức vô bổ đối với học sinh và thiếu những kiến thức cơ bản, đơn giản, phổ cập có nhiều ứng dụng trong thực tiễn đời sống.*

Tôi đề nghị bỏ chương tích phân, phép biến hình trong không gian và những bài về số phức, lượng giác. Và đồng thời thêm vào đó những kiến thức thực tế, gắn liền với cuộc sống hàng ngày như Xác suất Thống kê. Hiện nay số tiết Xác suất Thống kê rất ít, chỉ dừng lại ở các khái niệm và các thầy không được đào tạo kiến thức đó trong các trường sư phạm nên khi dạy không gây hứng thú cho học sinh."

IV. MỘT MINH HOẠ VỀ ỨNG DỤNG CỦA THỐNG KÊ

Một công ty dược phẩm đang nghiên cứu để bào chế một loại thuốc mới điều trị bệnh A. Trước khi triển khai sản xuất đại trà công ty cần thử nghiệm xem liệu thuốc mới có tốt hơn thuốc cũ hay không? Câu hỏi đặt ra là "Xác suất khỏi bệnh khi dùng thuốc mới có lớn hơn xác suất khỏi bệnh khi dùng thuốc cũ hay không ?"

Công ty chọn hai nhóm bệnh nhân mắc bệnh A. Nhóm 1 có N_1 bệnh nhân cho dùng thuốc mới (nhưng không nói cho bệnh nhân biết để loại trừ hiệu ứng tâm lý) và nhóm 2 có N_2 bệnh nhân cho dùng thuốc cũ. Kết quả cho thấy: Nhóm 1 có n_1 bệnh nhân khỏi bệnh và m_1 bệnh nhân không khỏi bệnh. Nhóm 2 có n_2 bệnh nhân khỏi bệnh và m_2 bệnh nhân không khỏi. Dữ liệu được trình bày trong bảng số liệu sau

	Khỏi	Không khỏi	Tổng
Nhóm 1	n_1	m_1	$N_1 = n_1 + m_1$
Nhóm 2	n_2	m_2	$N_2 = n_2 + m_2$
Tổng	$n = n_1 + n_2$	$m = m_1 + m_2$	$N = N_1 + N_2$

Ta gọi đây là một mẫu quan sát thu được trong thí nghiệm.

Tần suất khỏi bệnh khi dùng của thuốc mới và thuốc cũ trong mẫu quan sát trên tương ứng là $f_1 = \dfrac{n_1}{N_1}$ và $f_2 = \dfrac{n_2}{N_2}$.

Gọi p_1, p_2 tương ứng là xác suất khỏi bệnh khi dùng thuốc mới và thuốc cũ. Mặc dù tần suất cho ta một hình ảnh về xác suất nhưng nếu $f_1 > f_2$ thì ta chưa có đủ cơ sở để khẳng định rằng $p_1 > p_2$.

Chẳng hạn khi gieo một đồng tiền cân đối thì xác suất xuất hiện mặt sấp và xác suất xuất hiện mặt ngửa bằng nhau và bằng 0,5. Tuy nhiên anh A gieo 100 lần có thể cho 55 sấp, 45 ngửa. Anh B gieo 80 lần có thể cho 37 sấp, 43 ngửa, anh C gieo 25 lần có thể cho 13 sấp,12 ngửa,...

Vậy khi nào có thể kết luận $p_1 > p_2$?

Nhà Toán học người Anh *R. Fisher* đã đưa ra tiêu chuẩn λ^2 (đọc là tiêu chuẩn *khi-bình phương)* sau đây

TIÊU CHUẨN λ^2

Với mẫu quan sát $\{n_1, m_1, n_2, m_2\}$ *đặt*

$$T = T(n_1, m_1, n_2, m_2) = N\left(\frac{n_1^2}{nN_1} + \frac{n_2^2}{nN_2} + \frac{m_1^2}{mN_1} + \frac{m_2^2}{mN_2} - 1\right)$$

ở đó $n = n_1 + n_2$; $m = m_1 + m_2$; $N = n + m$; $N_1 = n_1 + m_1$; $N_2 = n_2 + m_2$.

Khi đó

- *Nếu* $T > 3{,}841$ *thì ta khẳng định rằng* $p_1 > p_2$. *Xác suất sai lầm của khẳng định này là* 0,05.
- *Nếu* $T > 6{,}635$ *thì ta kết luận rằng* $p_1 > p_2$. *Xác suất sai lầm của khẳng định này là* 0,01.

★ **Thí dụ 1.** *Có hai nhóm bệnh nhân. Nhóm 1 có 10 bệnh nhân cho dùng thuốc mới và nhóm 2 có 20 bệnh nhân cho dùng thuốc cũ. Kết quả cho thấy: Nhóm 1 có 7 bệnh nhân khỏi bệnh và 3 bệnh nhân không khỏi bệnh. Nhóm 2 có 5 bệnh nhân khỏi bệnh và 15 bệnh nhân không khỏi Ta có bảng số liệu sau*

	Khỏi	Không khỏi	Tổng
Nhóm 1	$n_1 = 7$	$m_1 = 3$	$N_1 = 10$
Nhóm 2	$n_2 = 5$	$m_2 = 15$	$N_2 = 20$
Tổng	$n = 12$	$m = 18$	$N = 30$

Tần suất khỏi bệnh của nhóm 1 và nhóm 2 tương ứng là $f_1 = 0{,}7$, $f_2 = 0{,}25$. Ta thấy $f_1 > f_2$.

Áp dụng tiêu chuẩn λ^2 ta tính được $T = 5{,}625$. Vì $T > 3{,}841$ nên ta kết luận rằng $p_1 > p_2$, tức là khẳng định rằng "thuốc mới tốt hơn thuốc cũ". Xác suất sai lầm của khẳng định này là 0,05.

★ **Thí dụ 2.** *Trong một kiểm định thuốc khác ta có hai nhóm bệnh nhân. Nhóm 1 có 20 bệnh nhân cho dùng thuốc mới và nhóm 2 có 40 bệnh nhân cho dùng thuốc cũ. Kết quả cho thấy: Nhóm 1 có 14 bệnh nhân khỏi bệnh và 6 bệnh nhân không khỏi bệnh. Nhóm 2 có 10 bệnh nhân khỏi bệnh và 30 bệnh nhân không khỏi.*

Ta có bảng số liệu sau

	Khỏi	Không khỏi	Tổng
Nhóm 1	$n_1 = 14$	$m_1 = 6$	$N_1 = 20$
Nhóm 2	$n_2 = 10$	$m_2 = 30$	$N_2 = 40$
Tổng	$n = 24$	$m = 36$	$N = 60$

Tần suất khỏi bệnh của nhóm 1 và nhóm 2 tương ứng là $f_1 = 0{,}7$ và $f_2 = 0{,}25$. Áp dụng tiêu chuẩn λ^2 ta tính được $T = 11{,}25$. Vì $T > 6{,}635$ thì ta kết luận rằng $p_1 > p_2$, tức là khẳng định rằng "thuốc mới tốt hơn thuốc cũ". Xác suất sai lầm của khẳng định này là 0,01.

Giải trí toán học

GIẢI NHẤT ĐƯỢC THƯỞNG $\sqrt[n]{n} \times 10^3$$

(n tự chọn)

Trong một cuộc thi toán học, Ban tổ chức công bố giải thưởng như sau:

Giải Nhất

Được nhận $\sqrt[n]{n} \times 10^3$$.

Với n tuỳ ý chọn ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)

Nếu bạn được giải Nhất, bạn chọn n bằng bao nhiêu để có số tiền lớn nhất?

Mời các bạn tham gia giải bài toán trên.

PHAN THANH QUANG

(TP. Hồ Chí Minh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 443 (5.2014)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

THPT VĨNH LONG
TỰ HÀO MANG TÊN MỘT VÙNG ĐẤT

THPT Vĩnh Long là ngôi trường nằm dọc theo đường Phạm Thái Bường, một trong những con đường đẹp nhất ở ngay trung tâm thành phố Vĩnh Long. Đây là ngôi trường xinh đẹp, cơ ngơi khang trang với khuôn viên rộng trên 10.000 m², có 39 lớp học rất thân thiện.

Với cái tên ban đầu là THPT Bán Công Vĩnh Long, một ngôi trường nhỏ bé được thành lập vào tháng 9/1992. Ngôi trường này dành cho những em học sinh gặp khó khăn về học tập, về hạnh kiểm, về văn hóa, về kinh tế, ... khi ấy gian nan thử thách chất chồng, có lúc tưởng chừng như khó có thể vượt qua.

Nhưng với quyết tâm cao độ và phương châm hành động *"Chất lượng giáo dục là danh dự của nhà trường và của mỗi thầy cô giáo"* ban lãnh đạo nhà trường đã rất tận tâm trong việc tìm tòi đưa ra những hướng đi hợp lý, huy động các nguồn lực đầu tư cơ sở vật chất; mỗi giáo viên là một tấm gương tự học sáng tạo không ngừng nâng cao chất lượng đội ngũ; tạo điều kiện cho học sinh phát triển khả năng và tư duy từng bước nâng cao chất lượng giáo dục dạy chữ và dạy người.

22 năm đã trôi qua, một chặng đường với muôn vàn khó khăn và cố gắng, giờ đây THPT Vĩnh Long đã trở thành ngôi trường mang tên một vùng đất đang hòa mình và đứng vững trong hệ thống các trường công lập. Hơn hết trường THPT Vĩnh Long càng tự hào hơn nữa khi đã góp phần đào tạo trực tiếp nguồn nhân lực cho tỉnh nhà, cho đất nước. Các thế hệ học sinh được rèn luyện và dạy dỗ từ chính ngôi trường này đã, đang và sẽ là những công dân có ích cho xã hội. Trong số đó bao gồm những học sinh đạt được vị trí nhất định và cả những người vẫn ngày ngày âm thầm lặng lẽ tỏa hương cho đời.... Có thể nói nhà trường chưa có được những người con xuất sắc nhất nhưng vẫn luôn tự hào rằng nơi đây đã đào tạo ra công dân phục vụ tốt cho xã hội.

22 năm vẫn chưa phải là nhiều cho cả một sự nghiệp trồng người, nhưng tuổi trẻ trường THPT Vĩnh Long sẽ luôn nhìn vào công sức và thành quả của thế hệ đi trước để vươn lên khẳng định mình cho thật xứng đáng với cái tên Vĩnh Long là "*mãi mãi phồn vinh*".

Thầy giáo **Đặng Hoàng Dũng**
Bí thư chi bộ, Hiệu trưởng nhà trường


Hội đồng giáo dục trường THPT Vĩnh Long


Thầy và trò đội tuyển học sinh giỏi nhà trường

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT05M4
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2014
Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng