ĐN1 Thầy tiến trường cấp 3

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

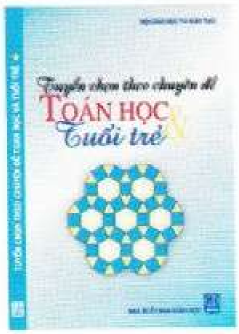
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

2 2006
Số 344

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 43
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

SÁCH MỚI

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ *(QUYỂN 1)*



Ra đời một "Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ" là điều tạp chí THTT ấp ủ từ lâu. Một trong những cuốn sách ấy đã ra mắt bạn đọc: *Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ* (Quyển 1). Tuyển chọn này xếp thành ba chương, mỗi chương trình bày một chuyên đề. Chuyên đề thứ nhất *Phương pháp giải toán* bao gồm các bài viết theo hướng phát triển năng lực tư duy và kĩ năng giải toán. Chuyên đề thứ hai *Toán học và đời sống*, sẽ đem lại cho bạn đọc cách nhìn mới về toán học qua những ứng dụng. Chuyên đề thứ ba *Lịch sử Toán học* như những lát cắt giúp bạn ngược dòng thời gian đến với những sự kiện và con người xây nên lâu đài Toán học hôm nay.

Hi vọng sách hữu ích với các thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán.

Sách khổ 19 × 27cm, dày 300 trang, giá bán lẻ 34.000đồng/cuốn. Bạn đọc có thể mua sách tại

Các nhà sách của NXB Giáo dục:

187B Giảng Võ, TP. Hà Nội
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP. HCM
15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

Các công ti Sách và Thiết bị trường học các tỉnh, thành.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ:

187B Giảng Võ, Hà Nội
ĐT/FAX: 04.5144272
Email: toanhoctt@yahoo.com

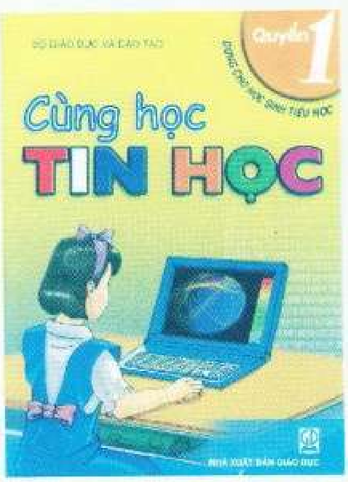
Quyển 2 của bộ sách này sẽ ra trong năm nay (2006).

Cảm ơn các bạn.

THTT

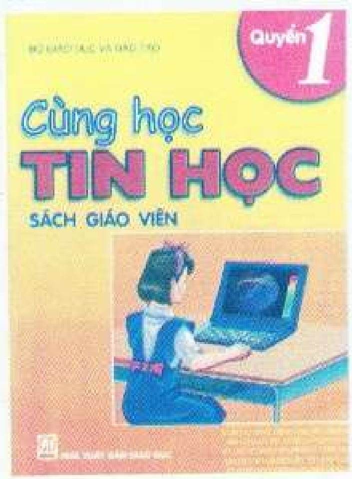
Sách mới dành cho bậc Tiểu học:
CÙNG HỌC TIN HỌC

Hãy học Tin học để vừa học vừa chơi với máy tính



* Đây là bộ sách Tin học được biên soạn theo chương trình mới được ban hành của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
* Bộ sách được thiết kế theo phong cách hiện đại kết hợp với nhiều tranh ảnh minh họa hấp dẫn.
* Nội dung được trình bày phù hợp với lứa tuổi học sinh Tiểu học và các lớp đầu cấp THCS.
* Các đơn vị tập thể đặt mua sách qua các địa chỉ sau:

- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục, 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT: 04.8562011 Fax: 04.8562493.
- Phòng Phát hành Sách giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP.Hồ Chí Minh, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP.Hồ Chí Minh. ĐT: 08.8358423 Fax: 08.8390727.
- Phòng Phát hành sách Giáo khoa, NXB Giáo dục tại TP. Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng. ĐT: 0511.894504 Fax: 0511.827368.

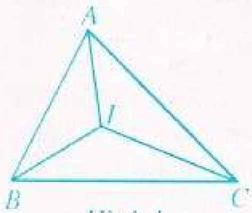


VỀ MỘT TÍNH CHẤT CỦA TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

LÊ THỊ NGỌC THUÝ
(GV. Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An)

Tính chất sau đây của tâm đường tròn nội tiếp tuy đơn giản, nhưng có nhiều ứng dụng trong giải toán hình học.

Tính chất. *Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì* $\widehat{BIC} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.



Hình 1

Thật vậy, trong tam giác BIC (h. 1) có $\widehat{BIC} =$

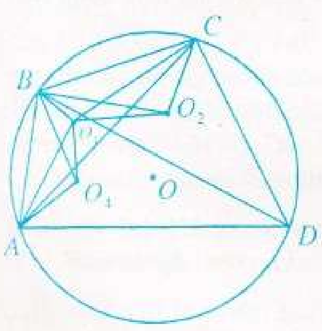
$= 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB})$

$= 180^\circ - \dfrac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$

$= 180^\circ - \dfrac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

Ta sẽ lần lượt áp dụng tính chất trên vào giải các dạng toán: chứng minh, tìm tập hợp điểm, dựng hình, ... để thấy rõ hơn giá trị của tính chất đó.

Thí dụ 1. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.*



Hình 2

Lời giải. (h. 2).

Vì O_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên theo tính chất trên, ta có

$$\widehat{AO_1C} = 90^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2} \qquad (1)$$

$$\widehat{BO_1C} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Mặt khác, vì O_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD nên $\widehat{BO_2C} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{BDC}}{2}$.

Do $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ nên $\widehat{BO_1C} = \widehat{BO_2C}$.

Suy ra tứ giác BO_1O_2C nội tiếp, nên

$$\widehat{CO_1O_2} = \widehat{CBO_2} = \frac{\widehat{CBD}}{2}.$$

Tương tự ta có $\widehat{AO_1O_4} = \widehat{ABO_4} = \dfrac{\widehat{ABD}}{2}$.

Từ đó

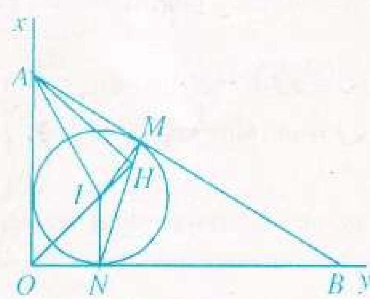
$$\widehat{CO_1O_2} + \widehat{AO_1O_4} = \frac{\widehat{CBD} + \widehat{ABD}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{O_2O_1O_4} = 90^\circ$.

Tương tự, ba góc còn lại của tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ đều bằng 90° nên tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Thí dụ 2. *Cho góc $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Trên tia Ox có một điểm A cố định. Trên tia Oy có một điểm B chuyển động. Đường tròn nội tiếp tam giác AOB tiếp xúc với AB tại M và tiếp xúc với OB tại N. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Xét trường hợp $OA < OB$ (h. 3).



Hình 3

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AOB và H là giao điểm của OI với MN. Khi đó, theo tính chất trên ta có $\widehat{AIO} = 90^\circ + \frac{\widehat{ABO}}{2}$.
Ta lại có tam giác BMN cân tại B, nên $\widehat{NMB} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABO}}{2}$. Do đó $\widehat{AIO} + \widehat{NMB} = 180^\circ$.
Suy ra $\widehat{AIH} + \widehat{AMH} = 180^\circ$, nên tứ giác $AIHM$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IHA} = \widehat{IMA} = 90^\circ$ hay $\widehat{OHA} = 90^\circ$.

Ta lại có $\widehat{AOI} = 45^\circ$ hay $\widehat{AOH} = 45^\circ$, nên tam giác AOH vuông cân tại H và H thuộc nửa mặt phẳng bờ AO có chứa B.

Vì A, O cố định nên H cố định và do đó đường thẳng MN luôn luôn đi qua điểm H cố định.

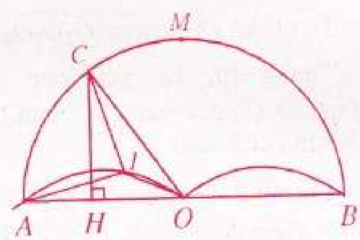
Trường hợp $OA \geq OB$ chứng minh tương tự.

Thí dụ 3. *Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và C là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn ấy. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH. Tìm tập hợp điểm I.*

Lời giải. (h. 4).

• *Phần thuận.*

Gọi M là trung điểm của cung AB. Xét trường hợp C chuyển động trên cung nhỏ AM. Khi đó, vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH nên



Hình 4

$$\widehat{CIO} = 90^\circ + \frac{\widehat{CHO}}{2} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.$$

Do $\Delta AIO = \Delta CIO$ (c.g.c) nên $\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^\circ$. Vậy I nằm trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn AO.

Tương tự, nếu C chuyển động trên cung nhỏ MB thì I nằm trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn OB.

• *Phần đảo.* Bạn đọc tự chứng minh .

• *Kết luận.* Vậy tập hợp điểm I khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB là hai cung chứa góc 135° dựng trên hai đoạn AO và OB (cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn đường kính AB đã cho).

Tương tự như tính chất trên, bạn đọc hãy chứng minh tính chất sau đây liên quan đến tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác:

"Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC thì $\widehat{BJC} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$*".*

Các bạn hãy áp dụng hai tính chất trên để giải các bài toán sau đây:

Bài 1. Giả sử điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB, H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Phân giác các góc ACH và BCH thứ tự cắt AB tại E và F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF. Chứng minh góc AIB không đổi và đường thẳng CI luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} - \widehat{C} = 90^\circ$. Chứng minh các đường phân giác trong và phân giác ngoài góc B bằng nhau.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định và một điểm C chuyển động trên đường tròn. Tìm tập hợp các điểm I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác ABC.

Bài 4. Cho AB là một dây cố định của đường tròn tâm O và C chuyển động trên cung lớn AB. Gọi M là trung điểm AC và H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC.

a) Chứng minh đường thẳng MH luôn luôn đi qua một điểm cố định. Tìm tập hợp điểm H.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB. Chứng minh góc AIB không đổi. Tìm tập hợp điểm I.

c) Chứng minh đường thẳng HI luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Dựng tam giác ABC biết vị trí các tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác đó.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH
NĂM HỌC 2005-2006

(Đề thi đăng trên THTT số 343, tháng 1 năm 2006)

Câu 1. Tập xác định của hàm số y là tập tất cả các giá trị của x thỏa mãn $-1 \le x \le 1$ và $x \ne 0$.

Câu 2. *Nhận xét.* Với x, y là các số dương thì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$. Từ nhận xét này ta có

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{(p-a)+(p-b)} = \frac{4}{c};$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{a};$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \ge \frac{4}{b}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Câu 3. Theo công thức Viète ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2 = m(m-2) \\ x_1x_2 = -(m-1)^2 \end{cases}$$

Từ đó $2\sqrt{x_1+x_2-2(m-2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \ge 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m(m-2)-2(m-2)} - 3\sqrt{(m-1)^2} \ge 1$

$\Leftrightarrow 2|m-2| - 3|m-1| \ge 1$ (1)

Nếu $m < 1$ thì bất phương trình (BPT) (1) có dạng $2(2-m) - 3(1-m) \ge 1$, nghiệm của BPT này là $0 \le m < 1$.

Nếu $1 \le m \le 2$ thì BPT (1) có dạng

$2(2-m) - 3(m-1) \ge 1$,

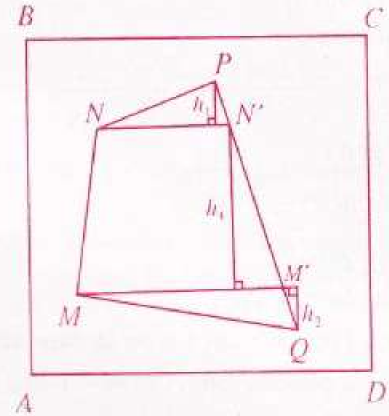
nghiệm của BPT này là $1 \le m \le \frac{6}{5}$.

Nếu $m > 2$ thì BPT (1) có dạng

$2(m-2) - 3(m-1) \ge 1$,

dễ thấy không có giá trị $m > 2$ nào thỏa mãn BPT này. *Đáp số* : $0 \le m \le \frac{6}{5}$.

Câu 4. Vẽ $MM' \,//\, NN' \,//\, AD$ ($M', N' \in PQ$) (hình bên).



Giả sử $MM' \le \frac{1}{2}$ và $NN' \le \frac{1}{2}$. Khi đó

$S_{MNPQ} = S_{PNN'} + S_{QMM'} + S_{MNN'M'}$

$= \frac{1}{2}h_1.NN' + \frac{1}{2}h_2.MM' + \frac{(NN'+MM')h_3}{2}$

$\le \frac{1}{4}(h_1+h_2) + \frac{h_3}{2} = \frac{1}{4}(h_1+h_2+h_3) + \frac{1}{4}h_3 \le \frac{1}{2}$.

Mâu thuẫn với giả thiết $S_{MNPQ} > \frac{1}{2}$.

Vậy $MM' > \frac{1}{2}$ hoặc $NN' > \frac{1}{2}$ (đpcm).

Câu 5. Ta có $m^2+n^2 = m+n+8$

$\Leftrightarrow 4m^2+4n^2 = 4m+4n+32$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m+1+4n^2-4n+1 = 34$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2+(2n-1)^2 = 34$.

Số 34 chỉ có một cách phân tích thành tổng hai số chính phương: $34 = 3^2+5^2$. Do đó có các khả năng sau:

- $2m-1 = 3; 2n-1 = 5 \Leftrightarrow m = 2; n = 3$.
- $2m-1 = 5; 2n-1 = 3 \Leftrightarrow m = 3; n = 2$.

Vậy các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn $m^2+n^2 = m+n+8$ là (2; 3); (3; 2).

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(*Sưu tầm*)

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN VÀ THPT HÀ NỘI – AMSTERDAM
NĂM HỌC 2005 - 2006

NGÀY THỨ NHẤT

(Dành cho mọi thí sinh. Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. (2 điểm)

Cho biểu thức

$$P = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

1) Rút gọn P.

2) Tìm x để $P = \dfrac{9}{2}$.

Bài 2. (2 điểm)

Cho bất phương trình

$3(m-1)x + 1 > 2m + x$ (m là tham số).

1) Giải bất phương trình với $m = 1 - 2\sqrt{2}$.

2) Tìm m để bất phương trình nhận mọi giá trị $x > 1$ là nghiệm.

Bài 3. (2 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): 2x - y - a^2 = 0$ và parabol (P): $y = ax^2$ (a là tham số dương).

1) Tìm a để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng khi đó A, B nằm về bên phải trục tung.

2) Gọi u, v theo thứ tự là hoành độ của A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{4}{u+v} + \frac{1}{uv}.$$

Bài 4. (3 điểm)

Đường tròn tâm O có dây cung AB cố định và I là điểm chính giữa cung lớn AB. Lấy điểm M bất kì trên cung lớn AB, dựng tia Ax vuông góc với đường thẳng MI tại H và cắt BM tại C.

1) Chứng minh các tam giác AIB và AMC là tam giác cân.

2) Khi điểm M di động trên cung lớn AB chứng minh rằng điểm C di chuyển trên một cung tròn cố định.

3) Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác AMC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. (1 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB < AC$ và trung tuyến AM, $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh rằng:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta.$$

NGÀY THỨ HAI

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán – Tin. Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 6. (2 điểm)

Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Bài 7. (2 điểm)

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2+y^2) = m\end{cases}$$

1) Giải hệ phương trình với $m = -10$.

2) Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 8.(2 điểm)

Ba số dương x, y, z thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 6.$$

Xét biểu thức $P = x + y^2 + z^3$.

1) Chứng minh rằng $P \geq x + 2y + 3z - 3$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 9. (3 điểm)

Cho tam giác ABC, lấy ba điểm D, E, F theo thứ tự trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AEDF$ là tứ giác nội tiếp. Trên tia AD lấy điểm P (D nằm giữa A và P) sao cho $DA.DP = DB.DC$.

1) Chứng minh rằng tứ giác $ABPC$ nội tiếp, và hai tam giác DEF, PCB đồng dạng với nhau.

(Xem tiếp trang 29)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (2 điểm)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2+3x+3}{x+1} \quad (C)$$

b) Chứng minh rằng qua điểm $M(-3;\ 1)$ kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Câu 2. (2 điểm)

Giải các phương trình :

a) $3^{\log_2 x} = x^2 - 1$;

b) $\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}(\sin x + 1)$.

Câu 3. (2 điểm)

a) Tìm m để bất phương trình sau đây có nghiệm:

$$x + 2 - m\sqrt{x^2+1} < 0.$$

b) Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}}\,dx$.

Câu 4. (2 điểm)

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho parabol (P): $y^2 = x$ và điểm $M\ (1;\ -1)$. Giả sử A, B là hai điểm phân biệt, khác M, thay đổi trên (P) sao cho MA và MB luôn vuông góc với nhau. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

b) Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho điểm $A(1;\ -1;\ 1)$ và hai đường thẳng (d_1), (d_2) theo thứ tự có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = -t \\ y = -1+2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad (d_2): \begin{cases} 3x+y-z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng (d_1), (d_2) và A cùng nằm trong một mặt phẳng.

Câu 5. (2 điểm)

a) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó không có mặt chữ số 2.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$Q = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}$, với x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z \geq 6$.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 1

(Đề đăng trên THTT số 343, tháng 1 năm 2006)

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) PT đường thẳng d_k có dạng $y = kx - 1$, d_k cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ PT $2x^3 - 3x^2 - 1 = kx - 1$ có ba nghiệm phân biệt hay PT $2x^2 - 3x - k = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Đáp số: $k > -\frac{9}{8}$ và $k \neq 0$.

Câu 2. 1) PT đường thẳng chứa cạnh AB : $x - 3y = 1$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-3y=1 \end{cases}$

$\Rightarrow B(-5,\ -2)$. PT đường thẳng chứa cạnh AC : $2x + y = 2$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+y=1 \end{cases} \Rightarrow C\ (-1;\ 4).$$

Giả sử PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Vì đường tròn này đi qua A, B, C nên ta có $\begin{cases} a + c = -1 \\ -5a-2b+c = -29 \\ -a+4b+c = -17. \end{cases}$

Giải hệ trên ta có $a = \frac{36}{7}$; $b = -\frac{10}{7}$; $c = -\frac{43}{7}$.

Vậy PT đường tròn ngoại tiếp ΔABC là

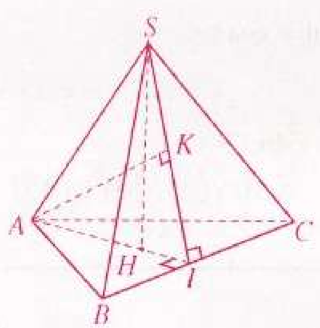
$$x^2 + y^2 + \frac{36}{7}x - \frac{10}{7}y - \frac{43}{7} = 0.$$

2) Trực tâm H của ΔABC trong không gian $Oxyz$ là giao của ba mặt phẳng: mp(ABC), mp(P) đi qua A vuông góc với BC, mp(Q) đi qua B vuông góc với AC. Mp (ABC) đi qua $A(3; 0; 0)$ nhận $\overrightarrow{BC} = (0; -2; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 1)$ làm cặp vectơ chỉ phương có PT $2x + 3y + 6z - 6 = 0$; mp(P) đi qua $A(3; 0; 0)$ nhận $\overrightarrow{BC} = (0; -2; 1)$ làm vectơ pháp tuyến (VTPT) có PT: $-2y + z = 0$. Mp(Q) đi qua $B(0; 2; 0)$ nhận $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 1)$ làm VTPT có PT: $-3x + z = 0$.

Vậy tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z = 6 \\ -2y + z = 0 \\ -3x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12/49 \\ y = 18/49 \\ z = 36/49 \end{cases}$$

Vậy H có tọa độ $\left(\frac{12}{49}; \frac{18}{49}; \frac{36}{49}\right)$.



3) Giả sử H là tâm tam giác đều ABC, đường thẳng AH cắt BC tại I. Trong mặt phẳng (SIA) dựng $AK \perp SI$ khi đó $AK \perp$ mp(SBC).

Ta có

$SH^2 = SA^2 - AH^2$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2},\ SI = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Vì $AI.SH = SI.AK$ nên $AK = \dfrac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.

Câu 3. 1) ĐK $x^2 \geq 5$. Đặt $2^{x - \sqrt{x^2 - 5}} = t$. PT đã cho trở thành $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = 4$.

Trở lại với PT ẩn x, ta tìm được hai nghiệm PT đã cho là $x = 3$ và $x = \frac{9}{4}$.

2) ĐK $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$.

PT đã cho tương đương với

$$2\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0.$$

Chú ý đến điều kiện trên ta thấy

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 4. 1) Ta có

$$I = \int_0^1 \left(2.\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{1}{x^2+3x+2}\right)dx$$

$$= \left(2\ln|x^2+3x+2| - \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right)\Bigg|_0^1 = \ln\frac{27}{4}.$$

2) Số cách chọn ngẫu nhiên 8 học sinh (HS) trong số 18HS trên đi dự trại hè là C_{18}^8. Trong các cách chọn trên có hai khả năng xảy ra.

(a) Số cách chọn có đủ HS ba khối.

(b) Số cách chọn không có đủ HS ba khối.

Ta tìm số cách chọn ứng với khả năng (b). Vì mỗi khối không đủ 8HS nên số cách chọn 8HS không đủ ba khối phải bao gồm hai khối.

Số cách chọn 8HS gồm khối 10 và 11 là C_{11}^8

Số cách chọn 8HS gồm khối 11 và 12 là C_{13}^8

Số cách chọn 8HS gồm khối 12 và 10 là C_{12}^8.

Do đó số cách chọn theo yêu cầu đề bài là

$$C_{18}^8 - (C_{11}^8 + C_{13}^8 + C_{12}^8) = 304351.$$

Câu 5. Ta có

$$Q = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} - (1 - \cos^2 C)$$

$$= \cos^2 C + \cos C.\cos(A - B)$$

$$= \left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2 - \frac{1}{4}\cos^2(A - B)$$

$$\geq -\frac{1}{4}\cos^2(A - B) \geq -\frac{1}{4}. \quad Q_{\min} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = -\frac{1}{2}\cos(A - B) \\ \cos^2(A - B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 120^o \\ A = B = 30^o. \end{cases}$$

PHAN TUẤN CỘNG

(GV THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương)

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT VỀ SỐ PHẦN TỬ CỦA TẬP HỢP ĐỂ GIẢI TOÁN

ĐỖ THANH HÂN
(GV trường THPT chuyên Bạc Liêu)

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT (Bảng B) năm 2005, có một bài toán liên quan đến tính chất cơ bản của số phần tử của tập hợp mà không ít học sinh đã không giải được bài toán đó.

Bài viết này xin trình bày một vài tính chất cơ bản liên quan đến số phần tử của tập hợp (việc chứng minh xin nhường cho bạn đọc), và đưa ra lời giải một số bài toán có áp dụng các tính chất đó.

I. Các tính chất cơ bản về số phần tử của tập hợp hữu hạn

(Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp hữu hạn A).

Tính chất 1. Giả sử A, B là hai tập hợp hữu hạn. Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Tính chất 2. Với hai tập hợp hữu hạn bất kì A và B, ta luôn có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Hệ quả 2.1. Với A, B là hai tập hợp hữu hạn bất kì, ta luôn có $|A \cup B| \leq |A| + |B|$. Đẳng thức xảy ra khi $A \cap B = \varnothing$.

Hệ quả 2.2. Với ba tập hợp hữu hạn bất kì A, B và C, ta luôn có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Tính chất 3. Giả sử A, B là hai tập hợp hữu hạn. Nếu $B \subset A$ thì $|A \setminus B| = |A| - |B|$.

Hệ quả 3.1. Giả sử A, B là hai tập hợp hữu hạn. Nếu $B \subset A$ thì $|B| \leq |A|$.

II. Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. *Trong một đề thi có ba câu: một câu về Số học, một câu về Giải tích, một câu về Hình học. Trong 60 thí sinh dự thi, có 48 thí sinh giải được câu Số học, 40 thí sinh giải được câu Giải tích, 32 thí sinh giải được câu Hình học. Có 57 thí sinh giải được câu Số học hoặc Giải tích, 50 thí sinh giải được câu Giải tích hoặc Hình học, 25 thí sinh giải được cả hai câu Số học và Hình học, 15 thí sinh giải được cả ba câu. Hỏi có bao nhiêu thí sinh không giải được câu nào?*

Lời giải. Kí hiệu T là tập hợp tất cả các thí sinh. A, B, C lần lượt là tập hợp các thí sinh giải được câu Số học, Giải tích, Hình học. Theo tính chất 2 ta có:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 48 + 40 - 57 = 31$$
$$|B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C| = 40 + 32 - 50 = 22.$$

Nên: $|A \cup B \cup C| =$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$
$$= 48 + 40 + 32 - 31 - 22 - 25 + 15 = 57.$$

Vì $(A \cup B \cup C) \subset T$ nên theo tính chất 3 ta có

$$|T \setminus (A \cup B \cup C)| = |T| - |A \cup B \cup C| = 60 - 57 = 3.$$

Vậy có 3 thí sinh không giải được câu nào.

Bài toán 2. *Khi điều tra kết quả học tập các môn Toán, Lí, Hóa của một lớp có 45 học sinh, người ta nhận thấy: có 19 học sinh không giỏi môn nào, 18 học sinh giỏi Toán, 17 học sinh giỏi Lí, 13 học sinh giỏi Hóa, 10 học sinh giỏi hai môn Toán và Lí, 9 học sinh giỏi hai môn Lí và Hóa, 10 học sinh giỏi hai môn Toán và Hóa. Hỏi có bao nhiêu học sinh giỏi cả ba môn?*

Lời giải. Kí hiệu T là tập hợp học sinh của lớp. A, B, C lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Lí, Hóa của lớp đó.

Vì $A \cup B \cup C = T \setminus [T \setminus (A \cup B \cup C)]$ nên số học sinh giỏi ít nhất một môn là

$$|A \cup B \cup C| = |T| - |T \setminus (A \cup B \cup C)| = 45 - 19 = 26.$$

Từ hệ quả 2.2 suy ra số học sinh giỏi cả ba môn là

$|A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C|$
$+ |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$
$= 26 - 18 - 17 - 13 + 10 + 9 + 10 = 7.$

Bài toán 3. *Tìm hiểu kết quả học tập ở một lớp học, người ta thấy:*

• *Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Toán cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Vật lí;*

• *Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Vật lí cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Văn;*

• *Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Văn cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử;*

• *Hơn $\frac{2}{3}$ số học sinh đạt điểm giỏi ở môn Lịch sử cũng đồng thời đạt điểm giỏi ở môn Toán;*

Chứng minh rằng trong lớp học nói trên có ít nhất một học sinh đạt điểm giỏi ở cả bốn môn Toán, Vật lí, Văn và Lịch sử.

(Đề thi HSG Quốc gia THPT Bảng B – 2005)

Lời giải. Kí hiệu T, L, V, S lần lượt là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Vật lí, Văn, Lịch sử.

Theo đề bài, ta có

$$|T \cap L| > \frac{2}{3}|T|, \qquad |L \cap V| > \frac{2}{3}|L|,$$
$$|V \cap S| > \frac{2}{3}|V|, \qquad |S \cap T| > \frac{2}{3}|S| \quad (*)$$

Ta giải bài toán bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không có học sinh nào đạt điểm giỏi ở cả bốn môn Toán, Vật lí, Văn và Lịch sử, khi đó chỉ còn: $T \cap V = \varnothing$ hoặc $L \cap S = \varnothing$.

• Nếu $T \cap V = \varnothing$ thì $(T \cap L) \cap (L \cap V) = \varnothing$ và $(T \cap S) \cap (S \cap V) = \varnothing$.

Mà $(T \cap L) \cup (L \cap V) \subset L$ và $(T \cap S) \cup (S \cap V) \subset S$,

nên $|T \cap L| + |L \cap V| \le |L|$ và $|T \cap S| + |S \cap V| \le |S|$ (theo hệ quả 3.1).

Suy ra

$$|T \cap L| + |L \cap V| + |T \cap S| + |S \cap V| \le$$
$$\le |L| + |S| \qquad (1)$$

Mặt khác, từ (*) ta có:

$$|T \cap L| + |L \cap V| + |T \cap S| + |S \cap V| >$$
$$> \frac{2}{3}(|T| + |L| + |V| + |S|).$$

Mà $\frac{2}{3}(|T| + |L| + |V| + |S|) =$

$$= \frac{1}{3}[(|T| + |L|) + (|T| + |S|) + (|L| + |V|) + (|S| + |V|)] =$$
$$= \frac{1}{3}\left(|T \cup L| + |T \cap L| + |T \cup S| + |T \cap S| + |L \cup V| + \right.$$
$$\left. + |L \cap V| + |S \cup V| + |S \cap V|\right),$$

nên $2(|T \cap L| + |L \cap V| + |V \cap S| + |S \cap T|) >$
$> |T \cup L| + |T \cup S| + |L \cup V| + |S \cup V| \ge$
$\ge |L| + |S| + |L| + |S|.$

Suy ra $|T \cap L| + |L \cap V| + |T \cap S| + |S \cap V|$
$> |L| + |S| \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta gặp mâu thuẫn nên điều giả sử ban đầu là sai.

• Nếu $L \cap S = \varnothing$ lập luận tương tự cũng dẫn đến điều mâu thuẫn. Bài toán được chứng minh.

Các bạn hãy áp dụng các tính chất trên để giải các bài tập tương tự sau:

Bài 1. Một lớp học có 42 học sinh. Biết rằng trong lớp có 26 học sinh giỏi Toán, 24 học sinh giỏi Hóa, 21 học sinh giỏi Sinh, 32 học sinh giỏi Toán hoặc Sinh, 35 học sinh giỏi Toán hoặc Hóa, 32 học sinh giỏi Hóa hoặc Sinh, 11 học sinh giỏi cả ba môn. Hỏi:

a) Có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi một môn?

b) Có bao nhiêu học sinh không giỏi môn nào?

Bài 2. Trong kì thi tuyển sinh vào một trường Đại học, người ta nhận thấy: có 58 thí sinh được điểm 10 Toán, 47 thí sinh được điểm 10 Lí, 42 thí sinh được điểm 10 Hóa, 87 thí sinh được điểm 10 Toán hoặc Lí, 76 thí sinh được điểm 10 Lí hoặc Hóa, 82 thí sinh được điểm 10 Toán hoặc Hóa, có 5 thí sinh được điểm 10 cả ba môn. Hỏi:

a) Có bao nhiêu thí sinh được ít nhất một điểm 10?

b) Có bao nhiêu thí sinh chỉ được đúng một điểm 10?

LỜI GIẢI BÀI THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 46

NĂM 2005

(Tiếp theo kì trước)

VŨ ĐÌNH HÒA
(*GV trường ĐHSP Hà Nội*)

NGÀY THỨ HAI

Bài 4. *Xét dãy số a_1, a_2, ... được xác định như sau: $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ ($n = 1, 2, ...$).*

Tìm tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với mọi số hạng của dãy số trên.

Lời giải. Ta khẳng định số 1 là số cần tìm duy nhất. Ta chỉ cần chứng minh rằng mỗi số nguyên tố p là ước của một số hạng a_n nào đó là đủ. Khẳng định của ta đúng cho $p = 2$ và $p = 3$ vì $a_2 = 48$.

Bây giờ xét một số nguyên tố $p > 3$ bất kì. Theo định lí Fermat nhỏ, số dư của số 2^{p-1}, 3^{p-1} và 6^{p-1} trong phép chia cho p đều là 1. Suy ra số dư của tổng $3.2^{p-1} + 2.3^{p-1} + 6^{p-1}$ trong phép chia cho p là $3 + 2 + 1 = 6$. Do đó tổng

$3.2^{p-1} + 2.3^{p-1} + 6^{p-1} = 6.2^{p-2} + 6.3^{p-2} + 6.6^{p-2}$

có số dư 6 trong phép chia cho p.

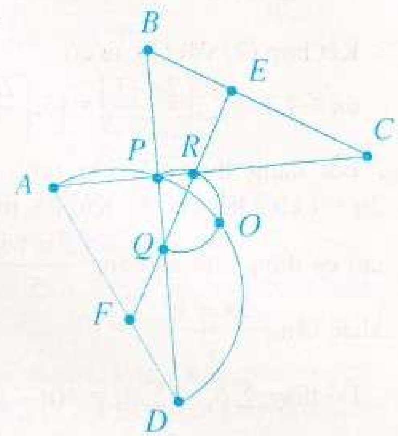
Suy ra $a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$ chia hết cho p, bài toán được chứng minh.

Bài 5. *Cho ABCD là một tứ giác lồi có các cạnh BC và AD bằng nhau và không song song với nhau. E và F lần lượt là các điểm nằm ở phần trong các cạnh BC và AD sao cho BE = DF. Các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại P, các đường thẳng BD và EF cắt nhau tại Q, các đường thẳng EF và AC cắt nhau tại R. Chứng minh rằng khi E và F thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định thứ hai khác P.*

Lời giải. (Lời giải của tác giả). Ta có các bổ đề quen biết sau đây (dành cho bạn đọc tự chứng minh như bài tập).

Bổ đề 1. Tứ giác lồi *ABCD* có giao điểm các cặp cạnh đối diện là *E* và *F*. Khi đó bốn đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ABF*, *ADE*, *DCF* và *BCE* đồng quy.

Bổ đề 2. Trong một phép quay tâm *O*, góc quay α tùy ý điểm *X* biến thành *X'* và điểm *Y* biến thành *Y'*. Khi đó *O* nằm trên đường tròn (*PXY*), với *P* là giao điểm của *XX'* và *YY'*. (Suy ra từ bổ đề 1, áp dụng vào tứ giác *IY'PX*, với *I* là giao điểm của *XY* và *X'Y'*).



Trở lại bài toán, gọi *O* là tâm của phép quay biến *A* thành *C* và *D* thành *B* (từ giả thiết *BC* và *AD* bằng nhau và không song song với nhau, luôn tồn tại một phép quay như vậy). Trong phép quay này *F* biến thành *E*. Ta có *O* nằm trên các đường tròn (*FQD*) và (*ARF*) theo bổ đề 2. Theo bổ đề 1, *O* nằm trên đường tròn (*PQR*), là điều cần phải chứng minh.

Bài 6. *Trong một kì thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng với hai bài toán bất kì luôn có nhiều hơn $\frac{2}{5}$ số thí sinh dự thi giải được cả hai bài này. Ngoài ra, không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thí sinh sao cho mỗi người trong họ giải được đúng 5 bài toán.*

Lời giải. (Lời giải của tác giả). Gọi các thí sinh là $C_1, C_2, ..., C_n$ và các bài thi là $P_1, P_2, ..., P_6$. Kí hiệu a_i là số bài giải được của thí sinh C_i và b_j là số thí sinh giải được bài P_j, ta có thể giả sử không mất tính tổng quát là $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 4$ và $a_n = 5$. Với mỗi bộ (P_i, P_j, C_t) gồm 2 bài $P_i \neq P_j$, và thí sinh C_t, ta gán cho (kí hiệu : =), hàm $\chi(P_i, P_j, C_t)$ giá trị 1 nếu C_t giải được P_i và P_j, và giá trị 0 nếu C_t không giải được P_i hoặc P_j. Bây giờ ta sẽ xét tổng $N = \sum \chi(P_i, P_j, C_t)$. Theo giả thiết, với mỗi cặp P_i và P_j cố định, có $a_{ij} := \sum_{t=1}^{n} \chi(P_i, P_j, C_t) \geq \frac{2n+1}{5}$, cho nên

$$N \geq C_6^2 \cdot \left\lceil \frac{2n+1}{5} \right\rceil \qquad (1)$$

(*Phần nguyên trên* của số thực a là số nguyên nhỏ nhất mà không bé hơn a, kí hiệu là $\lceil a \rceil$, nghĩa là $\lceil a \rceil - 1 < a \leq \lceil a \rceil$). Mặt khác, ta có

$$N = \sum \chi(P_i, P_j, C_t) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} C_{a_t}^2 = (n-1)C_4^2 + C_5^2 = 6n + 4. \qquad (2)$$

Kết hợp (2) với (1), ta có

$$6n + 4 \geq C_6^2 \cdot \left\lceil \frac{2n+1}{5} \right\rceil = 15.\left\lceil \frac{2n+1}{5} \right\rceil \qquad (3)$$

Bất đẳng thức (3) chỉ thỏa mãn được khi $2n + 1$ chia hết cho 5. Khi đó, trong các a_{ij} này, chỉ có đúng một số bằng $\frac{2n+1}{5}+1$, còn các số khác bằng $\frac{2n+1}{5}$. (4)

Dễ thấy $\sum b_k = \sum a_k = 4(n-1) + 5 = 4n + 1$, suy ra tồn tại k_1 sao cho $b_{k_1} \leq \frac{4n+1}{6}$ và $b_{k_2} \geq \frac{4n+1}{6}$. Do số $\frac{4n+1}{6}$ không phải là số nguyên, cho nên ta có $b_{k_1} + 1 \leq b_{k_2}$.

Với mỗi j cố định, xét tổng

$$N_j = \sum_{i \neq j} a_{ij} = \sum_{i \neq j} \chi(P_i, P_j, C_t) = \sum_{t=1}^{n} b_{jt},$$

với $b_{jt} = \sum_{i \neq j} \chi(P_i, P_j, C_t)$.

Lưu ý b_{jt} bằng 0 nếu C_t không giải được bài P_j, bằng 3 nếu C_t giải được 4 bài trong đó có P_j, và bằng 4 nếu như C_t giải được 5 bài trong đó có bài P_j. Như vậy, $N_j = 3b_j$ nếu C_n không giải được bài P_j, hoặc $3b_j+1$ nếu C_n giải được bài P_j. Mặt khác, theo (4), N_j hoặc bằng

$$5.\left(\frac{2n+1}{5}\right) = 2n + 1, \text{ hoặc bằng}$$

$$4.\left(\frac{2n+1}{5}\right) + \left(\frac{2n+1}{5} + 1\right) = 2n + 2.$$

Từ đó, ta có bất đẳng thức $2n \leq 3b_t \leq 2n+2$ với mọi $t \leq n$. Nhưng thấy ngay là bất đẳng thức cuối này không thể thỏa mãn cho đồng thời b_{k_1} và $b_{k_2} \geq b_{k_1} + 1$. Bài toán được chứng minh.

X hỏi ? Y, Z trả lời.

TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

1. (12.05). HAI ĐÁP ÁN TRONG MỘT ĐỀ TOÁN

Sau khi phân công ba nhóm thanh niên vào ba tỉnh rồi thì phép đổi chỗ cũng không tạo ra cách mới. Mỗi phép đổi chỗ như vậy đã được tính vào trong $C_3^1C_{12}^4.C_2^1C_8^4.C_1^1C_4^4$. Vậy lời giải 1 là đúng.

(*Chu Quốc Hùng*, Vinh, **Nghệ An**)

Do bài toán thực hiện như vậy nên kết quả đúng ở lời giải 1 nhưng nên thêm lập luận: Nếu đổi chỗ ba nhóm thanh niên về ba tỉnh khác nhau thì các trường hợp khi đổi chỗ trùng với các trường hợp vừa tìm ra. Vậy có tất cả 207900 cách phân công.

(*Phạm Văn Tiệp*, 12A1, THPT Nam Sách, **Hải Dương**)

HỎI - SỐ NÀY

1. (2.06). Tôi đã rất nhiều lần giải bài toán: "*Giải phương trình lượng giác*

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1$"

mà chưa có kết quả. Các bạn có thể giúp tôi tìm ra nghiệm của nó được không?

(*L.H.T.* 12A11, THPT Ngọc Lặc, **Thanh Hóa**)

BNH.

LTS. Tòa soạn nhận được lời giải và lời bình một số bài trong kì thi IMO 46 (năm 2005) của các bạn: *Trần Ngọc Thắng* (GV THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**) (**bài 1**); *Đoàn Ngọc Lân* (508 E1 - Thành Công, **Hà Nội**) (**bài 3, bài 5**); *Lê Văn Quang* (GV trường Quốc học **Huế**), *Tạ Duy Minh*, (số 4, ngõ 184, Vương Thừa Vũ, Khương Trung, Thanh Xuân, **Hà Nội**), *Nguyễn Hoài Phương* (12A1, khối PTCTT - ĐHSP **Hà Nội**) (**bài 6**); *Huỳnh Kim Triển*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**) (**bài 3, bài 6**). Xin cảm ơn các bạn.

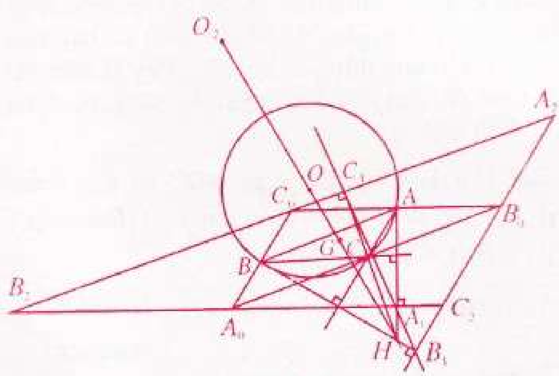
ỨNG DỤNG GÓC ĐỊNH HƯỚNG VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN MINH HÀ
(GV ĐHSP Hà Nội)

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) và trực tâm H. Gọi A_1, B_1, C_1 là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB theo thứ tự. Chứng minh rằng: A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi OH = 2R.*

Lời giải. (h. 6)



Hình 6

Qua A_1, B_1, C_1 theo thứ tự dựng các đường thẳng song song với BC, CA, AB. Các đường thẳng này đôi một cắt nhau tại A_2, B_2, C_2. Gọi A_0, B_0, C_0 là trung điểm của B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 theo thứ tự. Dễ thấy A, B, C theo thứ tự là trung điểm của B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 và các tam giác ABC, $A_2B_2C_2$, $A_0B_0C_0$ có cùng trọng tâm. Ta kí hiệu trọng tâm chung của chúng là G.

Ta thấy:

$$\Delta ABC \xrightarrow{V_G^{-2}} \Delta A_0B_0C_0 \xrightarrow{V_G^{-2}} \Delta A_2B_2C_2 \quad (1)$$

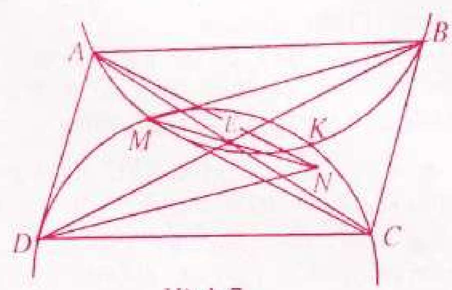
Giả sử (O_2, R_2) là đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$. Từ (1) dễ thấy $R_2 = 4R$. Cũng từ (1), cùng với chú ý về đường thẳng Euler, ta có: $GO_2 = 4GO \Rightarrow O_2H = 2OH$ (vì $OH = 3OG$).

Vậy theo bài toán (BT) 4, ta có : A_1, B_1, C_1 thẳng hàng $\Leftrightarrow$ các hình chiếu của H trên B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 thẳng hàng $\Leftrightarrow$ H thuộc đường tròn tâm O_2 ngoại tiếp $\Delta A_2B_2C_2 \Leftrightarrow O_2H = R_2$

$\Leftrightarrow 2OH = 4R \Leftrightarrow OH = 2R$ (đpcm).

Bài toán 7. *Cho hình bình hành ABCD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Xét hai điểm M, N đối xứng với nhau qua E và M không nằm trên các đường thẳng AB, CD còn N không nằm trên các đường thẳng AD, BC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác ABM, CDM, ADN, CBN cùng đi qua một điểm.*

Lời giải. (h. 7).



Hình 7

Nếu hai đường tròn (ABM) và (CDM) cắt nhau thì ta gọi điểm chung khác M của chúng là K. Nếu hai đường tròn (ABM), (CDM) tiếp xúc với nhau tại M thì K trùng với M, lúc đó đường thẳng MK được hiểu là tiếp tuyến chung của (ABM) và (CDM). Với quy ước trên, ta có:

$(KA, KD) \equiv (KA, KM) + (KM, KD) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (KA, KD) \equiv (BA, BM) + (CM, CD) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (KA, KD) \equiv (CD, DN) + (AN, CD) \pmod{\pi}$

(vì $AB // CD$, $BM // DN$, $CM // AN$).

Suy ra: $(KA, KD) \equiv (NA, ND) \pmod{\pi}$

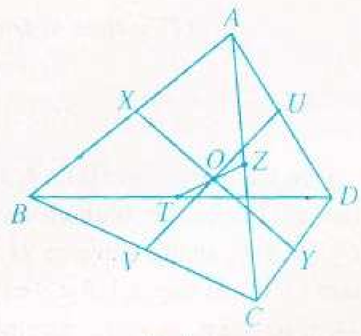
nên K thuộc đường tròn (ADN) (1)

Tương tự, K thuộc đường tròn (CBN) (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài toán 8. *Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng các đường tròn Euler của bốn tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cùng đi qua một điểm.*

Lời giải. (h. 8).



Hình 8

Gọi X, Y, Z, T, U, V là trung điểm của AB, CD, AC, DB, AD, BC theo thứ tự. Kết quả sau đây là quen thuộc: XY, ZT, UV đồng quy tại trung điểm mỗi đường. Ta kí hiệu trung điểm chung của chúng là O.

Áp dụng kết quả nhận được trong BT7 cho hình bình hành $XUYV$ và hai điểm Z, T, ta thấy các đường tròn (YTV), (UZY), (XTU), (VZX) cùng đi qua một điểm (1).

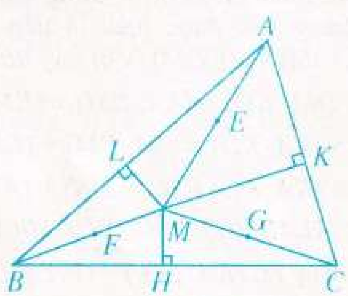
Mặt khác, các đường tròn (YTV), (UZV), (XTU), (VZX) theo thứ tự là đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC (2).

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Nhận xét. Trong BT8, có thể thay giả thiết "tứ giác $ABCD$" bằng giả thiết "bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng".

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi (ω_A), (ω_B), (ω_C) theo thứ tự là ảnh của các đường tròn (MBC), (MCA), (MAB) qua các phép đối xứng trục BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn (ω_A), (ω_B), (ω_C) cùng đi qua một điểm và trung điểm của đoạn thẳng nối điểm đó với M thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Lời giải. (h. 9).



Hình 9

Gọi H, K, L là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự. Gọi E, F, G là trung điểm của các đoạn MA, MB, MC theo thứ tự. Qua phép vị tự tâm M, tỉ số 1/2, dễ thấy

$$V_M^{1/2} : (\omega_A) \to (HGF)\ ; (\omega_B) \to (KEG)$$
$$(\omega_C) \to (LFE) \qquad (1)$$

Mặt khác, vì các đường tròn (HGF), (KEG), (LFE) theo thứ tự là đường tròn Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB nên theo nhận xét cuối BT8 với bộ bốn điểm A, B, C, M ta có:

Các đường tròn (HGF), (KEG), (LFE) cùng đi qua một điểm thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi điểm này là P. Đặt $Q = V_M^2(P)$ (2).

Từ (1), (2) ta có: Các đường tròn (ω_A), (ω_B), (ω_C) cùng đi qua điểm Q và trung điểm của MQ chính là P (thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC).

Chín bài toán trên không thể giới thiệu đầy đủ vai trò của góc định hướng trong việc giải toán hình học. Tuy nhiên, do khuôn khổ có hạn của bài báo, xin tạm dừng ở đây. Sau đây là một vài bài toán để bạn đọc rèn luyện kĩ năng sử dụng góc định hướng.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 thỏa mãn điều kiện: $A_1B = A_1C$; $B_1C = B_1A$; $C_1A = C_1B$ và

$$(\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1B}) + (\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1C}) + (\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{C_1A}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Chứng minh rằng:

$$(A_1B_1, A_1C_1) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1B}) \pmod{\pi};$$

$$(B_1C_1, B_1A_1) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1C}) \pmod{\pi};$$

$$(C_1A_1, C_1B_1) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{C_1A}) \pmod{\pi}.$$

Bài tập 2. Cho tứ giác $ABCD$. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác đồng dạng ADE, BCF. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn AB, DC, EF sao cho $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{AD}{BC}$.

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng Δ đi qua O. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên Δ. Các đường thẳng $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ theo

BẠN CÓ BIẾT ?

NHÀ TOÁN HỌC VÀ NHÀ VUA

Một hôm, nhà toán học làm việc trong triều đình, sau khi nhận được lương, liền chia số tiền lương ra 9 phần (không bằng nhau) rồi xếp vào 9 ô thành một ma phương bậc 3. (Ma phương bậc 3 là một bảng gồm 9 số được xếp thành 3 hàng và 3 cột sao cho tổng ba số ở mỗi hàng bằng tổng ba số ở mỗi cột và bằng tổng ba số theo mỗi đường chéo). Nhà vua đi qua, vốn là người thích toán, sau khi nhẩm tính số tiền đã xếp ở mỗi ô, tỏ lời khen ngợi nhà toán học đã khéo xếp số tiền thành một ma phương, nhưng nhà vua cũng tỏ ý lấy làm tiếc rằng trong ma phương không có số nào là số nguyên tố.

Nhà toán học tâu với nhà vua rằng nếu nhà vua cho tăng thêm 9 lia, mỗi ô thêm 1 lia (lia là đơn vị tiền Italia) thì cả 9 ô sẽ đều là số nguyên tố. Nhà vua tính thử thấy đúng như vậy, liền đồng ý tăng lương cho nhà toán học.

Vừa lúc ấy chàng hề đi đến. Biết chuyện, anh chàng liền lấy bớt đi mỗi ô 1 lia ở bảng ban đầu thì cả 9 ô cũng là các số nguyên tố.

Hỏi lương nhà toán học là bao nhiêu lia?

Lời giải

Kí hiệu a_{ij} là số hạng của ma phương ở dòng thứ i và cột thứ j ($1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 3$). Ta có $a_{33} = \frac{1}{3}$ hằng số ma phương. Nhận xét: để a_{ij} là số nguyên tố thì nó phải là số lẻ và không tận cùng là 5. Do đó với ma phương mà chàng hề đã lấy đi 9 lia thì a_{ij} chỉ có thể tận cùng là 1 hoặc 7 hoặc 9. Ma phương đó có các số hạng là các số nguyên tố có các chữ số tận cùng có dạng như sau (sai khác một phép quay nào đó với tâm ở số chính giữa):

1	7	9
7	9	1
9	1	7

Trong 2000 số tự nhiên đầu tiên có 61 cặp số nguyên tố sinh đôi. Có 10 giá trị $2P$ (P là số nguyên tố và $2P$ có thể tách thành 4 cặp số nguyên tố khác nhau) là 298, 838, 1318, 1618, 1762, 2038, 2098, 2122, 2182, 2638.

Nghiệm nhỏ nhất phù hợp với yêu cầu của đề bài là

192	18	240
198	150	102
60	282	108

Bớt 1 ở mỗi ô được ma phương

191	17	239
197	149	101
59	281	107

Thêm 1 ở mỗi ô được ma phương

193	19	241
199	151	103
61	283	109

Lương nhà toán học tương ứng là

$$9 \times 150 = 1350 \text{ (lia)}.$$

Có thể kể thêm 2 nghiệm khác:

2088	1302	4800
5442	2730	18
660	4158	3372

ứng với lương 24570

6198	5502	3330
2142	5010	7878
6690	4518	3822

ứng với lương 45090

PHẠM HUY THÔNG *(Hà Nội)*
(dựa theo bài của G.W.Walker)

---

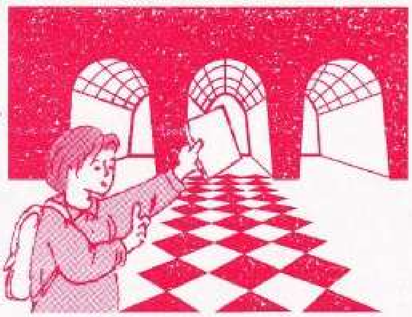
thứ tự đi qua A_1, B_1, C_1 và vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.

Bài tập 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ cắt (O) tại A_1, B_1, C_1 theo thứ tự. M là một điểm thuộc (O). Giả sử Δ_1 là đường thẳng Simson của các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ ứng với điểm M theo thứ tự. Chứng minh rằng $\Delta \perp \Delta_1$.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P (khác A, B, C) theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn (ANP), (BPM), (CMN) cùng đi qua một điểm.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC và điểm P không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AP, BP, CP theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB', APC', BPC', BPA', CPA', CPB' cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi P là trọng tâm hoặc trực tâm của tam giác ABC.

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP



HÀM KHOẢNG CÁCH

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Nội dung của các bài toán liên quan *đến bất đẳng thức hàm* rất phong phú. Chúng thường được gắn kết với việc xác định các lớp hàm số cụ thể theo các điều kiện ràng buộc cho trước. Chẳng hạn, khi xét cặp số không âm x, y thỏa mãn ràng buộc $x + y = 1$ thì ta có hàng loạt bất đẳng thức liên quan đến cặp số x, y này, như

$$2(x^2 + y^2) \geq 1;\ 4(x^3 + y^3) \geq 1\ ;\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1;...$$

Từ đây, một câu hỏi tự nhiên nảy sinh là:

Với những hàm số $f(x)$ nào xác định trên $[0, 1]$ có tính chất $f(x) + f(y) \geq 1$ ứng với mọi cặp số không âm x, y thỏa mãn ràng buộc $x + y = 1$?

Những bài toán kiểu như vậy thường được gọi là bất đẳng thức hàm thuộc các dạng toán về bất phương trình hàm. Trong bài này, chúng tôi giới thiệu ngắn gọn một vài lớp hàm số có tính chất tương tự như khoảng cách trong đo lường.

1. Hàm khoảng cách một biến

Với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ ta đặt tương ứng một điểm $A(x, 0)$ trên trục hoành của mặt phẳng tọa độ Descartes. Nhận xét rằng phép tương ứng đó là $1 - 1$ và khoảng cách từ A đến gốc tọa độ $O\,(0; 0)$ được tính bằng công thức $\rho(OA) = \rho(x) = |x|$. Khi đó, hàm $\rho(x)$ có các tính chất sau:

(i) $\rho(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\ ; \rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(ii) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1. *Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ được gọi là **hàm khoảng cách** nếu nó thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:*

(i) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (1)

(ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Thí dụ 1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $\alpha \in (0; 1]$.

Lời giải. Nhận xét rằng hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ thỏa mãn điều kiện (1) khi và chỉ khi $\alpha > 0$. Xét điều kiện (2) với $x + y = 0$ thì tính chất (2) luôn luôn thỏa mãn.

- Trường hợp $x > 0, y > 0$. Khi đó

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| + \left|\frac{y}{x+y}\right| = 1.$$

Vì vậy $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|^\alpha + \left|\dfrac{y}{x+y}\right|^\alpha \geq 1,\ \forall \alpha \in (0; 1]$

và $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|^\alpha + \left|\dfrac{y}{x+y}\right|^\alpha < 1,\ \forall \alpha \in (1; +\infty).$

Vậy, khi $\alpha > 1$ thì hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ không thỏa mãn điều kiện (2).

- Trường hợp $x \geq 0 > y$ và $x + y > 0$. Khi đó

$$\max\left\{\left|\frac{x}{x+y}\right|, \left|\frac{y}{x+y}\right|\right\} > 1$$

nên $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|^\alpha + \left|\dfrac{y}{x+y}\right|^\alpha \geq 1,\ \forall \alpha > 0.$

- Trường hợp $x + y < 0$. Khi đó

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

nên $|x+y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha,\ \forall \alpha > 0.$

Vậy, hàm số $f(x) = |x|^\alpha$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $\alpha \in (0; 1]$.

2. Hàm khoảng cách hai biến

Tương tự, ứng với mỗi cặp số thực $x, y \in \mathbb{R}$ ta đặt tương ứng một điểm $A(x, y)$ trên mặt phẳng tọa độ Descartes. Nhận xét rằng, phép tương ứng đó là $1-1$ và khoảng cách từ $A\,(x, y)$ đến điểm $B(x_1, y_1)$ được tính bằng công thức

$$\rho(AB) = \rho(x - x_1, y - y_1) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

Trường hợp riêng, khoảng cách từ A đến gốc tọa độ $O(0; 0)$ được tính bằng công thức

$$\rho(OA) = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Khi đó, hàm $\rho(x, y)$ có các tính chất sau:

(i) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0; 0)$,

(ii) $\rho(AC) \leq \rho(AB) + \rho(BC), \forall A, B, C$.

Tiếp theo, ta khảo sát các hàm số có tính chất tương tự như hàm $\rho(x, y)$ và một số hàm số liên quan.

Định nghĩa 2. *Hàm số $f(x, y)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ được gọi là **hàm khoảng cách** nếu nó thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:*

i) $f(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \quad (3)$$

ii) $f(x, y) = f(y, x)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

iii) $f(x_1 - x_3, y_1 - y_3) \leq f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) + f(x_2 - x_3, y_2 - y_3), \forall x_j, y_j \in \mathbb{R}; j \in \{1, 2, 3\}$ (4)

Thí dụ 2. Chứng minh rằng hàm số

$f(x, y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $p \geq 1$.

Lời giải. Nhận xét rằng hàm số

$f(x, y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ thỏa mãn điều kiện (3) khi và chỉ khi $p > 0$. Xét điều kiện (4).

Với $p = 1$ thì (4) hiển nhiên thỏa mãn. Xét trường hợp $p > 1$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Hölder ta thu được

$$f(x_1 - x_3, y_1 - y_3) = \left(|x_1 - x_3|^p + |y_1 - y_3|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(|x_1 - x_2|^p + |x_2 - x_3|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(|y_1 - y_2|^p + |y_2 - y_3|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= f(x_1 - x_2, x_2 - x_3) + f(y_1 - y_2, y_2 - y_3).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm khoảng cách khi và chỉ khi $p \geq 1$.

3. Hàm khoảng cách nhiều biến

Tiếp theo, ta xét một dạng bất đẳng thức, thực chất là bất đẳng thức Cauchy, trong hình học gắn với *tích trong* trong không gian tuyến tính, thường được gọi là *Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz*.

Trước hết, ta nhắc lại tích vô hướng đối với cặp vectơ

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n), \quad b = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

trong không gian $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau:

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \quad (5)$$

Để ý rằng, tích vô hướng (5) có các tính chất:

(i) $(a, a) \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, ..., 0)$;

(iii) $(a, b) = (b, a), \forall a, b \in \mathbb{R}^n$;

(iv) $(\alpha a, b) = \alpha(a, b), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}^n$;

(v) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 3. *Không gian vectơ với tích (a, b) có các tính chất từ (i) đến (v) được gọi là không gian với tích trong.*

Thí dụ 3. Giả sử (γ_j) $(j = 1, ..., n)$ là bộ số dương cho trước. Khi đó, tích vô hướng với *trọng* (γ_j)

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j b_j \quad (6)$$

là tích trong, tức là có các tính chất (i) - (v).

Định lí 1. *Đối với mọi không gian với tích trong (a, b), ta đều có bất đẳng thức Cauchy–Schawrz*

$$(a, b) \leq (a, a)^{1/2} (b, b)^{1/2} \quad (7)$$

Đẳng thức xảy ra đối với cặp vectơ a, b khác 0 khi và chỉ khi $b = \lambda a$ với $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Sử dụng tính chất

$$(v - w, v - w) \geq 0$$

ta thu được $(v, w) \leq \frac{1}{2}(v, v) + \frac{1}{2}(w, w)$ (8)

Vì (7) luôn thỏa mãn khi một trong hai vectơ bằng 0 nên ta chỉ xét trường hợp khi các vectơ khác 0.

Ta đặt $\hat{v} = \dfrac{v}{(v, v)^{1/2}}$, $\hat{w} = \dfrac{w}{(w, w)^{1/2}}$,

khi đó, theo (8) thì $(\hat{u}, \hat{w}) \leq 1$. Từ đó, có ngay (7).

Đặc biệt, đối với không gian các hàm số liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ cho trước, ta có bất đẳng thức Bunhiacovski.

Định lí 2. *Với mọi cặp hàm số $(f(t), g(t))$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$, ta đều có*

$$\left(\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_\alpha^\beta (f(t))^2\, dt \,.\, \int_\alpha^\beta (g(t))^2\, dt\,.$$

(Xem tiếp trang 28)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/344. (Lớp 6) Tìm số tự nhiên n sao cho tổng của $2n$ số hạng

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

bằng $\frac{14651}{19800}$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Thừa Thiên – Huế)

Bài T2/344. (Lớp 7) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AG=\frac{1}{3}AB$, E là chân đường vuông góc hạ từ M xuống CG. Các đường thẳng MG và AC cắt nhau tại D. So sánh độ dài DE và BC.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/344. Giải phương trình

$$\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}.$$

HOÀNG ANH TUẤN
(GV Trung tâm GDTX huyện Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T4/344. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

VŨ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T5/344. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn
$$a^2+b^2+c^2=3.$$

TẠ HOÀNG THÔNG
(SV Toán 2001, ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Bài T6/344. Cho X là một điểm nằm trên cạnh AB của hình bình hành $ABCD$. Đường thẳng qua X song song với AD, cắt AC tại M và cắt BD tại N. XD cắt AC tại P và XC cắt BD tại Q. Chứng minh rằng $\frac{MP}{AC}+\frac{NQ}{BD}\geq\frac{1}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HÀN NGỌC ĐỨC
(SV K47A2 Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T7/344. Cho tam giác ABC với các đường cao AM, BN và nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên đường tròn đó mà khác A, B và DA không song song với BN. Các đường thẳng DA và BN cắt nhau tại Q. Các đường thẳng DB và AM cắt nhau tại P. Chứng minh rằng khi D di động trên đường tròn (O) thì trung điểm của đoạn PQ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/344. Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng

$$\sum_{j=0}^{p}C_p^jC_{p+j}^j-(2^p+1)$$

chia hết cho p^2, trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n.

LƯU BÁ THẮNG
(GV khoa Toán ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/344. Xét dãy $(f_n(x))$ (n = 0, 1, 2, ...) các hàm số xác định trên $[0; 1]$ thỏa mãn

$$f_0(x)=0 \text{ và } f_{n+1}(x)=f_n(x)+\frac{1}{2}(x-(f_n(x))^2)$$

với n = 0, 1, 2, ...

Chứng minh rằng $\frac{nx}{2+n\sqrt{x}}\leq f_n(x)\leq\sqrt{x}$

với $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0;1]$.

TRẦN NGUYÊN AN
(Lớp K34A, khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T10/344. Cho đa thức $P(x)=x^2-1$. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình
$$P(P(\ldots(P(x))\ldots))=0$$

trong đó có 2006 kí hiệu P ở vế trái của phương trình.

TRẦN NGUYÊN BÌNH
(Lớp K37A, khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T11/344. Giả sử ba tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ và $A_3B_3C_3$ thỏa mãn các điều kiện :

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$, $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$ và

$B_1C_1 + C_2A_2 = B_2C_2 + C_3A_3 = B_3C_3 + C_1A_1$.

Chứng minh rằng ba tam giác đó bằng nhau.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

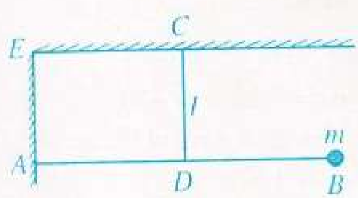
Bài T12/344. Xét một lục giác lồi nội tiếp $ABCDEF$. Đường chéo BF cắt AE, AC lần lượt tại M, N. Đường chéo BD cắt CA, CE lần lượt tại P, Q. Đường chéo DF cắt EC, EA lần lượt tại R, S.

Chứng minh rằng MQ, NR và PS đồng quy.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối PTCTT, ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/344. Cho hệ cơ như hình vẽ. Thanh AB cứng rất nhẹ, đầu A gắn vào bản lề sao cho thanh có thể quay theo mọi hướng, đầu B gắn vật có khối lượng m. Dây CD có độ dài l, không dãn với D là trung điểm của AB. Kéo thanh AB lệch một góc nhỏ theo phương vuông góc với AE rồi thả nhẹ. Bỏ qua mọi ma sát, chứng minh rằng thanh AB dao động điều hòa và tính chu kì dao động của hệ.



LÊ HÀ KIỆT
(DD05 LT03, khoa Điện – Điện Tử, ĐHBK TP HCM)

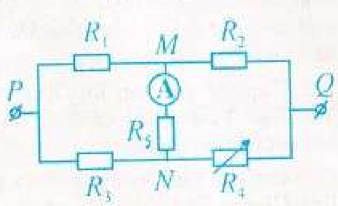
Bài L2/344. Cho mạch điện như hình vẽ.

Biết $R_1 = 1\Omega$, $U_{PQ} = 2V$, $R_A = 0,5\Omega$.

Khi $R_4 = 0\ \Omega$ thì $I_A = 1A$;

khi $R_4 = 6\Omega$ thì $I_A = 0$ A;

khi $R_4 \to \infty$ thì $I_A = \frac{1}{7}$ A. Tính R_2, R_3, R_5.



NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/344. (for 6th grade)

Find natural number n such that the sum of $2n$ terms

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

is equal to $\frac{14651}{19800}$.

T2/344. (for 7th grade)

Let ABC be an isosceles right angled triangle. Let M be the midpoint of the hypotenuse BC, E be the orthogonal projection of M on the line CG, where G is the point on the side AB such that $AG = \frac{1}{3}AB$. The lines MG and AC intersect at D. Compare the lengths of the segments DE and BC.

T3/344. Solve the equation

$$\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}.$$

T4/344. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

T5/344. Find the least value of the expression

$$M = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

T6/344. Let X be a point on the side AB of a parallelogram $ABCD$. The line passing through X, parallel to AD cuts AC at M and cuts BD at N. The line XD cuts AC at P and the line XC cuts BD at Q. Prove that $\frac{MP}{AC}+\frac{NQ}{BD} \ge \frac{1}{3}$.

When does equality occur ?

T7/344. Let ABC be a triangle with altitudes AM, BN and with circumcircle (O). Let D be a point on (O), such that D is distinct from A, B and DA is not parallel to BN. The line DA intersects

(Xem tiếp trang 29)

Bài T1/340. (Lớp 6) *Gọi x là tổng các chữ số của số $a = 3^{2004} + 2005$, gọi y là tổng các chữ số của số x và gọi z là tổng các chữ số của số y. Tìm z.*

Lời giải. Số 2005 chia cho 9 dư 7 nên số $a = 3^{2004} + 2005 = 9^{1002} + 2005$ chia cho 9 dư 7, do đó các số x, y, z chia cho 9 đều có dư là 7 (1).

Số $a = 9^{1002} + 2005 < 10^{1002} + 2005$ nên a có không quá 1003 chữ số, do đó $x \le 9.1003 \Rightarrow x \le 9027$, nên $y \le 9.4 \Rightarrow y \le 36$, suy ra $z < 3 + 9 \Rightarrow z < 12$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $z = 7$.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn gửi bài có lời giải đúng. Tuy nhiên không ít bạn viết chưa chuẩn xác (chẳng hạn a : 9 dư 7), một số bạn xác định giá trị các số x, y, z chưa sát hoặc chưa đúng (chẳng hạn $x \le 9027$ suy ra $y \le 9 + 0 + 2 + 7$).

2) Các bạn sau có lời giải tốt hơn :

Vĩnh Phúc: *Nghiêm Thị Yến, Nguyễn Duy Anh, Nguyễn Thái Hà, Phạm Thiên Lý, Nguyễn Ngọc Thọ, Nguyễn Văn Trường*, 6A, *Bùi Thị Ngọc Bích, Tạ Thị Việt Chinh, Nguyễn Thị Hà Anh, Đỗ Công Huân*, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Đỗ Trang Linh*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Nguyên*, 6A THCS Phạm Sư Mạnh, Kinh Môn, *Phạm Quỳnh Anh*, 6/1 THCS Lê Quý Đôn, TP Hải Dương; **Quảng Ninh:** *Đỗ Thái Chung*, 6A1, THCS Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thanh Hóa:** *Cao Thanh Tùng, Lê Thị Thúy*, 6A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Mai Thị Hồng*, 6C, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 5A, TH Trung Trạch, Bố Trạch; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Duyệt*, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Văn Gia Thi*, 6A1, THCS Lê Hồng Phong, TP Quy Nhơn.

VIỆT HẢI

Bài T2/340. (Lớp 7) *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000| + t^2 - t + 2005,$$

trong đó x, y, z, t là các số hữu tỉ.

Lời giải. (Dựa theo bạn *Trần Anh Linh*, 6A THCS Đồng Ích, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc** và nhiều bạn khác).

Ta có

$$A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000| + \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 2004\frac{3}{4}.$$

Vì $|\alpha| \ge 0, \forall \alpha \in \mathbb{Q}$ và $\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ nên $A \ge 2004\frac{3}{4}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 7x-5y=0 & (1)\\ 2z-3x=0 & (2)\\ xy+yz+zx-2000=0 & (3)\\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0 & (4)\end{cases}$$

Từ (1) ta có $y = \frac{7}{5}x$. Từ (2) ta có $z = \frac{3}{2}x$. Thay vào (3) ta được

$$\frac{7}{5}x^2 + \frac{21}{10}x^2 + \frac{3}{2}x^2 = 2000 \Leftrightarrow 5x^2 = 2000$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 400 \Leftrightarrow x = \pm 20.$$

- Với $x = 20$ ta có $y = 28$, $z = 30$.
- Với $x = -20$ ta có $y = -28$, $z = -30$.

Ngoài ra, từ (4) có $t = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $2004\frac{3}{4}$, đạt được khi $(x, y, z, t) = \left(20, 28, 30, \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(x, y, z, t) = \left(-20, -28, -30, \frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. 1) Có rất đông các bạn tham gia giải bài này và đều tìm ra kết quả đúng. Tuy nhiên, nhiều bạn còn lập luận thiếu chặt chẽ hoặc sai về lôgic, chẳng hạn cho rằng *một tổng đạt giá trị nhỏ nhất khi từng số hạng đạt giá trị nhỏ nhất* (!).

2) Tập thể các bạn lớp 7A1, THCS Yên Lạc, huyện Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** có đông đảo các bạn tham gia gửi bài và có lời giải đúng.

3) Các bạn sau đây cũng có lời giải ngắn gọn, chặt chẽ: **Bắc Giang:** *Thân Văn Chính*, 7A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên; **Hải Phòng:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 7A, THCS Trần Văn Ơn, Hồng Bàng; **Hải Dương:** *Nguyễn Thị Ngọc Ánh*, 6B, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ; **Thanh Hóa:** *La Hồng Quân*, 7B, THCS Nguyễn Chích, Đông

Sơn; **Nghệ An:** *Phạm Thế Hoàng*, 7A, *Trương Thị Hồng Nhung*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Võ Văn Tâm*, 7E, THCS TTr Gio Linh, Gio Linh, *Hồ Sĩ Ngọc Tiến*, 7A, THCS Triệu Thuận; **Quảng Ngãi:** *Võ Quang Viễn*, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7[7], THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/340. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$ sao cho A chia hết cho 2004 với x, y là các số nguyên dương.*

Lời giải. Trước hết ta có các nhận xét sau:

1) *Nếu n là một số nguyên thì số n^2 chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.*

Kí hiệu a chia cho b dư r là $a \equiv r \pmod b$.

Thật vậy, nếu n là một số chẵn thì

$$n^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

Nếu n là một số lẻ thì $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod 4.$$

Vậy n^2 chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

2) *Nếu x, y là các số nguyên sao cho $x^2 + y^2$ chia hết cho một số nguyên tố $p = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì x và y cùng chia hết cho p.*

Thật vậy, nếu $x \vdots p$ thì $y \vdots p$ hoặc ngược lại.

Giả sử x, y cùng không chia hết cho p, áp dụng định lí Fermat ta có :

$$x^{p-1} = x^{4k+2} \equiv 1 \pmod p,$$

$$y^{p-1} = y^{4k+2} \equiv 1 \pmod p.$$

Do đó $x^{4k+2} + y^{4k+2} \equiv 2 \pmod p$.

Lại có $x^{4k+2} + y^{4k+2} = (x^2 + y^2)M$

và $x^2 + y^2 \vdots p$ nên

$$x^{4k+2} + y^{4k+2} \vdots p \Rightarrow 2 \vdots p.$$

Điều đó không thể được vì p là một số nguyên tố lớn hơn 2. Vậy phải có $x \vdots p$ và $y \vdots p$.

Trở lại bài toán.

Ta có $2004 = 4.3.167$ và

$A = x^2 + y^2 \vdots 2004$ nên $A \vdots 4$, $A \vdots 3$, $A \vdots 167$.

Vì $A = x^2 + y^2 \vdots 4$ nên x, y là các số cùng chẵn. Trong trường hợp ngược lại, theo nhận xét 1, A chia cho 4 chỉ có số dư là 1 hoặc 2.

Mặt khác, vì 3 và 167 đều là các số nguyên tố dạng $4k + 3$ nên theo nhận xét 2, ta được x, y cùng chia hết cho 3 và 167.

Vậy x, y cùng chia hết cho $2.3.167 = 1002$ nên $A = x^2 + y^2 \vdots 2.1002^2$.

Do đó $A = x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.1002^2 và giá trị đó đạt được khi $x = y = 1002$.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn tham gia giải bài toán này có lời giải đúng và theo cách trên. Các nhận xét 1 và 2 trong bài rất có ích cho các bạn khi giải các bài toán liên quan tới tính chia hết của các số nguyên.

2) Một số bạn đã mắc sai lầm là dùng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ với dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y$ để kết luận về giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2$ (!)

Lưu ý rằng vế phải của bất đẳng thức bằng $2xy$ không phải là một hằng số nên không thể kết luận $x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất khi đẳng thức xảy ra.

3. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Giang: *Thân Văn Chính*, 7A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên; **Vĩnh Phúc:** *Mạc Thế Trường*, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Nội:** *Lê Quang Huy*, 7H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm; Phạm Duy Long, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hà Tây:** *Nguyễn Lệnh Dũng*, 8A, THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Mai*, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Phòng:** *Phạm Duy Hiệp*, *Lê Văn Nhâm*, 8B8, THCS Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Trịnh Quang Thanh*, 9B, THCS Hàm Rồng; *Nguyễn Cao Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thúc Vũ Hoàng*, 6M, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Quảng Bình:** *Đinh Thanh Hà*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch; **Bình Định:** *Văn Gia Thi*, 6A1, THCS Lê Hồng Phong, Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** *Trần Thị Ánh Nguyên*, 7[7], THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/340. *Giải phương trình*

$$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x \qquad (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq 1$ (*).

Cách 1. (1) $\Leftrightarrow$

$$13\left((x-1) - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4}\right) + 3\left((x+1) - 3\sqrt{x+1} + \frac{9}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13\left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - \dfrac{1}{2} = 0 \\ \sqrt{x+1} - \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \text{ (thỏa mãn (*))}.$$

Vậy PT (1) có nghiệm $x = \dfrac{5}{4}$.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}$

$= 13.2.\frac{1}{2}\sqrt{x-1}+3.2.\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

$\le 13\left(x-1+\frac{1}{4}\right)+3\left(x+1+\frac{9}{4}\right) = 16x \qquad (2)$

Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}\\ \sqrt{x+1}=\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (thỏa mãn (*)).

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (2) xảy ra.

Vậy (1) có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

Cách 3. Áp dụng BĐT Bunhiacovski

$A = 13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}$

$= \sqrt{13}.\sqrt{13x-13}+\sqrt{27}.\sqrt{3x+3}$

$\le \sqrt{(13+27)(13x-13+3x+3)} = \sqrt{40(16x-10)}$

$\Rightarrow A \le 2\sqrt{10(16x-10)}$

$\le 10 + 16x - 10 = 16x$ (bất đẳng thức Cauchy)

PT (1) có nghiệm khi và chỉ khi dấu "=" ở bất đẳng thức Bunhiacovski và dấu "=" ở bất đẳng thức Cauchy xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\sqrt{13x-13}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{3x+3}}{\sqrt{27}}\\ 10=16x-10\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

(thỏa mãn (*))

Vậy (1) có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

Nhận xét. 1) Có 5 bạn giải sai, còn lại đều đúng. Cách giải của các bạn chủ yếu như 3 cách giải nêu trên, một số bạn còn biến đổi dài.

2) Các bạn có lời giải tốt là:

Hải Dương: *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Hưng Yên:** *Đỗ Thu Hà*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Hà Tây:** *Nguyễn Hữu Ngọc Linh*, 8A2, THCS Võng Xuyên, Phúc Thọ; **Nghệ An:** *Phạm Anh Minh, Phạm Văn Khương*, 9A, *Trần Trung Kiên*, 9B, *Nguyễn Hải Lâm, Hồ Thu Trung*, 7C, *Hồ Hữu Quân, Đậu Phi Lực*, 8C, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đậu Thị Thùy Linh*, 7D, THCS Quỳnh Thiện, Quỳnh Lưu; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/340. *Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức* $P = \frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}$, *trong đó x, y, z là các số thực thuộc đoạn* $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Lời giải. (Dựa theo bạn *Phạm Huy Long*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, **Hà Nội**)

• Vì x, y, z thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $x + y \ge 1$, $y + z \ge 1$, $z + x \ge 1$.

Do đó $x + y + z \ge 1 + x$; $x + y + z \ge 1 + y$; $x + y + z \ge 1 + z$.

Vì vậy

$$P \ge \frac{x+y}{x+y+z}+\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{z+x}{x+y+z}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2.$$

$P = 2$ khi và chỉ khi $x + y = y + z = z + x = 1$, suy ra $x = y = z = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

• Do x, y, z thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $\frac{1}{2}\le x\le 1$; $\frac{1}{2}\le y\le 1$; $\frac{1}{2}\le z\le 1$.

Suy ra

$$P = \frac{x}{1+z}+\frac{y}{1+z}+\frac{y}{1+x}+\frac{z}{1+x}+\frac{z}{1+y}+\frac{x}{1+y}.$$

$$\le \frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}+\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}$$

$$=\left(\frac{x}{x+z}+\frac{z}{z+x}\right)+\left(\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+y}\right)+\left(\frac{y}{y+x}+\frac{x}{x+y}\right)=3.$$

$P = 3$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã giải ra đúng đáp số nhưng lại dựa trên những suy luận sai như

$z \le 1 \Rightarrow \frac{1+z-x-y}{1+z} \le \frac{1+z-x-y}{2}$.

P nhỏ nhất (lớn nhất) khi và chỉ khi $x+y$, $y+z$, $z+x$ nhỏ nhất (lớn nhất).

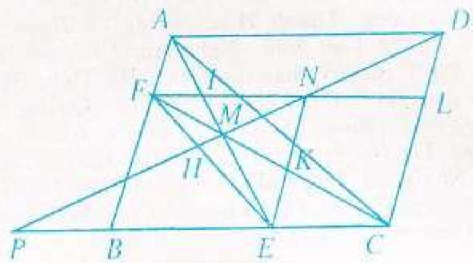
2) Các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Hà Tây: *Nguyễn Lệnh Dũng*, 8A, THCS Nguyễn Văn Huyên, Hoài Đức; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9B, THCS Tiên Lữ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Huy Linh*, 8B, THCS Yên Bái, Yên Định, *Trần Anh Ngọc*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8B, *Phan Sỹ Quang, Đặng Công Việt, Dương Đức Thủy*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/340. *Cho tam giác ABC. Lấy điểm M nằm trong tam giác. AM cắt BC tại điểm E, CM cắt AB tại điểm F. Gọi N là điểm đối xứng của B qua trung điểm của EF. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động bên trong tam giác ABC.*

Lời giải. Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi I là giao của AE và FN, K là giao của CF và NE, H là giao của DN và EF, P là giao của DN và BC. Ta có tứ giác $BENF$ là hình bình hành.



Suy ra $\frac{IF}{IN}=\frac{FA}{EN}$; $\frac{KN}{KE}=\frac{FN}{EC}$; $\frac{HE}{HF}=\frac{PE}{FN}$ (1)

Mặt khác $\frac{PE}{NE}=\frac{NL}{DL}=\frac{EC}{FA}$ nên

$$PE=\frac{NE\times EC}{FA} \text{ hay } \frac{PE}{FN}=\frac{NE\times EC}{FN\times FA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{IF}{IN}\times\frac{KN}{KE}\times\frac{HE}{HF}=1.$$

Theo định lí Ceva ta có NH, FK, EI đồng quy, suy ra D, N, M thẳng hàng. Vậy MN luôn đi qua điểm D cố định khi M di động trong tam giác ABC.

Chứng minh trên vẫn đúng khi DN cắt BC tại P nằm trong đoạn BC.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Hà Nội: *Trần Việt Hưng*, 9G, THCS TTr Yên Viên, Gia Lâm; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Hoàng*, 8B, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nghệ An:** *Bùi Hoàng Toán*, 7B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Quảng Bình:** *Nguyễn Phi Hùng*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch; **Quảng Trị:** *Nguyễn Văn Lương*, 9^3, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà; **Đắk Lắk:** *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du.

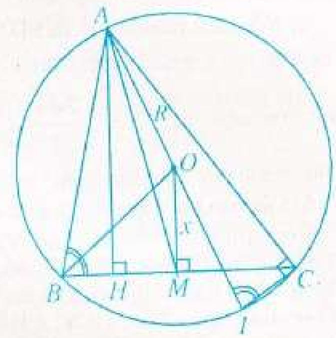
VŨ KIM THỦY

Bài T7/340. *Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng $S \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.*

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Theo bạn *Võ Văn Tuấn*, 9A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, **Đăk Lăk** và *Trần Việt Hưng*, 9G, THCS TTr Yên Viên, Gia Lâm, **Hà Nội**). Trước hết ta chứng minh hai nhận xét quen thuộc sau.

• ***Nhận xét 1.*** *Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.*



Thật vậy gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Dựng $AH \perp BC$ và $OM \perp BC$ (hình vẽ). Ta có $AH \le AM \le OA + OM = R + x$ ($x = OM$, khi O trùng M ta coi $x = 0$). Mặt khác áp dụng định lí Pythagore cho tam giác vuông OMB ta được $BC = 2\sqrt{R^2-x^2}$. Do đó theo BĐT Cauchy:

$$S \le (R+x).\sqrt{R^2-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{(R+x)^2(3R^2-3x^2)}$$

$$\le \frac{\sqrt{3}}{6}.\left(R^2+2Rx+x^2+3R^2-3x^2\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[-\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\frac{9R^2}{4}\right] \le \frac{3\sqrt{3}}{4}.R^2 \text{ (đpcm).}$$

• ***Nhận xét 2.*** *Ta có hệ thức $4RS = abc$.*

Thật vậy, gọi I là điểm đối xứng với A qua O thì $\Delta AHB \backsim \Delta ACI$. Từ đó $AB.AC = AH.AI$, dẫn đến $AB.AC.BC = (AH.BC).AI$ hay $abc = 4RS$.

Trở lại bài toán, theo nhận xét 1

$$S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \Rightarrow S^3 \le \frac{3\sqrt{3}}{4}(RS)^2.$$

Kết hợp với nhận xét 2 thì $S^3 \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{abc}{4}\right)^2$.

Vậy $S \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Nhận xét. 1) Tòa soạn nhận được nhiều cách giải khác nhau cho bài toán này, chẳng hạn

• Sử dụng trực tiếp BĐT lượng giác

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

• Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S.\sqrt{3}$ và công thức G.W. Leibniz:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\ (1)$$

(M là điểm bất kì, G là trọng tâm của tam giác ABC)... Tuy nhiên nhiều bạn ở bậc THCS sử dụng *các công cụ mạnh* đó mà không chứng minh!

2) Nếu xuất phát từ (1) và BĐT Bunhiacovski thì ta có BĐT $a + b + c \le 3\sqrt{3}.R$. Lúc này ta nhận được kết quả tốt hơn như sau: $S \le \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right).\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)$. Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

3) Các bạn sau cũng có lời giải đúng và gọn:

Vĩnh Phúc: *Lê Duy Dũng, Nguyễn Huy Hoàng*, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; **Hưng Yên:** *Lương Xuân Huy*, 9A, THCS Tiên Lữ, Tiên Lữ; **Thanh Hóa:** *Trần Anh Ngọc*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Nguyễn Cảnh Thông*, 8B, *Phan Sỹ Quang*, 9A, *Nguyễn Đức Công*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/340. *Cho f(x) là đa thức bậc ba với các hệ số nguyên và hệ số cao nhất bằng 1. Biết rằng f(0) + f(1) + f(−1) không chia hết cho 3. Tìm* $\lim\left\{\sqrt[3]{f(n)}\right\}$ *khi số tự nhiên n dần tới vô hạn, trong đó kí hiệu {x} chỉ phần thập phân dương của số thực x* $(0 \le \{x\} < 1)$.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Phùng Hoàng Đức*, 11A, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**).

Giả sử $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Ta có $f(0) + f(1) + f(-1) = 2a + 3c \not\vdots\ 3$ nên $a \not\vdots\ 3$.

Đặt $a = 3k + r$ $(r \in \{1, 2\})$. Ta có

$$f(n) = (n + k)^3 + rn^2 + (b - 3k^2)n + c - k^3$$

Khi n đủ lớn thì $rn^2 + (b - 3k^2)n + c - k^3 > 0$ do đó $f(n) > (n + k)^3$ khi n đủ lớn.

Lại có

$$f(n) = (n+k+1)^3 + (r-3)n^2 + (b - 3(k+1)^2)n + c - (k+1)^3$$

Khi n đủ lớn thì

$$(r-3)n^2 + (b - 3(k+1)^2])n + c - (k+1)^3 < 0$$

do đó nếu n đủ lớn thì

$$(n + k)^3 < f(n) < (n + k + 1)^3.$$

Suy ra $\left[\sqrt[3]{f(n)}\right] = n+k$ khi n đủ lớn, trong đó $[x]$ kí hiệu phần nguyên của số x.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{f(n)}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{f(n)} - (n+k)\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-(n+k)^3}{\left(\sqrt[3]{f(n)}\right)^2 + \sqrt[3]{f(n)}(n+k) + (n+k)^2}.$$

Thay $f(n) = n^3 + (3k + r)n^2 + bn + c$ vào ta thấy

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{f(n)}\right\} = \frac{r}{3} = \left\{\frac{a}{3}\right\}.$$

Nhận xét. Các bạn tham gia giải bài này đều làm đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Hà Nội: *Đào Văn Thịnh*, 11 chuyên ĐHSP Hà Nội; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Ngọc*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thanh Hóa:** *Hoàng Vũ Hạnh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Lê Ngọc Thạch*, 11T, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Nhật Linh*, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Đặng Ngọc Thanh*, 11T, THPT chuyên; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đắk Lắk:** *Đỗ Thanh Tùng*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Du; **Cần Thơ:** *Võ Quốc Bá Cẩn*, 12T, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/340. *Có tồn tại chăng hàm số* $f: (0\,;+\infty) \to (0\,;+\infty)$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f^2(x) \ge f(x + y)(f(x) + y) \qquad (1)$$

với mọi số thực dương x, y ?

Lời giải. (Đa số các bạn).

Nhận xét rằng nếu tồn tại $f(x)$ thỏa mãn đề bài thì hàm đó là nghịch biến trong $(0; +\infty)$.

Thật vậy, từ (1) suy ra

$$f(x) - f(x+t) \ge \frac{tf(x)}{f(x)+t},\ \forall x, t > 0 \qquad (2)$$

Từ (2) ta thu được

$$f(x) > f(y) \text{ khi } 0 < x < y.$$

Cố định $x > 0$ và chọn số tự nhiên n sao cho $nf(x+1) \ge 1$. Khi đó, hiển nhiên

$$nf\left(x+\frac{k}{n}\right) \ge 1,\ \forall k = 0, 1, ..., n-1.$$

Từ (2), ta có

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) \ge \frac{\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}} \ge \frac{1}{2n},$$

$\forall k = 0, 1, ..., n-1.$

Cộng theo vế n bất đẳng thức trên, ta thu được

$$f(x)-f(x+1)>\frac{1}{2}.$$

Tiếp theo, vẫn cố định x và chọn $m \geq 2f(x)$, ta được

$$f(x)-f(x+m)\geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m-1}[f(x+i)-f(x+i+1)] \geq \frac{m}{2} \geq f(x),$$

do đó $f(x+m) \leq 0$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy không tồn tại hàm $f(x)$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Bạn *Vũ Văn Quang*, 12A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** phát hiện ra đây chính là đề bài toán thi Olympic Bulgaria 1998 (vòng 3). Có rất nhiều bạn giải được và đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên, cũng chính là lời giải chính thống đã được đề xuất. Một số bạn sử dụng kiến thức tam thức bậc hai để lập luận sự không tồn tại, nhưng các lập luận đó không áp dụng được cho bài toán dạng phương trình và bất phương trình.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/340. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{C_{k+i+j}^{k+2}} \geq 0$$

trong đó n, k là các số nguyên không âm, $n > 1$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là một bộ n số thực bất kì và $C_m^r=\dfrac{m!}{r!(m-r)!}$.

Lời giải. (Dựa theo bạn *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**).

Xét đa thức $P_k(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{a_i a_j}{C_{k+i+j}^{k+2}}.x^{k+i+j}$.

Chúng ta sẽ chứng minh $P_k(x)\geq 0$ (1)

bằng quy nạp theo $k = -1, 0, 1, ...$ (chú ý với cả $k = -1$) với mọi $x \geq 0$.

Với $k=-1$, $P_{-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{a_i a_j}{i+j-1}.x^{i+j-1}$,

$$P'_{-1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i a_j.x^{i+j-2}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i.x^{i-1}\right)^2 \geq 0$$

với mọi $x>0$ (2)

Do đó $P_{-1}(x)$, với $x \geq 0$, là hàm số đồng biến.

Hệ quả: $P_{-1}(x) \geq P_{-1}(0) = 0$ với mọi $x \geq 0$.

Giả sử khẳng định (1) đã đúng với $k = -1, 0, 1, ..., m$, ta chứng minh nó cũng đúng với $k = m + 1$.

Thật vậy

$$P_{m+1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{C_{m+i+j+1}^{m+3}}.x^{m+i+j+1},$$

$$P'_{m+1}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j.(m+i+j+1)}{C_{m+i+j+1}^{m+3}}.x^{m+i+j}$$

$$=(m+3)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{C_{m+i+j}^{m+2}}.x^{m+i+j}$$

$$=(m+3)P_m(x)\geq 0$$

với mọi $x > 0$ theo giả thiết quy nạp.

Bởi vậy $P_{m+1}(x)$ với $x \geq 0$, là hàm số đồng biến. Do đó $P_{m+1}(x) \geq P_{m+1}(0) = 0$ với mọi $x \geq 0$.

Như vậy khẳng định (1) đã được chứng minh. Nói riêng ta có $P_k(1) \geq P_k(0) = 0$. Đây là khẳng định của bài toán. Chú ý từ (2) ta thấy $P_{-1}(1) = P_{-1}(0) = 0$ khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n}a_i x^{i-1} = 0$ với mọi $0 < x < 1$, tương đương với $a_1 = a_2 = ... = a_n$ (do $\sum_{i=1}^{n}a_i x^{i-1}$ là đa thức).

Từ đó suy ra với mọi k nguyên, $k \geq -1$, $P_k(1) = 0$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Nhận xét. Bài toán này thuộc phần ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức. Phương pháp trên (xét đa thức $P_k(x)$) đã quen thuộc với nhiều học sinh. Các bạn sau cũng có lời giải tốt: **Hà Tây:** *Lã Vĩnh Hòa, Dương Minh Hùng, Trịnh Ngọc Tú*, 11T, THPT Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Trần Tấn Phong*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, *Trần Trung Dũng*, 11A1, *Vũ Văn Quang, Lê Công Truyền*, 12A1, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn, **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trần Văn Linh*, 12T, THPT Lê Quý Đôn; **Bạc Liêu:** *Trần Mỹ Linh*, 10T, THPT chuyên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

T11/340. *Cho tam giác ABC với các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đặt $IA = d_a$, $IB = d_b$, $IC = d_c$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a(bc-d_a^2)}+\sqrt{b(ca-d_b^2)}+\sqrt{c(ab-d_c^2)}\leq\sqrt{6abc}.$$

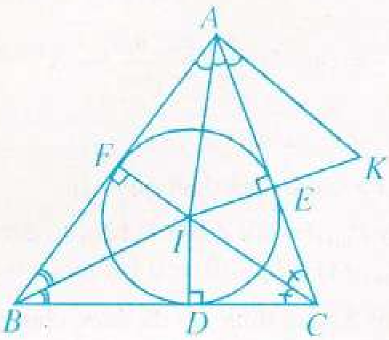
Lời giải. (Theo bạn *Trần Lê Khanh*, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**).

Trước hết, xin giới thiệu một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Ta có

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

Bổ đề trên khá quen thuộc và có nhiều cách chứng minh. Xin giới thiệu một cách chứng minh khá thú vị sau. Kí hiệu $S(.)$ chỉ diện tích đa giác.



Giả sử đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại D, E, F (hình vẽ). Gọi K là điểm đối xứng của I qua AC. Dễ thấy

$$\frac{S(AFIE)}{S(ABC)} = \frac{S(AIK)}{S(ABC)} = \frac{AI.AK}{AB.AC} = \frac{IA^2}{bc}.$$

Tương tự như vậy, ta có

$$\frac{S(BDIF)}{S(ABC)} = \frac{IB^2}{ca};\ \frac{S(CEID)}{S(ABC)} = \frac{IC^2}{ab}.$$

Suy ra

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab}$$

$$= \frac{S(AFIE)+S(BDIF)+S(CEID)}{S(ABC)} = 1$$

$$\Rightarrow aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

Trở lại việc giải bài toán. Theo bất đẳng thức Bunhiacovski ta có

$$\sqrt{a(bc-d_a^2)} + \sqrt{b(ac-d_b^2)} + \sqrt{c(ab-d_c^2)}$$

$$\le \sqrt{(1+1+1)\left(a(bc-d_a^2)+b(ca-d_b^2)+c(ab-d_c^2)\right)}$$

$$= \sqrt{3.(3abc-abc)} \text{ (theo bổ đề)}$$

$$= \sqrt{6abc}.$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng. Tuy nhiên, một số bạn giải quá dài.

2) Nhiều bạn không sử dụng bổ đề vẫn giải ngắn gọn nhờ cách biểu diễn sau:

$$a(bc-d_a^2) = \frac{2a^2bc}{a+b+c};\ b(ca-d_b^2) = \frac{2b^2ac}{a+b+c};$$

$$c(ab-d_c^2) = \frac{2c^2ab}{a+b+c}.$$

3) Bạn *Trần Thế Dũng*, 10/1, THPT Nghèn, Can Lộc, **Hà Tĩnh** đã sử dụng nhận xét :

"Với mọi điểm $M \in \Delta ABC$, ta có

$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 =$

$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 + (a+b+c)MI^2 \ge abc$",

để chứng minh bất đẳng thức tổng quát sau:

"Với mọi điểm M trong tam giác ABC, ta có:

$$\sqrt{a(bc-MA^2)} + \sqrt{b(ca-MB^2)} + \sqrt{c(ab-MC^2)} \le \sqrt{6abc}.$$

4) Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Hà Phương Thảo*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Thức*, 12A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Mai Quang Khang*, 11C3, THPT Đào Duy Từ; **Nghệ An:** *Phan Quỳnh Trang*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Ninh Thế Long*, 12A1, THPT chuyên lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Huỳnh Tấn Đạt*, 12T, THPT Bến Tre; TX Bến Tre; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Thành Trung*, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, TX Vĩnh Long.

NGUYỄN MINH HÀ

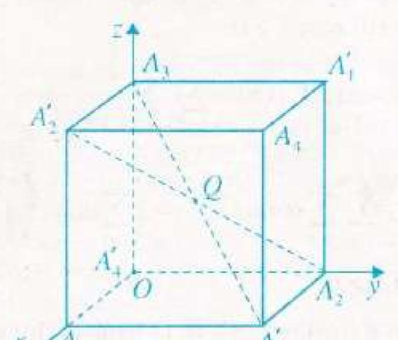
Bài T12/340. *Cho tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$ có cạnh bằng c. Gọi (P) là mặt phẳng quay quanh tâm của tứ diện. Gọi B_i lần lượt là hình chiếu của A_i (i = 1, 2, 3, 4) trên mặt phẳng (P).*

Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$T = A_1B_1^4 + A_2B_2^4 + A_3B_3^4 + A_4B_4^4$$

theo c và xác định vị trí của mặt phẳng (P) lúc đó.

Lời giải. (Dựa theo *Phạm Khắc Thành*, 11A, THPT Triệu Sơn III, **Thanh Hóa**).



Gọi Q là trọng tâm tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Dựng hình lập phương ngoại tiếp tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$, hình lập phương này có độ dài cạnh bằng $a = \frac{c}{2}\sqrt{2}$. Chọn hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ sao cho $A_1 \in Ox$, $A_2 \in Oy$, $A_3 \in Oz$. Khi đó, trong hệ tọa độ này ta có

$A_1(a; 0; 0)$, $A_2(0; a; 0)$, $A_3(0; 0; a)$, $A_4(a; a; a)$ và $Q\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Mặt phẳng (P) đi qua Q nên phương trình của nó có dạng $\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{a}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, với $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$.

Sử dụng công thức tính khoảng cách, ta được

$A_1B_1^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{(\beta+\gamma-\alpha)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ và ba biểu thức tương tự đối với A_2B_2, A_3B_3 và A_4B_4.

Từ đó ta được

$$T = \frac{a^4}{16}\cdot\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^4+(\beta+\gamma-\alpha)^4+(\gamma+\alpha-\beta)^4+(\alpha+\beta-\gamma)^4}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+6(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2} \quad (1)$$

$$T \le \frac{a^4}{4}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

$$= \frac{7a^4}{12} = \frac{7}{48}c^4 \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2.$$

Vậy max $T = \frac{7}{48}c^4$, đạt được khi và chỉ khi mặt phẳng (P) có phương trình là một trong số các phương trình sau:

$$x + y + z = \frac{3c}{4}\sqrt{2}; \qquad -x + y + z = \frac{c}{4}\sqrt{2};$$

$$x - y + z = \frac{c}{4}\sqrt{2}; \qquad x + y - z = \frac{c}{4}\sqrt{2}.$$

Tóm lại có tất cả 4 vị trí mặt phẳng (P) để tổng trên đạt giá trị lớn nhất. Đó chính là 4 mặt phẳng đi qua tâm Q của tứ diện đều và song song với một trong bốn mặt của nó.

Nhận xét. 1) Để từ đẳng thức (1) suy ra BĐT (2) ta chỉ cần sử dụng BĐT cơ bản

$$3(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2) \le (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2;$$

cũng có bạn huy động đến BĐT Bunhiacovski.

2) Số các bạn tham gia giải bài này không nhiều, tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Xuân Thọ*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Tấn Phong*, 10A2, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Nguyễn Quang Huy*, 12 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hà Tây:** *Trịnh Ngọc Tú*, 11 Toán. THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Hải*, 11A1, THPT Đông Sơn I; **Nghệ An:** *Đặng Công Vinh*, *Phan Anh Tú*, 11I, THPT Nghĩa Đàn; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Tuấn Minh*, 12 Toán, trường Quốc học Huế; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Tiến Vũ*, 11B1, THPT Bình Sơn; **Phú Yên:** *Nguyễn Tuấn Dũng*, 11A, THPT Phan Chu Trinh, Sông Cầu; **Đồng Tháp:** *Phạm Tuấn Khải*, THPT Thanh Bình I; **Cần Thơ:** *Vũ Quốc Bá Cẩn*, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/340. *Một vệ tinh chuyển động theo một quỹ đạo tròn ở độ cao cách mặt Trái Đất bằng bán kính R của Trái Đất. Tại một thời điểm nào đó, từ vệ tinh phóng ra một trạm thăm dò đi tới một hành tinh khác, sau đó phần còn lại của vệ tinh chuyển động theo một quỹ đạo elip đi tới gần mặt Trái Đất ở điểm đối diện với điểm xuất phát của trạm. Hỏi khối lượng của trạm thăm dò có thể chiếm một phần cực đại bằng bao nhiêu khối lượng của vệ tinh ? Cho biết thế năng của một vật khối lượng m trong trường hấp dẫn của một vật khối lượng M bằng* $W_t = -G\frac{Mm}{R}$.

Lời giải. Kí hiệu M, m tương ứng là khối lượng ban đầu của vệ tinh và khối lượng của trạm. Để có lợi về mặt năng lượng, truyền cho trạm vận tốc $\vec{u}$ cùng hướng với vận tốc $\vec{v_0}$ của vệ tinh, khi đó vệ tinh thu vận tốc $\vec{v}$ hướng ngược lại. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng: $Mv_0 = mu-(M-m)v$, với $v_0 = \sqrt{G\frac{M_đ}{2R}}$ (vì vệ tinh chuyển động trên quỹ đạo tròn bán kính $2R$; $M_đ$ là khối lượng trái đất).

Từ đó $$\frac{m}{M} = \frac{v_0+v}{u+v} \quad (1)$$

Cơ năng toàn phần của trạm lúc phóng bằng không: $\frac{mu^2}{2} - G\frac{mM_đ}{2R} = 0$, suy ra

$$u=\sqrt{\frac{GM_đ}{R}} \quad (2)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$\frac{(M-m)v^2}{2}-G\frac{(M-m)M_đ}{2R}$$
$$=\frac{(M-m)v'^2}{2}-G\frac{(M-m)M_đ}{R} \quad (3)$$

với v' là vận tốc tại điểm tiếp đất. Mặt khác, theo định luật Kepler: $2Rv = Rv'$ (4)

Từ (3) và (4) tìm được $v=\sqrt{\frac{GM_đ}{3R}}$.

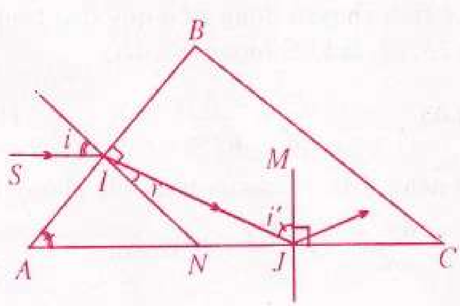
Thay các giá trị của v_0, v và u vào (1) ta được:

$$\frac{m}{M}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\approx 0,81.$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và gọn: **Vĩnh Phúc:** *Vũ Ngọc Quang*, 12A, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Phạm Đăng Hải*, 12C, THPT Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Trần Đình Vinh*, 11A1, THPT Ngọc Hồi; **Hải Phòng:** *Đào Hải Anh*, 10 Lí, THPT NK Trần Phú; **Hưng Yên:** *Trần Khánh Hoàn*, 11A1, THPT Yên Mỹ; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Thành*, 11A1, THPT Nam Tiền Hải; **Thanh Hóa:** *Phạm Khắc Thành*, 11A, THPT Triệu Sơn III; **Nghệ An:** *Lê Đình Khiết*, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Lại Kim Khánh*, 11A4 Lí, khối THPT chuyên, ĐH Vinh; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Kim Khuyên*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Việt Anh*, 10L, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn.

MAI ANH

Bài L2/340. *Một lăng kính có chiết suất n ($n > 1$) đặt trong không khí, có tiết diện là một tam giác ABC với $\hat{A} < 90^o$. Một tia sáng đơn sắc SI chiếu song song với AC, tới mặt AB tại I và khúc xạ, tới AC tại J (xem hình vẽ). Chứng minh rằng tia IJ bị phản xạ toàn phần tại mặt AC với bất kì giá trị nào của góc A ($\hat{A} < 90^o$) và n ($n > 1$).*



Lời giải. Để tia IJ bị phản xạ toàn phần tại mặt AC, ta phải chứng minh :

$$\sin i' > \sin i_{th} = \frac{1}{n}, \text{ hay } i' > i_{th}$$

trong đó i_{th} là góc tới hạn.

Theo định luật khúc xạ ánh sáng :

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}.$$

Dễ dàng chứng minh được rằng :

$$i' = r + \hat{A};\ \sin r = \frac{\cos A}{n}.$$

Do đó

$$\sin i' = \sin(r+A) = \sin r\cos A + \sin A\cos r$$

hay $\sin i' = \dfrac{\cos^2 A}{n} + \dfrac{\sin A}{n}\sqrt{n^2-\cos^2 A}$

$$\Rightarrow \sin i' > \frac{\cos^2 A}{n} + \frac{\sin^2 A}{n}.$$

Vì $\dfrac{\cos^2 A}{n} + \dfrac{\sin^2 A}{n} = \dfrac{1}{n} = \sin i_{th}$

nên $\sin i' > \sin i_{th} \Rightarrow i' > i_{th}$.

Do $i' > i_{th}$, nên luôn có phản xạ toàn phần tại mặt AC.

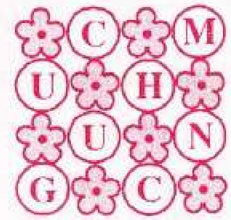
Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn có lời giải theo cách trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn và đúng :

Thái Nguyên: *Trịnh Quang Hưng*, 12A, THPT chuyên Thái Nguyên; **Yên Bái:** *Trần Đức Mỹ*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ**: *Đặng Tiến Sinh*, 12A3, THPT Công nghiệp Việt Trì; **Vĩnh Phúc**: *Lê Công Truyền*, 12A1, *Vũ Ngọc Quang*, 12A3, *Nguyễn Văn Bắc*, 11A3, *Nguyễn Minh Khương*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Đỗ Thủ Khoa*, 12A1, THPT Tân Yên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Công Dưỡng*, 12 Lí, *Nguyễn Văn Thành*, 12 Lí, *Trần Thái Hà*, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương**: *Nguyễn Quang Thắng*, 11A1, THPT Phả Lại, Chí Linh ; *Lê Hoàng Dũng*, 12 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Nguyễn Hữu Thịnh*, 11 Lí, *Đặng Ngọc Hoàng Quy*, 11 Lí, *Đoàn Thúy*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hoá**: *Nguyễn Văn Thương*, 11H, *Lê Bá Ngọc*, 11F, *Trịnh Văn Vương*, 11T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An**: *Nguyễn Đức Tùng*, 12A2, THPT Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh**: *Dương Đức Lâm*, 12A1, THPT Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà, *Bùi Hoàng Thành*, 12A1, THPT Hồng Lĩnh; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Thị Kim Khuyên*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Khánh Hoà**: *Lê Thế Huy*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Xếp chữ CHÚC MỪNG



Hà cắt những mảnh bìa tròn trên đó vẽ các hình bông hoa đào hoặc để các chữ để xếp thành hình 4 × 4 có 2 cột chữ được CHÚC MỪNG. Nam xáo trộn đi như hình bên. Hà chỉ cần nhấc lên 2 lần, mỗi lần 1 tấm bìa rồi dùng nó đẩy những tấm khác đúng 1 lần (tức là đẩy 1 tấm và tấm đó tự đẩy tấm bên cạnh...) là được như cũ. Hỏi Hà đã làm thế nào ?

VŨ THANH THÀNH

Giải đáp bài THƯ CỦA NGƯỜI YÊU TOÁN

Bảng chữ cái tiếng Việt gồm 33 chữ. Ngoài ra còn có 5 dấu và một ô trống. Từ giả thiết "Số các chữ cái nằm giữa hai chữ cái bất kì trong bảng chữ cái tiếng Việt bằng hiệu giữa hai số mã hóa" suy ra bảng chữ cái tiếng Việt được mã hóa bởi 33 số tự nhiên (có hai chữ số) liên tiếp.

Số chữ cái nằm giữa P và Z là 10, nằm giữa P và A là 20, nghĩa là $|Z - P| = 11$ và $|A - P| = 21$.

Vì $P = 22$ nên $A = P \pm 21$, do đó $A = 1$ hoặc $A = 43$. ($A = 1$ bị loại vì mã hóa chỉ bởi một chữ số). Vậy $A = 43$ và do $P = 22$ nên $Z = 11$.

Khóa giải mã của bảng chữ cái tiếng Việt như sau:

A	Ă	Â	B	C	D	Đ	E	Ê	F	G	H	I	J	K	L
43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28

M	N	O	Ô	Ơ	P	Q	R	S	T	U	Ư	V	W	X	Y	Z
27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

Để câu có nghĩa thì các dấu được mã hóa như sau:

\	?	~	/	.	ô trống
44	45	46	47	48	49

Bức thư mật mã được tách ra từng hai chữ số, rồi dựa vào khóa giải mã sẽ dịch được là:

XUÂN BÍNH TUẤT CHÚC EM TƯƠI TRẺ MÃI

Hoan nghênh các bạn sau đã giải mã đúng và gửi bài sớm:

- *Nguyễn Văn Thương*, 11H, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**;
- *Nguyễn Thị Hạnh*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Kim Bài, Thanh Oai, **Hà Tây**;
- *Lê Nguyễn Hoàng Hải*, 10T, THPT chuyên **Bắc Ninh**;
- *Lại Thị Thu Thủy*, 11C, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**;
- *Đào Trần Mỹ Hạnh*, 8C, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**.

VÂN KHANH

HÀM ... *(Tiếp trang 15)*

Chứng minh. Sử dụng tính chất

$$\int_\alpha^\beta (f(t)+\lambda g(t))^2\,dt \geq 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

ta suy ra $A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$

trong đó $A = \int_\alpha^\beta (g(t))^2\,dt$; $C = \int_\alpha^\beta (f(t))^2\,dt$;

$B = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt$.

Từ đây, áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta có đpcm. Tiếp theo, dễ dàng kiểm chứng kết quả sau đây.

Thí dụ 4. Giả sử $V = C[\alpha, \beta]$ là không gian các hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó, tích vô hướng của cặp hàm số $f(t), g(t) \in V$ được định nghĩa như sau: $\quad (f, g) = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt \quad (9)$

chính là tích trong, tức có các tính chất (i) – (v).

Tương tự như trường hợp không gian $\mathbb{R}^n$, ta có thể định nghĩa tích (9) với *trọng*.

Thí dụ 5. Giả sử $V = C[\alpha, \beta]$ là không gian các hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $\omega(t)$ là hàm số liên tục và dương trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó, tích vô hướng của cặp hàm số $f(t), g(t) \in V$ với trọng $\omega(t)$ được định nghĩa như sau:

$$(f(t), g(t)) = \int_\alpha^\beta \omega(t).f(t).g(t).dt$$

là tích trong, tức có các tính chất (i) – (v).

Tiếp theo, ta xét lớp hàm số nhiều biến dạng

$$F(\overline{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

có tính chất $\begin{cases} F(\overline{x}) > 0,\ \forall x \neq \overline{0} \\ F(t\overline{x}) = tF(\overline{x}),\ \forall t \geq 0 \\ F(\overline{x}) + F(\overline{y}) \geq F(\overline{x+y}). \end{cases}$

Nhận xét rằng $F(\overline{x})$ chính là một mở rộng khái niệm hàm khoảng cách quen biết. Đối với lớp hàm số này, ta cũng có các hàm số sơ cấp tương ứng khác có tính chất như hàm khoảng cách thông thường.

4. Một số hàm số liên quan

Thí dụ 6. Cho $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f(x, x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(x, x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

(ii) $f(x, ky_1 + y_2) = kf(x, y_1) + f(x, y_2)$ với mọi $k, x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) $f(x, y) = f(y, x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng hàm số $f(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện:

a) $|f(x, y)|^2 = f(x, x)f(y, y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$,

b) $\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Từ điều kiện (ii) với $y_1 = y_2 = y$, ta được $\quad f(x, (k+1)y) = (k+1)f(x, y)$

hay $\quad f(x, ky) = kf(x, y),\ \forall k, x, y \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra $f(x, y) = f(x, y1) = yf(x, 1) =$

$= yf(1, x) = xyf(1, 1) \quad (10)$

Vậy $f(x, x) = x^2 f(1, 1), f(y, y) = y^2 f(1, 1) \quad (11)$

Từ (10) và (11), ta thu được

$|f(x, y)|^2 = f(x, x)f(y, y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Từ (11) ta được

$$f(x+y, x+y) = (x + y)^2 f(1, 1) \quad (12)$$

Từ (11) và (12) ta có ngay đpcm.

Thí dụ 7. Cho $p > 1$. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad (13)$$

$\forall x_1, \ldots, x_n ; y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$

Lời giải. Nhận xét rằng (13) chính là hệ quả của bất đẳng thức Mincowski. Thật vậy, ta có

$$f(x+y) = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/p}$$

Theo bất đẳng thức Mincowski thì

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n (|y_i|)^p\right)^{1/p} = f(x) + f(y).$$

Vậy $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

LỄ PHÁT THƯỞNG HỌC SINH GIỎI ĐƯỢC GIẢI OLYMPIC SINGAPORE (SMO) 2005 TẠI VIỆT NAM

Chiều 23.01.2006 tại Hội trường Lê Văn Thiêm, 19 Lê Thánh Tông, Hà Nội đã diễn ra Hội nghị tổng kết năm 2005 của Hội Toán học Hà Nội. PGS. TS. *Bùi Quang Diệu* Phó Chủ tịch kiêm Tổng Thư kí Hội đã đọc báo cáo tổng kết. GS. TSKH. *Nguyễn Văn Mậu*, Chủ tịch Hội đã phát biểu ý kiến về các hoạt động những năm tới, đặc biệt là các cuộc thi Khu vực và Quốc tế mà Việt Nam đăng cai.

ThS. *Vũ Kim Thủy*, Ủy viên BCH Hội, Phó ban tổ chức cuộc thi HSG Singapore tại Việt Nam đọc báo cáo về cuộc thi. GS. TSKH *Lê Hùng Sơn*, Trưởng ban tổ chức cuộc thi công bố danh sách các bạn đoạt giải và tặng Bằng chứng nhận giải thưởng của Hội Toán học Singapore, Giấy khen và phần thưởng của Hội Toán học Hà Nội cho 38 học sinh Hà Nội, Vĩnh Phúc, Hưng Yên trong tổng số 39 học sinh dự thi.

VPV

ĐỀ THI TUYỂN SINH... *(Tiếp trang 4)*

2) Gọi S và S' lần lượt là diện tích hai tam giác ABC và DEF. Chứng minh: $\frac{S}{S'} \le \left(\frac{EF}{2AD}\right)^2$.

Bài 10. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2005 đường thẳng đồng thời thỏa mãn hai điều kiện:

1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.

2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích là 0,5.

Chứng minh rằng trong 2005 đường thẳng đó có ít nhất 502 đường đồng quy.

BÀI TẬP

Kí hiệu $(\bar{x}, \bar{y})$ là tích vô hướng.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j .$$

Đặt $G(\bar{y}) = \max\limits_{\bar{x}} \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{F(\bar{y})}$ (gọi $G(\bar{y})$ là hàm tựa).

Chứng minh rằng ta luôn có các đẳng thức

$$F(\bar{y}) = \max_{\bar{x}} \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{G(\bar{y})} \text{ và } (\bar{x}, \bar{y}) \le F(\bar{x}) G(\bar{y}).$$

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

the line BN at Q. The line DB intersects the line AM at P. Prove that when D moves on the circle (O), the midpoint of the segment PQ lies on a fixed line.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/344. Let p be a given odd prime number. Prove that the difference

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} - (2^p + 1)$$

is divisible by p^2 $\left(\binom{p}{j} \text{ is binomial coefficient}\right)^{(*)}$.

T9/344. Consider the sequence $(f_n(x))$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ of functions defined on $[0; 1]$ such that:

$$f_0(x) = 0$$

and $$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - (f_n(x))^2)$$

for every $n = 0, 1, 2, ...$

Prove that $\frac{nx}{2 + n\sqrt{x}} \le f_n(x) \le \sqrt{x}$

for all $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0; 1]$.

T10/344. Consider the polynomial $P(x) = x^2 - 1$. Find the number of distinct real roots of the equation

$$P(P(...(P(x))...)) = 0$$

where there are 2006 notations P on the left hand side of the equation.

T11/344. Suppose that $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ are three triangles satisfying the conditions: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$, $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$,

$B_1C_1 + C_2A_2 = B_2C_2 + C_3A_3 = B_3C_3 + C_1A_1$.

Prove that these three triangles are congruent.

T12/344. Consider a convex hexagon $ABCDEF$ inscribed in a circle. The diagonal BF cuts AE, AC respectively at M, N. The diagonal BD cuts CA, CE respectively at P, Q. The diagonal DF cuts EC, EA respectively at R, S. Prove that MQ, NR and PS are concurrent.

(*) Kí hiệu số tổ hợp chập k của n: C_n^k trong hệ thống kí hiệu của Anh - Mỹ được dùng là $\binom{n}{k}$ hoặc ${}^nC_k$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

UNIT 2

Problem

A six-faced die was throw 28 times.

The table shows the number of times that each possible score occurred

Score	1	2	3	4	5	6
Frequency	8	6	6	2	4	2

a) Write down the modal score.

b) After the 27^{th} throw the median score was 2. What was the least possible score on the 28^{th} throw?

c) Theo die was then throw twice more. The mean srore of all 30 throws was exactly 3. What were the scores on the extra two throws?

Vocabulary

face mặt

die con súc sắc

throw tung, ném

score số điểm, bàn thắng, số chấm (nghĩa trong bài)

median số trung vị (số trung bình của 2 kết quả đứng giữa nếu số phép thử là chẵn hoặc của kết quả chính giữa nếu số phép thử là lẻ, sau khi đã xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn).

mean trung bình, trung bình cộng

mode mốt, thế vị, đa tần (kết quả của biến cố xảy ra nhiều nhất hay phép thử xảy ra tần số cao nhất)

modal tính từ của mode

frequency tần số

Solution (Chờ các bạn gửi về).

VŨ KIM THỦY

SOLUTION OF PREVIOUS ISSUE

(UNIT 1)

(a) (i) Their total monthly expenses

$= \$(640+110+40+180+360+75+165+350)$

$= \$1920.$

(ii) Monthly savings

$= \$(3000 - 1920)$

$= \$\ 1080.$

Therefore percentage of monthly savings

$= \dfrac{1080}{3000} \times 100\% = 36\%.$

(b) Increase in their monthly income

$= \dfrac{8}{100} \times \$3000 = \$240.$

Increase in their monthly expenses

$= \dfrac{3}{100} \times \$640 + \dfrac{6}{100} \times \$110 + \dfrac{9}{100} \times \$165$

$= \$\ (19.20 + 6.60 + 14.85)$

$= \$\ 40.65$

(i) Their new monthly savings

$= \$1080 + \$240 - \$40.65$

$= \$1279.35$

(ii) Percentage increase in their monthly savings

$= \dfrac{1279.35 - 1080}{1080} \times 100\% \approx 18.46\%.$

Nhận xét. 1. Các bạn cần chú ý viết số thập phân trong ngôn ngữ tiếng Anh dùng dấu chấm (.) chứ không dùng dấu phẩy (,). Dấu phẩy được dùng phân lớp khi viết số nguyên, ví dụ số 128 triệu viết là 128,000,000.

2. Phải chuyển kí hiệu $x\%$ thành $\dfrac{x}{100}$ khi thực hiện phép tính nhưng để có kết quả % thì bắt buộc phải nhân với 100% để có đáp số là bao nhiêu %.

3. Có bốn bạn giải rất tốt bài này được nhận quà tặng.

Trần Văn Thơ, 11A2, THPT Trần Phú, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Huyền Mai*, 9D, THCS Yên Thịnh, TP Yên Bái, **Yên Bái**; *Vũ Thị Ngọc Tuyết*, 12A2, THPT Tiên Lữ, **Hưng Yên**; *Nguyễn Ngọc Kỳ Nam*, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**.

Các bạn sau có lời giải tương đối tốt: **Lạng Sơn:** *Nguyễn Ngọc Toàn*, 12A, THPT Chu Văn An; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hậu*, 11A2, THPT Gia Bình 1; **Vĩnh Phúc:** *Huỳnh Thu Trang*, 8A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, *Trương Thanh Thúy*, K28G, Toán Tin, ĐHSP Hà Nội 2; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thị Hồng Nhung*, 8A, THCS TTr Sông Thao, Cẩm Khê, *Phạm Thị Ngọc Tuyết*, 12C, THPT Đoan Hùng; **Hưng Yên:** *Nguyễn Bảo Ngọc*, 9C, *Nguyễn Quốc Ân*, TX Hưng Yên; **Hòa Bình:** *Nguyễn Thị Thanh Hà*, 12A7, Lương Sơn.

BNH

Kết quả

THI THƠ NĂM BÍNH TUẤT

Đúng như dự đoán của những người tổ chức, thơ Xuân của dân toán gửi về hưởng ứng vừa sớm vừa nhiều. Đề khó ở chỗ bắt buộc các chữ đầu mà trong đó có các từ *phải, càng* và có tới hai từ *toán*. Vậy mà vẫn có nhiều bạn viết được thành bài lục bát thì cái khó càng tăng vì chỉ được viết 11 câu chứ không phải số chẵn câu. Bạn *Nguyễn Hoàng Anh*, 12C, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, **Thanh Hóa** viết bài thi có đoạn:

"... Tới lui tìm lục giấy tờ
Toán ta đã giỏi, làm thơ khó gì.
Phải hay, hay thật mới thi
Toán thi trí tuệ, thơ thi trữ tình"...

Bạn *Nguyễn Thị Hương*, 10V, THPT Bán công Bình Giang, **Hải Dương** viết : "Em thích rất nhiều mục của báo như Giải trí toán học, Lịch sử toán học... và trong số này thì em thấy rất thích thú với mục thi thơ năm Bính Tuất và mời đối". Bạn *Trương Văn Hợp*, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa** có những câu:

"...Tới bưu điện để mua nào
Toán tuổi trẻ với biết bao diệu kì
Phải mua ngay kẻo hết đi
Toán hay, không báo lấy gì đọc đây"...

Tiếc là khuôn khổ báo có hạn không thể đăng được nhiều bài. Xin chọn đăng ba bài chào xuân mới.

XUÂN ĐẾN TRONG TOÁN

Năm *ba cành đào dường đã hé*
Mới *hay xuân đương bước nhẹ nhàng về*
Tới *hồn người bằng những điệu si mê*
Toán *cũng ngỡ như tràn trề xuân sắc*
Phải *trông lại quãng thời gian trước mặt*
Toán *đã đi đã sống thật với đời*
Hơn *trăm ngàn tri thức tặng muôn người*
Trẻ *không phải chỉ một thời là hết*
Càng *thêm tuổi toán càng bất diệt*
Trẻ *và trong tựa tinh khiết suối nguồn*
Mãi *gắn với đời và lớp trẻ thân thương.*

ĐINH TUẤN ANH
(Số 73, phố Muối, Phường Tam Thanh, Lạng Sơn)

CHÚC BÁO

Năm *mới chúc báo mấy điều*
Mới *từng trang viết, thêm nhiều bài hay*
Tới *tay bạn đọc đúng ngày*
Toán *học Tuổi trẻ làm say lòng người*
Phải *chi được ước một lời*
Toán *cùng tuổi trẻ muôn đời bên nhau*
Hơn *mình trong những số sau*
Trẻ *càng tươi mãi, Toán màu đậm hơn*
Càng *thêm sức sống trường tồn*
Trẻ, *già đọc báo đều thầm khen hay*
Mãi *lưu đến tận sau này...*

THÂN NGỌC THÀNH
(Non Dài, Quang Tiến, Tân Yên, Bắc Giang)

XỨNG DANH ĐẤT HỌC

Năm *sáu mươi tư ra số đầu tiên*
Mới *đó mà mỗi kì ba vạn bản*
Tới *hôm nay tạp chí là người bạn*
Toán *trong ta, trong cuộc sống đời thường*
Phải *chắt lọc tinh túy của muôn phương*
Toán *như thể chảy hồng trong huyết quản*
Hơn *bốn mươi năm trưởng thành dày dạn*
Trẻ *trung thêm, vững chắc giữa đường đời*
Càng *yêu thương đất nước, con người*
Trẻ *cùng già càng say mê học toán*
Mãi *xây đắp tương lai sáng lạn.*

HOÀNG MINH ĐỨC
(Tổ Toán, THCS Quảng Minh, Quảng Trạch, Quảng Bình)

Hẹn các bạn một mùa xuân khác, chúng ta lại cùng nhau làm thơ và vui đọc những tứ thơ của người yêu toán.

VŨ VỴ HOÀNG

CÂU ĐỐI

• Câu đối chính là toán vì phải chọn trong các phương án sao cho hai vế đối nhau vừa về ý, vừa từ và cả âm bằng trắc sao cho chỉnh. Cái khó của vế đối ra

(Xem tiếp bìa 3)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 344 (2-2006)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập: PHAN DOÃN THOẠI. *Phó ban Phụ trách :* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC. *Thư kí Tòa soạn:* VŨ KIM THỦY.
Biên tập : HỒ QUANG VINH. *Trị sự, Chế bản :* VŨ ANH THƯ , NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, *231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.* ĐT : 08.8309049.

CÂU LẠC BỘ *(Tiếp trang 31)*

NAM MỚI, CỘNG SỨC, THÊM BỀN CHÍ,
KHÔNG CHIA LÒNG, BỚT PHÂN TÂM,
THÀNH CÔNG NHÂN BỘI

là có quá nhiều từ toán: năm, không, tâm, cộng, bớt, chia, phân, nhân, bội trong đó có đủ bốn phép toán. Bạn *Hồ Bá Linh*, 11E, THPT Quỳnh Lưu I, **Nghệ An** đã đối

XUÂN SANG, NHÂN LỰC, TĂNG VỮNG TRÍ,
CHẲNG LÙI BƯỚC, GIẢM HAO LỰC,
THẮNG LỢI CỘNG THÀNH

• Gửi câu đối mới về, bạn *Trần Công Truyền*, 12A1, THPT Nguyễn Trung Thiên, Thạch Khê, Thạch Hà, **Hà Tĩnh** viết :

NĂM MỚI SANG, ĐỪNG QUÊN GIẢI TOÁN
BÁO TOÁN VỀ, PHẢI NHỚ THAM GIA

Bạn *Nguyễn Văn Tân*, 12A2, THPT Anh Sơn I, **Nghệ An** viết:

ĐẤT NƯỚC MỞ CỬA, ĐÓN CHÀO
TINH HOA BỐN BỂ, NGÀY ĐỔI MỚI
DỰNG XÂY LÂU ĐÀI TOÁN HỌC

PHÚT GIÂY NGUYÊN ĐÁN, NHỚ VỀ
MỘT THỜI TUỔI TRẺ, KHẮC GIAO THỪA
NGUYỆN CẦU ĐẤT NƯỚC VẠN XUÂN

Nhận xét. Các bạn có tên ở trên và các bạn sau được nhận quà của CLB:

Cao Xuân Diệp, khoa Tự nhiên CĐSP Nam Khê, Uông Bí, **Quảng Ninh**; *Nguyễn Thạc Dũng*, Bộ môn Toán, ĐH Xây dựng **Hà Nội**; *Nguyễn Anh Thuấn*, GV THCS Trần Văn Ơn, **Hải Phòng**; *Nguyễn Mạnh Nhất*, 12A1, THPT Thuận Thành số 1, *Nguyễn Thị Thuận*, GV THCS Từ Sơn, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Phi Hùng*, GV THPT Trần Quốc Tuấn, Phú Hòa, **Phú Yên**; *Trần Văn Phong*, Sư phạm Toán K26, ĐH **Quy Nhơn**; *Lê Thị Lan*, số 01 tiểu khu Tân Sơn, TTr Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa;** *Ngô Thị Bích Hường*, 4B, Tiểu học Nam Ban 2, Lâm Hà, **Lâm Đồng**.

VŨ SƠN NAM

THỂ LỆ GỬI BÀI
CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

- Bài cần đánh máy hoặc viết tay sạch sẽ, không dập xóa, trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không gửi bản photocopy. Nếu bài đã chế bản nên gửi kèm file. Phông chữ nên là unicode.
- Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 4 trang A4 chế bản vi tính.
- Bài dịch cần gửi kèm bản photocopy bài gốc.
- Mỗi đề ra đều có kèm lời giải và không ghi 2 đề trên cùng 1 tờ giấy. Không nhận đề ra của học sinh phổ thông.
- Bài viết cho mục *Học sinh tìm tòi* cần có thẩm định của thầy giáo toán và xác nhận của Hiệu trưởng.
- Ghi đầy đủ họ và tên thật, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần. Bài không đăng không trả lại bản thảo.
- Ảnh tập thể gửi đăng phải là ảnh màu, cỡ nhỏ nhất 9×12. Sau ảnh ghi rõ nội dung ảnh và tên người chụp.
- Đối với bài giải gửi dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng. Phía trên bên trái ghi số thứ tự của bài, bên phải ghi rõ họ tên, trường lớp, địa chỉ gia đình. Bài chỉ gửi về một địa chỉ : *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội.* Ngoài phong bì ghi rõ : *Dự thi giải toán số tạp chí* ... Không gửi bài giải của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì. Bài gửi có dán tem. Không cần gửi thư bảo đảm.
- Thời hạn nhận bài giải *Đề ra kì này* là hai tháng tính từ cuối tháng số tạp chí đó. Các bài giải khác là 1 tháng.
- Bài đã gửi cho TH&TT thì không gửi cho các tạp chí khác.

THTT

TOÁN VÀ THƠ

Tôi dạy học sinh làm Toán
Cuộc đời dạy tôi làm Thơ.
Toán nhìn Thơ sững sờ,
Thơ ngắm Toán ngẩn ngơ.

Một bài toán loay hoay cả cuộc đời,
Một bài thơ trăn trở bao năm tháng.
Tôi bâng khuâng: hẳn có Thơ trong Toán,
Em mỉm cười: phải có Toán trong Thơ.

Xuân 2006
PHAN CUNG ĐỨC
(GV khối PTCTT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

TRƯỜNG THCS CHU VĂN AN, THỪA THIÊN - HUẾ

Hiệu trưởng
Nguyễn Phương

Địa chỉ: 36A Dương Văn An, thành phố Huế, tỉnh Thừa Thiên - Huế.

Điện thoại: 054.810.649.

Hiệu trưởng: Nguyễn Phương.

Trường THCS Chu Văn An được thành lập vào năm học 2000-2001.

Hiện nay, trường có 18 lớp học với hơn 1800 học sinh, 80 giáo viên và cán bộ nhân viên.

Nhà trường đặc biệt chú trọng việc đổi mới phương pháp giảng dạy, đẩy mạnh các hoạt động giáo dục ngoài giờ lên lớp, ứng dụng công nghệ mới và đưa các thiết bị hiện đại vào giảng dạy để nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện cho học sinh.

Năm học 2004-2005, thầy cô giáo và học sinh trường THCS Chu Văn An đã có nhiều cố gắng vươn lên, đạt được nhiều thành tích đáng phấn khởi trong học tập và trong các mặt hoạt động khác như: giải Nhất môn Thi giải toán bằng máy tính bỏ túi cấp Quốc gia, giải Nhất môn Văn, giải Nhì môn Anh văn, giải Ba môn Toán cấp Tỉnh, giải Nhất toàn đoàn trong kì thi học sinh giỏi cấp Thành phố. Nhiều giải trong các hoạt động văn hóa, văn nghệ, TDTT...

Tập thể giáo viên trường
THCS Chu Văn An, Thừa Thiên - Huế

Đặc biệt, trường THCS Chu Văn An là một trong những nơi đào tạo các vận động viên cho tỉnh và thành phố Huế. Trong Hội khỏe Phù Đổng lần thứ IV tổ chức tại thành phố Huế, trường có nhiều học sinh đạt huy chương. Em *Nguyễn Thị Thuận* đạt 3 huy chương Vàng môn Bơi lội, được mệnh danh là "Cô gái vàng trên đường đua xanh", góp mặt trong đoàn vận động viên Việt Nam tham dự Seagames 23. Trường được Sở TDTT tặng giấy khen về thành tích xuất sắc trong phong trào TDTT liên tục trong 2 năm 2003, 2004.

Thầy trò trường THCS Chu Văn An, Thừa Thiên - Huế quyết tâm phát huy những thành tích trên để từng bước khẳng định là một trong những trường trọng điểm về chất lượng toàn diện của ngành Giáo dục thành phố Huế.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT46M6

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ti CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2006

Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng