TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
7 2009
Số 385

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 46
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35144272, (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.com.vn/toanhoctuoitre

Hội đồng biên tập cùng các cộng tác viên thân thiết của Tòa soạn Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ trong Lễ kỉ niệm 84 năm ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam

Bài toán ĐẤU TRƯỜNG 100

BÌNH LUẬN ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

Khối A năm 2009

KẾT QUẢ GIAO LƯU OLYMPIC TIẾNG ANH TIỂU HỌC năm 2009

Lãnh đạo Bộ GD&ĐT và NXBGD Việt Nam gặp gỡ các giáo viên và học sinh trong buổi giao lưu

Lễ trao thưởng tại khu vực miền Bắc

Giao lưu Olympic Tiếng Anh Tiểu học cấp khu vực năm 2009 dành cho học sinh tiểu học do Vụ Giáo dục Tiểu học - Bộ GD&ĐT, NXBGD Việt Nam và Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam phối hợp tổ chức vào các ngày 13, 20 và 22.6.2009 tại ba khu vực: miền Bắc (Hà Nội), miền Nam (TP. Hồ Chí Minh), miền Trung (Đà Nẵng) vừa qua với sự tham gia của hơn 200 học sinh ở 22 tỉnh và thành phố trong cả nước. Nội dung giao lưu bao hàm trong chương trình Tiếng Anh tự chọn của Bộ GD&ĐT với hai hình thức: khảo sát năng lực cá nhân (học sinh làm bài đánh giá kĩ năng nghe hiểu, đọc hiểu, viết) và giao lưu đồng đội. Tuy lần đầu tiên tham dự nhưng các bạn học sinh tiểu học rất tự tin, hào hứng tham gia các phần thi với quyết tâm phấn đấu đoạt giải. Kết quả đạt được rất đáng khích lệ:

◆ **Về giải Cá nhân:** Có 10 giải Vàng, 16 giải Bạc, 38 giải Đồng. Các bạn đoạt giải Vàng là: *Phạm Quang Anh* (Nam Định), *Nguyễn Hải Anh* (Hải Phòng), *Phạm Hoàng Dương* (Phú Thọ), *Vương Minh Quân* (Hà Nội), *Nguyễn Vũ Ngân Thảo* (Quảng Ninh), *Lê Nguyễn Thục Nhi* (Đà Nẵng), *Nguyễn Quốc Cường* (Thừa Thiên - Huế), *Lê Thị Thuỳ Linh* (Đăk Lăk), *Tô Quang Nghĩa* (Trà Vinh), *Bùi Hoàng Chí Nhân* (Đồng Nai). Ngoài giải thưởng, các bạn đoạt giải Vàng còn được NXBGD Việt Nam tặng một chuyến tham quan và trao đổi tại Singapore cùng với giáo viên Tiếng Anh trực tiếp dạy.

◆ **Về giải Đồng đội:** Có 22 giải Nhất (giải Vàng) về từng kĩ năng (nhìn tranh ghép từ, ghép tranh, năng khiếu biểu diễn bằng Tiếng Anh).

- Kĩ năng nhìn tranh ghép từ thuộc về các đoàn: Thanh Hoá, Phú Thọ, Quảng Ninh, Vĩnh Phúc, Hưng Yên, Trà Vinh, Quảng Nam.

- Kĩ năng ghép tranh thuộc về các đoàn: Thái Bình, Nam Định, Hoà Bình, Nghệ An, Đà Nẵng, Bến Tre, Bình Dương, Đồng Tháp.

- Năng khiếu biểu diễn bằng Tiếng Anh thuộc về các đoàn: Hà Nội, Hải Phòng, Thừa Thiên - Huế, Quảng Ngãi, Cần Thơ, Đồng Nai, Đăk Lăk,

Với sự tham gia hỗ trợ tích cực của NXBGD Việt Nam, đặc biệt là ba công ti CP Đầu tư và Phát triển giáo dục tại Hà Nội, Đà Nẵng và Phương Nam (các đơn vị tài trợ chính), các cuộc giao lưu tại ba khu vực đã thành công và để lại nhiều ấn tượng tốt đẹp. Phát biểu tại buổi khai mạc giao lưu ở miền Bắc, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT *Nguyễn Vinh Hiển* đã đánh giá cao hoạt động này, ông nhấn mạnh: *"Olympic Tiếng Anh cho học sinh tiểu học nhằm khuyến khích học sinh tiểu học tích cực tham gia học Tiếng Anh theo chương trình Tiếng Anh tự chọn do Bộ GD&ĐT ban hành, giúp và cùng các địa phương trong cả nước đẩy mạnh phong trào dạy - học Tiếng Anh chuẩn bị thí điểm chương trình Tiếng Anh 10 năm do Chính phủ ban hành".*

THANH LOAN

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trong các số báo trên THTT có nghiên cứu khá sâu sắc về các phương trình vô tỉ. Trong bài viết này chúng ta sẽ đề cập đến một lớp phương trình cũng rất quan trọng, thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi cấp THCS cũng như các đề thi tuyển sinh vào lớp 10. Đó là các phương trình dạng phân thức có chứa ẩn ở mẫu. Chúng ta sẽ cùng giải quyết những khó khăn của các bạn học sinh khi gặp loại phương trình này thông qua các phương pháp giải sau.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA ẨN Ở MẪU

KIỀU QUANG CƯỜNG, KIỀU ĐÌNH MINH
(*GV trường THPT Thanh Ba, Phú Thọ*)

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

1. *Phân tích hoặc nhóm các phân thức*

★**Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$\frac{1}{x^2+5x+4}+\frac{1}{x^2+11x+28}+\frac{1}{x^2+17x+70}=\frac{3}{4x-2}.$$

Lời giải. ĐK $x \notin \left\{-10; -7; -4; -1; \frac{1}{2}\right\}$.

Với ĐK trên thì PT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+10)}=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+10}\right)=\frac{3}{4x-2}$$

$\Leftrightarrow x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=-4$.

So sánh với điều kiện ta có PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=-3$. □

★**Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4.$$

Lời giải. ĐK $x \notin \{-3; -2; 1; 4\}$. Với ĐK trên PT đã cho tương đương với

$$1+\frac{2}{x-1}+1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3}+1+\frac{8}{x-4}=4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-4}\right)-\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-8}{(x-1)(x-4)}-\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow (5x-8)(x+2)(x+3)-(5x+12)(x-1)(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{16}{5}=0.$$

Kết hợp với ĐK, PT đã cho có hai nghiệm

$x=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$ và $x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$. □

★**Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$\frac{1}{2008x+1}-\frac{1}{2009x+2}=\frac{1}{2010x+4}-\frac{1}{2011x+5}.$$

Lời giải. ĐK $x \notin \left\{-\frac{1}{2008}; \frac{2}{2009}; -\frac{4}{2010}; -\frac{5}{2011}\right\}$.

Với ĐK trên, PT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2008x+1}+\frac{1}{2011x+5}=\frac{1}{2009x+2}+\frac{1}{2010x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4019x+6}{(2008x+1)(2011x+5)}=\frac{4019x+6}{(2009x+2)(2010x+4)}$$

$\Leftrightarrow 4019x+6=0$ hoặc

$$\frac{1}{(2008x+1)(2011x+5)}=\frac{1}{(2009x+2)(2010x+4)}$$

$\Leftrightarrow 4019x+6=0$ hoặc

$(2008x+1)(2010x+5)-(2009x+2)(2011x+4)=0$

$\Leftrightarrow 4019x+6=0$ hoặc $2x^2+5x+3=0$.

Kết luận. PT đã cho có ba nghiệm

$$x=-\frac{6}{4016};\ x=-1;\ x=-\frac{3}{2}.\ \square$$

2. Đưa về phương trình bậc cao giải được

★Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$\frac{2x}{3x^2-5x+2}+\frac{13x}{3x^2+x+2}=6.$$

Lời giải. ĐK $x\notin\left\{1;\frac{2}{3}\right\}$. Với ĐK trên PT đã cho tương đương với

$$2x(3x^2+x+2)+13x(3x^2-5x+2)$$
$$=6(3x^2-5x+2)(3x^2+x+2)$$
$$\Leftrightarrow 54x^4-117x^3+105x^2-78x+24=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)(9x^2-3x+6)=0.$$

Kết luận. PT đã cho có hai nghiệm

$x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{3}{4}$. $\square$

★Thí dụ 5. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Lời giải. ĐK $x>0$ và $x\neq 1$. Với ĐK trên PT đã cho tương đương với $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (1)

• Nếu $0<x<1$ thì vế trái của (1) là số âm, trong khi vế phải là số dương (mâu thuẫn). Vậy PT không có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

• Nếu $x>1$ thì hai vế của (1) đều dương, bình phương hai vế ta được

$$x^4-2x^2-16x+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+3)^2-8(x+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\sqrt{2}x+3-2\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\sqrt{2}x+3+2\sqrt{2}\right)=0.$$

Kết hợp với ĐK $x>1$ ta có $x=\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}$. $\square$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. Đặt một ẩn phụ

★Thí dụ 6. *Giải phương trình* $\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+x^2-x}=3.$

Lời giải. ĐK $x\neq 0$ và $x\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Chia cả tử số và mẫu số ở vế trái cho x^2 rồi rút gọn ta được $\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+3}{x-\frac{1}{x}+1}=0$. Đặt $t=x-\frac{1}{x}$, PT trên trở thành

$$\frac{t^2+5}{t+1}=3\Leftrightarrow t^2-3t+2=0$$
$$\Leftrightarrow t=1 \text{ hoặc } t=2.$$

• Với $t=1$, ta có

$$x-\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

• Với $t=2$, ta có

$$x-\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}.$$

Kết luận. PT đã cho có bốn nghiệm là

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ và $x=1\pm\sqrt{2}$. $\square$

★Thí dụ 7. *Giải phương trình*

$$\frac{2}{3x^2-4x+1}+\frac{13}{3x^2+2x+1}=\frac{6}{x}.$$

Lời giải. ĐK $x\neq 0$, $x\neq 1$ và $x\neq\frac{1}{3}$. Biến đổi PT đã cho thành $\frac{2}{3x-4+\frac{1}{x}}+\frac{13}{3x+2+\frac{1}{x}}=6.$

Đặt $3x+\frac{1}{x}-4=-4$, PT trên trở thành $\frac{2}{t}+\frac{13}{t+6}=6$

$$\Leftrightarrow 2t^2+7t-4=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \text{ hoặc } t=-4.$$

• Với $t=\frac{1}{2}$, ta có $3x+\frac{1}{x}-4=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 6x^2-11x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \text{ hoặc } x=\frac{1}{2}.$$

• Với $t=-4$, ta có

$$3x+\frac{1}{x}-4=-4\Leftrightarrow 3x^2+1=0.$$

PT này không có nghiệm thực.

Kết luận. PT có hai nghiệm $x=\frac{4}{3}$ và $x=\frac{1}{2}$. $\square$

★Thí dụ 8. *Giải phương trình* $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=15.$

Lời giải. ĐK $x \neq 0$ và $x \neq -1$. PT đã cho tương đương với PT sau

$$\frac{(x+1)^2+x^2}{x^2(x+1)^2}=15 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}=15.$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)}=t$, PT trên trở thành

$t^2+2t=15 \Leftrightarrow t=3$ hoặc $t=-5$.

• Với $t=3$, suy ra

$3x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$.

• Với $t=-5$, suy ra

$5x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$.

Kết luận. PT đã cho có bốn nghiệm $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$, $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$. □

2. Đặt hai ẩn phụ

★Thí dụ 9. *Giải phương trình*

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+\frac{x+1}{x-3}=12\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2.$$

Lời giải. ĐK $x \neq 2$ và $x \neq 3$. Đặt

$u=\frac{x+1}{x-2}$, $v=\frac{x-2}{x-3}$.

PT đã cho trở thành

$u^2+uv=12v^2 \Leftrightarrow (u-3v)(u+4v)=0$

$\Leftrightarrow u=3v$ hoặc $u=-4v$.

• Với $u=3v$, ta có $\frac{x+1}{x-2}=3.\frac{x-2}{x-3}$

$\Leftrightarrow 2x^2-16x+9=0 \Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{46}}{2}$.

• Với $u=-4v$, ta có $\frac{x+1}{x-2}=-4.\frac{x-2}{x-3}$

$\Leftrightarrow 5x^2-12x+19=0$. PT này vô nghiệm.

Kết luận. PT đã cho có hai nghiệm $x=\frac{8\pm\sqrt{46}}{2}$. □

III. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

★Thí dụ 10. *Giải phương trình*

$$\frac{3}{x^2+x+3}-\frac{4}{x^2+3x+9}=\frac{1}{2x^2}.$$

Lời giải. ĐK $x \neq 0$. PT đã cho tương đương với

$$\frac{4}{x^2+3x+9}+\frac{1}{2x^2}=\frac{3}{x^2+x+3} \quad (*)$$

Áp dụng BĐT $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, với $\forall x,y>0$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$, ta có

$$\frac{4}{x^2+3x+9}+\frac{1}{2x^2}\geq\frac{(2+1)^2}{3x^2+3x+9}=\frac{3}{x^2+x+3}.$$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow x^2+3x+9=4x^2 \Leftrightarrow x^2-x-3=0$.

Kết luận. PT đã cho có hai nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. □

Cuối cùng, mời các bạn sử dụng các phương pháp nêu trên giải các phương trình dưới đây.

1. $\frac{1}{4x-2006}+\frac{1}{5x+2004}=\frac{1}{15x-2007}-\frac{1}{6x-2005}$

(T3/348 – THTT).

2. $\frac{x^2}{(x+2)^2}=3x^2-6x-3$

(Đề TS lớp 10 chuyên Toán, ĐHSPHN 2007).

3. $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$

(Đề TS lớp 10 chuyên Toán THPT Lê Hồng Phong, TP. HCM 2007).

4. $\frac{x^2}{5}+\frac{6125}{x^2}+\frac{210}{x}-\frac{12x}{5}=0$

(T2/247 – THTT).

5. $\frac{4x^2+16}{x^2+6}-\frac{3}{x^2+1}=\frac{5}{x^2+3}+\frac{7}{x^2+5}$

(Đề HSG Toán 9, Quảng Ngãi 2007).

6. $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$.

7. $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}-\frac{x-4}{x+5}+\frac{x-5}{x+6}=0$.

8. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x-2}=\frac{18}{x^2+2x-1}$.

9. $\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2}+(x^2-3)^4+\frac{1}{(x-2)^2}=3x^2-2x-5$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NĂM HỌC 2008 - 2009

(Đề thi đã đăng trên THTT số 384, tháng 6 năm 2009)

VÒNG 2

Câu 1. Biến đổi vế trái (VT) của đẳng thức cần chứng minh ta có

$$VT=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-b+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-a+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{c})+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Câu 2. 1) Ta có

$$\Delta = a^2-4(a^2-6)=24-3a^2=3(8-a^2).$$

Ta sẽ chứng minh $\Delta < 0$ hay $a > 2\sqrt{2}$. Giả sử ngược lại $0 < a \le 2\sqrt{2}$. Từ giả thiết ta có

$6+\frac{6}{a}=a^2\le 8$, suy ra $\frac{6}{a}\le 2$, hay $a\ge 3 > 2\sqrt{2}$.

Mâu thuẫn với giả sử $a \le 2\sqrt{2}$, do đó $\Delta < 0$ hay PT đã cho vô nghiệm.

2) Nhân theo vế ba BĐT quen thuộc sau
$2(a^2+1)\ge(a+1)^2$; $2(b^2+1)\ge(b+1)^2$;
$(a^2+1)(b^2+1)\ge(ab+1)^2$, ta được
$4(a^2+1)^2(b^2+1)^2\ge(a+1)^2(b+1)^2(ab+1)^2$.

Suy ra $2(a^2+1)(b^2+1)\ge(a+1)(b+1)(ab+1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Đáp số. $a=b=1$.

Câu 3. 1) Bộ $(a\,;\,b\,;\,c)=(2\,;\,4\,;\,14)$ thoả mãn bài toán.

2) Giả sử tồn tại ba số nguyên tố phân biệt a, b, c thoả mãn bài toán. Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $a<b<c$. Ta luôn có

$a \mid (a+b+c+ab+bc+ca)$;
$b \mid (a+b+c+ab+bc+ca)$;
$c \mid (a+b+c+ab+bc+ca)$.

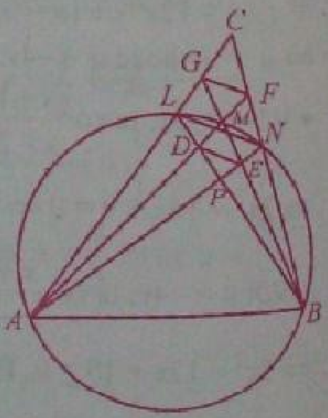
Suy ra $abc \mid (a+b+c+ab+bc+ca)$. Giả sử $\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{abc}=k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

Nếu $a=2$, lúc đó b, c lẻ nên abc chẵn và $a+b+c+ab+bc+ca$ lẻ, suy ra $k\notin\mathbb{N}^*$, mâu thuẫn. Vậy $a>2$, suy ra $a\ge 3$, $b\ge 5$, $c\ge 7$. Lúc này ta có

$$k=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$\le\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{86}{105}<1\le k.$$

Từ đó $k<k$ (vô lí). Vậy không tồn tại ba số nguyên tố phân biệt a, b, c thoả mãn bài toán.

Câu 4. 1) (h. 1) Do M là điểm chính giữa của cung LN nên $\widehat{DBE}=\widehat{DAE}$, suy ra tứ giác $ADEB$ nội tiếp.



Hình 1

Do đó $\widehat{ABD}=\widehat{AED}=\widehat{ANL}$. Vậy $DE \parallel LN$.

Tương tự, $\widehat{GBF}=\widehat{GAF}$ nên tứ giác $ABFG$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ALN}=\widehat{AGF}$ (cùng bù với góc ABC). Do đó $GF \parallel LN$. Vậy $DE \parallel GF$.

2) a) Do AF là đường phân giác trong của góc CAN, nên

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA
NĂM HỌC 2008 - 2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*)

Tính giá trị của biểu thức

$$M=\frac{1}{1+\sqrt{2a+1}}+\frac{1}{1-\sqrt{2a-1}}.$$

Biết rằng

$$\frac{a}{x+y}=\frac{7}{x+z} \text{ và } \frac{49}{(x+z)^2}=\frac{13}{(z-x)(2x+y+z)}.$$

Câu 2. (2 *điểm*)

Cho các số thực a, b, c thoả mãn

$$\begin{cases} a+b+c>0 \\ ab+bc+ca>0 \\ abc>0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương.

Câu 3. (2*điểm*)

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB và AD sao cho chu vi tam giác AMN bằng 2. Tính độ lớn góc MCN.

Câu 4. (2 *điểm*)

Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Điểm D di động trên cạnh AC, điểm E di động trên tia đối của tia CB sao cho $AD.BE = a^2$. Các đường thẳng AE và BD cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MA + MC = MB$.

Câu 5. (2 *điểm*)

Giả sử x, y là các số nguyên dương sao cho $x^2 + y^2 + 6$ chia hết cho xy. Tìm thương của phép chia $x^2 + y^2 + 6$ cho xy.

PHẠM NGỌC QUANG
(*Sở GD & ĐT Thanh Hoá*) giới thiệu

$$\frac{AL}{AP}=\frac{LD}{DP}=\frac{LP}{DP}-1=\frac{LN}{DE}-1;$$

$$\frac{AN}{AC}=\frac{NF}{FC}=\frac{CN}{FC}-1=\frac{LN}{GF}-1.$$

Do $DEFG$ là hình bình hành nên $DE = GF$, suy ra $\frac{AL}{AP}=\frac{AN}{AC}$, hay $\Delta ALP \backsim \Delta ANC$.

b) Vì $\Delta ALP \backsim \Delta ANC$ nên $\widehat{APL}=\widehat{ACN}=\widehat{ACB}$.

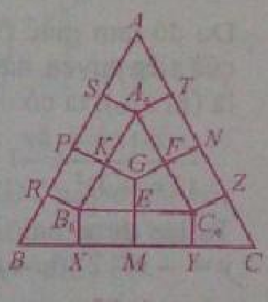
Suy ra $\widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{MAB} - \widehat{MBA}$

$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{PAB}+\widehat{CAB}+\widehat{PBA}+\widehat{CBA}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{PAB}-\widehat{CAB}+180^\circ-\widehat{PBA}-\widehat{CBA}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\widehat{APB}+\widehat{APL}\right) = 90^\circ \Rightarrow DF \perp EG.$

Câu 5. Giả sử tam giác đã cho là ABC. Gọi M, N, P là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và G là trọng tâm của tam giác ABC. Lấy A_0, B_0, C_0, X, Y, Z, T, S, R lần lượt là trung điểm của các đoạn GA, GB, GC, MB, MC, NC, NA, PA, PB. Tam giác ABC được chia thành 12 phần như hình 2.



Hình 2

Theo nguyên tắc Dirichlet, trong số 13 điểm đã cho tồn tại hai điểm cùng thuộc một phần. Do cạnh của tam giác ABC bằng 6 nên $GA_0 = AA_0 = GB_0 = B_0B = GC_0 = CC_0 = \sqrt{3}$ cm. Do đó, hai điểm nói trên thoả mãn yêu cầu bài toán.

LƯU XUÂN TÌNH
(*GV trường ĐHSP Hà Nội*) giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Bình luận

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

Khối A năm 2009

LỜI TÒA SOẠN. Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm nay sát với chương trình phổ thông và cấu trúc đề thi tuyển sinh của Bộ GD&ĐT đã ban hành.

Đề thi không quá khó và có tính phân loại trình độ học sinh. Nhìn chung đề thi đòi hỏi kĩ năng tính toán, biến đổi. Tuy nhiên để đạt được điểm cao, học sinh không chỉ đơn thuần vận dụng kiến thức một cách máy móc mà phải có sự linh hoạt, sáng tạo. Đặc biệt là các Câu VI.a.1, Câu VI.b.1 và Câu V là câu khó nhất của đề thi.

Sau đây là hướng dẫn giải của một số câu và một số lưu ý về các dạng liên quan của các thầy giáo NGUYỄN ANH DŨNG (Hà Nội), NGUYỄN MINH NHIÊN (THPT Quế Võ Số I, Bắc Ninh), ĐỖ BÁ CHỦ (THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình), TRỊNH XUÂN TÌNH (THPT Phú Xuyên B, Hà Nội).

CÂU I.2. *Cho hàm số* $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Hướng dẫn. Ta có $y'=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}<0, \forall x\neq-\dfrac{3}{2}$.

Do đó tam giác OAB cân tại O khi hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1. Gọi tọa độ tiếp điểm là $(x_0\,;\,y_0)$, ta có

$$-\frac{1}{(2x_0+3)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=-2 \text{ hoặc } x_0=-1.$$

Ta lập được hai tiếp tuyến : $y=-x$ (loại) và $y=-x-2$ (thỏa mãn). □

Lưu ý. • Đây là bài toán về lập phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc khi đó chỉ cần xác định hoành độ tiếp điểm là giải quyết được bài toán.

• Ngoài cách trên ta có thể xác định tọa độ A, B và sử dụng điều kiện $OA=OB$.

★ **Bài luyện tập**

1) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$, biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho tam giác IAB cân ,với I là giao điểm của hai tiệm cận đó.

2) Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và diện tích tam giác OAB bằng $\dfrac{1}{4}$.

CÂU II.1. *Giải phương trình*

$$\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}.$$

Hướng dẫn. ĐK $\sin x\neq-\dfrac{1}{2}$; $\sin x\neq1$.

Biến đổi phương trình về dạng

$$\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ hoặc } x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}.$$

Kết hợp với ĐK ta được nghiệm

$$x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).\ □$$

Lưu ý. Giải PT $a\cos u+b\sin u=c\sin v+d\cos v$, trong đó u, v là các biểu thức có chứa x; $a^2+b^2=c^2+d^2\neq0$.

Đặt $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$; $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$; $\dfrac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}=\sin\beta$; $\dfrac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}=\cos\beta$, ta đưa PT về dạng đơn giản

$$\cos(u-\alpha)=\sin(v+\beta).$$

★ **Bài luyện tập.** Giải phương trình

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2x+2\sin 3x\cos x-4\sin x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=1.$$

CÂU II.2. *Giải phương trình*

$$2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0\ \ (x\in\mathbb{R}).$$

Hướng dẫn. Đặt $u=\sqrt[3]{3x-2}$; $v=\sqrt{6-5x}$.

$(v\geq0)$. Ta có hệ $\begin{cases}2u+3v=8 & (1)\\ 5u^3+3v^2=8 & (2)\end{cases}$

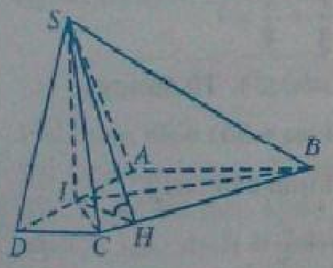
Từ PT (1), tính v theo u rồi thế vào PT (2). Sau khi biến đổi, ta có $(u+2)(15u^2-26u+20)=0$.
Do đó $u=-2$; $v=4$ (thỏa mãn).
Tìm được $x=-2$. □

Lưu ý • Ngoài cách trên, ta có thể đặt $t=\sqrt[3]{3x-2}$ $\Rightarrow x=\frac{t^3+2}{3}$. Thay vào PT đã cho ta được PT vô tỉ ẩn t có dạng cơ bản.

• Đối với PT có dạng tổng quát là
$$F\left(\sqrt[n]{af(x)+b};\ \sqrt[m]{cf(x)+d}\right)=0,$$
đặt $u=\sqrt[n]{af(x)+b}$; $v=\sqrt[m]{cf(x)+d}$, suy ra
$\begin{cases} F(u;v)=0 \\ cu^n-av^m=bc-ad \end{cases}$ hoặc đặt $u=\sqrt[n]{af(x)+b} \Rightarrow f(x)$.

★ **Bài luyện tập.** Giải các phương trình
1) $2\sqrt[3]{x-2}+5\sqrt{x+1}-12=0$; 2) $\sqrt[4]{17-x^2}-\sqrt[3]{2x^2-1}=1$.

CÂU IV. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a, CD = a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60°. Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.*



Hướng dẫn
Từ giả thiết suy ra $SI\perp(ABCD)$. Hạ $IH\perp BC$ thì $SH\perp BC$. Ta dễ dàng tính được $IC=a\sqrt{2}$, $BC=a\sqrt{5}$, $S_{ABCD}=3a^2$.

Ta có $\frac{1}{2}IH.BC=S_{IBC}=S_{ABCD}-S_{ABI}-S_{CDI}$ $=3a^2-a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$. Nên $IH=\frac{2S_{IBC}}{BC}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$.

Từ đó tìm được $V_{S.ABCD}=\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$. □

★ **Bài luyện tập.** Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên đều tạo với đáy góc $60°$. Biết $\widehat{ACB}=60°$, $AB=a\sqrt{7}$, $AC=2a$. Hãy tính thể tích khối chóp đó.

CÂU V. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$, ta có*
$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3.$$

Hướng dẫn. Cách 1. Đặt $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ thì a, b, c là các số dương và
$$x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{c+a-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}.$$
Điều kiện bài toán trở thành
$$4a^2=(b+c)^2+3(b-c)^2 \qquad (1)$$
Ta phải chứng minh $b^3+c^3+3abc\le 5a^3$.
Từ (1) ta có $4a^2\ge(b+c)^2\Rightarrow 2a\ge b+c$
và $a^2=b^2+c^2-bc\ge 2bc-bc\Rightarrow a^2\ge bc$.
Có $b^3+c^3+3abc=(b+c)(b^2-bc+c^2)+3abc$
$\le 2a.a^2+3a.a^2=5a^3$.
Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ hay $x=y=z$. □

Lưu ý • Việc đổi biến giúp ta đưa bài toán về dạng gọn và nhẹ nhàng hơn (Bạn đọc có thể tham khảo bài viết "*Phương pháp đổi biến trong bài toán chứng minh bất đẳng thức*" đăng trên THTT, số 383, tháng 5/2009).
• Ngoài ra, từ điều kiện a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác thỏa mãn $a^2=b^2+c^2-bc$ suy ra góc $\widehat{A}=60°$. Từ giả thiết, nếu thay góc A là $45°, 90°$ hay $120°$ ta lại được các bài toán mới.

Cách 2. Đặt $t=y+z\Rightarrow yz=\frac{x^2+xt}{3}$.
Vì $x(x+y+z)=3yz\le\frac{3}{4}(y+z)^2$ nên
$$x^2+tx\le\frac{3}{4}t^2\Rightarrow(2x+t)^2\le 4t^2\Rightarrow 2x\le t.$$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$(2x+y+z)^3-3(x+y)(x+z)(2x+y+z)$$
$$+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow(2x+y+z)^3-6x(x^2+x(y+z)+yz)\le 5(y+z)^3.$$
Thay $t=y+z$, $yz=\frac{x^2+xt}{3}$ và biến đổi, ta được $t(2x-t)(x+2t)\le 0$. BĐT này đúng với $x>0$; $t>0$; $2x\le t$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$, $2x=t$ hay $x=y=z$. □

Lưu ý. **Với các bài toán chứng minh BĐT trong đó vai trò của x, y như nhau, ta có thể đặt** $t=x+y$ hoặc $t=xy$; sử dụng giả thiết và bất đẳng thức $4xy\le(x+y)^2$ để suy ra điều kiện của t; dẫn đến chứng minh BĐT biến t thoả mãn với điều kiện của t ở trên.

★ **Bài luyện tập.** Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x^2+2x(y+z)=5yz$. Chứng minh rằng
$$(x+y)^3+(x+z)^3+(x+y)(y+z)(z+x)\le 3(y+z)^3$$

(Xem tiếp trang 27)

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐÁP SỐ ĐỀ SỐ 5

(Đề đăng trên THTT số 383, tháng 5 năm 2009)

Câu 1. 2) Đáp số $m = \dfrac{3}{2}$.

Câu 2. 1) $x = \pm 1$.

2) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right) + k\pi$;

$x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{4}{5}\right) + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3. $I = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\arctan\sqrt{6}$.

Câu 4. $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = 24\sqrt{3}r^3$.

Câu 5. $\underset{-1\le x\le 1}{\operatorname{Min}} f(x) = 1$, đạt được khi và chỉ khi $x = 0$.

Câu 6a. 1) PT mp(α): $2x - y - 1 = 0$.

2) PT(d_3) : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 + m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$.

Câu 7a. Đặt $3^a = x$, $3^b = y$, $3^c = z$. Sử dụng BĐT Cauchy để chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 \ge x + y + z.$$

Câu 6b. (Xem kết quả câu 6a).

Câu 7b. *Đáp số.* $(x\,;y) = (\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(x\,;y) = \left(\sqrt{6};\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

ĐÁP SỐ ĐỀ SỐ 6

(Đề đăng trên THTT số 384, tháng 6 năm 2009)

Câu 1. 2) Có ba tiếp tuyến thỏa mãn đề bài (d_1): $y = 2$; (d_2): $y = \dfrac{4\sqrt{6}}{9}x + 2$;

(d_3) : $y = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9}x + 2$.

Câu 2. 1) *Đáp số.* $x > 3$.

2) $x = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi \ (k, m \in \mathbb{Z})$.

Câu 3. *Đáp số.* $I = \dfrac{32}{3} - 10\ln 3$.

Câu 4. $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3.\sqrt{2}}{8}$.

Câu 5. *Đáp số.* $-\dfrac{1}{4} \le m \le \dfrac{3}{4}$.

Câu 6a. 1) $g(AB, CD) = 60^\circ$, $d(AB, CD) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

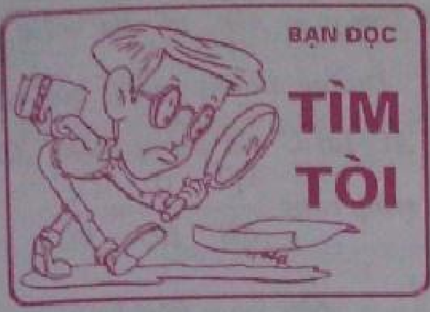
2) PT mp(α): $-\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Câu 7a. Chứng minh $abc \le 1$. Từ đó suy ra $1 + a^2(b+c) \ge a(bc + ca + ab) = 3a$.

Câu 6b. 1) (Xem kết quả câu 6a).

2) PT mp(α): $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{3} = 1$.

Câu 7b. Hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(1 + \dfrac{1}{x} + x^3\right)^{10}$ $(x \ne 0)$ là 3402.



ĐỊNH LÍ Sin, Côsin và những ứng dụng

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Định lí sin và định lí côsin là những viên ngọc quí trong hình học sơ cấp. Trên tạp chí THTT số 251, tháng 5 năm 1998, đã giới thiệu hai định lí trên cùng mối quan hệ khá đẹp với các định lí hình học khác. Trong bài viết này, chúng tôi xin tiếp tục gửi đến bạn đọc một vài ý tưởng của việc sử dụng các định lí này trong việc giải các bài toán sơ cấp.

Trước hết xin nêu lại nội dung hai định lí.

Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

ĐỊNH LÍ CÔSIN. *Với mọi tam giác ABC, ta có* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

ĐỊNH LÍ SIN. *Trong mọi tam giác ABC, ta có*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Phần tiếp theo chúng tôi xin giới thiệu một số bài toán minh họa. Ý tưởng chính cho các lời giải là sự kết hợp khéo léo việc sử dụng các định lí sin, định lí côsin với các công thức lượng giác cơ bản và phương trình đại số, ...

✪**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC vuông tại B. Kéo dài AC về phía C một đoạn $CD = AB = 1$. Giả sử $\widehat{CBD} = 30^0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC.*

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình). Đặt $AC = x$. Từ định lí côsin cho tam giác ABD, ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD.\cos A$$
$$= 1 + (1+x)^2 - 2(1+x).\frac{1}{x}.$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác BCD, ta có

$$\frac{BD}{\sin\widehat{BCD}} = \frac{CD}{\sin\widehat{CBD}} \Rightarrow BD = \frac{2}{x}.$$

Từ đó ta được

$$1 + (1+x)^2 - 2(1+x).\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^3 - 2)(x+2) = 0.$$ Vậy $AC = x = \sqrt[3]{2}$. □

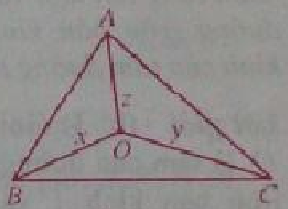
✪**Bài toán 2.** *Cho các số dương x, y, z, a, b, c thỏa mãn điều kiện* $x^2 + xy + y^2 = a^2$, $y^2 + yz + z^2 = b^2$, $z^2 + zx + x^2 = c^2$. *Đặt* $p = \frac{a+b+c}{2}$, *chứng minh rằng*

a) $xy + yz + zx = 4\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{3}}$;

b) $\sqrt{a^2 - 2xy} + \sqrt{c^2 - 2xz} \geq b$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. a) Dựng các đoạn thẳng OA, OB, OC lần lượt có độ dài là z, x, y, đôi một hợp với nhau một góc là 120^0 (h. 1).



Hình 1

Từ định lí côsin cho tam giác BOC có

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB.OC.\cos\widehat{BOC}$$
$$= x^2 + y^2 + xy = a^2.$$

Do đó $BC = a$. Tương tự có $CA = b$, $AB = c$.

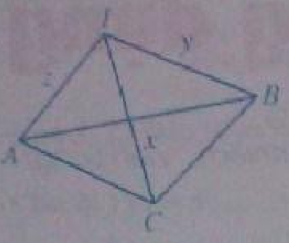
Vì $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{AOB} + S_{COA}$ nên

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \frac{1}{2}(xy + yz + zx)\sin 120^0.$$

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

2 Toán tuổi trẻ-A

b) BĐT cần chứng minh được viết lại dưới dạng
$$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{x^2+z^2-xz}\ge\sqrt{y^2+z^2+yz}.$$



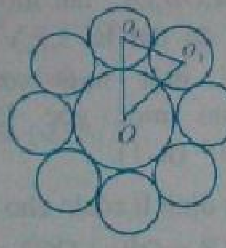
Hình 2

Dựng các đoạn thẳng IA, IC, IB lần lượt có độ dài là z, x, y sao cho $\widehat{AIC}=60^0, \widehat{CIB}=60^0, \widehat{AIB}=120^0$ (h. 2).

Ta có
$$BC^2=IB^2+IC^2-2.IB.IC.\cos\widehat{BIC}=x^2+y^2-xy$$
hay $BC=\sqrt{x^2+y^2-xy}$. Tương tự
$$AC=\sqrt{x^2+z^2-xz}, AB=\sqrt{y^2+z^2+yz}.$$
Vì $AC+CB\ge AB$ nên
$$\sqrt{x^2+y^2-xy}+\sqrt{x^2+z^2-xz}\ge\sqrt{y^2+z^2+yz}.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi điểm C thuộc đoạn AB hay $S_{IAB}=S_{IAC}+S_{ICB}$
$$\Leftrightarrow yz=yx+xz\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.\ \square$$

✪**Bài toán 3.** *Cho tám đường tròn có bán kính bằng nhau, chúng tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn bán kính 1. Hãy xác định bán kính của tám đường tròn.*

Lời giải. (h. 3) Gọi O là tâm của đường tròn bán kính 1 và O_i là tâm của đường tròn nhỏ thứ i (i = 1, 2, ..., 8). Kí hiệu r là bán kính của các đường tròn nhỏ.



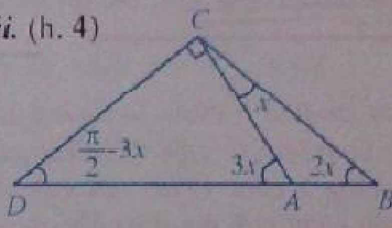
Hình 3

Ta có $\widehat{O_1OO_2}=\widehat{O_2OO_3}=...=\widehat{O_8OO_1}=\frac{360^0}{8}=45^0$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác OO_1O_2, ta được
$$O_1O_2^2=OO_1^2+OO_2^2-2.OO_1.OO_2.\cos\widehat{O_1OO_2}$$
hay $4r^2=\left(2-\sqrt{2}\right)(1+r)^2$
$$\Leftrightarrow 2r=\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)}(1+r)\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}.\ \square$$

✪**Bài toán 4.** *Tam giác ABC có $\widehat{ABC}=2\widehat{ACB}$ và $\widehat{BAC}>\frac{\pi}{2}$. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng AC tại C cắt đường thẳng AB tại D. Chứng minh rằng $\frac{1}{AB}-\frac{1}{BD}=\frac{2}{BC}$.*

Lời giải. (h. 4)



Hình 4

Đặt $\widehat{ACB}=x$. Khi đó $\widehat{ABC}=2x, \widehat{DAC}=3x$,
$$\widehat{BAC}=\pi-3x,\ \widehat{BCD}=\frac{\pi}{2}+x,\ \widehat{BDC}=\frac{\pi}{2}-3x.$$
Áp dụng định lí sin cho các tam giác ABC, BCD
$$\frac{BC}{AB}-\frac{BC}{BD}=\frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}}-\frac{\sin\widehat{BDC}}{\sin\widehat{BCD}}$$
$$=\frac{\sin(\pi-3x)}{\sin x}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{\sin3x}{\sin x}-\frac{\cos3x}{\cos x}$$
$$=\frac{\sin3x\cos x-\cos3x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=2.\ \square$$

✪**Bài toán 5.** *Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\widehat{BAC}=60^0$, $\widehat{B'A'C'}=120^0$. Biết rằng $\frac{B'C'}{BC}=\sqrt{n}$, trong đó n là số nguyên dương lớn hơn 1. Hãy tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.*

Lời giải. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC, ta có
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$$
$$=AB^2+AC^2-AB.AC.$$
Áp dụng định lí côsin cho tam giác $A'B'C'$, ta có
$$B'C'^2=A'B'^2+A'C'^2-2A'B'.A'C'.\cos A'$$
$$=AB^2+AC^2+AB.AC.$$
Đặt $x=\frac{AB}{AC}$, từ điều kiện $\frac{B'C'}{BC}=\sqrt{n}$, ta có

$$\frac{x^2+1+x}{x^2+1-x}=n \Leftrightarrow (n-1)x^2-(n+1)x+n-1=0.$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi

$$(n+1)^2-4(n-1)^2 \geq 0$$

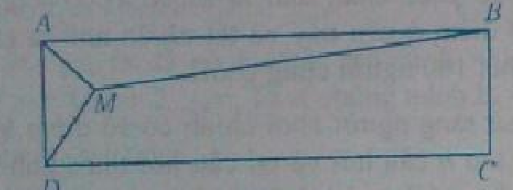
$$\Leftrightarrow -3n^2+10n-3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq n \leq 3.$$

Vì $n>1$ nên $n=2$ hoặc $n=3$.

- Khi $n=3$, ta có $x=1$ hay $\frac{AB}{AC}=1$.
- Khi $n=2$ có $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ hay $\frac{AB}{AC}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. □

✪**Bài toán 6.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ sao cho $AB=3AD$. Trong hình chữ nhật, lấy điểm M sao cho $AM=\sqrt{2}$, $DM=2$, $BM=4\sqrt{2}$. Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$.*

Lời giải. (h. 5)



Hình 5

Đặt $\widehat{BAM}=\alpha$, $AD=x$. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABM, ta có

$BM^2=AB^2+AM^2-2.AB.AM.\cos\alpha$ hay

$$32=9x^2+2-6\sqrt{2}\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{3x^2-10}{2\sqrt{2}x}$$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác AMD, ta có

$$MD^2=AD^2+AM^2-2.AD.AM\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=AD^2+AM^2-2.AD.AM\sin\alpha$$

hay $4=x^2+2-2\sqrt{2}\sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{x^2-2}{2\sqrt{2}x}$.

Do $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\left(\frac{x^2-2}{2\sqrt{2}x}\right)^2+\left(\frac{3x^2-10}{2\sqrt{2}x}\right)^2=1$

$$\Leftrightarrow 5x^4-36x^2+52=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2};\ x=\frac{\sqrt{130}}{5}.$$

Với $x=\sqrt{2}$ thì $\sin\alpha=0$ hay M thuộc đoạn AB (mâu thuẫn).

Do đó $x=\frac{\sqrt{130}}{5}$ và $S_{ABCD}=3x^2=\frac{78}{5}$ (đvdt).

✪**Bài toán 7.** *Cho tam giác ABC cân tại A, $A=100^\circ$. Giả sử P là một điểm trong tam giác sao cho $\widehat{PBC}=20^\circ$, $\widehat{PCB}=30^\circ$. Chứng minh rằng $BP=BA$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $AB=AC=1$. Ta chỉ cần chứng minh $BP=1$. Thật vậy, trong tam giác ABC có

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$$
$$=2-2\cos100^\circ=4\sin^2 50^\circ \text{ hay } BC=2\sin50^\circ.$$

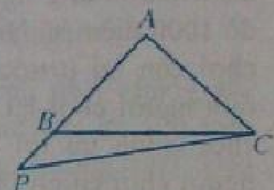
Từ định lí sin cho tam giác BPC, ta có

$\frac{BP}{\sin\widehat{BCP}}=\frac{BC}{\sin\widehat{BPC}}$. Suy ra $BP=1$. □

✪**Bài toán 8.** *Cho tam giác ABC cân tại A và $A=100^\circ$. Giả sử P là một điểm thuộc phần kéo dài của đoạn thẳng AB về phía B sao cho $AP=BC$. Hãy tính số đo $\widehat{APC}$.*

Lời giải. (h. 6) Không mất tính tổng quát, giả sử $AB=AC=1$. Vì

$$BC^2=AB^2+AC^2$$
$$-2AB.AC.\cos A$$
$$=2-2\cos100^\circ$$
$$=4\sin^2 50^\circ.$$



Hình 6

Suy ra $AP=BC=2x$, trong đó $x=\sin50^\circ$.

Từ định lí côsin cho tam giác ACP, ta có

$$CP^2=AC^2+AP^2-2.AC.AP.\cos100^\circ$$
$$=1+2x-2.2x(1-2x^2)=8x^3+4x^2-4x+1.$$

Tiếp tục áp dụng định lí côsin cho tam giác ACP, ta có

$$\cos\widehat{APC}=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2.PA.PC}=\frac{2x^2+2x-1}{\sqrt{8x^3+4x^2-4x+1}}.$$

Vì $3\sin50^\circ-4\sin^3 50^\circ=\sin150^\circ=\frac{1}{2}$, nên x là nghiệm thực dương của phương trình $8x^3-6x+1=0$.

(Xem tiếp trang 29)

Toán học & Đời sống

BÀI TOÁN ĐẤU TRƯỜNG 100

TRẦN HOÀNG SƠN
(HS THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương)

Tối thứ 6 hàng tuần, trên kênh VTV3 Đài truyền hình Việt Nam có một chương trình giải trí rất hấp dẫn, đó là chương trình "Đấu trường 100". Luật chơi của chương trình này như sau:

Đầu tiên, có 1000 điểm được chia đều cho 100 khán giả trong trường quay. Người chơi chính và các khán giả trong trường quay sẽ phải trả lời các câu hỏi mà chương trình đưa ra. Sau câu hỏi đầu tiên sẽ có một số khán giả trả lời sai và người chơi chính sẽ nhận được tổng số điểm mà những người chơi đó đang giữ. Sau đó 1000 điểm sẽ lại chia đều cho những người chơi còn lại (trước khi chia thì số điểm của mỗi người chơi lại là 0) và họ sẽ cùng người chơi chính trả lời câu hỏi số 2, sau câu hỏi người chơi chính lại nhận được thêm số điểm của những người trả lời sai. Cứ như vậy trò chơi sẽ kết thúc khi người chơi chính trả lời sai hay dừng cuộc chơi hoặc anh ta loại hết được 100 khán giả cùng chơi trong trường quay. Số điểm sau cùng người chơi chính sẽ được nhân với 10000 đồng và nó sẽ tương đương với số tiền mà anh ta nhận được. Trong quá trình chơi người chơi chính được ba lần sử dụng quyền giải thoát, nghĩa là người dẫn chương trình sẽ đọc đáp án câu hỏi nhưng người chơi chính sẽ mất một số điểm lần lượt bằng 25%, 50%, 75% số điểm mà anh ta hiện có và anh ta sẽ không được nhận điểm từ những người cùng chơi trả lời sai câu hỏi đó. Ngoài quyền giải thoát, người chơi chính còn có quyền nhân đôi, tức là nếu dùng quyền này tại một câu hỏi nào đó thì anh ta sẽ nhận được một số điểm gấp đôi tổng điểm của những người trả lời sai câu hỏi đó. Quyền nhân đôi chỉ được dùng 1 lần trong cuộc chơi. Khi loại được 80 khán giả thì người chơi chính chắc chắn nhận được 2 triệu đồng tiền thưởng của ban tổ chức.

Bài viết quan tâm đến số tiền lớn nhất mà người chơi chính có thể nhận được, tức là số điểm lớn nhất mà anh ta có thể nhận được là bao nhiêu. Ta có thể thấy ngay rằng để có số điểm lớn nhất thì người chơi chính không được sử dụng quyền giải thoát nào cả và sử dụng quyền nhân đôi vào câu hỏi cuối cùng (khi đó chắc chắn anh ta sẽ có $1000 \times 2 = 2000$ điểm ở câu này và tất nhiên anh ta cần loại hết 100 người cùng chơi).

Giả sử rằng người chơi chính có số điểm lớn nhất sau n câu hỏi và tại câu hỏi thứ i anh ta loại được k_i người cùng chơi ($i = 1, 2, \ldots, n$). Khi đó ta có

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 100.$$

Nhận xét rằng những câu mà không có ai trả lời sai thì không ảnh hưởng đến điểm số người chơi chính nhận được, vì vậy có thể giả sử $k_i \geq 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Theo luật chơi thì

- Sau câu hỏi thứ nhất, người chơi chính nhận được $\dfrac{1000.k_1}{100}$ điểm.
- Sau câu hỏi thứ hai, người chơi chính nhận được $\dfrac{1000.k_2}{100-k_1}$ điểm.
- Sau câu hỏi thứ ba, người chơi chính nhận được $\dfrac{1000.k_3}{100-k_1-k_2}$ điểm.
- Cứ như vậy, sau câu hỏi thứ i $(1 < i < n)$ người chơi chính nhận được $\dfrac{1000.k_i}{100-\sum_{m=1}^{i-1} k_m}$ điểm.

• Tại câu hỏi thứ n người chơi chính nhận được 2000 điểm (vì người chơi sử dụng quyền nhân đôi ở câu hỏi thứ n để được số điểm lớn nhất).

Vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(k_1,k_2,\ldots,k_n)=10k_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1000k_i}{100-\sum_{m=1}^{i-1}k_m}+2000 \quad (*)$$

Nếu $k_n>1$, dễ thấy

$$P(k_1,\ldots,k_{n-2},k_{n-1}+k_n-1,1)-P(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)$$
$$=\frac{1000(k_n-1)}{100-\sum_{m=1}^{n-2}k_m}>0.$$

Vậy để $P(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)$ đạt giá trị lớn nhất thì $k_n=1$.

Tương tự với cách làm trên ta có thể chứng minh $k_i=1$ với $i=2,3,\ldots,n$.

Thật vậy, ta đã có $k_n=1$, giả sử $k_i=1$ với $i=m+1,m+2,\ldots,n$. Ta sẽ chứng minh $k_m=1$.

Nếu $k_m>1$ thì

$$P(k_1,k_2,\ldots,k_{m-2},k_{m-1}+k_m-1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-m+1})-$$
$$P(k_1,k_2,\ldots,k_{m-2},k_{m-1},k_m,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-m})$$
$$=\frac{1000(k_m-1)}{100-\sum_{i=1}^{m-2}k_i}>0.$$

Vậy để $P(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)$ đạt lớn nhất thì $k_m=1$.

Theo giả thiết quy nạp thì để $P(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)$ đạt lớn nhất thì $k_i=1$ với $i=2,3,\ldots,n$. Lúc này $k_1=101-n$. Theo (*) ta có

$$P(101-n,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})=10(101-n)+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1000}{n-i+1}+2000$$

Thay n bởi $n+1$ ta được

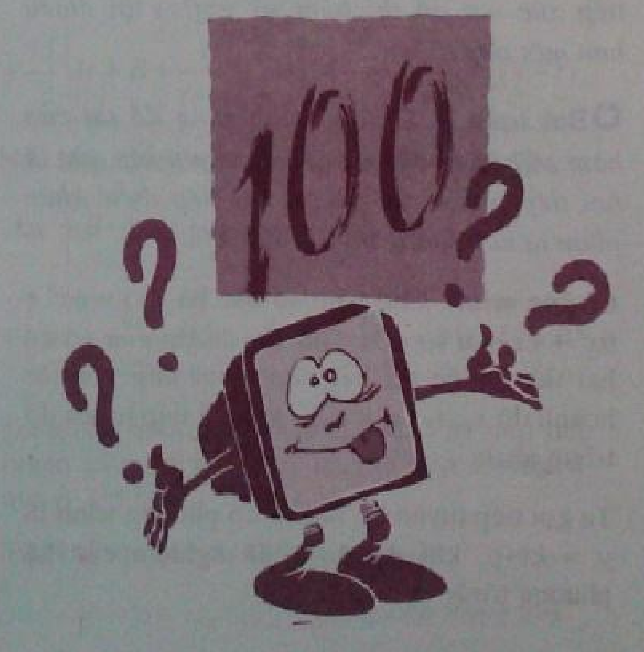
$$P(101-(n+1),\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})-P(101-n,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1})$$
$$=\left(10(101-(n+1))+\sum_{i=2}^{n}\frac{1000}{n-i+2}+2000\right)$$
$$-\left(10(101-n)+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1000}{n-i+1}+2000\right)$$
$$=\left(10(100-n)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1000}{n-i+1}+2000\right)$$
$$-\left(10(101-n)+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1000}{n-i+1}+2000\right)$$
$$=\frac{1000}{n}-10\ge 0 \text{ (do } n\le 100).$$

Như vậy, $P(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)$ đạt giá trị lớn nhất nếu $n=100$ và $k_i=1$, với $i=1,2,\ldots,100$. Nói cách khác, người chơi chính đạt số tiền thưởng lớn nhất nếu ở mỗi câu hỏi anh ta loại 1 người cùng chơi và không sử dụng quyền giải thoát nào, đồng thời anh ta sử dụng quyền nhân đôi ở câu hỏi cuối cùng. Số tiền lớn nhất (bao gồm cả tiền thưởng khi loại 80 người cùng chơi) là

$$10000\left(10+\sum_{i=2}^{99}\frac{1000}{100-i+1}+2000\right)+2000000,$$

nghĩa là xấp xỉ 63.874.000 (đồng).

Thật là một con số ấn tượng phải không các bạn. Hi vọng rằng sẽ có các bạn trẻ yêu toán tham gia và thành công trong chương trình "Đấu trường 100" với chiến thuật hợp lí để giành được số tiền thưởng lớn nhất của chương trình.



DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

Vấn đề tiếp tuyến kép của đồ thị hàm số

HOÀNG VĂN CƯỜNG

(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Khi giải bài toán "Từ một điểm $A(x_0\,;\,y_0)$ trên mặt phẳng toạ độ, ta có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho trước?" Thông thường ta đưa về biện luận số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ trong đó $y = g(x)$ là phương trình của đường thẳng nào đó đi qua A. Điều này hoàn toàn không đúng trong trường hợp tồn tại tiếp tuyến đi qua A mà tiếp xúc với đồ thị tại ít nhất hai điểm phân biệt và giáo viên thường lúng túng khi học sinh thắc mắc về vấn đề này.

Bài viết này sẽ giúp các thầy cô giáo và các bạn học sinh hiểu đầy đủ hơn về vấn đề trên.

Trước hết ta đưa ra định nghĩa sau đây.

*Đường thẳng (d) được gọi là **tiếp tuyến kép** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại nhiều hơn một tiếp điểm.*

✪Bài toán 1. *Chứng minh rằng đồ thị của hàm số bậc ba không có tiếp tuyến kép, tức là hai tiếp tuyến của nó tại hai tiếp điểm khác nhau là hai đường thẳng khác nhau.*

Chứng minh. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$. Giả sử đồ thị của nó có hai tiếp tuyến tại hai tiếp điểm ứng với các hoành độ x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, mà hai tiếp tuyến đó trùng nhau.

Ta gọi tiếp tuyến đó là (d), có phương trình là $y = kx+p$, khi đó x_1, x_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + p \\ 3ax^2 + 2bx + c = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^3 + bx^2 + (c-k)x + d - p = 0 \\ 3ax^2 + 2bx + c - k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $P(x) = ax^3 + bx^2 + (c-k)x + d - p$ suy ra

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c - k. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra x_1, x_2 vừa là nghiệm của $P(x)$, vừa là nghiệm của $P'(x)$.

Theo Định lí Lagrange thì từ $P(x_1) = P(x_2) = 0$ suy ra $\exists x_0 \in (x_1\,;\,x_2)$ sao cho $P'(x_0) = 0$. Như vậy $P'(x)$ là một tam thức bậc hai mà có ba nghiệm phân biệt x_1, x_0, x_2, điều này vô lí. □

✪Bài toán 2. *Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có duy nhất một tiếp tuyến kép, đó là tiếp tuyến song song với trục hoành và tiếp xúc tại hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.*

Chứng minh. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$. Giả sử đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số có hai tiếp tuyến tại hai tiếp điểm ứng với các hoành độ x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, mà hai tiếp tuyến đó trùng nhau.

Gọi tiếp tuyến đó là (d) có phương trình là $y = kx+p$, khi đó x_1, x_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^4 + bx^2 + c = kx + p \\ 4ax^3 + 2bx = k. \end{cases}$$

Tức là ta có các đẳng thức sau:

$$\begin{cases} ax_1^4 + bx_1^2 + c = kx_1 + p & (1) \\ ax_2^4 + bx_2^2 + c = kx_2 + p & (2) \\ 4ax_1^3 + 2bx_1 = k & (3) \\ 4ax_2^3 + 2bx_2 = k & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$ax_1^4 + bx_1^2 - kx_1 = ax_2^4 + bx_2^2 - kx_2$$

$$\Leftrightarrow a(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) = k \quad (5)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$4a(x_1^3 + x_2^3) + 2b(x_1 + x_2) = 2k$$

$$\Leftrightarrow 2a(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) = k \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = 2(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Kết hợp với (3) và (4) suy ra $k = -k \Leftrightarrow k = 0$ khi đó lại từ (3), (4) suy ra x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ nên x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số. □

✪Bài toán 3. *Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (với $d \neq 0$ và đa thức ax^2+bx+c không chia hết cho đa thức $dx+e$) không có tiếp tuyến kép.*

Chứng minh. Có thể viết

$$y = Ax + B + \frac{C}{x - x_0} \text{ với } C \neq 0 \quad (1)$$

Từ đây suy ra đồ thị của nó có tiệm cận xiên (hoặc tiệm cận ngang nếu $A = 0$) là đường thẳng $y = Ax + B$, tiệm cận đứng là đường thẳng $x = x_0$ và tâm đối xứng là $I(x_0; Ax_0 + B)$ (2)

Giả sử hàm số (1) có tiếp tuyến kép là đường thẳng (d): $y = kx + m$ và gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các tiếp điểm tương ứng ($x_1 < x_2$), khi đó x_1, x_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} Ax + B + \dfrac{C}{x - x_0} = kx + m \\ A - \dfrac{C}{(x - x_0)^2} = k. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$A - \frac{C}{(x_1 - x_0)^2} = A - \frac{C}{(x_2 - x_0)^2}$$

$\Leftrightarrow x_1 - x_0 = x_0 - x_2$ (*) (do $x_1 < x_2$),

hay $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = x_0$ (3)

Từ (1) ta lại có $y_1 = Ax_1 + B + \dfrac{C}{x_1 - x_0}$ và $y_2 = Ax_2 + B + \dfrac{C}{x_2 - x_0}$, kết hợp với (*) ta được

$$y_1 + y_2 = Ax_1 + B + Ax_2 + B$$

$$\Leftrightarrow y_1 + y_2 = A(x_1 + x_2) + 2B$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = A\frac{x_1 + x_2}{2} + B = Ax_0 + B \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4), chứng tỏ các tiếp điểm $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ đối xứng nhau qua tâm đối xứng I của đồ thị, từ đó tiếp tuyến (d) đi qua I (**).

Bây giờ ta chứng minh đồ thị hàm số (1) không có tiếp tuyến đi qua tâm đối xứng của nó.

Thật vậy, xét điểm A bất kì trên đồ thị hàm số (1) có hoành độ $x = t$, khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại A là

$$y - \left(At + B + \frac{C}{t - x_0}\right) = \left(A - \frac{C}{(t - x_0)^2}\right)(x - t).$$

Nếu tiếp tuyến này đi qua $I(x_0; Ax_0+B)$ thì

$$Ax_0 + B - \left(At + B + \frac{C}{t - x_0}\right)$$

$$= \left(A - \frac{C}{(t - x_0)^2}\right)(x_0 - t) \Leftrightarrow \frac{2C}{t - x_0} = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $C \neq 0$. Vậy mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) đều không đi qua I (***).

Từ (**) và (***) ta thấy mâu thuẫn.

(Xem tiếp trang 30)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/385. (Lớp 6) Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n. Tìm số nguyên dương n sao cho $S(n) = n^2 - 2009n + 11$.

TRƯƠNG QUANG AN
(SV lớp Toán – Tin 32, ĐH Phạm Văn Đồng)

Bài T2/385. (Lớp 7) Trong hình vuông $ABCD$ lấy hai điểm P, Q sao cho BP song song với DQ và $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$. Hãy tính độ lớn góc PAQ.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Hà Nội - Amsterdam)

Bài T3/385. So sánh 2008 với tổng S gồm 2009 số hạng sau:

$$S = \frac{2008+2007}{2009+2008} + \frac{2008^2+2007^2}{2009^2+2008^2} + \dots + \frac{2008^{2009}+2007^{2009}}{2009^{2009}+2008^{2009}}.$$

PHẠM XUÂN THI
(Trường Sĩ quan lục quân 2, Đồng Nai)

Bài T4/385. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{9}{1-2(ab+bc+ca)} + \frac{2}{abc}.$$

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Bài T5/385. Cho đường tròn (ω) và B, C là hai điểm cố định trên đường tròn sao cho BC không đi qua tâm của (ω). A là điểm bất kì nằm trên cung lớn BC (A không trùng với B và C). M là điểm di động trên đoạn thẳng BC. Các đường thẳng qua M lần lượt song song với AB và AC cắt các đường thẳng AC và AB tại F và E tương ứng. Khi M thay đổi trên đoạn BC, với mỗi điểm A ta đặt x là độ dài ngắn nhất của đoạn EF. Xác định vị trí của A và M để x đạt giá trị lớn nhất.

TRỊNH KHÔI
(GV THPT chuyên Bắc Ninh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/385. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{t^2}{144}$ với x, y, z, t thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 \\ t^2 + z^2 - 2t - 143 = 0 \\ xt + yz - x + t + 2z - 61 \geq 0. \end{cases}$$

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T7/385. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_0 = 9$, $u_1 = 161$ và $u_n = 18u_{n-1} - u_{n-2}$ với $n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng $\dfrac{u_n^2 - 1}{5}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

NGUYỄN HOÀNG NAM
(GV THPT K'Bang, Gia Lai)

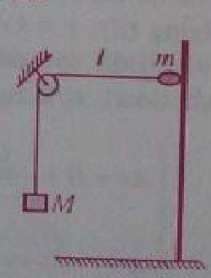
Bài T8/385. Cho tam giác ABC và điểm P bất kì nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của P xuống đoạn BC, CA, AB. Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r}.$$

TRẦN QUANG HÙNG
(SV K49A1T ĐHKHTN, ĐHQGHN)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/385. Một chiếc vòng khối lượng m = 30g trượt không ma sát trên một thanh thẳng đứng. Vòng được buộc vào đầu một sợi dây nhẹ vắt qua một ròng rọc lí tưởng cố định ở khoảng



(Xem tiếp trang 28)

CUỘC THI GIẢI TOÁN

KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

THE M&Y 45th ANNIVERSARY CONTEST

Bài T9/THCS. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T10/THCS. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $BX = CY = AZ$. Chứng minh rằng, tam giác XYZ đều khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/THPT. Với bộ các số thực $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ta gọi bộ các 2- tổng của nó là bộ tất cả các số có dạng $a_i + a_j$ với $i \le i < j \le n$ và kí hiệu là $A^{(2)}$. Với bộ số thực A, biết rằng $A^{(2)} = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6)$. Hãy tìm tổng bình phương các phần tử của A.

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/THPT. Giả sử M là một điểm nằm trên đoạn thẳng AB cho trước. Về một phía của đường thẳng AB dựng ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AM, BM, AB. Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác cong ABM (có cạnh cong là các nửa đường tròn vừa dựng). Chứng minh rằng khi M chuyển động trên đoạn AB thì quỹ tích của I là một cung elip mà dây cung của nó đi qua một trong hai tiêu điểm của elip đó.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

T9/Junior. Solve the equation

$$\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3.$$

T10/Junior. The points X, Y and Z are chosen on the sides BC, CA, AB of a given triangle ABC, respectively such that $BX = CY = AZ$. Prove that the triangle XYZ is equilateral if and only if so is the triangle ABC.

T9/Senior. Given a collection of real numbers $A = (a_1, a_2, ... a_n)$, denote by $A^{(2)}$ the 2-sums set of A, which is the set of all sum $a_i + a_j$ for $1 \le i < j \le n$. Given that $A^{(2)} = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6)$, determine the sum of squares of all elements of the original set A.

T10/Senior. Let M be a point on a given line segment AB. Draw three semicircles whose diameters are AM, BM, AB respectively, such that they are on the same side with respect to AB. Let I be the incenter and r be the inradius of the curvilinear triangle ABM (whose sides are the three semicircles just constructed). Prove that when M moves on the line segment AB, the locus of I is an arc of an ellipse whose spanning chord passes through one of its foci.

Translated by LE MINH HA

★Bài T1/381. *Hãy sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn*

$$\frac{1005}{2002}, \frac{1007}{2006}, \frac{1009}{2010}, \frac{1011}{2014}.$$

Lời giải. Biến đổi

$$\frac{1005}{2002} = \frac{1001}{2002} + \frac{4}{2002} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1001}.$$

Tương tự có $\frac{1007}{2006} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1003}$; $\frac{1009}{2010} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1005}$;
$\frac{1011}{2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1007}$.

Do $\frac{2}{1001} > \frac{2}{1003} > \frac{2}{1005} > \frac{2}{1007}$

nên $\frac{1011}{2014} < \frac{1009}{2010} < \frac{1007}{2006} < \frac{1005}{2002}$. □

Nhận xét. 1) Bài toán tổng quát hơn đòi hỏi so sánh hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+2}{b+4}$ với a, b là các số nguyên dương.

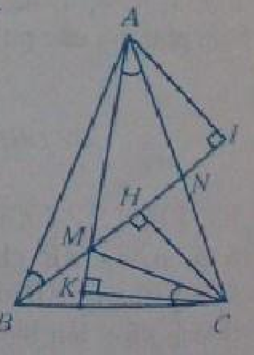
Ta có $\frac{a}{b} - \frac{a+2}{b+4} = \frac{ab+4a-ab-2b}{b(b+4)} = \frac{2(2a-b)}{b(b+4)}$ suy ra $\frac{a}{b} > \frac{a+2}{b+4} \Leftrightarrow 2a > b$. Từ đó cũng dẫn đến kết quả như trên. Các bạn có lời giải tổng quát là:

Vĩnh Phúc: *Dương Thị Phương Thảo, Nguyễn Thị Ngọc Ánh, Lê Nguyễn Hà An*, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Phú Thọ:** *Trần Thị Mỹ Linh*, 6A1, *Tạ Diệu Ly*, 6A3, THCS Lâm Thao, TTr. Hùng Sơn, Lâm Thao; **Nghệ An:** *Phan Hoàng Thanh Tùng*, 6D, *Nguyễn Văn Linh*, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Mai Hoàng Mỹ Hạnh*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

2) Các bạn sau có lời giải gọn:
Phú Thọ: *Nguyễn Thu Phương, Vũ Thị Mai*, 6A1, *Trần Hải Dương, Thạch Hoàng Giang, Nguyễn Hoàng Anh*, 6A3, THCS Lâm Thao, TTr. Hùng Sơn, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Ánh, Nguyễn Thị Lan Oanh, Nguyễn Hữu Cường, Chu Văn Hùng, Nguyễn Thành Công, Nguyễn Tấn Dũng, Đỗ Văn Đạt, Dương Văn Bắc, Phạm Thị Vân Anh, Đại Thị Hoàng Yến, Đại Văn Dự, Tạ Đức Chính, Nguyễn Tú Anh, Phạm Vũ Việt Thắng, Nguyễn Ngọc Mai, Nguyễn Trường Minh Quang, Vũ Đức Công, Nguyễn Minh Tuấn*, 6A1, THCS Yên Lạc, *Vũ Minh Chiến*, 6B, THCS Liên Bảo, TP. Vĩnh Yên, *Nguyễn Thùy Linh (A), Nguyễn Minh Phương, Hoàng Hải Đăng, Nguyễn Thị Trang Liên, Trịnh Thanh Huyền*, 6A2, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Nam Định:** *Trần Thị Thanh Hoa*, 6A, THCS Mỹ Thuận, Mỹ Lộc; **Hải Phòng:** *Bùi Lê Công*, 6D4, THCS Đà Nẵng, Q. Ngô Quyền; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Việt Hằng*, 6A, THCS Quang Thành, Yên Thành, *Đoàn Xuân Quý*, 6A2, THCS Trà Lân, TTr. Con Cuông, *Cao Thị Minh Trang*, 6A, *Nguyễn Lê Diệu Linh, Đặng Thị Phương, Ngô Thị Tuyết Trinh, Đậu Sỹ Tịnh, Hoàng Thị Yến, Ngô Thị Thanh Nhàn*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; *Trần Thị Thu Hằng, Trần Ngọc Đông, Lê Hồ Minh Tuấn, Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Đăng Nguyên, Trần Ngọc Linh, Trịnh Thị Mỹ Ngọc, Đào Mỹ Linh, Đinh Thị Hồng Ngọc, Hoàng Văn Bằng, Hoàng Trọng Huỳnh, Đặng Mỹ Linh*, 6A, *Nguyễn Tiến Lực, Phạm Văn Quyền, Nguyễn Bá Khánh Hòa*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Thân Ngọc Phương Chi, Nguyễn Thị Thanh Hoa*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, *Bùi Thị Trang*, 6A, THCS Hồng Lộc, Lộc Hà; **Đà Nẵng:** *Cao Mỹ Duyên*, 6/1, THCS Nguyễn Khuyến, Q. Hải Châu; **Bình Định:** *Trịnh Mai Nhật Giang*, 6A5, THCS Tam Quan, Hoài Nhơn.

VIỆT HẢI

★Bài T2/381. *Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MBA} = \widehat{MCB}$. Hãy so sánh diện tích hai tam giác ABM và CBM.*



Lời giải. Vì ΔABC cân tại A, từ giả thiết suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{MCA}$, do đó $\widehat{BMC} = \widehat{AMC}$. Kéo dài BM cắt AC tại N, hạ $CH \perp BN, AI \perp BN$, $CK \perp AM$. Ta thấy $\Delta ABI = \Delta CAK$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra $AI = CK$ (1)

Mặt khác, $\widehat{BMC} = \widehat{AMC} \Rightarrow \widehat{CMH} = \widehat{CMK} \Rightarrow CH = CK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $CH = AI$, từ đó ta có $S_{ABM} = S_{CBM}$. □

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn tham gia giải đều cho kết quả đúng. Một số bạn dùng kiến thức về tam giác đồng dạng cũng tìm ra kết quả, tuy nhiên đây là kiến thức của lớp 8.

2) Chưa bạn nào quan tâm đến cách xác định vị trí điểm M. Từ $CH = AI$ ta thấy M phải thuộc trung tuyến kẻ từ đỉnh B, từ đó dễ dàng xác định được vị trí M.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt.
Vĩnh Phúc: *Nguyễn Ngân Giang, Nguyễn Thị Thơm, Bùi Thị Ngọc Mai*, 7A1, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Mai Phương (B)*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên; **Phú Thọ:** *Vũ Tuấn Linh, Nguyễn Thị Mai Anh*, 7A1, *Triệu Thị Thu, Bùi Thị Ngọc Quỳnh, Bùi Thị Hương Dịu*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Diệu Linh, Trần Thị Hà, Hoàng Thị Nguyệt Hà, Đặng Thị Phương, Đậu Hồng Quân, Phan Thanh Tùng*, 7D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Bình Định:** *Nguyễn Trần Tú*, 7A1, THCS Trần Phú, Phù Mỹ, *Đặng Thị Xuân Mai*, 7A1, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/381. *Tính tổng của tất cả các phân số có dạng $\frac{a}{b}$ trong đó a, b là các ước số tự nhiên của 27000 và ƯSCLN (a, b) = 1.*

Lời giải. Ta có $27000 = 2^3.3^3.5^3$. Do đó $\frac{a}{b}$ có dạng $2^i.3^j.5^k$ với $i, j, k \in D$, trong đó

$$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Vậy tổng của tất cả các phân số có dạng $\frac{a}{b}$ với a, b thỏa mãn đầu bài là:

$$\sum_{i,j,k\in D} 2^i.3^j.5^k = (2^{-3}+2^{-2}+...+2^3)\times$$

$$\times(3^{-3}+3^{-2}+...+3^3).(5^{-3}+5^{-2}+...+5^3)$$

$$= 2^{-3}.\frac{2^7-1}{2-1}.3^{-3}.\frac{3^7-1}{3-1}.5^{-3}.\frac{5^7-1}{5-1}$$

$$= \frac{(2^7-1)(3^7-1)(5^7-1)}{2^6.3^3.5^3}. \square$$

Nhận xét. Điều mấu chốt của lời giải bài toán là : Từ phân tích $27000 = 2^3.3^3.5^3$, thì các ước của 27000 có dạng $2^m.3^n.5^p$ với $m, n, p \in \{0 ; 1 ; 2; 3\}$. Do đó phân số $\frac{a}{b}$ sẽ có dạng $2^i.3^j.5^k$ với $i, j, k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/381. *Cho a, b, c thỏa mãn $a > 0, b \ge c$, $a^2 = bc, a+b+c = abc$.*
Chứng minh rằng $a \ge \sqrt{3}, b \ge \sqrt{3}, 0 < c \le \sqrt{3}$.

Lời giải. *Cách 1.* Giả sử $c \le 0$ thì từ $a^2 = bc$ và $b \ge c, a > 0$ suy ra $c \le b < 0$. Ta có $a + b + c = abc = a^3$ nên $a - a^3 = -b - c \ge 2\sqrt{(-b)(-c)} = 2a$. Do đó $a^3 + a \le 0$. Mâu thuẫn với $a > 0$. Vậy $c > 0$. Kết hợp với $b \ge c$, $a^2 = bc$ suy ra $0 < c \le a \le b$. $c^2b \le abc = a + b + c \le 3b \Rightarrow c^2 \le 3$ $\Rightarrow 0 < c \le \sqrt{3}$. Lại có $a^3 = abc = a + b + c \ge a + 2\sqrt{bc} = a + 2a$ nên $a^3 \ge 3a \Rightarrow a \ge \sqrt{3}$. Mà $b \ge a$ nên $b \ge \sqrt{3}$.

Cách 2. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} bc = a^2 \\ b + c = abc - a = a^3 - a. \end{cases}$$

Vậy b, c là nghiệm của phương trình

$$X^2 - (a^3 - a)X + a^2 = 0$$

suy ra $\Delta = (a^3 - a)^2 - 4a^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a^2-1)^2 \ge 4$ $\Rightarrow a \ge \sqrt{3}$ (Do $a > 0$).

Do đó $b + c = a(a-1)(a+1) > 0$.

Suy ra $b \ge c > 0$.

Từ $b \ge c \Rightarrow b^2 \ge bc = a^2 \ge 3$ suy ra $b \ge \sqrt{3}$.

Mặt khác $a + b + c = abc$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \le \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}c} + \frac{1}{\sqrt{3}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le \frac{2}{\sqrt{3}c} \Leftrightarrow c \le \sqrt{3}.$$

Vậy $a \ge \sqrt{3}$, $b \ge \sqrt{3}$, $0 < c \le \sqrt{3}$. $\square$

Nhận xét. 1) Do sơ xuất đề bài in nhầm thành $b > c$, hầu hết các bạn đều nhận xét rằng $b \ge c$.

2) Rất nhiều bạn suy luận chưa đúng về bất đẳng thức. Chẳng hạn như:

Từ $b \ge a \ge c$ mà $a \le \sqrt{3}$ suy ra $c \le \sqrt{3}$ (!)

$a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ (!) ; $c > \sqrt{3}$, $b < \sqrt{3} \Rightarrow bc > a^2$ (!) ;

$c \le \sqrt{3}$ (!) ; $b + c \ge 2\sqrt{3}$ mà $b \ge c$ nên $b \le \sqrt{3}$.

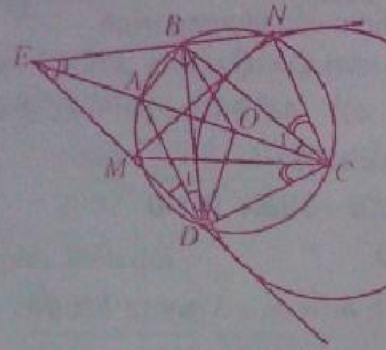
3) Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và chính xác:
Hà Nội: *Phạm Huy Hoàng*, 8A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, *Lý Phụng Hoàng*, 9A1, PTDL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Thị Kiều Oanh*, 8C, THCS Hương Sơn, Bình Xuyên, *Phạm Mỹ Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Chu Hương Giang*, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài; **Phú Thọ:** *Trịnh Hồng Ngọc, Vũ Tuấn Linh*, 7A1, THCS Lâm Thao; **Bình Định:** *Nguyễn Thị Bạch Tuyết*, 9A6, THCS Phước Hưng, Tuy Phước.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/381. *Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$ và $\widehat{BCD} < 90°$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho DA là tia phân giác của góc BDE. Gọi M là điểm tùy ý nằm giữa D và E, trên tia đối của tia BE lấy điểm N sao cho*

$\widehat{NCB} = \widehat{MCD}$. Chứng minh rằng MC là tia phân giác của góc DMN.

Lời giải. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$, O chính là trung điểm của AC. Ta có $\widehat{EDB} = 2\widehat{D_1} = 2\widehat{C_1} = \widehat{EOB}$, do đó tứ giác $EBOD$ nội tiếp, mà $OB = OD$, suy ra EO là phân giác của góc $\widehat{DEB}$.



Lại có DA là phân giác của $\widehat{EDB}$, $DA \perp DC$ nên DC là phân giác ngoài của góc D của tam giác EDB.

Như vậy C chính là tâm đường tròn bàng tiếp góc E của ΔDEB, suy ra $\widehat{BCD} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BED}}{2}$ (1)

Từ M kẻ tiếp tuyến MN' của đường tròn (C) (N' thuộc tia đối của tia BE), ta cũng có

$$\widehat{MCN'} = 90^\circ - \frac{\widehat{BED}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DCM} = \widehat{BCN'}$ nên $\widehat{BCN} = \widehat{BCN'}$, suy ra $N \equiv N'$. Vậy MC là phân giác của góc $\widehat{DMN}$. □

Nhận xét. 1) Tất cả các bạn đều cho lời giải tốt. Các cách giải cũng phong phú, chủ yếu sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp, tính chất về tỉ lệ thức của phân giác trong và phân giác ngoài tại góc B của tam giác EBI (I là giao điểm của AC và BD), sử dụng sự đồng dạng của hai tam giác EAB và EDC, hai tam giác EAD và EBC...., lấy các yếu tố phụ như : giao điểm 3 đường phân giác của tam giác EMN, điểm H trên đường thẳng ED sao cho $\widehat{BCM} = \widehat{DCH}$, giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng vuông góc với EC tại E,... hoặc xem A là trực tâm của một tam giác có một đỉnh là C và hai chân đường cao là B và D. Tuy nhiên có lẽ cách giải trên là đẹp hơn cả.

2) Hai bạn *Nguyễn Hữu Sơn*, 7A3, THCS Gia Sàng, **Thái Nguyên** và *Phạm Quốc Việt*, 9A, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn, **Quảng Ngãi** có nhận xét rằng trong bài toán trên, 3 đường thẳng BD, MN, PQ đồng quy (P, Q lần lượt là giao điểm của AD và CM, AB và CN).

3) Các bạn đã có lời giải tốt ngoài ba bạn nói trên là : **Vĩnh Phúc**: *Phạm Mỹ Linh*, 9A$_1$, THCS Yên Lạc; **Hà Nội**: *Lý Phụng Hoàng*, 9A$_1$, PTDL Nguyễn Siêu, Cầu Giấy, *Đặng Thắng Lợi*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Nghệ An**: *Hà Nhật Cương*, 9A, THCS Anh Sơn, *Võ Duy Văn*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Văn Thắng*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/381. *Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 5$ có vô số nghiệm hữu tỉ.*

Lời giải. Xét các dãy số nguyên (x_n), (y_n) và (z_n) được xác định bằng truy hồi như sau:

$x_0 = 2$,; $y_0 = -1$; $z_0 = 1$; $x_{n+1} = x_n(x_n^3 + 6y_n^3)$;
$y_{n+1} = -y_n(2x_n^3 + 3y_n^3)$; $z_{n+1} = z_n(x_n^3 - 3y_n^3)$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$x_n^3 + 3y_n^3 = 5z_n^3 \quad (1)$$

Với $n = 0$ thì đẳng thức (1) đúng. Giả sử đẳng thức (1) đúng với n. Ta phải chứng minh (1) đúng với $n + 1$, tức là chứng minh

$$x_{n+1}^3 + 3y_{n+1}^3 = 5z_{n+1}^3 \quad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow x_n^3(x_n^3+6y_n^3)^3 - 3y_n^3(2x_n^3+3y_n^3)^3 = 5z_n^3(x_n^3-3y_n^3)^3$$
$$\Leftrightarrow x_n^3(x_n^3+6y_n^3)^3 - 3y_n^3(2x_n^3+3y_n^3)^3 = (x_n^3+3y_n^3)(x_n^3-3y_n^3)^3 \quad (3)$$

Biến đổi (3) ta thấy vế trái bằng vế phải.

Vậy (1) được chứng minh. Từ đó dễ thấy $z_n \neq 0$, $\forall n$ và $\left(\dfrac{x_n}{z_n}; \dfrac{y_n}{z_n}\right)$ (n = 1, 2...) là nghiệm hữu tỉ của phương trình $x^3 + 3y^3 = 5$. Ta sẽ chứng minh $\left(\dfrac{x_n}{z_n}; \dfrac{y_n}{z_n}\right) \neq \left(\dfrac{x_m}{z_m}; \dfrac{y_m}{z_m}\right)$ nếu $n \neq m$.

Thật vậy bằng quy nạp ta thấy x_n chẵn và y_n, z_n lẻ với mọi n. Do đó $x_n^3 + 6y_n^3 \equiv 2 \pmod 4$. Từ đó ta thấy $x_n = 2^{n+1}A_n$ với A_n là số lẻ.

Giả sử $\exists\, m > n$ sao cho $\left(\dfrac{x_n}{z_n}; \dfrac{y_n}{z_n}\right) = \left(\dfrac{x_m}{z_m}; \dfrac{y_m}{z_m}\right)$,

khi đó $\dfrac{x_n}{z_n} = \dfrac{x_m}{z_m} \Leftrightarrow x_n z_m = x_m z_n$. Suy ra

$2^{n+1}.A_n.z_m = 2^{m+1}A_m z_n \Rightarrow A_n z_m = 2^{m-n}A_m z_n$.

Đây là điều vô lí vì vế trái lẻ. Vậy phương trình $x^3 + 3y^3 = 5$ có vô số nghiệm hữu tỉ. □

Nhận xét. Đây là một bài toán khó nên chỉ có ít bạn gửi bài tham gia giải. Rất tiếc không bạn nào giải được đúng bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T7/381. *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{ab+ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc+ba}}+\frac{1}{\sqrt{ca+cb}} \ge \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}.$$

Lời giải. Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $a \le b \le c$.

Cách 1. Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$\frac{1}{\sqrt{ab+ac}}=\frac{\sqrt{a^2+bc}}{\sqrt{(ab+ac)(a^2+bc)}}\ge\frac{2\sqrt{a^2+bc}}{a^2+bc+ab+ac}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{ab+ac}}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\ge\dfrac{(a-b)(a-c)}{\sqrt{a^2+bc}(a+b)(a+c)}$.

Tương tự có các BĐT hoán vị vòng quanh. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh BĐT mạnh hơn sau:

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)\ge 0 \quad (*)$$

trong đó $x=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+bc}(a+b)(a+c)}$;

$$y=\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}(b+a)(b+c)};\ z=\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}(c+a)(c+b)}.$$

Do $a \le b \le c$ nên

$(a+b)(a+c) \le (b+c)(b+a) \le (c+a)(c+b)$.

Ngoài ra, vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác ta có

$(a-b)(a+b-c) \le 0 \Leftrightarrow a^2+bc \le b^2+ca$;

$(b-c)(b+c-a) \le 0 \Leftrightarrow b^2+ca \le c^2+ab$.

Do đó $x \ge y \ge z$. Theo BĐT Schur suy rộng ta được BĐT (*) đúng (bạn đọc có thể xem thêm trên báo THTT số 348, tháng 6.2006). Từ đó nhận được BĐT cần chứng minh.

Cách 2. (Theo bạn *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam, **Hà Nam**). **Ta có**

$(c-a)(c-b)\ge 0 \Leftrightarrow c^2+ab\ge ca+cb$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ca+cb}}\ge\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{bc+ba}}+\frac{1}{\sqrt{ab+ac}}\ge\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab+ac}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}\ge\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}-\frac{1}{\sqrt{bc+ba}} \quad (2)$$

Thật vậy, quy đồng mẫu số rồi nhân với biểu thức liên hợp tương ứng, ta biến đổi được BĐT trên về dạng tương đương sau

$$\frac{(b-a)b}{\sqrt{b^2+ac}.\sqrt{ab+ac}\left(\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{ab+ac}\right)}$$
$$\ge\frac{(b-a)a}{\sqrt{a^2+bc}.\sqrt{bc+ba}\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{bc+ba}\right)} \quad (3)$$

Thật vậy, ta có

$(c-a)(b-a)\ge 0 \Leftrightarrow a^2+bc\le ab+ac$

$\Leftrightarrow \sqrt{ab+ac}\le\sqrt{a^2+bc} \quad (4)$

$(b-a)(b-c)\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{b^2+ac}\le\sqrt{ab+bc} \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra

$a.\sqrt{b^2+ac}.\sqrt{ab+ac}\left(\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{ab+ac}\right)$

$\le b.\sqrt{a^2+bc}.\sqrt{bc+ba}\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{bc+ba}\right).$

Từ đây, vì $b \ge a$ nên ta có BĐT (3) đúng, do đó BĐT (2) đúng.

Từ (1) và (2) ta được BĐT cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. 1) Theo cách 2 ta thấy chỉ cần giả thiết a, b, c là ba số dương mà không cần phải là ba cạnh của tam giác.

2) Sử dụng cách 1 ta có thể chứng minh được BĐT tổng quát hơn sau

$$\frac{1}{\sqrt[n]{ab+ac}}+\frac{1}{\sqrt[n]{bc+ba}}+\frac{1}{\sqrt[n]{ca+cb}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c^2+ab}}.$$

3) Ngoài bạn *Kiên*, các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Đồng Tháp:** *Lê Thanh Nhàn*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu; **Thái Bình:** *Chu Khánh Đức*, 11A1, THPT Nguyễn Du, Kiến Xương; **TT. Huế:** *Lê Thanh Phúc*, 11Toán, THPT Quốc Học Huế; **Lào Cai:** *Phạm Ngọc Điệp*, 11 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Mạnh Quân*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Nguyễn An Tịnh*, 11A1, K36, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ Bài T8/381. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các mặt ABCD, ABB'A', ADD'A'. Biết tổng bình phương diện tích của tất cả các mặt của tứ diện AB'CD' bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = 2\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) + 3(S_1 + S_2 + S_3).$$

Lời giải. *Bổ đề 1.* Trong một tứ diện, giả sử S_1, S_2 là diện tích của hai mặt có chung cạnh a; α là số đo của góc phẳng nhị diện cạnh a; b là cạnh đối diện với a; φ là góc giữa hai cạnh a và b. Khi đó, ta có hệ thức

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \frac{(ab\sin\varphi)^2}{4}.$$

Chứng minh. Gọi h_1, h_2 là độ dài các đường cao kẻ xuống cạnh đáy a tương ứng với các tam giác có diện tích S_1, S_2. Chiếu tứ diện lên một mặt phẳng vuông góc với cạnh a, ta được ảnh của tứ diện là tam giác có độ dài các cạnh lần lượt là h_1, h_2 và $b\sin\varphi$; góc xen giữa các cạnh h_1, h_2 là α. Áp dụng định lí côsin cho tam giác này, ta được

$h_1^2 + h_2^2 - 2h_1h_2\cos\alpha = (b\sin\varphi)^2$, suy ra

$$\left(\frac{1}{2}ah_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ah_2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}ah_1\right)\left(\frac{1}{2}ah_2\right)\cos\alpha = \left(\frac{1}{2}ab\sin\varphi\right)^2,$$

hay $S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = \dfrac{(ab\sin\varphi)^2}{4}$.

Bổ đề 2. Theo kí hiệu trong đề bài, gọi S_a, S_b, S_c, S_d tương ứng là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B', C, D' của tứ diện $AB'CD'$.

Ta có hệ thức
$S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Chứng minh. Gọi α, β, γ là các góc phẳng nhị diện cạnh CD', $D'B'$, $B'C$ của tứ diện $AB'CD'$. Từ bổ đề 1, ta có

$$S_a^2 + S_b^2 - 2S_aS_b\cos\alpha = \frac{(AB'.CD'\sin(AB',CD'))^2}{4} = S_2^2$$

Tương tự:

$$S_a^2 + S_c^2 - 2S_aS_c\cos\beta = S_1^2$$
$$S_a^2 + S_d^2 - 2S_aS_d\cos\gamma = S_3^2$$

Cộng theo vế ba hệ thức trên và lưu ý rằng $S_b\cos\alpha + S_c\cos\beta + S_d\cos\gamma = S_a$, ta được

$$S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Trở lại bài toán. Từ bổ đề 2 và giả thiết, ta có

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2 = 3$$
$$\Rightarrow S_1, S_2, S_3 \in (0;\sqrt{3}).$$

Với các kết quả trên, để tìm giá trị nhỏ nhất của T, ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{2}{x} + 3x \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2},\ \forall x \in (0;\sqrt{3}) \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4) \leq 0$.

Bất đẳng thức đúng với mọi $x \in (0;\sqrt{3})$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$T = 2\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) + 3(S_1 + S_2 + S_3) \geq \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + \frac{27}{2} = 15.$$

Vậy $\min T = 15$ khi $S_1 = S_2 = S_3 = 1$. □

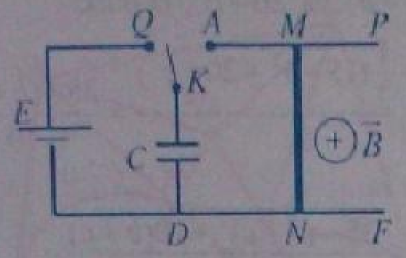
Nhận xét. 1) Đây là một bài toán khó và không có nhiều cách giải. Điều then chốt của bài toán là chứng minh $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 3$ và bất đẳng thức (1).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nam: *Trần Trung Kiên*, 11 Toán, THPT chuyên Hà Nam; **Hải Dương:** *Lê Văn Huỳnh*, 12 T1, THPT chuyên Nguyễn Trãi.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ Bài L1/381. *Trên mặt phẳng nằm ngang có hệ như hình vẽ. Cho biết nguồn điện có suất điện động E, tụ điện có điện dung C. AP và DF là hai thanh kim loại dài, đặt song song với nhau, cách nhau một khoảng d. Thanh dẫn MN có khối lượng m, chiều dài d, tựa trên hai thanh kim loại và có thể chuyển động tịnh tiến dọc theo hai thanh đó. Hệ được đặt trong từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$ hướng thẳng đứng vuông góc với mặt phẳng khung* *đây. Ban đầu khóa K ở chốt Q. Sau khoảng thời gian đủ lớn chuyển khóa K sang chốt A.*



1) Khóa K chuyển sang chốt A, sau một thời gian ngắn thì thanh MN đạt vận tốc ổn định. Giải thích hiện tượng trên và tính vận tốc ổn định của thanh MN khi đó.

2) Tính nhiệt lượng tổng cộng tỏa ra trong mạch sau khi đóng khóa K vào chốt A. Bỏ qua mọi ma sát, xem điện trở của mạch là đủ lớn.

Lời giải.

• Khi khoá K ở chốt Q, tụ điện được tích điện. Sau một thời gian đủ lớn, điện tích trên tụ điện là $q_0 = C.E$.

• Khi khoá K ở chốt A, tụ điện phóng điện qua thanh MN. Lực từ xuất hiện tác dụng lên thanh MN làm thanh dịch chuyển về bên phải. Trong suốt quá trình tụ phóng điện, điện áp của tụ giảm dần, nên cường độ dòng điện qua thanh MN cũng giảm dần, do đó lực từ tác dụng lên thanh này cũng giảm dần. Thanh MN đạt được vận tốc ổn định khi dòng điện qua thanh này bằng không, lúc đó lực từ bằng không. Tại thời điểm này suất điện động cảm ứng trên thanh MN có giá trị bằng hiệu điện thế ổn định U_C của tụ điện.

2) • **Xét tại thời điểm** t (khi khoá K đã ở chốt A), **thanh** MN **chuyển động** với vận tốc v, cường độ dòng điện trong mạch là i, tụ đang phóng điện. Áp dụng định luật hai Newton, ta có $a = \frac{F}{m} = \frac{iBd}{m}$; suy ra $\Delta v = \frac{iBd}{m}\Delta t$ ở đây $i\Delta t = -\Delta q = -(q - q_0)$ (vì tụ đang phóng điện).

Do đó $\Delta v = -\frac{Bd(q - q_0)}{m} = v - v_0 = v$ (1)

với v là vận tốc của thanh MN ở thời điểm t, v_0 là vận tốc ban đầu của thanh MN (ngay khi khoá K chuyển sang chốt A, $v_0 = 0$).

• Thanh MN đạt được vận tốc ổn định (v_c) khi dòng điện qua thanh bằng không. Tại thời điểm này suất điện động cảm ứng trên thanh MN có giá trị bằng điện áp ổn định U_c của tụ điện: $U_c = E_c = Bv_c d$

Điện tích trên tụ điện lúc này là $q = Bv_c d.C$

Từ (1) suy ra: $mv_c = -Bd(Bv_c dC - CE)$, hay

$$v_c = \frac{BdCE}{m + B^2d^2C}.$$

• Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$Q = \frac{1}{2}CE^2 - \left(\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}CB^2v_c^2d^2\right)$$

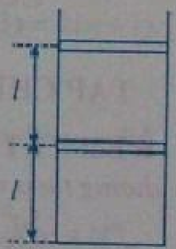
$$= \frac{mCE^2}{2(m + B^2d^2C)}. \square$$

Nhận xét. 1) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Tấn Đông*, 11Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hải Dương:** *Nguyễn Thị Lệ Quyên*, 11A, THPT Kim Thành; **Cà Mau:** *Dương Thái Dương*, 11T2, THPT chuyên Phạm Ngọc Hiển; **Nghệ An:** *Nguyễn Duy Mạnh*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu I, *Vũ Đình Hải*, *Nguyễn Trung Hưng*, *Nguyễn Bá Dũng*, *Hồ Trọng Hùng*, 10A3 K37, THPT chuyên Phan Bội Châu.

NGUYỄN VĂN THUẬN

★Bài L2/381. *Hai pittông có chiều dài không đáng kể, khối lượng bằng nhau và bằng m được đặt trong một xilanh thẳng đứng chứa khí và đang ở trạng thái cân bằng nhiệt động như hình vẽ. Pittông trên được đẩy chậm để nén khí cho đến khi nó đi qua vị trí ban đầu của pittông dưới.*

1) Hỏi khi đó pittông dưới đang ở vị trí nào? Cho tiết diện ngang của xilanh là S, áp suất khí quyển là p_0. Bỏ qua mọi ma sát, coi nhiệt độ khí không thay đổi.



2) Tính công đã thực hiện.

Lời giải.

1) Ở trạng thái ban đầu áp suất và thể tích khí của các ngăn như sau:

• Ngăn trên: $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$, $V_1 = Sl$.

• Ngăn dưới: $p_2 = p_0 + \frac{2mg}{S}$, $V_2 = Sl$.

Lúc sau, giả sử pittông dưới đi xuống một đoạn x $(0 < x < l)$:

Ngăn trên: $p_1'.V_1' = S.x$

Ngăn dưới: $p_2'.V_2' = S.(l-x)$.

Áp dụng định luật Bôilơ - Mariốt cho khí ở mỗi ngăn ta đi đến phương trình

$$x^2 + 2\left(\frac{p_0.S}{mg}+1\right)l.x - \left(\frac{p_0S}{mg}+1\right)l^2 = 0.$$

Giải PT này, loại nghiệm âm ta được

$$x = l\sqrt{\left(\frac{p_0S}{mg}+1\right)^2 + \left(\frac{p_0S}{mg}+1\right)} - l.\left(\frac{p_0S}{mg}+1\right).$$

2) Khí ở hai ngăn đã nhận được một công là

$$A = p_1V_1\ln\frac{V_1}{V_1'} + p_2V_2\ln\frac{V_2}{V_2'}.$$

Công mà trọng lực thực hiện lên hai pittông là

$$A_1 = mg(2l - x).$$

Công mà khí quyển đã thực hiện là

$$A_2 = p_0 l.S.$$

Do vậy, công cần phải đẩy pittông bên trên là

$$A_0 = A - A_1 - A_2. \square$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn chỉ giải đúng câu 1). Trong câu 2) đa số bạn không tính đến công của khí quyển thực hiện trong quá trình, đặc biệt có một số bạn còn tính công theo công thức $A = F.s$ (trong bài này cần lưu ý rằng lực mà ta tác dụng lên pittông trên có giá trị thay đổi trong suốt quá trình).

NGUYỄN XUÂN QUANG

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 45 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

★**Bài T1/THCS.** *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*

$$5a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 2abc = 60.$$

Chứng minh rằng $a + b + c \le 6$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Từ giả thiết, suy ra $4b^2 < 60$ và $3c^2 < 60$, tức là $b^2 < 15$ và $c^2 < 20$. Ta coi điều kiện bài ra $5a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 2abc = 60$ như phương trình bậc hai ẩn a, khi đó

$$a = \frac{-bc + \sqrt{(15-b^2)(20-c^2)}}{5}.$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (*Cauchy*) cho hai số dương $15-b^2$ và $20-c^2$, ta được

$$a \le \frac{-bc + \frac{1}{2}(15 - b^2 + 20 - c^2)}{5} = \frac{35-(b+c)^2}{10}.$$

Từ đó suy ra

$$a+b+c \le \frac{35-(b+c)^2+10(b+c)}{10}$$

$$= \frac{60-(b+c-5)^2}{10} \le 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b+c-5=0 \\ 15-b^2 = 20-c^2 \\ a+b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3. \square \end{cases}$$

Nhận xét. 1) Do đề bài (in nhầm) chỉ yêu cầu chứng minh bất đẳng thức $a+b+c \le 60$ nên nhiều em cho cách chứng minh trực tiếp bằng so sánh và chỉ ra dấu đẳng thức không thể xảy ra.

2) Với đề bài chứng minh bất đẳng thức $a+b+c \le 6$, nhiều bạn còn nêu được ý tưởng của bài toán xuất phát:

Bài toán 1. (*Bùi Thế Bun*, 9A2, THCS Phú Thái, Kim Thành, **Hải Dương**).

Cho a,b,c,x,y,z *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $xa^2 + yb^2 + zc^2 + 2abc = xyz$.

Chứng minh rằng $a+b+c \le \frac{x+y+z}{2}$.

Bài toán 2. (*Nguyễn Thế Bảo, Lê Văn Tú*, 9A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**).

Cho a,b,c,x,y,z *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $xa^2 + yb^2 + zc^2 + abc = 4xyz$.

Chứng minh rằng $a+b+c \le x+y+z$.

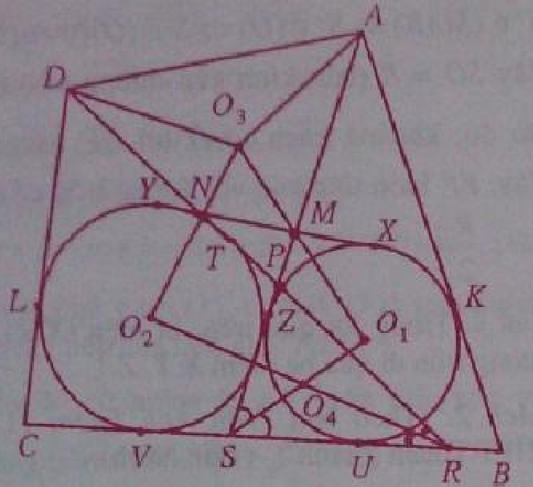
Đa số các bạn đều giải tương tự như cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T2/THCS.** *Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp được một đường tròn và điểm P nằm trong tứ giác sao cho AP, DP tương ứng cắt đoạn BC tại S, R. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABS, DCR, PAD, PSR cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. • Để giải bài toán ta cần các kết quả sau (bạn đọc tự chứng minh).

Bổ đề 1. Nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O thì $\widehat{AOB}+\widehat{COD}=180^\circ$.



Bổ đề 2. Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó $\widehat{BIC}=90^\circ+\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

• *Trở lại bài toán.* Kí hiệu O_1, O_2, O_3 và O_4 theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABS, DCR, PAD và PSR. Gọi X và Y lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến chung khác BC của hai đường tròn (O_1) và (O_2); M và N lần lượt là các giao điểm của XY với PA và PD; Z, K, U là tiếp điểm của đường tròn (O_1) với các cạnh AS, AB, SB; T, L, V là các tiếp điểm của đường tròn (O_2) với các cạnh DR, DC, RC tương ứng. Ta có

$$BK = BU,\ CV = CL \qquad (1)$$

$$XY = UV,\ AZ = AK,\ DT = DL \qquad (2)$$

$$MX = MZ,\ NY = NT \qquad (3)$$

Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $BC + AD = AB + CD \Rightarrow BU + VU + VC + AD = AK + BK + LC + DL$. Từ (1) ta thấy $UV + AD = AK + DL$. Từ đó theo (2) ta có $XY + AD = AZ + DT$, suy ra

$XM + MN + NY + AD = AM + MZ + DN + NT$.

Theo (3) ta được $MN + AD = AM + DN$, suy ra tứ giác $AMND$ ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tứ giác $AMND$ chính là (O_3). Vậy từ *bổ đề 1* ta có $\widehat{MO_3N}=180^\circ-\widehat{AO_3D}$.

Từ *bổ đề 2* $\widehat{O_1O_3O_2}=180^\circ-\left(90^\circ+\dfrac{\widehat{APD}}{2}\right)$.

Từ đó $\widehat{O_1O_4O_2}=180^\circ-\left(90^\circ+\dfrac{\widehat{SPR}}{2}\right)$

$=180^\circ-\widehat{SO_4R}$, hay $\widehat{O_1O_3O_2}=180^\circ-\widehat{O_1O_4O_2}$

Dẫn đến $\widehat{O_1O_3O_2}+\widehat{O_1O_4O_2}=180^\circ$; nghĩa là tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ nội tiếp. □

Nhận xét. Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải đúng:

Hải Dương: *Bùi Thế Bun*, 9A2, THCS Phú Thái, Kim Thành; **Nghệ An:** *Hà Nhật Cường*, 9A, THCS Anh Sơn; **Bình Định:** *Trần Minh Bảo*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Quy Nhơn.

HỒ QUANG VINH

★Bài T1/THPT. *Cho dãy số* (u_n) *xác định như sau:*

$$\begin{cases} u_1=-1;\ u_2=-2 \\ n.u_{n+2}-(3n+1)u_{n+1}+2(n+1)u_n=3 \quad (n\in\mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Đặt $S=\sum_{n=1}^{2009}u_n-2(2^{2009}-1)$.

Chứng minh rằng S chia hết cho 2009.

Lời giải. Ta có

$$nu_{n+2}-(3n+1)u_{n+1}+2(n+1)u_n=3$$
$$\Rightarrow n.(u_{n+2}-2u_{n+1}-(n+1)+3)$$
$$=(n+1)(u_{n+1}-2u_n-n+3).$$

Do đó $u_{n+2}-2u_{n+1}-(n+1)+3$

$$=\frac{n+1}{n}.(u_{n+1}-2u_n-n+3)$$
$$=\frac{n+1}{n}.\frac{n}{n-1}.(u_n-2u_{n-1}-(n-1)+3)=\ldots=$$
$$=\frac{n+1}{n}.\frac{n}{n-1}\ldots\frac{2}{1}.(u_2-2u_1-1+3)=2(n+1).$$

Suy ra $u_{n+2}-2u_{n+1}=3n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow u_{n+2}+3(n+2)=2(u_{n+1}+3(n+1))=2^2(u_n+3n)$$
$$=\ldots=2^n.(u_2+6)=2^{n+2}.$$

Bởi vậy $u_n=2^n-3n$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Từ đó

$$\sum_{n=1}^{2009}u_n-2(2^{2009}-1)=\sum_{n=1}^{2009}(2^n-3n)-2(2^{2009}-1)$$
$$=\sum_{n=1}^{2009}2^n-3\sum_{n=1}^{2009}n-2(2^{2009}-1)$$
$$=(2^{2010}-2)-3.2009.1005-2(2^{2009}-1)$$
$$=-3.2009.1005 \ \vdots\ 2009$$ (đpcm). □

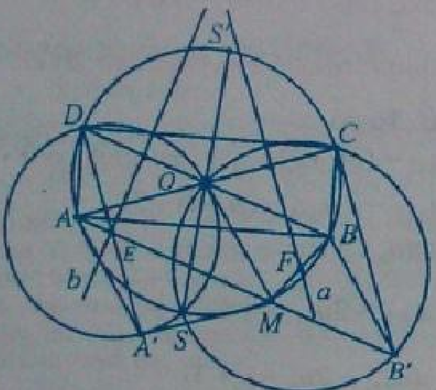
Nhận xét. Do sơ suất, đầu bài đã bị in nhầm hai dấu +, −. Tòa soạn thành thật xin lỗi bạn đọc. Có duy nhất một bạn học sinh đã phát hiện ra sai sót đó và có lời giải đúng: *Nguyễn Tăng Thành*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T2/THPT.** *Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng a, b theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn OC, OD. Điểm M nằm trên đường tròn (O). Đường thẳng MA cắt b tại E, đường thẳng MB cắt a tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi điểm M di động trên đường tròn (O).*

Lời giải. *Cách 1.* (Theo bạn *Vũ Minh Thắng*, Khối THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**)

Gọi A', B' theo thứ tự là điểm đối xứng của O qua MA, MB (h.1).



Hình 1

Dễ thấy, E, F theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ODA', OCB' (1)

Mặt khác, vì $ABCD$ là hình chữ nhật và $OAA'M$, $OBB'M$ là những hình thoi nên $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{BB'}$.

Suy ra $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{CB'}$. Do đó $DA' // CB'$ (2)

Đặt $S=(ODA')\cap(OCB')$ $(S\neq O)$ (3)

Từ (1) suy ra EF là trung trực của OS (4)

Gọi S' là điểm đối xứng với S qua O (5)

Ta có

$(S'A, S'B)\equiv(SC, SD)\ (\text{mod}\,\pi)$ (theo (5))

$\equiv(SC, SO)+(SO, SD)\ (\text{mod}\,\pi)$

$\equiv(B'C, B'O)+(A'O, A'D)\ (\text{mod}\,\pi)$ (theo (3))

$\equiv(A'O, B'O)\ (\text{mod}\,\pi)$ (theo (2))

$\equiv(MA, MB)\ (\text{mod}\,\pi)$ (do $A'O\perp MA$; $B'O\perp MB$).

Suy ra

$S'\in(MAB)\Rightarrow S'\in(O)\Rightarrow S\in(O)$ (theo (5)).

Vậy $SO=R$ (bán kính của đường tròn (O)).

Do đó, khoảng cách từ O tới EF bằng $\dfrac{R}{2}$.

Vậy, EF luôn tiếp xúc với đường tròn cố định $\left(O;\dfrac{R}{2}\right)$.

Chú ý. Trong lời giải trên, kí hiệu (XYZ) chỉ đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z.

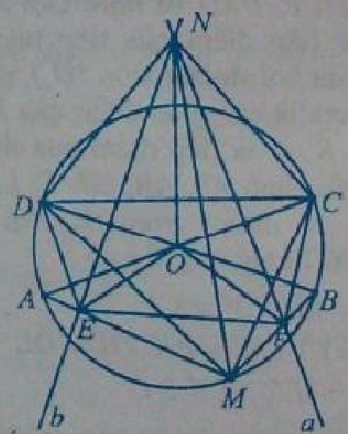
Cách 2. (Theo bạn *Trần Anh Tuấn*, 11A1, THPT Thuận Thành 1 – **Bắc Ninh**).

Gọi N là giao điểm của a và b (h.2).

Dễ thấy N là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OCD.

Từ đó, với chú ý rằng tam giác OCD cân tại O, ta có

$\widehat{CNF}=\widehat{FNO}=\widehat{ONE}=\widehat{END}=\widehat{OCD}=\widehat{CDO}=\alpha$ (1)



Hình 2

Từ (1) suy ra

$$\begin{cases}\widehat{EMD}=\widehat{OCD}=\alpha=\widehat{END}\\ \widehat{FMC}=\widehat{ODC}=\alpha=\widehat{FNC}\end{cases}$$

Suy ra các tứ giác $MEDN$, $MFCN$ nội tiếp

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{DMN}=\widehat{DEN}=\beta\\ \widehat{CMN}=\widehat{CFN}=\gamma\end{cases}$$

$$\Rightarrow\beta+\gamma=\widehat{DMC}=\frac{1}{2}\widehat{DOC}=\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{ENF})$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha \qquad (2)$$

Từ (2), với chú ý rằng các tứ giác $MEDN$, $MFCN$ nội tiếp, ta có

$\widehat{EOF} = 360° - \widehat{NOE} - \widehat{NOF}$

$= (180° - \widehat{NOE}) + (180° - \widehat{NOF})$

$= \widehat{ONE} + \widehat{OEN} + \widehat{ONF} + \widehat{OFN}$

$= \widehat{ONE} + \widehat{DEN} + \widehat{ONF} + \widehat{CFN}$

$= \alpha + \beta + \alpha + \gamma = 2\alpha + \beta + \gamma = 90° + \alpha$ (3)

Từ (3), chú ý tới (1), ta thấy O là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác NEF.

Điều đó có nghĩa là EF luôn tiếp xúc với đường tròn cố định $\left(O;\dfrac{R}{2}\right)$. □

Nhận xét. Ngoài bạn *Thắng*, bạn *Tuấn*, xin nêu tên các bạn có lời giải tương đối tốt: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Thuận*, 10A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thừa Thiên – Huế:** *Đào Ca*, 11 Toán, khối THPT chuyên ĐHKH Huế; **Thanh Hoá:** *Đỗ Đức Hiếu*, 11A6, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân.

NGUYỄN MINH HÀ

Đọc lại cho đúng. *Trên tạp chí THTT số 384, tháng 6 năm 2009, trang 16 trong bài T1/384 đã in nhầm đẳng thức:* VẾ TRƯỜNG SA = 22 × 12 × 2009.

Xin đọc lại là:

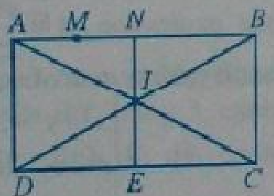
VẾ + TRƯỜNG + SA = 22 × 12 × 2009.

Thành thật xin lỗi tác giả và các bạn đọc.

THTT

BÌNH LUẬN... (*Tiếp trang 7*)

CÂU VI.a.1. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm I(6; 2) là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm M(1; 5) thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng* $\Delta: x + y - 5 = 0$. ***Viết phương trình đường thẳng AB.***



Hướng dẫn

$E \in \Delta \Rightarrow E(a; 5-a)$.

Gọi N là trung điểm của AB thì I là trung điểm của EN, nên $N(12-a; a-1)$. Suy ra

$\overrightarrow{MN} = (11-a; a-6)$, $\overrightarrow{IE} = (a-6; 3-a)$.

Mặt khác $MN \perp IE \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{IE} = 0$

$\Leftrightarrow (11-a)(a-6) + (a-6)(3-a) = 0$

$\Leftrightarrow a = 6$ hoặc $a = 7$. Tìm được phương trình AB là $y - 5 = 0$ hoặc $x - 4y + 19 = 0$. □

Lưu ý. Ngoài cách trên, ta cũng có thể lấy điểm M' đối xứng với M qua I thì $M' \in CD$, dùng điều kiện $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EM'} = 0$, ta tìm được toạ độ E. Đường thẳng AB là đường thẳng qua M và nhận $\overrightarrow{IE}$ làm vectơ pháp tuyến.

★**Bài luyện tập.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Lập phương trình các cạnh còn lại của hình chữ nhật biết điểm A có hoành độ âm.

CÂU VI.b.1. *Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn* $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ *và đường thẳng* $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$, *với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.*

Hướng dẫn. Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ bán kính $R = \sqrt{2} \Rightarrow S_{IAB} = \dfrac{R^2}{2}\sin\widehat{AIB} \le \dfrac{R^2}{2} = 1$.

Suy ra $\max S_{IAB} = 1 \Leftrightarrow IA \perp IB$.

Khi đó $d(I, \Delta) = \dfrac{IA}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$

$\Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = \dfrac{8}{15}$. □

Lưu ý. Nếu tìm tọa độ giao điểm A và B, rồi tính S_{IAB} theo m sau đó tìm m để S_{IAB} lớn nhất thì lời giải phải biến đổi cồng kềnh và phức tạp hơn nhiều.

★**Bài luyện tập.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(2;2)$ và elip $(E): x^2 + 4y^2 = 4$. Viết PT đường thẳng d qua M và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích lớn nhất.

PROBLEMS... (Tiếp trang 16)

cách l = 0,8 m đến thanh. Đầu còn lại của dây buộc vào một trọng vật khối lượng M = 50 g. Ban đầu vòng được giữ ở cùng độ cao với ròng rọc (như hình vẽ). Thả nhẹ vòng, hãy xác định

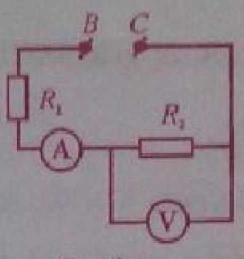
1) Quãng đường mà vòng đã trượt cho đến khi nó dừng lại lần thứ nhất.

2) Vận tốc của vòng khi nó đi qua vị trí cân bằng.

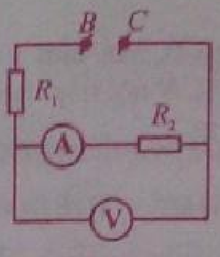
ĐỖ TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/385. Cho hai điện trở R_1, R_2, vôn kế V, ampe kế A và một hiệu điện thế U_{BC} không thay đổi. Lần lượt mắc các linh kiện điện trên theo ba sơ đồ như hình vẽ bên.

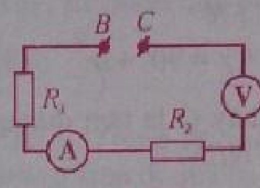
Các số chỉ trên ampe kế A và vôn kế V là:



Sơ đồ 1



Sơ đồ 2



Sơ đồ 3

• Ở sơ đồ 1: ampe kế A chỉ 12,6A, vôn kế V chỉ 42V.
• Ở sơ đồ 2: ampe kế A chỉ 12A, vôn kế V chỉ 48V.
• Ở sơ đồ 3: ampe kế A chỉ 1A, vôn kế V chỉ 96,5V.

Hãy tính điện trở r của ampe kế A.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/385. (For 6th grade) Let $S(n)$ be denote the sum of the digits of n. Find a positive integer n such that $S(n)=n^2-2009n+11$.

T2/385. (For 7th grade) Inside a square $ABCD$ choose two points P, Q such that BP and DQ are parallel and $BP^2+DQ^2=PQ^2$. Find the measure of the angle PAQ.

T3/385. Compare 2008 with the sum S of 2009 terms:

$$S=\frac{2008+2007}{2009+2008}+\frac{2008^2+2007^2}{2009^2+2008^2}+\dots+\frac{2008^{2009}+2007^{2009}}{2009^{2009}+2008^{2009}}.$$

T4/385. Let a, b, c be three positive numbers such that $a+b+c=1$. Find the least value of the expression:

$$P=\frac{9}{1-2(ab+bc+ca)}+\frac{2}{abc}.$$

T5/385. Let B, C be two fixed points on the circle (ω) such that BC does not pass through the center of (ω). On the major arc BC, choose a point A, differs from B and C. Another point M moves on the line segment BC. The lines passing through M and parallel to AB, AC intersect AC and AB at F and E, respectively. When M moves on the line segment BC and for each point A, let x be the least possible length of EF. Find the positions of A and M such that x is greatest possible.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/385. Find the greatest and the least value of the expression $A=\frac{y^2}{25}+\frac{t^2}{144}$ where x, y, z, t satisfy the system of equations:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0 \\ t^2+z^2-2t-143=0 \\ xt+yz-x+t+2z-61\geq 0. \end{cases}$$

T7/385. Consider the sequence (u_n) defined as follow : $u_0=9$, $u_1=161$ and $u_n=18u_{n-1}-u_{n-2}$ for $n=2,3,\dots$

Prove that for any n, $\frac{u_n^2-1}{5}$ is always a perfect square.

Bài T8/385. Let P be an arbitrary point inside a given triangle ABC. Let A', B', C' be the orthogonal projection of P on BC, CA, AB respectively. Let I be the incenter and r be the inradius of the triangle ABC. Find the least value of the expression:

$$PA'+PB'+PC'+\frac{PI^2}{2r}.$$

Translated by LE MINH HA

TIN TỨC

TRẠI HÈ TOÁN HỌC 2009

Được sự đồng ý và bảo trợ của Hội toán học Việt Nam, trường Đại học Khoa học Huế, Trại hè Toán học 2009 do hai diễn đàn toán học diendantoanhoc.net và mathvn.org sẽ diễn ra tại Huế trong hai ngày 8, 9/8/2009.

Chương trình của trại hè sẽ gồm nhiều nội dung hấp dẫn, bổ ích: giao lưu với các nhà toán học, các nhà giáo ưu tú, các lưu học sinh Việt Nam thành đạt, thi giải toán nhanh, giao hữu thể thao, tham quan cố đô Huế, thăm và tặng quà cho trẻ em vạn đò, chương trình ẩm thực và giao lưu văn nghệ trên sông Hương ...

Thông tin chi tiết xin xem tại www.diendantoanhoc.net và www.mathvn.org

(Theo tin từ BTC Trại hè Toán học 2009)

ĐỊNH LÍ SIN... *(Tiếp trang 11)*

Do đó

$$\cos\widehat{APC}=\sqrt{\frac{(2x^2+2x-1)^2}{8x^3+4x^2-4x+1}}=\sqrt{\frac{4x^4+8x^3-4x+1}{8x^3+4x^2-4x+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}x+1\right)(8x^3-6x+1)+3x^2+\frac{3}{2}x}{(8x^3-6x+1)+(4x^2+2x)}}$$

$$=\sqrt{\frac{3x^2+\frac{3}{2}x}{4x^2+2x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Vậy $\widehat{APC}=30^\circ$.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có đoạn thẳng đoạn nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB=7$ và $C=60^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh BC.

2. Ba cạnh của một tam giác có độ dài lần lượt là x^2+x+1, $2x+1$ và x^2-1. Hãy xác định x để tam giác tồn tại, và trong trường hợp đó, chứng minh rằng có một góc của tam giác bằng 120°.

3. Cho chín đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng $\frac{1}{2}$, chúng cùng tiếp xúc với đường tròn bán kính 1 và tiếp xúc với nhau từng đôi một, nhưng đường tròn đầu tiên và đường tròn cuối cùng không tiếp xúc nhau. Hãy xác định khoảng cách giữa hai tâm của hai đường tròn không tiếp xúc này.

4. Cho đường tròn tâm O và A, B là các điểm nằm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOB}=45^\circ$. Một hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong hình quạt AOB sao cho hai đỉnh M,N theo thứ tự nằm trên OA,OB, hai đỉnh P,Q còn lại nằm trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Biết rằng diện tích của hình vuông $MNPQ$ là $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, trong đó a,b,c,d đều là các số nguyên. Hãy xác định a,b,c,d.

5. [IMO 1975] Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác BCP, CAQ, ABR sao cho $\widehat{PBC}=\widehat{CAQ}=45^\circ$, $\widehat{BCP}=\widehat{QCA}=30^\circ$, $\widehat{ABR}=\widehat{BAR}=15^\circ$.
Chứng minh rằng $QR\perp RP$, và $QR=RP$.

6. Cho $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$, $AD=CD$ và $AC=BC$. Gọi E là giao điểm của AC và BD. Kí hiệu x, y, z lần lượt là số đo của các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{AED}$. Chứng minh rằng

$$y\le 30^\circ, \tan y=\frac{2\tan x}{3+\tan^2 x}, \tan z=\frac{2\sin x+\sin 3x}{2\cos x+\cos 3x}.$$

7. Tứ giác lồi nội tiếp $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi P là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $\frac{AP}{CP}=\frac{AI^2}{CI^2}$.

VẤN ĐỀ TIẾP TUYẾN KÉP... (Tiếp trang 15)

Vậy đồ thị hàm số (1) không tồn tại tiếp tuyến kép.

Chú ý. Cách chứng minh trên cũng cho ta kết quả hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (với $ad-bc\neq 0$) không tồn tại tiếp tuyến kép.

Thí dụ. *Cho hàm số $y=x^3+x^2-3x+1$. Tìm trên trục tung những điểm mà từ đó ta kẻ được:*

1) Đúng một tiếp tuyến đến đồ thị của hàm số.

2) Đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị của hàm số.

3) Đúng ba tiếp tuyến đến đồ thị của hàm số.

4) Ít nhất một tiếp tuyến đến cung của đồ thị hàm số ứng với $x\in[1\,;\,3]$.

Lời giải. Xét điểm $M(0\,;\,b)$ thuộc trục tung, khi đó đường thẳng (d) đi qua M có phương trình dạng $y=kx+b$.

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x+1$ khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+x^2-3x+1=kx+b & (1)\\ 3x^2+2x-3=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm, và số nghiệm của hệ chính là số tiếp tuyến kẻ từ điểm $M(0\,;\,b)$.

Từ hệ thay (2) vào (1) ta được phương trình

$$x^3+x^2-3x+1=(3x^2+2x-3)x+b$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-3x+1=3x^3+2x^2-3x+b$$

$$\Leftrightarrow -2x^3-x^2+1=b.$$

Ta phải biện luận theo b số nghiệm của phương trình $-2x^3-x^2+1=b$ (*)

Từ đồ thị các hàm số $y=-2x^3-x^2+1$ và $y=b$ ta có kết luận như sau:

1) Nếu $b<\dfrac{26}{27}$ hoặc $b>1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất, do đó qua điểm $M(0\,;\,b)$ có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x+1$.

2) Nếu $b=\dfrac{26}{27}$ hoặc $b=1$ thì phương trình (*) có hai nghiệm, do đó qua điểm $M(0\,;\,b)$ có thể kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x+1$.

3) Nếu $\dfrac{26}{27}<b<1$ thì phương trình (*) có ba nghiệm, do đó qua điểm $M(0\,;\,b)$ có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-3x+1$.

4) Bài toán quy về tìm b để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm trong đoạn $[1;3]$.

Ta thấy trong đoạn $[1\,;\,3]$, hàm số $y=-2x^3-x^2+1$ nghịch biến và đạt giá trị lớn nhất là $y(1)=-2$, đạt giá trị bé nhất là $y(3)=-62$. Từ đây ta có phương trình $-2x^3-x^2+1=b$ có nghiệm trong đoạn $[1\,;\,3]$ khi và chỉ khi $-62\le b\le -2$.

Do đó với $-62\le b\le -2$ thì qua điểm $M(0\,;\,b)$ có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến đến cung của đồ thị hàm số $y=-2x^3-x^2+1$ ứng với $x\in[1\,;\,3]$.

TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp bìa 3)*

Nếu bánh xe $\mathscr{C}_1$ quay mà kéo theo bánh xe $\mathscr{C}_2$ quay khi chúng có răng cưa ăn khớp với nhau hoặc khi chúng đồng tâm gắn chặt với nhau thì ta gọi là bánh $\mathscr{C}_1$ *truyền chuyển động* sang bánh xe $\mathscr{C}_2$ và kí hiệu là $\mathscr{C}_1 \mathbf{T} \mathscr{C}_2$. Giả sử khi truyền chuyển động bánh xe $\mathscr{C}_1$ quay được t_1 vòng, còn bánh xe $\mathscr{C}_2$ quay được t_2 vòng (không kể hướng quay) thì ta gọi $t_{1,2} = \dfrac{t_1}{t_2}$ là tỉ số vòng quay từ $\mathscr{C}_1$ sang $\mathscr{C}_2$. Nếu $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ đồng tâm gắn chặt với nhau thì $t_1 = t_2$ nên $t_{1,2} = 1$. Nếu $\mathscr{C}_1$ (có S_1 răng cưa) quay ăn khớp với $\mathscr{C}_2$ (có S_2 răng cưa) thì $t_{1,2} = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$. Ta thấy quan hệ truyền chuyển động có tính chất đối xứng (nếu $\mathscr{C}_1 \mathbf{T} \mathscr{C}_2$ thì $\mathscr{C}_2 \mathbf{T} \mathscr{C}_1$ và $t_{1,2} = \dfrac{t_1}{t_2}$, $t_{2,1} = \dfrac{t_2}{t_1}$), tính chất bắc cầu (nếu $\mathscr{C}_1 \mathbf{T} \mathscr{C}_2$ và $\mathscr{C}_2 \mathbf{T} \mathscr{C}_3$ thì $\mathscr{C}_1 \mathbf{T} \mathscr{C}_3$ và $t_{1,3} = \dfrac{t_1}{t_3} = \dfrac{t_1}{t_2}.\dfrac{t_2}{t_3} = t_{1,2}.t_{2,3}$).

Trên hình 1 và hình 2 (xem bìa 3) vẽ các đường tròn $\mathscr{C}'_i$ tương ứng với bánh xe $\mathscr{C}_i$ ($\mathscr{C}'_i$ đi qua trung điểm các cạnh răng cưa của $\mathscr{C}_i$) ($i = 1, 2, ..., 11$). Gọi số răng cưa của $\mathscr{C}_i$ và bán kính của $\mathscr{C}'_i$ tương ứng là S_i và r_i ($i = 1, 2, ..., 11$).

1) Trên hình 1 do tính bắc cầu của quan hệ truyền chuyển động mà $\mathscr{C}_1$ ăn khớp với $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_2$ gắn chặt với $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_3$ ăn khớp với $\mathscr{C}_4$ nên ta có $t_{1,4} = t_{1,2}.t_{2,3}.t_{3,4}$ vì $t_{2,3} = 1$ suy ra $t_{1,4} = t_{1,2} \cdot t_{3,4}$ (1) trong đó $t_{1,2} = \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{64}{16} = 4$ (2).

Khi bánh xe $\mathscr{C}_1$ (tâm gắn với đuôi kim phút) quay được 12 vòng thì bánh xe $\mathscr{C}_4$ (tâm gắn với đuôi kim giờ) phải quay được 1 vòng, nghĩa là $t_{1,4} = \dfrac{t_1}{t_4} = 12$. Thay giá trị của $t_{1,4}$ và $t_{1,2}$ vào (1) có $12 = 4.\dfrac{S_4}{S_3}$, suy ra $S_4 = 3S_3$ (3). Do S_3 và S_4 đều nằm trong khoảng từ 16 đến 80 và đều chia hết cho 8 thì chỉ xảy ra hai trường hợp là (S_3, S_4) bằng (16, 48) hoặc (24, 72). Từ (2), (3) tương ứng lấy $r_2 = 4r_1$ và $r_4 = 3r_3$. Từ đó và giả thiết $r_1 + r_2 = r_3 + r_4 = 1$ (cm) suy ra $r_1 = 0,2$ (cm), $r_2 = 0,8$ (cm), $r_3 = 0,25$ (cm), $r_4 = 0,75$ (cm).

2) Trên hình 2 bánh xe $\mathscr{C}_5$ ăn khớp với $\mathscr{C}_6$, $\mathscr{C}_6$ gắn chặt với $\mathscr{C}_7$, $\mathscr{C}_7$ ăn khớp với $\mathscr{C}_8$, $\mathscr{C}_8$ gắn chặt với $\mathscr{C}_9$, $\mathscr{C}_9$ ăn khớp với $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{10}$ ăn khớp với $\mathscr{C}_{11}$, $\mathscr{C}_{11}$ đồng tâm với $\mathscr{C}_5$ và $\mathscr{C}_1$. Do sự truyền chuyển động từ $\mathscr{C}_5$ đến $\mathscr{C}_{11}$ ta có hệ thức $t_{5,11} = t_{5,6}.t_{6,7}.t_{7,8}.t_{8,9}.t_{9,10}.t_{10,11}$ mà $t_{6,7} = t_{8,9} = 1$ nên $t_{5,11} = t_{5,6}.t_{7,8}.t_{9,10}.t_{10,11}$ (4) (chú ý rằng số lần quay ăn khớp là số chẵn để các kim đồng hồ quay cùng chiều), trong đó $t_{5,6} = \dfrac{S_6}{S_5} = \dfrac{24}{72} = \dfrac{1}{3}$ (5).

Khi $\mathscr{C}_5$ (tâm gắn với đuôi kim phút) quay được 1 vòng thì $\mathscr{C}_{11}$ (tâm gắn với đuôi kim giây) phải quay được 60 vòng, tức là $t_{5,11} = \dfrac{1}{60}$. Từ đó và (4) ta có $\dfrac{1}{60} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{S_8}{S_7}.\dfrac{S_{10}}{S_9}.\dfrac{S_{11}}{S_{10}}$ suy ra $\dfrac{S_7}{S_8}.\dfrac{S_9}{S_{10}}.\dfrac{S_{10}}{S_{11}} = 20$.

Từ sự phân tích $20 = 5.4.1$ ta có thể chọn (h. 2) $S_7 = 5S_8$, $S_9 = 4S_{10}$ và $S_{10} = S_{11}$ (6).

Vì $S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}$ đều nằm trong khoảng từ 16 đến 80 và đều chia hết cho 8 nên có thể chọn $S_7 = 80$ (răng), $S_8 = 16$ (răng), $S_9 = 64$ (răng), $S_{10} = S_{11} = 16$ (răng). Từ (4), (5), (6) lấy $r_5 = 3r_6$, $r_7 = 5r_8$ và $r_9 = 4r_{10} = 4r_{11}$. Theo giả thiết $O_5O_6 = 1$ (cm). Ta chọn $O_6O_8 = 1,2$ (cm), $O_8O_{10} = 1$ (cm) và $O_5O_{10} = 0,4$(cm). Lúc đó $r_5 = 0,75$ (cm), $r_6 = 0,25$(cm), $r_7 = 1$ (cm), $r_9 = 0,8$ (cm), $r_8 = r_{10} = r_{11} = 0,2$ (cm).

Việc xét tương tự ứng với các cách phân tích $20 = 5.1.4 = 1.5.4 = 1.4.5 = 4.1.5 = 4.5.1 = 5.2.2 = 2.2.5 = 2.5.2$ dành cho bạn đọc.

Nhận xét. Bạn *Lê Đình Tuấn*, 10A3, K37, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An có lời giải tương đối tốt, được nhận tặng phẩm.

PHI PHI

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 385(7.2009)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: 04.35144272, 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

TRONG SỐ NÀY

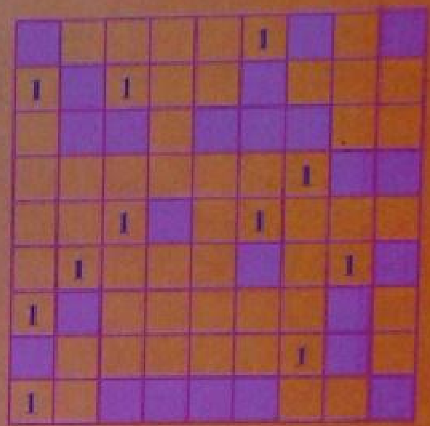
Biên tập : NGUYỄN THANH HỒNG
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : MINH THƠ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

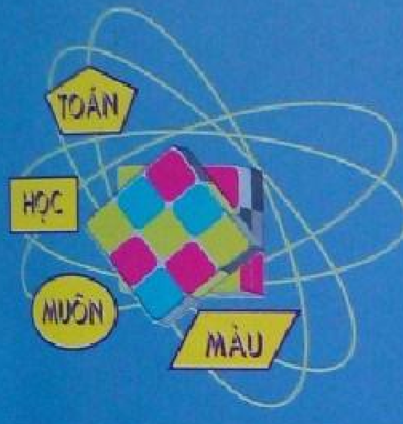
Giải trí toán học

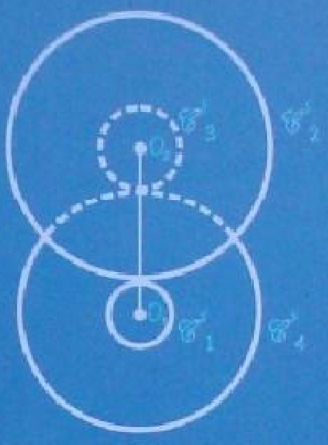
BẢNG Ô VUÔNG các số chính phương

Bạn hãy điền vào mỗi ô vuông trống ở bảng bên một chữ số từ 2 đến 9 để chúng lập thành các số mà khi đọc các số theo hàng hoặc theo cột (từ trên xuống dưới) đều được các số chính phương.

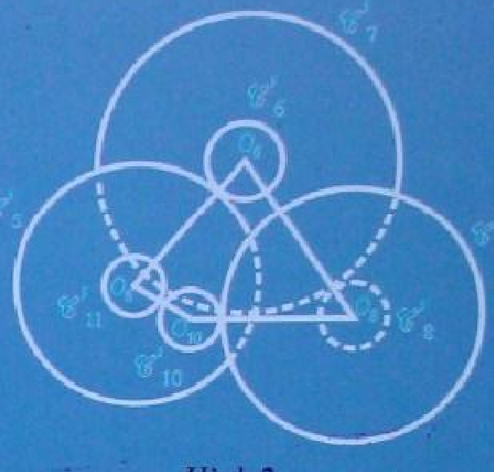
ĐAN QUỲNH







Hình 1



Hình 2

Giải đáp

Bánh xe răng cưa trong đồng hồ

(Đề đăng trên THTT số 380, tháng 2.2009)

(Xem tiếp trang 31)

TÒA SOẠN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
với ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam

Sáng ngày 18.6.2009 tại Hội trường B, 187B Giảng Võ, Hà Nội, hòa chung với không khí kỉ niệm ngày Báo chí, đồng thời hướng tới Lễ kỉ niệm 45 năm ngày ra đời số báo đầu tiên, Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (THTT) đã long trọng tổ chức Lễ kỉ niệm 84 năm ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam và họp các Ủy viên Hội đồng biên tập tạp chí. Đến dự buổi lễ có Ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam; GS. TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, nguyên Tổng biên tập Tạp chí THTT; GS Đoàn Quỳnh, Chủ tịch Hội đồng bộ môn Toán, Bộ Giáo dục và Đào tạo; GS. TSKH Hà Huy Khoái, nguyên Viện trưởng Viện Toán học Việt Nam; GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch Hội đồng Khoa học trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội; PGS. TS Phan Doãn Thoại, Phó Tổng biên tập NXBGD Việt Nam, Tổng biên tập Tạp chí THTT; Lãnh đạo Công ti CP In Diên Hồng, Lãnh đạo Công ti CP Thiết kế và Phát hành Sách Giáo dục; Lãnh đạo Xí nghiệp In Bản đồ I, Bộ Quốc phòng; Lãnh đạo tạp chí Văn học và Tuổi trẻ, Tạp chí Toán Tuổi thơ; các Ủy viên Hội đồng biên tập, các cộng tác viên thân thiết và toàn thể cán bộ của Tòa soạn THTT. PGS. TS Phan Doãn Thoại phát biểu khai mạc và đề dẫn chương trình buổi lễ, nêu ý nghĩa ngày Báo chí Cách mạng Việt Nam 21.6. Tiếp theo TS Phạm Thị Bạch Ngọc, Phó Tổng biên tập báo cáo kết quả hoạt động của tạp chí trong 6 tháng đầu năm 2009. Tiếp đó là lời phát biểu chào mừng của ông Nguyễn Minh Khang, Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam và các ý kiến phát biểu thảo luận của GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, GS. TSKH Đặng Hùng Thắng, GS. TSKH Hà Huy Khoái, TS Trần Nam Dũng... xoay quanh việc cải tiến nội dung và hình thức nhằm xây dựng và phát triển tờ THTT góp phần phát huy niềm đam mê, sức sáng tạo của các giáo viên và các bạn trẻ yêu Toán trong cả nước.

Phó Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam Nguyễn Minh Khang phát biểu tại Hội nghị

Tổng biên tập Tạp chí THTT Phan Doãn Thoại khai mạc Hội nghị

Nhân dịp này, THTT xin chân thành cảm ơn NXBGD Việt Nam, Bưu điện Giảng Võ, Công ti CP In Diên Hồng, Công ti CP In SGK tại TP. Hà Nội, NXBGD tại Hà Nội, NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh, Xí nghiệp In Bản đồ I Bộ Quốc phòng đã gửi lẵng hoa và thiếp chúc mừng đến tạp chí.

QUANG PHÚC

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT07M9

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT cấp ngày 15.6.2004
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ, Hà Nội
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2009

Giá : 6000 đồng
Sáu nghìn đồng