Sở G Dục Đ Tạo

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

5
2000

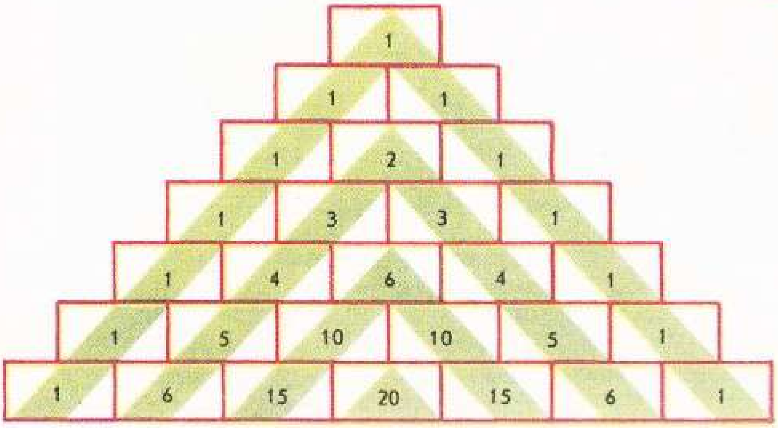
SỐ 275 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Ngày 19-5-1958, học sinh Trường Trưng Vương Hà Nội
mừng sinh nhật Bác Hồ tại Phủ Chủ tịch

KỈ NIỆM 110 NĂM NGÀY SINH CỦA BÁC HỒ KÍNH YÊU

TOÁN HỌC MUÔN MẦU

TAM GIÁC SỐ PATXCAN



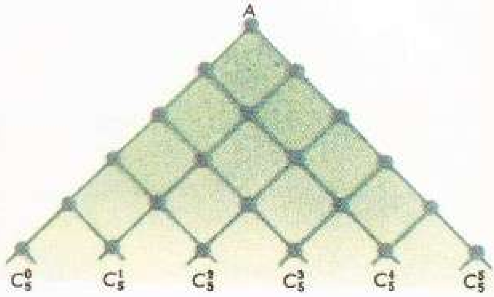
Hình 1

- B. Patxcan (nhà toán học người Pháp) sinh ngày 19-4-1623, tham gia nhóm nghiên cứu toán từ năm 13 tuổi dưới sự dìu dắt của thầy Đờgiác (người sáng lập ra hình học xạ ảnh)
- Năm 17 tuổi, B. Patxcan công bố luận văn về "Thiết diện hình nón" trong đó có định lí về "Lục giác thần kì", được Đờgiác gọi là "định lí lớn Patxcan".
- Năm 31 tuổi, công bố hàng loạt kết quả nghiên cứu của mình, trong đó có luận văn về "Tam giác số". Tam giác số Patxcan (hình 1) như là sự nảy sinh từ một loạt các bài toán, chẳng hạn :

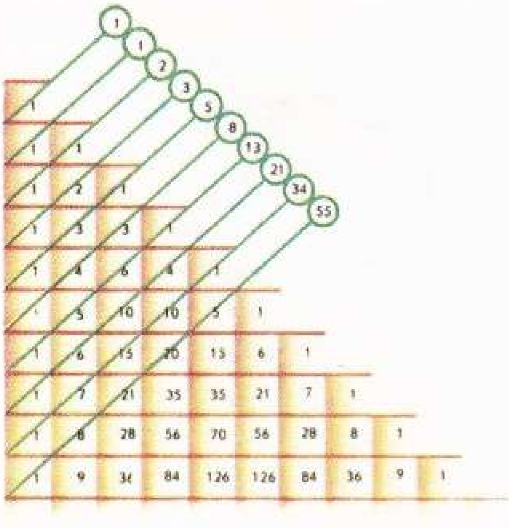
1) Có bao nhiêu tập con gồm k phần tử của một tập hợp gồm n phần tử ?

2) Tìm hệ số của x^k trong khai triển $(x+1)^n$

3) Có bao nhiêu đường đi ngắn nhất khác nhau từ điểm A (hàng $n = 0$) theo lưới tới nút thứ k (k tính từ 0 đến n) ở hàng thứ n của lưới ? (hình 2)



Hình 2



Hình 3

Các bài toán trên đều có chung kết quả : $\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$ được kí hiệu là C_n^k và gọi là *số các tổ hợp chập k của n phần tử.*

- **Dành cho bạn đọc :**

1) Hình vẽ 3 có gợi ý cho bạn phát biểu một tính chất của tam giác số Patxcan hay không ? Bạn hãy chứng minh tính chất mà bạn phát biểu.

2) Quan sát tam giác Patxcan bạn có thể tìm số k sao cho C_n^k đạt giá trị lớn nhất với mỗi giá trị cho trước của n ?

5 tặng phẩm dành cho 5 bạn nhanh tay, nhanh mắt nhất !

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 275 (5-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

Để tưởng nhớ và biết ơn sự quan tâm sâu sắc của Bác Phạm Văn Đồng với sự nghiệp giáo dục thế hệ trẻ, TH&TT trân trọng đăng lại Thư của Bác gửi các bạn trẻ yêu toán.

THƯ CỦA THỦ TƯỚNG PHẠM VĂN ĐỒNG GỬI CÁC BẠN TRẺ YÊU TOÁN

Các bạn thân mến,

Tôi rất hoan nghênh các bạn trẻ ham mê khoa học, yêu thích toán học. Trong sự nghiệp chống Mỹ cứu nước và xây dựng chủ nghĩa xã hội, khoa học, kỹ thuật có vai trò rất quan trọng. Trong các môn khoa học và kỹ thuật, toán học giữ một vị trí nổi bật. Nó có tác dụng lớn đối với nhiều ngành khoa học khác, đối với kỹ thuật, đối với sản xuất và chiến đấu. Nó còn là môn thể thao của trí tuệ, giúp chúng ta nhiều trong việc rèn luyện phương pháp suy nghĩ, phương pháp suy luận, phương pháp học tập, phương pháp giải quyết các vấn đề, giúp chúng ta rèn trí thông minh sáng tạo. Nó còn giúp chúng ta rèn luyện nhiều đức tính quý báu khác như : cần cù và nhẫn nại, tự lực cánh sinh, ý chí vượt khó, yêu thích chính xác, ham chuộng chân lý. Dù các bạn phục vụ ở ngành nào, trong công tác nào, thì các kiến thức và phương pháp toán học cũng rất cần cho các bạn.

Tôi vui mừng thấy tờ báo "Toán học và Tuổi trẻ" đã có những đóng góp thiết thực cho phong trào học toán của các bạn. Mong rằng các bạn sẽ dùng nó một cách tốt nhất.

Trong sản xuất và chiến đấu, thanh niên ta đã làm rạng rỡ cho đất nước bằng những gương dũng cảm và sáng tạo tuyệt vời. Mong rằng thanh niên ta hãy nêu cao chủ nghĩa anh hùng cách mạng đó trong việc tiến quân vào khoa học và kỹ thuật để từng bước lập nên những thành tích tốt đẹp về khoa học, kỹ thuật, và riêng về toán học, góp phần xứng đáng vào sự nghiệp chống Mỹ, cứu nước và công cuộc xây dựng chủ nghĩa xã hội hiện nay và sau này.

Hà Nội, ngày 10 tháng 10 năm 1967
PHẠM VĂN ĐỒNG

THẾ HỆ TRẺ VIỆT NAM VÔ CÙNG THƯƠNG TIẾC BÁC PHẠM VĂN ĐỒNG

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

DỰNG CÁC ĐOẠN THẲNG VÔ TỈ

PHẠM HÙNG
(*Hà Nội*)

I. KIẾN THỨC CƠ SỞ :

Trong các sách giáo khoa Hình học 8-9, đã trình bày các kiến thức sau :

1) *Dựng đoạn thẳng tỉ lệ :* Cho trước một đoạn thẳng a, hãy dựng đoạn thẳng x sao cho $x = ak$ với k là số hữu tỉ dương, khác không cho trước.

2) *Dựng đoạn trung bình nhân :* Cho trước hai đoạn thẳng a, b hãy dựng đoạn thẳng x sao cho $x = \sqrt{ab}$.

3) *Dựng đoạn thẳng Pitago :* Cho trước hai đoạn thẳng a, b hãy dựng các đoạn thẳng x, y sao cho $x^2 = a^2 + b^2$ và $y^2 = a^2 - b^2$ (a > b). Nói riêng, khi $b = a\sqrt{k}$ với $k = 1, 2, 3, ...$ ta dựng được đoạn thẳng $x = a\sqrt{1+k}$.

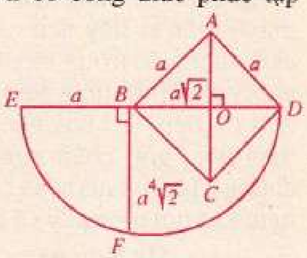
II. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Dựa vào các kiến thức trên, chúng ta có thể giải quyết được rất nhiều bài toán dựng hình mà mấu chốt của nó là dựng các đoạn thẳng trong dạng biểu thức vô tỉ của các đoạn thẳng ban đầu.

Sau đây ta sử dụng các kiến thức trên để dựng một số đoạn thẳng vô tỉ có công thức phức tạp hơn.

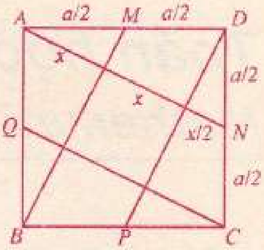
Bài toán 1. Cho trước đoạn thẳng a. Dựng đoạn thẳng $a\sqrt[4]{2}$

Giải. Dựng hình vuông $ABCD$ cạnh a cho trước. Trên tia đối của tia BD, lấy $BE=a$. Dựng đường tròn đường kính ED. Qua B dựng tia vuông góc với ED cắt đường tròn tại F thì $BF^2 = a.a\sqrt{2} \Rightarrow BF = a\sqrt[4]{2}$ là đoạn phải dựng (Hình 1)



Hình 1

Bài toán 2. Cho trước một hình vuông cạnh a. Hãy cắt hình vuông trên ra không quá 10 phần để ghép lại thành 5 hình vuông nhỏ bằng nhau.



Hình 2

Giải: Việc tạo ra 5 hình vuông cạnh x, từ hình vuông ban đầu cạnh a, tương đương với việc dựng đoạn thẳng $x = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ nghĩa là $5x^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5x}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Từ đó : Dựng các trung điểm M, N, P, Q của các cạnh tương ứng AD, DC, CB, BA của hình vuông và cắt theo BM, DP, AN, CQ ta sẽ được một hình vuông ở chính giữa (cạnh x), ngoài ra từ 4 mảnh tam giác và 4 mảnh hình thang đôi một ghép lại ta được 4 hình vuông nữa (cạnh x). (Hình 2).

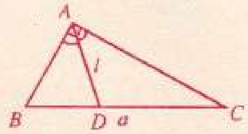
Bài toán 3. Dựng tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^o$) biết độ dài phân giác trong $AD = l$ và cạnh huyền $BC = a$.

Giải : Ta đã biết :

$2bc = l\sqrt{2}(b+c)$ và

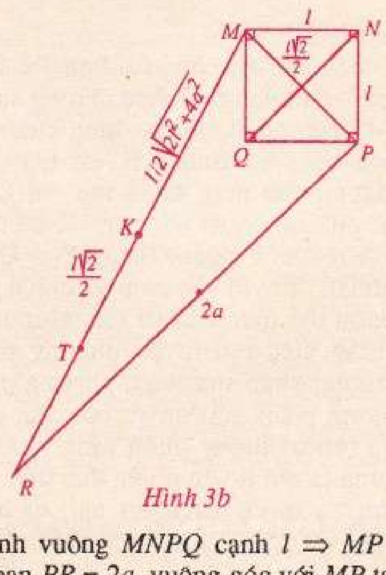
$b^2 + c^2 = a^2$

$\Rightarrow (b+c)^2 - l\sqrt{2}(b+c) - a^2 = 0 \Rightarrow b + c = \frac{1}{2}(l\sqrt{2} + \sqrt{2l^2 + 4a^2})$



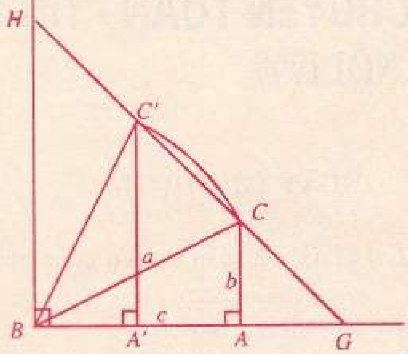
Hình 3a

Do đó bài toán quy về dựng đoạn $b+c$ khi biết l và a. Trên hình 3b :



Hình 3b

dựng hình vuông $MNPQ$ cạnh $l \Rightarrow MP = l\sqrt{2}$; Dựng đoạn $PR = 2a$, vuông góc với MP tại P. Từ đó $MR = \sqrt{2l^2 + 4a^2}$. Lấy trung điểm K của MR và đặt $KT = \frac{l\sqrt{2}}{2}$. Ta có $MT = \frac{1}{2}(l\sqrt{2} + \sqrt{2l^2 + 4a^2})$.



Hình 3c

Trên hình 3c : dựng tam giác vuông cân BGH có $BG=BH=MT=\frac{1}{2}(l\sqrt{2}+\sqrt{2l^2+4a^2})$, lấy B làm tâm quay đường tròn bán kính a, cắt GH tại C. Từ C hạ $CA \perp BG$ tại A. Ta có tam giác vuông ABC cần dựng thỏa mãn bài ra vì $BC = a$;

$\hat{A} = 90°$; $b+c=\frac{1}{2}(l\sqrt{2}+\sqrt{2l^2+4a^2})$

$\Rightarrow 2(b+c) - l\sqrt{2} = \sqrt{2l^2+4a^2}$

$\Rightarrow (b+c)^2 - l\sqrt{2}(b+c) - a^2 = 0$

$\Rightarrow l = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \Rightarrow l = AD$ là đường phân giác trong của $\hat{A} = 90°$ ở tam giác vuông ABC. Bài toán luôn dựng được nếu $a \geq 2l$ (tồn tại C trên GH).

III. CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1) Dựng ngũ giác đều cạnh a cho trước.

2) Cắt một hình vuông cạnh a cho trước thành 10 hình vuông bằng nhau.

3) Dựng thập giác đều cạnh a cho trước./.

THÔNG BÁO

Bạn N.H. Việt ở Gia Lương (B.N) nhận được lá thư của bạn L.N. Hà ở Hoằng Hóa (T.H) mời tham gia chương trình chơi giải trí, bằng cách gửi cho bạn thứ nhất trong danh sách 8 bạn (mà bạn Hà gửi đến) một phong bì kèm theo 2.000đ và một tấm thiếp, sau đó bỏ tên bạn này và ghi thêm tên mình cùng địa chỉ vào cuối danh sách rồi sao thành 10 bản gửi cho 10 bạn nào đó để mời tham gia chơi với thể lệ như trên.

Nội dung bức thư còn nói là cuộc chơi này do *Viện Toán học và Tuổi trẻ* tổ chức. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ lưu ý các bạn : *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Viện Toán học, Hội Toán học Việt Nam* ***không tổ chức cuộc chơi*** trên.

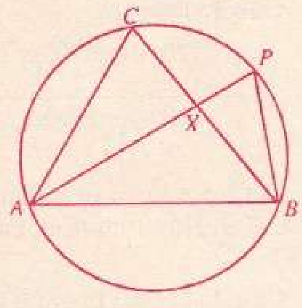
THTT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 29

Problem. Let P be a variable point on the arc of a circle cut off by a chord AB. Prove that the sum of the chords AP and PB is a maximum when P is at the midpoint C of the arc AB.

Solution.



Suppose P lies between C and B, and that AP crosses CB at X. Then the triangles ACX and BXP are equiangular, and therefore similar, with ACX clearly the bigger of the two. Thus, for some $k>1$, the sides of ACX are k times the corresponding sides of PXB :

$AC = k.PB$, $CX = k.PX$, $AX = k.BX$.

In this case, the difference

$(AC+CB) - (AP+PB)$

$= (AC+CX+XB) - (AX+XP+PB)$

$= (AC+CX-AX) - (XP+PB-XB)$

$= (k.PB + k.PX - k.BX) - (XP+PB-XB)$

$= (k-1)(PB+PX-BX)$,

which, from $k > 1$ and the triangle inequality, is the product of two positive factors. Thus this difference is positive, and we have the desired inequality

$$AC+CB > AP+PB.$$

Từ mới:

variable	= biến thiên, biến đổi (tính từ), biến số (danh từ)
arc	= cung
cut of	= cắt rời (động từ)
chord	= dây cung
maximum	= cực đại
suppose	= giả sử
cross	= giao (động từ), sự chéo nhau, sự giao nhau (danh từ)
equiangular	= đẳng giác, có góc bằng nhau (tính từ)
similar	= đồng dạng
clearly	= rõ ràng
corresponding	= tương ứng (tính từ)
difference	= hiệu
factor	= thừa số

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ THI MÔN TOÁN VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 1999

NGÀY THI THỨ NHẤT
(Thời gian : 180 phút)

Câu 1. 1) Tính

$$A = \frac{\left(1+\frac{1999}{1}\right)\left(1+\frac{1999}{2}\right)\left(1+\frac{1999}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1999}{1000}\right)}{\left(1+\frac{1000}{1}\right)\left(1+\frac{1000}{2}\right)\left(1+\frac{1000}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1000}{1999}\right)}$$

2) Cho a là số tự nhiên được viết bằng 222 chữ số 9. Hãy tính tổng các chữ số của số $n = a^2+1$.

Câu 2. 1) Giải phương trình :

$$\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x(x-3)}$$

2) Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\frac{x^2-(3a-2)x+2a^2-5a-3}{x^2+5x-14} = 0$$

Câu 3. Chứng minh rằng :

$$\frac{2x}{x^6+y^4} + \frac{2y}{y^6+z^4} + \frac{2z}{z^6+x^4} \le \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4}$$ đúng

với mọi $x, y, z > 0$.

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ xOy cho hai điểm $A(-3, 0)$ và $B(-1, 0)$. Xét hai điểm M và N thay đổi trên trục tung sao cho AM và BN luôn vuông góc với nhau.

1) Chứng minh rằng AN và BM vuông góc với nhau và tích $OM.ON$ không đổi khi M, N biến thiên. Từ đó suy ra đường tròn đường kính MN luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm tọa độ hai điểm cố định này.

2) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Xác định vị trí M, N sao cho tam giác AMN có diện tích nhỏ nhất.

NGÀY THI THỨ HAI
(Thời gian : 150 phút)

Câu 1. 1) Giải và biện luận theo a phương trình :

$$(x^2-5x+6)\sqrt{x^2-5ax+6a^2} = 0$$

2) Với giá trị nào của tham số a, hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 4 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} = \sqrt{2-a^2}+\sqrt{2-\frac{1}{a^2}}+\frac{a^2+1}{a} \end{cases}$$

có ít nhất một nghiệm thỏa mãn điều kiện $x > 0$, $y > 0$. Với các giá trị a tìm được, hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 2. 1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của hệ phương trình hai ẩn sau :

$$\begin{cases} 2^x = 2y \\ 2^y = 2x \end{cases}$$

2) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc ba với hệ số của x^3 là một số nguyên. Biết rằng $P(1999) = 2000$ và $P(2000) = 2001$. Chứng minh rằng $P(2001) - P(1998)$ là một hợp số.

Câu 3. Cho x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$T = \frac{x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4}{x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC có các cạnh không bằng nhau. Gọi G là trọng tâm của tam giác, A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua G. Biết $AB = 2BC$ và diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ bằng 72. Tính diện tích miền lục giác chung của hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$.

Bạn có biết ?

- **Lũy thừa** theo chữ Hán có nghĩa là : nhân chồng chất lên.
- Năm 1494 trong quyển sách toán in đầu tiên ở Italia của Lucki Paxiôli: (L. Pacioli: 1450–1520) đã sử dụng cách viết tắt về lũy thừa của một ẩn số.
- Sau đó nhà toán học Pháp N.Sukê (N. Chuquet) đã sử dụng kí hiệu 12^1, 12^2, 12^3... để viết $12x$, $12x^2$, $12x^3$...
- **Kí hiệu** x^2, x^3, ... như hiện nay lần đầu tiên được viết bởi nhà toán học Pháp Rơnê Đềcac (R. Descartes: 1596-1650) trong quyển *Hình học* (1637) (Ảnh bên).

DÀNH CHO CÁC BẠN THI VÀO ĐẠI HỌC

TỪ MỘT BÀI TOÁN ĐẠI SỐ ĐẾN CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

LƯU XUÂN TÌNH
(GV trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Thạc sĩ Lưu Xuân Tình, sinh ngày 29.01.1956 tại Nghi Sơn, Tĩnh Gia, Thanh Hóa. Đã giảng dạy tại Khối Chuyên Toán và Khoa Toán, ĐHSP Vinh từ năm 1977 đến năm 1988. Hiện nay là giáo viên trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa. Đã đào tạo học sinh đạt gần 40 giải Toán quốc gia, 1 Huy chương Đồng Olympic Toán châu Á - Thái Bình Dương, 1 Huy chương Vàng và 1 Huy chương Bạc Olympic Toán quốc tế.

Trong quá trình dạy và học toán, chúng ta đã giải nhiều bài tập, chứng minh nhiều đẳng thức, bất đẳng thức... nhưng thông thường chỉ dừng lại ở các bài tập rời rạc đó, ít khi trăn trở suy ngẫm tìm mối liên hệ giữa chúng với nhau, "tìm ra cái có ích khi giải các bài toán khác" (Pôlya). Đặc biệt là mối quan hệ giữa các bài toán đại số với các bài toán hình học. Ở bài viết này, xin giới thiệu một cách tập dượt sáng tạo, bắt đầu từ một kết quả trong bài toán đại số rồi liên hệ với các kết quả quen thuộc trong tam giác, từ đó có thể khai thác và sáng tạo ra nhiều bài toán mới đầy thú vị.

Bài toán đại số. Đối với bất kì $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ta luôn có :

$$\frac{x}{2} < tg\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi} < \sin x < x.$$

Chứng minh. Dưới đây chỉ chứng minh hai bất đẳng thức :

$$\sin x > \frac{2x}{\pi} \text{ và } tg\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}.$$

a) Đặt $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$ là hàm số xác định và liên tục trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Đặt $g(x) = x\cos x - \sin x$ trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ khi đó $g'(x) = -x\sin x \le 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trong đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nên $g(x) < g(0) = 0$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Do đó $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ hay $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) Đặt $h(x) = \frac{1}{x}\,tg\frac{x}{2}$ xác định và liên tục trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có $h'(x) = \dfrac{x - \sin x}{2x^2\cos^2\frac{x}{2}} > 0\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $h(x)$ đồng biến, do đó $h(x) < h(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ hay $tg\frac{x}{2} < \frac{2x}{\pi}$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).

Xét ΔABC với các kí hiệu quen biết : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi A, B, C là độ lớn các góc trong tam giác tính bằng radian ; r, R, p, S thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nửa chu vi và diện tích tam giác ; l_a, h_a, m_a, r_a tương ứng là độ dài đường phân giác, đường cao, đường trung tuyến và bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A...

Bài toán 1. Trong tam giác ABC nhọn ta luôn có :

$$\frac{p\pi}{4R} < A\cos^2\frac{A}{2} + B\cos^2\frac{B}{2} + C\cos^2\frac{C}{2} < \frac{p}{R}.$$

Từ định lí hàm số sin quen thuộc trong tam giác ta có :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$$

$$A\cos^2\frac{A}{2} < 2tg\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \sin A < \frac{4}{\pi}A\cos^2\frac{A}{2}$$

Bài toán 2. Trong tam giác ABC nhọn, ta luôn có :

$$\sqrt{2p} < \sqrt{r_a \sin A} + \sqrt{r_b \sin B} + \sqrt{r_c \sin C} < \frac{\pi}{2}\sqrt{2p}.$$

Bài toán này được xây dựng từ công thức $r_a = p\text{tg}\frac{A}{2}$, $r_b = p\text{tg}\frac{B}{2}$, $r_c = p\text{tg}\frac{C}{2}$, kết hợp với kết quả $\frac{A}{\pi} < \sin\frac{A}{2} < \frac{A}{2}$ ta được $\frac{A\sqrt{2p}}{\pi} < \sqrt{r_a \sin A} = \sqrt{2p}\,\sin\frac{A}{2} < \sqrt{2p}\,.\,\frac{A}{2}$

Do đó $\frac{\sqrt{2p}}{\pi}(A+B+C) <$

$$\sqrt{r_a\sin A} + \sqrt{r_b\sin B} + \sqrt{r_c\sin C} < \sqrt{2p}\,\frac{A+B+C}{2}$$

Bài toán 3. Trong tam giác ABC nhọn, ta luôn có :

$$4 < h_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + h_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) + h_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) < 2\pi.$$

Bài toán được xuất phát từ kết quả

$$\sin B = \frac{h_a}{c} = \frac{h_c}{a}, \sin A = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b},$$

$$\sin C = \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a}$$

và từ kết quả của bài toán đại số ta có : $2 < \sin A + \sin B + \sin C < \pi$. Do đó ta được đpcm.

Bài toán 4. Trong ΔABC nhọn ta luôn có :

$$\frac{12R}{\pi} < \frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ca}{l_b} < 3\pi R$$

Bài toán được xây dựng từ công thức $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ và kết hợp với kết quả bài toán trên :

$$\frac{R(B+C)}{\pi - A}\pi > \frac{bc}{l_a} = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2R(\sin B+\sin C)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)} > \frac{R.\frac{2(C+B)}{\pi}}{\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R(B+C)}{B+C} > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R}{\pi}.\frac{B+C}{B+C}$$

$$\Rightarrow \pi R > \frac{bc}{l_a} > \frac{4R}{\pi}.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\pi R > \frac{ab}{l_c} > \frac{4R}{\pi}$, $\pi R > \frac{ca}{l_b} > \frac{4R}{\pi}$ và suy ra đpcm.

Bài toán 5. Trong tam giác ABC nhọn, ta có :

$$\pi(2R-r) < aA + bB + cC < 4(2R-r)$$

Từ các kết quả :

$$r_a = p\,\text{tg}\frac{A}{2}\ ,\quad r_b = p\text{tg}\frac{B}{2}\ ,\quad r_c = p\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$r = (p-a)tg\frac{A}{2} = (p-b)\,tg\frac{B}{2} = (p-c)\,tg\frac{C}{2}$$

dẫn đến $r_a = r + a\,tg\frac{A}{2}$, $\quad r_b = r + b\,tg\frac{B}{2}$,

$$r_c = r + c\,tg\frac{C}{2}$$

Suy ra : $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Áp dụng kết quả bài toán đại số ta được :

$$4R+r = 3r + a\,\text{tg}\frac{A}{2} + b\,\text{tg}\frac{B}{2} + c\,\text{tg}\frac{C}{2} <$$

$$< 3r + \frac{2}{\pi}(aA + bB + cC)$$

$$\text{Và } 4R+r = 3r + a\,\text{tg}\frac{A}{2} + b\,\text{tg}\frac{B}{2} + c\,\text{tg}\frac{C}{2} >$$

$$> 3r + \frac{1}{2}(aA + bB + cC)$$

Từ đó sẽ có đpcm.

Để kết thúc, mời các bạn phân tích để thấy các bài toán sau đây được hình thành từ các công thức quen thuộc nào trong tam giác :

Bài toán : Trong tam giác nhọn ta luôn có :

a) $2\pi p - 8(R+r) < aA+bB+cC < 2\pi p - 2\pi(R+r)$

b) $\frac{\pi S}{2} < (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) < 2S$

c) $abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) < \frac{\pi}{2}abc$

d) $\frac{4}{\pi^2}(A^2+B^2+C^2) < \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3R^2} < A^2 + B^2 + C^2$

e) $4 < l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + l_b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) + l_c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) < 2\pi.$

Cuối cùng với cách làm trên các bạn sẽ viết tiếp được nhiều bài toán mới thú vị hơn (riêng tác giả đã tìm được không ít hơn 50 bài).

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI NĂM 1999

PHẦN I. Dành cho tất cả các thí sinh

Câu I. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax + 2$, a là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = -3$.

b) Tìm tất cả giá trị của a để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một và chỉ một điểm.

Câu II. a) Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x+1} > 3 - \sqrt{x+4}$$

b) Giải phương trình :

$$4^{\lg(10x)} - 6^{\lg x} = 2.3^{\lg(100x^2)}$$

Câu III. a) Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là có hệ thức :

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) = \sqrt{3}.$$

b) Với n là số tự nhiên bất kì lớn hơn 2, tìm x thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ thỏa mãn phương trình :

$$\sin^n x + \cos^n x = 2^{(2-n)/2}$$

Câu IV. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn $Oxyz$ cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình :

$$(d) : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$$

$$(P) : 2x - 2y + z - 3 = 0$$

a) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng (d) với mặt phẳng (P). Tính góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P).

b) Viết phương trình hình chiếu vuông góc (d') của đường thẳng (d) trên mặt phẳng (P). Lấy điểm B nằm trên đường thẳng (d) sao cho $AB = a$, với a là số dương cho trước. Xét tỉ số $\frac{AB + AM}{BM}$ với điểm M di động trên mặt phẳng (P). Chứng tỏ rằng tồn tại một vị trí của M để tỉ số đó đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất ấy.

PHẦN II.

Câu Va. *(Dành cho thí sinh chưa phân ban)*

Cho hàm số $g(x) = \sin x \sin 2x \cos 5x$

a) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $g(x)$

b) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(x)}{e^x + 1} dx$

Câu Vb. *(Dành cho thí sinh chuyên ban).*

a) Tìm 2 số A, B để hàm số $h(x) = \dfrac{\sin 2x}{(2 + \sin x)^2}$ có thể biểu diễn được dưới dạng :

$$h(x) = \frac{A . \cos x}{(2 + \sin x)^2} + \frac{B . \cos x}{2 + \sin x},$$

từ đó tính tích phân $J = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} h(x)dx$

b) Tính tổng :

$$S = C_n^1 - 2.C_n^2 + 3C_n^3 - 4.C_n^4 + ... + (-1)^{n-1} .n.C_n^n$$

(n là số tự nhiên bất kì lớn hơn 2, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. a) Dành cho bạn đọc

b) Ta có : $x^3 + ax + 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3 + 2}{x} = a$

Khảo sát, vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3 + 2}{x}$ dẫn tới $-a < 3 \Leftrightarrow a > -3$.

Câu II. a) Đáp số : $x > 0$

b) • Biến đổi : PT

$$\Leftrightarrow 4^{\lg x + 1} - 6^{\lg x} = 2.3^{2 + 2\lg x}$$

$$\Leftrightarrow 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} = 18\left(\frac{3}{2}\right)^{2\lg x}$$

• Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} = t > 0$ dẫn đến $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow \lg x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2}$.

Câu III. a) $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} - (\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \text{cotg}A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \text{cotg}B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \text{cotg}C\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{3}$$

Trong mọi tam giác ABC ta có :

$$\text{tg}\frac{A}{2} . \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} . \text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} . \text{tg}\frac{A}{2} = 1$$

Ta có : $\left(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\right)^2$

$=\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}+2\geq$

$\geq \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2}+2=3$

$\Rightarrow \text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\text{tg}\frac{A}{2}=\text{tg}\frac{B}{2}=\text{tg}\frac{C}{2}\Leftrightarrow A=B=C$

b) Xét $y=f(x)=\sin^n x+\cos^n x$ với $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ và $n>2$

$y'=n\sin^{n-1}x.\cos x-n\cos^{n-1}x.\sin x$

$=n\sin x\cos x(\sin^{n-2}x-\cos^{n-2}x)$

$y'=0$ khi $x=\frac{\pi}{4}$ và từ bảng biến thiên suy ra phương trình $y=\sin^n x+\cos^n x=2^{\frac{2-n}{2}}$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ là $x=\frac{\pi}{4}$

Câu IV. a) Phương trình tham số của đường thẳng (d) là :

$x=-1+t,\ y=1+2t,\ z=3-2t.$

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) sẽ tìm được $t=-1$.

Suy ra giao điểm cần tìm là $A(-2,-1,5)$

b) • Có thể viết phương trình của (d) dưới dạng giao tuyến của hai mp :

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\2y+2z-8=0\end{cases}$$

Chùm mặt phẳng qua (d) có phương trình là :

$\alpha(2x-y+3)+(2y+2z-8)=0$

$\Leftrightarrow 2\alpha x+(2-\alpha)y+2z+3\alpha-8=0$ (*)

(P) có vectơ pháp là $\vec{n_1}=(2,-2,1)$

Trong chùm (*) ta lấy mp $(Q)\perp(P)$, mp(Q) có vectơ pháp là $\vec{n_2}=(2\alpha,\ 2-\alpha,\ 2)$, để $\vec{n_2}\perp\vec{n_1}$ ta có : $4\alpha-2(2-\alpha)+2=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{3}$.

Thay vào (*) ta được phương trình của mp(Q) là : $2x+5y+6z-21=0$

Suy ra đường thẳng (d') là giao tuyến của (P) và (Q) sẽ có phương trình là :

$$\begin{cases}2x-2y+z-3=0\\2x+5y+6z-21=0\end{cases}$$

(dạng chính tắc là $\frac{x+2}{17}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-5}{-14}$)

• Tìm GTLN của tỉ số $\frac{AB+AM}{BM}$

Trong ΔABM gọi các góc là $\angle BAM=\alpha'$, $\angle ABM=\beta$, $\angle AMB=\gamma$. Ta sẽ có :

$$\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{AM}{\sin\beta}=\frac{BM}{\sin\alpha'}=\frac{AB+AM}{\sin\gamma+\sin\beta}$$

$$\Rightarrow\frac{AB+AM}{BM}=\frac{\sin\gamma+\sin\beta}{\sin\alpha'}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}.\cos\frac{\gamma-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\alpha'}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}}\leq\frac{1}{\sin\frac{\alpha'}{2}}\leq\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\gamma=\beta$ và $\alpha'=\alpha$.

Vậy GTLN của $\frac{AB+AM}{BM}$ là $\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Câu Va. a) Biến đổi tích thành tổng ta được :

$g(x)=\sin x.\sin 2x\cos 5x=$

$=\frac{1}{4}(\cos 6x+\cos 4x-\cos 8x-\cos 2x)$

Vậy họ nguyên hàm của $g(x)$ là

$$F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

b) Để tính $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{g(x)}{e^x+1}dx$ hãy chú ý $g(x)$ là hàm chẵn.

Đặt $t=-x\Leftrightarrow x=-t\Rightarrow dx=-dt$ ta có

$$I=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\frac{g(-t)}{e^{-t}+1}dt=\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}g(t)dt-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}g(t)\,dt=0$$

Câu Vb. Kết quả : $B=2$, $A=-4$. Vậy

$$h(x)=\sin\frac{2x}{(2+\sin x)^2}=\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{2\cos x}{2+\sin x}$$

$$\Rightarrow I=\int_{-\pi/2}^{0}h(x)dx=$$

$$=-4\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}dx+2\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$$

$$=+4.\frac{1}{2+\sin x}\Big|_{-\pi/2}^{0}+2\ln(2+\sin x)\Big|_{-\pi/2}^{0}=$$

$=2\ln 2-2$

b) Dùng khai triển Newton :

$(1+x)^n=C_n^o+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n.$

Đạo hàm hai vế ta có :

$n(1+x)^{n-1}=$

$=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\ldots+nC_n^nx^{n-1}$

Thay $x=-1$ ta được :

$0=C_n^1-2C_n^2+3C_n^3+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n$ ./.

KÌ THI "OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4" LẦN VI, NĂM 2000

Kì thi được tổ chức ngày 15-4-2000 tại trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh dành cho học sinh giỏi các lớp 10 và 11.

Đây là kì thi có số lượng đoàn và học sinh dự thi đông nhất so với 4 kì thi trước, với 1967 học sinh của 58 trường THPT thuộc 23 tỉnh, thành phố từ Quảng Trị vào phía Nam. Riêng môn toán có 133 học sinh lớp 10 và 128 học sinh lớp 11.

Kết quả : môn toán lớp 11 có 12 huy chương vàng (HCV), 18 huy chương bạc (HCB) và 17 huy chương đồng (HCĐ); lớp 10 có 7 HCB và 17 HCĐ (không có HCV). Điều đáng chú ý là trong số các học sinh được huy chương, bên cạnh học sinh các trường THPT chuyên ở các thành phố đã có nhiều kinh nghiệm tuyển chọn và bồi dưỡng học sinh giỏi, có không ít học sinh một số trường chuyên mới mở, ở vùng còn rất nhiều khó khăn. Ví dụ : trường chuyên *Bạc Liêu* có hai HCV và 2HCĐ, trường chuyên Hưng Đạo *Bình Thuận* có 1 HCV và 1 HCĐ, các trường chuyên Lê Quý Đôn *Quảng Trị* và Lương Văn Chánh *Phú Yên* đều có 1 HCV, trường chuyên *Bến Tre* có 3 HCB và 3 HCĐ, trường chuyên Nguyễn Du, *Đắc Lắc* có 2 HCB và 1 HCĐ, trường chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, *Sóc Trăng* có 1 HCĐ, v.v...

Trong buổi lễ tổng kết và phát thưởng, theo đề nghị của Ban tuyển chọn đề thi và Hội đồng chấm thi môn toán, PGS. Hoàng Chúng, Phó Tổng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã trao giải thưởng cho nhà giáo *Trần Diệu Minh*, (trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ), tác giả đề thi hay nhất (câu 2 của đề thi lớp 11) và cho học sinh *Quách Dự Hậu* (lớp 11 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh), đã có lời giải hay nhất của một bài toán (câu 4 của đề thi lớp 11).

Dưới đây là đề thi môn Toán :

ĐỀ TOÁN LỚP 10

Thời gian : 180 phút

Câu 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=4 \\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=2 \end{cases}$$

(Đà Nẵng)

Câu 2. Giải phương trình :

$$2\sin 2x-3\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x-5=0$$

(THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh)

Câu 3. Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi Toán được mang số kí danh trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng tỏ rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số kí danh được mang chia hết cho 9.

(Bến Tre)

Câu 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa $\angle BAD > 90^o$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm nằm trên BC và CD sao cho $\angle MAD = \angle NAB = 90^o$. Chứng minh rằng nếu MN và BD cắt nhau tại I thì $IA \perp AC$

(Cần Thơ)

Câu 5. Cho a, b, c là các số không âm : $a+b+c = 1$. Tìm số k lớn nhất sao cho $a^3+b^3+c^3+kabc \geq \frac{1}{9}+\frac{k}{27}$ đúng với mọi a, b, c thỏa điều kiện trên

(Đồng Nai)

ĐỀ TOÁN LỚP 11

Thời gian : 180 phút

Câu 1. Định m để phương trình sau có nghiệm :

$$(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0$$

(Đồng Tháp)

Câu 2. Cho dãy (u_n) được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_o = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \text{ với } n = 0, 1, 2, .. \end{cases}$$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^3}{n}$ *(Cần Thơ)*

Câu 3. Xác định mọi hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn :

(i) $f(-x) = -f(x)$

(ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in R$

(iii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$.

(Đà Nẵng)

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài các cặp cạnh đối diện lần lượt là a, a'; b, b'; c, c'. Gọi V và R là thể tích và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng :

1) Có một tam giác có độ dài 3 cạnh là : aa'; bb'; cc'

2) Gọi S là diện tích tam giác đó. Chứng minh rằng : $S = 6V.R$.

(THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh)

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

MÃ KHÓA BÍ MẬT VÀ NHỮNG CHỮ SỐ

VŨ HỮU BÌNH
(*GV trường THCS Trưng Vương, Hà Nội*)

Hồi thứ nhất

Kín như bưng, Morgant giấu mẫu tăng,
Bỏ thuốc ngủ, Hary tìm két sắt

Hồi đó, chiến tranh giữa Đức và liên quân Anh - Pháp đang diễn ra ác liệt trong thế chiến thứ nhất (1914-1918). Người Đức nhận được mật báo rằng tướng Pháp Morgant đang có trong tay mẫu thiết kế xe tăng loại mới nhất sắp chế tạo. Họ đã chỉ thị cho một nữ điệp viên của mình ở Paris là Mata Hary phải lấy bằng được bản thiết kế đó.

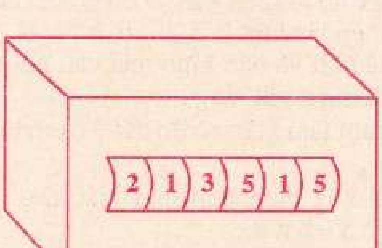
Chẳng bao lâu, tướng Morgant góa vợ đã bị chinh phục bởi tài và sắc của Hary. Tuy nhiên Morgant là người hết sức kín đáo nên Hary rất lâu không thu thập được tin tức gì. Nhưng rồi cơ hội cũng đã đến với Hary : cô được Morgant mời đến nhà ở, và "bà chủ" đương nhiên có thể tự do đi lại trong nhà viên tướng Pháp. Nhờ thế cô đã phát hiện ra trong phòng làm việc của Morgant, sau bức tranh sơn dầu có một két sắt ngầm.

Hồi thứ hai

Thiếu mã khóa, két sắt sao mở được ?
Giàu trí khôn, mã giải ắt tìm ra.

Khóa của két sắt gồm 6 phím số, mỗi phím có 1 chữ số được lấy từ 0 đến 9.

Hary quyết định mạo hiểm: Trong một bữa ăn tối, cô bỏ thuốc ngủ vào ly rượu của tướng Morgant. Cô lục ví ông ta nhưng không thấy mã khóa. Hary đi đến chỗ két sắt và thấy mã số đang là 000000. Để dò tìm mã giải Hary lần lượt bấm phím từ số 000001 đến số 000259 nhưng vẫn không mở được két sắt. Sốt ruột, cô bèn gọi điện cho một nhà toán học quen biết để nhờ giải hộ một "bài toán thú vị" : Cần bao nhiêu thời gian (tính theo giờ phút) để kiểm tra các mã số từ 000001 đến 999999 với giả thiết rằng thời gian trung bình để kiểm tra mỗi mã số là 1 giây ?



Sau khi nghe trả lời, Hary biết rằng không thể đủ thời gian để dò ra mã giải mà phải tìm cách khác. Đột nhiên cô nhớ lại có lần Morgant phàn nàn với bạn bè rằng trí nhớ của ông ta ngày một sa sút. Vậy thì để nhớ được mã số, chắc chắn Morgant phải mang theo mã giải bên mình. Cô lục túi áo của Morgant lần nữa, và chợt phát hiện ra chiếc đồng hồ quả quýt đã chết, kim đồng hồ chỉ 9 giờ 35 phút 15 giây. Cô thử bấm số 093515. Khóa két sắt vẫn không nhúc nhích. Chợt nghĩ ra 9 giờ tối là 21 giờ, cô bấm số 213515, khóa két bật mở. Cuốn phim chụp bản thiết kế mẫu xe tăng mới nhất của liên quân Anh - Pháp được gửi về Berlin. Nhờ thế mà người Đức đã chế ra loại súng chống tăng hữu hiệu và đã đánh tan liên quan Anh - Pháp khi họ tấn công Đức bằng loại xe tăng mới này.

Các bạn hãy thử giải các bài toán xuất hiện từ câu chuyện trên :

Bài toán 1 : Có tất cả bao nhiêu số trong một khóa số gồm 6 chữ số ?

Bài toán 2 : Nhà toán học nói trên sẽ trả lời như thế nào ?

Bài toán 3 : Cô Hary cần bao nhiêu thời gian (tính theo giờ phút) để kiểm tra các mã số từ 000001 đến 213515 cũng với giả thiết như trên ?

GIẢI ĐÁP VÀ LỜI BÌNH

Giải bài 1. Có 1000000 số trong một khóa số gồm 6 chữ số (từ 000000 đến 999999)

Giải bài 2. Cần 999999 giây = 277 giờ 46 phút 39 giây.

Giải bài 3. Cần 213515 giây = 59 giờ 18 phút 35 giây.

Lời bình. Gọi điện từ nhà tướng Morgant để hỏi về "một bài toán mở khóa", thật quá ư mạo hiểm, may mà Hary không bị bại lộ. Thế mới biết thời gian đếm các số tự nhiên từ 1 đến 999999 không nhanh như ta tưởng. Một điệp viên thông minh có thể bị thất bại chỉ vì không dự đoán được kết quả của một bài toán số học đơn giản.

Đọc đề bài toán có thể một vài người nói ngay rằng để chuyển qua n số thì cần n lần bấm phím, tuy nhiên thực tế không đơn giản như vậy.

Nếu chuyển từ số 19 sang 20 thì cần 2 lần bấm phím, nếu chuyển từ số 099 sang 100 thì cần 3 lần bấm phím. Vì thế xuất hiện *bài toán chuyển chữ số tối ưu* khó hơn nhiều :

Tìm số lần bấm phím ít nhất để chuyển qua được n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n viết trong hệ thập phân ?

Bài toán 4. Cần ít nhất bao nhiêu lần bấm phím để kiểm tra được tất cả các mã số từ 000001 đến 999999 ?

Giải bài 4. Ta *coi như* mỗi lần bấm phím thì được một số mới (6 chữ số) không lặp lại số cũ. Từ số 000000 đến số 999999 có tất cả 10^6 số. Trước hết ta xét việc bấm phím để xuất hiện cả chữ số 0. Gọi 6 phím số từ trái sang phải là A, B, C, D, E, F. Ở phím A cần 10 lần bấm phím. Mỗi chữ số ở phím A ứng với 10 chữ số ở phím B nên cần 10^2 lần bấm phím B. Lập luận tương tự thì cần 10^3 lần bấm phím C, cần 10^4 lần bấm phím D, cần 10^5 lần bấm phím E và 10^6 lần bấm phím F. Như vậy nếu không kể 6 lần bấm phím làm xuất hiện các chữ số 0 đầu tiên thì số lần bấm ít nhất để chuyển qua 999999 số là :

$$10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 + 10^6 - 6 =$$
$$1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 + 10^6 - 7 =$$
$$= \frac{10^7 - 1}{10 - 1} - 7 = 1111111 - 7 = 1111104 \text{ lần.}$$

Bài toán 5. Cần ít nhất bao nhiêu thời gian (tính theo giờ phút) để kiểm tra được tất cả các mã số từ 000001 đến 999999 với giả thiết rằng thời gian bấm 1 phím là 1 giây.

Giải bài 5. Thời gian ít nhất để bấm phím kiểm tra 999999 số là

1111104 giây = 308 giờ 38 phút 24 giây./.

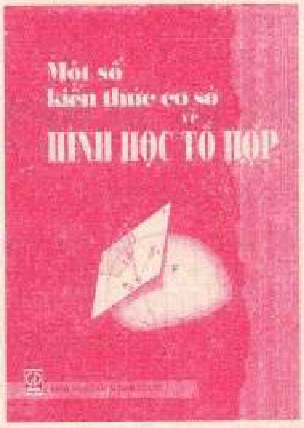
Đón đọc tạp chí TH&TT số 276

Một tháng nữa là thời điểm nóng của các bạn chuẩn bị thi vào đại học, tạp chí giới thiệu *Đề thi tuyển sinh và đáp án môn toán của trường ĐH Kiến trúc Hà Nội năm 1999* cùng hai vấn đề thú vị : *Vài ứng dụng của nguyên hàm và tích phân ; Viết phương trình parabol bằng phương pháp chùm.* Các bạn chuẩn bị thi vào các lớp 10 chuyên Toán sẽ được tiếp xúc với *Đề thi tuyển sinh của Khối Chuyên Toán - Tin, trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm 1999.*

Ngoài các chuyên mục thường kì, các bạn sẽ biết được *Thể lệ Cuộc thi Vui hè 2000* - một cuộc thi thường niên trong hè của những năm gần đây, nhưng đây là một năm thật đặc biệt, có phải không các bạn ?

Các bạn nhớ đặt mua tạp chí tháng 6 và quý III kẻo lỡ dịp tham gia, tìm hiểu các nội dung bổ ích và lí thú.

TH&TT



MỘT CUỐN SÁCH BỔ ÍCH

Một loại toán thường làm đau đầu các bạn dự thi học sinh giỏi môn Toán ở các kì thi quốc gia, quốc tế và khu vực, thường được mọi người nói với nhau là Toán tổ hợp. Các giáo viên bồi dưỡng học sinh giỏi ở các địa phương đều rất thiếu các tài liệu liên quan tới loại toán này. Tình trạng trên không phải là của riêng nước ta mà là tình trạng chung trên thế giới. Mọi người đều mong có ai đó hãy viết một cuốn sách về loại toán này.

Mặc dù quen biết tác giả, thế mà tôi vẫn bất ngờ khi thấy xuất hiện cuốn : "*Một số kiến thức cơ sở về hình học tổ hợp*" của TS Vũ Đình Hòa, một chuyên gia về vấn đề này, người đã từng được gặp nhà toán học nổi tiếng Erdos (chắc ai cũng biết 1 bất đẳng thức của ông ta trong hình học phẳng). Vốn là thành viên trong đội tuyển đầu tiên của Việt Nam tham dự cuộc thi Olympic toán quốc tế 1974 và giành Huy chương bạc, tác giả đã được tiếp xúc nhiều với các bài toán bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán. Mấy năm gần đây tác giả trở về với công việc bồi dưỡng học sinh giỏi và là cộng tác viên thân thiết của THTT.

Cuốn sách giới thiệu những kiến thức cơ sở nhất cùng những công cụ đắc lực nhất để giải toán hình học tổ hợp. Mỗi một phần, ngoài các vấn đề lí thuyết còn có những bài tập để các bạn thử sức mà trong đó có nhiều bài đã dùng để thi chọn đội tuyển quốc gia. Trong cuốn sách còn có những định lí lớn mà phép chứng minh mới tìm được trong những năm gần đây. Nhiều bài toán còn đang là thách thức cho các nhà toán học và cho chính các bạn nếu các bạn thực sự thú vị với hình học tổ hợp.

Cuốn sách chỉ với 150 trang thôi nhưng chắc chắn thỏa mãn lòng ham thích khám phá những điều mới mẻ thú vị về toán học. Trân trọng giới thiệu và cảm ơn tác giả./.

L.T.N

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/275. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình : $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$

NGUYỄN CÔNG SỨ
(Hà Nội)

Bài T2/275. Cho $n+1$ ($n \geq 2$) số thực a_1, a_2, ..., a_{n+1} khác 0 thỏa mãn $a_k^2 = a_{k-1} . a_{k+1}$ với mọi $k = 2, 3, ..., n$.

Tính $\dfrac{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}{a_2^n + a_3^n + ... + a_{n+1}^n}$ theo a_1 và a_{n+1}

TRẦN VĂN HẠNH
(Quảng Ngãi)

Bài T3/275. Cho các số thực x, y, z nằm trong [-2; 2]. Chứng minh rằng :

$$2(x^6 + y^6 + z^6) - (x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2) \leq 192$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình)

Bài T4/275. Chứng minh rằng ΔABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ là tam giác vuông khi xảy ra một trong các đẳng thức sau :

1) $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{a}{b+c}$; 2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{|b-c|}{b+c}$

TRẦN HÀ
(Hải Phòng)

Bài T5/275. Cho tam giác ABC có diện tích S và $BC = a$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\dfrac{DB}{DC} = k$. Tính diện tích tam giác có các đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD, ACD theo a, k, S.

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/275. Khai triển

$$f(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{1000})^{1000}$$

được đa thức

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10^6}x^{10^6}$$

Tính S = $a_o + a_1 + a_2 + ... a_{1000}$

ĐỖ QUANG DƯƠNG
(Hà Nội)

Bài T7/275. Với những số $a > 1$ nào thì $x^a \leq a^x$ với mọi $x > 1$?

VŨ TIẾN VIỆT
(Hà Nội)

Bài T8/275. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x + \cos x.\sin x$$

ĐẶNG THANH HẢI
(Hà Tây)

Bài T9/275. Cho tam giác ABC với các đường phân giác trong AA', BB', CC'. ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r và nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi Q là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABC tương ứng với góc A. Chứng minh rằng :

1) $IK = \dfrac{rR}{OQ}$ trong đó IK là khoảng cách từ I tới $B'C'$.

2) $IA' + IB' + IC' \geq 6r\sqrt{\dfrac{3R}{11R+2r}}$

THÁI VIẾT THẢO
(Nghệ An)

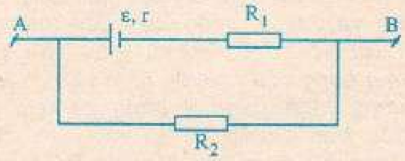
Bài T10/275. Trên mặt phẳng P cho đường tròn đường kính AB. Lấy điểm C trên tia AB sao cho $AC = 2AB$. Một đường thẳng qua C cắt đường tròn tại M và N. Dựng điểm D sao cho $DB = AB$ và DB vuông góc với mặt phẳng P. Chứng minh rằng :

$$\sin^2\widehat{BDM} + \sin^2\widehat{BDN} = \frac{1}{2}$$

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

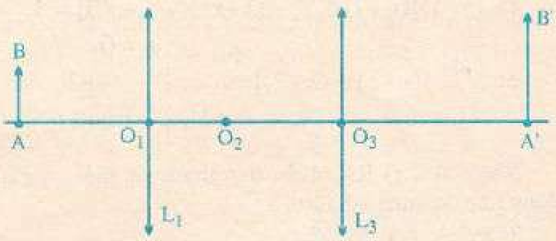
Bài L1/275. Một đoạn mạch AB gồm có nguồn (ε, r) trong đó $\varepsilon = 36$V, $r = 1\Omega$, các điện trở $R_1 = 8\Omega$; $R_2 = 18\Omega$ mắc theo sơ đồ như trên hình.



Có các bóng đèn rời : $Đ_1$: 10V-5W; $Đ_2$: 10V-4W và $Đ_3$: 8V-6W. Hãy chỉ ra các phương án mắc bóng đèn trên vào cụm AB để chúng sáng bình thường (mỗi phương án phải có đủ cả ba bóng đèn). Tính các điện trở phụ có mặt trong các phương án đó.

LẠI THẾ HIỀN
(Hà Nội)

Bài L2/275. Có hai thấu kính hội tụ L_1 và L_3 đặt cùng trục chính cách nhau 70cm. Vật sáng AB đặt trước L_1 (phía không có L_3) ta



được ảnh $A'B'$ nằm sau L_3, lớn gấp 6 lần vật và AA' = 370cm. (Hình vẽ). Đặt thêm thấu kính L_2 tại O_2 (giữa O_1 và O_3) cùng trục chính với hai thấu kính trên.

• Với O_1O_2 = 36cm thì ảnh $A'B'$ không đổi.

• Với O_1O_2 = 46 cm thì ảnh $A'B'$ ra xa vô cùng.

Hỏi O_1O_2 bằng bao nhiêu thì độ lớn ảnh $A'B'$ không đổi khi AB tịnh tiến trước L_1.

TRẦN TRỌNG HƯNG
(Quảng Ngãi)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/275. Find all integer-roots of the equation :

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{3}{7}$$

T2/275. The $n+1$ ($n \geq 2$) non-zero real numbers $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ satisfy : $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$ for every $k = 2, 3, ..., n$.

Calculate $\dfrac{a_1^2 + a_2^n + ... + a_n^n}{a_2^n + a_3^n + ... + a_{n+1}^n}$ in terms of a_1 and a_{n+1}.

T3/275. Let be given the real numbers x, y, z in $[-2; 2]$. Prove that :

$$2(x^6+y^6+z^6) - (x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \leq 192.$$

T4/275. Prove that the triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ is a right triangle when holds one of the two equalities :

1) $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{b+c}$;

2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{|b-c|}{b+c}$.

T5/275. Let be given a triangle with area S and $BC = a$. Let D be the point on the side BC such that $\dfrac{DB}{DC} = k$. Calculate in terms of a, k, S the area of the triangle the vertices of which are the circumcenters of the triangles ABC, ABD, ACD.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/275. The expansion of

$$f(x) = (1+x+x^2+...+x^{1000})^{1000}$$

is the polynomial

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10^6}x^{10^6}$$

Calculate $S = a_o + a_1 + a_2 + ... + a_{1000}$.

T7/275. For which numbers $a>1$, does the inequality $x^a \leq a^x$ hold for every $x>1$?

T8/275. Find the least value of the function : $f(x) = \cos^4x + \sin^2x + \cos x\sin x$.

T9/275. Let AA', BB', CC' be the inner angled-bisectors of a triangle ABC. The incenter, circumcenter, the inradius, circumradius of which are respectively I, O, r, R. Let Q be the center of the escribed circle of ABC in the angle A. Prove that :

i) $IK = \dfrac{rR}{OQ}$ where IK is the distance form I to $B'C'$.

2) $IA' + IB' + IC' \geq 6r\sqrt{\dfrac{3R}{11R+2r}}$.

T10/275. Let be given in the plane (P) a circle with diameter AB; let C be the point on the ray AB such that $AC = 2AB$ and let D be a point such that $DB = AB$ and the line DB is orthogonal to the plane (P). A line passing through C cuts the circle at M and N. Prove that :

$$\sin^2\widehat{BDM} + \sin^2\widehat{BDN} = \frac{1}{2}$$

Bài T1/271. *Cho dãy số (a_n) ($n = 0, 1, 2,...$) được xác định bởi $a_o = 9$, $a_{n+1} = 27a_n^{28} + 28a_n^{27}$ với mọi $n = 0, 1, 2....$ Chứng minh rằng số a_{11} viết trong hệ thập phân có tận cùng nhiều hơn 2000 chữ số 9.*

Lời giải. của *Ngô Quý Hoàn*, 9A, THCS Yên Phong, Bắc Ninh. Theo đề bài ta có :

$$a_{n+1} + 1 = 27a_n^{28} + 28a_n^{27} + 1$$
$$= 27a_n^{27}(a_n+1) + a_n^{27} + 1$$
$$= (a_n+1)(27a_n^{27} + a_n^{26} - a_n^{25} + a_n^{24} - ... + a_n^2 - a_n + 1)$$
$$= (a_n+1)[27(a_n^{27}+1) + (a_n^{26}-1) - (a_n^{25}+1) + ... + (a_n^2-1) - (a_n+1)]$$

Vì ta biết $(a_n^{27}+1) \vdots (a_n+1)$; $(a_n^{26} - 1) \vdots (a_n+1)$; $(a_n^{25} + 1) \vdots (a_n+1)$; ... ; $(a_n^2 - 1) \vdots (a_n+1)$

Nên ta có $a_{n+1} + 1 \vdots (a_n + 1)^2$ (1)

Với $a_o = 9$ và (1) cho n lấy giá trị từ 1 đến 10 ta suy ra

$(a_{11}+1) \vdots 10^{2^{11}}$ hay $(a_{11}+1) \vdots 10^{2048}$.

Từ đó suy ra a_{11} có tận cùng nhiều hơn 2000 chữ số 9. (đpcm).

Nhận xét. Các bạn sau cũng có lời giải tốt :

Bắc Ninh: *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Tây:** *Phan Anh Dũng*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Hoàng*, 8A, THCS Đồng Cương, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Trần Anh Tuấn*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh, Thanh Xuân; *Nguyễn Cẩm Ly*, 9A, THCS Đông Anh; **Hải Phòng:** *Nguyễn Hải Tùng*, 9I, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền; *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường, Tiên Lãng; **Ninh Bình:** *Đinh Quyết Tiến*, 9D, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh; **Nghệ An:** *Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Thành Nhân*, 9A, THPT Thực hành Sư phạm, thị xã Bạc Liêu

BÌNH PHƯƠNG

Bài T2/271. *Giải phương trình*

$$(x-1)^2[1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n] = 1$$

trong đó n là số nguyên dương.

Lời giải. Đặt $S = 1+2x+3x^2+...+(n+1).x^n$ (1)

thì $x.S = x+2x^2+3x^3+...+ nx^n + (n+1)x^{n+1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$S.(x-1) = (n+1)x^{n+1} - (1+x+x^2+...+x^n)$$

$$\Leftrightarrow S(x-1)^2 = (x-1)[(n+1)x^{n+1} - (1+x+x^2+...+x^n)]$$

Phương trình đã cho chính là :

$$S(x-1)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)[(n+1)x^{n+1} - (1+x+x^2+...+x^n)] = 1$$
$$\Leftrightarrow x^{n+1}[(n+1)x-(n+2)]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{n+2}{n+1} \end{array}\right.$$

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải và giải đúng nhờ đã quen với tổng S.

2) Một số bạn đã viết :

$1+x+x^2+...+x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ mà trước đó chưa nhận xét $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình. Nhiều bạn diễn đạt và trình bày chưa mạch lạc. Có bạn lớp 9 đã sử dụng đạo hàm để tính tổng S (?).

3) Các bạn làm đúng và trình bày bài tốt hơn là :

Quảng Ninh: *Nguyễn Hà Thương*, 9A1, THCS Trần Quốc Toản, Uông Bí; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Hùng*, 8A, THCS Đồng Cương, Yên Lạc và *Nguyễn Ngọc Minh*, 9A, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Nghệ An:** *Trung Tuấn Dũng*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Thành Nhân*, 9A, THPT thực hành Bạc Liêu; **Hà Tĩnh:** *Trần Duy Lý*, 9A, THCS thị trấn Cẩm Xuyên; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Hưng Nguyên Quốc*, 9^2, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Phan Rang; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo; **Hải Phòng:** *Hoàng Đức Giang Nguyên*, 9T, THCS Chu Văn An; **Hưng Yên:** *Doãn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Thanh*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Hiển*, 9^{20}, THCS Hồng Bàng; **Kon Tum:** *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 7A, THCS chuyên Kon Tum; **Đồng Tháp:** *Lê Thanh Nhàn*, 9A1, THCS thị xã Cao Lãnh; **Bắc Ninh:** *Lê Đắc Hoàng*, 9A, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Giang:** *Nguyễn Bằng Giang*, 9 tạo nguồn, trường chuyên tỉnh; **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, 9A1, THCS thị trấn Dương Minh Châu; **Hà Nội:** *Trần Kim Phương*, 9A1, THCS Chu Văn An; *Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương, *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên; **Bắc Giang:** *Nguyễn Ngọc Hương*, 8A, THCS Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8^2, THCS Mỹ Hóa;...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/271. *Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2+b^2 \le 1$.*

Chứng minh rằng

$$(ac+bd-1)^2 \ge (a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)$$

với mọi số thực c, d.

Lời giải. Ta xét bài toán tổng quát hơn :

Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^2+b^2 \le m^2$. Chứng minh rằng :

$$(ac+bd-mn)^2 \ge (a^2+b^2-m^2)(c^2+d^2-n^2) \quad (1)$$

với mọi số thực c, d, n.

Chú ý rằng nếu $a^2+b^2 = m^2$ thì (1) đúng nên ta chỉ cần xét với $a^2+b^2 < m^2$.

Cách 1. (1) $\Leftrightarrow (an-cm)^2 + (bn-dm)^2 \ge (ad-bc)^2$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki và giả thiết ta có

$$m^2[(an-cm)^2 + (bn-dm)^2] \ge$$
$$\ge (b^2 + (-a)^2)[(an-cm)^2 + (bn-dm)^2]$$
$$\ge [(b(an-cm)-a(bn-dm)]^2 = m^2(ad-bc)^2$$
$$\Rightarrow (2)$$

Cách 2. Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = (a^2+b^2-m^2)x^2 + 2(ac+bd-mn)x + (c^2+d^2-n^2)$$
$$= (ax-c)^2 + (bx-d)^2 - (mx-n)^2$$

Ta có $f\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{an}{m} - c\right)^2 + \left(\frac{bn}{m} - d\right)^2 \ge 0$

suy ra $(a^2+b^2-m^2)f\left(\frac{n}{m}\right) \le 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\Rightarrow$

$$\Delta' = (ac+bd-mn)^2 - (a^2+b^2-m^2)(c^2+d^2-n^2) \ge 0 \Rightarrow (1)$$

Đẳng thức xảy ra trong các trường hợp sau :

1) $a^2+b^2 = m^2$ và $ac+bd = mn$

2) $a^2+b^2 < m^2$ và $ad=bc$.

Nhận xét. 1) Các bài gửi đến đều đúng, một số bạn biến đổi dài dòng. Một số bạn sau khi giải theo cách 2 đã phát biểu bài toán tổng quát sau :

Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \le m^2$.

Chứng minh rằng :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n - mn)^2 \ge (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - m^2)(b_1^2+b_2^2 + ... + b_n^2 - n^2)$$

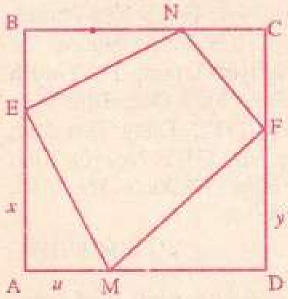
với mọi số thực $b_1, b_2, ..., b_n, n$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ: *Phạm Minh Hoàng*, 9A$_1$, THCS Phong Châu, Phù Ninh, *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; *Đoàn Triệu Thanh*, 6A, THCS Lí Tử Trọng, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Gia Nam*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, PTDL Châu Phong, Mê Linh; *Nguyễn Xuân Tuyến*, 9AI, *Nguyễn Tuấn Học*, 9B, THCS thị trấn Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** *Phạm Minh Quyết*, 9A, THCS Kim Đường, Ứng Hòa; **Hà Nội:** *Trần Anh Tuấn*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh, *Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương; **Nam Định:** *Vũ Anh Tuấn*, 9B, THCS Hải Hậu; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, *Đồng Quang Điệp*, 9A, THNK Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Hoàng Minh Sơn*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo; **Ninh Thuận**: *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A1, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang; **Ninh Bình:** *Phạm Quang Huy*, 9T, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh

PHI PHI

Bài T4/271. *Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm N trên cạnh BC sao cho BN = 2NC. Xét các điểm E và F tương ứng trên các cạnh AB và CD. Tìm điều kiện của biểu thức AE−DF để tồn tại điểm M trên AD sao cho* $\frac{S_{NEMF}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}$



Lời giải.

• Giả sử có điểm M trên AD thỏa mãn đề bài. Gọi a là cạnh hình vuông. Đặt $AE = x$, $DF = y$, $AM = u$, $AE-DF = n$ với $0 \le x, y, u \le a$ và $-a \le n \le a$, ta có :

$$S_{ABCD} - S_{NEMF} = S_{AME} + S_{DMF} + S_{CNF} + S_{BNE}$$

hay $a^2 - \frac{5}{9}a^2 =$

$$= \frac{1}{2}ux + \frac{1}{2}(a-u)y + \frac{1}{6}a(a-y) + \frac{1}{3}a(a-x)$$

$$\frac{a^2}{18} = \frac{1}{3}ax + \frac{1}{6}ay - \frac{1}{2}ux - \frac{1}{2}(a-u)y$$

$$a^2 = 6ax + 3ay - 9ux - 9(a-u)y$$

Thay $x = n+y$ ta được

$$a^2 = 6a(n+y) + 3ay - 9u(n+y) - 9(a-u)y$$
$$\Rightarrow a^2 = 6an - 9un$$

Suy ra $n \ne 0$ và $n = \frac{a^2}{6a-9u}$

Kết hợp với $0 \le u \le a$

(hay $0 \le \frac{a}{9}(6 - \frac{a}{n}) \le a$) ta có

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{6} \le n \le a \\ -a \le n \le -\frac{a}{3} \end{array}\right. \quad (*)$$ Đây là điều kiện cần tìm.

• Đảo lại, giả sử có điều kiện (*).

Trên tia AD lấy M sao cho $AM = \frac{a}{9}(6 - \frac{a}{n})$

Từ (*) ta chứng minh được $0 \le AM \le a$ suy ra M nằm trên cạnh AD. Khi đó $S_{NEMF} = S_{ABCD} - S_{AME} - S_{BNE} - S_{NCF} - S_{MDF}$.
Ta có :

$$S_{AME} + S_{BNE} + S_{NCF} + S_{MDF} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2(AE - DF)\left(AM - \frac{2a}{3}\right)\right] = \frac{4}{9}a^2.$$

Suy ra $S_{NEMF} = \frac{5}{9}S_{ABCD}$ hay $\frac{S_{NEMF}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{9}$.

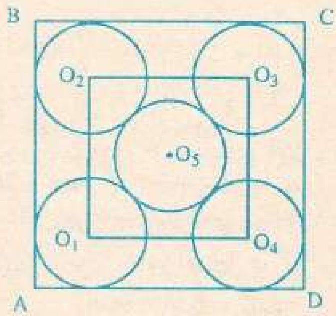
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Yên Bái: *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Bùi Quang Nha*, 9C, THCS Việt Trì; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 9A, Nguyễn Trãi; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương, *Lê Hùng Việt Bảo*, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Thanh Hóa:** *Đinh Linh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai *Mai*; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Thắng*, 9B, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Khánh Hòa:** *Võ Xuân Minh*, 9^1, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/271. *Tìm độ dài nhỏ nhất của cạnh một hình vuông sao cho có thể đặt vào trong nó 5 hình tròn bán kính r = 1 mà không có hai hình tròn nào chờm lên nhau.*

Lời giải.



Giả sử trong hình vuông cạnh a có thể xếp được 5 hình tròn bán kính 1 thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Xét hình vuông $O_1O_2O_3O_4$ được tạo thành bằng cách lùi các cạnh vào bên trong 1 đơn vị. Khi đó hình vuông mới được tạo thành này có cạnh bằng $a-2$ và nó phải chứa tâm của các hình tròn (xem hình).

Đem chia hình vuông cạnh $a-2$ này ra làm 4 hình vuông cạnh $\frac{a-2}{2}$ bởi các đường trung trực các cạnh hình vuông. Khi đó theo nguyên tắc Đirichlê phải có một hình vuông con cạnh $\frac{a-2}{2}$ chứa tâm của hai hình tròn bán kính 1. Do khoảng cách giữa hai tâm hình tròn theo cách xếp của chúng ta không nhỏ hơn 2, nên ta có độ dài đường chéo của hình vuông nhỏ là $\frac{(a-2)\sqrt{2}}{2} \ge 2$ và suy ra $a \ge 2 + 2\sqrt{2}$.

Mặt khác, trong hình vuông cạnh $2 + 2\sqrt{2}$ ta có thể xếp được 5 hình tròn bán kính bằng 1 như hình vẽ.

Nhận xét. Đa số các bạn giải đúng bài này, tuy số lượng bạn tham gia giải không đông lắm. Nhiều bạn quên không kiểm tra lại xem có thể xếp được 5 hình tròn bán kính 1 vào hình vuông cạnh $2 + 2\sqrt{2}$ như bài yêu cầu hay không. Bạn *Đoàn Triệu Khánh*, 6a, THCS Lý Tử Trọng, Tp Việt Trì, tỉnh **Phú Thọ**, đã giải bài toán tổng quát hơn cho n-giác đều với $n \le 6$. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và đầy đủ.

Nghệ An: *Lê Văn Đức*, 9B, THCS Bến Thủy, *Nguyễn Huy Thái*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Chu Lê Long*, 9G, THCS Kỳ Anh; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; *Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Duy Thành*, 9A, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Hải Dương:** *Lê Quang Hòa*, 9A, PT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương; **Vĩnh Phúc:** *Trần Hoàng Tùng*, 7A, THCS Vĩnh Tường; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Thành Giang*, 9A6, thực nghiệm sư phạm Q.5; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong và bạn Thạch Thị Ninh, 9B không có địa chỉ.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T6/271. *Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau có nghiệm :*

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2+xy-yz-zx=1 \\ y^2+z^2+yz=2 \\ x^2+z^2+xz=m \end{cases}$$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Tuấn Dương*, 10A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Nhận xét rằng $z = 0$ không phải là nghiệm của hệ vì khi đó ta có :

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy = 1 \\ y^2 = 2 \\ x^2 = m \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = 0 \\ y^2 = 2 \\ x^2 = m \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy $z \ne 0$. Đặt $x/z = a$, $y/z = b$ và viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} a^2+b^2-1+ab-a-b = \frac{1}{z^2} & (1) \\ b^2+b+1 = \frac{2}{z^2} & (2) \\ a^2+a+1 = \frac{m}{z^2} & (3) \end{cases}$$

Trừ theo từng vế (1) và (2) ta có

$$(a-2)(a+b+1) = -\frac{1}{z^2}$$

hay $b = -\left(\frac{1}{z^2(a-2)} + a + 1\right)$.

Thay vào (2) ta được

$$\frac{1}{z^4(a-2)} + \frac{5}{z^2(a-2)} + a^2+a+1 = 0$$

Thay $a^2 + a + 1 = \frac{m}{z^2}$ vào biểu thức vừa nhận được ta thu được đẳng thức

$$\frac{m}{z^2} = -(m^2a^2 - (4m^2 - 5m)a + 4m^2 - 10m).$$

Thay hệ thức này vào (3) ta có phương trình theo a :

$$(m^2+1)a^2 - (4m^2-5m-1)a + 4m^2 - 10m + 1 = 0 \qquad (4)$$

Rõ ràng hệ có nghiệm khi và chỉ khi (4) có nghiệm, vì khi đó ta sẽ tính được x, y và z. Để (4) có nghiệm thì $\Delta = (4m^2 - 5m - 1)^2 - 4(m^2+1)(4m^2 - 10m + 1) \geq 0$ hay $m^2 - \frac{50}{3}m + 1 \leq 0$ hay $\frac{25 - \sqrt{616}}{3} \leq m \leq \frac{25 + \sqrt{616}}{3}$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Khánh Hòa: *Trần Tuấn Anh*, 12T, Lê Quý Đôn, Nha trang; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 11B, Trần Nhật Duật; **Hải Dương:** *Nguyễn Việt Đức*, 12T, PTNK Nguyễn Trãi; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/271. *Cho hai số thực dương a, b với $a \leq b$. Lập hai dãy số (u_n) và (v_n) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) như sau :*

$u_1 = a$, $v_1 = b$, $u_{n+1} = 2(u_n+v_n)$,

$$v_{n+1} = \frac{(u_n+v_n)(u_n^2+v_n^2)}{u_nv_n} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng :

$$4^n(a+b) \leq u_{n+1} + v_{n+1} \leq 2^{2n+1}\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^{3^n}.$$

Lời giải. Từ giả thiết, chứng minh bằng quy nạp theo $n = 1, 2, 3, \ldots$, ta thấy ngay

$$u_n > 0,\ v_n > 0 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Nhận xét :

$$v_{n+1} = \frac{(u_n+v_n)(u_n^2 + v_n^2)}{u_nv_n} \geq \frac{(u_n + v_n).2u_nv_n}{u_nv_n} = 2(u_n + v_n).$$

Do đó

$$u_{n+1} + v_{n+1} \geq 4(u_n+v_n) \geq 4^2(u_{n-1}+v_{n-1}) \geq \ldots \geq 4^n(u_1+v_1) = 4^n(a+b) \qquad (1)$$

Cũng như thế ta có

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2(u_n+v_n)^2(u_n^2+v_n^2)}{u_nv_n} \geq \frac{2.(4u_nv_n).(2u_nv_n)}{u_nv_n} = 16u_nv_n \geq$$

$$\geq 16^2u_{n-1}v_{n-1} \geq \ldots \geq 16^nu_1v_1 = 16^nab$$

Bởi vậy $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{(u_n+v_n)^3}{u_nv_n} \leq \frac{(u_n+v_n)^3}{16^{n-1}ab} \leq$

$$\leq \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^{3^2}}{16^{(n-1)+(n-2).3}.(ab)^{1+3}} \leq \ldots \leq$$

$$\frac{(u_2+v_2)^{3^{n-1}}}{16^{(n-1)+(n-2).3+\ldots+2.3^{n-3}+3^{n-2}}.(ab)^{1+3+\ldots+3^{n-2}}}$$

$$= \frac{(u_1+v_1)^{3^n}}{16^{(n-1)+(n-2)3+\ldots+2.3^{n-3}+3^{n-2}}.(ab)^{1+3+\ldots+3^{n-1}}}$$

$$= \frac{(a+b)^{3^n}}{16^{\frac{3^n-2n-1}{4}}.(ab)^{\frac{3^n-1}{2}}} = 2^{2n+1}\sqrt{ab}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^{3^n} \qquad (2)$$

(1) và (2) là các khẳng định cần phải chứng minh.

Nhận xét. 1. Đây là bài toán cơ bản, loại dễ của dãy số. Có 235 bạn tham gia giải bài toán này, tất cả các bạn đều giải đúng. Một số đã nhận xét đúng là : giả thiết $a \leq b$ là không cần thiết (chúng ta đã chứng minh ở trên $v_n \geq u_n$ với mọi $n \geq 2$). Hoan nghênh 21 bạn học sinh THCS đã tham gia và giải tốt bài toán này.

2. Các bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**; *Hoàng Trung Trí* và *Phạm Thành Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, **Hải Dương** đã đưa ra cách giải thích đơn giản cho công thức

$$(n-1).3^0 + (n-2).3 + \ldots + 2.3^{n-3} + 1.3^{n-2} = \frac{3^n-2n-1}{4}$$

Thật vậy đặt vế trái là A ta có

$2A = 3A - A =$

$= (n\text{-}1).3 + (n-2).3^2 + ... + 2.3^{n-2} + 1.3^{n-1}) -$

$- ((n-1)3^0 + (n-2).3 + ... + 2.3^{n-3} + 1.3^{n-2})$

$= 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} - n$

$= \dfrac{3^n - 1}{2} - n = \dfrac{3^n - 2n - 1}{2}.$

3. Cách chứng minh trên giải thích được tại sao ta có các vế còn lại của bất đẳng thức. Nhưng khi đã biết các vế của bất đẳng thức thì ta có thể chứng minh bài toán đơn giản bằng quy nạp. Đa số các bạn chứng minh bằng quy nạp.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/271. *Xét phương trình $(n > 2)$*

$$x^n - x^2 - x - 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n>2$ thì phương trình trên có một nghiệm dương duy nhất.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$, trong đó x_n là nghiệm dương của phương trình trên.

Lời giải. (của bạn *Phạm Đức Hiệp*, 10 Toán, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**)

a) Xét hàm $f(x) = x^n - x^2 - x - 1$ $(n > 2)$. Ta có $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 2^n - 7 > 0 \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất mọi nghiệm thuộc $(1, 2)$.

Rõ ràng nếu x là nghiệm dương của phương trình trên thì $x > 1$ (do $x^n = x^2 + x + 1 > 1$). Với $x > 1$ thì $f'(x) = nx^{n-1} - 2x - 1 > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm. Suy ra điều phải chứng minh. Hơn nữa ta có $x_n \in (1, 2)$.

b) Trước hết ta chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Thật vậy

$$1 < x_n = \sqrt[n]{x_n^2 + x_n + 1} \le \frac{x_n^2 + x_n + n}{n} < 1 + \frac{5}{n}$$

(BĐT Côsi)

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (1)

Ta có $x_n^n = x_n^2 + x_n + 1 \Rightarrow n = \dfrac{\ln(x_n^2 + x_n + 1)}{\ln x_n}$

$$\Rightarrow n(x_n - 1) = \frac{(x_n - 1)}{\ln x_n}\ln(x_n^2 + x_n + 1) \qquad (2)$$

Ta chứng minh : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - 1}{\ln x_n} = 1$ (3)

Thật vậy đặt $x_n - 1 = y_n$

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{x_n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + y_n)^{y_n} = \ln e = 1$

(do $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$)

Từ (1) (2) và (3) suy ra

$\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \ln 3.$

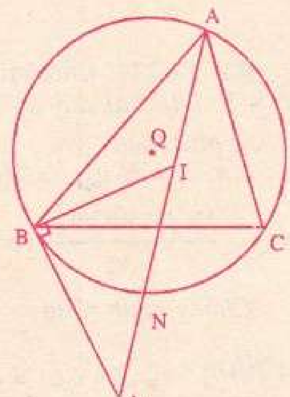
Nhận xét: Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Như Thắng*, 11A1, PTCT ĐHSP Hà Nội, *Tô Minh Hoàng*, 11T, PTNK Hải Dương, *Đào Quang Minh*, 12A, ĐHKHTN **Hà Nội**; *Nguyễn Đức Trường*, 11A, ĐHSP Vinh, **Nghệ An**; *Phan Tuấn Anh*, 11 ĐHKHTN, **Tp Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Hoàng Trung*, 11A10, PTTH Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; *Mai Văn Hà*, 10T, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**; *Bạch Ngọc Công Đức, Trần Việt Anh*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Nguyễn Dư Thái*, 11CT, ĐHKH Huế, **Thừa Thiên - Huế**; *Đặng Anh Thi*, 11A1, Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Xuân Bách*, 11T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Lê Thị Khánh Hiền*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/271. *Cho tam giác ABC. Gọi (Q, R) là đường tròn ngoại tiếp và (I, r) là đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi d_A, d_B, d_C lần lượt là khoảng cách từ Q tới tâm đường tròn bàng tiếp các góc trong đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng :*

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 \ge IA^2 + IB^2 + IC^2 + 3R^2 + 12Rr \qquad (*)$$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Tiến Thịnh*, lớp 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**). Gọi A_1 là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Giả sử AA_1 cắt (Q) tại N $(N \ne A)$. Ta có :



$\wp_{A_1/(Q)} =$

$= A_1N.A_1A$

$= A_1N(AI + IA_1)$

$= IN(AI + 2IN)$

(vì $A_1N = IN$)

$= IN.IA + 2IN^2$

Vì $IN.IA = 2Rr$ (Hệ thức Ơle) và $2IN^2 = 2BN^2 = 2.4R^2\sin^2\frac{A}{2} = 8R^2\sin^2\frac{A}{2}$ nên :

$$\wp_{A_1/(Q)} = 2Rr + 8R^2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow d_A^2 - R^2 = 2Rr + 8R^2\sin^2\frac{A}{2}$$

Tương tự như vậy ta có :

$$\begin{cases} d_B^2 - R^2 = 2Rr + 8R^2\sin^2\frac{B}{2} \\ d_C^2 - R^2 = 2Rr + 8R^2\sin^2\frac{C}{2} \end{cases}$$

Mặt khác :

$$\begin{cases} IA = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ IB = 4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \\ IC = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \end{cases}$$

và : $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Vậy bất đẳng thức (*) tương đương với bất đẳng thức sau

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \geq$$
$$\geq 2\left(\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\right) +$$
$$+ 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (1)$$

Dùng công thức hạ bậc và chú ý rằng :

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Ta được bất đẳng thức tương đương :

$$\frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\cos B\cos C + \cos C\cos A + \cos A\cos B) \quad (2)$$

Ta có : $0 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ và

$$\cos B\cos C + \cos C\cos A + \cos A\cos B$$
$$\leq \frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2$$
$$\leq \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$
$$= \frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

Từ đó suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ (*) đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Trong 149 bài giải có 4 bạn giải sai. Nhiều bạn giải quá dài. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Bùi Đức Hiệp*, 10P, Marie Curie, *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 10T, PTTH NK Trần Phú; **Vũng Tàu:** *Trần Quang Vinh*, 11T2, THPT Lê Quý Đôn; **Nam Định:** *Nguyễn Khang Ninh*, 11T, Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10A8, Ngô Gia Tự, Lập Thạch; *Đỗ Mạnh Tùng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **ĐHSP Hà Nội:** *Trần Đoàn Việt*, 10A1, *Nguyễn Trung Kiên*, 10A2, **ĐHKHTN Hà Nội:** *Bùi Viết Lộc*, 12A, PTCT.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/271. *Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện ABCD. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$(AB+AC+AD)^2 >$$
$$2S\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left[(BC-CD)^2 + (CD-DB)^2 + (DB-BC)^2\right] (*)$$

Lời giải. Trước hết, ta chứng minh hai bất đẳng thức sau đây :

Trong tam giác ABC, gọi độ dài các cạnh BC = a, CA = b, AB = c, diện tích là S, ta có các BĐT :

(i) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

(ii) $4bc + b^2 + c^2 - a^2 \geq 4S\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\hat{A} = 120^o$.

• Thật vậy, đặt : $2p = a+b+c$, $p - a = x$, $p - b = y$, $p-c = z$ thì $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y+z = p$ và ta được :

$$a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2 + c^2 - (a-b)^2 =$$
$$= 4(yz+zx+xy) \quad (1)$$

Mặt khác, lại có :

$$(yz+zx+xy)^2 = y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + 2xyz(x+y+z)$$
$$\geq 3xyz(x+y+z) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được BĐT (i) cần tìm :

$$a^2 + b^2 + c^2 - [(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \geq$$
$$4\sqrt{3xyz(x+y+z)} = 4S\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ và do đó $a=b=c$

• Để chứng minh BĐT (ii), chú ý rằng $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$, $2S = bc\sin A$ và
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A - \frac{1}{2}\cos A = \sin(A - 30^\circ) \le 1$$

Từ các điều trên suy ra BĐT (ii).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\hat{A} - 30^\circ = 90^\circ$ hay $\hat{A} = 120^\circ$.

Trở lại bài toán, kí hiệu $s(BCD) = S_1$, $s(CDA) = S_2$, $s(DAB) = S_3$, $s(ABC) = S_4$ thì $S_1+S_2+S_3+S_4 = S$, rồi áp dụng bất đẳng thức (i) vào tam giác BCD và bất đẳng thức (ii) vào các tam giác CDA, DAB, ABC ta lần lượt được các bất đẳng thức sau :

$$2(BC.BD+CD.CB+DB.DC) - (BC^2+CD^2+DB^2) \ge 4S_1\sqrt{3} \; ; \quad (a)$$
$$4AC.AD + AC^2 + AD^2 - CD^2 \ge 4S_2\sqrt{3} \quad (b)$$
$$4AD.AB + AD^2 + AB^2 - DB^2 \ge 4S_3\sqrt{3} \quad (c)$$
$$4AB.AC + AB^2 + AC^2 - BC^2 \ge 4S_4\sqrt{3} \quad (d)$$

Cộng theo từng vế bốn BĐT (a), (b), (c) và (d) ta được :
$$2(AB+AC+AD)^2 - (BC-CD)^2 - (CD-DB)^2 - (DB-BC)^2 \ge 4S\sqrt{3},$$
và từ đó được bất đẳng thức sau đây :
$$(AB+AC+AD)^2 \ge 2S\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left[(BC-CD)^2 + (CD-DB)^2 + (DB-BC)^2\right] \quad (e)$$

Vì các góc $\angle BAC$, $\angle CAD$ và $\angle DAB$ là các mặt (góc ở đỉnh) của tam diện đỉnh A nên không thể đồng thời bằng 120°, và do đó, trong bất đẳng thức trên không thể xảy ra đẳng thức. Vậy ta thu được BĐT (*) cần tìm.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã cho lời giải gọn như trên, tuy nhiên cũng có nhiều bạn đã sử dụng BĐT Bunhiacôpxki hoặc biến đổi phức tạp hơn.

2) Khi biện luận về dấu "=" có xảy ra trong BĐT (e) hay không, chúng ta nhất thiết phải sử dụng một trong hai tính chất sau đây về các mặt của một góc tam diện : (1) Mỗi mặt nhỏ hơn tổng hai mặt còn lại (về độ lớn) (2) Tổng ba mặt nhỏ hơn 4 vuông (360°). Tuy nhiên, đáng tiếc có đến gần mười bạn đã phạm sai lầm khi không để ý đến tính chất đó nên dẫn đến kết luận : "Đẳng thức xảy ra ở (e) khi và chỉ khi $ABCD$ là một chóp tam giác đều đỉnh A" !!!

3) Các bạn sau đây có lời giải gọn gàng :

Hà Nội: *Phan Nhất Thống*, 11A1, PTDL Tôn Đức Thắng, Ba Đình ; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 10T, PTTH Trần Phú ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thanh Tùng*, 12T, PTTH Hưng Yên; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 11T, *Lê Anh Tuấn*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân* 11 Toán, PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/271. *Vật có khối lượng $m = 0{,}5kg$ được treo vào lò xo có độ cứng $k = 100N/m$, có chiều dài tự nhiên $l_o = 30cm$ và có khối lượng không đáng kể. Một vật nhỏ có khối lượng 100g, bay theo phương ngang với vận tốc $v_o = 6m/s$ tới va chạm đàn hồi với vật m đang ở vị trí cân bằng. Hãy xác định độ cao (so với vị trí cân bằng) của vật m và độ giãn của lò xo khi vật m lên đến điểm cao nhất. Lấy $g = 100m/s^2$.*

Hướng dẫn giải. Xét va chạm đàn hồi giữa vật nhỏ (khối lượng $m_o = 100$g) và vật m :
$$m_o\vec{v_o} = m_o\vec{v'}_o + m\vec{v};\ \frac{m_o v_o^2}{2} = \frac{m_o v'^2_o}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Rút ra : $v'_o = -\frac{2}{3}v_o = -4m/s$; $v = \frac{v_o}{3} = 2$m/s.

Sau khi va chạm m_o bật ngược trở lại, còn vật m có vận tốc v chuyển động lên cao tới độ cao h (so với vị trí cân bằng), khi đó lò xo bị lệch góc α so với phương thẳng đứng. Trước khi hai vật va chạm, lò xo bị giãn một đoạn $x_o = \frac{mg}{k}$ và khi vật m ở độ cao h lò xo bị giãn một đoạn x. Áp dụng định luật II Niutơn cho vật m ở độ cao h được $kx - mg\cos\alpha = 0$, với $\cos\alpha = \frac{l_o + x_o - h}{l_o + x} \Rightarrow kx(l_o+x) = (l_o+x_o-h)mg. \quad (1)$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho vật m ở vị trí cân bằng (ngay sau va chạm) và ở độ cao h :
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx_o^2}{2} = mgh + \frac{kx^2}{2} \quad (2)$$

Thay số và giải hệ (1) và (2), tìm được : $x \approx 2cm$ và $h \approx 22cm$.

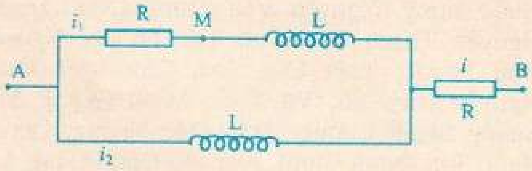
Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Hà Tĩnh: *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 12 Lí, THPTNK Hà Tĩnh; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 10 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 11B3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn; **Phú Yên:** *Đoàn Văn Thành*, 10T2, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Thị Việt Thảo*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Lê Sơn Tùng*, 11A Lí,

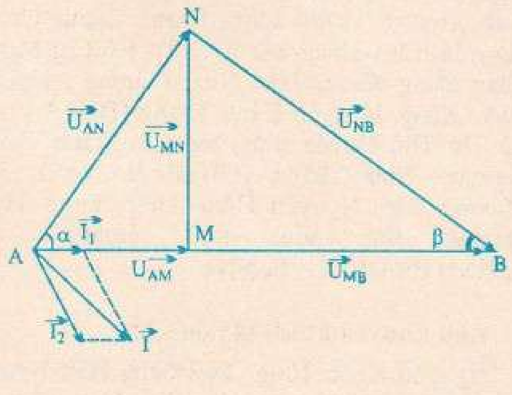
ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Xuân Hưng*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Bắc Ninh:** *Vũ Xuân Tiến*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Vĩnh Phúc:** *Trần Đặng Vũ*, 10A8, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; *Trịnh Ánh Tuyết*, 11A3, *Đỗ Thị Phương Thảo*, 10A3; *Nguyễn Bá Khánh Cường*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ;**Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, THPT Phan Bội Châu; *Lê Ngọc Tuấn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Hà Nam:** *Nguyễn Ngọc Tân*, 11b, THPT Duy Tiên A.

MAI ANH

Bài L2/271. *Cho mạch điện xoay chiều như trên hình. L là cuộn dây thuần cảm. Hãy xác định tần số của hiệu điện thế xoay chiều đặt vào hai điểm A, B để tỉ số hiệu điện thế tức thời $\frac{u_{AB}}{u_{MB}}$ là hằng số.*



Hướng dẫn giải. Từ $\frac{u_{AB}}{u_{MB}}$ = const suy ra u_{AB} và u_{MB} cùng pha và do đó u_{AM} cũng cùng pha u_{AB}. Ta có giản đồ vectơ như trên hình, với



$\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$;

$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}$;

$\vec{U}_{AN} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MN}$.

Ta có : $I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos(90^o+\alpha) =$

$= I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\sin\alpha$ (1),

với $\sin\alpha = \frac{U_{MN}}{U_{AN}} = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$

$U_{AN} = I_1\sqrt{R^2+Z_L^2} = I_2Z_L \Rightarrow I_1 = \frac{I_2Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$.

Thay vào (1) ta được :

$$I = I_2\sqrt{\frac{R^2+4Z_L^2}{R^2+Z_L^2}}$$

Từ hệ thức trong tam giác AI_1I :

$$\frac{I}{\sin(90^o+\alpha)} = \frac{I_2}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{I}{\cos\alpha} = \frac{I_2}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{I_2R}{I\sqrt{R^2+Z_L^2}}.$$

Từ hệ thức trong tam giác ANB ($AN \perp AI_2$; $NB // AI$)

$$\frac{U_{NB}}{\sin\alpha} = \frac{U_{AN}}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{IR}{\frac{Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}} = \frac{I_2Z_L}{\frac{I_2R}{I\sqrt{R^2+Z_L^2}}}$$

$$\Rightarrow Z_L = R \Rightarrow f = \frac{R}{2\pi L}$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Tp Hồ Chí Minh: *Trần Vinh Quang*, 12 Lí, PTNK-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, *Nguyễn Phi Bằng*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Hoàng Thanh Hải*, 12H, THPT Phả Lại, Chí Linh; **Tp Đà Nẵng:** *Thái Nguyên*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Trị:** *Trần Đình Hiếu*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, THPT Gia Bình số 1; **Hà Tĩnh:** *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 12 Lí, THPTNK Hà Tĩnh; *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, THPTNK Hà Tĩnh; **Vĩnh Phúc:** THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1, *Nguyễn Kim Thắng*, 11A3, *Lê Khánh Hùng*, 11A3.

MAI ANH

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 1999-2000

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Vụ THPT*)

Kì thi chọn học sinh giỏi Toán quốc gia THPT năm học 1999-2000 được tiến hành trong hai ngày : 13 và 14/3/2000. Tham dự kì thi có 497 học sinh thuộc 61 tỉnh, thành phố và 5 trường đại học : ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, ĐHKH Huế, ĐHSP Vinh, ĐHSP Hà Nội, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội. Thời gian làm bài của mỗi ngày thi là 180 phút và điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20.

Việc xét giải dựa trên hai nguyên tắc sau :

- Chỉ xét giải đối với các thí sinh đạt từ 20 điểm trở lên.

- Số thí sinh đạt giải ở mỗi bảng không vượt quá 1/2 tổng số thí sinh của bảng đó và số thí sinh đạt từ giải ba trở lên không vượt quá 2/3 số thí sinh đạt giải.

Hội đồng thi chọn học sinh giỏi Quốc gia đã quyết định trao giải về môn Toán như sau :

– *Giải nhất* cho các thí sinh đạt từ 34 điểm trở lên ;

– *Giải nhì* cho các thí sinh đạt từ 27 đến 33,5 điểm ;

– *Giải ba* cho các thí sinh đạt từ 23 đến 26,5 điểm ;

– *Giải khuyến khích* cho các thí sinh đạt từ 20 đến 22,5 điểm.

Ở bảng A, có 133 thí sinh đạt giải (chiếm 47,5% tổng số thí sinh), trong đó có 88 thí sinh đạt từ giải ba trở lên (chiếm 66% số thí sinh đạt giải). Ở bảng B, có 71 thí sinh đạt giải (chiếm 32,7% tổng số thí sinh), trong đó có 43 thí sinh đạt từ giải ba trở lên (chiếm 60,6% số thí sinh đạt giải). Kết quả cụ thể như sau :

BẢNG A

Giải nhất (3 thí sinh)

- Bùi Việt Hà (35 điểm), lớp 11 THPT chuyên Thái Bình

- Phạm Hồng Quân (35 điểm), lớp 12 THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương

- Đỗ Đức Nhật Quang (34 điểm), lớp 12 khối PT chuyên Toán - Tin - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

Giải nhì (22 thí sinh) :

Nguyễn Anh Quân (Hải Phòng); Nguyễn Quang Bằng, Nguyễn Thanh Hảo (nữ), Tô Minh Hoàng, Phạm Ngọc Lợi, Phùng Văn Thủy (Hải Dương); Vũ Trần Cương, Nguyễn Trọng Kiên, Vũ Việt Tài (Nam Định); Lương Hữu Thuận (Quảng Ngãi); Nguyễn Phi Lê (nữ), Hồ Anh Tài, Phan Văn Tiến (Thanh Hóa); Trịnh Quốc Khánh, Nguyễn Trung Lập (Vĩnh Phúc); Phạm Quốc Việt, Trần Quang Vinh (ĐHQG Tp Hồ Chí Minh); Lưu Tiến Đức (ĐHSP Hà Nội); Cao Vũ Dân, Nguyễn Minh Hoài, Nguyễn Vũ Thanh Tùng, Lê Anh Vinh (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội).

Giải ba (63 thí sinh)

Đào Ngọc Minh, Chu Mạnh Dũng, Lương Văn Khuê (Bắc Giang); Phạm Quốc Hùng (Đà Nẵng); Nguyễn Hải Nam (Đồng Nai); Phạm Minh Đức (Hải Phòng); Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn An Trung, Nguyễn Đại Thắng (Hà Nam); Phạm Bảo Lâm, Đặng Ngọc Minh, Nguyễn Viết Thắng, Đặng Hoàng Vũ, Nguyễn Hải Đăng, Đỗ Trường Giang (Hà Nội); Bùi Duy Cường, Trần Quang Đại (Hải Dương); Trần Tuấn Anh (Khánh Hòa); Vũ Thanh Tùng, Phạm Đình Quốc Hưng, Nguyễn Văn Trung (Nam Định); Nguyễn Thanh Bình, Lê Thế Phong, Nguyễn Hữu Phước, Trần Cao Sơn, Chu Việt Tuấn, Nguyễn Huy Vũ, Võ Khắc Minh (Nghệ An); Lương Mạnh Cường, Trần Đức Vương, Dương Ngọc Sơn (Ninh Bình), Nguyễn Đức Hoàng, Lại Minh Trí, Phạm Ngọc Hưng (Phú Thọ); Phạm Văn Việt, Phạm Lê Minh (Thái Bình), Lê Đình Hùng, Trần Hoàng Thắng, Lưu Ngọc Tuấn (Thanh Hóa); Nguyễn Đắc Dương, Nguyễn Đình Trường Huy, Lê Minh Nghĩa (Tp Hồ Chí Minh); Huỳnh Công Phước, Phạm Nguyên Quý (Thừa Thiên - Huế); Lê Chí Hoàng, Trần Lê Huy, Nguyễn Đức Toàn (Vĩnh Phúc); Phạm Tuấn Anh, Hoàng Thanh Lâm, Phạm Thanh Phong, Nguyễn Cẩm Thạch (ĐHQG Tp Hồ Chí Minh); Phan Đăng Khoa, Trần Hoài Phương , Nguyễn Xuân Sáng, Nguyễn Cảnh Thành (ĐHSP Vinh); Lê Thị Thu Huyền (nữ), Nguyễn Mạnh Thắng, Nguyễn Như Thắng (ĐHSP Hà Nội); Đào Phương Bắc, Nguyễn Hồng Diệp, Đinh Trọng Quang, Bùi Viết Lộc, Hoàng Tùng (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội).

Giải khuyến khích (45 thí sinh)

Nguyễn Khắc Tùng, Tạ Hoàng Hải, Nguyễn Đắc Trung, Nguyễn Tất Hảo (Bắc Ninh); Lê Đại

Dương, Nguyễn Thị Thùy Minh (nữ) (Đà Nẵng); Vũ Quang Minh, Vương Bá Quý, Nguyễn Kim Thắng (Hải Phòng); Trần Ngọc Đức (Hưng Yên); Tạ An Ninh, Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Quốc Thành (Hà Nam); Nguyễn Hoàng Lam (Hà Nội); Nguyễn Quốc Huy (Hà Tây); Phan Thanh Nga (nữ) (Hà Tĩnh); Võ Thị Duy Hòa (nữ) (Khánh Hòa); Nguyễn Khang Ninh, Đoàn Phương (Nam Định); Nguyễn Hoàng Sào (Nghệ an); Ninh Văn Tuấn (Ninh Bình); Nguyễn Kiên Cường, Đặng Thị Thu Hương (nữ), Tạ Anh Sơn, Nguyễn Tất Thắng (Phú Thọ); Phan Chánh Phong (Phú Yên); Phạm Đình Trung (Quảng Bình); Phạm Dương Tú (Quảng Ninh); Bạch Thị Thu Cúc (nữ), Mai Nguyên Dũng, Nguyễn Thị Hạ Hương (nữ) (Thái Nguyên); Trần Cường, Lương Thanh Tùng (Thái Bình); Vũ Đức Nghĩa, Lê Quang Thuận (Thanh Hóa); Bùi Trần Duy Vũ (Tp Hồ Chí Minh); Phạm Việt Tuấn (Thừa Thiên - Huế); Đỗ Ngọc Ánh, Phan Hồng Nhật (Vĩnh Phúc) ; Nguyễn Thanh Bình, Trần Đình Nguyên (ĐHQG Tp Hồ Chí Minh); Võ Quang Mẫn (ĐHKH Huế); Vũ Giáp Gianh, Vũ Văn Hải (ĐHSP Hà Nội); Trương Việt Hùng (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội).

BẢNG B

Giải nhất (1 thí sinh)

Đỗ Thị Thu Hà (nữ) (34 điểm), lớp 12, THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình

Giải nhì (13 thí sinh)

Đặng Hồng Minh (Bà Rịa - Vũng Tàu); Tạ Quốc Hưng (Đắc Lắc); Hoàng Việt Cường (Gia Lai); Nguyễn Anh Tuấn (Hòa Bình); Nguyễn Thị Liên Chi (nữ), Tô Thu Hiền (nữ) (Lâm Đồng); Nguyễn Đức Cường, Nguyễn Đức Trọng (Lào Cai); Lê Tiến Trung (Ninh Thuận); Nguyễn Hoàng Minh, Vũ Hồng Quang, Nguyễn Tuấn Thành (Tuyên Quang); Nguyễn Hoàng Quân (Vĩnh Long)

Giải ba (29 thí sinh) :

Lê Hoàng Vinh (Bà Rịa - Vũng Tàu) ; Nguyễn Quốc Thái (Bình Dương); Lê Trường Giang (Bình Thuận); Trần Tấn Quốc, Bùi Ngọc Bảo, Trần Quốc Nam (Bến Tre); Đặng Quang Hiếu, Phạm Ngọc Sơn (Cà Mau); Tăng Thị Hà Yên (nữ), Mai Anh Tuấn (Đắc Lắc) ; Bùi Thị Vân Anh (nữ), Dương Thị Hương (nữ), Trương Trung Yên (Hòa Bình); Nguyễn Tuấn Anh, Nguyễn Thế Quang, Huỳnh Trọng Tín, Lê Anh Tuấn, Nguyễn Hữu Vũ Tuyên (Lâm Đồng); Đặng Sỹ Huấn, Lê Duy Phương (Lạng Sơn); Đặng Quốc Hùng (Long An); Phạm Đức Hải (Sơn La); Võ Thị Lê Vân (nữ), Nguyễn Quốc Tuấn (Tuyên Quang), Trần Nhật Tuấn (Tây Ninh), Bùi Minh Khoa (Trà Vinh); Triệu Thanh Hải, Nguyễn Việt Hằng (nữ), Lê Đình Minh (Yên Bái).

Giải khuyến khích (28 thí sinh)

Phạm Thị Vân Giang (nữ), Tô Hồng Yến (nữ), Trần Quốc Tuấn (Bạc Liêu); Phan Ngọc Anh, Phạm Tiến Dũng (Bình Dương); Trần Văn Thanh, Thều Quang Trung (Bình Thuận); Trương Thanh Hải (Cà Mau); Nguyễn Thị Hồng Hạnh (nữ), Đặng Ngọc Châu (Đắc Lắc); Huỳnh Võ Mai Quyên (nữ), Ngụy Đức Thuận (Đồng Tháp); Huỳnh Vi Quang, Lưu Anh Phương (Gia Lai); Nguyễn Anh Quang (Hòa Bình) ; Phan Thị Thanh Vân (nữ) (Lâm Đồng); Dương Mạnh Duy, Nguyễn Thị Nguyệt Hà (nữ), Bùi Thanh Tuấn (Lạng Sơn); Lê Quốc Bảo (Long An); Nguyễn Bích Vân (nữ) (Sơn La); Nguyễn Văn Ngọc (Tuyên Quang); Phạm Trường Huy, Trần Minh Hưng, Nguyễn Trường Tín (Tiền Giang); Nguyễn Đỗ Thái Nguyên (Vĩnh Long); Lê Hoàng, Nguyễn Chế Linh (Yên Bái).

Căn cứ kết quả của kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán THPT năm nay, Bộ GD-ĐT đã quyết định triệu tập 39 học sinh tham dự kì thi chọn đội tuyển Toán QG dự thi IMO-2000, gồm : 38 thí sinh đạt từ 25 điểm trở lên ở bảng A và 1 thí sinh đạt giải nhất ở bảng B.

SAI LẦM Ở ĐÂU ? *(Tiếp trang 24)*

DỌN VƯỜN NHÀ

Trong khi KIHIVI mải cầm kính hiển vi đi "soi" các lời giải ở mọi nơi thì . .. giật mình khi thấy "vườn nhà" dạo này cũng nhiều chuyện phải "dọn dẹp, sửa sang".

Bài T1/267. Có thể thêm bao nhiêu chữ số 0 xen giữa chữ số 6 và 8 của số 1681 ($1681 = 41^2$) để số mới tạo thành cũng là số chính phương ?

Lời giải (cách 2) Giả sử có thể thêm n ($n \in N$) chữ số 0 xen giữa chữ số 6 và 8 của số 1681 để số mới cũng là số chính phương, ta có :

$$16.10^{n+2} + 81 = a^2 \Rightarrow a^2 > 16.10^{n+2}$$

$$\Rightarrow a \geq 4\sqrt{10^{n+2}} + 1$$

$$\Rightarrow 16.10^{n+2} + 81 \geq 16.10^{n+2} + 8\sqrt{10^{n+2}} + 1$$

$$\Rightarrow 80 \geq 8\sqrt{10^{n+2}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $n = 0$.

• Bạn có biết lời giải trên sai ở đâu không ? KIHIVI tuy "buồn rầu" nhưng vẫn vui mừng đa tạ 10 "bác sĩ chẩn đoán đúng bệnh" trong số tạp chí tháng 7 tới.

KIHIVI

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Bạn T.T.G (Tp Hồ Chí Minh) hăng hái tham gia cuộc chơi tới mức gửi 17 phiếu về với 17 ngày sinh khác nhau của chính mình (!). Ôi! Phải cho vào sách "Ghi-net" mất thôi : Người được chào đời 17 lần duy nhất trên thế giới ! Mục đích của cuộc chơi không phải như chơi xổ số, mua nhiều vé để hi vọng trúng thưởng càng lớn mà chủ yếu là chúng ta giao lưu với nhau, chúc mừng nhau, có phải không, hỡi các hội viên yêu quý ? Niềm vui tháng này đã được dành cho các bạn **sinh ngày 26 tháng 6**. CLB xin gửi quà mừng sinh nhật tới 7 bạn :

1. Hồ Thị Thanh Lịch, 1976, giáo viên trường THPT Nguyễn Sỹ Sách, Thanh Chương, Nghệ An.
2. Lê Phi Long, 1982, 12V, THPT NK thị xã Đồng Hới, Quảng Bình.
3. Trần Thị Mai Hoa, 1983, 11C2, THPT Phan Bội Châu, Tp Vinh, Nghệ An.
4. Nguyễn Minh Đức, 1983, 10A3, THPT Hải Hậu A, Hải Hậu, Nam Định.
5. Lê Thị Bích Thảo, 1983, Thôn Bến, xã Phụng Công, huyện Châu Giang, Hưng Yên.
6. Trần Đình Việt, 1984, 10C, THPT chuyên ban Giao Thủy, Nam Định.
7. Đỗ Mạnh Cương, 1985, 41 Quốc Trị, thị trấn Nam Sách, Hải Dương.

Các bạn thích ngày sinh 26 tháng 6 được nhận quà của CLB là : *Nguyễn Thị Thanh Hải*, giáo viên Văn, THCS Hà Linh, Hương Khê, Hà Tĩnh; *Nguyễn Thúy Quỳnh*, 11A2, THPT Tùng Thiện, Đức Thọ, Hà Tĩnh; *Phạm Quang Huy*, 9T, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh, Ninh Bình; *Nguyễn Thành Thuyên*, 135^B, Trần Hưng Đạo, Q1, Tp Hồ Chí Minh; *Võ Văn Hoàn*, 9A, THCS thị trấn Kim Sơn, Quế Phong, Nghệ An; *Đỗ Thị Hảo*, thôn Dư Xá, Ninh Xá, Thuận Thành, Bắc Ninh. Riêng bạn Nguyễn Thị Thanh Hải có tâm sự "Ngày sinh mà mình thích nhất là ngày sinh của mẹ mình. Mình muốn chúc mẹ sức khỏe, vui vẻ và hạnh phúc. Vì chưa bao giờ mẹ làm sinh nhật. Hi vọng đây sẽ là món quà bất ngờ thú vị dành cho mẹ của mình". Câu lạc bộ xin gửi qua bạn món quà sinh nhật tới mẹ của bạn, cảm ơn cô giáo dạy Văn mà vẫn mê THTT.

CLB

TIÊU CHUẨN NÀO ĐÂY ?

Dưới đây là tên của 6 nhà toán học :

1. Lê Văn Thiêm ; 2. Lương Thế Vinh
3. Caclơ Gauxơ ; 4. Đờ Moócgăng
5. Bledơ Patxcan ; 6. Giăng Đalămbe

Bạn có thể đưa ra một tiêu chuẩn để chia 6 nhà toán học trên thành 2 nhóm mà mỗi nhóm có đúng 3 nhà toán học không ?

10 tặng phẩm dành 10 bạn khéo nhất sẽ công bố vào số tạp chí tháng 7 năm 2000.

NGỌC MAI

ĐÃ THẲNG HÀNG CHƯA ?

• Tất cả đều tìm ra "bệnh ngộ nhận" : ba điểm O, Q, O' đã thẳng hàng để suy ra được hai hệ thức (*) và (**). Có nhiều cách giải đúng bài toán này, xin đưa ra một cách. Gọi K là giao của OP và MN, I là giao của $O'P$ và $M'N'$ thì tứ giác $QKPI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IQ = PK$. Mặt khác hai tam giác vuông OPM và $PO'M'$ đồng dạng, với MK và $M'I$ là các đường cao thuộc hai cạnh tương ứng nên :

$$\frac{O'I}{O'P} = \frac{PK}{PO} = \frac{IQ}{PO} \Rightarrow \Delta O'IQ \backsim \Delta O'PO$$

$$\Rightarrow \angle PO'O = \angle IO'Q = \angle PO'Q$$

$\Rightarrow O, Q, O'$ thẳng hàng.

Nhận xét. Tất cả các bạn đều chẩn đoán" và "điều trị" tốt. Xin khen các bạn lớp 9 sau đây : *Nguyễn Tuấn Đạt*, THCS Nguyễn Trãi, Hải Dương; *Nguyễn Hữu Quang*, THCS nội trú Kim Bảng, Hà Nam; *Nguyễn Hồng Thái*, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Hà Tây; *Trương Thanh Quỳnh*, THCS Thái Nguyên, Khánh Hòa; *Nguyễn Lương Phương Thủy*, THCS Trần Hưng Đạo, Quảng Ngãi; *Trần Văn Ngân*, THCS Lưu Sơn, Nghệ An; *Nguyễn Anh Tôn*, THCS Ngô Sĩ Liên, Hà Nội; *Vũ Văn Doanh*, THCS Nguyễn Hiền, Nam Định; *Phạm Văn Cường*, THCS Lê Hữu Lập, Thanh Hóa; *Trần Phúc Chinh*, THCS Supe, Phú Thọ; *Trần Thành Giang*, THCS Thực nghiệm Sư phạm, Tp Hồ Chí Minh và *Nguyễn Hồng Điệp*, 8A, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc.

Bạn *Trần Đức Sơn*, 8A5, THCS Lê Hồng Phong, Vinh, Nghệ An góp ý rất tốt : Bài toán không nên cho điểm P vì như vậy dễ lộ phép chứng minh ! Cảm ơn tất cả các bạn.

KIHIVI

(Xem tiếp trang 23)

Giải đáp bài

HÌNH VUÔNG CHIA THÀNH BẢY HÌNH VUÔNG

Cách giải dựa vào cách ghép hình minh họa *định lí Pitago*: Nếu $a^2 = b^2+c^2$ thì hình vuông cạnh a phân chia được thành 2 hình vuông cạnh bằng b và c.

Ta phân chia hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{7}$ (đơn vị), diện tích bằng 7 theo các bước sau :

Bước 1: Vì 7 = 4+3 nên chia hình vuông cạnh bằng $\sqrt{7}$ thành 2 hình vuông cạnh bằng 2 và $\sqrt{3}$.

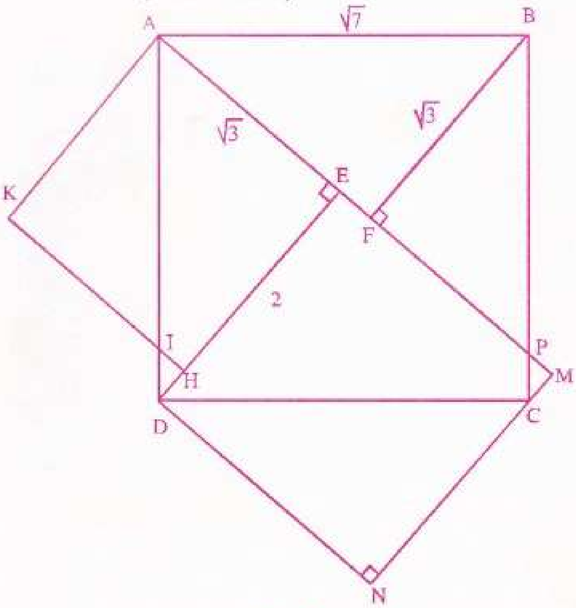
Bước 2. Chia hình vuông cạnh bằng 2 thành 4 hình vuông cạnh bằng 1.

Bước 3. Vì 3 = 2+1 nên chia hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$ thành 2 hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$ và 1.

Bước 4: Vì 2 = 1+1 nên chia hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$ thành 2 hình vuông cạnh bằng 1 (cắt theo hai đường chéo).

Dưới đây chỉ trình bày bước 1, bước 3.

Bước 1. (xem hình 1)



Hình 1

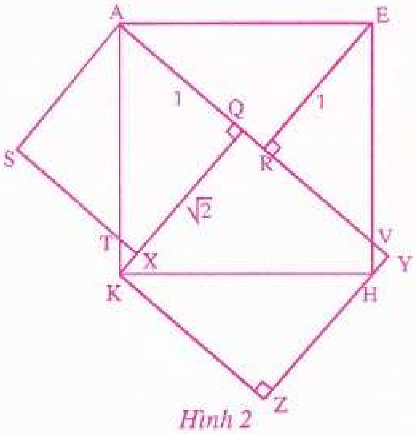
- Dựng ΔAED vuông tại đỉnh E (E nằm trong $ABCD$) sao cho $DE = 2$, $AE = \sqrt{3}$.

- Dựng hình vuông $AEHK$ (H thuộc DE) cạnh bằng $\sqrt{3}$.

- Dựng hình vuông $DEMN$ (E thuộc AM) cạnh bằng 2.

Dễ dàng thấy $\Delta AKI = \Delta BFP$, $\Delta DIH = \Delta CPM$, $\Delta DCN = \Delta ABF$, ba điểm N, C, M thẳng hàng, nghĩa là hình vuông $ABCD$ phân chia được thành 2 hình vuông $AEHK$ và $DEMN$.

Bước 3. (xem hình 2)



Hình 2

- Dựng ΔAKQ vuông tại đỉnh Q (Q nằm trong $AEHK$) sao cho $AQ = 1$, $KQ = \sqrt{2}$

- Dựng hình vuông $AQXS$ (X thuộc KQ) cạnh bằng 1.

- Dựng hình vuông $KQYZ$ (Q thuộc AY) cạnh bằng $\sqrt{2}$. Dễ dàng thấy $\Delta AST = \Delta ERV$, $\Delta KTX = \Delta HVY$, $\Delta KHZ = \Delta AER$, ba điểm Z, H, Y thẳng hàng, nghĩa là hình vuông $AEHK$ phân chia được thành 2 hình vuông $AQXS$ và $KQYZ$.

Có thể phân tích số 7 theo nhiều kiểu khác nhau, ta nên chọn cách nào để phân chia hình vuông thành ít mảnh nhất.

Nhiều bài cho lời giải chưa chặt chẽ.

Các bạn : *Trần Bá Hậu, Nguyễn Lan Tuyết*, 11 khối PT chuyên Toán - Tin, ĐHSP Vinh đã ghép được 7 hình vuông cạnh bằng 1 thành hình vuông cạnh bằng $\sqrt{7}$ mà đáng lẽ cần phải làm ngược lại.

BÌNH PHƯƠNG

XÓA NHỮNG CHỮ SỐ NÀO ?

Người ta viết số 123456789 lên bảng và yêu cầu bạn hãy xóa đi 3 chữ số để số còn lại trên bảng là số chính phương. Bạn có thực hiện được không ?

VIỆT NGỌC

TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN

BÙI CHUNG
Nhà giáo ưu tú – Hiệu trưởng

Từ năm 1967, tỉnh Bắc Thái đã mở các lớp toán đặc biệt đặt trong trường Lương Ngọc Quyến. Những lớp học sinh đầu tiên thời đó đã được quan tâm khuyến khích phát triển tài năng. Trưởng thành từ các lớp này, nhiều học sinh hiện nay đã là các cán bộ quản lí, các nhà khoa học.

Ngày 15.10.1988, trường PT năng khiếu Bắc Thái chính thức được thành lập và nay là trường THPT chuyên Thái Nguyên. Trường được đầu tư hơn 2 tỉ đồng để xây dựng cơ sở vật chất. Đội ngũ giáo viên của trường luôn phấn đấu nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ. Mấy năm gần đây, mỗi năm có 10% giáo viên đi học Cao học. Học sinh ở các huyện vào trường được phụ cấp 30.000đ một tháng. Học bổng 50.000đ một tháng được trao cho một phần ba số học sinh của trường. Trường đã đạt được nhiều thành tích trong đào tạo, những năm gần đây đã :

+ Có 100% học sinh tốt nghiệp THPT và hơn 90% học sinh được tuyển vào các trường Đại học, Cao đẳng.

+ Đạt hơn 200 giải học sinh giỏi của tỉnh trong mỗi năm.

+ Đạt hơn 25 giải học sinh giỏi quốc gia trong mỗi năm.

+ 70% giáo viên là giáo viên giỏi cấp tỉnh, có 2 nhà giáo ưu tú, 10 thạc sĩ.

Trường đã từng đoạt giải nhất Cuộc thi giọng hát hay các trường THPT, giải ba toàn đoàn trong kì thi Hội khỏe Phù Đổng.

Nhiều chuyên gia giỏi từ nhiều trường Đại học, Viện nghiên cứu đã về tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi của trường.

Với sự quan tâm của lãnh đạo tỉnh, Sở Giáo dục - Đào tạo, cùng các ban, ngành và nhân dân trong tỉnh, trường THPT chuyên Thái Nguyên luôn không ngừng vươn tới trong sự nghiệp phát hiện, bồi dưỡng nhân tài cho tỉnh và đất nước.

Tổ Toán trường THPT chuyên Thái Nguyên

Thầy Nguyễn Doãn Phú và các học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm học 1998–1999

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT77M10

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng