Nguyễn Thế Anh & Nguyễn Thế Lực

Skill Trắc nghiệm Toán 2017

Cuốn sách giúp gì cho các em?

- Cách tư duy từ tự luận đến trắc nghiệm nắm vững bản chất
- Skill Casio giải nhanh diệt gọn
- Đầy đủ kiến thức 10, 11, 12
- Học sinh trung bình khá cũng có thể đạt được 7-8
- Học sinh khá giỏi rút ngắn một nửa thời gian làm bài
- Dành cho mục tiêu tốt nghiệp và xét tuyển Đại học

Casio Skill Trắc Nghiệm

Ver1.0

Chào các vị anh hùng hảo hán, khi các bạn đang đọc những dòng này, tức là các bạn đang cầm trên tay cuốn Bí Tịch giúp nâng cao võ công của các hạ, làm cho nội lực ngày càng uyên thâm đủ sức hành tẩu trên giang hồ cũng như tranh Slot vào Đại Học, điều mà ai cũng muốn và chỉ có chiến thắng bằng đúng thực lực của mình mới mong giành được.

Hành tẩu trên giang hồ các hạ cũng đã biết, ngoài phải cần cù siêng năng, học hành chăm chỉ để có những kĩ năng cơ bản thì cần phải có những chiêu thức độc và mạnh, cũng như vũ khí vip. Thử hỏi có cao thủ võ lâm nào, không nắm trong tay các tuyệt thế võ học như Cửu Dương Thần Công, Cửu Âm chân kinh, Hàng Long Thập Bát Chưởng, Như Lai Thần Chưởng….

Hôm nay, bạn đã có 1 bí tịch như vậy và những Skill chỉ trong sách này mới có, bạn sẽ không tìm thấy ở 1 quyển sách màu mè nào khác…

Và đây là 1 phiên bản đặc biệt Limited. Hãy gối đầu giường và tu luyện nó cho cẩn thận nhé !!!

P/s: Như các hạ đã biết năm nay, thi trắc nghiệm 50 câu trong 90 phút nên các bạn chỉ có 1 phút 48 giây cho việc làm và lựa chọn 1 đáp án bởi vậy mà ngoài kiến thức vững vàng thì còn cần những Skill mạnh để đẩy nhanh tốc độ làm bài, tăng độ chính xác và giành chiến thắng.

___Casio Expert : Thế Lực & Great Teacher: Thế Anh___

Đi kèm Bí Tịch này là một Hệ thống Video hướng dẫn các bài hay và khó trong các đề thi thử và đề ĐH, THPT QG và kho bài tập rèn luyện Update được kết nối tới hệ thống data điện toán đám mây, không chỉ có vậy mà các hạ sẽ được vào "Bang Thế Lực-Thế Anh" là group kín trả lời mọi thắc mắc về học tập.

Các anh hùng mua sách Photo thì vào đây để được hướng dẫn kết nối với Bang & data của chúng tôi : http://bikiptheluc.com/ebook. **Hoặc** nguyentheanh.org/ebook

Đây là ID của các hạ:

(dùng để khai báo thêm tên mới được gia nhập Bang)

Menu skill

Ở ver1.0 này sách chủ yếu tập chung vào các Skill và chuyên đề, nên số đề tự luyện không nhiều, nếu các bạn thấy ver1.0 hay thì các bạn đón đọc ver2.0 Update NewSkill và nhiều đề thi tự luyện kèm giải hơn tại đây:
http://bikiptheluc.com/luyen-thi-trac-nghiem-toan-2017.html
Chi tiết các bạn có thể liên hệ với tác giả:

Nguyễn Thế Lực: *fb.com/Ad.theluc - youtube: MrTheLuc95*
Tel: 0977.543.462 – theluc95@gmail.com – Luyenthipro.vn –Bikiptheluc.com
Nguyễn Thế Anh: *fb.com/nguyentheanh.teacher*
Tel: 0986.683.218 - theanh.teacher@gmail.com - Nguyentheanh.org – Alika.vn

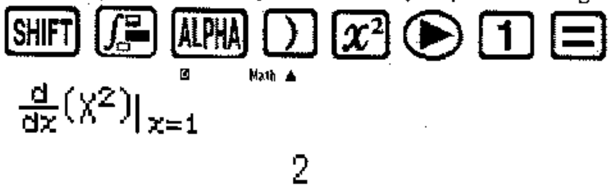
TÂM PHÁP
Skill CASIO công phá Trắc Nghiệm Toán 2017

Ver 2.0

(Lưu ý: Các thao tác casio chi tiết đã có ở từng chuyên đề, đây là mục phân dạng theo casio thay vì phân theo chuyên đề.)

I. Hàm số

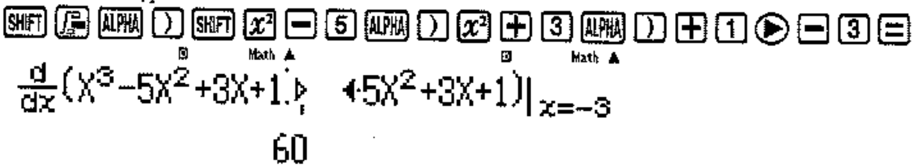
Các bài toán hàm số chủ yếu là hỏi về cực trị do đó chúng ta sẽ sử dụng tính năng đạo hàm:



Ví dụ 1: Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ đạt cực trị khi :

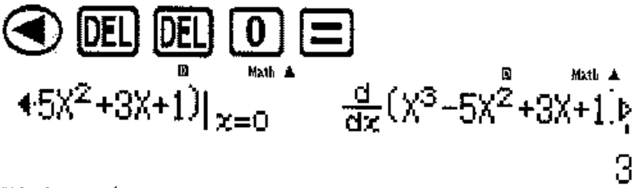
A. $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{10}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{10}{3} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Các em sẽ nhập như sau:



Do đó loại A vì đạo hàm của y không bằng 0 tại x = -3 nên nó không thể là cực trị được

Tương tự các em thử với $x = 0$

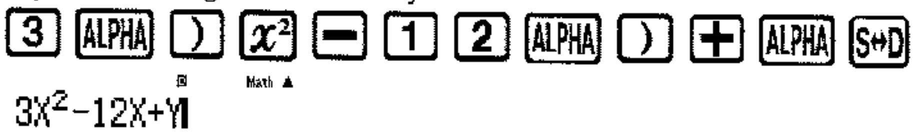


Vậy loạt nốt B,C Do đó ta sẽ chọn D.

Ví dụ 2: Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên miền $(0, +\infty)$ khi giá trị m là:

A. $m \geq 0$ B. $m \geq 12$ C. $m \leq 0$ D. $m \leq 12$

Những bài như thế này tốt nhất là các em đạo hàm tay cho dễ xét, ta đạo hàm luôn trên máy và thay tham số m bằng tham số Y trên máy



Tìm Y để biểu thức trên > 0 với mọi x thuộc $(0, +\infty)$ thì khi đó hàm sẽ đồng biến thôi ^^

Các em chọn bừa x=1 rồi chọn Y theo hướng loại dần đáp án, trước hết chọn Y=15 xem A,B đúng không? Hay là C,D đúng

CALC 1 = 1 5 =

$3X^2-12X+Y$

6

Do đó A,B sẽ đúng, giờ A với B nó khác nhau giá trị 0→12 ta chọn bừa x=1

CALC = 1 =

$3X^2-12X+Y$

-8

Vậy loại A do lớn hơn 0 vẫn chưa được, chắc phải lớn hơn 12 ^^ do đó chỉ còn chọn B

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y=x^3-2x^2+mx+m$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ bằng 1

Đơn giản là các em giải phương trình $3.1^2-4.1+m=0$ thôi ^^

Giải tay cho khỏe, chứ Solve hơi lâu.

Dạng viết phương trình tiếp tuyến:

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của $y=x^3-2x^2+2x+1$ tại $x=1$

Ta đã biết phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=ax+b$

$a=y'(x_o)=\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+2x+1)=1$ còn $b=y(x_o)-ax_o$

Các em bấm máy như sau :

SHIFT ∫ ALPHA) SHIFT x^3 − 2 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 1 ▶ 1 =

$\frac{d}{dx}(X^3-2X^2+2X+1$

1

AC (ALPHA) SHIFT x^3 − 2 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 1) − 1 × ALPHA) CALC 1 =

$(X^3-2X^2+2X+1)-1$

1

$\Rightarrow y=x+1$

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến của $y=x^3-3x+1$ đi qua $M(1;-1)$

Ta có hệ :

$$\begin{cases} k=y'(1) \\ y=k(x-1)-1 \end{cases} \Rightarrow x^3-3x+1=(3x^2-3)(x-1)-1 \xrightarrow{SOLVE} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0.5 \end{array}\right.$$

Vậy là quay lại bài toán tìm tiếp tuyến tại 1 điểm.

II.PT-BPT- Hệ

Có 2 dạng chính là tìm nghiệm của phương trình và tìm số nghiệm hoặc tìm tổng của các nghiệm, hay nói cách khác 1 dạng có sẵn nghiệm rồi chỉ việc thử, 1 loại phải đi tìm nghiệm chính xác của nó.

Chủ yếu là dùng CALC để tính giá trị biểu thức thôi các em

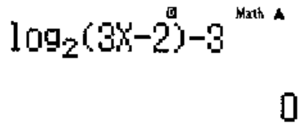
1.Dạng đơn giản không có tham số:

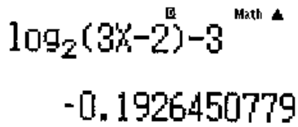
Ví dụ 1: Phương trình $\log_2(3x-2)=3$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{10}{3}$ B. $x=3$ C. $x=\frac{11}{3}$ D. $x=2$

Các em dùng tính năng tính giá trị biểu thức để thử từng giá trị :

Trước hết nhập phương trình:





Vậy đáp án A đúng

Áp dụng: Phương trình $\sin 3x+\sin x=\cos 3x+\cos x$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Bất phương trình $\frac{x+1}{x-1}>\frac{4x-2}{x}$ có nghiệm là:

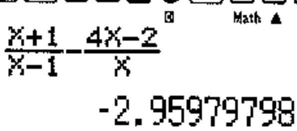
A. $\frac{1}{3}<x<2$ B. $\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{3} \\ 1<x<2 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}<x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ \frac{1}{3}<x<2 \end{array}\right.$

Các em lần lượt tìm ra các miền khác nhau của các đáp án để xem đáp án nào chứa giá trị đúng.

Ví dụ như ví dụ trên ta sẽ tính $x=100$ để xem $x>2$ đúng không?

Hay tính $x=-100$ xem $x<0$ đúng không -_-

Cứ thế các em loại dần các đáp án, chủ yếu là phải chọn giá trị chỉ đáp án này có mà đáp án khác không có.



Với x=100 giá trị biểu thức âm chứ không phải dương nên loại luôn C

Tương tự x= -100

CALC − 1 0 0 = S⇔D

$\frac{X+1}{X-1}-\frac{4X-2}{X}$

-3.03(9801)

Do đó cũng loại nốt

Vậy chỉ còn A và B, ta sẽ chọn 1 giá trị mà A có còn B không có để xem đáp án nào đúng

Chọn x=0.5

CALC 0 • 5 =

$\frac{X+1}{X-1}-\frac{4X-2}{X}$

-3

Vậy loại nốt A do đó chọn B

Áp dụng : Bất phươngtrình $0,3^{x^2+x} > 0,09$ có nghiệm là:

A. $x > 1$ B. $-2 < x < 1$ C. $x < -2$ D. $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 1 \end{array}\right.$

2.Loại phương trình phải tìm chính xác nghiệm

Ví dụ 1 : Cho phương trình: $\log_4(3.2^x - 8) = x - 1$ có 2 nghiệm x_1, x_2 tính $x_1 + x_2$

Các em sẽ tìm nghiệm bằng tính năng SOLVE của máy tính: xử đẹp mọi loại phương trình 1 ẩn

log▫□ 4 ▶ 3 × 2 x▫ ALPHA) ▶ − 8 ▶ − (ALPHA) − 1)

◂3×2^X−8)−(X−1)

SHIFT CALC

Solve for X

3

=

$\log_4(3\times2^X-8)-(X$▸

X= 3

L−R= 0

Vậy ta được 1 nghiệm đầu tiên x=3, ta sẽ kiểm tra xem còn nghiệm nào khác không bằng cách chia cho (X-3) các em sửa thành (.....) : (X-3)

▶ (◀ ◀) ÷ (ALPHA) − 3)

◀-(X-1))÷(X-3)

Solve for X

3

(log4(3×2^-8)-(▶
X= 2
L-R= 0

Ta được thêm 1 nhiệm x =2 vậy tổng 2 nghiệm là 5

Các em có thể thử luôn xem còn nghiệm nào nữa không bằng cách sửa thành

(....) : (X-3)(X-2)

3.Loại có tham số :

Ví dụ 1: Phương trình $x^3+x=m^2+m$ có 3 nghiệm phân biệt khi:

A. $m<1$ B. $-1<m<2$ C. $-2<m<1$ D. $m>-21$

Để xửa nhanh dạng này các em vào luôn tính năng giải phương trình bậc 3 của máy tính rồi lại "chọn bừa" m như ví dụ trước:

MODE 5 4

a b c
0 0

0

Ta sẽ lấy $m=-100$ xem A có đúng không?

1 = 0 = - 3 = - ((- 1 0 0) x² + - 1 0 0) = = =

a b c X1=
0 -3

1 21.51886327

X2=

◀63+18.55521779i

Đó ta thấy loại A luôn vì có nghiệm phức

Tiếp tục với $m=-10$ xem D đúng không, nếu không đúng thì lại thử giá trị B có C không có

▶ ▶ ▶ - ((- 1 0) x² + (- 1 0)) =

b c d X2=
0 -3

-90 ◀39+3.687594015i

Tiếp tục thử với $m=1,5$

b c d X3=
0 -3

-3.75 ◀196-0.73746454i

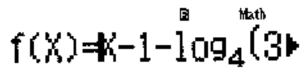
Do đó Loại B vì nó chứa giá trị trên, và duy nhất C đúng ,các em không tin thì thử lại nhé.

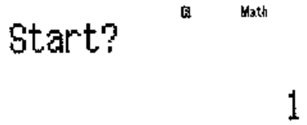
4. Tìm số nghiệm của phương trình : Ngoài Solve chúng ta có thể dùng TABLE

(Các em xem ở phần chuyên đề nhé)

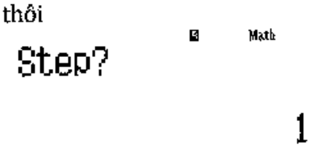
Cứ nhớ là $f(x)$ đổi từ âm sang dương hoặc ngược lại thì tức là trên cái đoạn đổi dấu đó có 1 nghiệm, lí thuyết này các em đã được học từ năm lớp 11.

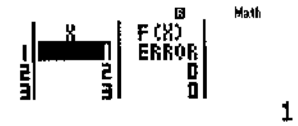
Ví dụ: PT $\log_4(3.2^x-8)=x-1$ có mấy nghiệm thì các em xét: $f(x)=x-1-\log_4(3.2^x-8)$





Chú ý là nhìn qua thì $x>1$ nên ta sẽ cho Start từ 1 tới 20 vì Table chỉ tính được 20 giá trị thôi





Ví dụ này đặc biệt quá, ra luôn 2 nghiệm, nên Table cũng là 1 cách để tìm nghiệm nhé các em về bản chất nó cũng là tính giá trị biểu thức như CALC nhưng mà nó tính được nhiều hơn và tổng quan hơn, các em xem ví dụ ở phần chuyên đề nhé sẽ thấy rõ hơn sự khác biệt Table và Solve trong tìm số nghiệm của phương trình.

5. Kĩ thuật giải hệ : tìm mối quan hệ (trích từ sách Bí Kíp Thế Lực ver tự luận)

Sơ đồ chung để giải hệ phương trình:

Từ 1 trong 2 phương trình, hoặc phức tạp hơn là phải kết hợp 2 phương trình

↓

Mối quan hệ giữa x và y
(muốn làm được điều này thì các em phải dùng các pp thế, đưa về phương trình tích, ẩn phụ, hàm số, đánh giá….)

↓

Thế vào 1 trong các phương trình để đưa về phương trình 1 ẩn, có thể là giải được luôn, hoặc có thể là một phương trình chứa căn phải dùng thêm phương pháp mới giải được, tùy vào mức độ đề thi

a. Kĩ thuật tìm nhanh mối quan hệ:

Ví dụ 1: Cho hệ : $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1}=y+1 \\ x+y+1+\sqrt{2x+y}=\sqrt{5x^2+3y^2+3x+7y} \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ tính $x_1 + y_1$

A.0 B.1 C.2 D.3

Hướng dẫn:

Các em chỉ cần lọc thô với $y = 100$ cho nhanh:

Bước 1: Nhập nguyên phương trình 1 vào

$\sqrt[3]{X-Y-1}-(Y+1)$

Bước 2: Gọi chương trình SOLVE và khởi tạo giá trị tham số $Y = 100$

SHIFT CALC 1 0 0 = =

Y? 100

$\sqrt{X^2-X-Y-1}\ \sqrt[3]{X-Y-}$ ▷

X= 102

L−R= 0

Sau khi ra $X = 102$ thì các em phải tìm với $Y = 100$ thì còn nghiệm X nào khác không bằng cách chia cho $(X-100)$ như là phần giải phương trình đó.

$(Y+1))\div(X-102)$

Y? 100

Can't Solve

[AC] :Cancel

[◀][▶]:Goto

Từ đó suy ra được một mối quan hệ duy nhất : $x - y = 2 \to y = x - 2$

Thay vào phương trình 2 ta được:

$2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x^2-2x-2}$ Điều kiện : $x \geq \frac{2}{3}$

$-2-\sqrt{8X^2-2X-2}$

SHIFT CALC 0 =

$2X-1+\sqrt{3X-2}-\sqrt{8X^2}$ ▷

X= 1

L−R= 0

$-2X-2))\div(X-1)$

Can't Solve

[AC] :Cancel

[◀][▶]:Goto

Bấm máy ra nghiệm x = 1 là nghiệm duy nhất

Vậy nghiệm của hệ là $(1;-1) \to x_1 + y_1 = 0$

b. Kĩ thuật tìm mối quan hệ với căn thức: các em chọn y cho căn thức ra giá trị đẹp thì mới dễ nhìn mối quan hệ.

Ví dụ 1: Cho hệ: $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0(1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7(2)\end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ tính $x_1 . y_1$

A.0 B.1 C.2 D.3

Điều kiện: $y \leq \frac{5}{2}, x \leq \frac{3}{4}$

- Bảng kết quả với phương trình 1: $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

Y	0.5	2	-2
$\sqrt{5-2y}$	2	1	3
X	1	0.5	1.5

Từ đó suy ra mối quan hệ là : $2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=5-2y \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{5-x}{2}$ thế vào (2)

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0(3)$$

Bấm máy được : $x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=2 \to x_1.y_1=1$

III.Tính giới hạn – Nhị thức Newton

1. Tính giới hạn.

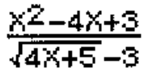
Phần này có thể nói là 1 phần rất dễ các em ạ, thực chất là tính giá trị biểu thức tại điểm lân cận cái điểm mình cần tính thôi.

Ví dụ x tiến tới 1 thì các em lấy 0.999999 hoặc 1.000001 thôi

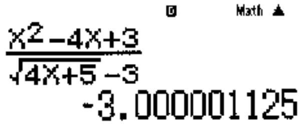
Hoặc dùng công thức Lopital ở chuyên đề giới hạn nhé.

Ví dụ 1: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{4x+5-3}}$

Các em nhập biểu thức:

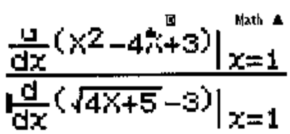


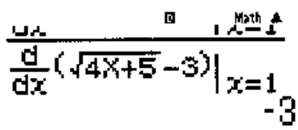
Sao đó dùng CALC để tính :



Vậy ta được kết quả là -3

Hoặc tính cách khác:





Nói chung dạng tính lim này đa phần là dễ, anh cũng đã nói chi tiết 1 lần nữa ở phần chuyên đề rồi, cả cách làm sao để chuyển về phân số nếu kết quả là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

2.Nhị thức newton

Cách tìm hệ số x^m trong khai triển anh đã trình bày ở chuyên đề , ở phần này anh sẽ không nhắc lại nữa mà sẽ mở rộng hơn:

Chúng ta xét khai triển: $(ax+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax)^k . b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} . x^k$

Hệ số của x^k trong khai triển là : $C_n^k a^k b^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} . a^k b^{n-k}$

Để đơn giản hóa các em đặt : $\begin{cases} k_1 = k \\ k_2 = n-k \end{cases} \Rightarrow k_1 + k_2 = n$ mà ta đang cần tìm x^m do đó ta có hệ sau : $\begin{cases} k_1 + k_2 = n \\ k_1 = m \end{cases}$ và hệ số cần tìm là : $\frac{n!}{k_1!k_2!} . a^{k_1} b^{k_2}$

Chúng ta lại xét tiếp khai triển 3 số hạng :

$(ax^2+bx+c)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax^2)^k . (bx+c)^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k (ax^2)^k C_i^{n-k} (bx)^i . c^{n-k-i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k C_i^{n-k} a^k b^i . c^{n-k-i} . x^{2k+i}$

Để cho gọn các em lại đặt như sau : $\begin{cases} k_1 = k \\ k_2 = i \\ k_3 = n-k-i \end{cases} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = n$

Mà chúng ta lại đăng đi tìm x^m do đó: $2k + i = m$, ta có hệ sau : $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = n \\ 2k_1 + k_2 = m \end{cases}$

Từ hệ phương trình các em sẽ tìm được k_1, k_2, k_3 và từ đó tính được hệ số bằng công thức:

$C_n^k C_i^{n-k} a^k b^i . c^{n-k-i} = \frac{n!}{(n-k)!k!} . \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!} a^k b^i . c^{n-k-i}$

$= \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} a^k b^i . c^{n-k-i} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} . a^{k_1} . b^{k_2} . c^{k_3}$

Vậy là chúng ta đã có công thức tổng quát cho 2 trường hợp khá đơn giản, cách để nhớ cái hệ cũng rất đơn giản: $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = n \\ 2k_1 + k_2 = m \end{cases}$

Từ $ax^2 \to 2.k_1$ $\quad bx \to 1.k_2$ $\quad \to 2k_1 + k_2$ chính là số mũ của x^m trong khai triển

Ví dụ 1: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $P = (3x^2 - 2x - 1)^9$

Các em viết luôn hệ sau : $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 9 \\ 2k_1 + k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 \le 3 \\ k_2 = 6 - 2k_1 \\ k_3 = 9 - (k_1 + k_2) = 3 + k_1 \end{cases}$

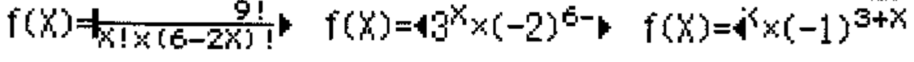
(các em để cấu trúc như anh nhé)

Made in by CASIO EXPERT – Nguyễn Thế Lực

Cách 1:

Sau đó các em vào Table và nhập : $F(x) = \frac{9!}{X!*(6-2X)!*(3+X)!} * 3^X . (-2)^{6-2X} . (-1)^{3+X}$

MODE 7



Sau đó các em bấm = = để bỏ qua G(X)
Start các em cho là 0= End các em cho là 3= (vì mình chỉ cần chạy tới 3 thôi) Step 1= nhé

Start?	End?	Step?
0	3	1

Sao đó ghi lại các số hạng này vào để tí nữa cộng lại

	X	F(X)
1	0	-5376
2	1	30240
3	2	-27216

-5376

	X	F(X)
3	2	-27216
4	3	2268
5		

Các em cộng lại được:

-5376+30240-272▸

-84

Vậy hệ số của x^6 trong khai triển là **-84**

Cách 2: Sử dụng lập trình dòng lệnh – Thế Lực

Các em nhập như sau:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [S⇔D] [+] [▭/▭] [9] [SHIFT] [x^{-1}] [▼] [ALPHA] [)]
[SHIFT] [x^{-1}] [×] [(] [6] [−] [2] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [x^{-1}] [×] [(] [3] [+] [ALPHA] [)] [)] [SHIFT] [x^{-1}] [▶] [×] [3] [$x^{■}$]
[ALPHA] [)] [▶] [×] [(] [−] [2] [)] [$x^{■}$] [6] [−] [2] [ALPHA] [)] [▶] [×] [(] [−] [1] [)] [$x^{■}$] [3] [+] [ALPHA] [)]

X=X+1:Y=Y+9!/(X!×(6▸ ◂−2X)!×(3+X)!)×3▸ ◂3^X×(−2)^(6−2X)×(−▸

Sau đó các em bấm CALC rồi bấm **-1= 0=** để khởi tạo cho $X=-1, Y=0$ (*)
Sau đó **bấm =** , thì lúc này $k_1=0$ và để nó tính ra hệ số thì các em **bấm =**

X=X+1	Y=Y+9!/(X!×(6−2X)!×▸
0	-5376

Vậy là đợt 1 đã xong, các em lại bấm = tiếp , rồi = tiếp , rồi = tiếp : đây là các thông số khởi đầu của đợt 2

X?	Y?	X=X+1
0	-5376	1

Bây giờ lại bấm = như đợt 1 : thì nó hiện hệ số lúc này là tổng của hệ số lúc $k_1=0$ và $k_1=1$

Y=Y+9!/(X!×(6−2X)!×▸

24864

Tiếp theo lại bấm = tiếp

X? 1 | Y? 24864 | X=X+1 2

Kết quả đợt 3

$Y=Y+\frac{9!}{X!\times(6-2X)!\times}$ -2352

X? 2 | Y? -2352

Các em phải chú ý bấm = liên tục tới 3 thì bấm chậm thôi vì đây là đợt cuối $k_1=3$

X=X+1 3 | $Y=Y+\frac{9!}{X!\times(6-2X)!\times}$ -84

Nếu cứ bấm mữa thì cũng chẳng sao vì nó sẽ báo lỗi

X? 4 | Y? -84 | Math ERROR [AC] :Cancel [◄][►]:Goto

Mẹo nhập xong ở (*) bao giờ báo lỗi thì dừng: bấm RCL S⇔D

Y -84 | X 4

(Nhưng chú ý là khi đó X phải là 4 nhé chứ X là1,2,3 thì lại đẩy sang trái CALC tiếp : xem ví dụ 2)

Ví dụ 2: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $P=(1+x^2(1-x))^8=(-x^3+x^2+1)^8$ **(A-2004)**

Các em tổng quát lên sẽ được công thức : $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=8 \\ 3k_1+2k_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1\le 2 \\ k_2=\dfrac{8-3k_1}{2} \\ k_3=8-(k_1+k_2)=4+\dfrac{k_1}{2} \end{cases}$

Các em nhập vào :

Dấu : các em nhập là

$X=X+1:Y=Y+\frac{8!}{X!\times\left(\frac{8-3X}{2}\right)!\times\left(4+\frac{X}{2}\right)!}\times(-1)^X$

Sau đó các em bấm CALC và cho $X=-1, Y=0$ và máy hiện

X=X+1

0

Các em lại ấn =

$Y=Y+\frac{8!}{X!\times\left(\frac{8-3X}{2}\right)!\times|}$

70

Rồi lại ấn = = =

X? 0   Y? 70   X=X+1 1

Thì nó báo lỗi do không có giai thừa của cơ số không nguyên

Math ERROR

[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

Sau đó các em bấm "đẩy sang trái" và bấm CALC rồi lại = rồi lại =

X? 1   Y? 70   X=X+1 2

Tới đây là $k_1=2$ chỉ việc = là ra hệ số Y

$Y=Y+\frac{8!}{X!\times\left(\frac{8-3X}{2}\right)!\times|}$

238

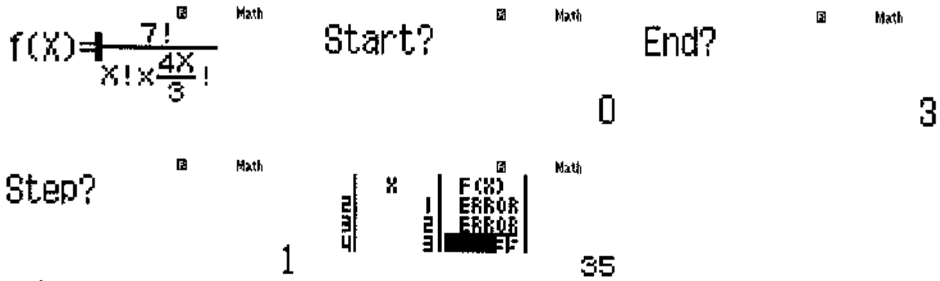
Vậy hệ số của x^8 trong khai triển trên là **238**

Ví dụ 3: Số hạng không chứa x trong khai triển $P=(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})^7, x>0$

Các em viết lại chút trông cho nghệ thuật: $P=(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})^7=(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{-1}{4}})^7$

Các em viết luôn hệ: $\begin{cases} k_1+k_2=7 \\ \frac{1}{3}k_1-\frac{1}{4}k_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=7 \\ 4k_1-3k_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \le \frac{7}{1+\frac{4}{3}}=3 \\ k_2=\frac{4}{3}k_1 \end{cases}$

Nhập vào máy: dùng Table nhé



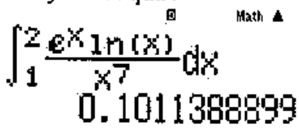
VI.Tính nguyên hàm – tích phân

a. **Tích phân xác định : Dạng này khá đơn giản các em chỉ cần nhập trực tiếp tích phân cần tính và bấm = để ra KQ**

Ví dụ 1: Tính tích phân sau: $\int_1^2 e^x \frac{\ln x}{x^7}dx$

Các em nhập như sau:

Và đây là kết quả :



Để lưu lại giá trị tích phân để tiện cho việc so sánh các em lưu vào A bằng cách:

Ví dụ áp dụng :

Trích đề mẫu 2016:

Ví dụ 1. Tính tích phân: $I=\int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$

A. $2\ln 3+3\ln 2$ B. $2\ln 2+3\ln 3$ C. $2\ln 2+\ln 3$ D. $2\ln 3+\ln 4$

Ví dụ2. Tích phân: $I=\int_1^2 x^2\ln x dx$ có giá trị bằng :

A. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{3}$ B. $8\ln 2-\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ D. $24\ln 2-7$

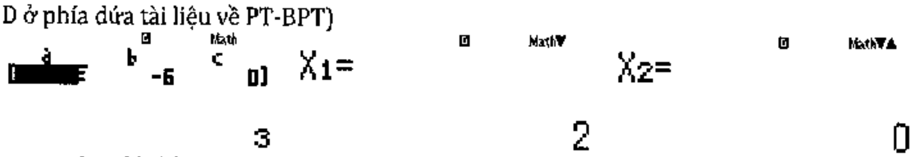
Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số có phương trình:

$y=-x^2+2x+1, y=2x^2-4x+1$

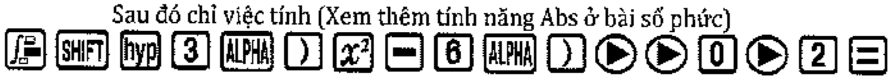
Trước hết ta tìm hoành độ giao điểm để biết cận đã

Giải :

$(2x^2-4x+1)-(-x^2+2x+1)=0$ (Các loại khác không phải bậc 2 hay 3 thì các em giải như phần ở HD ở phía dứa tài liệu về PT-BPT)



Sau đó chỉ việc tính (Xem thêm tính năng Abs ở bài số phức)



$$\int_0^2 |3X^2-6X|\,dx$$

4

Ví dụ 4: Biết tích phân: $\int_{-1}^{0}\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = a+b\ln 2$. Tính a+b

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

Hướng dẫn :

Trước hết các em bấm kết quả tích phân rồi lưu vào A.

$$\int_{-1}^{0}\left(X+1+\frac{2}{X-1}\right)dx$$

-0.8862943611

Ans→A

-0.8862943611

Sau đó vào Table: Mode 7

$$f(X)=\frac{A-X}{\ln(2)}$$

Rồi bấm = = và cho Start 4= End 4= và Step 0.5=

	X	F(X)
9	0	-1.278
10	0.5	
11	1	-2.721

-2

Vậy là $a=0,5$ $b=-2 \rightarrow a+b=\frac{-3}{2}$

b. Nguyên hàm : tích phân không có cận, do đó ta phải cho nó giá trị của cận tùy ý

Ví dụ 1: Tìm a>0 sao cho : $I=\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx=4$ rồi điền vào chỗ trống

Thông thường họ sẽ cho a nguyên vì là họ chấm bằng máy nên để số đẹp thì máy dễ chấm hơn là số xấu.

Ta thay lần lượt a=1, a=2 .... Vào xem

$$\int_0^1 Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

0.7025574586

$$\int_0^2 Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

4

Vậy ta được a =2

Để đỡ phải edit nhiều lần thì các em sửa thành:

Đầu tiên gán 1 vào Y bằng cách:

1 SHIFT RCL S↔D

Sau đó sửa tích phân thành:

Math▼▲

$$\int_0^Y Xe^{\frac{X}{2}}dX$$

0

Rồi bấm "=" xem KQ là bao nhiêu, sau đó các em lại gán 2 rồi 3... cho đến khi đúng kết quả như yêu cầu:

[2] [SHIFT] [RCL] [S⇔D] [▲] [=]

2→Y Math ▲ 2

$$\int_0^Y Xe^{\frac{X}{2}}dX$$ Math ▲ 4

Như vậy đỡ phải đẩy con trỏ nhiều lần để sửa lại cận của tích phân.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = xe^{2x}$

A. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ B. $2e^{2x}(x-2)+C$ C. $2e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Ở đây ta có 2 cách tính 1 là sử dụng đạo hàm kết quả (đáp án) rồi so sánh với đề bài, cách 2 là tính xuôi

Rõ ràng ở đây, cách 1 là đơn giản nhất vì máy tính đã có sẵn tính năng tính đạo hàm tại 1 điểm xác định cho các em.

Cách 1: Các em xét đạo hàm tại x=1 của 4 đáp án xem có biểu thức nào bằng: $y(1) = 1.e^2$ không?

[SHIFT] [∫□] [▭] [1] [▼] [2] [▶] [SHIFT] [ln] [2] [ALPHA] [)] [▶] [(] [ALPHA] [)] [−] [0] [•] [5] [)] [▶] [1] [▶] [−] [SHIFT] [ln] [2] [=] [°'"]

Math ▲

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2X}(X-0.5)\right)\Big|_{x=1}-e^2$$

0°0'0"

Thì thấy đáp án A đúng

Cách 2: Ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

Các em xét tích phân từ $\frac{1}{2}$ tới 2 để có 1 cái F(...) = 0

Các em xét đáp án A trước nhé:

Math ▲

$$\int_{0.5}^2 Xe^{2X}dX-\frac{1}{2}e^4\left(2-\frac{1}{2}\right)$$

0

Vậy các em chọn A nhé.

Tổng kết: Vậy là các em sẽ biến yêu cầu tổng quát của bài toán thành 1 bài tính thông thường bằng cách tự thay số vào cho phù hợp.

V. Số phức

1.Tính toán cơ bản

Để tính được số phức các em phải vào hệ CMPLX bằng cách:

MODE 2

Gọi thành phần ảo bằng cách bấm:

SHIFT ENG $\to$ $\mathbf{i}$

Ví dụ 1: Tính $(2+i)z+1+3i=\dfrac{1+2i}{1+i}$

▤ 1 + 2 SHIFT ENG ▼ 1 + SHIFT ENG ▶ − 1 − 3 SHIFT ENG) ÷ (2 + SHIFT ENG) =

$\left(\dfrac{1+2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}-1-3\mathbf{i}\right)\div(2+$ ▸

$-\dfrac{3}{10}-\dfrac{11}{10}\mathbf{i}$

Để tìm số phức liên hợp của z ta dùng hàm Conjg

SHIFT 2 2 1 + SHIFT ENG) =

Conjg(1+$\mathbf{i}$)

1−$\mathbf{i}$

Tương tự tính Argument (góc) của z

SHIFT 2 1 1 + SHIFT ENG) =

arg(1+$\mathbf{i}$)

45

Tính độ dài ta dùng Abs:

SHIFT hyp 1 + SHIFT ENG =

$|1+\mathbf{i}|$

$\sqrt{2}$

Ví dụ 2: $z=(2+i)(1-i)+1+3i$ các em có thể tính z bằng máy rồi dùng Abs hoặc Abs cả biểu thức đó luôn được:

$|(2+\mathbf{i})(1-\mathbf{i})+1+3$ ▸

$2\sqrt{5}$

Ví dụ 3: Tìm tập hợp z thỏa mãn đẳng thức $|z+2+i|=|\bar{z}-3i|$

A. $y=x-1$ B. $y=x+1$ C. $y=-x+1$ D. $y=-x-1$

Anh giải thích 1 chút ví dụ $z = a + bi$ thì ý của họ là mối quan hệ a,b là biểu thức nào trong 4 đáp án ở trên đó.
Thì ở đây mình sẽ lần lượt đi tính 4 đáp án
Đáp án A. $y = x - 1$ tức là : $b = a - 1 \Rightarrow$ Chọn $b = 100, a = 101 \to z = 101 + 100i$
Sau đó nhập :

[−] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [SHIFT] [ENG]

CMPLX Math ▲
|X+2+i|-|Conjg(▸ ◂|Conjg(X)-3i|

Sau đó tính bằng cách bấm CALC

CMPLX Math ▲
X?

0

Các em nhập là

[CALC] [1] [0] [1] [+] [1] [0] [0] [SHIFT] [ENG] [=]

Được kết quả:

CMPLX Math ▲
|X+2+i|-|Conjg(▸

0

Vậy là đáp án A thỏa mãn yêu cầu , các em thử luôn các đáp án khác để luyện

2.Tìm căn của số phức, module

Ví dụ 1: $\sqrt{-33+56i}$

A. $4+7i$ **B.** $-4-7i$ **C.** $-4+7i$; $-4-7i$ **D.** $4+7i$; $-4-7i$

Cách 1 : Các em thử đáp án : Tính mẹo

M CMPLX Math ▲
(4+7i)²

-33+56i

M CMPLX Math ▲
(-4-7i)²

-33+56i

Cách 2: Tính không dựa vào đáp án
Các em về COMP tính toán thông thường:
Chúng ta sẽ chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác để tiến hành khai căn

[SHIFT] [+] [−] [3] [3] [SHIFT] [)] [5] [6] [)] [=]

M Math ▲
Pol(-33,56)

r=65,θ=2.103300▸

Khi đó các giá trị góc và bán kính này được lưu ở X,Y

M Math ▲
X

65

M Math ▲
Y

2.103300425

Sau khi chuyển được sang lượng giác rồi thì các em nhớ tới công khai căn dạng lượng giác là

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\to\sqrt{z}=\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$

Do đó mình lại chuyển từ lượng giác sang đại số bằng cách bấm

SHIFT − √■ ALPHA) ▶ SHIFT) ALPHA S⇔D ÷ 2) =

Rec(√X, Y÷2)

X=4, Y=7

Cách 3: Theo SGK :

$z=33-56i=(a+bi)^2\to\begin{cases}a^2-b^2=33\\2ab=-56\end{cases}\to a^2-\left(\frac{-28}{a}\right)^2=33$

$X^2-\left(\frac{28}{X}\right)^2-33$

$X^2-\left(\frac{-28}{X}\right)^2-33$
X= 7
L−R= 0

$\frac{28}{X})^2-33)\div(X-7)$

$(X^2-\left(\frac{-28}{X}\right)^2-33)\div$
X= −7
L−R= 0

Vậy đáp án là D.

Ví dụ 2. Tìm module của z biết $z+(1+i)\bar{Z}=5+2i$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{10}$

Các em nhập vào máy tính như sau:

ALPHA) + (1 + SHIFT ENG) SHIFT 2 2 ALPHA))) − (5 + 2 SHIFT ENG)

X+(1+i)Conjg(X)▶ ◀njg(X)−(5+2i)

Sau đó các em nhập $X=1000+100i$

CALC 1 0 0 0 + 1 0 0 SHIFT ENG =

X+(1+i)Conjg(X)▶

2095+998i

Ở đây các em sẽ có:

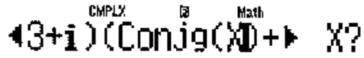
$\begin{cases}2095=2.1000+100-5=2a+b-5\\998=1000-2=a-2\end{cases}$ Mặt khác ta đang muốn phương trình nó bằng 0 thay vì kết quả vừa rồi do đó $\to\begin{cases}2a+b-5=0\\a-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}\to|z|=\sqrt{5}$

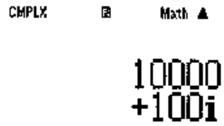
Lưu ý: các em phải lấy số đầu gần nhất tức là: $2198=2a+2b-2;\quad 2795=3a-2b-5$

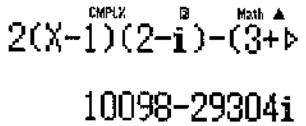
Ví dụ 3: Tính module của z^9 biết: $\frac{(z-1)(2-i)}{z+2i}=\frac{3+i}{2}$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** $16\sqrt{2}$

Các em quy đồng lên và nhập vào máy tính: $2(z-1)(2-i)=(3+i)\left(\bar{z}+2i\right)$ CALC $z=10000+100i$







Ta suy ra được hệ : $\begin{cases} a+b-2=0 \\ 3a-7b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \to z=1+i \to |z|=\sqrt{2} \to \left|z^2\right|=16\sqrt{2}$

IV. Ứng dụng trong Oxyz , Oxy

a. Tính khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng:

Với Oxy $d_{A\to(\Delta)}=\dfrac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, với Oxyz : $d_{A\to(P)}=\dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

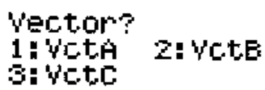
b. Tính góc tạo bởi 2 đường thẳng (2 vecto chỉ phương) , 2 mặt phẳng (2 vecto pháp tuyến)

$\cos\alpha=\dfrac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ với Oxy thì các em bỏ z đi là được

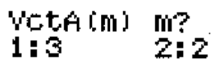
c. Tính tích có hướng, vô hướng của 2 vecto,tích hỗn tạp- Ứng dụng tính V bằng tích hỗn tạp

Các em vào tính năng vecto

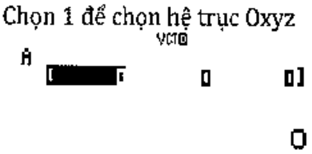
MODE 8



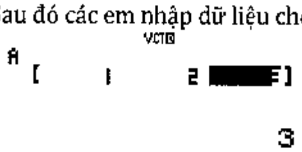
Sau đó nhẽ nhập dữ liệu cho từng vecto: Chọn 1 để nhập cho VectoA



Chọn 1 để chọn hệ trục Oxyz



Sau đó các em nhập dữ liệu cho nó



Để nhập tiếp dữ liệu cho vectoB các em bấm

SHIFT 5 2 2 1

VCT
B
[redacted] 0 0]

0

Lại nhập dữ liệu cho nó:

3 = 2 = 1 =

VCT
B
[3 2 [redacted]]

1

Tính tích có hướng của vecto A và B ta bấm như sau:

AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 =

VCT
Ans
[redacted] 8 -4]

-4

Ta được vecto mới vuông góc với 2 vecto A và B là tích có hướng của chúng

Để tính tích vô hướng ta bấm như sau:

AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =

VCT
VctA·VctB

10

Để tính tích hỗn tạp của 3 vecto thì ta sẽ nhập thêm dữ liệu cho vectoC

AC SHIFT 5 2 3 1 4 = 5 = 6 =

VCT
C
[4 5 [redacted]]

6

AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 SHIFT 5 7 SHIFT 5 5 =

VCT
VctAVctB·VctC

0

Để tính thể tích của tứ diện tạo bởi 4 điểm (=> 3 vecto) thì các em dùng công thức:

$V_{A.BCD} = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$

Ví dụ áp dụng:

Cho bốn điểm $A(1;0;1), B(2;2;2), C(5;2;1), D(4;3;-2)$

Tính thể tích tứ diện ABCD ?

Đây là Skill Casio ver2.0 của sách Luyện Thi Trắc Nghiệm Toán 2017 ver1.0 bản Skill Casio sẽ tiếp tục được Update ở các phiên bản sau.

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ VÀ CÂU LIÊN QUAN

PHẦN 1: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ

1. 1 HÀM SỐ BẬC NHẤT/BẬC NHẤT

ĐỀ THI NĂM TRƯỚC

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. Đề dự đoán 2017: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

2. *ĐHKD – 2011:* $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

3. *ĐHKA – 2011:* $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{x}{x+1}$

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$

ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- Đạo hàm: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$

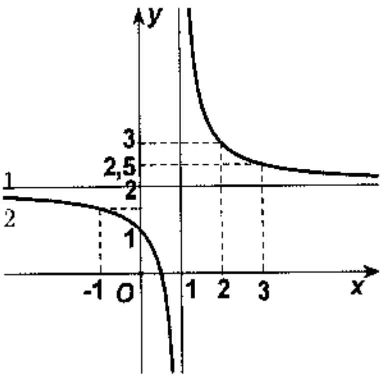
- Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	||	$-$
y	$2 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 2$



• Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

• Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	$3/2$	1	||	3	$5/2$

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x}{x+1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ $\Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

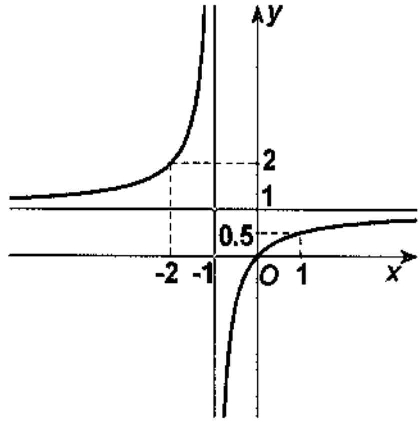
• Giao điểm với trục hoành: cho $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

• Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1
y	1,5	2	||	0	0,5

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:



Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

• Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 2$ $\Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ $\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

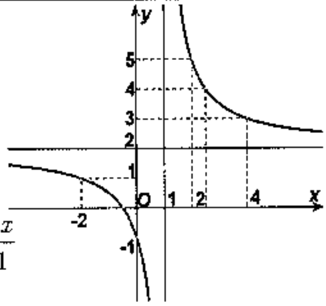
• Giao điểm với trục hoành: cho $y = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$

• Bảng giá trị:

x	-2	0	1	2	4
y	1	-1	$\|$	5	3

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:



Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$

Hàm số: $y = \dfrac{3-2x}{x-1} = \dfrac{-2x+3}{x-1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

• Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -2$ $\Rightarrow y = -2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ $\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	-2 ↘	$-\infty$	$\|$	$+\infty$ ↘	-2

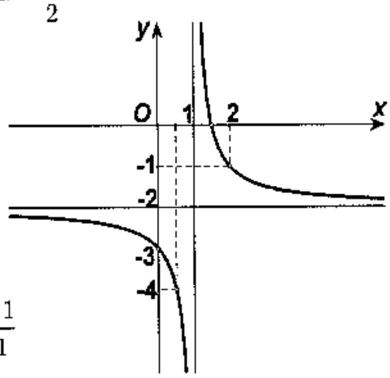
• Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$

• Bảng giá trị:

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2
y	-3	-4	$\|$	0	-1

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:



Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$

⊳ TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

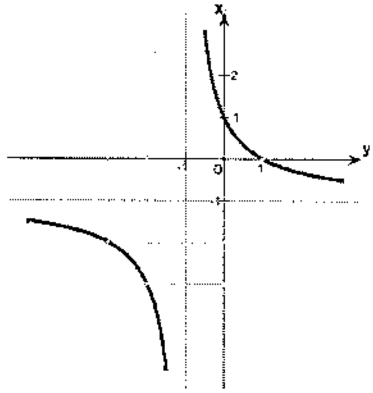
⊳ Chiều biến thiên $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$, $y' < 0$ với mọi $x \neq -1$, hs nghịch biến trên các khoảng: $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

⊳ Tiệm cận : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-x+1}{x+1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{-x+1}{x+1} = -\infty$ Nên x = - 1 là T C Đ

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -1$ Nên y = -1 là T C N

⊳ Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1



⊳ Đồ thị: đồ thị cắt Ox tại (1;0), cắt Oy tại (0;1)

1.2 HÀM SỐ BẬC BA
ĐỀ THI ĐẠI HỌC NĂM TRƯỚC

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. *THPT Quốc gia 2015*: $y = x^3 - 3x$

2. *(ĐHKB – 2012)* $y = x^3 - 3x^2 + 3$

3. *(ĐHKD – 2012)*: $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$

4. *(ĐHKA – 2010)*: $y = x^3 - 2x^2 + 1$

5. *(ĐHKB – 2007)*: $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

6. *(TK 2010)*: $y = -x^3 - x$

7. *(TK 2009)*: $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

8. *(ĐHKA – 2006)*: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

9. (*ĐHKD – 2005*): $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$

10. (*ĐHKB – 2008*): $y=4x^3-6x^2+1$

11. (*ĐHKB – 2004*): $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2+3x$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=(1-x)^2(4-x)$.

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=2x^3+3x^2-1$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=-x^3+3x^2-1$

Bài 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=-x^3+3x+1$

ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2+3x$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}$
- Đạo hàm: $y'=3x^2-6x+3$
- Cho $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x=1$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	**0**	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	**1**	$\nearrow$	$+\infty$

• Hàm số đồng biến trên cả tập xác định; hàm số không đạt cực trị.

• $y'' = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$. Điểm uốn là $I(1;1)$

• Giao điểm với trục hoành:

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

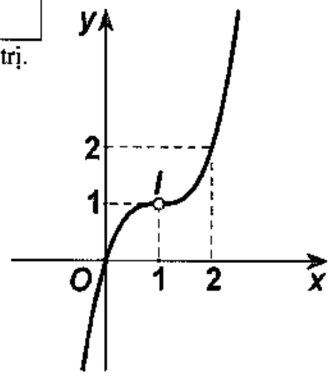
Giao điểm với trục tung:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

• Bảng giá trị:

x	0	1	2
y	0	1	2

• Đồ thị hàm số (như hình vẽ bên đây):



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = (1-x)^2(4-x)$.

$y = (1-x)^2(4-x) = (1-2x+x^2)(4-x) = 4 - x - 8x + 2x^2 + 4x^2 - x^3 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

• Tập xác định: $D = R$

• Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 12x - 9$

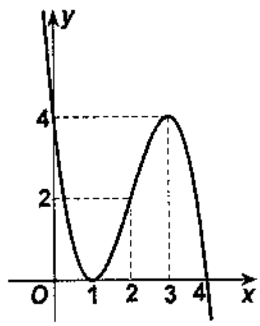
• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(3;+\infty)$



• Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 4$ tại $x_{CĐ} = 3$; đạt cực tiểu $y_{CT} = 0$ tại $x_{CT} = 1$

• $y'' = -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$. Điểm uốn là $I(2;2)$

• Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: $x = 0 \Rightarrow y = 4$

• Bảng giá trị:

x	0	1	2	3	4
y	4	0	2	4	0

• Đồ thị hàm số: nhận điểm I làm trục đối xứng như hình vẽ bên đây

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 6x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoac $x = -1$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1), (0;+\infty)$, nghịc biến trên khoảng $(-1;0)$

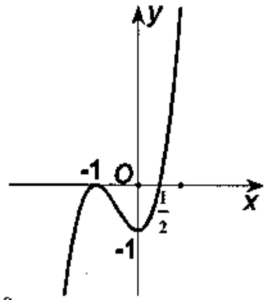
Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 0$ tại $x_{CD} = -1$, đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = 0$.

• $y'' = 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$. Điểm uốn: $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

• Giao điểm với trục hoành:

cho $y=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoac $x=\dfrac{1}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x=0 \Rightarrow y=-1$



• Bảng giá trị:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=-x^2+4x-3$

• Cho $y'=0 \Leftrightarrow -x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x=1\,;\, x=3$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

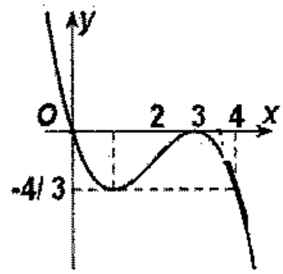
• Hàm số đồng biến trên khoảng (1;3), nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(3;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ}=0$ tại $x_{CĐ}=3$; đạt cực tiểu $y_{CT}=-\dfrac{4}{3}$ tại $x_{CT}=1$

• $y''=-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}$. Điểm uốn là $I\ 2;-\frac{2}{3}$

• Giao điểm với trục hoành: cho $y=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$



• Bảng giá trị:

x	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoac $x = 2$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên khoảng (0;2); nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$

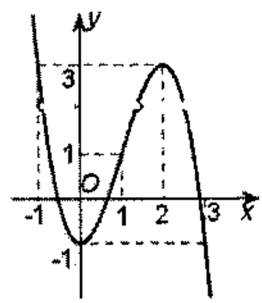
Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 3$ tại $x_{CĐ} = 2$

đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = 0$

• Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$

• Điểm uốn: $y'' = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Điểm uốn là $I(1;1)$



• Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	3	-1	1	3	-1

• Đồ thị hàm số như hình vẽ:

Bài 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x + 1$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 3$
- Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 3$ tại tại $x_{CĐ} = 1$

đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = -1$

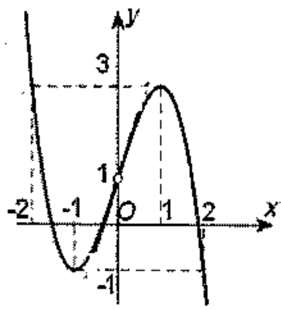
- $y'' = -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Điểm uốn là $I(0;1)$

- Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$
- Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	3	-1	1	3	-1

- Đồ thị hàm số như hình vẽ:



1.3 HÀM SỐ BẬC BỐN

ĐỀ THI NĂM TRƯỚC

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. *THPT Quốc gia 2016*: $y=-x^4+2x^2$

2. *ĐHKB – 2011*: $y=x^4-4x^2+1$

3. *ĐHKD – 2010*: $y=-x^4-x^2+6$

4. *TK – 2011*: $y=-\frac{1}{4}x^4+x^2-2$

5. *TK – 2010*: $y=\frac{x^4}{2}+x^2-\frac{3}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=-x^4+4x^2-3$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^2(4-x^2)$

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4+2x^2-3$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-x^2-4$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=(x^2-2)^2-1$

Bài 6. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4-4x^2+3$.

Bài 7. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4-2x^2-1$

Bài 8. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=2x^4-4x^2$

ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=-x^4+4x^2-3$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=-4x^3+8x$

$$y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+8x=0 \Leftrightarrow 4x(-x^2+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=0 \\ -x^2+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2})$,

nghịch biến trên các khoảng $(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ}=1$ tại $x_{CĐ}=\pm\sqrt{2}$, đạt cực tiểu $y_{CT}=-3$ tại $x_{CT}=0$.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

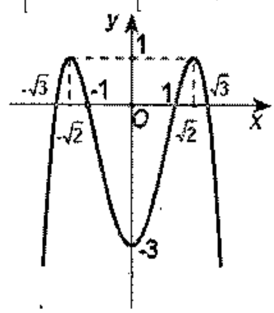
• Giao điểm với trục hoành: cho $y=0\Leftrightarrow -x^4+4x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x=0\Rightarrow y=-3$

• Bảng giá trị:

x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
y	0	1	-3	1	0

• Đồ thị hàm số:



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^2(4-x^2)$

$y=x^2(4-x^2)=-x^4+4x^2$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=-4x^3+8x$

•Cho $y'=0\Leftrightarrow -4x^3+8x=0\Leftrightarrow 4x(-x^2+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=0\\-x^2+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2})$, nghịch biên trên các khoảng $(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 4$ tại $x_{CD} = \pm\sqrt{2}$,

đạt cực tiểu $y_{CT} = 0$ tại $x_{CT} = 0$.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

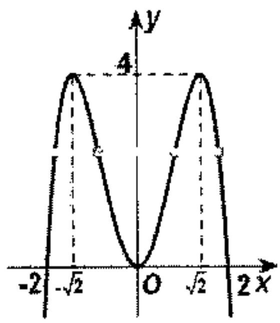
• Giao điểm với trục hoành:

cho $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

• Bảng giá trị:

x	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
y	0	0	0	4	0



• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 + 2x^2 - 3$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 4x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Hàm số đạt cực tiểu $y_{CT} = -3$ tại $x_{CT} = 0$.

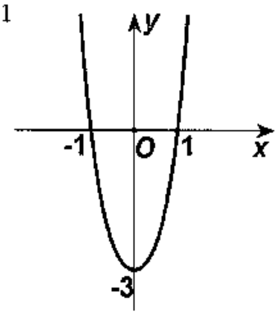
• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

• Giao điểm với trục hoành:

Cho $y=0 \Leftrightarrow x^4+3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$



Giao điểm với trục tung: cho $x=0 \Rightarrow y=-3$

• Bảng giá trị:

x	-1	0	1
y	0	-3	0

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^4}{2}-x^2-4$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=2x^3-2x$

• Cho $y'=0 \Leftrightarrow 2x^3-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0),(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(0;1)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ}=-4$ tại $x_{CD}=0$.

Hàm số đạt cực tiểu $y_{CT}=-\dfrac{9}{2}$ tại $x_{CT}=\pm 1$.

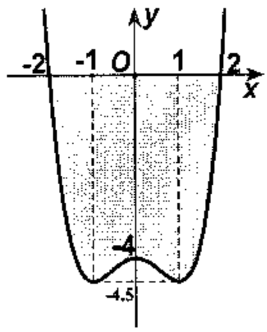
• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Giao điểm với trục hoành:

Cho $y=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^4-x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\x^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$



Giao điểm với trục tung: cho $x=0\Rightarrow y=-4$

• Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	$-4{,}5$	-4	$-4{,}5$	0

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=(x^2-2)^2-1$

$y=(x^2-2)^2-1=x^4-4x^2+4-1=x^4-4x^2+3$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=4x^3-8x$

• Cho $y'=0\Leftrightarrow4x^3-8x=0\Leftrightarrow4x(x^2-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};+\infty)$,

nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2})$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ}=3$ tại $x_{CĐ}=0$.

Hàm số đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = \pm\sqrt{2}$.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\sqrt{2}$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$\sqrt{2}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td><td>3</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

• Giao điểm với trục hoành:

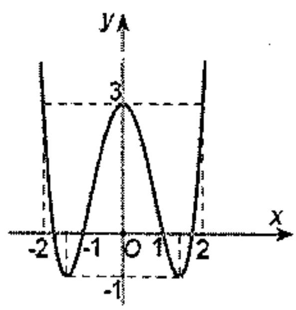
Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$

• Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	3	-1	3	-1	3

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây



PHẦN 2: CÂU LIÊN QUAN HÀM SỐ

Phần này chiếm 1 điểm trong đề thi và khó hơn chút ít so với câu thứ nhất là Khảo sát và vẽ đồ thị. Năm 2015 thi vào Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trong 1 khoảng. Năm 2016 thi vào Cực đại cực tiểu. Nhìn chung năm nay khả năng cao sẽ rơi vào Tiếp tuyến hoặc Tương giao. Tuy nhiên các em vẫn phải học tất bởi nó dễ mà. Tập trung cày chỉ 1 tháng là FULL SKILL.

2.1 Bài toán Tiếp tuyến

Dạng 1: *Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm* $M(x_0, y_0) \in (C): y = f(x)$

* Tính $y' = f'(x)$; tính $k = f'(x_0)$ (hệ số góc của tiếp tuyến)

* Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ với } y_0 = f(x_0)$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):

a) Tại điểm A (-1; 7).
b) Tại điểm có hoành độ x = 2.
c) Tại điểm có tung độ y =5.

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(-1) = 0$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(-1; 7) là: $y - 7 = 0$ hay y = 7.

b) Từ $x = 2 \Rightarrow y = 7$.

y'(2) = 9. Do đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x = 2 là:

$y - 7 = 9(x-2) \Leftrightarrow y - 7 = 9x - 18 \Leftrightarrow y = 9x - 11$

c) Ta có: $y = 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

+) Phương trình tiếp tuyến tại của (C) tại điểm (0; 5).

Ta có y'(0) = -3.

Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y - 5 = -3(x - 0)$ hay y = -3x +5.

+) Phương trình tiếp tuyến tại của (C) tại điểm $(-\sqrt{3}; 5)$.

$$y'(-\sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3})^2 - 3 = 6$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y - 5 = 6(x + \sqrt{3})$ hay $y = 6x + 6\sqrt{3} + 5$.

+) Tương tự phương trình tiếp tuyến của (C) tại $(-\sqrt{3};5)$ là: $y = 6x - 6\sqrt{3} + 5$.

Ví dụ 2: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm x_0 thỏa mãn $y''(x_0) = 0$.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$. Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm thì tiếp tuyến có phương trình:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad (1)$$

a) Khi $M = (C) \cap Ox$ thì $y_0 = 0$ và x_0 là nghiệm phương trình:

$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $y'(2) = 6$, thay các giá trị đã biết vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến: $y = 6(x-2)$

b) Khi $M = (C) \cap Oy$ thì $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = y(0) = -4$ và $y'(x_0) = y'(0) = 2$, thay các giá trị đã

biết vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến: $y = 2x - 4$.

c) Khi x_0 là nghiệm phương trình $y'' = 0$. Ta có: $y'' = 6x - 4$.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} = x_0 \Rightarrow y_0 = y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{88}{27}\ ;\ y'(x_0) = y'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Thay các giá trị đã biết vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{2}{3}x - \frac{100}{27}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C)

a) Viết phương trình tiếp tuyến d với (C) tại điểm có hoành độ x=2.

b)Tiếp tuyến d cắt lại đồ thị (C) tại điểm N, tìm tọa độ của điểm N.

a) Tiếp tuyến d tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$

Ta có $y'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = y'(2) = 9$

Phương trình tiếp tuyến d tại điểm M của đồ thị (C) là
$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 9(x-2) + 3 \Rightarrow y = 9x - 15$

Vậy phương trình tiếp tuyến d tại điểm M của đồ thị (C) là $y = 9x - 15$

b) Giả sử tiếp tuyến d cắt (C) tại N

Xét phương trình $x^3 - 3x + 1 = 9x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Vậy $N(-4;-51)$ là điểm cần tìm

<u>Ví dụ 4:</u> Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1 \quad (C)$ và điểm $A(x_0, y_0) \in$ (C), tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A cắt (C) tại điểm B khác điểm A. tìm hoành độ điểm B theo x_0

Vì điểm $A(x_0, y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 1$, $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1$$
$$\Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) - 2x_0^3 + 1 \quad (d)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$x^3 - 3x + 1 = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) - 2x_0^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x - x_0)^2 = 0 \\ x + 2x_0 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = -2x_0 \end{array}\right. (x_0 \neq 0)$$

Vậy điểm B có hoành độ $x_B = -2x_0$

<u>Ví dụ 5:</u> Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''(x_0) = 0$ và chứng minh d là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y'' = 2x - 4$

$$y''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow M(2;\frac{2}{3})$$

Khi đó tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k_0 = y'(x_0) = y'(2) = -1$

Vậy tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$ có phương trình $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

suy ra $y-\frac{2}{3}=-1(x-2)$ hay $y=-x+\frac{8}{3}$

Tiếp tuyến d có hệ số góc $k_0=-1$

Mặt khác tiếp tuyến của đồ thi (C) tại điểm bấy kỳ trên (C) có hệ số góc

$k=y'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geq -1=k_0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$ nên tọa độ tiếp điểm trùng với $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$

Vậy tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$ có hệ số góc nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=\frac{x+2}{x-1}$ tại các giao điểm của (C) với đường thẳng (d): $y=3x-2$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$\frac{x+2}{x-1}=3x-2\Leftrightarrow x+2=(3x-2)(x-1)$ (x = 1 không phải là nghiệm phương trình)

$\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0\ (y=-2)\vee x=2\ (y=4)$

Vậy có hai giao điểm là: $M_1(0; -2)$ và $M_2(2; 4)$

+ Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$.

+ Tại tiếp điểm $M_1(0; -2)$ thì y'(0) = -3 nên tiếp tuyến có phương trình: $y=-3x-2$

+ Tại tiếp điểm $M_2(2; 4)$ thì y'(2) = -3 nên tiếp tuyến có phương trình: $y=-3x+10$

Tóm lại có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y=-3x-2$ và $y=-3x+10$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ (C_m).Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại M song song với đường thẳng d: 5x-y=0

Ta có $y'=x^2-mx$

Đường thẳng d: 5x-y=0 có hệ số góc bằng 5, nên để tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng d trước hết ta cần có $y'(-1)=5\Leftrightarrow m+1=5\Leftrightarrow m=4$

Khi $m=4$ ta có hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{1}{3}$ ta có $x_0=-1$ thì $y_0=-2$

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Rightarrow y=5(x+1)-2 \Leftrightarrow y=5x+3$

Rõ ràng tiếp tuyến song song với đường thẳng d

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ (1).

Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{3}{2}$.

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=m-2 \Rightarrow$ M(1 ; m – 2)

- Tiếp tuyến tại M là d: $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+m-2$

$\Rightarrow$ d: y = -3x + m + 2.

- d cắt trục Ox tại A: $0=-3x_A+m+2 \Leftrightarrow x_A=\frac{m+2}{3} \Rightarrow \quad A\left(\frac{m+2}{3}\,;0\right)$

- d cắt trục Oy tại B: $y_B=m+2 \Rightarrow \quad B(0\,;m+2)$

- $S_{OAB}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{3}{2} \Leftrightarrow |OA||OB|=3 \Leftrightarrow \left|\frac{m+2}{3}\right||m+2|=3 \Leftrightarrow (m+2)^2=9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=3 \\ m+2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$$

Vậy m = 1 và m = - 5

Dạng 2: Viết tiếp tuyến của đồ thi hàm số $y=f(x)$ (C) khi biết trước hệ số góc

+ Gọi $M(x_0,y_0)$ là tiếp điểm, giải phương trình $f'(x_0)=k \Rightarrow x=x_0$, $y_0=f(x_0)$

+ Đến đây trở về **dạng 1**,ta dễ dàng lập được tiếp tuyến của đồ thị: $y=k(x-x_0)+y_0$

➢ **<u>Các dạng biểu diễn hệ số góc k:</u>**

*) Cho trực tiếp: $k=5; k=\pm 1; k=\pm\sqrt{3}; k=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$...

*) Tiếp tuyến tạo với chiều dương của trục Ox một góc α, với $\alpha \in \left\{15^0;30^0;45^0;\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3};...\right\}$. Khi đó hệ số góc k = $\tan\alpha$.

*) Tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): y = ax + b. Khi đó hệ số góc k = a.

*) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): y = ax + b$\Rightarrow ka=-1 \Leftrightarrow k=\frac{-1}{a}$.

*) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng (d): y = ax + b một góc α. Khi đó, $\left|\frac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến k = -3.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Theo giả thiết, hệ số góc của tiếp tuyến k = - 3 nên: $3x_0^2-6x_0=-3 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=1$

Vì $x_0=1 \Rightarrow y_0=-2 \Rightarrow M(1;-2)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-3(x-1)-2 \Leftrightarrow y=-3x+1$

Ví dụ 10: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ (C). Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = 9x + 6.

Ta có: $y'=3x^2-6x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Theo giả thiết, tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = 9x + +6 $\Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc k = 9 $\Rightarrow$

$$3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow x_0^2-2x_0-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow M(-1;-3) \\ x_0=3 \Rightarrow M(3;1) \end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(-1;-3) là: $y=9(x+1)-3 \Leftrightarrow y=9x+6$ **(loại)**

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(3;1) là: $y=9(x-3)+1 \Leftrightarrow y=9x-26$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y=\frac{-1}{9}x$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Do tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến k = 9.

Do đó $y' = k \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

+) Với x = 2 $\Rightarrow y = 4$. Pttt tại điểm có hoành độ x = 2 là:

$$y = 9(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$$

+) Với $x = -2 \Rightarrow y = 0$. Pttt tại điểm có hoành độ x = - 2 là:

$$y = 9(x+2) + 0 \Leftrightarrow y = 9x + 18.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x$ là:

y =9x - 14 và y = 9x + 18.

Ví dụ 12: Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): $x + 5y - 2010 = 0$.

(d) có phương trình: $y = -\frac{1}{5}x + 402$ nên (d) có hệ số góc là $-\frac{1}{5}$.

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k thì $-\frac{1}{5}.k = -1 \Leftrightarrow k = 5 \ (do\ \Delta \perp (d))$.

Ta có: $y' = x^3 + 4x$ nên hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình: $x^3 + 4x = 5$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

Vậy tiếp điểm M có tọa độ là $M\left(1; \frac{9}{4}\right)$

Tiếp tuyến có phương trình: $y - \frac{9}{4} = 5(x-1) \Leftrightarrow y = 5x - \frac{11}{4}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y = 5x - \frac{11}{4}$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho tam giác OAB vuông cân tại O, ở đây O là góc tọa độ.

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là: $k = \pm 1$

Khi đó gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) ta có $y'(x_0) = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x$ (trường hợp này loại vì tiếp tuyến đi qua góc tọa độ, nên không tạo thành tam giác OAB)

Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = -4$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x - 2$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -x - 2$

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).

Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại các điểm A và B thỏa mãn OA = 4OB.

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.

Hệ số góc của d là $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \ \left(y_0 = \dfrac{3}{2}\right) \\ x_0 = 3 \ \left(y_0 = \dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$

Dạng 3: Tiếp tuyến đi qua điểm

Cho đồ thị (C): y = f(x). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(\alpha; \beta)$.

Cách giải

+ Tiếp tuyến có phương trình dạng: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, (với x_0 là hoành độ tiếp điểm).

+ Tiếp tuyến qua $A(\alpha;\beta)$ nên $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$ (*)

+ Giải phương trình (*) để tìm x_0 rồi suy ra phương trình tiếp tuyến.

Ví dụ 15: Cho đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 1$, viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-2; -1).

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$

Gọi $M\left(x_0; x_0^3 - 3x_0 + 1\right)$ là tiếp điểm. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là Δ : $y - \left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$

Δ qua A(-2;-1) nên ta có: $-1 - \left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) = (3x_0^2 - 3)(-2 - x_0) \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 + 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $\Delta : y = -1$; $\Delta : y = 9x + 17$

Dạng 4. Một số bài toán tiếp tuyến nâng cao.

Ví dụ 16: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) của hàm số: $y = x^3 - 3x + 2$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $4\sqrt{2}$.

Gọi $A(a; a^3 - 3a + 2)$, $B(b; b^3 - 3b + 2)$, $a \neq b$ là hai điểm phân biệt trên (C).

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$ nên các tiếp tuyến với (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là:
$y'(a) = 3a^2 - 3$ và $y'(b) = 3b^2 - 3$.

Tiếp tuyến tại A và B song song với nhau khi:
$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 3 = 3b^2 - 3 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow a = -b$ (vì $a \neq b \Leftrightarrow a - b \neq 0$)

$$AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 32 \Leftrightarrow (a - b)^2 + \left[(a^3 - 3a + 2) - (b^3 - 3b + 2)\right]^2 = 32$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + \left[(a^3 - b^3) - 3(a - b)\right]^2 = 32 \Leftrightarrow (a - b)^2 + \left[(a - b)(a^2 + ab + b^2) - 3(a - b)\right]^2 = 32$$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - b)^2\left[(a^2 + ab + b^2) - 3\right]^2 = 32$, thay a = -b ta được:

$$4b^2+4b^2\left(b^2-3\right)^2=32 \Leftrightarrow b^2+b^2\left(b^2-3\right)^2-8=0 \Leftrightarrow b^6-6b^4+10b^2-8=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-4)(b^4-2b^2+2)=0 \Leftrightarrow b^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow a=-2 \\ b=-2 \Rightarrow a=2 \end{array}\right.$$

- Với $a=-2$ và $b=2 \Rightarrow A(-2;0)$, $B(2;4)$
- Với $a=2$ và $b=-2 \Rightarrow A(2;4)$, $B(-2;0)$

Tóm lại cặp điểm A, B cần tìm có tọa độ là: $(-2;\ 0)$ và $(2;\ 4)$

<u>Ví dụ 17:</u> Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) của hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $2\sqrt{10}$.

Hàm số được viết lại: $y=2-\dfrac{3}{x+1}$

Gọi $A\left(a;2-\dfrac{3}{a+1}\right)$, $B\left(b;2-\dfrac{3}{b+1}\right)$ là cặp điểm trên đồ thị (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với điều kiện: $a\neq b, a\neq -1, b\neq -1$.

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ nên hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B là:

$$y'(a)=\frac{3}{(a+1)^2} \text{ và } y'(b)=\frac{3}{(b+1)^2}$$

Tiếp tuyến tại A và B song song khi: $y'(a)=y'(b) \Leftrightarrow \dfrac{3}{(a+1)^2}=\dfrac{3}{(b+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1=b+1 \\ a+1=-b-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a=-b-2 \quad (1) \quad (\text{do } a\neq b)$$

$$AB=2\sqrt{10} \Leftrightarrow AB^2=40 \Leftrightarrow (a-b)^2+\left(\frac{3}{b+1}-\frac{3}{a+1}\right)^2=40$$

$$\Leftrightarrow (-2b-2)^2+\left(\frac{3}{b+1}-\frac{3}{-b-1}\right)^2=40 \Leftrightarrow 4(b+1)^2+\left(\frac{6}{b+1}\right)^2=40 \text{ (do thay a ở (1))}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^4-10(b+1)^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (b+1)^2=1 \\ (b+1)^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b+1=1 \vee b+1=-1 \\ b+1=3 \vee b+1=-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \Rightarrow a=-2 \\ b=-2 \Rightarrow a=0 \\ b=2 \Rightarrow a=-4 \\ b=-4 \Rightarrow a=2 \end{array}\right.$$

Cặp điểm A và B cần tìm có tọa độ là: $(-2;5)$ *và* $(0;-1)$; $(2;1)$ *và* $(-4;3)$

Ví dụ 18: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ có đồ (C_m); (m là tham số). Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng y = 1 tại 3 điểm phân biệt C(0, 1), D, E sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại D và E vuông góc với nhau.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng y = 1 là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow \quad x(x^2 + 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3x+m=0 \end{array}\right. \quad (2)$$

* (C_m) cắt đường thẳng y = 1 tại C(0, 1), D, E phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm x_D, $x_E \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta = 9-4m > 0 \\ 0^2+3\times 0+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Lúc đó tiếp tuyến tại D, E có hệ số góc lần lượt là:

$k_D = y'(x_D) = 3x_D^2 + 6x_D + m = -(x_D + 2m);$

$k_E = y'(x_E) = 3x_E^2 + 6x_E + m = -(x_E + 2m).$

Các tiếp tuyến tại D, E vuông góc khi và chỉ khi: $k_Dk_E = -1$.

$\Leftrightarrow \quad (3x_D + 2m)(3x_E + 2m) = 9x_Dx_E + 6m(x_D + x_E) + 4m^2 = -1$

$\Leftrightarrow \quad 9m + 6m \times (-3) + 4m^2 = -1$; (vì $x_D + x_E = -3$; $x_Dx_E = m$ theo định lý Vi-ét).

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{8}\left(9 \mp \sqrt{65}\right)$

ĐS: $m = \dfrac{1}{8}\left(9-\sqrt{65}\right)$ *hay* $m = \dfrac{1}{8}\left(9 \mp \sqrt{65}\right)$

Ví dụ 19: Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$, biết rằng khoảng cách từ điểm I(-1; 2) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M\left(a;\dfrac{2a-2}{a+1}\right),\left(M\in(C)\right)$.

Ta có: $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(a)=\dfrac{4}{(a+1)^2},\left(a\neq -1\right)$

Vậy $\Delta: y-\dfrac{2a-2}{a+1}=\dfrac{4}{(a+1)^2}(x-a)\Leftrightarrow 4x-(a+1)^2y+2a^2-4a-2=0$ (*)

$$d\left(I;\Delta\right)=\frac{\left|4(-1)-(a+1)^2.2+2a^2-4a-2\right|}{\sqrt{4+(a+1)^4}}=\frac{8\left|a+1\right|}{\sqrt{4+(a+1)^4}}.$$

Ta có: $4+(a+1)^4=2^2+\left[(a+1)^2\right]^2\geq 2.2(a+1)^2\Rightarrow\sqrt{4+(a+1)^4}\geq\sqrt{2.2(a+1)^2}=2\left|a+1\right|$

$\Rightarrow d\left(I;\Delta\right)\leq\dfrac{8\left|a+1\right|}{2\left|a+1\right|}=4$. Vậy $d\left(I;\Delta\right)$ lớn nhất khi $d\left(I;\Delta\right)=4$

$\Leftrightarrow 2^2=(a+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+1=2\\a+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-3\end{array}\right.$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn $a\neq 1$

+ Với a = 1 thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến là: $4x-4y-4=0\Leftrightarrow x-y-1=0$

+ Với a = -3 thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến là: $4x-4y+28=0\Leftrightarrow x-y+7=0$

Tóm lại: Có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $x-y-1=0$; $x-y-7=0$

<u>Ví dụ 20:</u> Cho (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung tương ứng tại các điểm A, B thỏa mãn Δ OAB vuông cân tại gốc tọa độ O.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến với (C) tại M phải thỏa mãn song song với các đường thẳng y = x hoặc y = -x.

Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ nên tiếp tuyến với (C) tại M có hệ số góc là: $y'(x_0)=-\dfrac{1}{(2x_0+1)^2}<0$

Vậy tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng d: y = -x

Do đó, $-\frac{1}{(2x_0+1)^2}=-1 \Leftrightarrow (2x_0+1)^2=1$; ($x_0=-\frac{1}{2}$ không là nghiệm phương trình)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x_0+1=1\\2x_0+1=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0 \Rightarrow y_0=1\\x_0=-1 \Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp điểm là: $M_1(0;1)$, $M_2(-1;0)$.

+ Tại điểm $M_1(0; 1)$ ta có phương trình tiếp tuyến là: y = - x + 1: thỏa mãn song song với d

+ Tại điểm $M_2(-1;)$ ta có phương trình tiếp tuyến là: y = - x - 1: thỏa mãn song song với d

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $y=-x+1$; $y=-x-1$

Ví dụ 21: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$. Cho điểm $M_o(x_o;y_o)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_o là trung điểm của đoạn thẳng AB.

$M_o(x_o;y_o) \in (C) \Rightarrow y_0=1+\frac{4}{x_0-1}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M_0: $y-y_0=-\frac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)$

Giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A(2x_0-1;1)$, $B(1;2y_0-1)$.

$\Rightarrow \frac{x_A+x_B}{2}=x_0$; $\frac{y_A+y_B}{2}=y_0 \Rightarrow$ M_0 là trung điểm AB.

Ví dụ 22: Cho hàm số: $y=\frac{x+2}{x-1}$ (C) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Giả sử $M\left(a;\frac{a+2}{a-1}\right) \in (C)$.

PTTT (d) của (C) tại M: $y=y'(a).(x-a)+\frac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow y=\frac{-3}{(a-1)^2}x+\frac{a^2+4a-2}{(a-1)^2}$

Các giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A\left(1;\frac{a+5}{a-1}\right)$, $B(2a-1;1)$.

$\vec{IA}=\left(0;\frac{6}{a-1}\right) \Rightarrow IA=\frac{6}{|a-1|}$; $\vec{IB}=(2a-2;0) \Rightarrow IB=2|a-1|$

Diện tích ΔIAB: $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=6$ (đvdt) $\Rightarrow$ ĐPCM.

Ví dụ 23: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$. Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Giả sử $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0\neq 2$, $y'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại M: $y=\frac{-1}{x_0-2^{\;2}}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) với hai tiệm cận là: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B(2x_0-2;2)$

Ta thấy $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+2x_0-2}{2}=x_0=x_M$, $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2x_0-3}{x_0-2}=y_M$ suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I(2; 2) và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\frac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$

Do đó điểm M cần tìm là M(1; 1) hoặc M(3; 3)

Ví dụ 24: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

Nếu $M\left(x_0;2-\frac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình $y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$

hay $3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$$d=\frac{|3(-1-x_0)-3(x_0+1)|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow (x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Ví dụ 25: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2;4)$, $B(-4;-2)$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ($x_0\ne -1$).

PTTT (d) là $y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}\Leftrightarrow x-(x_0+1)^2y+2x_0^2+2x_0+1=0$

Ta có: $d(A,d)=d(B,d)\Leftrightarrow \left|2-4(x_0+1)^2+2x_0^2+2x_0+1\right|=\left|-4+2(x_0+1)^2+2x_0^2+2x_0+1\right|$

$$\Leftrightarrow x_0=1\vee x_0=0\vee x_0=-2$$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$; $y=x+1$; $y=x+5$

Chú ý: Bài toán này có thể giải bằng cách sau: Tiếp tuyến cách đều A, B nên có 2 khả năng: Tiếp tuyến song song (trùng) AB hoặc tiếp tuyến đi qua trung điểm của AB

Ví dụ 26: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$ (C) tìm điểm M $\in (C)$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$

Gọi $M(x_0,y_0)\in (C)\ \rightarrow\ y_0=\frac{2x_0}{x_0+1}$, $\quad y'=\frac{2}{(x+1)^2}$

Tiếp tuyến tại M có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (d)$$

Gọi $A = (d) \cap ox \Rightarrow$ tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}x + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x_0^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-x_0^2, 0)$$

Gọi $B = (d) \cap oy \Rightarrow$ tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}x + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \end{cases} \Rightarrow B(0, \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2})$$

Tam giác OAB vuông tại O ; OA = $\left|-x_0^2\right| = x_0^2$; OB = $\left|\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right| = \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$

Diện tích tam giác OAB:

$$S = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2}.\frac{2x_0^4}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^4 = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 = x_0 + 1 \\ 2x_0^2 = -x_0 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0^2 + 1x_0 + 1\,(vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \end{array}\right.$$

Vậy tìm được hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1(-\frac{1}{2};-2)$; $M_2(1,1)$

2.2 Bài toán Cực trị

Dạng 1: Tìm m để hàm số có Cực đại hoặc cực tiểu tại một điểm có hoành độ x_0 hoặc tung độ y_0.

Cách 1	**Cách 2**
Bước 1: Tìm TXĐ	**Bước 1**: Tìm TXĐ
Bước 2: Tính $f'(x)$. Xác định các *điểm tới hạn.*	**Bước 2**: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu x_i $(i=1,\ 2,...)$ là các nghiệm của nó.
Bước 3: Lập bảng biến thiên. Kết luận.	**Bước 3**: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$. Kết luận

a/ **Điều kiện để hàm số có cực trị tại x = x_0:**

$$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y' \text{ đổi dau qua } x_0 \end{cases} \boxed{\textbf{hoặc} \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)\neq 0 \end{cases}}$$

b/ **Điều kiện để hàm số có cực đại tại x_0:**

$$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y' \text{ doi dau tu } +sang-qua.x_0 \end{cases} \boxed{\textbf{hoặc} \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}}$$

c/ **Điều kiện để hàm số có cực tiểu tại x_0:**

$$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y' \text{ doi dau tu } -sang+qua.x_0 \end{cases} \boxed{\textbf{hoặc} \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases}}$$

d/ **Điều kiện để hàm bậc 3 có cực trị (có cực đại, cực tiểu):**

$$\boxed{y'=0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}}$$

e/ **Điều kiện để hàm bậc 4 có 3 cực trị:** $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Dạng 2 : Tìm điều kiện để các điểm cực trị của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

- Tìm điều kiện để hàm số có cực trị
- Biểu diễn điều kiện của bài toán qua tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số, từ đó đưa ra điều kiện của tham số.

VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm cực trị của của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$.

Cách 1.

* Tập xác định:R.

Ta có: $y'=x^2-x-2; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	$\frac{19}{6}$	↘	$-\frac{4}{3}$	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = -1 và giá trị cực đại $y_{CĐ}=y(-1)=\frac{19}{6}$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và giá trị cực tiểu $y_{CT}=y(2)=\frac{-4}{3}$.

Cách 2. (Sử dụng quy tắc 2)

* Tập xác định:.

Ta có: $y'=x^2-x-2; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

- $y''=2x-1, y''(-1)=-3<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm x = -1 và giá trị cực đại

$y_{CĐ}=y(-1)=\frac{19}{6}$

- $y''(2)=3>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và giá trị cực tiểu .

Ví dụ 2: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x-1$ b) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x+\frac{2x+1}{2}$

(?) Ta thấy hàm số này rất khó xét dấu của y', do đó hãy sử dụng quy tắc 2 để tìm cực trị?

a) TXĐ: D=R

* $y'=-\sin x-\sin 2x$

$$y'=0\Leftrightarrow \sin x(1+2\cos x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi\end{array}\right.$$

* $y''=-\cos x-2\cos 2x$

Ta có $y''(k\pi)=-\cos(k\pi)-2\cos(k2\pi)=\pm1-2<0$

$\Longrightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại: $x=k\pi \quad (k\in Z)$

$$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi\right)=-\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)\text{-}2\cos\left(\pm\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}>0$$

$\Longrightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi \quad (n\in Z)$

b) TXD: D=R.

* $y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$

$$y'=0\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

* $y''=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$

Ta có:

+ $y''=\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=-\sqrt{3}<0$

+ $y''\left(\frac{7\pi}{6}+k2\pi\right)=\sqrt{3}>0$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$

Chú ý: *Quy tắc 1 có ưu điểm là chỉ cần tính đạo hàm cấp một rồi xét dấu y' và lập bảng xét dấu y', từ đó suy ra các điểm cực trị. Nhưng quy tắc 1 có nhược điểm là nó đòi hỏi phải xét dấu y', điều này không phải bao giờ cũng đơn giản.*

Nếu bài toán không yêu cầu tìm điểm cực trị thì quy tắc 1 là hơi thừa, khi đó ta sử dụng quy tắc 2. Song quy tắc 2 cũng có nhược điểm là nhiều khi việc tính y" là rất phức tạp, đặc biệt khi không sử dụng được trong trường hợp $f'(x_0)=f''(x_0)=0$.

Quy tắc 1 thường được dùng cho các hàm đa thức, hàm phân thức và tích các lũy thừa. Quy tắc 2 thường được sử dụng cho các hàm lượng giác.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+(m^2-m+2)x^2+(3m^2+1)x+m-5$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

$y'(x)=x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1 \Rightarrow y''(x)=2x+2(m^2-m+2)$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ thì

$$\begin{cases}y'(-2)=0\\ y''(-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4m-3=0\\ m^2-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)(m-3)=0\\ m(m-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow m=3$$

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$, với m là tham số thực.Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.

– Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

– Hàm số có cực đại, cực tiểu x_1, x_2. ⇔ PT y' = 0 có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

⇔ $x^2-2(m+1)x+3=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

⇔ $\Delta'=(m+1)^2-3>0 \Leftrightarrow m>-1+\sqrt{3} \vee m<-1-\sqrt{3}$ (1)

Theo đề ta có: $|x_1-x_2|\le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 4$ (*)

Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=2(m+1);\ x_1x_2=3$.

$(*)\Leftrightarrow 4(m+1)^2-12\le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2\le 4 \Leftrightarrow -3\le m\le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là: $-3\le m<-1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3}<m\le 1$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)=mx^3+3mx^2-(m-1)x-1$, m là tham số. Xác định các giá trị của m để hàm số $y=f(x)$ không có cực trị.

+ Khi m = 0 $\Rightarrow y=x-1$, nên hàm số không có cực trị.

+ Khi $m\neq 0 \Rightarrow y'=3mx^2+6mx-(m-1)$

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ không có nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=9m^2+3m(m-1)=12m^2-3m\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq \frac{1}{4}$

Vậy $0\leq m\leq 4$ là gtct

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=-x^3+(2m+1)x^2-(m^2-3m+2)x-4$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

$y'=-3x^2+2(2m+1)x-(m^2-3m+2)$.

(C_m) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ PT $y'=0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $3(m^2-3m+2)<0 \Leftrightarrow 1<m<2$.

Ví dụ 7: Tìm *m* để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow f'(x)=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=(m-1)^2-3m(m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m\neq 0<1+\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) thì $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=\frac{2(m-1)}{m}; x_1x_2=\frac{3(m-2)}{m}$

Ta có: $x_1+2x_2=1 \Leftrightarrow x_2=1-\frac{2(m-1)}{m}=\frac{2-m}{m}; x_1=\frac{2(m-1)}{m}-\frac{2-m}{m}=\frac{3m-4}{m}$

$$\Rightarrow \frac{2-m}{m}\cdot\frac{3m-4}{m}=\frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow (2-m)(3m-4)=3m(m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Cả 2 giá trị này đều thỏa mãn điều kiện (*). Vậy $x_1+2x_2=1 \Leftrightarrow m=2 \vee m=\frac{2}{3}$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m \neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m; 2m^3)$

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ là AB vuông góc với đường thẳng $y = x$ và I thuộc đường thẳng $y = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m - 1; 2 - 2m)$ và điểm cực tiểu $B(m + 1; -2 - 2m)$

Ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C_m)(1). Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right. \Rightarrow m \neq 0\ (*)$

Với điều kiện (*) thì hàm số (1) có ba điểm cực trị. Gọi ba điểm cực trị là:

$A(0;1);B\left(-m;1-m^4\right);C\left(m;1-m^4\right)$. Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì đỉnh sẽ là A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-m;-m^4\right);\overrightarrow{AC}=\left(m;-m^4\right);\overrightarrow{BC}=\left(2m;0\right)$$

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow 4m^2=m^2+m^8+\left(m^2+m^8\right)$

$$\Leftrightarrow 2m^2\left(m^4-1\right)=0;\Rightarrow m^4=1\Leftrightarrow m=\pm 1$$

Vậy với m = -1 và m = 1 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (1).Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 32 (đơn vị diện tích).

+) Ta có y' = $4x^3-4m^2x$; y' = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m^2\end{array}\right.$; ĐK có 3 điểm cực trị: $m\neq 0$

+) Tọa độ ba điểm cực trị: A(0 ; 1), B(- m ; $1-m^4$), C(m ; $1-m^4$) ;

+) CM tam giác ABC cân đỉnh A. Tọa độ trung điểm I của BC là I(0 ; $1-m^4$).

+) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AI.BC=m^4|m|=|m|^5=32\Leftrightarrow m=\pm 2$ (tm)

Ví dụ 12. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thi hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

Ta có $y'=4x^3-4mx$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu 3 lần

$\Leftrightarrow$ phương trình y' = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ m > 0

Khi m > 0, đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị là

$$A(\sqrt{m};1-m^2)\quad,\quad B(-\sqrt{m};1-m^2)\quad,\quad C(0;1)$$

Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Vì 2 điểm A, B đối xứng qua trục tung nên I nằm trên trục tung.

Đặt I(0 ; y_0). Ta có: IC = R $\Leftrightarrow \sqrt{(1-y_0)^2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=0 \\ y_0=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow I \equiv O(0;0)$ hoặc $I(0;2)$

* Với $I \equiv O(0;0)$

IA = R $\Leftrightarrow \sqrt{m+(1-m^2)^2}=1 \Leftrightarrow m^4-2m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

So sánh điều kiện m > 0, ta được m = 1 và m = $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

* Với I(0 ; 2)

IA = R $\Leftrightarrow \sqrt{m+(-1-m^2)^2}=1 \Leftrightarrow m^4+2m^2+m=0 (*)$

Phương trình (*) vô nghiệm khi m > 0

Vậy bài toán thỏa mãn khi m = 1 và m = $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ (1), với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ pt $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m>0$

- Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A(0;m-1)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A|.|x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$; $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m}$

$$R = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^4+m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$$

2.3 Bài toán Tương giao

Bài toán tương giao tổng quát:

Cho hai đồ thị hàm số: y = f(x, m) và y = g(x,m). Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình: f(x, m) = g(x,m) (1).

Nhận xét: Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Sau đó lập phương trình tương giao của d và (C).

Dạng 1: Cho hai đồ thị hàm số: y = f(x, m) và d: y =ax+b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình f(x,m) = ax+b. (1)

Chú ý:

+ Nếu đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k thì phương trình d có Dạng: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

+ Khai thác tọa độ giao điểm $(M(x_M; y_M)$ của (C) và d, ta cần chú ý: x_M là nghiệm của (1);M thuộc d nên $y_M = ax_M + b$

+ Nếu (1) dẫn đến một phương trình bậc hai, ta có thể sử dụng định lý Viet

Dạng 2: Phương pháp hàm số

Chuyển phương trình hoành độ tương giao về: g(x) = m.

Khi đó số nghiệm chính là số giao điểm của đồ thị y = g(x) và đường thẳng y = m.

Bài tập bài giảng

Dạng 1 : Cho hai đồ thị hàm số: y = f(x, m) và d: y =ax+b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình f(x,m) = ax+b. (1)

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C).

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng y = x – m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

- Đường thẳng y = x – m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\frac{2x-1}{x-2}=x-m$ có hai nghiệm phân biệt.

- Xét phương trình: $\frac{2x-1}{x-2}=x-m \quad (x\neq 2)$

$$\Leftrightarrow 2x-1=(x-m)(x-2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x-mx+1+2m=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-(4+m)x+1+2m=0$$

Có $\Delta=(4+m)^2-4(1+2m)$

$$=m^2+8m+16-4-8m$$
$$=m^2+12>0 \quad \forall m$$

- Vậy với mọi m thì đường thẳng y = x – m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2. Tìm m để đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị y=$x^4-(3m+2)x^2+3m$(C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y=-1$:

$$x^4-(3m+2)x^2+3m=-1 \Leftrightarrow x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x^2=3m+1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng $y=-1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ±1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<3m+1<4 \\ 3m+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}<m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}(C)$ Tìm tham số m để đường thẳng d: y = - 2x + m cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{3}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{2x+1}{x+1}=-2x+m \; (x\neq -1) \Leftrightarrow g(x)=2x^2-(m-4)x+1-m=0 \; (1)$$

D cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 - 8(1-m) > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ g(-1) = -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8 > 0 \Rightarrow m \in R.$$

Chứng tỏ với mọi m d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

Gọi $A(x_1;-2x_1+m);B(x_2;-2x_2+m)$. Với: x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; 2(x_1 - x_2)) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + 4(x_2-x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{5}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, thì khoảng cách từ O đến d là h:

$$\Rightarrow h = \frac{|m|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$$

Theo giả thiết: $S = \frac{1}{2}AB.h = \frac{1}{2}\frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1}{4}.\sqrt{m^2+8} = \sqrt{3}$

Vậy: $\sqrt{m^2+8} = \sqrt{4^2.3} \Leftrightarrow m^2 + 8 = 4^2.3 \Rightarrow m^2 = 40 \Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{10}$ (*)

Với m thỏa mãn điều kiện (*) thì d cắt (C) tại A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2 : *Phương pháp hàm số*

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$.

a) TXĐ: D = R.

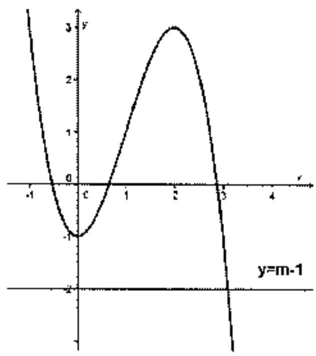
- $y' = -3x^2 + 6x$

  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

- Hàm số đồng biến trên (0 ; 2); hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.
- Hàm số đạt cực đại tại x = 2, $y_{CĐ} = 3$; hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = -1$.
- Đồ thị: Điểm đặc biệt: (0;-1), (-1; 3), (3; -1), (1; 1)



b) $x^3 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 1 = m - 1$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ với đường thẳng y = m – 1.

Vậy $m-1 > 3 \Leftrightarrow m > 4$: Phương trình có 1 nghiệm.

$m-1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$: Phương trình có 2 nghiệm.

$3 > m-1 > -1 \Leftrightarrow 4 > m > 0$: Phương trình có 3 nghiệm.

$m-1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$: Phương trình có 2 nghiệm.

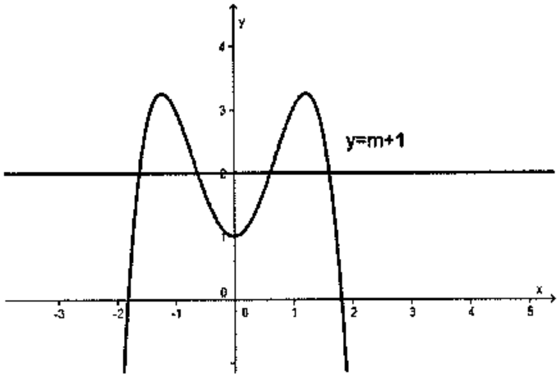
$m-1 < -1 \Leftrightarrow m < 0$: Phương trình có 1 nghiệm.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Dựa vào đồ thị (C) tìm m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

a) Thực hiện các bước tương tự như bài tập 2, ta được đồ thị hàm số sau:



b) $x^4-3x^2+m=0 \Leftrightarrow -x^4+3x^2+1=m+1$

- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y=m+1.
- Dựa vào đồ thị, phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<m+1<\frac{13}{4} \Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4 \quad (C)$.Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(- 1; 0) với hệ số góc là k (k thuộc R). Tìm k để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt và hai giao điểm B, C (B, C khác A) cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Đường thẳng d đi qua A(-1; 0) với hệ số góc là k, có phương trình là:

y = k(x+1) = kx+ k.

Nếu d cắt (C) tại ba điểm phân biệt thì phương trình: $x^3-3x^2+4=kx+k$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-kx+4-k=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4-k)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ g(x)=x^2-4x+4-k=0 \end{array}\right.$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ g(x) = $x^2-4x+4-k=0$ có hai nghiệm phân biệt khác - 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ 9-k\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<k\neq 9 \quad (*)$

Với điều kiện: (*) thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C.Với A(-1;0), do đó B,C có hoành độ là hai nghiệm của phương trình g(x) = 0.

Gọi $B(x_1;y_1);C(x_2;y_2)$ với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2-4x+4-k=0$. Còn $y_1=kx_1+k;y_2=kx_2+k$.

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1;k(x_2-x_1)) \Rightarrow BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2(1+k^2)}=|x_2-x_1|\sqrt{(1+k^2)}$

Khoảng cách từ O đến đường thẳng d: $h = \dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

Vậy theo giả thiết:

$$S = \frac{1}{2}h.BC = \frac{1}{2}\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}.\left|2\sqrt{k}\right|\sqrt{1+k^2} = 2\sqrt{k^3} = 1 \Rightarrow \sqrt{k^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (1). Tìm m để đường thẳng d: y = x + 4 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4. (Điểm B, C có hoành độ khác không ; M(1;3)).

Đồ thị (1) cắt d tại ba điểm A, B, C có hoành độ là nghiệm của phương trình:

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4; \Leftrightarrow x\left[x^2 + 2mx + m + 2\right] = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 2 \quad (*)$$

Với m thỏa mãn (*) thì d cắt (1) tại ba điểm A(0; 4), còn hai điểm B,C có hoành độ là hai nghiệm của phương trình: $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \vee m > 2; m \neq -2$

- Ta có $B(x_1; x_1 + 4); C(x_2; x_2 + 4) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (x_2 - x_1; x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{2}$$

-Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d. h là khoảng cách từ M đến d thì:

$$\Rightarrow h = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}BC.h = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|\sqrt{2}.\sqrt{2} = |x_2 - x_1|$$

- Theo giả thiết: S = 4 $\Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 4; \Leftrightarrow 2\sqrt{\Delta'} = 4; \Rightarrow m^2 - m - 2 = 4 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0$

Kết luận: với m thỏa mãn: $m = -2 \vee m = 3 \Rightarrow m = 3$ (chọn).

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m \ (C_m)$. Xác định $m > 1$ để đồ thị (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi và trục Ox có diện tích phần phía trên trục Ox bằng diện tích phần phía dưới trục Ox.

Đồ thị hàm số cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow t^2 - (m+1)t + m = 0$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

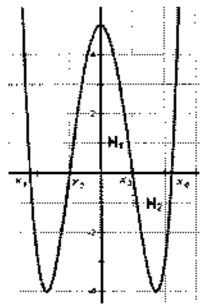
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4m > 0 \\ m+1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \,\&\, m \neq 1$$

Hai nghiệm của (2) là $t=1$, $t=m$, do $m>1$ nên 4 nghiệm phân biệt của (1) theo thứ tự tăng là: $-\sqrt{m}, -1, 1, \sqrt{m}$

Hàm số là chẵn nên hình phẳng trong bài toán nhận Oy làm trục đối xứng. Khi đó đồ thị có dạng như hình bên.

Bài toán thỏa mãn

$S_{H_1} = S_{H_2}$



$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left|x^4 - (m+1)x^2 + m\right| dx = \int_1^{\sqrt{m}} \left|x^4 - (m+1)x^2 + m\right| dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^4 - (m+1)x^2 + m\right) dx = -\int_1^{\sqrt{m}} \left(x^4 - (m+1)x^2 + m\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{m}} \left(x^4 - (m+1)x^2 + m\right) dx = 0$$

$$\left.\left(\frac{x^5}{5} - (m+1)\frac{x^3}{3} + mx\right)\right|_0^{\sqrt{m}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{5} - \frac{m+1}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

KL: $m=5$ thỏa mãn yêu cầu

Ví dụ 8. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 2$. Tìm m để đường thẳng $y=1$ cắt (C_m) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $OA + OB + OC + OD = 4 + 2\sqrt{2}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

Đặt $t = x^2\ (t \geq 0)$, ta có phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0, (*)$

Để có 4 giao điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Với điều kiện trên phương trình (*) có hai nghiệm dương t_1, t_2. Theo Vi-et ta có,

$t_1 + t_2 = 2(m+1), \quad t_1 t_2 = 2m+1$

Từ $t_1 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1}$; $t_2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_2}$

Đặt $x_A = \sqrt{t_1}, \quad x_B = -\sqrt{t_1}, \quad x_C = \sqrt{t_2}, \quad x_D = -\sqrt{t_2}$

$\Rightarrow A\left(\sqrt{t_1};1\right), \quad B\left(-\sqrt{t_1};1\right), \quad C\left(\sqrt{t_1};1\right), \quad D\left(-\sqrt{t_2};1\right)$

$\Rightarrow OA + OB + OC + OD = 2\sqrt{1+t_1} + 2\sqrt{1+t_1}$

Theo đề $\Rightarrow 2\sqrt{1+t_1} + 2\sqrt{1+t_2} = 4 + 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+t_1} + \sqrt{1+t_2} = 2 + \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+t_1} + \sqrt{1+t_2}\right)^2 = 6 + 4\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1} = 4 + 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2(m+1) + 2\sqrt{2m+1+2(m+1)+1} = 4 + 4\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4m+4} = 1 + 2\sqrt{2} - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\sqrt{2} - m \ge 0 \\ 4m + 4 = \left(1 + 2\sqrt{2} - m\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 + 2\sqrt{2} \\ m^2 - 2\left(3 + 2\sqrt{2}\right)m + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy điều kiện phải tìm là $m = 1$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m). Định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ thì (1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t) = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \ne 0 \end{cases} (*)$$

Với (*), gọi $t_1 < t_2$ là 2 nghiệm của $f(t) = 0$, khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là: $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$

x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

$$\Leftrightarrow m+1+|m| = 9(m+1-|m|) \Leftrightarrow 5|m| = 4(m+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5m = 4m+4 \\ -5m = 4m+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

Vậy $m = \left\{4; -\dfrac{4}{9}\right\}$

2.4 Bài toán Suy đồ thị- Biện luận số nghiệm

Kiến thức cơ bản: Đồ thị chứa dấu trị tuyệt đối

$y = f(x)$ có đồ thị (C)	$y = \|f(x)\|$ có đồ thị (C')	$y = f(\|x\|)$ có đồ thị (C'')
	$y = \|f(x)\| \geq 0, \forall x \in D$. Ta cã: y = $f(\|x\|) =$ $\begin{cases} f(x) & khi \quad x \geq 0. \\ f(-x) & khi \quad x < 0. \end{cases}$ Do đó: +Ta phải giữ nguyên phần (C) phía trên trục *Ox* +Lấy đối xứng qua Ox với phần phía dưới trục *Ox*. +Bỏ đi phần (C) nằm ở phía dưới Ox	$y = f(\|x\|)$ có $f(\|-x\|) = f(\|x\|), \forall x \in D$ nên đây là hàm số chẵn do đó có đồ thị đối xứng qua trục tung *Oy*. Do đó: +) Ta phải giữ nguyờn phần (C) bên phải Oy +Bỏ đi phần (C) nằm ở bên trái Oy +Lấy đối xứng qua Oy với phần đồ thị (C) ở bờn phải Oy

4.2. Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số *(đề thi đại học khối A- 2006)*

2) Dựa vào đồ thị (C) vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4|$

b) $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

***1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số**:* $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

*) Khảo sát sự biến thiên: *(Bạn đọc tự giải)*

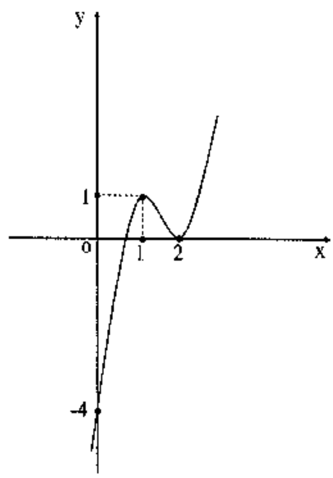
Ta có: $y' = 6x^2 - 18x + 12.$

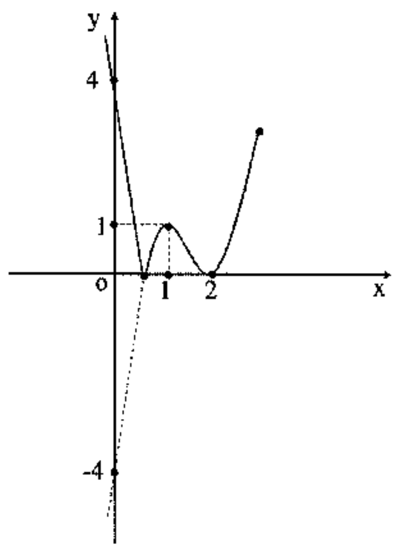
$y'' = 12x - 18$

CĐ(1; 1) ; CT(2; 0)

*) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$





2) Dựa vào đồ thị (C) vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4|$

(Đặt $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$)

Ta có $y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4| = |f(x)|$

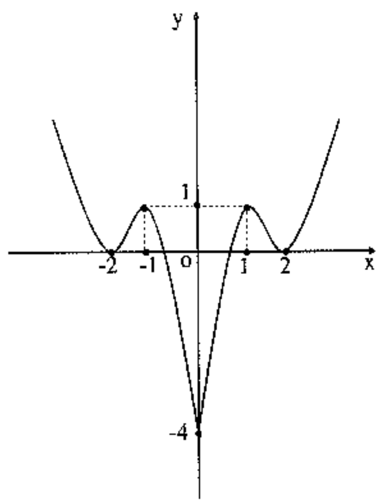
Do đó đồ thị hàm số:

$y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4|$ gồm:

+) Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua trục hoành

b) $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$



(Đặt $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$)

Ta có: $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

$$= f(|x|) = \begin{cases} f(x) & khi \quad x \ge 0. \\ f(-x) & khi \quad x < 0. \end{cases}$$

Và $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy.

Do đó đồ thị hàm số:

$y = f(|x|) = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ gồm:

+) Phần bên phải Oy của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{-x+1}$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{-|x|+1}=m.$

* *Tập xác định*: D=R\{1}

* *Sự biến thiên:*

$$y'=\frac{2}{(1-x)^2}>0,\ \forall x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Cực trị: Hàm số không có cực trị.

Giới hạn, tiệm cận:

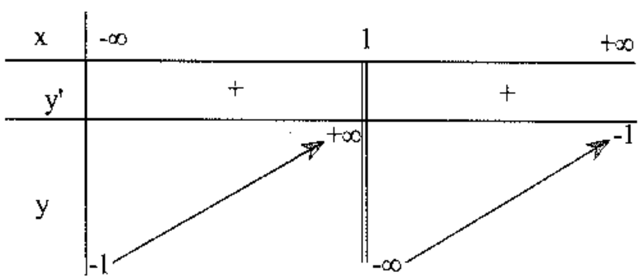
$$\lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{-x+1}=+\infty;\quad \lim_{x\to 1^+} y=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{-x+1}=-\infty$$

Do đó đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to -\infty} y=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{-x+1}=-1;\quad \lim_{x\to +\infty} y=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1}{-x+1}=-1$$

Do đó đường thẳng y = - 1 là tiệm cận ngang.

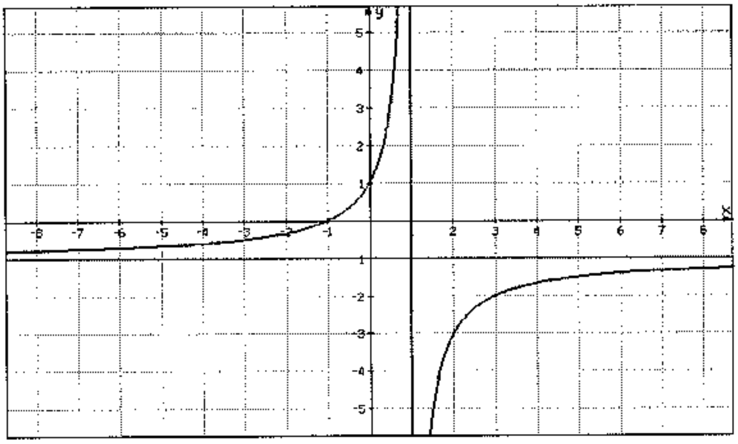
Bảng biến thiên:



* *Đồ thị:*

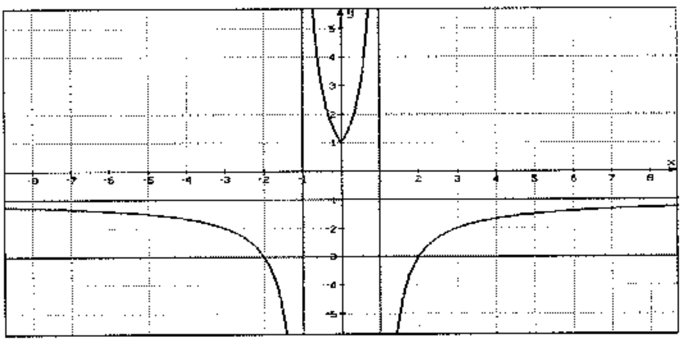
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0; 1) và cắt trục hoành tại điểm (-1; 0).

Đồ thị có tâm đối xứng là giao điểm I(1; -1) của hai tiệm cận.



b)Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{|x|+1}{-|x|+1}=m.$ (1)

lập luận để suy từ đồ thị (C) sang đồ thị $y=\frac{|x|+1}{-|x|+1}$ (C').



Số nghiệm của pt (1) bằng số giao điểm của đthị $y=\frac{|x|+1}{-|x|+1}$ và đg thẳng y = m.

Suy ra đáp số: $m<-1; m>1$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$m=1$: phương trình có 1 nghiệm.

$-1\le m<1$: phương trình vô nghiệm.

2.5 BÀI TOÁN MAX,MIN

(GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT)

Bài toán này xuất hiện trong đề thi Toán THPT quốc gia 2015. Nhìn chung là một câu dễ dàng xử lý chỉ cần các em biết tính đạo hàm là xong.

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn [−1; 2]

$y' = \dfrac{2-2x}{(\sqrt{x^2+2})^3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 2]$

Ta có $f(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $f(1) = \sqrt{3}$; $f(2) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\underset{[-1;2]}{Max} f(x) = \sqrt{3}$; $\underset{[-1;2]}{Min} f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 2: Tìm cực trị của hàm số : $y = x - \sin 2x + 2$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$, $f''(x) = 4\sin 2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$f''\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x_i = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Với $y_{CĐ} = f\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$f''\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x_i = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Với $y_{CT} = f\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn [- 2; 2].

Xét trên đoạn $[-2;2]$ ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\ (l) \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Ta có: f(-2) = 23, f(1) = - 4 , f(2) = 3

Vậy: $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 23$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -4$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - \ln(1-2x)$ trên đoạn $[-1;0]$.

Ta có $f'(x) = 2x + \dfrac{2}{1-2x}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Tính $f(-1) = 1 - \ln 3; f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \ln 2; f(0) = 0$

Vậy $\min\limits_{[-1;0]} f(x) = \dfrac{1}{4} - \ln 2; \max\limits_{[-1;0]} f(x) = 0$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 4\ln x$ trên đoạn $[1;e]$.

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;e]$; $f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$.

Với $x \in [1;e]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f(1) = 1, f(\sqrt{2}) = 2 - 2\ln 2, f(e) = e^2 - 4$.

Vậy $\min\limits_{[1;e]} f(x) = 2 - 2\ln 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}; \max\limits_{[1;e]} f(x) = e^2 - 4 \Leftrightarrow x = e$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;4]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

Với $x \in [2;4]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Ta có: $f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = \dfrac{10}{3}$

Vậy $\underset{[2;4]}{Min} f(x) = 3$ tại x = 3; $\underset{[2;4]}{Max} f(x) = 4$ tại x = 2

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $\left[2;4\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[2;4\right]$

Ta có $y' = \dfrac{1}{\left(2x-1\right)^2} > 0, \forall x \in \left[2;4\right]$

Có $y\left(2\right) = \dfrac{1}{3}; y\left(4\right) = \dfrac{3}{7}$

Vậy $\underset{[2;4]}{\max} y = \dfrac{3}{7}$ khi $x = 4$ và $\underset{[2;4]}{\min} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 2$

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

*) TXĐ: D = $\left[-2;2\right]$.

*) Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Hàm số liên tục trên D và có: $\begin{array}{l} y(-2) = -2 \\ y(2) = 2 \\ y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{array}$

Vậy $\underset{[-2;2]}{\max} y = 2\sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}$, $\underset{[-2;2]}{\min} y = -2$, tại $x = -2$.

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên [−1; 5].

$y' = 6x^2 + 6x - 12$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\left(\in\left[-1;5\right]\right) \\ x = -2\left(\notin\left[-1;5\right]\right) \end{array}\right.$

Ta có: $y(-1) = 14, y(1) = -6, y(5) = 266$

Vậy $\underset{[-1;5]}{\max} y = 266 \; khi \; x = 5, \underset{[-1;5]}{\min} y = -6 \; khi \; x = 1$

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

Ta có $f(x)=x^4-4x^2+4$; $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$;

$f'(x)=4x^3-8x.$

Với $x\in\left[-\frac{1}{2};2\right], f'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\sqrt{2}$

Ta có $f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{16}, f(0)=4, f\left(\sqrt{2}\right)=0, f(2)=4$.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ lần lượt là

4 và 0.

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-3+\frac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$.

- Ta có $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[2;5]$; $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}$

- Với $x\in[2;5]$ thì

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$ - Ta có: $f(2)=3, f(3)=2, f(5)=3$

- Do đó: $\underset{[2;5]}{Max} f(x)=3\Leftrightarrow x=2\vee x=5$, $\underset{[2;5]}{min} f(x)=2\Leftrightarrow x=3$

Bài 12: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;4]$.

y'=$4x^3$-4x =4x(x^2-1)

y'= 0 <=> x=0, x=1 $\in[0;4]$ x= -1 loại

Ta có: f(0) =3 , f(1)=2 , f(4)=227

Vậy GTLN y = 227 , trên $[0;4]$ khi x=4

GTNN y= 2 trên trên $[0;4]$ khi x=1

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$, trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$.

+ Ta có $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

+ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\notin[-2;\frac{1}{2}]$

+ Có $f(-2)=-2; f(\frac{1}{2})=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$

$\max\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} f(x)=\frac{1+\sqrt{15}}{2};\quad \min\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} f(x)=-2$

Bài 14: Tìm GTLN-GTNN của hàm số sau : $y=-x^4+2x^2+1$ trên đoạn $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

$y'=-4x^3+4x$

Trên $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ *có* $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

$y(-2)=-7,\ y(-1)=2,\ y(0)=1,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{16}$

Kết luận $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y=y(-1)=2$ và $\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y=y(-2)=-7$

Bài 15: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+10$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $f'(x)=-8x^3+8x$

Với $x\in[0;2]$ thì: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có: f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = -6

Vậy: $\underset{[0;2]}{Max} f(x)=f(1)=12;\quad \min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-6$

Bài 16: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=-x^3-3x^2+9x-3$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có hàm số f(x) xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$;

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$

Với $x \in [0;2], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có f(0)=-3, f(1)=2, f(2)=-5

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là 2 và -5.

Bài 17: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \in [2;4]$

Có $y(2) = \dfrac{1}{3}; y(4) = \dfrac{3}{7}$

Vậy $\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{3}{7}$ khi $x = 4$ và $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 2$

Bài 18: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 4\ln x$ trên đoạn $[1;e]$.

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;e]$; $f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$.

Với $x \in [1;e]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f(1) = 1, f(\sqrt{2}) = 2 - 2\ln 2, f(e) = e^2 - 4$.

Vậy $\min\limits_{[1;e]} f(x) = 2 - 2\ln 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}; \max\limits_{[1;e]} f(x) = e^2 - 4 \Leftrightarrow x = e$

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x-1}$ trên đoạn [2;5]

Hàm số liên tục và có đạo hàm trên [2;5].

$y' = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in [2;5] \\ x = -1 \notin [2;5] \end{array}\right.$

$y(2) = 5;\ y(3) = 4;\ y(5) = 5$

$\max\limits_{[2;5]} y = 5$ khi $x = 2 \vee x = 5$; $\min\limits_{[2;5]} y = 4$ khi $x = 3$

Bài 20: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0;2]$.

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;2]$, $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(n) \\ x = -1(l) \end{array}\right.$$

$f(0) = 1, f(2) = 3, f(1) = -1$

Giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 3 khi $x = 2$

Giá trị bé nhất của $f(x)$ bằng -1 khi $x = 1$

PHẦN 3: ĐỀ THI CÁC NĂM TRƯỚC

Câu 1 (Đề THPT 2016): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$

Câu 2 (Đề THPT 2016): Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$ Đ/s: m=$\frac{3}{2}$

Câu 3 (Đề THPT 2015): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$

Câu 4 (Đề THPT 2015): Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên [1;3]

Đ/s: Vậy : $\min f(x) = 4$ tại x=2; $\max f(x) = 5$ tại x=1

Câu 5 (A-2014) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1).

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$.

Đ/s: M(0;-2) M(-2;0)

Câu 6(B,D-2014) Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9.

Đ/s: M(-2; -4) M(2; 0)

Câu 7 (A-2013) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1) , với m là tham số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Đ/s: $m \le -1$

Câu 8 (B-2013) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = -1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x + 2.

Đ/s: m = 0 hay m = 2.

Câu 9 (A-2012) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ *(1)* ,với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Đ/s: m=0

Câu 10 (B-2012) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 48.

Đ/s: m = ±2

Câu 11 (D-2012) Cho hàm số y = $\frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Đ/s: m = $\frac{2}{3}$

Câu 12 (A-2011) Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng với mọi *m* đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thì (C) tại 2 điểm phân biệt A và B . Gọi k_1 và k_1 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Tìm *m* để tổng $k_1 + k_1$ đạt giá trị lớn nhất.

Đ/s: m= -1

Câu 13 (B-2011) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Đ/s: $m = 2 + 2\sqrt{2}$

Câu 14 (Đ- 2011) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho

b) Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k +1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Đ/s: k = – 3

Câu 15 (A-2010) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 < 4$

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 16 (B-2010) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm m để đường thẳng y = –2x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, O là gốc tọa độ.

Đ/s: m = 2 V m = –2

Câu 17 (D-2010) Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b)Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$

Đ/s: $y = -6x + 10$

Câu 18 (D-2009) Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 0.

b) Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 19 (B-2009) Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Với giá trị nào của m, phương trình $x^2.|x^2-2|=m$ có 6 nghiệm thực phân biệt

Đ/s: $0<m<1$

Câu 20 (A-2009) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Đ/s: $y=-x-2$

Câu 1 (Đề THPT 2016): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$

Câu 2 (Đề THPT 2016): Tìm *m* để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm *m* để $x_1^2 + x_2^2 = 3$

Đ/s: $m=\frac{3}{2}$

Câu 3 (Đề THPT 2015): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$

Câu 4 (Đề THPT 2015): Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên [1;3]

Đ/s: Vậy : $\min f(x) = 4$ tại x=2; $\max f(x) = 5$ tại x=1

Câu 5 (A-2014) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1).

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$.

Đ/s: M(0;-2) M(-2;0)

Câu 6(B,D-2014) Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9.

Đ/s: M(-2; -4) M(2; 0)

Câu 7 (A-2013) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1), với m là tham số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Đ/s: $m \le -1$

Câu 8 (B-2013) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = -1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x + 2.

Đ/s: m = 0 hay m = 2.

Câu 9 (A-2012) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1) ,với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Đ/s: m=0

Câu 10 (B-2012) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
d) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Đ/s: $m = \pm 2$

Câu 11 (D-2012) Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Đ/s: $m = \dfrac{2}{3}$

Câu 12 (A-2011) Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
d) Chứng minh rằng với mọi *m* đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thì (C) tại 2 điểm phân biệt A và B .
Gọi k_1 và k_1 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B .
Tìm *m* để tổng $k_1 + k_1$ đạt giá trị lớn nhất.
Đ/s: m= -1

Câu 13 (B-2011) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Đ/s: $m = 2 + 2\sqrt{2}$

Câu 14 (Đ- 2011) Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho

b) Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k +1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Đ/s: k = – 3

Câu 15 (A-2010) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 < 4$

Đ/s: $\begin{cases} -\dfrac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 16 (B-2010) Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm m để đường thẳng y = –2x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, O là gốc tọa độ.

Đ/s: m = 2 V m = –2

Câu 17 (D-2010) Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b)Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$

Đ/s: y = – 6x + 10

Câu 18 (D-2009) Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 0.

b) Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 19 (B-2009) Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Với giá trị nào của m, phương trình $x^2.|x^2-2|=m$ có 6 nghiệm thực phân biệt

Đ/s: 0<m<1

Câu 20 (A-2009) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Đ/s: y=-x-2

Các em đã luyện tập về tự luận và hiểu bản chất các dạng toán về hàm số bây giờ là lúc rèn luyện TƯ DUY TRẮC NGHIỆM. Về bản chất thì dù thi bằng hình thức gì cũng không thể bỏ được tư duy Toán học tự luận nhưng vì Trắc nghiệm cho sẵn đáp án nên ta có thể dựa vào đáp án và một số Skill Casio để giải quyết.

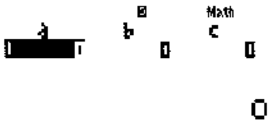
Một vài Skill CASIO để giải hàm số

Biện luận số nghiệm, Tìm điều kiện để có một số nghiệm

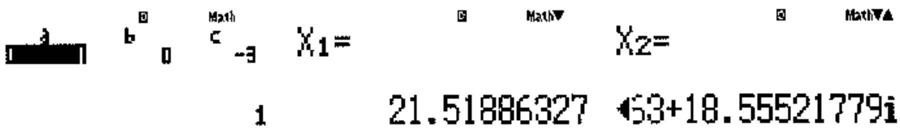
Ví dụ 1: Phương trình $x^3 + x = m^2 + m$ có 3 nghiệm phân biệt khi:

A. $m<1$ B. $-1<m<2$ C. $-2<m<1$ D. $m>-21$

Để xửa nhanh dạng này các em vào luôn tính năng giải phương trình bậc 3 của máy tính rồi lại "chọn bừa" m như ví dụ trước:

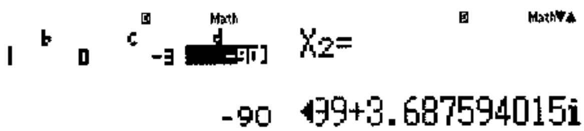


Ta sẽ lấy $m=-100$ xem A có đúng không?

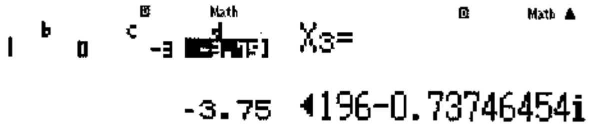


Đó ta thấy loại A luôn vì có nghiệm phức

Tiếp tục với $m=-10$ xem D đúng không, nếu không đúng thì lại thử giá trị B có C không có



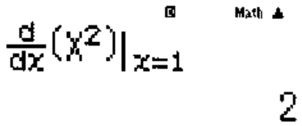
Tiếp tục thử với $m=1,5$



Do đó Loại B vì nó chứa giá trị trên, và duy nhất C đúng ^^ các em không tin thì thử mà xem

Bài toán Cực trị

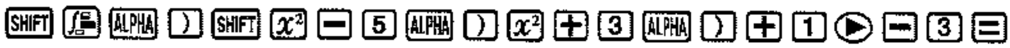
Các bài toán hàm số chủ yếu là hỏi về cực trị do đó chúng ta sẽ sử dụng tính năng đạo hàm:

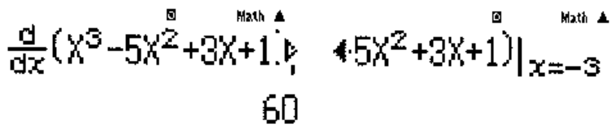


Ví dụ 1: Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ đạt cực trị khi :

A. $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{10}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{10}{3} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

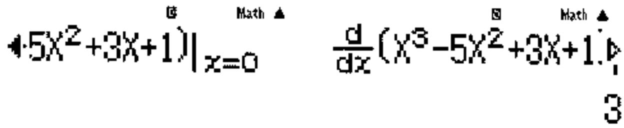
Các em sẽ nhập như sau:





Đó đó loại A vì đạo hàm của y không bằng 0 tại x = -3 nên nó ko thể là cực trị được

Tương tự các em thử với x = 0



Vậy loạt nốt B,C Do đó ta sẽ chọn D.

Ví dụ 2: Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên miền $(0, +\infty)$ khi giá trị m là:

A. $m \ge 0$ B. $m \ge 12$ C. $m \le 0$ D. $m \le 12$

Những bài như thế này tốt nhất là các em đạo hàm tay cho dễ xét, ta đạo hàm luôn trên máy và thay tham số m bằng tham số Y trên máy

[3] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [1] [2] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [S⇔D]

Math ▲

$3X^2-12X+Y$

Tìm Y để biểu thức trên > 0 với mọi x thuộc $(0, +\infty)$ thì khi đó hàm sẽ đồng biến thôi ^^

Các em chọn bừa x=1 rồi chọn Y theo hướng loại dần đáp án, trước hết chọn Y=15 xem A,B đúng không? Hay là C,D đúng

[CALC] [1] [=] [1] [5] [=]

Math ▲

$3X^2-12X+Y$

6

Do đó A,B sẽ đúng, giờ A với B nó khác nhau giá trị 0→12 ta chọn bừa x=1

[CALC] [=] [1] [=]

Math ▲

$3X^2-12X+Y$

-8

Vậy loại A do lớn hơn 0 vẫn chưa được, chắc phải lớn hơn 12 ^^ do đó chỉ còn chọn B

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + m$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ bằng 1

Đơn giản là các em giải phương trình $3.1^2 - 4.1 + m = 0$ thôi ^^

TRẮC NGHIỆM HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m = \frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$ **D.** $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị

A. $m = -\frac{5}{3}$ **B.** $m = \frac{5}{3}$ **C.** $m = \frac{-5}{2}$ **D.** $m = \frac{5}{2}$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ (1), m là tham số. Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1; 2)

A. $0 < m \le 2$ **B.** $0 < m \le 1$ **C.** $m \le 1$ **D.** $0 < m \le 3$

Câu 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có tung độ bằng -2.

A. y= -2; y=9x+14 B. y= -2; y=9x+16 C. y= -2; y=9x-16 D. y= -2; y=9x+18

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - (m+1)x^2 + m^2 + 1$. Xác định giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x = 0$.

A. $m > -1$ B. $m > -2$ C. $m > -3$ D.m>-4

Câu 6: Tìm GTLN của hàm số $y = f(x) = x^2 - 2\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

A. $4 - 2\ln 2$ B.1 C.3 D.5

Câu 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 4x$ biết tiếp tuyến song song đường thẳng $y = x + 2$.

A. $y = x + 2$ B. $y = x - 2$ C. $y = 2x - 2$ D. $y = x - 3$

Câu 8: Xác định giá trị của m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 3$.

A.m= -2 B.m=3 C. không có m thỏa mãn D. Vô số m

Câu 9: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1 - m^2)x^2 + m + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất ?

A.m= 0 B.m=1 C. m=2 D. m=3

Câu 10: Tìm m để $d: 2x-y+m=0$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt có tung độ dương.

A. $m>4-\sqrt{40}$ B. $m>4+\sqrt{40}$ C. $m>4$ D. $m>\sqrt{40}$

Câu 11.Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=mx^3-3(m-1)x^2+9(m-2)x+2$ có 2 điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $m=2, m=\frac{2}{3}$. B. $m=\frac{2}{3}$. C. $m=2$. D. $m=3$.

Câu 12:. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$ (C) và đường thẳng d: $y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). đường thẳng d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến tại A và B của (C). Xác định m để $(3k_1+1)^2+(3k_2+1)^2=98$.

A. $m=-1$. B. $m=2$. C. $m=-2$. D. $m=3$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{-x+2}$ có đồ thị (C), đường thẳng (d) có phương trình $y=x-m-1$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, (O là gốc tọa độ).

A. $m=3$ B. $m=-3$ C. $m=-2$ D. $m=2$

Câu 14: Cho đồ thị (C): $y=\frac{-2x+1}{x-1}$ và đường thẳng d: y = x + m (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

A. $m<-5$ hoặc $m>-1$ B. $m<-5$ C. $m>-1$ D. $m>-2$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-2+\frac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$

A.3 B. 4 C. -3 D.-4

Câu 16: Tìm GTLN của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+x$.

A. $2\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

Câu 17: Cho hàm số: $y=x^4-2(m^2+1)x^2+1$ (1) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A. m=0 B. m=-1 C. m=-2 D.m=-3

Câu 18: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-m=0$ có một nghiệm duy nhất

A. $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right.$ B. $m<1$ C. $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$ D. $m>2$

Câu 19: Tìm m để đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có 2 điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ)

A. $m=\frac{1}{2}$ B. $m=\frac{-1}{2}$ C. $m=\frac{1}{3}$ D. $m=\frac{-1}{2}$

Câu 20: Khi $m = 2$, viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 - 4)x - m + 1$ với trục tung.

A. $y=-4$ B. $y=-2$ C. $y=-3$ D. $y=-1$

Câu 21: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+1$ biết tiếp điểm có tung độ $y=1$.

A. $y=1$ B. $y=-2$ C. $y=-3$ D. $y=-1$

Câu 22: Viết PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ tại M có hoành độ $x_0=1$

A. $y=-x+3$ B. $y=-x+1$ C. $y=-x+2$ D. $y=-x+4$

Câu 23: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm M có hoành độ $x_0=\sqrt{2}$.

A. $y=4\sqrt{2}x-4$. B. $y=4\sqrt{2}x-8$. C. $y=4\sqrt{2}x+8$. D. $y=4\sqrt{2}x-6$.

Câu 24: Tìm m để phương trình $x(x-3)^2=m$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $0<m<5$ B. $0<m<3$ C. $0<m<4$ D. $1<m<4$

Câu 25: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^2-3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ tại 3 điểm phân biệt và tạo thành hình phẳng có diện tích bằng $\frac{128}{15}$

A. $m=1$ B. $m=2$ C. $m=3$ D. $m=4$

Câu 26: Tìm trên đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ các điểm M có hoành độ âm sao cho M cùng với hai điểm $A(1;0), B(3;1)$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\frac{5}{2}$

A. $M\left(-3;\frac{1}{2}\right)$ B. $M\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ C. $M\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ D. $M\left(-5;\frac{1}{2}\right)$

Câu 27: Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ và vuông góc với tiếp tuyến của đồ thị (C) tại gốc tọa độ.

A.y= 1/3x+5/3 B.y= -1/3x-5/3 C. y= -1/3x+5/3 D. y= -1/3x+4/3

Câu 28: Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó kẽ được các tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=-x^3-6x^2-9x$, sao cho trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau .

A. $M\left(-\frac{82}{27};0\right)$ B. $M\left(-\frac{83}{27};0\right)$ C. $M\left(-\frac{85}{27};0\right)$ D. $M\left(-\frac{86}{27};0\right)$

Câu 29: Tìm m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x+1$ có hai cực trị tại hai điểm x_1,x_2 .Khi đó, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|x_1x_2-2(x_1+x_2)|$.

A.m = – 2 B. m = – 1 C. m = – 3 D. m = – 4

Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến cách đều 2 điểm $A(2,4)$, $B(-4,-2)$.

A. $y=x-1$ B. $y=x+1$ C. $y=x+3$ D. $y=x+5$

1.A	**2.A**	**3.B**	**4.B**	**5.A**	**6A**	**7B**	**8C**	**9A**	**10B**
11.A	**12.C**	**13B**	**14.A**	**15.A**	**16.A**	**17.A**	**18.A**	**19.A**	**20D**
21A	**22C**	**23B**	**24C**	**25B**	**26A**	**27C**	**28A**	**29D**	**30B**

Chuyên đề Mũ – Logarit

A. Kiến thức cần nhớ:

I. Các phép toán về lũy thừa:

$a^0 = 1$ $\qquad (a.b)^m = a^m.b^m$ $\qquad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$a^1 = a$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ $\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$a^{-m} = \frac{1}{m}$ $\qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn}$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$a^m.a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$ $\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$

II. Các phép toán về logarit:

$\log_a 1 = 0$ $\qquad \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ $\qquad \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a a = 1$ $\qquad \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ $\qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

$a^{\log_a b} = b$ $\qquad \log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b$ $\qquad \log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\qquad \Rightarrow \log_a b \log_b a = 1$

$$\log_a b.\log_b c = \log_a 1 = 0 \Leftrightarrow \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Phương trình mũ

Phương trình mũ cơ bản:

Dạng 1. $a^x = b\ (0 < a \neq 1)$

+ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu b > 0 thì phương trình có nghiệm duy nhất x = $\log_a b$

Dạng 2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình : $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x}$ là ?

A. $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\log_3 2 - 2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\log_3 2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Lời giải:

Tự Luận:

Cách 1:

$$8^{\frac{x}{x+2}}=4.3^{4-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x-2}-2}=3^{4-x}\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2}=\left(4-x\right)\log_2 3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2-\log_3 2 \end{array}\right.$$

Cách 2:

$$8^{\frac{x}{x+2}}=4.3^{4-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2}=3^{4-x}\Leftrightarrow (2^{\frac{1}{x+2}}.3)^{x-4}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ 2^{\frac{1}{x+2}}.3=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ \frac{1}{x+2}=\log_2\frac{1}{3}=-\frac{1}{\log_3 2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-\log_3 2-2 \end{array}\right.$$

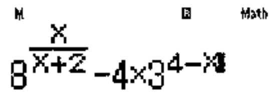
Trắc nghiệm :

Cách giải nhanh sử dụng máy tính

Cách 1: Dựa vào đáp án: CALC

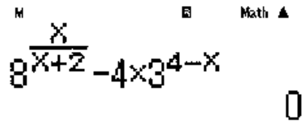
Bước 1: Nhập phương trình vào máy tính

[8] [$x^■$] [▭/▭] [ALPHA] [)] [▼] [ALPHA] [)] [+] [2] [▶] [▶] [−] [4] [×] [3] [$x^■$] [4] [−] [ALPHA] [)]



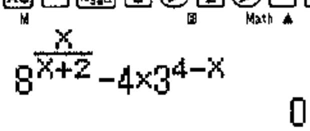
Bước 2: Tính giá trị biểu thức tại X = 4 (Xét đáp án A)

[CALC] [4] [=]



Vậy X=4 là một nghiệm của phương trình, tương tự các em CALC với $x=-\log_3 2-2$

[AC] [−] [$\log_■ □$] [3] [▶] [2] [▶] [−] [2] [SHIFT] [RCL] [)] [▲] [=]



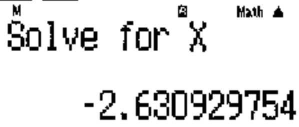
Vậy chúng ta chọn đáp án A

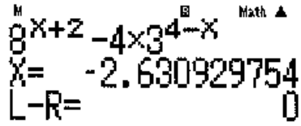
Cách 2: Dò nghiệm của phương trình bằng SOLVE

Bước 1: như trước

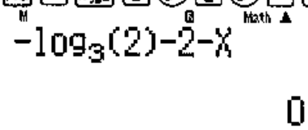
Bước 2:

SHIFT CALC =





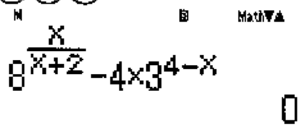
AC (−) log■□ 3 ▶ 2 ▶ − 2 − ALPHA) =



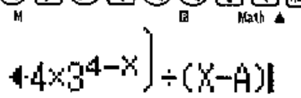
Để tìm tiếp nghiệm khác , các em lưu nghiệm lẻ vào A

AC RCL) SHIFT RCL (−)

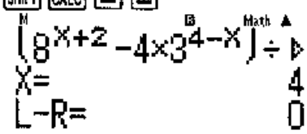
▲ ▲ ▲



◀) ▶ (◀ ◀ ÷ (ALPHA) − ALPHA (−))



SHIFT CALC = =



Vậy chúng ta có thể dễ dàng chọn A!

Ví dụ 2. Phương trình: $2^{x^2-2x}.3^x=\frac{3}{2}$ có mấy nghiệm ?

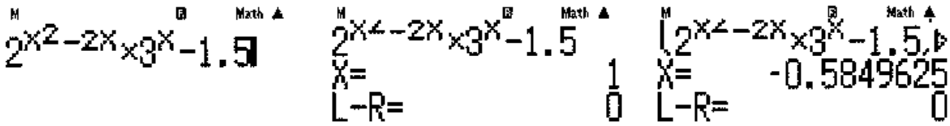
A. Vô nghiệm   B. 1   C. 2   D. 3

Lời giải:

Tự Luận:

$$2^{x^2-2x}.3^x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.3^{x-1}=1\Leftrightarrow \log_2\left[2^{(x-1)^2}.3^{x-1}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1-\log_2 3\end{array}\right.$$

Trắc nghiệm :



Vậy chọn C

Ví dụ 3. Cho phương trình: $x^3.3^x + 27x = x.3^{x+1} + 9x^3$ tìm tổng các nghiệm của phương trình

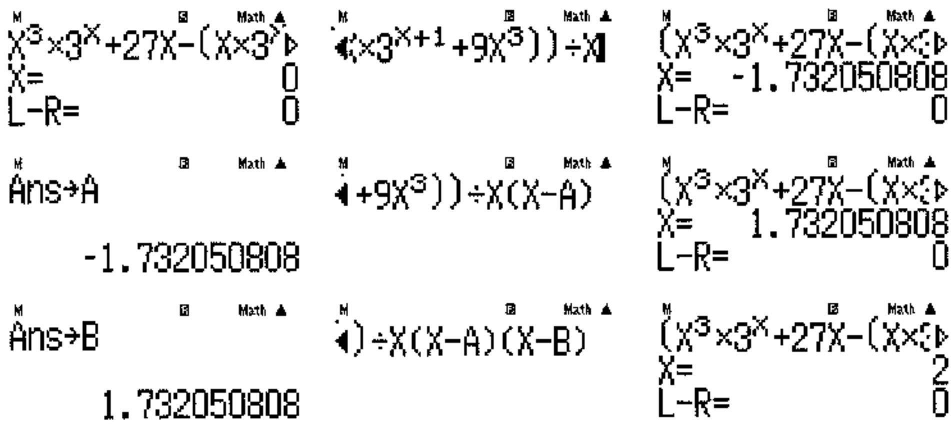
A. 1 B. 2 C. 3 D.4

Lời giải:

Tự luận

$$x^3.3^x + 27x = x.3^{x+1} + 9x^3 \Leftrightarrow \left(3^x - 9\right)\left(x^3 - 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 9 = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Trắc nghiệm :



Vậy các em chọn B nhé.

Ví dụ 4. Trung bình cộng của nghiệm phương trình: $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$ **là:**

A.0 **B.20** **C.10** **D.15**

Lời giải:

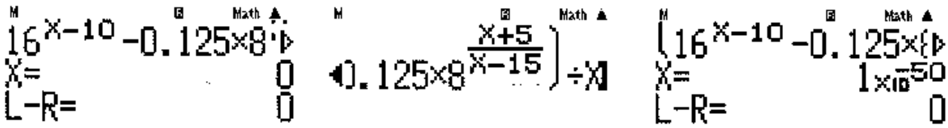
Tự luận

$16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 2^{4.\frac{x+10}{x-10}} = \frac{1}{2^3}.2^{3.\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4x+40}{x-10}} = 2^{\frac{3x+15}{x-15}-3}$

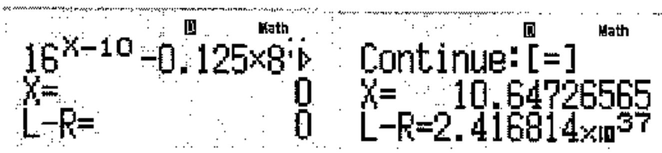
$\Leftrightarrow \frac{4x+40}{x-10} = \frac{3x+15}{x-15} - 3 \Leftrightarrow (4x+40)(x-15) = 60(x-10) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20 \Rightarrow C$

Trắc nghiệm: Solve chịu! Do thuật toán của nó

Đây là 570VN Plus



Đây là vinacal



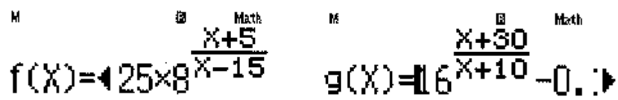
Lưu ý quan trọng: Solve chỉ mạnh trong giải phương trình vô tỉ chứ đối với mũ và logarit nó tỏ ra yếu đuối hẳn

Mẹo: Ta thấy các đáp án đều nguyên nên rất có thể nghiệm cũng sẽ nguyên do đó các em sẽ dùng Table để kiểm tra nghiệm từ 0 tới 29

Lưu ý là ở bài này phải sử sụng tới TABLE mở rộng giá trị lên tới 40 giá trị thay vì mặc định là 20 bằng cách sau xét G(Y) có Y=X+20

$F(\mathrm{x}) = 16^{\frac{x+10}{x-10}} - 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}; G(\mathrm{x}) = 16^{\frac{(x+20)+10}{(x+20)-10}} - 0,125.8^{\frac{(x+20)-5}{(x+20)-15}}$

Các em vào Mode 7



Ta được kết quả

Vậy là có nghiệm x=0, x=20

Bài tập rèn luyện

Lưu ý: Các em nên giải tay trước khi sử dụng máy tính để giúp hiểu bài toán mới sử dụng tới công cụ giải nhanh

Bài 1. Nghiệm của phương trình: $2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}$ là:

A. $x=-2;x=3$ B. $x=-2;x=-3$ C. $x=2;x=-3$ D. $x=2;x=3$

Lời giải:

$$2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}\Leftrightarrow 2^{x^2-x+8}=2^{2(1-3x)}\Leftrightarrow x^2-x+8=2(1-3x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy chọn B.

Bài 2. Tổng các nghiệm của phương trình: $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$ là:

A.3 B.4 C.5 D.6

Lời giải:

$$2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=2^4.2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x^2-6x-\frac{5}{2}=4+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=7\end{array}\right.\Rightarrow D$$

Bài 3. Phương trình $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=3^x-3^{x-1}+3^{x-2}$ có mấy nghiệm?

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$$2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=3^x-3^{x-1}+3^{x-2}\Leftrightarrow 2^{x-2}(2^2+2+1)=3^{x-2}(3^2-3+1)$$

$$\Leftrightarrow 7.2^{x-2}=7.3^{x-2}\Leftrightarrow(\frac{3}{2})^{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\rightarrow A$$

Bài 4. Phương trình. $2^x.3^{x-1}.5^{x-2}=12$ có nghiệm là:

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$$2^x.3^{x-1}.5^{x-2}=12\Leftrightarrow 2^x.3^{x-1}.5^{x-2}=2^2.3\Leftrightarrow 2^{x-2}.3^{x-2}.5^{x-2}=1\Leftrightarrow(2.3.5)^{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\rightarrow B$$

Bài 5. Tìm x thỏa mãn: $(\sqrt{x-x^2})^{x-2}=1$

A.1 B.2 C. 3 D. không có giá trị nào

Lời giải:

Điều kiện : $0\le x\le 1$

$$(\sqrt{x-x^2})^{x-2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-x^2}=1\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-x^2=1\ (VN)\\x=2(loai)\end{array}\right.\to D$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Tìm x thỏa mãn: $(x+1)^{\sqrt{x-3}}=1$

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge 3\Rightarrow x+1\ge 4$. Do đó:

$(x+1)^{\sqrt{x-3}}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow C$

Bài 7. Số nghiệm của phương trình: $(x^2-2x+2)^{\sqrt{4-x^2}}=1$ **là:**

A.1 **B.2** **C.3** **D.4**

Lời giải:

Điều kiện : $|x|\le 2$

Phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-2x+2=1\\\begin{cases}x^2-2x+2\ne 1\\\sqrt{4-x^2}=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\ne 1\\4-x^2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\ne 1\\x\pm 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\\x=-2\end{array}\right.(tm)\Rightarrow \text{C}$$

Bài 8. Nghiệm của phương trình: $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$ (1) là:

A.0 B.$\frac{2}{7}$ C.$\frac{7}{2}$ D.$\frac{1}{3}$

Lời giải:

Điều kiện $x\ge\frac{1}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow 3^{2|3x-1|} = 3^{8x-2} \Leftrightarrow |3x-1| = 4x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 7x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(loai) \\ x=\dfrac{2}{7} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm là $x=\frac{2}{7} \to B$

Bài 9*: Nghiệm của phương trình: $15^{2x+3} = 5^{3x-1}.2^{x+7}$ là:

A.1 **B.** $\log_9 10$ **C.** $1-\log_9 10$ **D.** $\log_{\frac{9}{10}}\left(\frac{25,6}{3375}\right)$

Lời giải:

Phương trình tương đương:

$3^{2x+3}.5^{2x+3} = 5^{3x-1}.2^{x+7}$

$\Leftrightarrow 3^{2x+3} = 5^{x-4}.2^{x+7}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-4}.\left(\frac{3}{2}\right)^{x+7} = 1$

$\Leftrightarrow (x+7)+(x-4)\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5} = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5}-7}{1+\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5}} = \log_{\frac{9}{10}}\left(\frac{25,6}{3375}\right) \to D$$

Bài 10*. Tìm nghiệm của phương trình sau: $2^{2x+1}+2^{3-2x} = \dfrac{8}{\log_3(4x^2-4x+4)}$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D.2

Lời giải:

Ta có:

$\log_3(4x^2-4x+4) = \log_3[(2x-1)^2+3] \geq 1$

$\Rightarrow VP \leq 8$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$VT = 2^{2x+1}+2^{3-2x} \geq 2\sqrt{2^{2x+1}.2^{3-2x}} = 8$

Ta có $VT \geq VP$ nên phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x+1=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \to A$

Bài 11*. Tính tổng nghiệm của phương trình sau: $27^x + 2 = 3\sqrt[3]{3^{x+1} - 2}$ **(1)**

A.0 **B.1** **C.3** **D.4**

Lời giải:

Đặt : $3^x = t > 0$

Ta có: Bấm máy được t = 1 do đó ghép căn với số 1

$t^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3t-2}$

$\Leftrightarrow t^3 - 1 = 3\left(\sqrt[3]{3t-2} - 1\right)$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+1) = 3.\dfrac{3t-2-1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1}$

$\Leftrightarrow (t-1)\left[\left(t^2+t+1\right)\left(\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1\right) - 9\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \\ \left(t^2+t+1\right)\left(\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1\right) - 9 = 0(*) \end{array}\right.$

Giải (*) : Dễ thấy VT đồng biến do t^2+t+1, $\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1$ đồng biến nên nếu (*) có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất, dễ thấy t=1 là nghiệm $\Rightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=0 $\to A$

Bài 12. Tổng các nghiệm của phương trình: $12 + 6^x = 4.3^x + 3.2^x$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

Phương trình tương đương:

$12 - 4.3^x = 3.2^x - 6^x$

$\Leftrightarrow 4(3-3^x) = 2^x(3-3^x)$

$\Leftrightarrow (4-2^x)(3-3^x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-2^x=0 \\ 3-3^x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x=4 \\ 3^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x=1 và x=2 $\to C$

Bài 13. Phương trình: $e^5 + e^{4x} = e^{3x+2} + e^{x+3}$ có nghiệm là :

A. $x=-1, x=2$ B. $x=1, x=-2$ C. $x=-1, x=-2$ D. $x=1, x=2$

Lời giải:

Phương trình tương đương:

$$e^{4x}-e^{x+3}=e^{3x+2}-e^{5}$$
$$\Leftrightarrow e^{x}(e^{3x}-e^{3})=e^{2}(e^{3x}-e^{3})$$
$$\Leftrightarrow (e^{x}-e^{2})(e^{3x}-e^{3})=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{x}=e^{2} \\ e^{3x}=e^{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x=1 và x=2 $\rightarrow D$

Bài 14. Nghiệm của phương trình: $3.8^{x}+6.12^{x}-18^{x}-2.27^{x}=0$ là:

A. $\log_{\frac{4}{9}}3$ B. $\log_{\frac{3}{4}}3$ C. $\log_{\frac{3}{2}}3$ D. $\log_{\frac{9}{4}}3$

Lời giải:

$$3.8^{x}+6.12^{x}-18^{x}-2.27^{x}=0 \Leftrightarrow 3.4^{x}(2^{x}+2.3^{x})-9^{x}(2^{x}+2.3^{x})=0$$
$$\Leftrightarrow (2^{x}+2.3^{x})(3.4^{x}-9^{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x}+2.3^{x}=0\ (\text{VN}) \\ 3.4^{x}-9^{x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{x}=3 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{9}{4}}3 \rightarrow D$$

Bài 15. Tích các nghiệm phương trình: $\frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}}+1=2^{x\sqrt{x}}+3^{x\sqrt{x}-1}$ là:

A. 1 B. 2 C.4 D.0

Lời giải:

Điều kiện : $x\geq 0$

$$\frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}}+1=2^{x\sqrt{x}}+3^{x\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}}-2^{x\sqrt{x}}+1-3^{x\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow 2^{x\sqrt{x}}(3^{x\sqrt{x}-1}-1)-(3^{x\sqrt{x}-1}-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (3^{x\sqrt{x}-1}-1)(2^{x\sqrt{x}}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x\sqrt{x}-1}-1=0 \\ 2^{x\sqrt{x}}-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\sqrt{x}-1=0 \\ x\sqrt{x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0\end{array}\right. \rightarrow D$$

Bài 16. Số nghiệm phương trình: $x^{3}.3^{x}+27x=x.3^{x+1}+9x^{3}$

A. 1 B. 2 C.4 D.3

Lời giải:

$x^3.3^x+27x=x.3^{x+1}+9x^3 \Leftrightarrow 3^x(x^3-3x)+9(3x-x^3)=0 \Leftrightarrow (3^x-9)(x^3-3x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x-9=0 \\ x^3-3x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow C$

Bài 17. Phương trình: $81^{x^2}-3^{(x+1)^2}+3^{2x+3}=3^{3x^2+2}$ có mấy nghiệm?

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$81^{x^2}-3^{(x+1)^2}+3^{2x+3}=3^{3x^2+2} \Leftrightarrow (3^{4x^2}-3^{3x^2+2})-(3^{(x+1)^2}-3^{2x+3})=0 \Leftrightarrow 3^{3x^2}(3^{x^2}-3^2)-3^{2x+1}(3^{x^2}-3^2)=0$

$\Leftrightarrow (3^{x^2}-3^2)(3^{3x^2}-3^{2x+1})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2}-3^2=0 \\ 3^{3x^2}-3^{2x+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ 3x^2=2x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2} \\ x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow D$

Bài 18. Nhiệm của phương trình: $8-x.2^x+2^{3-x}-x=0$ là:

A. 1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$8-x.2^x+2^{3-x}-x=0 \Leftrightarrow (2^3+2^{3-x})-(x.2^x+x)=0 \Leftrightarrow \frac{2^3(1+2^x)}{2^x}-x(2^x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2^x+1)(2^{3-x}-x)=0 \Leftrightarrow 2^{3-x}-x=0 \Leftrightarrow x.2^x=8 \Leftrightarrow x=2.$

(do hàm $y=x; y=2^x$ đồng biến trên R nên phương trình $x.2^x=8$ có nghiệm duy nhất là 2)

Bài 19. Tích các nghiệm của phương trình: $5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0$

A. 0.5 B. 1 C. 1.5 D. 2

Lời giải:

$5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0 \Leftrightarrow (5^{2x+1}-175^x)+(7^{x+1}-35)=0 \Leftrightarrow 5^{2x}(5-7^x)+7(7^x-5)=0$

$(5-7^x)(5^{2x}-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7^x=5 \\ 5^{2x}=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_7 5 \\ x=\frac{1}{2}\log_5 7 \end{array}\right. \Rightarrow A$

Bài 20. Phương trình: $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$ có mấy nghiệm?

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

$$4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1 \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}-2^{(x+1)^2}+2^{1-x^2}-1=0 \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}(1-2^{1-x^2})+2^{1-x^2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (2^{1-x^2}-1)(1-2^{2x^2+2x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{1-x^2}=1 \\ 2^{2x^2+2x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2=0 \\ 2x^2+2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \end{array}\right. \to D$$

Bài 21. Tìm tổng các nghiệm của phương trình: $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$

A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

Lời giải:

Rất nhiều em sẽ bấm máy thiếu nghiệm dẫn tới tính sai ở câu hỏi này!

$$4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}-4^{2x^2+3x+7}+4^{x^2+6x+5}-1=0$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}(1-4^{x^2+6x+5})+4^{x^2+6x+5}-1=0 \Leftrightarrow (4^{x^2+6x+5}-1)(1-4^{x^2-3x+2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2+6x+5}=1 \\ 4^{x^2-3x+2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+5=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-5 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow A$$

Phương trình Logarrit

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+(x-4)\log_2 x-x+3=0$ là:

A.1 B. 2 C.3 D.4

Lời giải:

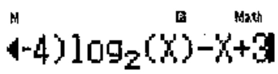
Tự luận :

$$\log_2^2 x+(x-4)\log_2 x-x+3=0 \Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x+x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x-1=0 \\ \log_2 x+x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$$

Các em có thể dùng Solve hay Calc

*SOLVE

Bước 1: Nhập phương trình :



Sau đó khởi động chương trình Solve : SHIFT CALC

```
Solve for X
            9
```

Kết quả

```
log2(X)²+(X-4)1▷
X=              2
L-R=            0
```

*CALC

```
X?                  log2(X)²+(X-4)1▷
            1                      2
X?                  log2(X)²+(X-4)1▷
            2                      0
```

Ví dụ 2. Tích các nghiệm của phương trình $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$ là:

A.1 B.2 C.4 D.8

Lời giải:

Tự luận: ĐK: x > 0.

$$2(\log_9 x)^2 = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1}-1) \Leftrightarrow \log_3 x\left(\log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1}-1)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 0 \\ \log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1}-1) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \\ x = (\sqrt{2x+1}-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \\ x = 4\end{array}\right.$$

Trắc nghiệm:

```
2log9(X)²-log3(▷   [2log9(X)²-log3▷
X=             4   X=             1
L-R=           0   L-R=           0
```

Vậy chọn C

Ví dụ 3. Phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = \log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$ có mấy nghiệm?

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

Tự luận: ĐK: x > 0.

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = \log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$$
$$\Leftrightarrow \log_2 5.\log_5 x + \log_3 5.\log_5 x + \log_5 x = \log_2 3.\log_3 x.\log_3 x.\log_5 x$$
$$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_2 3(\log_3 x)^2 - \log_2 5 - \log_3 5 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x = 0\\ \left(\log_3 x\right)^2 = \dfrac{\log_2 5 + \log_3 5 + 1}{\log_2 3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 3^{\pm\sqrt{\frac{\log_2 5 + \log_3 5 + 1}{\log_2 3}}}\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow D$$

Trắc nghiệm

```
log2(X)+log3(X)▶      (log2(X)+log3(X▶      (log2(X)+log3(X▶
X=              1     X=    0.148191874     X=    6.748008328
L-R=            0     L-R=            0     L-R=            0
```

Cách bấm tất cả các nghiệm của phương trình như sau:

Để tìm nghiệm thứ nhất các em giải Phương Trình : $f(\mathrm{x}) = 0$

Tìm nghiệm thứ 2 thì giải phương trình : $f(\mathrm{x}) : (\mathrm{x} - \mathrm{a}) = 0$

Nghiệm thứ 3 các em giải: $f(\mathrm{x}) : (\mathrm{x} - \mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{b}) = 0$

Đến khi nào máy báo can't solve là phương trình hết nghiệm.

Bước 1: Nhập phương trình vào:

```
(log2(X)+log3(X▶

               0
```

Bước 2: Gọi lệnh Solve : Shift Solve và ấn =

```
Solve for X           (log2(X)+log3(X▶
                      X=    0.148191874
                0     L-R=            0
```

Được nghiệm xấu thì lưu ngay vào biến A nhưng trước khi lưu thì đẩy sang trái và ấn = để lưu phương trình, sau đó mới ấn RCL X Shift Sto A để lưu nghiệm lẻ sang A , rồi đẩy lên để tìm lại phương trình và đẩy sang trái để sửa lại thành (PT) : (X-A) , sửa xong lại quay lại gọi lệnh Solve (log2(X)+log3(X▷ Ans→A ◂log5(X))÷(X−A)

0 0.148191874

Ví dụ 4. Tính tổng các nghiệm của phương trình: $\log_3^2 x+\log_{3x}\dfrac{3}{x}=1$ (*)

A. 4 B. $\dfrac{10}{9}$ C. $\dfrac{28}{9}$ D. $\dfrac{37}{9}$

Lời giải:

Tự luận: Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$\log_3^2 x+\log_{3x}\frac{3}{x}=1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\log_{3x}3-\log_{3x}x=1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\frac{1}{\log_3 3x}-\frac{1}{\log_x 3x}=1$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x+\frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\log_x 3+1}=1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\frac{1}{\log_3 x}+1}=1$$

Đặt $t=\log_3 x \Rightarrow (*)$: $t^2+\dfrac{1-t}{t+1}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \\ t=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{9} \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \rightarrow D$

Trắc nghiệm

log3(X)²+log3X(▷ | (log3(X)²+log3X▷ | (log3(X)²+log3X▷
X= 0.1111111111 | X= 1 | X= 3
L−R= 0 | L−R= 0 | L−R= 0

Bài tập rèn luyện

Bài 1. Nghiệm của phương trình $\log_3 x+\log_4 x=\log_5 x$ là :

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

ĐK: x > 0

$\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x + \log_4 3.\log_3 x = \log_5 3 \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Bài 2. Tính trung bình cộng nghiệm của phương trình : $\log_5 x.\log_3 x = \log_5 x + \log_3 x$

A. 2 B.4 C.6 D.8

Lời giải:

Điều kiện : x>0

PT $\Leftrightarrow \log_5 x.\log_3 x - \log_5 x - \dfrac{\log_5 x}{\log_5 3} = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - 1 - \dfrac{1}{\log_3 5}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - \log_3 15\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 0 \\ \log_3 x - \log_3 15 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 15 \end{array}\right.(tm) \to$ D

Bài 3.Tính $\log_2 x_o$ biết x_0 là nghiệm của phương trình: $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$ là:

A. -1 B. -2 C. 0 D. Không tồn tại

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 25^{x+3} - 1 > 0 \\ 5^{x+3} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

PT $\Leftrightarrow \log_2(25^{x+3} - 1) = \log_2 4 + \log_2(5^{x+3} + 1)$

$\Leftrightarrow \log_2(25^{x+3} - 1) = \log_2\left[4.\left(5^{x+3} + 1\right)\right] \Leftrightarrow 25^{x+3} - 1 = 4.5^{x+3} + 4$

$\Leftrightarrow (5^{x+3})^2 - 4.5^{x+3} - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{x-3} = -1 \\ 5^{x+3} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2\,(tm)$

Vậy chọn D nhé các em vì $x_o > 0$

Bài 4. Nghiệm của phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+4) = \log_2(3-x)$

A. $x = -1 + \sqrt{14}; x = \sqrt{11}$ B. $x = -\sqrt{11}; x = 1 + \sqrt{14}$ C. $x = -1 + \sqrt{14}; x = \pm\sqrt{11}$ D. $x = -1 + \sqrt{14}; x = -\sqrt{11}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 4 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Phương trình tương đương:

$\log_2|x-1|-\log_2(x+4)=\log_2(3-x)\Leftrightarrow\log_2|x-1|=\log_2[(3-x)(x+4)]$

$\Leftrightarrow|x-1|=(3-x)(x+4)\Leftrightarrow|x-1|=-x^2-x+12$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2-x+12\ge0\\ \left[\begin{array}{l}x-1=-x^2-x+12\\ x-1=x^2+x-12\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le x\le3\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\pm\sqrt{14}\\ x=\pm\sqrt{11}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1+\sqrt{14}\\ x=-\sqrt{11}\end{array}\right.\to D$$

Bài 5. Nghiệm của phương trình: $3+\dfrac{1}{\log_{32}x}=\log_x\left(\dfrac{89x}{2}-\dfrac{25}{2x}\right)$

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{8}{5}$ C. $\dfrac{3}{8}$ D. $\dfrac{8}{3}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}0<x\ne1\\ \dfrac{89x}{2}-\dfrac{25}{2x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\ne1\\ \dfrac{89x^2-25}{2x}>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{5}{\sqrt{89}},x\ne1$

Phương trình tương đương:

$3+\log_x32=\log_x\dfrac{89x^2-25}{2x}$

$\Leftrightarrow\log_x x^3+\log_x32=\log_x\dfrac{89x^2-25}{2x}$

$\Leftrightarrow32x^3=\dfrac{89x^2-25}{2x}\Leftrightarrow64x^4-89x^2+25=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=\dfrac{25}{64}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ x=\pm\dfrac{5}{8}\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{5}{8}\to A$$

Bài 6. Nghiệm của phương trình : $\log_3\dfrac{3}{x}.\log_2x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt3}=\dfrac12+\log_2\sqrt{x}$

A. $1;2$ **B.** $1;\dfrac{\sqrt2}{8}$ **C.** $\dfrac{\sqrt2}{8};\dfrac{\sqrt3}{8}$ **D.** $1;\dfrac{\sqrt3}{8}$

Lời giải:

Điều kiện : $x>0$

Phương trình tương đương:

$(\log_33-\log_3x).\log_2x-(\log_3x^3-\log_3\sqrt3)=\dfrac12+\dfrac12\log_2x$

$\Leftrightarrow(1-\log_3x).\log_2x-\left(3\log_3x-\dfrac12\right)=\dfrac12+\dfrac12\log_2x$

$\Leftrightarrow\log_2x-\log_2x.\log_3x-3\log_3x+\dfrac12-\dfrac12-\dfrac12\log_2x=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x.\log_3 x - 3\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2\log_2 x.\log_3 x - 6\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2\log_2 x.\log_3 x - \frac{6\log_2 x}{\log_2 3} = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x[1 - 2\log_3 x - 6\log_3 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_3 x = \frac{1}{2} - 3\log_3 2 = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{8}(tm) \end{array}\right. \to \text{D}$$

Bài 7*. Số nghiệm của phương trình: $\log_{3x+7}(4x^2+12x+9) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

A. 0 B.1 C.2 D.4

Gợi ý:

Điều kiện : $\begin{cases} 3x+7>0 \\ 3x+7 \neq 1 \\ 6x^2+23x+21=0 \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow \log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(2x+3)(3x+7) = 4$

$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) = 3$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \left(\log_{3x+7}(2x+3) = t > 0\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow 3x+7 = 2x+3 \to x = -4 \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x+7 = \sqrt{2x+3}(\text{loai}) \end{array}\right. \to B$$

Bài 8*. Số nghiệm của phương trình : $\log_4\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}>0 \\ x+\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x^2-1>0 \end{cases}$

Phương trình tương đương:

$\log_4 20.\log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left[\log_4 20.\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0\\ \log_4 20.\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{x^2-1}=1\\ \log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{20}4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=x-1\\ x+\sqrt{x^2-1}=5^{\log_{20}4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ x^2-1=x^2-2x+1\end{cases}\\ \sqrt{x^2-1}=5^{\log_{20}4}-x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 5^{\log_{20}4}=t\\ x^2+1=t^2-2tx+x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 2tx=a^2-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{2t}\left(t^2-1\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{1}{2.5^{\log_{20}4}}\left(25^{\log_{20}4}-1\right)\end{array}\right.(tm)\to C$$

Bài 9*. Nghiệm của phương trình $\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\log_5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_{15}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ là:

A. $x=1;x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_5 3}+5^{-\log_{15}3}\right)$ B. $x=1;x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_5 3}\right)$

C. $x=1;x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{\log_{15}3}\right)$ D. $x=1;x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_{15}3}\right)$

Lời giải:

Đk: $\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ x-\sqrt{x^2-1}>0\Leftrightarrow x\ge 1.\\ x+\sqrt{x^2+1}>0\end{cases}$

Nhận thấy $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1$ nên ta có:

$$PT\Leftrightarrow\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Sử dụng phép đổi biến cơ số ta có:

$$\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_3 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_3 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$$\log_3 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_5 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0 & (1)\\ \log_3 15.\log_5 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1):

$(1)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=1-x\Leftrightarrow x=1$

Giải (2):

$$(2)\Leftrightarrow \log_3 15.\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}3$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=5^{\log_{15}3}$$

Ta có:

$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}=5^{\log_{15}3}\\ x-\sqrt{x^2-1}=5^{-\log_{15}3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_{15}3}\right)$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1; x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_{15}3}\right)\to D$.

Bài 10*. Nghiệm của phương trình: $\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3+\log_{1/4}(x+6)^3$

A. $x=2; x=1+\sqrt{33}$ B. $x=2; x=2-\sqrt{33}$ C. $x=3; x=1-\sqrt{33}$ D. $x=2; x=1-\sqrt{33}$

Lời giải:

Đk : $-6<x<4; x\neq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3+\log_{1/4}(x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\log_2|x+2|-3=-\frac{3}{2}\log_2(4-x)-\frac{3}{2}\log_2(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(-\log_2|x+2|+\log_2(4-x)+\log_2(x+6)\right)=3$$

$$\Leftrightarrow \log_2|x+2|-\log_2(4-x)-\log_2(x+6)=-2$$

Nếu $-6<x<-2$ phương trình (*) tương đương với:

$$\log_2(-x-2)-\log_2(4-x)-\log_2(x+6)=-2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{-x-2}{(4-x)(x+6)}=-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-2}{(4-x)(x+6)}=-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -4x-8=(-x^2-2x+24)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-32=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{33}\,(loai) \\ x=1-\sqrt{33} \end{array}\right.$$

Nếu $-2<x<6$ khi đó phương trình (*) tương đương với

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2)-\log_2(4-x)-\log_2(x+6)=-2$$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x+2}{(4-x)(x+6)}=-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{(4-x)(x+6)}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)=(4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x-16=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-8\,(loai) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2; x=1-\sqrt{33}\rightarrow D$

Bài 11. Tổng các nghiệm của phương trình: $x^{\log_9 x-2}=3^{3(\log_9 x-1)}$

A. 15 B.452 C.732 D.3

Lời giải:

$$x^{\log_9 x-2}=3^{3(\log_9 x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ (\log_9 x-2)\log_9 x=\frac{1}{2}\left[3(\log_9 x-1)\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2\log^2{}_9 x-7\log_9 x+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} \log_9 x=\frac{1}{2} \\ \log_9 x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=9^3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=9^3 \end{array}\right. \rightarrow C$$

Bài 12. Tích các nghiệm phương trình: $(x-2)^{\log_2 4(x-2)}=4(x-2)^3$

A.3 B. 9 C. 12 D. 15

Lời giải:

TXĐ: x > 2.

$(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 4(x-2)^3 \Leftrightarrow \log_2(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = \log_2 4(x-2)^3 \Leftrightarrow \log_2 4(x-2).\log_2(x-2) = 2+3\log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow (2+\log_2(x-2)).\log_2(x-2) = 2+3\log_2(x-2)$

$t = \log_2(x-2) \Rightarrow (2+t)t = 2+3t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\dfrac{1}{2} \\ x-2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=6 \end{array}\right. \rightarrow D$

Bài 13. Tính $\log_5 a$ với a là nghiệm phương trình: $5^{3-\log_5 x} = 25x$

A.0,5 B.1 C.1,5 D.2

Lời giải:

TXĐ: x > 0.

$5^{3-\log_5 x} = 25x \Leftrightarrow \log_5 5^{3-\log_5 x} = \log_5 25x \Leftrightarrow 3-\log_5 x = 2+\log_5 x \Leftrightarrow \log_5 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \rightarrow A$

Bài 14. Số nghiệm của phương trình: $x^{-6}.3^{-\log_x 3} = 3^{-5}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

TXĐ: x > 0, x khác 1.

$x^{-6}.3^{-\log_x 3} = 3^{-5} \Leftrightarrow \log_3(x^{-6}.3^{-\log_x 3}) = \log_3 3^{-5} \Leftrightarrow -6\log_3 x - \log_x 3 = -5 \Leftrightarrow -6\log_3 x - \dfrac{1}{\log_3 x} = -5$

$\Leftrightarrow 6(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = \dfrac{1}{2} \\ \log_3 x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = \sqrt[3]{3} \end{array}\right. \rightarrow C$

Bài 15. Nghiệm của phương trình $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 6$ (*)

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

TXĐ x > 0.

$t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t \Rightarrow (*): 3^t + (2^t)^{\log_2 3} = 6 \Leftrightarrow 3^t + (2^{\log_2 3})^t = 6 \Leftrightarrow 2.3^t = 6 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2 \rightarrow C$

Bài 16. Tính $\log_4 a$ biết a là nghiệm của phương trình $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}$ (*)

A.0,5 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

TXĐ x > 0, đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$

$\Rightarrow (*): 2^t + (2^t)^{\log_2 3} = (2^t)^{\log_2 5} \Leftrightarrow 2^t + 3^t = 5^t \Leftrightarrow (\frac{2}{5})^t + (\frac{3}{5})^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2 \to A$

Bài 17. Nghiệm của phương trình $\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6$

A. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{28}{27}\\ \log_3 11\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{28}{27}\\ \log_3 9\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{28}{27}\\ \log_3 10\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{27}{28}\\ \log_3 10\end{array}\right.$

Lời giải:

$\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1)\left[1 + \log_3(3^x - 1)\right] = 6$

$t = \log_3(3^x - 1) \Rightarrow t(t+1) = 6 \Leftrightarrow t_1 = -3; t_2 = 2 \Rightarrow x_1 = \log_3 \frac{28}{27}; x_2 = \log_3 10 \to C$

Bài 18. Số nghiệm của phương trình: $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0.$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

- Điều kiện: $x > 0; x \neq 2; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{16}.$

Dễ thấy x = 1 là một nghiệm của phương trình đã cho

- Với $x \neq 1$. Đặt $t = \log_x 2$ và biến đổi phương trình về dạng

$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \to C$

Bài 19. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{5}{x}} 5 + \log_5 25x = 3$ (*)

A.6 B.16 C.26 D.36

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 5 \end{cases}$ Đặt: $t=\log_5 x \Rightarrow (*): \dfrac{1}{1-t}+(t+2)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=25 \end{array}\right. \to C$

Bài 20. Nghiệm của phương trình : $\log_x 2+2\log_{2x} 4=\log_{\sqrt{2x}} 8$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \left\{\dfrac{1}{2};1\right\} \end{cases}$

$\log_x 2+2\log_{2x} 4=\log_{\sqrt{2x}} 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{4}{1+\log_2 x}=\dfrac{6}{1+\log_2 x}$ (*)

Đặt: $t=\log_2 x \Rightarrow (*): \dfrac{1}{t}+\dfrac{4}{t+1}=\dfrac{6}{t+1} \Leftrightarrow 2t=t+1 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=2 \to C$

Bất phương trình Logarit:

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4)\geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$

A. $x\geq 2$ B. $x<2$ C. $\left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq -1 \end{array}\right.$ D. $-1\leq x\leq 2$

Lời giải:

Tự Luận

Bất phương trình tương đương với:

$\begin{cases} 2^{2x+1}-3.2^x>0 \\ 4^x+4\leq 2^{2x+1}-3.2^x \end{cases} \Leftrightarrow 0<4^x+4\leq 2.4^x-3.2^x$

$\Leftrightarrow 4^x-3.2^x-4=0$

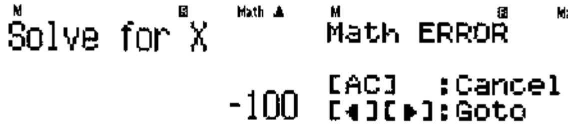
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leq -1 (loai) \\ 2^x\geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geq 2$

Trắc nghiệm các em làm như sau: Các em sẽ thử đáp án

Đầu tiên ta thử với $x\geq 2$ thì chọn $x=100$

Bước 1: Nhập biểu thức: $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4)-\log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$

Vậy A hoặc C đúng thử tiếp với $x=-100$



Vậy loại C nên chọn A.

Ví dụ 2: Nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{\pi}{4}}\left[\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right]<0$ là:

A. $-4<x<1$ B. $\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>2\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>1\end{array}\right.$

Lời giải:

Tự luận

Bất phương trình tương đương với:

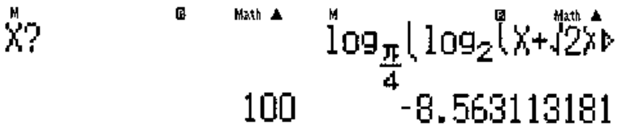
$$\begin{cases}x+\sqrt{2x^2-x}>0\\ \log_2(x+\sqrt{2x^2-x})>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{2x^2-x}>0\\ x+\sqrt{2x^2-x}>2\end{cases}\Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2-x}>2$$

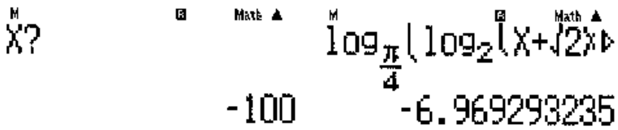
$$\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-x}>2-x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-x<0\\ 2x^2-x\ge 0\end{cases}\vee\begin{cases}2-x\ge 0\\ 2x^2-x>x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ x\le 0\vee x\ge 2\end{cases}\vee\begin{cases}x\le 2\\ x<-4\vee x>1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\x>1\end{array}\right.$$

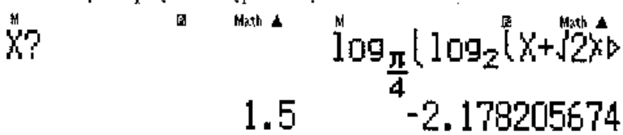
Trắc nghiệm : Ví dụ này các em cũng làm tương tự

Xét đáp án có phạm vi rộng trước: B,C,D => Loại A

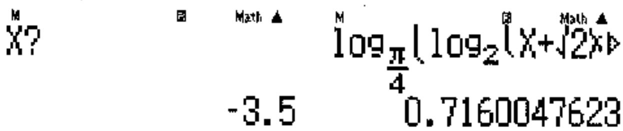




Rồi tới đáp án phạm vi hẹp để loại dần



Do đó loại C



Loại tiếp B.Vậy chọn D

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$

A. $\left[\begin{array}{l}-4<x<-3\\ x>9\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}-4<x<-3\\ x>8\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}-5<x<-3\\ x>8\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}-5<x<-3\\ x>0\end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x+4}>0\\ \log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}>1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x^2+x}{x+4}>6\Leftrightarrow\frac{(x+3)(x-8)}{x+4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4<x<-3\\ x>8\end{array}\right.$$

Ví dụ 4 .Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$

A. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\le x<2\\ 2<x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\le x<1\\ -2<x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\le x<1\\ 2<x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\le x<1\\ -2<x\le 2-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x}>0\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\vee x>2\\ \dfrac{x^2-4x+2}{x}\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x>2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x<0\\ 2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\le x<1\\ 2<x\le 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(2^x+5.2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$ (*)

A. $x\ge 3$ B. $x<3$ C. $\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le -1\end{array}\right.$ D. $x>3$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$

Do $2^x+5.2^{-x}\ge 2\sqrt{5.2^x.2^{-x}}>1$

$\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 2\log_2 x-\log_2(x+6)>\log_{(2^x+5.2^{-x})}1=0$

$\Leftrightarrow\log_2 x^2>\log_2(x+6)\Leftrightarrow x^2>x+6\Leftrightarrow x^2-x-6>0\Leftrightarrow x<-2\cup x>3$

Kết hợp điều kiện: $x>3$

Bài 2: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)<1$ (*)

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}-\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ 0<x<\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<-\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}-\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<-\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$

Lời giải:

$$\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)<1 \Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)<3 \Leftrightarrow \frac{1}{8}<x^2-3<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{8}<x^2<4 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4}<|x|<2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<-\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$$

Bài 3: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}\frac{4x+6}{x}\geq 0$

A. $-2\leq x<-\frac{3}{2}$ B. $-2\leq x<\frac{3}{2}$ C. $-2\leq x<-1$ D. $-2\leq x<0$

Lời giải:

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{4x+6}{x}\geq 0 \Leftrightarrow 0<\frac{4x+6}{x}\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-\frac{3}{2}\end{array}\right.\\ -1\leq x<0\end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x<-\frac{3}{2}$$

Bài 4: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{2x}{4-x}\right)-4}\leq\sqrt{5}$

A. $\left[\begin{array}{l}-\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ -\frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ \frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}-\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ \frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ -\frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}^2\frac{2x}{4-x}-4\geq 0\\ \log_{\frac{1}{2}}^2\frac{2x}{4-x}\leq 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{4-x}\leq -2\\ 2\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{4-x}\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\leq\frac{2x}{4-x}\leq 8\\ \frac{1}{8}\leq\frac{2x}{4-x}\leq\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ \frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$$

Bài 5: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{x(3-x)}(3-x)>1$

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<3\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<2\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<1\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}3-x>0\\ x(3-x)>0, x(3-x)\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<3\\ x^2-3x+1\neq 0\end{cases}$

Bất phương trình tương đương với:

$1-\log_{x(3-x)}(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \log_{x(3-x)}x(3-x)-\log_{x(3-x)}(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \log_{x(3-x)}x<0$

$\Leftrightarrow \left[x(3-x)-1\right](x-1)<0$

$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)(x-1)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện được : $\left[\begin{array}{l}\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3\end{array}\right.$

Bài 6: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}2\le\log_{\sqrt{x+1}}2$

A. $\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\le x\le\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ B. $\left[\begin{array}{l}\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}<x<1\\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}<x<3\end{array}\right.$ C. $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\le x\le\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ D. $\left[\begin{array}{l}\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}<x<2\\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}<x<1\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ \sqrt{x+2}-\sqrt{x}>0,\neq 1 \\ \sqrt{x+1}>0,\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{4} \end{cases} (*)$

Bất phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{\log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}\leq\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\geq \log_2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)-\log_2\sqrt{x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)\geq 0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\geq 1\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+2\geq x+x+1+2\sqrt{x(x+1)}\Leftrightarrow 1-x\geq 2\sqrt{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ (1-x)^2\geq 4x(x+1) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ 3x^2+6x-1\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}\Leftrightarrow \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

Bài 7. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4)\geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$

A. $x\geq 2$ B. $x<2$ C. $\left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq -1 \end{array}\right.$ D. $x>2$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2^{2x+1}-3.2^x>0 \\ 4^x+4\leq 2^{2x+1}-3.2^x \end{cases}\Leftrightarrow 0<4^x+4\leq 2.4^x-3.2^x$$

$$\Leftrightarrow 4^x-3.2^x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leq -1(loai) \\ 2^x\geq 4 \end{array}\right.\Leftrightarrow x\geq 2$$

Bài 8. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{\pi}{4}}\left[\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right]<0$

A. $-1\leq x\leq 4$ B. $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$ C. $1\leq x\leq 4$ D. $\left[\begin{array}{l} x<4 \\ x>-1 \end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+\sqrt{2x^2-x}>0 \\ \log_2(x+\sqrt{2x^2-x})>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2x^2-x}>0 \\ x+\sqrt{2x^2-x}>2 \end{cases} \Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2-x}>2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x}>2-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x<0 \\ 2x^2-x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 2x^2-x>x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le 0 \vee x\ge 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ x<-4 \vee x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$$

Bài 9 .Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right)<0$

A. $-4\le x\le 3$ B. $\left[\begin{array}{l} -4<x<3 \\ x>8 \end{array}\right.$ C. $-4\le x\le 8$ D. $\left[\begin{array}{l} -4<x<-3 \\ x>8 \end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+4}>0 \\ \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>6 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3 \\ x>8 \end{array}\right.$$

Bài 10 .Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$

A. $2-\sqrt{2}\le x<1$ B. $\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}\le x<1 \\ 2<x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$ C. $2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2}$ D. $\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}\le x<1 \\ -2<x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x}>0 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \vee x>2 \\ \dfrac{x^2-4x+2}{x}\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}\le x<1 \\ 2<x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bài 11: Tìm nghiệm của bất phương trình : $1+log_4(x+1)^2\ge 2\log_2\sqrt{x+3}+\log_8(3-x)^3$

A. $-3<x\le 1+2\sqrt{3}$ B. $\left[\begin{array}{l} -3<x\le 1-2\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{2}\le x<3 \end{array}\right.$ C. $-3<x\le 1-2\sqrt{3}$ D. $\left[\begin{array}{l} -3\le x\le 1-2\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{2}\le x<3 \end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}(x+1)^2>0\\ x+3>0\\ 3-x>0\end{cases} \Leftrightarrow -3<x<-1 \cup -1<x<3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2 2|x+1| \geq \log_2(9-x^2) \Leftrightarrow 2|x+1| \geq 9-x^2$

+ Với $-3<x<-1$, *ta có* : $2(-x-1)\geq 9-x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-11\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1-2\sqrt{3} \cup x\geq 1+2\sqrt{3}$

Kết hợp điều kiện : $-3<x\leq 1-2\sqrt{3}$

+ Với $-1<x<3$, *ta có* $2(x+1)\geq 9-x^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1-2\sqrt{2} \cup x\geq -1+2\sqrt{2}$

Kết hợp với $-1<x<3$ ta được $-1+2\sqrt{2}\leq x<3$

Đáp số : $\left[\begin{array}{l}-3<x\leq 1-2\sqrt{3}\\ -1+2\sqrt{2}\leq x<3\end{array}\right.$

Giải các bất phương trình mũ sau:

Ví dụ 1. Tìm nghiệm của bất phương trình : $3^{2-x}+6.3^{1-x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}$

A. $-2<x\leq 3$ B. $\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x>2\end{array}\right.$ C. $-2<x\leq 2$ D. $\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x>3\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2+x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2 \cup x\geq 1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3.3^{1-x}+6.3^{1-x}>3^{3-\sqrt{x^2+x-2}}$

$\Leftrightarrow 9.3^{1-x}>3^{3-\sqrt{x^2+x-2}}$

$\Leftrightarrow 3^{3-x}>3^{3-\sqrt{x^2+x-2}} \Leftrightarrow 3-x>3-\sqrt{x^2+x-2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}>x$

+ Với $x\leq -2$ thì bất phương trình luôn vô nghiệm

+ Với $x\geq 1$, bình phương 2 vế ta có: $x^2+x-2>x^2$

$\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x>2\end{array}\right.$

Trắc nghiệm: Các em vẫn dùng chức năng CALC để tính giá trị biểu thức xét âm dương với các giá trị khác nhau ở 4 đáp án.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của bất phương trình : $2^{\sqrt{x^2-x-6}}<13.2^{x-1}-3.2^{x+1}$

A. $3\leq x<7$ B. $\left[\begin{array}{l}x\leq 3\\ x\geq 7\end{array}\right.$ C. $-3\leq x<7$ D. $\left[\begin{array}{l}x\leq -3\\ x\geq 7\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2-x-6\ge 0 \Leftrightarrow x\le -2 \cup x\ge 3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2-x-6}}<\dfrac{13.2^x}{2}-6.2^x$

$\Leftrightarrow 2^{1+\sqrt{x^2-x-6}}<2^x \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-x-6}<x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-6}<x-1$

+ Với $x\le -2$ thì bất phương trình vô nghiệm

+ Với $x\ge 3$, bình phương 2 vế ta có: $x^2-x-6<x^2-2x+1 \Leftrightarrow x<7$

Kết hợp với $x\ge 3$, ta có: $3\le x<7$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(x^2-2x+3\right)^{\log_{0,5}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)}>1$

A. $3\le x<7$ B. $\left[\begin{array}{l}x\le 3\\ x\ge 7\end{array}\right.$ C. $-3\le x<7$ D. $\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 7\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1}>0\\ x\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow x<-1 \cup x>\dfrac{3}{2}$

Ta có cơ số : $x^2-2x+3=(x+1)^2+2>1$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{0,5}\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x+1}<1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x+1}-1<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-4}{x+1}<0 \Leftrightarrow -1<x<4$

Kết hợp điều kiện : $\dfrac{3}{2}<x<4$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của bất phương trình : $(0,25)^{\sqrt{x^2-2x}}\ge (0,125)^{\frac{2}{3}(2|x-1|-x)}$

A. $x\le 0$ B. $x=2$ C. $x\le 2\cup x=0$ D. $x\le 2$

Lời giải:

Điều kiện : $x^2-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 0 \cup x\ge 2$

Bất phương trình . $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sqrt{x^2-2x}}\ge \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2(2|x-1|-x)}$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x}\le 2(2|x-1|-x)$

+ Với $x\ge 2$, ta có $2\sqrt{x^2-2x}\le 2(2(x-1)-x)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x}\le 2(x-2)$

$\Leftrightarrow x^2-2x\le x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow 2x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2$, kết hợp với $x \ge 2 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm

+ Với $x \le 0$, ta có : $2\sqrt{x^2 - 2x} \le 2\left(2(1-x) - x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} \le 2 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 4 - 12x + 9x^2$

$\Leftrightarrow 8x^2 - 10x + 4 \ge 0$ (luôn thỏa mãn)

Đáp số : $x \le 0 \cup x = 2$

Bài tập rèn luyện

Bài 1.Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{3^x - 4^x}{3^{x+1} - 4^{x+1}} < \dfrac{1}{7}$

A. $-1 < x < 1$ B. $\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 1 \end{array}\right.$ C. $0 < x < 1$ D. $x \ge 1$

Lời giải:

$3^{x+1} \ne 4^{x+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1} \ne 1 \Leftrightarrow x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{7.3^x - 7.4^x}{3.3^x - 4.4^x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{4.3^x - 3.4^x}{3.3^x - 4.4^x} < 0$

$\Leftrightarrow \left(4.3^x - 3.4^x\right)\left(3.3^x - 4.4^x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^x - \dfrac{3}{4}\right]\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^x - \dfrac{4}{3}\right] < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^x < \dfrac{4}{3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

Bài 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} > \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^3$.

A. $-\dfrac{5}{4} < x < 2$ B. $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$ C. $\dfrac{5}{4} < x < 2$ D. $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $x \ne -2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} > \left(5 + 2\sqrt{6}\right)^{-3} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2} > -3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2} + 3 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x+5}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Bài 3. Tìm nghiệm của bất phương trình : $4^x > 2^{x+2} + 32$

A. $x \geq 3$ B. $x < 3$ C. $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$ D. $x > 3$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 4.2^x - 32 > 0$

Đặt $2^x = t > 0$. Khi đó bất phương trình trở thành $t^2 - 4t + 32 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -4 (\text{loai}) \\ t > 8 \end{array}\right.$

Với $t > 8$, ta có : $2^x > 8 = 2^3 \Leftrightarrow x > 3$

Đáp số : $x > 3$

Bài 4. Tìm nghiệm của bất phương trình : $16^x - 20.4^x + 64 \geq 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$ B. $1 < x < 2$ C. $\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$ D. $1 \leq x \leq 2$

Lời giải:

Đặt $4^x = t > 0$ thì bất phương trình trở thành : $t^2 - 20t + 64 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 4 \\ t \geq 16 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $t > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 4 \\ t \geq 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 4^x \leq 4 \\ 4^x \geq 16 = 4^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Bài 5. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{8.3^x}{9.\left(3^x - 2^x\right)} \leq \dfrac{3^x + 2^x}{3^x}$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_2 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$ B. $0 < x < \log_2 3$ C. $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_{\frac{3}{2}} 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$ D. $0 \leq x \leq \log_{\frac{3}{2}} 3$

Lời giải:

Điều kiện : $3^x - 2^x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{8.\left(\dfrac{3}{2}\right)^x}{9\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 1\right]} \leq \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x + 1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x}$

Đặt : $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = t,\ 0 < t \neq 1$. Khi đó bất phương trình trở thành $\dfrac{8t}{9(t-1)} \leq \dfrac{t+1}{t}$

$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t} - \frac{8t}{9(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 9}{t(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ 0 < t < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x \geq 3 \\ 0 < \left(\dfrac{3}{2}\right)^x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \log_{\frac{3}{2}} 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$$

Bài 6. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(\sqrt{5} - 1\right)^x + \left(\sqrt{5} + 1\right)^x - 2^{x + \frac{3}{2}} \leq 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ x \leq \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$

B. $\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \leq x \leq \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$

C. $\left[\begin{array}{l} x > \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ x < \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$

D. $\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) < x < \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x - 2\sqrt{2} \leq 0$

Đặt $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x = t,\ t > 0$ khi đó $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$

Bất phương trình trở thành $t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq t \leq \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x \leq \sqrt{2} + 1$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \leq x \leq \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$

Bài 7. Tìm nghiệm của bất phương trình : $4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq \frac{7}{2} \\ x \leq 3 \end{array}\right.$ B. $3 \leq x < \frac{7}{2}$ C. $\left[\begin{array}{l} x \geq \frac{7}{2} \\ x < 3 \end{array}\right.$ D. $3 < x < \frac{7}{2}$

Lời giải:

Điều kiện : $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \cup x \geq 3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4.4^{\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$

$\Leftrightarrow 4^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} - 3.2^{\sqrt{x^2-2x-3}} - 4 > 0$

Đặt $\Leftrightarrow 2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} = t$

Khi đó ta có bất phương trình $t^2 - 3t - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 (\text{loai}) \\ t > 4 \end{array}\right.$

Với t > 4 ta có $2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} > 4 = 2^2$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-2x-3}>2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}<x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x^2-2x-3<(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $3 \le x < \dfrac{7}{2}$

Bài 8. Tìm nghiệm của bất phương trình : $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}>24$

A. $x<-1 \cup x>1$ B. $x \le -1 \cup x \ge 1$ C. $x \le -1$ D. $x>1$

Lời giải: Bất phương trình $\Leftrightarrow 5.5^{x^2}-\dfrac{5}{5^{x^2}}>24$

Đặt $5^{x^2}=t$. Khi đó ta có bất phương trình $5t^2-24t-5>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-\dfrac{1}{5} \quad \text{(loại)} \\ t>5 \end{array}\right.$ Với t > 5, ta có : $5^{x^2}>5 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x<-1 \cup x>1$

Đáp số : $x<-1 \cup x>1$

Bài 9. Tìm nghiệm của bất phương trình : $5.3^{2x-1}-7.3^{x-1}+\left|3^{x+1}-1\right| \le 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \ge \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right) \\ x \le \log_3\left(\dfrac{1}{5}\right) \end{array}\right.$ B. $\log_3\left(\dfrac{1}{5}\right) \le x \le \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right)$ C. $\left[\begin{array}{l} x \ge \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right) \\ x \le \log_3\left(\dfrac{2}{5}\right) \end{array}\right.$ D. $\log_3\left(\dfrac{2}{5}\right) \le x \le \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right)$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5.\dfrac{3^{2x}}{3}-7.\dfrac{3^x}{3}+\left|3.3^x-1\right| \le 0$

$\Leftrightarrow 5.3^{2x}-7.3^x+3\left|3.3^x-1\right| \le 0$

Đặt $3^x=t,\ t>0$ thay vào bất phương trình ta có : $5t^2-7t+3|3t-1| \le 0$

+ Với $0<t<\dfrac{1}{3}$ thì ta có :

$5t^2-7t+3(-3t+1) \le 0 \Leftrightarrow 5t^2-16t+3 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \le t \le 3$

Kết hợp với $0<t<\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{5} \le t < \dfrac{1}{3}$ (1)

+ Với $t \ge \dfrac{1}{3}$ thì ta có :

$5t^2-7t+3(3t-1)\le 0 \Leftrightarrow 5t^2+2t-3\le 0$

$\Leftrightarrow -1\le t\le \frac{3}{5}$ (2)

Hợp nghiệm (1) với (2) ta có : $\frac{1}{5}\le t\le \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\le 3^x\le \frac{3}{5}\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{5}\right)\le x\le \log_3\left(\frac{3}{5}\right)$

Bài 10. Tìm nghiệm của bất phương trình : $3^{\frac{x+3}{5x-2}}-4\ge 5^{\frac{9x-7}{5x-2}}$

A. $\left[\begin{array}{l}x\ge \frac{7}{9}\\ x\le \frac{2}{5}\end{array}\right.$ B. $\frac{2}{5}<x\le \frac{7}{9}$ C. $\left[\begin{array}{l}x\ge \frac{7}{9}\\ x<\frac{2}{5}\end{array}\right.$ D. $\frac{2}{5}<x<\frac{7}{9}$

Lời giải: Điều kiện $x\ne \frac{2}{5}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{5x-2}}-4\ge 5.3^{2-\frac{x+3}{5x-2}}$

Đặt $3^{\frac{x+3}{5x-2}}=t$. Bất phương trình trở thành $t^2-4t-45\ge 0\Rightarrow t\ge 9$ ($do\ t>0$)

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x+3}{5x-2}}\ge 9\Leftrightarrow \frac{x+3}{5x-2}\ge 2\Leftrightarrow \frac{x+3}{5x-2}-2\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{7-9x}{5x-2}\ge 0\Leftrightarrow \frac{2}{5}<x\le \frac{7}{9}$

Bài 11. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{2^{x+3}-2}+\frac{2^x+1}{\sqrt{2}}<\sqrt{4^x+9.2^{x+1}-3}$

A. $x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right)$ B. $\begin{cases}x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right)\\ x\ne \log_2\left(7+\sqrt{44}\right)\end{cases}$ C. $x\ge \log_2\left(-7+\sqrt{84}\right)$ D. $x>1$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}2^{x+3}-2\ge 0\\ 4^x+9.2^{x+1}-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x+3\ge 1\\ 4^x+18.2^x-3\ge 0\Leftrightarrow 2^x\ge -9+\sqrt{84}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right)\end{cases}$

$x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right)$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2^{x+3}-2}\ge 0\Rightarrow u^2=8.2^x-2\\ v=\frac{2^x+1}{\sqrt{2}}>0\Rightarrow v^2=\frac{1}{2}\left(4^x+2.2^x+1\right)\end{cases}$

Khi đó bất phương trình trở thành $u+v<\sqrt{2u^2+2v^2}$

$\Leftrightarrow u^2+2uv+v^2<2u^2+2v^2$

$\Leftrightarrow u^2-2uv+v^2>0 \Leftrightarrow (u-v)^2>0 \Leftrightarrow u\neq v$

$\Leftrightarrow u^2\neq v^2 \Leftrightarrow 8.2^x-2\neq \frac{1}{2}\left(4^x+2.2^x+1\right)$

$\Leftrightarrow 4^x-14.2^x+5\neq 0$

$\Leftrightarrow 2^x\neq 7\pm\sqrt{44} \Leftrightarrow x\neq \log_2\left(7\pm\sqrt{44}\right)$

Đáp số : $\begin{cases} x\geq \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right) \\ x\neq \log_2\left(7+\sqrt{44}\right) \end{cases}$

Bài 12. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(31+8\sqrt{15}\right)^x+2\left(4-\sqrt{15}\right)^x\leq 3$

A. $x<-1\cup x=0$ B. $x\leq -1\cup x\geq 0$ C. $x=0$ D. $x>0$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(4+\sqrt{15}\right)^{2x}+2\left(4-\sqrt{15}\right)^x\leq 3$

Đặt $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=t\Rightarrow \left(4-\sqrt{15}\right)^x=\frac{1}{t},\ t>0$

Khi đó ta có bất phương trình $t^2+\frac{2}{t}-3\leq 0\Leftrightarrow t^3-3t+2\leq 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)\leq 0\Leftrightarrow (t-1)^2\leq 0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x=0$

Bài 13. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x\right)>-1$

A. $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$ B. $-1<x<4$ C. $\left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$ D. $2<x<4$

Lời giải:

Điều kiện : $x^2-2x>0\Leftrightarrow x<0\cup x>2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2-2x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ đáp số : $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$

Bài 14. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\leq -1$

A. $x<-1\cup x=0$ B. $x\leq -1\cup x\geq 1$ C. $x>1$ D. $x\geq 1$

Lời giải:

Điều kiện : $x>-2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x+2 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \Leftrightarrow x \geq 1$

Bài 15. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1} < 0$

A. $x<-1 \cup x>2$ B. $x<1 \cup x>2$ C. $x<0 \cup x>1$ D. $x \geq 2$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1 \cup x>\frac{1}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} > 0$

$\Leftrightarrow x<-1 \cup x>2$

Bài 16. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_2\left(2^x-1\right).\log_4\left(2^{x+1}-2\right) < 3$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_2 5 \\ x \leq \log_2 \frac{9}{8} \end{array}\right.$ B. $\log_2 \frac{9}{8} < x < \log_2 5$ C. $\left[\begin{array}{l} x > \log_2 5 \\ x < \log_2 \frac{9}{8} \end{array}\right.$ D. $\log_2 \frac{9}{8} \leq x \leq \log_2 5$

Lời giải:

Điều kiện : $2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(2^x-1).\log_2\left[2(2^x-1)\right] < 3$

$\Leftrightarrow \log_2(2^x-1).\left[1+\log_2(2^x-1)\right] < 6$

Đặt $\log_2(2^x-1) = t$

Khi đó ta có bất phương trình $t^2+t-6<0 \Leftrightarrow -3<t<2$

$\Leftrightarrow -3 < \log_2(2^x-1) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} < 2^x - 1 < 4$

$\Leftrightarrow \frac{9}{8} < 2^x < 5 \Leftrightarrow \log_2 \frac{9}{8} < x < \log_2 5$

Bài 17. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{x-1}(x^3-3x+2) + \log_{x+2}(x^2+x-2) > 5$

A. $x<-2 \cup x=0$ B. $x \leq -2 \cup x \geq 2$ C. $x>2$ D. $x \geq 2$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{x-1}\left[(x-1)^2(x+2)\right] + \log_{x+2}\left[(x+2)(x-1)\right] > 5$

Điều kiện : $1 < x \neq 2 \Leftrightarrow 1, x < 2 \cup x > 2$

$\Rightarrow \log_{x-1}(x+2) + \log_{x+2}(x-1) - 2 > 0$

Đặt $t = \log_{x-1}(x+2)$, thay vào bất phương trình ta có : $t + \frac{1}{t} - 2 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 1 \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<t<1 \\ t>1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\log_{x-1}(x+2)<1 \\ \log_{x-1}(x+2)>1 \end{array}\right.$

+ Với $x>2$ thì ta có : $\left[\begin{array}{l} 1<x+2<x-1 \ (1) \\ x+2>x-1 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) vô nghiệm ; (2) luôn thỏa mãn.

+ Với $1<x<2$ thì ta có : $\left[\begin{array}{l} x-1<x+2<1 \ (3) \\ x+2<x-1 \ (4) \end{array}\right.$ (vô nghiệm)

Đáp số : $x>2$

Bài 18. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}} \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq \frac{12}{5} \end{array}\right.$ B. $0<x<\frac{12}{5}$ C. $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<\frac{12}{5} \end{array}\right.$ D. $0 \leq x \leq \frac{12}{5}$

Lời giải:

Điều kiện $x>0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\log_3 \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]<0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[\log_5^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]<0$

$\Leftrightarrow \log_5^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1$

$-1<\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>-1 \\ \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x>\frac{1}{5} \\ \sqrt{x^2+1}+x<5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{x^2+1}>1-5x \\ \sqrt{x^2+1}<5-x \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\frac{12}{5}$

Bài 19. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\frac{\log_3(x+1)^2-\log_4(x+1)^3}{x^2-5x+6}>0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{array}\right.$ B. $0<x<6$ C. $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<6 \end{array}\right.$ D. $0 \leq x \leq 6$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases}(x+1)^2>0\\(x+1)^3>0\\x^2-5x-6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -1\\x>-1\\x\neq -1;6\end{cases} \Leftrightarrow -1<x\neq 6$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_3(x+1)-3.\log_4 3.\log_3(x+1)}{x^2-5x-6}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(2-3\log_4 3\right).\log_3(x+1)}{x^2-5x-6}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)}{x^2-5x-6}<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x-6>0\\\log_3(x+1)<0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-5x-6<0\\\log_3(x+1)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1, x>6\\x<0\end{cases} \Leftrightarrow x<-1 \quad \text{(loại)}\\\begin{cases}-1<x<6\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x<6\end{array}\right.$

Đáp số : $0<x<6$

Bài 20. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(4^x-12.2^x+32\right).\log_2(2x-1)\leq 0$

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2\leq x\leq 3\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<1\\2\leq x\leq 3\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2<x<3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2<x\leq 3\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $x>\dfrac{1}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^x-12.2^x+32\leq 0\\\log_2(2x-1)\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}4^x-12.2^x+32\geq 0\\\log_2(2x-1)\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4\leq 2^x\leq 8\\2x-1\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow 2\leq x\leq 3\\\begin{cases}2^x\leq 4\cup 2^x\geq 8\\0<2x-1\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x\leq 1\end{array}\right.$

Đáp số : $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2\leq x\leq 3\end{array}\right.$

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

Chuyên đề Số phức cung cấp cho các em kiến thức cơ bản và các dạng bài toán quen thuộc. Đồng thời cung cấp cho các em Skill dùng máy tính CASIO bổ trợ giúp giải trắc nghiệm nhanh hơn. Máy tính chỉ là "cây kiếm sắc" giúp các em giải nhanh khi các em hiểu bản chất của vấn đề☺

1.1 SỐ PHỨC CƠ BẢN

A. Kiến thức cơ bản:

1. Khái niệm chung:

- **Tập hợp** $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức.
- **Số i** là nghiệm của phương trình $x^2+1=0$ hay $i^2=-1$.
- Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$ được gọi là **một số phức**.

  Ví dụ: $2+3i$; $-\sqrt{2}+4i$; $1+(-3)i$ (còn viết là $1-3i$); $1+\sqrt{2}i$ (còn viết là $1+i\sqrt{2}$)
- Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

  a là **phần thực**

  b là **phần ảo**

  i là **đơn vị ảo**.
- Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0: $a = a + 0i$.

  Mỗi số thực cũng là một số phức. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Số phức $0 + bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi: $bi = 0 + bi$.
- Đặc biệt: $i = 0 + 1i$

  $0 = 0 + 0i$.

2. Hai số phức bằng nhau:

Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

Cho hai số phức: $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$)

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'$$

3. Biểu diễn hình học số phức:

Điểm M(a ; b) trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z = a + bi$.

- Mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức như vậy gọi là **mặt phẳng phức**.
- Gốc tọa độ O biểu diễn số 0.
- Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, nên trục Ox còn gọi là **trục thực**.

- Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, nên trục Oy còn gọi là **trục ảo**.

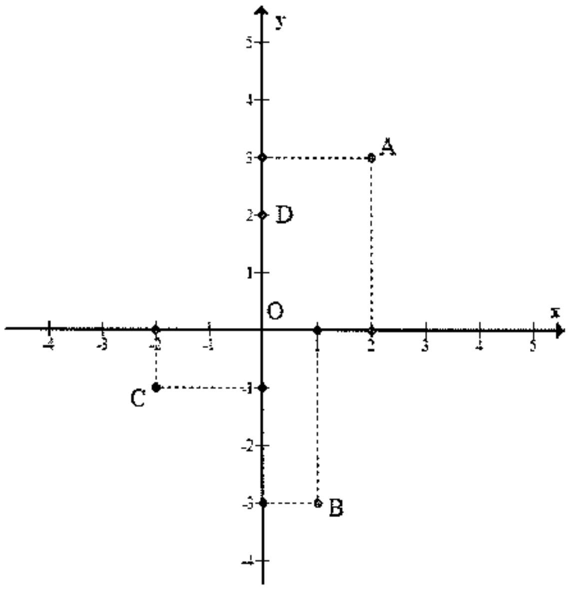
* Ví dụ:

- Điểm A biểu diễn số phức $2 + 3i$.

- Điểm B biểu diễn số phức $1 - 3i$.

- Điểm C biểu diễn số phức $-2 - 1i$.

- Điểm D biểu diễn số phức $2i$.



4. Môđun của số phức:

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được kí hiệu là $|z|$.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

5. Số phức liên hợp:

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z.

Kí hiệu: $\bar{z} = a - bi$.

- Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox.
- Ta có: $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$.

B. Bài tập ví dụ:

<u>Dang 1:</u> Các bài toán tìm số phức, Tìm phần thực, phần ảo của số phức ,tính modun, tìm số phức liên hợp và các đại lượng khác:

Ví dụ 1: Xác định phần thực và phần ảo của các số phức sau:

a) $z = 1 + 5i$ b) $z = 2$

c) $z = 3i$ d) $z = 0$

Bình luận: Đây là phần dễ, tuy nhiên không được chủ quan, học sinh khi đi thi thường coi thường phần này mà không chịu để ý kĩ.

- Lỗi sai cơ bản học sinh thường mắc lỗi đó là trả lời "Phần ảo là $5i$". Với số phức $z = a + bi$ thì **phần ảo là b** chứ không phải là bi.
- *Lời giải:*

a) $z = 1 + 5i$ có phần thực là 1, phần ảo là 5.

b) $z = 2$ có phần thực là 2, phần ảo là 0 (đây là một số thực).

c) $z = 3i$ có phần thực là 0, phần ảo là 3 (đây là một số ảo).

d) $z = 0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0 (vừa là số thực vừa là số ảo).

Ví dụ 2: Cho số phức: $z = (2x + 4) + (3 - y)i$ (với $x, y \in \mathbb{R}$). Tìm x, y để:

a) z là số thực.

b) z là số ảo.

- *Lời giải:*

a) z là số thực $\Leftrightarrow 3 - y = 0 \Leftrightarrow y = 3$.

b) z là số ảo $\Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Ví dụ 3: Tìm môđun của các số phức sau:

a) $z_1 = 3 + 4i$; b) $z_2 = 12 - 5i$.

- *Lời giải:*

a) $|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

b) $|z_2| = |12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$.

Ví dụ 4: Tìm số phức liên hợp của các số phức sau:

a) $z_1 = 2 + 2i$; b) $z_2 = 1 - i$;

c) $z_3 = -3$; d) $z_4 = i$.

- *Lời giải:*

a) $\overline{z_1} = 2 - 2i$; b) $\overline{z_2} = 1 + i$;

c) $\overline{z_3} = -3$; d) $\overline{z_4} = -i$.

Ví dụ 5: Tìm x, y ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn:

a) $2x - y + (5x + 4)i = 3 + (3y + 11)i$ (1)

b) $2x + 3y - 2i = x + (x + y)i$ (2)

- *Lời giải:*

a) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 4 = 3y + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

b) $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$.

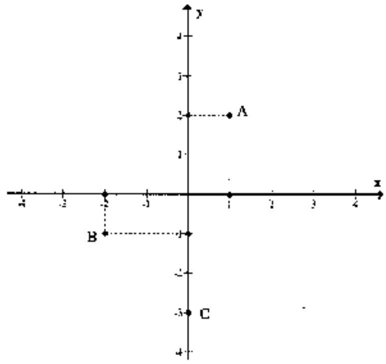
Dạng 2: Biểu diễn hình học số phức:

Ví dụ 1: Cho các số phức $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -2 - 1i$; $z_3 = -3i$.

Biểu diễn các số phức trên trong mặt phẳng tọa độ.

Bình luận: Đây là dạng dễ kiếm điểm, dễ làm.

Lời giải:



Điểm A(1 ; 2) biểu diễn số phức $z_1 = 1 + 2i$.

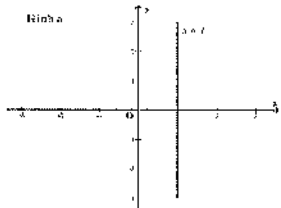
- Điểm B(-2 ; -1) biểu diễn số phức $z_2 = -2 - 1i$.

- Điểm C(0 ; -3) biểu diễn số phức $z_3 = -3i$.

Ví dụ 2: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: a)Phần thực của z bằng 1. b)Phần ảo của z bằng -2.

Giả sử $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, khi đó trên mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm $M(x\,;y)$ biểu diễn số phức z.

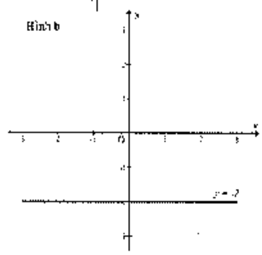
a) Phần thực của z bằng 1.



* *Lời giải:* Phần thực của z bằng 1, tức là $x = 1$, $y \in \mathbb{R}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x = 1$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy (hình a).

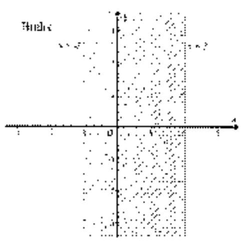
b) Phần ảo của z bằng -2.



* *Lời giải:* Phần ảo của z bằng -2, tức là $y = -2$, $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $y = -2$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hình b).

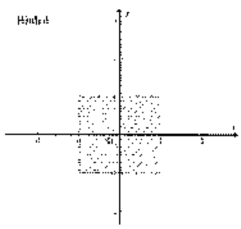
c) Phần thực của z thuộc khoảng (-1 ; 2).



* *Lời giải:* Tức là $x \in (-1\,;2)$, $y \in \mathbb{R}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các điểm nằm giữa hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ (phần gạch chéo) trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hình c).

d) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn [-1;1].



* *Lời giải:* Tức là $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

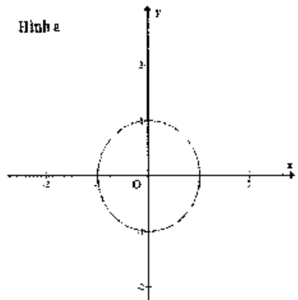
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các điểm thuộc hình vuông (kể cả cạnh) được vẽ trên hình d mặt phẳng tọa độ Oxy.

Ví dụ 3: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $|z| = 1$.

Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$

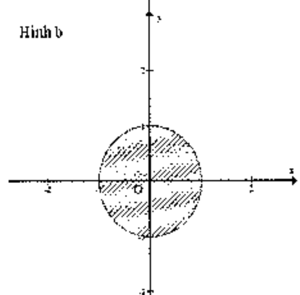
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 (hình a).



b) $|z| \leq 1$.

Ta có: $|z| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hình tròn tâm O, bán kính bằng 1 (kể cả các điểm trên

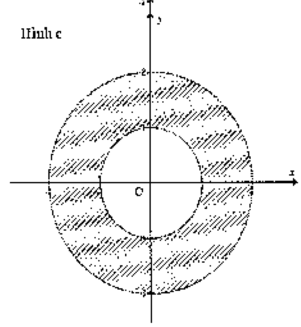


đường tròn) (hình b).

c) $1 < |z| \leq 2$.

Ta có: $1 < |z| \leq 2 \Leftrightarrow 1 < x^2 + y^2 \leq 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là phần nằm

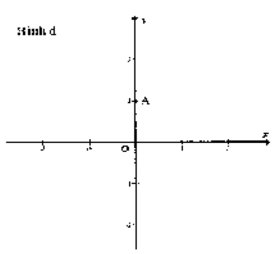


giữa đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 (không kể điểm trên đường tròn này) và đường tròn tâm O, bán kính bằng 2 (kể cả các điểm trên đường tròn này).

d) $|z| =1$ và phần ảo của z bằng 1.

Phần ảo bằng 1 tức là $y = 1$

$|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$



Vậy tập hợp các điểm cần tìm là A (0;1) (hình d).

1.2 Cộng, trừ, nhân và chia số phức

A. Kiến thức cơ bản:

I. Phép cộng và phép trừ:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i\ ;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a + c) - (b + d)i\ .$$

II. Phép nhân:

1. Các giá trị lũy thừa của i: các em nhớ cho thầy: $i^2 = -1$

Ta có: $i^3 = i^2.i = -i;$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$

Tổng quát: $i^{4k} = 1$;

$i^{4k+1} = i$;

$i^{4k+2} = -1$;

$i^{4k+3} = -i$. $(k \in \mathbb{Z})$

2. Phép nhân:

Cách tính: $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd.$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

- **Chú ý:** Ta không nên học thuộc công thức tổng quát trên, sẽ dễ dẫn đến nhớ nhầm lẫn, khuyên dùng nên trình bày như cách tính, vừa không phải nhớ nhiều công thức dễ gây lẫn lộn, vừa chính xác hơn.
- Phép cộng và phép nhân các số phức có tất cả các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực.

III. Phép chia:

1. Số phức nghịch đảo:

Cho số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Số phức z' là **số phức nghịch đảo** của z:

$$z' = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

2. Phép chia:

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z.

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i.$$

- **Chú ý:** Trong thực hành, để tính thương $\frac{c+di}{a+bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a+bi$.

Bài tập ví dụ:

Dạng 1: Phép cộng, phép trừ:

1. Ví dụ 1: Thực hiện các phép cộng số phức sau:

a) $(2+4i)+(1+5i)$; b) $(3-i)+(4-2i)$;

c) $(-1+i)+(-1-2i)$; d) $(5-i)+(-5+i)$.

- *Lời giải:*

a) $(2+4i)+(1+5i)=(2+1)+(4+5)i=3+9i$.

b) $(3-i)+(4-2i)=(3+4)+\left[(-1)+(-2)\right]i=7-3i$.

c) $(-1+i)+(-1-2i)=-2-i$.

d) $(5-i)+(-5+i)=0$.

2. Ví dụ 2: Thực hiện các phép trừ số phức sau:

a) $(12+4i)-(6+2i)$; b) $(-3-i)-(3+2i)$;

c) $(2+5i)-(-2-8i)$; d) $(19-9i)-(19-9i)$.

- *Lời giải:*

a) $(12+4i)-(6+2i)=(12-6)+(4-2)i=6+2i$.

b) $(-3-i)-(3+2i)=(-3-3)+(-1-2)i=-6-3i$.

c) $(2+5i)-(-2-8i)=4+13i$.

d) $(19-9i)-(19-9i)=0$.

Dạng 2: Phép nhân:

Ví dụ 1: Thực hiện các phép nhân sau:

a) $(4+2i)(2+5i)$; b) $(3-i)(2-3i)$;

c) $(-3+4i)(1-i)$; d) $(3+2i)(1+i)(2-2i)$.

- *Lời giải:*

a) $(4+2i)(2+5i)=8+20i+4i+10i^2=(8-10)+(20+4)i=-2+24i$.

b) $(3-i)(2-3i)=6-9i-2i+3i^2=(6-3)-(9+2)i=3-11i$.

c) $(-3+4i)(1-i)=(-3)+3i+4i-4i^2=1+7i$.

d) $(3+2i)(1+i)(2-2i)=(3+3i+2i+2i^2)(2-2i)$

$=(1+5i)(2-2i)=2-2i+10i-10i^2=12+8i$.

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(2+5i)^2$; b) $(3-4i)^2$;

c) $(2+i)^3$; d) $(1-3i)^3$.

- *Lời giải:*

a) $(2+5i)^2=2^2+2.2.5i+(5i)^2=4+20i-25=-21+20i$.

b) $(3-4i)^2=-7-24i$.

c) $(2+i)^3=2^3+3.2^2.i+3.2.i^2+i^3$

$=8+12i-6-i=2+11i$.

d) $(1-3i)^3=-26+18i$.

<u>Dạng 3:</u> Phép chia:

Ví dụ 1: Thực hiện phép chia số phức sau:

a) $\frac{14+22i}{1+4i}$; b) $\frac{16+11i}{3-2i}$.

- *Lời giải:*

a) $\frac{14+22i}{1+4i}=\frac{(14+22i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{14-56i+22i-88i^2}{1^2-(4i)^2}=\frac{102-34i}{17}=6-2i$.

b) $\frac{16+11i}{3-2i}=\frac{(16+11i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{48+32i+33i+22i^2}{3^2-(2i)^2}=\frac{26+65i}{13}=2+5i$.

2. Ví dụ 2: Tìm số phức z thỏa mãn:

a) $z.(4+5i)=17+11i$; b) $5-3i=\frac{43+15i}{z}$.

* *Lời giải:*

a) $z.(4+5i)=17+11i \Leftrightarrow z=\frac{17+11i}{4+5i}=\frac{(17+11i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{123-41i}{41}=3-i$.

Vậy $z=3-i$.

b) Điều kiện: $z\neq 0$.

$5-3i=\frac{43+15i}{z}\Leftrightarrow z=\frac{43+15i}{5-3i}=\frac{(43+15i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}=\frac{170+204i}{34}=5+6i$.

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $z = 5 + 6i$.

1.3 Phương trình bậc hai với hệ số thực

A. Kiến thức cơ bản:

1. Căn bậc hai của số thực âm:

Từ đẳng thức $i^2 = -1$, ta nói i là một căn bậc hai của -1; $-i$ cũng là căn bậc hai của -1, vì $(-i)^2 = -1$.

Tổng quát: **Các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.**

Ví dụ: Căn bậc hai của -2 là $\pm i\sqrt{2}$.

Căn bậc hai của -3 là $\pm i\sqrt{3}$.

Căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$.

2. Căn bậc hai của số phức:

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là $(x + yi)^2 = a + bi$.

Do $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \ (1) \\ 2xy = b \ (2) \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên (thay phương trình (2) vào phương trình (1)), hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x_0 ; \frac{b}{2x_0}\right); \left(-x_0 ; -\frac{b}{2x_0}\right)$.

Vậy số phức w có đúng hai căn bậc hai (hai số đối nhau).

3. Phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Xét biệt số $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ của phương trình. Ta thấy:

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}$;
- Khi $\Delta > 0$, có hai căn bậc hai (thực) của Δ là $\pm\sqrt{\Delta}$ và phương trình có hai nghiệm thực phân biệt, được xác định bởi công thức:
  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$
- Khi $\Delta < 0$, phương trình không có nghiệm thực vì không tồn tại căn bậc hai thực của Δ.

Tuy nhiên, trong trường hợp $\Delta < 0$, nếu xét trong tập hợp số phức, ta vẫn có hai căn bậc hai thuần ảo của Δ là $\pm i\sqrt{|\Delta|}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

*** Nâng cao:** Phương trình bậc hai với hệ số phức:

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$z_1 = \frac{-b+\gamma}{2a}$; $z_2 = \frac{-b-\gamma}{2a}$.

Trong đó γ là một căn bậc hai của Δ.

*** Chú ý:** Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm (không nhất thiết phân biệt).

Bài tập ví dụ:

<u>Dạng 1:</u> Tìm căn bậc hai trên tập số phức:

Ví dụ 1: Tìm căn bậc hai của các số thực sau: –5; –6; –16; –20.

- *Lời giải:*

Số thực	-5	-6	-16	-20
Căn bậc hai của số thực	$\pm i\sqrt{5}$	$\pm i\sqrt{6}$	$\pm 4i$	$\pm 2i\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a) $w = 5 + 12i$; b) $w = 15 - 8i$.

- *Lời giải:*

a) $w = 5 + 12i$

* Cách 1: Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của số phức w.

Ta có $z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5\ (1) \\ y = \frac{6}{x}\ (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta có: $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

- Với $x = 3 \Longrightarrow y = 2 \Longrightarrow z_1 = 3 + 2i$.
- Với $x = -3 \Longrightarrow y = -2 \Longrightarrow z_2 = -3 - 2i$.

Vậy w có hai căn bậc hai là $3 + 2i$ và $-3 - 2i$.

* Cách 2:

Mẹo: Ta thấy $\begin{cases} 12 = 2.3.2 \\ 5 = 9 - 4 = 3^2 + (2i)^2 \end{cases}$

Bài làm:

Ta có: $w = 5 + 12i = 9 + 12i - 4 = 3^2 + 2.3.2i + (2i)^2 = (3 + 2i)^2$

Vậy w có hai căn bậc hai là $3 + 2i$ và $-3 - 2i$.

*** Lưu ý:**

- Khuyến khích làm theo cách 1, tuy dài hơn cách 2 nhưng sẽ có đáp án chính xác. Chỉ áp dụng cách 2 khi đã nhìn ngay thấy mẹo, vì đôi khi chưa nhìn ngay thấy mẹo mà phải thử các trường hợp thì thời gian để thử mẹo của cách 2 có thể còn dài hơn làm cách 1.

- Nên thử lại bằng máy tính bỏ túi (cách dùng máy tính bỏ túi trên tập số phức sẽ hướng dẫn ở cuối chuyên đề).

Ví dụ: Sau khi làm xong ví dụ a, thử lại máy tính bằng cách tính phép tính $(3 + 2i)^2$ và $(-3 - 2i)^2$ thấy hiện kết quả $5 + 12i$ vậy là đáp án đúng.

b) $w = 15 - 8i$ có hai căn bậc hai là $4 - i$ và $-4 + i$.

* Cách 1: Như ví dụ a.

* Cách 2: $w = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = 4^2 - 2.4.i + i^2 = (4 - i)^2$.

<u>**Dạng 2:**</u> **Giải phương trình bậc hai với hệ số thực:**

Ví dụ: Giải phương trình sau trên tập số phức: $z^2 - 2z + 5 = 0$

- *Lời giải:*

Ta có: $\Delta = (-2)^2 - 4.1.5 = -16 < 0$

$\Delta = -16 = (\pm 4i)^2$ Δ có hai căn bậc hai là $4i$ và $-4i$

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$; $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$.

- ***Lưu ý:***
  - Trong bài tập về giải phương trình bậc hai trên tập số thực, ta có biết đến biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$. Biệt thức này cũng đúng với phương trình bậc hai trên tập số phức.
  - Tuy nhiên, trong SGK không đề cập đến biệt thức Δ'. Theo ý kiến cá nhân của người viết sách và kinh nghiệm từ thầy cô giáo đã tham gia chấm thi Đại học, chúng ta nên tính theo biệt thức Δ. Vì một số thầy cô giáo có thể vẫn chấp nhận biệt thức Δ', số khác có thể trừ điểm bài làm chúng ta.
- ***Chú ý:***
  - Ta có thể kiểm tra lại đáp số bằng máy tính bỏ túi.
  - Cách giải phương trình bậc hai bằng máy tính bỏ túi đề cập ở cuối chuyên đề.

<u>**Dạng 3:**</u> **Giải phương trình bậc hai với hệ số phức:**

- ***Lưu ý:*** Dạng toán này là dạng toán nâng cao, không đề cập đến trong SGK, và cũng không có khả năng xuất hiện trong đề thi tuyển sinh Đại học. Nhưng chúng ta vẫn nên biết cách làm để phục vụ cho bài kiểm tra ở lớp và phòng trường hợp xuất hiện trong đề thi Đại học.

Ví dụ 1: Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$z^2 + (3-2i)z + 5 - 5i = 0$$

- *Lời giải:*

- Bước 1: Xét $\Delta = (3-2i)^2 - 4.1.(5-5i) = -15 + 8i$.

- Bước 2: Xác định căn bậc hai của Δ:

* Cách 1: Gọi $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của Δ.

Ta có: $\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \ (1) \\ b = \frac{4}{a} \ (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) $\Rightarrow a^2 - \left(\frac{4}{a}\right)^2 = -15 \Leftrightarrow a^4 + 15a^2 - 16 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

$$\Rightarrow b = \pm 4.$$

$\Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $1 + 4i$ và $-1 - 4i$.

* Cách 2: $\Delta = -15 + 8i = 1 + 8i - 16 = 1^2 + 2.1.4i + (4i)^2 = (1+4i)^2$.

$\Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $1 + 4i$ và $-1 - 4i$.

- Bước 3: Kết luận:

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-b+\gamma}{2a} = \frac{(-3+2i)+(1+4i)}{2} = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i\,;$$

$$z_2 = \frac{-b-\gamma}{2a} = \frac{(-3+2i)-(1+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i\,.$$

SKILL ĐẶC BIỆT

CASIO SỐ PHỨC (Phục vụ cho việc giải nhanh – diệt Gọn)

Dạng 1: Tìm số phức, số phức liên hợp, tính argumen, tính độ dài

Để tính được số phức các em phải vào hệ CMPLX bằng cách:

CMPLX ▣ Math

MODE **2**

Gọi thành phần ảo bằng cách bấm:

CMPLX ▣ Math

i

SHIFT **ENG**

Ví dụ 1: Tính $(2+i)z + 1 + 3i = \dfrac{1+2i}{1+i}$

Tìm số phức z? Ta làm thao tác sau:

MODE 1 + 2 SHIFT ENG ▼ 1 + SHIFT ENG ▶ − 1 − 3 SHIFT ENG) ÷ (2 + SHIFT ENG) =

CMPLX Math ▲

$\left(\frac{1+2i}{1+i}-1-3i\right)\div(2+$

$-\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i$

=> Ta dễ dàng tìm ra số phức z

Ví dụ 2: Tính số phức liên hợp của z=1+i

Tìm số phức liên hợp ra sao?

Để tìm số phức liên hợp của z ta dùng hàm Conjg

SHIFT 2 2 1 + SHIFT ENG) =

CMPLX Math ▲

Conjg(1+i)

1−i

Ví dụ 2: Tính argument của số phức z=1+i

Tương tự tính Argument (góc) của z

SHIFT 2 1 1 + SHIFT ENG) =

CMPLX Math ▲

arg(1+i)

45

Ví dụ 2: Tính module của số phức z=1+i

Tính độ dài ta dùng Abs:

SHIFT hyp 1 + SHIFT ENG =

CMPLX Math ▲

|1+i|

$\sqrt{2}$

Ví dụ đề mẫu 2016: Tìm module của $z=(2+i)(1-i)+1+3i$ các em có thể tính z bằng máy rồi dùng Abs hoặc Abs cả biểu thức đó luôn được:

CMPLX Math ▲

|(2+i)(1−i)+1+3

$2\sqrt{5}$

Dạng 2: Tìm tập hợp số phức z

Ví dụ 1: Tìm tập hợp z thỏa mãn đẳng thức $|z+2+i|=|\bar{z}-3i|$

A. $y=x-1$ B. $y=x+1$ C. $y=-x+1$ D. $y=-x-1$

Thầy giải thích 1 chút ví dụ $z=a+bi$ thì ý của họ là mối quan hệ a,b là cái nào trong 4 cái trên đó. Thì ở đây mình sẽ lần lượt đi tính 4 đáp án

Đáp án A. $y=x-1$ tức là : $b=a-1 \Rightarrow$ Chọn $b=100, a=101 \rightarrow z=101+100i$

Sau đó nhập :

[−] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [SHIFT] [ENG]

|X+2+i|-|Conjg(▶ ◀|Conjg(X)-3i|

Sau đó tính bằng cách bấm CALC

X?

0

Các em nhập là

[CALC] [1] [0] [1] [+] [1] [0] [0] [SHIFT] [ENG] [=]

Được kết quả:

|X+2+i|-|Conjg(▶

0

Dạng 3: Tìm căn của số phức

Ví dụ 1: Tìm căn của số phức $\sqrt{-33+56i}$

A. $4+7i$ B. $-4-7i$ C. $-4+7i$; $-4-7i$ D. $4+7i$; $-4-7i$

Cách 1 : Các em thử đáp án : Tính mẹo

(4+7i)² → -33+56i

(-4-7i)² → -33+56i

Cách 2: Tính không dựa vào đáp án

Các em về COMP tính toán thông thường:

Chúng ta sẽ chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác để tiến hành khai căn

q+p33q)56)=

Pol(-33,56)

r=65,θ=2.103300▶

Khi đó các giá trị góc và bán kính này được lưu ở X,Y

X → 65

Y → 2.103300425

Sau khi chuyển được sang lượng giác rồi thì các em nhớ tới công khai căn dạng lượng giác là

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\to\sqrt{z}=\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$

Do đó mình lại chuyển từ lượng giác sang đại số bằng cách bấm

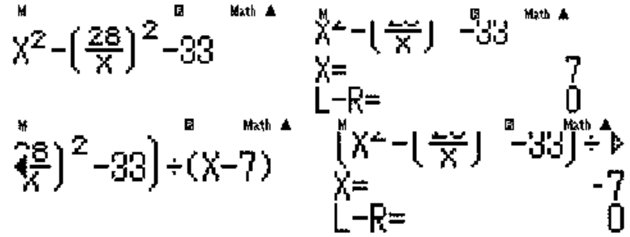
qpsQ)$q)QnP2)=

Rec(√X,Y÷2)

X=4,Y=7

Cách 3: Theo SGK :

$$z = 33 - 56i = (a + bi)^2 \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} \to a^2 - \left(\frac{-28}{a}\right)^2 = 33$$



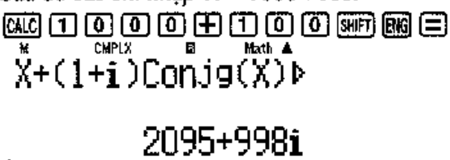
Vậy đáp án là D.

Ví dụ 2: Tìm module của z biết $z + (1+i)\bar{Z} = 5 + 2i$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{10}$

Hướng dẫn: Các em nhập vào máy tính như sau:

Sau đó các em nhập $X = 1000 + 100i$



Ở đây các em sẽ có:

$$\begin{cases} 2095 = 2.1000 + 100 - 5 = 2a + b - 5 \\ 998 = 1000 - 2 = a - 2 \end{cases}$$

Mặt khác ta đang muốn phương trình nó bằng 0 thay vì kết quả vừa rồi do đó

$\to \begin{cases} 2a + b - 5 = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \to |z| = \sqrt{5}$ không tin các em thử lại mà xem !

- Lưu ý: các em phải lấy số đầu gần nhất tức là: $2198 = 2a + 2b - 2$; $2795 = 3a - 2b - 5$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

CHUYÊN ĐỀ 1: SỐ PHỨC
ĐỀ THI

Câu 1 Nghiệm của phương trình sau trên tập số phức là $x^2 + x + 1 = 0$

A $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ **B** $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ C $\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ D $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Câu 2 Cho số phức $z = 1 - 3i$ Tính mô đun của z^2 là

A $\sqrt{10}$ **B** 10 C 20 D $\sqrt{20}$

Câu 3 Cho $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 2 + 3i$ .Mô đun của số nào lớn nhất

A z_1+z_2 B z_1-z_2 C $z_1.z_2$ D $\frac{z_1}{z_2}$

Câu 4 Cho phương trình sau trên tập số thực $x^2+3x+5=0$ các nghiệm của phương trình trên có phần thực là

A -1.5 B 1.5 C $\frac{\sqrt{11}}{2}$ D $-\frac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 5 Tính $(1+i)^{25}$

A $2^{12}(1+i)$ B $-2^{12}(1+i)$ C. -2^{25} D. $-2^{25}(1+i)$

Câu 6 Cho số phức z=3+4i thì $\sqrt{z}$ là số phức nào

A. 1-2i B. 1+2i **C.** $2+i$ D. 2-i

Câu 7 Chia số phức $5-\sqrt{2}i$ cho số phức $1+\sqrt{2}i$ ta được số phức cố modun là

A 1 **B** 2 C 4 **D** 3

Câu 8 Cho số phức z=1+i. Tính z^3

A. $z^3=2+2i$ B. $z^3=2+2\sqrt{2}i$ C. $z^3=\overline{2}+2i$ D. $z^3=1-2i$

Câu 9 Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z+(5+2i)\overline{z}=3+5i$, tính modun số phức z

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

Câu 10 Tìm phần thực của số phức z thỏa mãn $(2+i)z+2\overline{z}=4$

A. 4 B 3 C 2 **D** -4

Câu 11 Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-(3-4i)\right|=2$

A Hình tròn B Hình elip C Hình vuông D Parabol

Câu 12 Số phức z có modun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $\left|z-i\right|=\left|\overline{z}-2-3i\right|$ là

A. $z=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$ B. $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$ C. $z=\frac{4}{5}+\frac{6}{5}i$ **D.** $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$

Câu 13 Cho số phức $z=a+bi(a,b\in R)$, để điểm biểu diễn của Z trong mặt phẳng tọa độ nằm trong đường tròn tâm O bán kính R =2 thì điều kiện của a,b là

A $a^2+b^2=4$ B $a^2+b^2=2$ C $a^2+b^2<4$ D $a^2+b^2>4$

Câu 14 Môdun của số phức $z=(1-i)(3\sqrt{2}-\sqrt{7}i)$ là

A $5\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}+\sqrt{7}$ C. $5\sqrt{7}$ D. $4\sqrt{7}$

Câu 15 Gọi z và z' là 2 nghiệm của phương trình $x^2+x+1=0$, điều nào đúng

A. $z^2+z'^2=1$ **B.** $z^2+z'^2=-1$ C. $z^2+z'^2=\frac{7}{2}$ D. $z^2+z'^2=-\frac{7}{2}$

Câu 16 Cho $P=(1+i)^{2010}(1-i)^{2008}$ kết quả nào sau đây đúng

A. $P=2^{2008}$ B. $P=2^{2008}$ C. $P=2^{2009}$ **D.** $P=i.2^{2009}$

Câu 17 Nghiệm của phương trình $z^{2=}$-9 là

A. z=3i B. z=-3i **C.** z=3i và z=-3i D. z=1+3i và z=1-3i

Câu 18 cho M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn số phức Z và Z' ,mệnh đề sai là

A $|Z'|-|Z|=MM'$ B $|Z'|+|Z|=MM'$ C $|Z|=0M$ D $|Z'-Z|=MM'$

Câu 18 Tìm bình phương modun của số phức $z=(2+4i)(3-5i)+7(4-3i)$

A. 3277 B. 277 C. 77 D. 177

Câu 19 Cho $z = a + bi$ biết $\left[(5+2i)\bar{z} - 3 + 7i\right]$ là số thuần ảo. $z+\bar{z}=2$,khi đó a+b=?

A. 0 B. 3 C.2 D.1

Câu 20: Cho số phức Z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$,tìm modun của số phức $w = 2z - 3 + \sqrt{14}$

A $\sqrt{13}$ B $\sqrt{18}$ C 14 **D** 5

Câu 21: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z = (1+i)z + 2$ biết $|1+iz| = |z-2i|$ là

A. Điểm B. Đường tròn C. Elip **D.** Đường thẳng

Câu 22: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w ,biết w và z thỏa mãn $\begin{cases} w = \bar{z} + 2 - i \\ |z - 2 - i| = 1 \end{cases}$ là đường tròn có tâm:

A $(4,-2)$ B $(3,-2)$ C $(2,-2)$ D $(5,-2)$

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $z - \dfrac{\bar{z}}{1+3i} = \dfrac{6+7i}{5}$,modun của z là

A 5 B $\sqrt{17}$ C $\sqrt{2}$ D $\sqrt{13}$

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$,số phức $w = z^2 - z$ có phần thực là

A 0 **B** 1 C 2 D 3

Câu 25: Số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 5$ và $z.\bar{z} = 34$ có phần ảo là

A. 5 **B.** 3 C. 4 D. 8

Câu 26: Số vừa thực vừa ảo?

A. 0 B. 1 C. i D. 1-i

Câu 27: Cho số phức: $z = (2x + 4) + (3 - y)i$ (với $x, y \in \mathbb{R}$). Tìm x, y để z là số thực

A. y=3 B. x=-2 C. x=y=3 D. x=y=-2

Câu 28: Tính tổng $|z_1|+|z_2|$ biết $z_1 = 3 + 4i$ và $z_2 = 12 - 5i$.

A. 17 **B.** 18 C. 19 D. 20

Câu 29 Tìm số phức liên hợp của các số phức $z_3 = -3$

A. –3 B. –3+i C. -3-i D. -3-i

Câu 30: Tìm x, y $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn: $2x - y + (5x + 4)i = 3 + (3y + 11)i$

A. x=-2;y=1 **B.** x=2;y=1 C. - x=2;y=-1 D. x=-2;y=-1

Câu 31: Tìm x, y $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn: $2x + 3y - 2i = x + (x + y)i$

A. x=-3;y=1 B. x=3;y=1 C. x=3;y=-1 D. x=-3;y=-1

Câu 32: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: Phần thực của z bằng 1

A. Là đường thẳng x=1 B. Là đường thẳng y=1

C. là đường thẳng x+y=1 D. là đường thẳng x-y=1

Câu 33: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z| = 1$.

A. đường tròn tâm O, bán kính bằng 1

B. đường tròn tâm O, bán kính bằng 2

C. đường thẳng x=1

D. đường thẳng y=1

Câu 34: Tính i^{2017}

A. i B. –i C. 1 D. –1

Câu 35: Tính i^{2018}

A. i B. –i C. 1 **D.** –1

Câu 36: Tính $(3+2i)(1+i)(2-2i)$.

A. $12+8i$. B. $12-8i$. C. $12-6i$. D. 12 +6i.

Câu 37: Tính $(1-3i)^3$.

A. $-26-18i$. **B.** $-26+18i$. C. $26+18i$. D. $-26+8i$..

Câu 38: Tìm z biết $5-3i=\frac{43+15i}{z}$.

A. $5-6i$ B. $-5+6i$ **C.** $5+6i$ D. $-5-6i$

Câu 39: Tìm căn bậc hai của –3 là

A. $\pm i\sqrt{3}$. B. $-i\sqrt{3}$. C. $+i\sqrt{3}$. D. $\pm 2i\sqrt{3}$.

Câu 40: Tìm căn bậc hai của các số phức sau: $w = 15 - 8i$.

A. $3+2i$ và $-3-2i$. B.$3+i$ và $-3-i$

C. $3+3i$ và $-3-3i$ D. $3 \pm i$

Câu 41: Tìm z biết $z^2 - 2z + 5 = 0$

A. $1+i$ và $1-i$. **B.** $1+2i$ và $1-2i$.

C. $3+2i$ và $3-2i$. D. $2+2i$ và $2-2i$

Câu 42: Tìm z biết $z^2 + (3-2i)z + 5 - 5i = 0$

A. $-1+3i$ và $1-i$. B. $1+2i$ và $1-2i$.

C. $3+2i$ và $-2-i$. **D.** $-1+3i$ và $-2-i$

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là:

A.1 B.3 **C.4** D.6

Câu 44. Cho z_1, z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình $z^2+3(1+i)z+5i=0$ Tổng phần thực của 2 số z_1, z_2 là?

A. -2 B.-3 C.-4 D.-5

Câu 45: Cho số phức $z=1-3i$ mô đun của z^2 là

A $\sqrt{10}$ B 10 C 20 D $\sqrt{20}$

Câu 46: cho $z_1=2-3i$ và $z_2=2+3i$. Mô đun của số nào lớn nhất

A z_1+z_2 B z_1-z_2 C $z_1.z_2$ D $\frac{z_1}{z_2}$

Câu 47: Tìm môđun của số phức z, biết $\overline{z}=\frac{z^2+2z+3}{z+1}$

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

Câu 48: Cho số phức z thỏa $1+i\ \overline{z}-\frac{z}{1-i}=-5+7i$.Tìm phần ảo của z

A. 3 B. 4 C. -4 D. -3

Câu 49: Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực của số phức $w=iz-\overline{z}$

A. 1 B. -1 C. -2 D. 2

Câu 50: Tìm phần thực của các số phức z, biết: $\begin{cases} z+\overline{z}=10. \\ |z|=13. \end{cases}$

A. 5 B. -12 C. 12 D.-5

1. B	2.B	3. C	4.A	5.A	6.C	7.D	8.A	9.A	10.D
11.A	12.D	13.A	14. A	15.B	16. D	17.C	18.A	19.A	20.D
21.D	22.A	23.C	24. B	25. A	26 A	27.A	28.B	29.A	30.B
31.A	32.A	33.A	34.A	35.D	36.A	37.B	38.C	39.A	40.A
41.B	42. D	43.C	44.B	45.B	46.C	47.A	48.C	49.B	50.A

CHUYÊN ĐỀ : TÍCH PHÂN

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Công thức nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int dx = x + C$	$\int a.dx = ax + C$, $a \in \mathbb{R}$
$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int e^{x} dx = e^{x} + C$	$\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a}.e^{ax+b} + C$
$\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \dfrac{1}{\alpha}.\dfrac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\dfrac{1}{a}.\cos(ax+b) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -cotx + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\dfrac{1}{a}cot(ax+b) + C$

1.2. Công thức tích phân

F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [a;b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.3. Phương pháp đổi biến số

1.3.1. Dạng 1 : Tính I = $\int_a^b f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx$

+ Đặt t = $\varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x).dx$

+ Đổi cận :

x	a	b
t	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$

$$\Rightarrow I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t).dt = F(t)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

1.3.2. Dạng 2 : Tính I = $\int_a^b f(x)dx$ ***bằng cách đặt*** $x = \varphi(t)$

Dạng chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ *: Đặt x = asint,* $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ (a>0)

1.4. Phương pháp tích phân từng phần

* ***Công thức tính*** : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

✦ ***Đặt*** $\begin{cases} u = ... \\ dv = ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ...dx & (lay \quad dao \quad ham) \\ v = ... & (lay \quad nguyen \quad ham) \end{cases}$

Ta thường gặp hai loại tích phân như sau:

* Loại 1:

$\begin{cases} \int_a^b P(x).\sin f(x).dx \\ \int_a^b P(x).\cos f(x).dx \\ \int_a^b P(x).e^{f(x)}.dx \end{cases} \Rightarrow u = P(x)$, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc n.

*Loại 2: $\int_a^b P(x).\ln f(x).dx \quad \Rightarrow u = \ln f(x)$

1.5. Tính chất tích phân

Tính chất 1: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *k: hằng số*

Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Tính chất 3: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$

1.6. Diện tích hình phẳng

1.6.1. Dạng 1: Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b]. khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a và x = b là:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \quad (*)$$

Lưu ý:

✓ $f(x) = 0$ vô nghiệm trên (a;b) thì

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

✓ $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $c \in (a;b)$ thì

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

1.6.2. Dạng 2: Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên [a; b]. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$ và hai đường thẳng x = a, x = b là:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx \quad (**)$$

Lưu ý: Khử dấu giá trị tuyệt đối của công thức (**) thực hiện tương tự đối với công thức (*).

1.7. Thể tích vật thể tròn xoay

Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a, x = b quay xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Lưu ý: Diện tích, thể tích đều là những giá trị dương.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

$1/A = \int_0^1 (2x + e^x)dx \quad 2/B = \int_0^1 2^x(e^x + 3)dx \quad 3/C = \int_0^\pi (\sin x + \cos x)dx$

$4/D = \int_1^4 \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{x} + 3}{x^3}\right)dx \quad 5/E = \int_0^\pi (x - \sin 2x)dx$

Lời giải

$$1/A = \int_0^1 (2x + e^x)dx = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 e^x dx = x^2\Big|_0^1 + e^x\Big|_0^1 = 1 - 0 + e - 1 = e$$

$$2/B = \int_0^1 2^x(e^x + 3)dx = \int_0^1 (2e)^x dx + 3\int_0^1 2^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e}\Bigg|_0^1 + 3\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2e - 1}{\ln 2e}\right) + \frac{3}{\ln 2}$$

$$3/C = \int_0^\pi (\sin x + \cos x)dx = \int_0^\pi \sin x dx + \int_0^\pi \cos x dx = -\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi = 2$$

$$4/D = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right)dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + x^{-\frac{5}{2}} + 3x^{-3}\right)dx = \ln|x|\Big|_1^4 - \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 + \frac{3}{-2}x^{-2}\Big|_1^4 =$$

$$5/E = \int_0^\pi (x - \sin 2x)dx = \int_0^\pi xdx - \int_0^\pi \sin 2xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

$1/I = \int_1^6 x\sqrt{x + 3}dx \quad 2/J = \int_0^1 \frac{2x + 1}{1 + \sqrt{3x + 1}}dx$

$3/K = \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 1)}\right)dx \quad 4/L = \int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right)dx$

Lời giải

$1/I=\int_1^6 x\sqrt{x+3}dx$

- Đặt $\sqrt{x+3}=t$ ta được $x+3=t^2\Rightarrow dx=2tdt$
- Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2; x=6\Rightarrow t=3$
- Khi đó $I=\int_2^3\left(2t^4-6t^2\right)dt=\left(\frac{2}{5}t^5-2t^3\right)\Big|_2^3=\frac{232}{5}$

$2/J=\int_0^1\frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

- Đặt $\sqrt{3x+1}=t$ ta được $x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$
- Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$
- Khi đó $J=\frac{2}{9}\int_1^2\frac{2t^3+t}{1+t}dt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(2t^2-2t+3-\frac{3}{t+1}\right)dt=\frac{28}{27}-\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$

$3/K=\int_1^e\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)}\right)dx$

- Tính $K_1=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ta được kết quả $K_1=2\left(\sqrt{e}-1\right)$
- Đặt $\ln x=t$ ta được $dt=\frac{dx}{x}$
- Đổi cận $x=1\Rightarrow t=0; x=e\Rightarrow t=1$
- Khi đó $K_2=\int_0^1\frac{2t+1}{t+1}dt=\left(2t-\ln(t+1)\right)\Big|_0^1=2-\ln 2$
- Vậy ta được $K=K_1+K_2=2\sqrt{e}-\ln 2$

$4/L=\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx$

- Tính $L_1=\int_0^{\ln 2}xdx$ ta được kết quả $I=\frac{1}{2}\ln^2 2$
- Tính $L_2=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}dx$
- Đặt $e^x=t$ ta được $e^xdx=dt$
- Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\ln 2\Rightarrow t=2$
- Khi đó $L_2=\int_1^2\frac{dt}{t(2t+1)}=\left(\ln t-\ln(2t+1)\right)\Big|_1^2=\ln 2-\ln\frac{5}{3}=\ln\frac{6}{5}$
- Vậy ta được $L=L_1+L_2=\frac{1}{2}\ln^2 2+\ln\frac{6}{5}$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

$1/I=\int_0^{\pi}\left(1-\sin^3 x\right)\cos x dx$ $\quad 2/J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$ $\quad 3/K=\int_0^{\pi}\left(\sin x+x\right)\sin x dx$

Lời giải

$$1/I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3 x\right)\cos x dx$$

- Đặt $\sin x=t\Rightarrow dt=\cos x dx$
- Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$
- Khi đó $I=\int_0^1\left(1-t^3\right)dt=\left(t-\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{4}$

$$2/J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$$

- Đặt $\cot x=t\Rightarrow dt=\frac{-1}{\sin^2 x}dx$
- Đổi cận $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\sqrt{3}; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$
- Khi đó $J=\int_1^{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2 dt=\int_1^{\sqrt{3}}\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)dt=\left(t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{27}+\frac{4}{3}$

$$3/K=\int_0^{\pi}\left(\sin x+x\right)\sin x dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx+\int_0^{\pi}x\sin x dx$$

- Đặt $K_1=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\pi$
- $K_2=\int_0^{\pi}x\sin x dx$
- $\begin{cases}u=x\\ dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-\cos x\end{cases}$
- $K_2=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi$

*** Chú ý: Ta thường đặt t là căn, mũ, mẫu.***

- Nếu hàm có chứa dấu ngoặc kèm theo luỹ thừa thì đặt t là phần bên trong dấu ngoặc nào có luỹ thừa cao nhất.

- Nếu hàm chứa mẫu số thì đặt t là mẫu số.

- Nếu hàm số chứa căn thức thì đặt t = căn thức.

- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{x}$ thì đặt $t = \ln x$.
- Nếu tích phân chứa e^x thì đặt $t = e^x$.
- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ thì đặt $t = \sqrt{x}$.
- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{x^2}$ thì đặt $t = \frac{1}{x}$.
- Nếu tích phân chứa $\cos xdx$ thì đặt $t = \sin x$.
- Nếu tích phân chứa $\sin xdx$ thì đặt $t = \cos x$.
- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{\cos^2 x}$ thì đặt $t = \tan x$.
- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{\sin^2 x}$ thì đặt $t = \cot x$.

Ví dụ 3. Tính các tích phân

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$ b) $J = \int_1^e x\ln xdx$ c) $K = \int_0^1 xe^x dx$

Lời giải

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$

✓ $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

✓ $I = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 0 - 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

b) $J = \int_1^e x\ln xdx$

✓ $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

✓ $J = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

c) $K = \int_0^1 xe^x dx$

✓ $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

✓ $K = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

$1/I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1-x^2}{x+x^3} \right) dx \quad 2/J = \int_0^{\ln 4} \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} \right) dx \quad 3/K = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x dx$

Lời giải

$1/\ I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1-x^2}{x+x^3} \right) dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^2} dx$

Tính $I_1 = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^3} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}+x} dx = -\int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{x}+x\right)}{\frac{1}{x}+x} dx = -\ln\left(\frac{1}{x}+x\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{5}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{7}{3} + \ln\frac{4}{5}$

$2/J = \int_0^{\ln 4} \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} \right) dx = \int_0^{\ln 4} e^x dx + \int_0^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} dx$

$J_1 = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 4} = 3$

$J_2 = \int_0^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} dx;\ t = \sqrt{e^x} \Rightarrow t^2 = e^x \Rightarrow 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2}{t} dt$

$\Rightarrow J_2 = \int_1^2 \frac{2}{t(t+2)} dt = \ln\left(\frac{t}{t+2}\right)\Big|_1^2 = \ln\frac{3}{2}$

Vậy $J = J_1 + J_2 = 3 + \ln\frac{3}{2}$

$3/K = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{x^2-1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x + \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow K = \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow K = \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}$$

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng x=0, x=2.

b) $y = x^2$, $y = -2x+3$ và hai đường thẳng x =0, x=2.

c) $y = x^2$, $y = x+2$

Lời giải

a) $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng x= 0, x=2.

✓ Trên [0; 2] ta có $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [0;2]$

✓ Diện tích của hình phẳng đã cho:

$$S = \int_0^2 |x^2|\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

b) Đặt $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -2x+3$

Ta có: $f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-2x+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;2] \\ x = -3 \notin [0;2] \end{array}\right.$

✓ Diện tích hình phẳng đã cho

$$S = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3|\, dx$$

$$= \left|\int_0^1 (x^2+2x-3)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2+2x-3)dx\right|$$

$$= \left|\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_0^1\right| + \left|\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Big|_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3} - 2\right| + \left|\frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{1}{3} - 1 + 3\right| = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4$$

c) Ta có: $x^2 - (x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2|\, dx = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-1}^2\right| = \left|\frac{8}{3} - 2 - 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right| = \frac{9}{2}$$

Ví dụ 6. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình (D) quanh trục Ox biết (D) giới hạn bởi $y = 1 - x^2$, $y = 0$

Lời giải

✓ Ta có: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

✓ Áp dụng công thức: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

✓ Ta có: $V=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$$=\pi\left[\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{16\pi}{15}$$

CASIO XỬ GỌN NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

Tính nguyên hàm – tích phân

a. Tích phân xác định: Dạng này khá đơn giản các em chỉ cần nhập trực tiếp tích phân cần tính và bấm = để ra KQ

Ví dụ 1: Tính tích phân sau: $\int_1^2 e^x\frac{\ln x}{x^7}dx$

Các em nhập như sau:

[∫] [▭/▭] [SHIFT] [ln] [ALPHA] [)] [▶] [ln] [ALPHA] [)] [)] [▼] [ALPHA] [)] [$x^{■}$] [7] [▶] [▶] [▶] [1] [▶] [2] [=]

Và đây là kết quả :

$$\int_1^2\frac{e^X\ln(X)}{X^7}dX$$

0.1011388899

Để lưu lại giá trị tích phân để tiện cho việc so sánh các em lưu vào A bằng cách:

[AC] [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ví dụ áp dụng

Trích đề mẫu 2016:

1.Tính tích phân: $I=\int_0^2\frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$

A. $2\ln3+3\ln2$　　B. $2\ln2+3\ln3$　　C. $2\ln2+\ln3$　　D. $2\ln3+\ln4$

2. Tích phân: $I=\int_1^2 x^2\ln xdx$ có giá trị bằng :

A. $\frac{8}{3}\ln2-\frac{7}{3}$　　B. $8\ln2-\frac{7}{3}$　　C. $\frac{8}{3}\ln2-\frac{7}{9}$　　D. $24\ln2-7$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số có phương trình: $y=-x^2+2x+1, y=2x^2-4x+1$

Trước hết ta tìm hoành độ giao điểm để biết cận đã:

Giải : $(2x^2-4x+1)-(-x^2+2x+1)=0$

(Các loại khác không phải bậc 2 hay 3 thì các em giải như phần ở HD ở phía dưới tài liệu về PT-BPT)

$X_1=$

3 2

$X_2=$

0

Sau đó chỉ việc tính (Xem thêm tính năng Abs ở bài số phức)

[∫] [SHIFT] [hyp] [3] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [6] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [0] [▶] [2] [=]

$$\int_0^2 |3X^2-6X|dx$$

4

b. Nguyên hàm : tích phân không có cận, do đó ta phải cho nó giá trị của cận tùy ý

Ví dụ 1: Tìm a>0 sao cho : $I=\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx=4$ rồi điền vào chỗ trống

Thông thường họ sẽ cho a nguyên vì là họ chấm bằng máy nên đề số đẹp thì máy dễ chấm hơn là số xấu.

Ta thay lần lượt a=1, a=2 …. Vào xem

$$\int_0^1 Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

0.7025574586

$$\int_0^2 Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

4

Vậy ta được a =2

Để đỡ phải edit nhiều lần thì các em sửa thành:

Đầu tiên gán 1 vào Y bằng cách:

[1] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

Sau đó sửa tích phân thành:

$$\int_0^Y Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

0

Rồi bấm "=" xem KQ là bao nhiêu, sau đó các em lại gán 2 rồi 3… cho ddến khi đúng kết quả như yêu cầu:

[2] [SHIFT] [RCL] [S⇔D] [▲] [=]

2→Y

2

$$\int_0^Y Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

4

Như vậy đỡ phải đẩy con trỏ nhiều lần để sửa lại cận của tích phân.

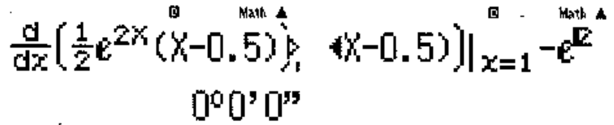
Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số: $y=xe^{2x}$

A. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ B. $2e^{2x}(x-2)+C$ C. $2e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Ở đây ta có 2 cách tính 1 là sử dụng đạo hàm kết quả (đáp án) rồi so sánh với đề bài, cách 2 là tính xuôi

Rõ ràng ở đây, cách 1 là đơn giản nhất vì máy tính đã có sẵn tính năng tính đạo hàm tại 1 điểm xác định cho các em.

Cách 1: Các em xét đạo hàm tại x=1 của 4 đáp án xem có biểu thức nào bằng: $y(1)=1.e^2$ không?

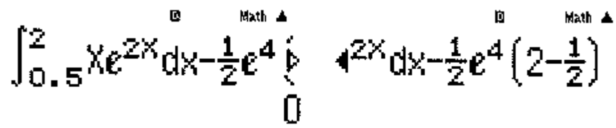


Thì thấy đáp án A đúng

Cách 2: Ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

Các em xét tích phân từ $\frac{1}{2}$ tới 2 để có 1 cái F(…) = 0

Các em xét đáp án A trước nhé:



Vậy các em chọn A nhé.

Tổng kết: Vậy là các em sẽ biến yêu cầu tổng quát của bài toán thành 1 bài tính thông thường bằng cách tự thay số vào cho phù hợp.

Hãy nhớ một bài toán có hai cách làm: Cách làm kiểu tự luận và cách làm kiểu trắc nghiệm dù làm kiểu nào thì cũng phải dùng cách thức Tư duy toán học. Máy tính CASIO nó chỉ là một công cụ hỗ trợ thôi.

Skill CASIO giống như "con dao sắc" mà thầy giao cho các em. Các em dùng nó như thế nào là do các em: Các em có thể dùng nó để gọt hoa quả hoặc thái rau… đừng dùng nó để "giết người". ☺

ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm I= $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ có giá trị bằng:

A. 24ln2 -7 B. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ C. $8\ln 2-\frac{7}{3}$ D. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{3}$

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$

A. $2\ln 2+3\ln 3$ B. $2\ln 3+3\ln 2$ C. $2\ln 2+\ln 3$ D. $2\ln 3+\ln 4$

Câu 3: Tìm a>0 sao cho $I=\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx=4$

A. 1 B. 2 C.3 D.4

Câu 4: Tính $A=\int_0^1 \left(2x+e^x\right)dx$

A.e B. e^2 C. e^3 D. e^5

Câu 5: Tính $\int_0^1 2^x\left(e^x+3\right)dx$

A. $\left(\frac{2e-1}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$ B. $\left(\frac{2e-1}{\ln 2e}\right)-\frac{3}{\ln 2}$ C. $\left(\frac{2e}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$ D. $\left(\frac{2e+1}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$

Câu 6: Tính tích phân sau: $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)^2}dx$

A. $\frac{1}{4}\ln 6$ B. $\frac{1}{4}\ln 3$ C. $\ln 3$ D. $\frac{1}{4}\ln 2$

Câu 7: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{3+2\cos x}dx$

A. $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$ B. $\frac{1}{3}\ln 5$ C. $\frac{1}{3}\ln\frac{7}{5}$ D. $\frac{1}{3}\ln\frac{6}{5}$

Câu 8: Tính tích phân $I=\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x dx$

A. $\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4}$ B. $\frac{e^2}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}-\frac{e^2}{4}$

Câu 9: Tính các nguyên hàm: $I=\int \sin 2x.\sin^3 x.dx$

A. $\frac{2\sin^3 x}{5}+C$ B. $\frac{2\sin^5 x}{5}+C$ C. $\frac{2\sin^2 x}{5}+C$ D. $\frac{2\sin^6 x}{5}+C$

Câu 10: Tìm nguyên hàm $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x+\sin^2 2x\right)\cos 2x dx$.

A. $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

B. $\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

C. $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

D. $\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

Câu 11: Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{(x^3+1)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx$

A. $\frac{e^3-1}{3}-\ln\frac{e+2}{2}$ B. $\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e+2}{2}$ C. $\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e-2}{2}$ D. $\frac{e^3+1}{3}+\ln\frac{e-2}{2}$

Câu 12: Tính tích phân: $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

A. $\frac{59}{3}+2\ln 2$ B. $\frac{59}{4}-2\ln 2$ C. $\frac{59}{3}-2\ln 2$ D. $\frac{59}{3}+3\ln 2$

Câu 13: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$.

A. $\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}\ln\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}\ln\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

Câu 14: Tính tích phân : $I=\int_1^e \frac{\ln x-1}{x^2-\ln^2 x}dx$

A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right|$ B. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e+1}{e-1}\right|$ C. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right|$ D. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e-1}{e-2}\right|$

Câu 15: Tính tích phân $I=\int_{-1}^{3}\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$

A. $I=6\ln 3+8$ B. $I=6\ln 3-8$ C. $I=6\ln 3-6$ D. $I=6\ln 3-5$

Câu 16: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)-\ln(\sin x+\cos x)}{1+\sin 2x}dx$

A. $\frac{\ln 2-1}{2}$ B. $\frac{\ln 2+1}{2}$ C. $\frac{\ln 3-1}{2}$ D. $\frac{\ln 5-1}{2}$

Câu 17: Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(2x-1)\sin x\,dx$

A. $2\pi+2$ B. $2\pi-2$ C. 2π D. không có đáp án

Câu 18: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan x}{\cos 2x}dx$

A. $\frac{1}{2}\ln 3$ B. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}\ln 2$ D. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

Câu 19: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=\sqrt{x}\sin x$, các trục Ox, Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $\frac{\pi}{64}(\pi^2-4\pi+8)$ B. $\frac{\pi}{64}(\pi^2+4\pi+8)$ C. $\frac{\pi}{64}(\pi^2-4\pi-8)$ D. $\frac{\pi}{64}(\pi^2-4\pi)$

Câu 20: Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{4}{25}$ D. $\frac{4}{35}$

Câu 21: Tính tích phân $I=\int_0^1 x(x+e^x)dx$

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{4}{15}$

Câu 22: Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos^2 xdx$

A. $\frac{\pi^2}{6}$ B. $\frac{\pi^2}{8}$ C. $\frac{\pi^2}{7}$ D. $\frac{\pi^2}{9}$

Câu 23: Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{x^3+\ln x}{x^2}dx$.

A. $\frac{e^2}{2}+\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$ B. $\frac{e^2}{2}-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$ C. $\frac{e^2}{2}-\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{e^2}{2}-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$

Câu 24: Tính $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

A. $-\frac{1}{2}\ln 3\left(3-2\sqrt{2}\right)$ B. $-\frac{1}{2}\ln 3\left(3+2\sqrt{2}\right)$ C. $-\frac{1}{2}\ln 3\left(4-2\sqrt{2}\right)$ D. $-\frac{1}{2}\ln 2\left(3-2\sqrt{2}\right)$

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(\frac{2}{1+x^2}+e^x\right)dx$

A. $1+3\ln 2$ B. $1+2\ln 2$ C. $1-\ln 2$ D. $1+\ln 2$

Câu 26: Tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}dx$.

A. $2\ln 3-\ln 5$ B. $2\ln 3+\ln 5$ C. $2\ln 3-2\ln 5$ D. $\ln 3-\ln 5$

Câu 27: Tính tích phân: $I=\int_0^1 \frac{6x+7}{3x+2}dx$.

A. $4+\ln\frac{5}{2}$ B. $3+\ln\frac{5}{2}$ C. $2-\ln\frac{5}{2}$ D. $2+\ln\frac{5}{2}$

Câu 28: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin^2 x)\cos xdx$.

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}$

Câu 29: Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+3x^2\ln x\right)dx$

A. $\frac{5+2\sqrt{2}+2e^3}{3}$ B. $\frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$ C. $\frac{5-2\sqrt{2}-2e^3}{3}$ D. $\frac{5-2\sqrt{2}+e^3}{3}$

Câu 30: Tính tích phân: $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{-\sqrt{2}}{3}$

Câu 31: Tính tích phân $I=\int_0^1(1+x)e^x dx$

A. e B. $2e$ C. $4e$ D. $6e$

Câu 32: Tính tích phân $J=\int_1^{\sqrt{6}}x\sqrt{x^2+3}dx$

A. $\frac{19}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

Câu 33: Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx$.

A. $I=\frac{-1}{2}-\ln 2$ B. $I=\frac{-1}{2}+\ln 2$ C. $I=\frac{1}{2}-\ln 2$ D. $I=\frac{1}{2}+\ln 2$

Câu 34: Tính tích phân $I=\int_0^1(1-x)\left(2+e^{2x}\right)dx$

A. $\frac{e^2+1}{3}$ B. $\frac{e^2-1}{4}$ C. $\frac{e^2+1}{5}$ D. $\frac{e^2+1}{4}$

Câu 35: Tính tích phân: $I=\int_1^e 2x(1-\ln x)dx$

A. $\frac{e^2-1}{3}$ B. $\frac{e^2-3}{3}$ C. $\frac{e^2-3}{2}$ D. $\frac{e^2+3}{2}$

Câu 36: Tính $I=\int_1^2\frac{1+x\ln x}{x^2}dx$

A. $I=\frac{1+\ln^2 2}{3}$ B. $I=\frac{1-\ln^2 2}{2}$ C. $I=\frac{1+\ln^2 2}{2}$ D. $I=\frac{1+\ln^2 3}{3}$

Câu 37: Tính tích phân: $I=\int_1^2 x(\sqrt{x+1}-\ln x)dx$

A. $\frac{8}{5}\sqrt{3}-\frac{4}{15}\sqrt{2}+2\ln 2-\frac{3}{4}$ B. $\frac{8}{5}\sqrt{3}+\frac{4}{15}\sqrt{2}+2\ln 2-\frac{3}{4}$

C. $\frac{8}{5}\sqrt{3}-\frac{4}{15}\sqrt{2}-2\ln 2-\frac{3}{4}$ D. $\frac{8}{5}\sqrt{3}+\frac{4}{15}\sqrt{2}+2\ln 2+\frac{3}{4}$

Câu 38: Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(1+\cos x)x dx$

A. $\frac{\pi^2}{4}-2$ B. $\frac{\pi^2}{3}-2$ C. $\frac{\pi^2}{2}+2$ D. $\frac{\pi^2}{2}-2$

Câu 39: Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+2}}{\cos^2 x}dx$.

A. e^3-3e^2 B. e^3+e^2 C. e^3-e^2 D. e^3-2e^2

Câu 40: Tính tích phân : $I=\int_1^2\frac{x^2-1}{(x^2-x+1)(x^2+3x+1)}dx$.

A. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{15}{11}\right)$ B. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{13}{11}\right)$ C. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{16}{11}\right)$ D. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{17}{11}\right)$

Câu 41: Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{\ln x+1}{x\ln x+1}dx$.

A. $\ln(e+1)$ B. $\ln(e-1)$ C. $\ln(2e+1)$ D. $\ln(e-2)$

Câu 42: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$

A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 43: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{e^x+1}$,trục hoành, x = ln3 và x = ln8.

A. $2+\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ B. $2-\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ C. $2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ D. $2+\ln\left(\frac{7}{2}\right)$

Câu 44: Tính $I=\int_1^2\frac{1+x\ln x}{x^2}dx$

A. $I=\frac{1+\ln^2 2}{2}$ B. $I=\frac{1-\ln^2 2}{2}$ C. $I=\frac{1+\ln 2}{2}$ D. $I=\frac{1-\ln 2}{2}$

Câu 45: Tìm hệ số của e^2 khi tính tích phân : $I=\int_1^e 2x(1-\ln x)\,dx$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 46: Tìm hệ số của π^2 khi tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(1+\cos x)x\,dx$

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 47: Tìm hệ số của e^2 khi tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+2}}{\cos^2 x}dx$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. -1

Câu 48: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}\,dx$. Tính I – 5/9

A.1 B.2 C. 3 D. -1

Câu 49: Tính nguyên hàm sau: $I=\int x\sqrt{x^2+3}dx$

A. $\frac{(\sqrt{x^2+3})^3}{3}+C$ B. $\frac{(\sqrt{x^2-3})^3}{3}+C$ C. $\frac{(\sqrt{x^2-1})^3}{3}+C$ D. $\frac{(\sqrt{x^2+2})^3}{3}+C$

Câu 50: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^2-2x, x=0, x=3$ và trục hoành.

A. $\frac{8}{3}$ B $\frac{7}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

ĐÁP ÁN TÍCH PHÂN, NGUYÊN HÀM VÀ ỨNG DỤNG

1B	2B	3B	4A	5A	6B	7A	8A	9B	10A
11B	12A	13B	14C	15B	16A	17D	18B	19A	20A
21A	22B	23B	24A	25D	26A	27D	28A	29B	30A
31A	32A	33D	34D	35C	36C	37A	38D	39C	40A
41A	42B	43C	44A	45A	46B	47D	48A	49A	50A

Chuyên Đề Lượng Giác

1. Hệ thức lượng giác

+ $\sin^2 a+\cos^2 a=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 a=1-\cos^2 a\\ \cos^2 a=1-\sin^2 a\end{array}\right.$

+ $\tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}$; $\cot a=\dfrac{\cos a}{\sin a}$; $\tan a.\cot a=1$

+ $1+\tan^2 a=\dfrac{1}{\cos^2 a}$; $1+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

2. Công thức cộng

+ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

+ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

+ $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

+ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

+ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

+ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$; $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$; $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$; $\tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

Trường hợp đặc biệt:

$\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$; $\cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$; $\cos a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

5. Công thức nhân đôi, nhân ba.

$\left\{\begin{array}{l}\sin 2a=2\sin a\cos a\\ \sin 2a=(\sin a+\cos a)^2-1\\ \sin 2a=1-(\sin a-\cos a)^2\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a\\ \cos 2a=2\cos^2 a-1\\ \cos 2a=1-2\sin^2 a\end{array}\right.$

$\begin{cases} \tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \\ \cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} \end{cases}$ $\begin{cases} t = \tan\dfrac{a}{2}, \sin a = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}, \cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$; $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

6. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$; $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin a\cos a = \dfrac{1}{2}\sin 2a$; $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$;

$\sin^3 a = \dfrac{-\sin 3a + 3\sin a}{4}$; $\cos^3 a = \dfrac{\cos 3a + 3\cos a}{4}$; $\tan^3 a = \dfrac{-\sin 3a + 3\sin a}{\cos 3a + 3\cos a}$

Chú ý: * Công thức góc liên quan đặc biệt

+ $\sin(-a) = -\sin a$ + $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$\cos(-a) = \cos a$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$

* Công thức mũ

$+\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2a$

$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2a$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. $\sin x = a$, điều kiện $-1 \le a \le 1$

Đặt $a = \sin\alpha \Rightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$; $k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$; $k \in Z$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in Z$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in Z$

2. $\cos x = a$, điều kiện $-1 \le a \le 1$

Đặt $a = \cos\alpha \Rightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$; $k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in Z$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi$; $k \in Z$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k2\pi$; $k \in Z$

3. $\tan x = a;\ a \in R\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z$

Đặt $a = \tan\alpha \Rightarrow \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi;\ k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi\ ;\ k \in Z$

$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

$\tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

4. $\cot x = a;\ a \in R,\quad x \neq k\pi;\ k \in Z$

Đặt $a = \cot\alpha \Rightarrow \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi;\ k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\cot x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in Z$

$\cot x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

$\cot x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

III. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ SỞ

a) Phương trình cổ điển

$$a\sin x + b\cos x = c;\ a^2 + b^2 \geq c^2 \quad (1)$$

Cách giải. (1) $\Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \cos(x-\alpha)$

Với $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha;\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha;\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \Rightarrow x = \alpha \pm \beta + 2k\pi$

Chú ý: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$

b. Phương trình đối xứng:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$$

$$a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$$

Bước 1. Đặt

$$\left[\begin{array}{l} t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}(t^2-1) \\ t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1}{2}(1-t^2) \end{array}\right.$$

Biến đổi đưa về phương trình bậc 2 ẩn t.

Bước 2. Giải phương trình bậc 2 ẩn t. Từ đó suy ra nghiệm x.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình: $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$

Giải:

$\Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.;\ k\in Z$

Trắc nghiệm:

Các em nhớ là trước khi dùng CALC thì điều đầu tiên là phải đổi sang đơn vị đo là radian :
SHIFT MODE 4

M R Math

Sau đó chúng ta dùng CALC để thử lần lượt từng đáp án, chú ý tới sự khác nhau giữa các đáp án nhé các em:

M R Math
◂+3√3cos(4X)-3

M R Math
π÷8

-3.5

M R Math ▲
4sin(X)³cos(3X)▸

0

Vậy là phương trình có nghiệm $\frac{\pi}{8}$ tiếp theo mình thử với $-\frac{\pi}{24}$

M R Math ▲
X?

0.3926990817

M R Math ▲
π÷24

0.3926990817

M R Math ▲
4sin(X)³cos(3X)▸

0

Vậy $-\frac{\pi}{24}$ cũng là nghiệm nên chỉ có thể A hoặc D đúng nhưng các em lên chú ý:

Một đáp án là $x=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}$, một đáp án lại là $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ từ đó chúng ta sẽ chọn k=1 xem $x=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}$ có thỏa mãn hay không:

-π÷24+π÷2 4sin(X)³cos(3X)

-0.1308996939 0

Vậy là có thỏa mãn nên ta sẽ chọn A

Ví dụ 2: Nghiệm của phương trình: $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Giải:

$\sqrt{3}\cos 3x - (3\sin x - 4\sin^3 x) = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.;\ k \in Z$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{-1}{2}$ C. $\pm\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Giải:

PT $\Leftrightarrow (2m+1)\sin x + (2m-1)\cos x = 2m^2 + \frac{3}{2}$

Để phương trình đã cho có nghiệm, ta phải có: $(2m+1)^2 + (2m-1)^2 \geq \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (4m^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (4m^2 - 1)2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Với hình thức trắc nghiệm để xử lí được bài này các em làm như sau : **SOLVE**

Các em cho $m = \frac{1}{2}$ rồi tiến hành Solve xem có nghiệm không

SHIFT CALC 0 . 5 = =

2Y(cos(X)+sin(X Y? 2Y(cos(X)+sin(X

0.5 X= 1.570795557

L-R= 0

Vậy là $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn do đó các em xét lần lượt $m = -\frac{1}{2}$ và cuối cùng chọn C

Ví dụ 4: Cho $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{139}{70}$ C. $\dfrac{70}{139}$ D. $\dfrac{54}{139}$

Hướng dẫn:

Tự luận:

$$M = \frac{3\sin\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2\cos\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$$

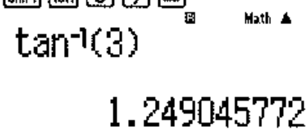
$$= \frac{3\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^3\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha} \text{ (chia tử và mẫu cho } \cos^3\alpha\text{)}$$

$$= \frac{3\tan^3\alpha - 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2}{5\tan^3\alpha + 4}$$

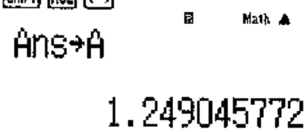
Trắc nghiệm

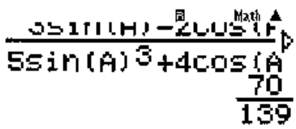
Các em sử dụng máy tính để tính ra góc α

SHIFT tan 3) =



SHIFT RCL (−)





Bài tập rèn luyện

Bài 1: Giải phương trình: $(\sin x + \cos x)^3 - \sqrt{2}(\sin 2x + 1) + \sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ B. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ C. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ D. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

Giải:

PT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - \sqrt{2}(\sin x + \cos x)^2 + \sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$

Đặt: $\sin x + \cos x = t, -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow t^3 - \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi;\ k \in Z$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 9x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{40}+k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=-\dfrac{\pi}{40}+k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{40}+k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{32}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{40}+k\pi \end{array}\right.$

Giải:

$PT \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 9x$

$\Leftrightarrow \cos 9x=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 9x=\pm\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+k2\pi$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\dfrac{\pi}{40}+k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right. k\in Z$

Bài 3: Giải phương trình: $2\sin 4x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{4\pi}{15}+k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{9}+k2\pi \\ x=\dfrac{4\pi}{15}+k2\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{4\pi}{15}+k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{4\pi}{15}+k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right.$

Giải:

$PT \Leftrightarrow \sin 4x=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=x+\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x=\pi-\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. k\in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{4\pi}{15}+k\dfrac{2\pi}{5} \end{array}\right. ; k\in Z$

Bài 4: Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=8\cos x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

<u>Giải:</u>

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$PT \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x+\sin x=8\cos^2 x.\sin x=8(1-\sin^2 x)\sin x=8\sin x-8\sin^3 x$

$PT \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=6\sin x-8\sin^3 x=2(3\sin x-4\sin^3 x)=2\sin 3x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{3}-x+k2\pi \\ 3x=\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+k2\pi \end{array}\right. ; k\in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$; $k\in Z$ (thỏa mãn điều kiện)

<u>Bài 5:</u> Giải phương trình: $\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin 2x+\sin x}=\sqrt{3}$

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

<u>Giải:</u>

Điều kiện: $\sin 2x+\sin x=\sin x(2\cos x+1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq -\frac{1}{2} \end{cases}$

$PT \Leftrightarrow \cos 2x - \cos x = \sqrt{3}\left(\sin 2x + \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \cos x + \sqrt{3}\sin x \quad \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \pm\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi;\ k \in Z$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.;\ k \in Z$$

Bài 6. Cho góc α thỏa mãn: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{5}$. Tính $A = \frac{\cot\alpha}{1 + \cot^2\alpha}$

A. $\frac{\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{6}{25}$

Hướng dẫn

Các em phải lấy giá trị sau do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$-\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{10}}{5}\right) + 2\pi$$

4.027669777

Sau đó thay vào tính A

$$\frac{1 \div \tan(A)}{1 + (1 \div \tan(A))^2}$$

0.4898979486

Bài 7. Cho $\sin\alpha = \frac{3}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha$.

A. $\frac{62 - 12\sqrt{10}}{7}$ B. $\frac{60 - 12\sqrt{10}}{49}$ C. $\frac{61 - 12\sqrt{10}}{49}$ D. $\frac{62 - 12\sqrt{10}}{49}$

Hướng dẫn:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{40}{49}$. Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$

$M = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = 2\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{-2\sqrt{10}}{7} + 2\left(2\cdot\frac{40}{49} - 1\right) = \frac{62 - 12\sqrt{10}}{49}$

Bài 8. Cho $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ $(\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}))$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2} + 3\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn

Vì $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ $(\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}))$ nên $\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} + 4\tan\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$

Suy ra $\tan\frac{\alpha}{2} = -2+\sqrt{5}$ hoặc $\tan\frac{\alpha}{2} = -2-\sqrt{5}\,(l)$. Do $\tan\frac{\alpha}{2} > 0$.

Thay vào ta có $P = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}+3}{\tan\frac{\alpha}{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$

Bài 9. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (1+\tan\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$. Ta có:

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$,

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -3$

Khi đó: $P = (1+\tan\alpha).\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \sin\alpha) = (1-3).\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 10. Cho $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{5}\cos\alpha - 5\sin 2\alpha$.

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn

Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0$.

Ta có: $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Do đó: $A = \sqrt{5}\cos\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 10\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 2+4 = 6.$

Bài 11. Cho góc lượng giác α, biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2\alpha}$.

A. $\frac{9}{2}$ B. $-\frac{9}{2}$ C. $-\frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{9}$

Hướng dẫn

$P=\dfrac{\cos 2\alpha-3}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-4}{1-\cos^2\alpha}$ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{5}$. Suy ra $\boxed{P=-\dfrac{9}{2}}$

Bài 12. Cho $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. Hãy tính giá trị biểu thức : $A=\cos 2\alpha-2\sin^2(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})$

A. $\dfrac{12}{25}$ B. $-\dfrac{12}{25}$ C. $-\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn

$A=\cos 2\alpha-2\sin^2(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})=1-2\sin^2\alpha-\left[1-\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\right]=-2\sin^2\alpha+\sin\alpha$

$A=-2.\dfrac{16}{25}+\dfrac{4}{5}=-\dfrac{12}{25}$

Bài 13. Cho góc α thỏa mãn $5\sin 2\alpha-6\cos\alpha=0$ (1) và $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức:

$A=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2015\pi-\alpha)-\cot(2016\pi+\alpha)$

A. $-\dfrac{3}{15}$ B. $\dfrac{2}{15}$ C. $-\dfrac{2}{15}$ D. $\dfrac{3}{15}$

Hướng dẫn

$A=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2015\pi-\alpha)-\cot(2016\pi+\alpha)$.

Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0$, $\cot\alpha>0$.

$(1)\Leftrightarrow 10\sin\alpha.\cos\alpha-6\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha.(5\sin\alpha-3)=0\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ (vì $\cos\alpha>0$)

$\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1=\dfrac{25}{9}-1=\dfrac{16}{9}\Rightarrow\cot\alpha=\dfrac{4}{3}$ (vì $\cot\alpha>0$)

$A=\sin\alpha+\sin\alpha-\cot\alpha=2\sin\alpha-\cot\alpha=2.\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{15}$

Bài 14. Tính giá trị của biểu thức $A=\sin 3\alpha+\sin^2 2\alpha$, biết $2\cos 2\alpha+7\sin\alpha=0$.

A. $\dfrac{29}{63}$ B. $-\dfrac{29}{63}$ C. $\dfrac{29}{64}$ D. $-\dfrac{29}{64}$

Hướng dẫn

$2\cos 2\alpha+7\sin\alpha=0\Leftrightarrow 2(1-2\sin^2\alpha)+7\sin\alpha=0\Leftrightarrow\sin\alpha=-\dfrac{1}{4},\sin\alpha=2$ (loại).

$A=\sin 3\alpha+\sin^2 2\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha+4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$=3\left(-\dfrac{1}{4}\right)-4\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3+4\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2\left[1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2\right]=-\dfrac{29}{64}$. Vậy $A=-\dfrac{29}{64}$.

Bài 15. Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

A. $-\frac{1-4\sqrt{5}}{9}$ B. $-\frac{1+4\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{1-4\sqrt{5}}{9}$ D. $\frac{1+4\sqrt{5}}{9}$

Hướng dẫn

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên $\sin\alpha>0$. Do đó $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Vậy $P=2\sin\alpha.\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=2.\frac{\sqrt{5}}{3}.(-\frac{2}{3})+2(-\frac{2}{3})^2-1=-\frac{1+4\sqrt{5}}{9}$

Bài 16. Cho α là góc thỏa mãn $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P=\sin 2\alpha$.

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha.\cos\alpha=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}$

Vậy $P=\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}$

Bài 17. Cho góc α thỏa $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\tan\alpha=2$. Tính $A=\sin 2\alpha+\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})$.

A. $-\frac{4-2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4-2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{4+2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4+2\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn

$\tan\alpha=2\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Vì $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

$A=2\sin\alpha.\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{4+2\sqrt{5}}{5}$

Bài 18. Biết $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ và $0^0<\alpha<90^0$. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\cot\alpha+\tan\alpha}{\cot\alpha-\tan\alpha}$

A. $-\frac{25}{7}$ B. $\frac{24}{7}$ C. $\frac{25}{7}$ D. $-\frac{24}{7}$

Hướng dẫn

Biến đổi được $A=\frac{1}{2\cos^2\alpha-1}$ Thay $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, ta được $A=\frac{25}{7}$

Bài 19. Cho góc α thoả mãn $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ và $\cos\alpha=\frac{4}{5}$. Tính giá trị biểu thức $A=\frac{\tan\alpha-1}{2-\cos 2\alpha}$.

A. $\frac{175}{172}$ B. $-\frac{175}{172}$ C. $-\frac{175}{171}$ D. $\frac{175}{171}$

Hướng dẫn

Ta có: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$ và $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

Vậy $A = \dfrac{-\frac{3}{4} - 1}{2 - \frac{7}{25}} = -\frac{175}{172}$

Bài 20. *Cho* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \sin\alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin2\alpha + \cos2\alpha$.

A. $\frac{16-10\sqrt{2}}{13}$ B. $-\frac{16-10\sqrt{2}}{13}$ C. $\frac{16+10\sqrt{2}}{13}$ D. $\frac{7-4\sqrt{2}}{9}$

Hướng dẫn

Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}$

Vì $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos\alpha < 0$, do đó $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Khi đó, $P = \sin2\alpha + \cos2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7-4\sqrt{2}}{9}$

Bài 21. Cho *tan a = 2*. Tính giá trị biểu thức: $E = \dfrac{8\cos^3 a - 2\sin^3 a + \cos a}{2\cos a - \sin^3 a}$

A. $-\frac{32+8\sqrt{2}}{29}$ B. $\frac{32+8\sqrt{2}}{29}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn

Chia cả tử và mẫu cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được:

$$E = \dfrac{8 - 2\tan^3 a + \dfrac{1}{\cos^2 a}}{\dfrac{2}{\cos^2 a} - \tan^3 a} = \dfrac{8 - 2\tan^3 a + 1 + \tan^2 a}{2\left(1+\tan^2 a\right) - \tan^3 a}$$

Thay *tan a* = 2 ta được: E = $-\frac{3}{2}$

CHUYÊN ĐỀ XÁC SUẤT –TỔ HỢP - NEWTON

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xét thí nghiệm gieo quân xúc sắc 6 mặt (có thể gieo một con, hai con hoặc nhiều quân xúc sắc) và xét số chấm xuất hiện, ta có các khái niệm sau đây:

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm có kết quả mang tính chất ngẫu nhiên mà ta không thể biết chắc được kết quả sẽ xảy ra nhưng có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Ví dụ: Việc gieo quân xúc sắc là một phép thử ngẫu nhiên.

2. Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên gọi là không gian mẫu. Không gian mẫu thường được kí hiệu là E hoặc Ω.

Ví dụ: Nếu gieo một quân xúc sắc thì không gian mẫu E là {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Nếu gieo lần lượt hai quân xúc sắc thì không gian mẫu E là:

{(1; 1), (1;2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3;2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4;2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5;2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6;2), (6; 3), (6; 4), (6; 5); (6; 6)}

3. Biến cố

Mỗi tập hợp con của không gian mẫu là một biến cố. Mỗi phần tử của biến cố A gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

Ví dụ: Biến cố để gieo lần lượt 2 quân xúc sắc có tổng 5 là: {(1; 4), (4; 1), (2; 3), (3; 2)}.

4. Các loại biến cố

4.1. Biến cố sơ cấp

Mỗi phần tử của không gian mẫu là một biến cố sơ cấp.

Ví dụ (1; 2) là biến cố sơ cấp

4.2. Biến cố chắc chắn

Không gian mẫu E còn gọi là biến cố chắc chắn, tức là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên.

Ví dụ: Biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn hoặc bằng 2 và nhỏ hơn hoặc bằng 12 là biến cố chắc chắn.

4.3. Biến cố không thể

Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên. Biến cố không thể kí hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ: Biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 12 là biến cố không thể.

4.4: Biến cố hợp

Biến cố $A \cup B$ là biến cố "ít nhất có A hoặc B xảy ra" gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Biến cố $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ gọi là hợp của k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$

Ví dụ: Gọi A là biến cố để gieo lần lượt 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 10 và B là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 4.

Khi đó biến cố $A \cup B$ là { (6; 5), (5; 6), (6; 6), (1; 1), (1; 2), (2; 1)}

4.5. Biến cố giao

Biến cố $A \cap B$ là biến cố " cả A và B cùng xảy ra".

Biến cố $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ là biến cố "$A_1, A_2, ..., A_k$ cùng xảy ra" gọi là giao của biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$.

Ví dụ: Gọi A là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 7 và B là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 10.

Khi đó biến cố $A \cap B$ là {(2; 6), (6; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 4); (3; 6), (6; 3)}

4.6. Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B gọi là xung khắc nếu khi biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, tức là $A \cap B \neq 0$

Ví dụ: Biến cố A gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 10 và biến cố B gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 4 là hai biến cố xung khắc.

4.7. Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A trong không gian mẫu E, kí hiệu $\overline{A}$ là biến cố gieo 2 quân xúc sắc có tổng là một số lẻ.

4.8. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B của một phép thử ngẫu nhiên gọi là độc lập với nhau nếu sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Ví dụ: Khi gieo 2 quân xúc sắc, gọi A, B là biến cố tương ứng để quân xúc sắc đầu tiên và thứ hai nhận được mặt 3. Khi đó A, B độc lập với nhau.

5. Tần số của một biến cố

Số m lần xuất hiện của biến cố A trong n lần thực hiện phép thử ngẫu nhiên gọi là tần số của biến cố A $(0 \le m \le n)$

Ví dụ: Khi gieo 16 lần một quân xúc sắc ta thấy có 2 lần xuất hiện mặt lục thì tần số của biến cố quân xúc sắc xuất hiện mặt lục là 2 trong 16 phép thử.

6. Tần số của một biến cố

Tỉ số giữa tần số m của biến cố A và số n lần thực hiện phép thử ngẫu nhiên gọi là tần suất của biến cố A. Kí hiệu $f = \frac{m}{n}$.

Ví dụ: Khi gieo 16 lần một quân xúc sắc ta thấy có 2 lần xuất hiện mặt lục thì tần suất của biến cố quân xúc sắc xuất hiện mặt lục là: $f = \frac{2}{16} = 0,125$.

7. Định nghĩa xác suất

Xác suất của biến cố A là tỉ số giữa số trường hợp thuận lợi cho A và tổng số trường hợp có thể xảy ra trong phép thử ngẫu nhiên:

$$P(A) = \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho A}}{\text{Tổng số trường hợp có thể xảy ra}}$$

Nếu biến cố A có m phần tử trong không gian mẫu E có n phần tử $(0 \le m \le n)$ thì xác suất của biến cố A là:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|E|}$ (|A| là số phần tử của A,|E| là số phần tử của E).

8. Tính chất

Cho một thí nghiệm ngẫu nhiên có không gian mẫu E và A, B là hai biến cố.

Khi đó $0 \le P(A) \le 1$; $P(E) = 1$; $P(\varnothing) = 0$, A và B xung khắc $\Leftrightarrow A \cap B = 0$

9. Quy tắc tính xác suất

9.1.1. Biến cố xung khắc

Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Ta có: $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Cho k biến cố xung khắc $A_1, A_2, ..., A_k$. Ta có:

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$

9.1.2. Biến cố đối

Cho $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A. Ta có: $P(\overline{A}) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

9.2. Quy tắc nhân xác suất

9.2.1. Biến cố độc lập

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Ta có: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Cho k biến cố độc lập $A_1, A_2, ..., A_k$. Ta có:

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2)....P(A_k)$

9.2.2. Biến cố xung khắc

Cho A và B là hai biến cố xung khắc.

Ta có: $(A \cap B)$ luôn không xảy ra, nên: $P(A \cap B) = 0$

Ta có A và B xung khắc thì A và B không độc lập nên:

$P(A \cap B) \ne P(A).P(B)$ với P(A) > 0 và P(B) > 0.

9.3. Liên hệ giữa quy tắc cộng xác suất và quy tắc nhân xác suất

Cho A và B là hai biến cố bất kì. Ta có:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Chú ý: Có sách kí hiệu giao của hai biến cố A và B là A.B thay cho $A\cap B$.

Giao của k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ là $A_1.A_2....A_k$.

9.4.Sử dụng CASIO để tính nhanh: hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Ở đây để tính nhanh trên máy tính các em làm như sau:

Để tính $C_n^k \to nCk$, Ví dụ C_{10}^3 thì các em nhập:

1 0 SHIFT ÷ 3 =

D Math ▲

10C3

120

Để tính giai thừa thì các em bấm như sau: 10!

1 0 SHIFT x^{-1}

D Math ▲

10!

Để tính chỉnh hợp A_{10}^3 thì các em bấm như sau :

1 0 SHIFT × 3 =

D Math ▲

10P3

720

Ví dụ mẫu

__**Ví dụ 1:**__ Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả đỏ và 2 quả xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả đỏ và 6 xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:

a. Cả hai quả đều đỏ

A. 0,24   B. 0,42   C. 0,26   D. 0,62

b .Hai quả cùng màu.

A. 0,28   B. 0,48   C. 0,84   D. 0,82

c.Hai quả khác màu.

A. 0,25   B. 0,26   C. 0,62   D. 0,52

Hướng dẫn

Gọi A: " Quả lấy từ hộp thứ nhất màu đỏ";

B: " Quả lấy từ hộp thứ hai màu đỏ".

Ta thấy A và B độc lập.

a) Cần tính $P(A\cap B)$. Ta có $P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{3}{5}.\frac{4}{10}=0,24$.

b) Cần tính xác suất của: $C=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

Do tính xung khắc và độc lập của các biến cố, ta có:

$$P(C)=P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$$
$$=\frac{3}{5}.\frac{4}{10}+\frac{2}{5}.\frac{6}{10}=0,48$$

c) Cần tính $P(\overline{C})$. Ta có: $P(\overline{C})=1-P(C)=1-0,48=0,52$.

__Ví dụ 2:__ Một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp sau:

a. Lấy được 3 viên bi đỏ.

A. $\frac{7}{44}$ B. $\frac{7}{11}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{7}{33}$

b. Lấy được ít nhất 2 viên bi đỏ.

A. $\frac{7}{44}$ B. $\frac{7}{11}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{7}{33}$

Hướng dẫn

a) $P=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$

b) $P=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}+\frac{C_5^1.C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{7}{11}$

__Ví dụ 3:__ Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là: 1kg, 2kg,..., 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân. Tính xác suất để trọng lượng 3 quả cân được chọn không quá 9 kg.

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{2}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{5}{8}$

Hướng dẫn

Gọi A là biến cố chọn được 3 quả cân có tổng trọng lượng không vượt quá 9 kg.

$A=\{(1,2,3);(1,2,4);(1,2,5);(1,2,6);(1,3,4);(1,3,5);(2,3,4)\}$

$\Rightarrow P=\frac{7}{C_8^3}=\frac{1}{8}$

__Ví dụ 4:__ Cho tập hợp $E=\{0,1,2,...,9\}$. Lấy ngẫu nhiên ra 2 phần tử của E. Tìm xác suất để 2 số lấy ra đều chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 7.

A. $\frac{6}{45}$ B. $\frac{4}{45}$ C. $\frac{8}{45}$ D. $\frac{10}{45}$

Hướng dẫn

Gọi A là biến cố để 2 số lấy ra đều chẵn và có tổng nhỏ hơn 7.

$A=\{(0,2);(0,4);(0,6);(0,8)\}$

$\Rightarrow P=\frac{4}{C_{10}^2}=\frac{4}{45}$

__Ví dụ 5:__ Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lý chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để:

a.Cả 6 người là nam.

A. $\frac{3}{210}$ B. $\frac{1}{210}$ C. $\frac{7}{210}$ D. $\frac{13}{210}$

b.Có 4 nam và 2 nữ.

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

c.Có ít nhất 2 nữ.

A. $\frac{33}{42}$ B. $\frac{25}{42}$ C. $\frac{3}{42}$ D. $\frac{37}{42}$

Hướng dẫn

Có tất cả C_{10}^6 cách chọn ngẫu nhiên.

a) $P=\frac{1}{C_{10}^6}=\frac{1}{210}$

b) $P=\frac{C_6^4.C_4^2}{C_{10}^6}=\frac{3}{7}$

c) $P=\frac{C_6^4.C_4^2+C_6^3.C_4^3+C_6^2.C_4^4}{C_{10}^6}=\frac{37}{42}$

Bài tập rèn luyện

Bài 1: Một đoàn tàu có 3 toa đỗ ở một sân ga, có 5 khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên 1 toa. Tính xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách lên tàu.

A. $\frac{50}{81}$ B. $\frac{40}{81}$ C. $\frac{33}{81}$ D. $\frac{52}{81}$

Hướng dẫn

Có tất cả: 3^5 khả năng xảy ra. Vì chỉ xảy ra 2 trường hợp: $(1;2;2)$ và $(1;1;3)$.

$\Rightarrow P=\frac{3C_5^1.C_4^2+3C_5^1.C_4^1.C_3^3}{3^5}$

Bài 2: Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã đề sẵn địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ.

A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

Hướng dẫn

Có tất cả: 4! = 24 cách bỏ thư vào bì thư.

Có 4 khả năng xảy ra là:

- Cả 4 lá đúng địa chỉ.
- 3 lá đúng địa chỉ.
- 2 lá đúng địa chỉ.
- 1 lá đúng địa chỉ.

$\Rightarrow$ Có: $1+C_4^3+C_4^2+C_4^1=1+4+6+4=15\Rightarrow P=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$

Bài 3: Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để:

a.Tất cả 10 thẻ đều mang số chẵn.

A. $\frac{1}{10005}$ B. $\frac{1}{10006}$ C. $\frac{2}{10005}$ D. $\frac{1}{10007}$

b.Có đúng 5 thẻ mang số chia hết cho 3.

A. 0,13 B. 0,26 C. 0,14 D. 0,28

c.Có 5 thẻ mang số lẻ, 5 thẻ mang số chẵn trong đó có 1 số chia hết cho 10.

A. $\frac{108}{8671}$ B. $\frac{108}{8670}$ C. $\frac{110}{8671}$ D. $\frac{100}{8671}$

Hướng dẫn

a. $P=\frac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}}$; b. $P=\frac{C_{10}^{5}.C_{20}^{5}}{C_{30}^{10}}$; c. $P=\frac{C_{10}^{5}.C_{3}^{1}.C_{12}^{4}}{C_{30}^{10}}$

Bài 4: Một máy bay có 3 bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Giả sử các bộ phận A, B, C tương ứng chiếm 15%: 30%; 55% diện tích máy bay. Máy bay bị rơi nếu có 1 viên đạn trúng vào A, hoặc 2 viên trúng vào B hoặc 3 viên trúng vào C. Tính xác suất máy bay bị rơi nếu:

a.Máy bay bị trúng 2 viên đạn.

A. 0,35 B. 0,36 C. 0,3675 D. 0,3

b.Máy bay bị trúng 3 viên đạn.

A. 0,5 B. 0,6 C. 0,7 D. 0,72775

Hướng dẫn

a) Gọi A là biến cố: " Có ít nhất 1 viên trúng A"

B là biến cố: " Cả 2 viên trúng B"

$\Rightarrow P(A)=1-(0,3+0,55)^2 \Rightarrow P(A)=1-(0,3+0,55)^2$

P(B) = $(0,3)^2$

$\Rightarrow$ Xác suất máy bay rơi: P = P(A) + P(B) = 0,3675

b) Máy bay không bị rơi khi có: 1 viên vào B và 2 viên vào C. Xác suất của biến cố này là: $3.(0,3)^2.(0,55)^2$

$\Rightarrow P(A)=1-(0,55)^2;\ P(B)=3.(0,3)^2.(0,55)^2$

$\Rightarrow P$ { máy bay rơi} $=1-3.(0,3)^2.(0,55)^2=0,72775$

Bài 5: Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền, mỗi người được sút 1 quả với xác suất bàn tương ứng là: 0,8 và 0,7. Tính xác suất để có ít nhất 1 cầu thủ làm bàn.

A. 0,8 B. 0,9 C. 0,94 D. 0,49

Hướng dẫn

P{ cả 2 đá trượt} = 0,2.0,3 = 0,06 $\Rightarrow$ P=1- 0,06 = 0,94

Bài 6: Trong tuần lễ vừa qua Thành phố có 7 vụ tai nạn giao thông. Tính xác suất để mỗi ngày có 1 tai nạn xảy ra.

A. 0,006 B. 0,005 C. 0,004 D. 0,003

Hướng dẫn

Có tất cả: 7^7 khả năng xảy ra $\Rightarrow P=\frac{7!}{7^7}$

Bài 7: Gieo đồng thời 3 con xúc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất " 2 mặt lục". Tìm xác xuất để trong 5 ván chơi, bạn thắng ít nhất 3 ván.

A. 0,0068 B. 0,0054 C. 0,0042 D. 0,0036

Hướng dẫn

Xác suất thắng trong 1 ván là: $C_3^2.\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{2}{27}$

Xác suất để thắng ít nhất 3 ván là: $C_5^3.\left(\frac{2}{27}\right)^3\left(\frac{25}{27}\right)^2+C_5^4.\left(\frac{2}{27}\right)^4\left(\frac{25}{27}\right)+\left(\frac{2}{27}\right)^5=\frac{52032}{27^5}$

Bài 8: Ở một nước có 50 tỉnh, mỗi tỉnh có 2 Đại biểu Quốc hội. Người ta chọn ngẫu nhiên 50 Đại biểu từ 100 Đại biểu để thành lập 1 Ủy ban. Tính xác suất để trong ủy ban có ít nhất 1 Đại biểu của thủ đô.

A. 0,7423 B. 0,7 C. 0,7324 D. 0,7243

Hướng dẫn

$P=1-\frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}}=0,7423$

Bài 9. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12*A*, 3 học sinh lớp 12*B* và 2 học sinh lớp 12*C*. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng năm học. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12*A*.

A. $\frac{11}{21}$ B. $\frac{12}{21}$ C. $\frac{13}{21}$ D. $\frac{14}{21}$

Hướng dẫn

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω

Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^5=126$

Gọi A là biến cố "Chọn 5 học sinh từ đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba lớp và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A".

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là :

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C
+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C
+ 3 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 1 học sinh lớp 12C

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $C_4^2.C_3^1.C_2^2+C_4^2.C_3^2.C_2^1+C_4^3.C_3^1.C_2^1=78$.

Xác suất cần tìm là $P=\frac{78}{126}=\frac{13}{21}$.

Bài 10. Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau gồm 12 quả đỏ và 8 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên (đồng thời) 3 quả. Tính xác suất để có ít nhất một quả cầu màu xanh.

A. $\frac{46}{57}$ B. $\frac{47}{57}$ C. $\frac{48}{57}$ D. $\frac{49}{57}$

Hướng dẫn

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{20}^3$

Gọi A là biến cố "Chọn được ba quả cầu trong đó có ít nhất một quả cầu màu xanh"

Thì $\overline{A}$ là biến cố "Chọn được ba quả cầu màu đỏ" $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=C_{12}^{3} \Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_{12}^{3}}{C_{20}^{3}}$

Vậy xác suất của biến cố A là $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\dfrac{C_{12}^{3}}{C_{20}^{3}}=\dfrac{46}{57}$

Phần Bài toán về Tổ Hợp và Nhị thức Newton

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ $(x>0)$ biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=92$.

A. 820 B.1120 C. 560 D. 1792

Hướng dẫn:

$$A_n^2+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=92 \Leftrightarrow n(n-1)+n+\frac{n(n-1)}{2}=92 \Leftrightarrow 3n^2-n-184=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=8 \\ n=-23/3(loai) \end{array}\right.$$

Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1}=C_8^k(x^3)^{8-k}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)^k=C_8^k(-2)^k x^{24-5k}$

Số hạng chứa x^4 ứng với k thỏa mãn $24-5k=4 \Leftrightarrow k=4$

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển đã cho là $C_8^4(-2)^4=1120$

Trắc nghiệm các em làm như sau:

Bước 1: Tìm n $A_n^2+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=92$ có 2 cách sau:

Cách 1: Solve , các em cho giá trị khởi đầu của X là 10 nhé

$$n(n-1)+n+\frac{n(n-1)}{2}=92$$

```
◂)+X+X(X−1)/2−92      Solve for X        X(X−1)+X+…/2▸
                                     10   X=            8
                                          L−R=          0
```

Cách 2: Table : Hiệu quả nhất

MODE 7 ALPHA) SHIFT × 2 + ALPHA) SHIFT ÷ (ALPHA) − 1) + ALPHA) SHIFT ÷ (ALPHA) − 2) − 9 2

```
f(X)=XP2+XC(X−1▸
```

= =

```
Start?          End?          Step?
        1             19            1
```

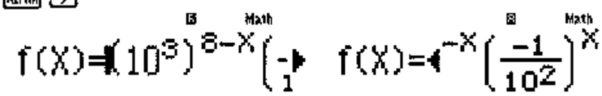
Cách này các em chỉ cần nhập cho đúng đỡ mất công khai triển.

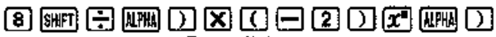
Bước 2: Tìm hệ số của x^4

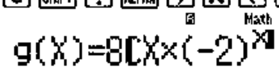
Theo công thức khai triển $C_8^k(x^3)^{8-k}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)^k$ khai triển này có 2 phần : phần hệ số $C_8^k(-2)^k$ và phần số mũ $(x^3)^{8-k}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)^k$

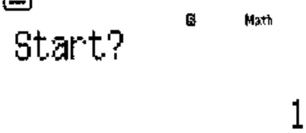
Rất may mắn cho các em thì máy tính 570 vn plus và vinacal đều có 2 bảng là F(x) và G(x) do đó ta sẽ để phần số mũ ở F(x) và phần hệ số ở G(x)

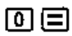
Các em thay $X = 10, k = x$ để thay đổi giá trị của k nhé

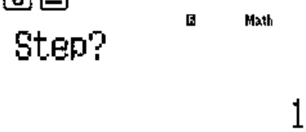


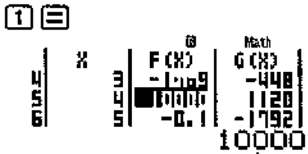












Chúng ta vừa nhìn được số mũ vừa thấy được hệ số của nó.

Ví dụ 2. Tìm số hạng chứa x^{40} trong khai triển Niu-tơn: $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$, với $x\neq 0$.

A. -30 B. $-30x^{40}$ C. -60 D. $-60x^{40}$

Hướng dẫn

Viết được CT của số hạng tổng quát : $C_{15}^k\left(x^3\right)^{15-k}\left(\frac{-2}{x^2}\right)^k$, $0\le k\le 15, k\in \mathrm{N}$

Viết được CT của số hạng tổng quát : $C_{15}^k(-2)^k.x^{45-5k}$

Tìm được k=1 $\Rightarrow$ số hạng cần tìm $-30x^{40}$

Ví dụ 3. Cho $P(x)=(1+x+x^2+x^3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số a_{10}.

A. 100 B.101 C. 102 D. 103

Hướng dẫn

$P(x)=\left(1+x+x^2+x^3\right)^5=\left(1+x\right)^5.\left(1+x^2\right)^5$

Hệ số a_{10} là hệ số của x^{10}

+ Ta có: $\left(1+x\right)^5=C_5^0+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5$

+ Ta có: $\left(1+x^2\right)^5=C_5^0+C_5^1x^2+C_5^2x^4+C_5^3x^6+C_5^4x^8+C_5^5x^{10}$

Suy ra hệ số của số hạng x^{10} của f(x) là:

$C_5^0C_5^5+C_5^2C_5^4+C_5^3C_5^4 = 1.1+50+50=101$

(do $x^{10}=x^{10}x^0=x^8x^2=x^6x^4$)

Ví dụ 4. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức Niu - tơn của biểu thức $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$, $x>0$. Trong đó n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2-2C_n^1=180$.

A. $3640x^3$ B. $3460x^3$ C. $-3640x^3$ D. $-3460x^3$

Hướng dẫn

ĐK: $n\in N, n\ge 2$

Khi đó: $A_n^2-2C_n^1=180\Leftrightarrow n^2-3n-180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=15\\n=-12\end{array}\right.\xrightarrow{DK} n=15$

Khi n = 15 ta có: $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{k}x^{\frac{15-3k}{2}}$

Mà theo bài ra ta có: $\frac{15-3k}{2}=3\Leftrightarrow k=3$

Do đó số hạng chứa x^3 trong khai triển trên là: $C_{15}^{3}\left(-1\right)^{3}2^{3}x^{3}=-3640x^{3}$

Bài tập rèn luyện

Bài 1: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$

A. 3310 B. 3320 C. −3310 D. −3320

$P=x\sum_{0}^{5}C_{5}^{k}(-2)^{k}x^{k}+x^{2}\sum_{0}^{10}C_{10}^{m}3^{m}x^{m}$

Tìm k,m sao cho $0\le k\le 5, 0\le m\le 10, k,m\in N$ sao cho:

$\begin{cases}k+1=5\\m+2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\\m=3\end{cases}$

Tổng hệ số của x^5 trong khai triển là : $C_{5}^{4}.(-2)^{4}+C_{10}^{3}.3^{3}=3320$

Bài 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết:

$$3^{n}C_{n}^{0}-3^{n-1}C_{n}^{1}+3^{n-2}C_{n}^{2}-3^{n-3}C_{n}^{3}+...+(-1)^{n}C_{n}^{n}=2048 \qquad (*)$$

(n là số nguyên dương, C_{n}^{k} là số tổ hợp chập k của n phần tử) .

A. 11 B. −11 C. −22 D. 22

Giải:

Xét khai triển:

$(3-x)^{n}=\sum_{0}^{n}C_{n}^{k}.3^{n-k}.(-1)^{k}.x^{k}$

$=3^{n}C_{n}^{0}x^{0}-3^{n-1}C_{n}^{1}x+3^{n-2}C_{n}^{2}x^{2}+...+(-1)^{n}C_{n}^{n}x^{n}$

Thay x=1 ta được:

$3^{n}C_{n}^{0}-3^{n-1}C_{n}^{1}+3^{n-2}C_{n}^{2}-3^{n-3}C_{n}^{3}+...+(-1)^{n}C_{n}^{n}=2^{n}$

$\Leftrightarrow 2048=2^{n}$

$\Leftrightarrow n=11$

Xét khai triển: $P=(2+x)^{11}=\sum_{0}^{11}C_{11}^{k}2^{11-k}x^{k}$

Hệ số của x^{10} trong khai triển là: $C_{11}^{10}.2=22$

Bài 3: Tìm số nguyên dương thỏa mãn hệ thức: $C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+...+C_{2n}^{2n-1}=2048$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Giải:

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

$-(1-1)^n = -C_n^0 + C_n^1 - C_n^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n}$

$\Rightarrow 2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}) = 2.2048$

$\Leftrightarrow n = 6$

Vậy n=6

Bài 4: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ trong đó $n \in N^*$ và các hệ số $a_0, a_1, ..., a_n$ thỏa mãn hệ thức: $a_0 + \frac{1}{2}a_1 + ... + \frac{1}{2^n}a_n = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, ..., a_n$.

A. $2^9C_{12}^9$ B. $2^6C_{12}^6$ C. $2^7C_{12}^7$ D. $2^8C_{12}^8$

Giải: Thay $x = \frac{1}{2}$ ta được: $2^n = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + ... + \frac{1}{2^n}a_n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$

$(1+2x)^n = \sum_0^n C_n^k 2^k.x^k$

*Xét $a_{k+1} \geq a_k$

$C_n^{k+1}2^{k+1} \geq C_n^k 2^k$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.2 \geq \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{k+1} \geq \frac{1}{n-k}$

$\Leftrightarrow k \geq 8$

*Xét: $a_{k-1} \geq a_k$

Tương tự:

$\Rightarrow \frac{1}{n-(k-1)} \geq \frac{2}{k}$

$\Leftrightarrow k \leq 8$

Vậy $max\{a_0, a_1, ..., a_{12}\} = a_8 = 2^8C_{12}^8$

Bài 5: Kết quả của tổng: $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = ?$

A. C_{2n+1}^n B. C_{2n+1}^{n+1} C. C_{2n}^{n+1} D. C_{2n}^n

Giải: $(1+x)^{2n} = \sum_0^{2n} C_{2n}^k x^k = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Hệ số của x^n là C_{2n}^n (1)

Mặt khác

$(1+x)^n(1+x)^n = \sum_0^n C_n^k x^k . \sum_0^n C_n^m x^m = (C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n)^2$

Hệ số của x^n :

$$\begin{cases} k+m=n \\ 0\le k,m\le n; k,m\in N \end{cases}$$

Vậy hệ số x^n là : $\sum C_n^k.C_n^m$

Do $k+m=n$ nên $C_n^k=C_n^m$

Hệ số của x^n là : $\sum_0^n (C_n^k)^2=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+...+(C_n^n)^2$ (2)

Mà $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$ (3)

Từ (1) và (2),(3) suy ra $C_{2n}^n=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2$ (đpcm)

Bài 6: Chứng minh rằng: $nC_n^0-(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2-(n-3)C_n^3+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=0$.

Giải:

Xét khai triển: $(x-1)^n=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}-C_n^3x^{n-3}+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x+C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$n(x-1)^{n-1}=nC_n^0x^{n-1}-(n-1)C_n^1x^{n-2}+(n-2)C_n^2x^{n-3}-(n-3)C_n^3x^{n-4}+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}$

Thay x=1 ta được: $nC_n^0-(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2-(n-3)C_n^3+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=0$ (đpcm)

Bài 7: Khai triển đa thức: $P(x) = (x + 1)^{10} + (x + 1)^{11} + (x + 1)^{12} + (x + 1)^{13} + (x + 1)^{14}$ ra dạng : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Hãy xác định hệ số a_{10}.

A. 1356   B.1365   C.1256   D. 1526

Đáp số:

Hướng dẫn: $a_{10}=C_{10}^0+C_{11}^1+C_{12}^2+C_{13}^3+C_{14}^4=1365$

Bài 8:

1. Tính tích phân: $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$ (n = 0, 1, 2, . . .)

2. Chứng minh rằng: $1-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n=\frac{2.4.6...(2n-2)2n}{3.5.7...(2n-1)(2n+1)}$.

Đáp số: 1) $I_n=\frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}$

1. $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$ $I_{n-1}=\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx$

Ta sẽ chứng minh: $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$; Đặt: $\begin{cases} u=(1-x^2)^n dx \\ dv=dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-2x.n(1-x^2)^{n-1}dx \\ v=x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + n\int_0^1 2x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$= 0 - 2n\int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}d(1-x^2) + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = 2nI_n + 2nI_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

Ta có: $I_n = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}...\frac{2}{3}I_0$

Với $I_0 = \int_0^1 (1-x^2)^0 dx = 1 \quad \Rightarrow I_n = \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}$

2.

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - C_n^3x^6 + ... + C_n^n x^{2n})dx$$

$$= (C_n^0 x - \frac{x^3}{3}C_n^1 + \frac{x^5}{5}C_n^2 - \frac{x^7}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-x)^n}{2n+1}C_n^n\Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$$

$$= \frac{2.4.6...(2n-2)2n}{3.5.7...(2n-1)(2n+1)}$$

Bài 9: Cho n là số nguyên dương. Tính $S = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

Đáp số: $S = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

Giải: $f(x) = (1+x)^n = \sum_0^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$

Lấy tích phân 2 vế ta được:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = (C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + ... + \frac{C_n^n}{n}x^{n+1})\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n \quad \text{(đpcm)}$$

Cấp Số Cộng , Cấp số Nhân, Giới Hạn

I. Cấp số cộng

1. Định nghĩa: Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với số không đổi d. Số d gọi là công sai của cấp số cộng.

Công thức truy hồi: $u_{n+1} = u_n + d$ với mọi số nguyên dương n.

Nếu d = 0 thì cấp số cộng là dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát: Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ với $n \geq 2$.

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2$$

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số cộng: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} =$

$$\frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

II. Cấp số nhân

1. Định nghĩa: Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạn thứ 2, mỗi số hạn đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với số không đổi q. Số q gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có $u_{n+1} = u_n q$, với mọi số nguyên dương n.

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 q^{n-1}$ với $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân: $(u_k)^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$, với $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân:

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

Nếu q = 1 thì $S_n = n.u_1$.

Bài tập rèn luyện cấp số cộng - Cấp số nhân

Câu 1. Cho cấp số cộng có các số hạng lần lượt là -4,1,6,x.Khi đó giá trị của x là bao nhiêu?

A. x=7 B. x=10 C. x=11 D. x=12

Câu 2. Cho cấp số cộng có các số hạng lần lượt là -7,x,11,y .Khi đó giá trị của x và y lần lượt là bao nhiêu

A. x=7,y=21 B. x=2,y=20, C. x=3,y=19 D. x=4,y=18

Câu 3. Trong các số hạng lần lượt là 5,9,13,7 khi nào thì … khi nào u_n có thể tính được theo biểu thức sau đây

A. $u_n = 5n+1$ B. $u_n = 5n-1$ *C.* $u_n = 4n+1$ D. $u_n = 4n-1$

Câu 4. Trong các dãy số được cho dưới đây ,dãy nào là cấp số cộng

A. $u_n = 7-3n$ B. $u_n = 7-3^n$ C. $u_n = \frac{7}{3^n}$ D. $u_n = 7.3^n$

Câu 5. Một cấp số cộng có 13 số hạng,số hạng đầu là 2 và tổng 13 số hạng đầu là 260 .Khi đó giá trị của u_{13} là bao nhiêu

A. $u_{13} = 40$ *B.* $u_{13} = 38$ C. $u_{13} = 36$ D. $u_{13} = 20$

Câu 6. Một cấp số cộng có 6 số hạng ,biết rằng tổng số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17 ,tổng của số hạng thứ 2 và số hạng thứ 4 bằng 14.Khi đó công sai đã cho có giá trị bằng bao nhiêu

A. d=2 *B.* d=3 C. d=4 D. d=5

Câu 7. Một cấp số cộng có 7 số hạng .Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 30 ,tổng của số hạng thứ 3 và số hạng thứ 6 bằng 35.Khi đó số hạng thứ 7 của cấp số cộng là bao nhiêu

A. $u_7 = 25$ *B.* $u_7 = 30$ C. $u_7 = 35$ D. $u_7 = 40$

Câu 8. Một cấp số cộng có 12 số hạng ,biết rằng tổng 12 số hạng là 144 ,số hạng thứ 12 bằng 23 .Khi đó công sai của cấp số cộng là bao nhiêu

A .d=2 B .d=3 C .d=4 D. d=5

Câu 9. Một cấp số cộng có 15 số hạng ,biết rằng tổng của 15 số hạng đó bằng 225 và số hạng thứ 15 bằng 29 .Khi đó số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu

A. $u_1 = 1$ *B.* $u_1 = 2$ C. $u_1 = 3$ D. $u_1 = 4$

Câu 10. Cho 1 cấp số cộng có 10 số hạng ,biết tổng của 10 số hạng đầu tiên là 175 và công sai d=3 .Khi đó số hạng đầu tiên của dãy số là bao nhiêu

A. $u_1 = 0$ B. $u_1 = 2$ *C.* $u_1 = 4$ D. $u_1 = 6$

Câu 11. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 2,8,x,128 .Khi đó giá trị của x bằng bao nhiêu

A. $x = 4$ *B.* $x = 32$ C. $x = 64$ D. $x = 64$

Câu 12 .Cho cấp số nhân ,có các số hạng lần lượt là x,12,y,129.Giá trị của x và y lần lượt là bao nhiêu

A. $x = 1, y = 144$ B. $x = 2, y = 72$ *C.* $x = 3, y = 48$ D. $x = 4, y = 36$

Câu 13 Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3,9,27,81.Khi đó u_n có được xác định theo biểu thức nào sau đây

A. $u_n = 3^{n-1}$ *B.* $u_n = 3^n$ C. $u_n = 3^{n-1}$ D. $u_n = 3^{n+1}$

Câu 14. Một cấp số nhân có 6 số hạng ,với số hạng đầu là 2 và số hạng thứ 6 là 486 .Gọi q là công bội của cấp số nhân đó ,giá trị của q là bao nhiêu

A. $q=3$ B. $q=-3$ C. $q=2$ D. $q=-2$

Câu 15. Cho 1 cấp số nhân có 4 số hạng ,với số hạng đầu là 3 và số hạng thứ 4 là 486 .Gọi q là công bội của cấp số nhân đó ,thì giá trị của S là bao nhiêu

A. S=390 *B.* S=255 C. S=256 D.S=-256

Câu 16. Cho cấp số nhân có 15 sô hạng ,đẳng thức nào sau dây là sai

A. $u_1.u_{15}=u_2.u_{14}$ *B.* $u_1.u_{15}=u_1.u_{11}$ C. $u_1.u_{15}=u_6.u_9$ D. $u_1.u_{15}=u_{12}.u_4$

Câu 17. Một tam giác có các góc lập thành cấp số nhân với công bội q=2.Khi đó các góc tương ứng của tam giác là

A. $30^0,60^0,90^0$ *B.* $\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6},\frac{4\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7}$

Câu 18. Chon cấp số nhân có 10 số hạng ,với công bội $q\neq 0$ và $u_1\neq 0$.Đẳng thức nào sau đây là đúng

A. $u_7=u_4.q^3$ B. $u_7=u_4.q^4$ C. $u_7=u_4q^5$ D. $u_7=u_4.q^6$

Câu 19.Một cấp số nhân có số hạng thứ 2 là 4 ,số hạng thứ 6 là 64 .Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân có thể tính theo công thức nào

A. $u_n=2^{n-1}$ *B.* $u_n=2^n$ C. $u_n=2^{n+1}$ D. $u_n=2n$

Câu 20. Cho 3 số a,b,c theo thứ tự nào đó ,vừa lập thành cấp số cộng ,vừa lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi

A. $a=1,b=2,c=3$ B. $a=d,b=2d,c=3d,\mathrm{d}\neq 0$

C. $a=q,b=q^2,c=q^3,q\neq 0$ *D.* $a=b=c$

Câu 21. Cho hai cấp số cộng: $u_n=u_1;u_2;\ldots u_n$ có công sai d_1 và $v_n=v_1;v_2\ldots v_n$ có công sai d_2.

Gọi tổng của n số hạng đầu của mỗi cấp số theo thứ tự là $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=7n+1$ và $T_n=v_1+v_2+\ldots+v_n=4n+27$. Tìm tỷ số $\frac{u_{11}}{v_{11}}$.

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. 1 D. $\frac{7}{3}$

Hướng dẫn: Ta có: $S_n=2u_1+(n-1)d_1$ và $T_n=2v_1+(n-1)d_2$ nên

$$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2u_1+(n-1)d_1}{2v_1+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}\quad(1)$$

$$\frac{u_{11}}{v_{11}}=\frac{u_1+10\mathrm{d}_1}{v_1+10\mathrm{d}_2}=\frac{2u_1+20\mathrm{d}_1}{2v_1+20\mathrm{d}_2}\quad(2)$$

So sánh (1) và (2) => n = 21 nên $\frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$

Câu 22 : Xác định một cấp số cộng có 3 số hạng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng bình phương là 125.

A. -4; 3; 10 B. 10; 3; -4 C. 4; 3; 10 và 10; 3; -4 D. 1 đáp án khác

Hướng dẫn: Gọi d là công sai. Ba số phải tìm là: (x – d); x; (x + d). Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-d)+x+(x+d)=9 & (1)\\ (x-d)^2+x^2+(x+d)^2=125 & (2)\end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

$(2) \Leftrightarrow (3-d)^2+3^2+(3+d)^2=125 \Leftrightarrow d=\pm 7$

Với d = 7 cấp số là: -4; 3; 10 và với d = -7 cấp số là 10; 3; -4

Câu 23. Xác định 4 góc của một tứ giác lồi, biết rằng số đo 4 góc lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất bằng 5 lần góc nhỏ nhất ,các góc đó lần lượt là

A. $30^0, 70^0, 110^0$, 150^0 B. 20^0 ,80^0 ,110^0 150^0

C. $20^0, 80^0, 100^0, 160^0$ D. $20^0, 80^0, 160^0, 100^0$

Câu 24. Tìm phân số sinh ra số a = 0,23232323….

A. $\frac{24}{99}$ B. $\frac{23}{99}$ C. $\frac{25}{99}$ D. $\frac{26}{99}$

Câu 25. Tính tổng của n số hạng : $S_n = 3+33+333+...$

A. $\frac{1}{27}(10^{n+1}-10-9n)$ B. $\frac{1}{27}(10^{n+1}+10-9n)$ C. $\frac{1}{27}(10^{n+1}+10+9n)$ D. $-\frac{1}{27}(10^{n+1}+10+9n)$

Câu 26. Tính tổng của n số hạng: T_n = 105 + 110 + 115 +….+995

A. 98450 B. 18450 C. 78450 D. 88450

Câu 27. Cho tam giác ABC có các cạnh tương ứng a; b; c . Biết $A = 90^0$; và $a; \sqrt{\frac{2}{3}}b; c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm số đo các góc B và C.

A . $B = 30^0, C = 60$ B . $B = 60^0, C = 120$ C. $B = 90,^0 C = 45^0$ D . $B = 60^0, C = 30^0$

Giải: Theo tính chất cấp số nhân, ta có: $ac = \frac{2}{3}b^2$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: b = a. sinB, c = a. cosB.

Vậy $ac = \frac{2}{3}b^2 \Leftrightarrow 3a^2.\cos B = 2a^2\sin^2 B \Leftrightarrow 2\cos^2 B + 3\cos B - 2 = 0 \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^0; C = 30^0$

Câu 28. Cho một dãy số có các số hạng đầu tiên là 1,8,22,43,...... Hiệu của hai số hạng liên tiếp của dãy số đó lập thành một cấp số cộng : 7,14,21..., 7n. số 35351 là số hạng thứ mấy của cấp số đã cho ?

A. 101   B. 102   C. 103   D. 108

Câu 29 .Tìm m để phương trình : $x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$ có bốn nghiệm lập thành một cấp số cộng ?

A . $m = 5$ B. $m = \frac{-25}{19}$ C. $m = 5$ và $m = \frac{-25}{19}$ D. m=-5

Hướng dẫn: Giả sử bốn nghiệm phân biệt của phương trình : x_1, x_2, x_3, x_4.

Đặt $x^2 = y \geq 0$, ta được phương trình :

$\Leftrightarrow y^2 - (3m+5)y + (m+1)^2 = 0 \quad (1)$

Ta phải tìm m sao cho (1) có hai nghiệm dương phân biệt : $0 < y_1 < y_2$, Khi đó thì (1) có bốn nghiệm là : $x_1 = -\sqrt{y_2}, x_2 = -\sqrt{y_1}, x_3 = \sqrt{y_1}, x_4 = \sqrt{y_2}$ (Rõ ràng : $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$)

Theo đầu bài thì bốn nghiệm lập thành cấp số cộng , nên :

$\Rightarrow x_3 + x_1 = 2x_2 \vee x_4 + x_2 = 2x_3 \Leftrightarrow \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} = 2\sqrt{y_1} \Rightarrow 3\sqrt{y_1} = \sqrt{y_2} \Leftrightarrow 9y_1 = y_2\ (*)$

Áp dụng vi ét cho phương trình (1) ta có hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+5)^2 - 4(m+1)^2 > 0 \\ S = y_1 + y_2 = 10y_1 = 3m+5 \\ P = y_1y_2 = 9y_1^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -\frac{25}{19} \end{cases}$

Câu 30. Tìm bốn số hạng đầu của một cấp số nhân , biết tổng ba số hạng đầu bằng $16\frac{4}{9}$, đồng thời theo thứ tự , chúng là số hạng thứ nhất , thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng

A . $u_1 = 4, u_2 = \frac{16}{3}, u_3 = \frac{64}{9}, u_4 = \frac{256}{27}$ B. $u_1 = 5, u_2 = \frac{17}{3}, u_3 = \frac{64}{9}, u_4 = \frac{256}{27}$

C. $u_1 = 5, u_2 = \frac{17}{3}, u_3 = \frac{64}{9}, u_4 = \frac{257}{27}$ D. $u_1 = 4, u_2 = \frac{16}{3}, u_3 = \frac{64}{9}, u_4 = \frac{257}{27}$

Hướng dẫn:Gọi : u_1, u_2, u_3, u_4 là 4 số hạng đầu tiên của cấp số nhân , với công bội q . Gọi (v_n) là cấp số cộng tương ứng với công sai là d .

Theo giả thiết ta có : $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=16\frac{4}{9} \\ u_1=v_1 \\ u_2=v_4=v_1+3d \\ u_3=v_8=v_1+7d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=16\frac{4}{9}\,(1) \\ u_1q=u_1+3d \quad (2) \\ u_1q^2=u_1+7d\,(3) \end{cases}$

Khử d từ (2) và (3) ta được : $u_1\left(3q^2-7q+4\right)=0 \quad (4)$.

Do (1) nên : $u_1\neq 0\Rightarrow (4)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=\frac{4}{3} \end{array}\right.$. Theo định nghĩa thì $q\neq 1$, do vậy $q=\frac{4}{3}$

Thay vào (1) , ta được : $u_1=4, u_2=u_1q=\frac{16}{3}, u_3=\frac{64}{9}, u_4=\frac{256}{27}$

Câu 31. Một cấp số nhân có 5 số hạng , công bội q =1/4 số hạng thứ nhất , tổng của hai số hạng đầu bằng 24 . Tìm cấp số nhân đó ?

A .8,16,32,128 B. -12,36,-108,-972

C. 8,16,32,128 hoặc -12,36,-108,-972 D. 12,36,108,972 hoặc 8,16,32,128

Hướng dẫn:Theo giả thiết ta có : $u_1+u_2=u_1+\frac{1}{4}(u_1)=24\Rightarrow u_1+\frac{1}{4}u_1^2-24=0\Leftrightarrow u_1=-12\vee u_1=8$

Vậy có hai cấp số nhân tương ứng là : 8,16,32,128 hoặc : -12,36,-108,-972

Câu 32. Với giá trị nào của a , ta có thể tìm được các giá trị của x để các số :

$5^{x+1}+5^{1-x},\frac{a}{2},25^x+25^{-x}$ lập thành một cấp số cộng ?

A. $a\geq 12$ B. $a\geq 13$ C. $a\geq 14$ D. $a\geq 15$

Hướng dẫn

Để 3 số hạng đó lập thành cấp số cộng , ta có :

$$\left(5^{1+x}+5^{1-x}\right)+\left(25^x+25^{-x}\right)=2\left(\frac{a}{2}\right)\Leftrightarrow a=5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)+\left(5^{2x}+\frac{1}{5^{2x}}\right)$$

Theo bất đẳng thức cô si , ta có : $5^x+\frac{1}{5^x}\geq 2\sqrt{1}=2, 5^{2x}+\frac{1}{5^{2x}}\geq 2\Rightarrow a\geq 5.2+2=12$.

Vậy với : $a\geq 12$, thì ba số đó lập thành cấp số cộng .

Câu 33. Giả sử các số : 5x-y,2x+3y, và x+2y lập thành một cấp số cộng , còn các số :

$(y+1)^2, xy+1, (x-1)^2$ lập thành cấp số nhân . Tìm x,y ?

A. $x=\frac{10}{3}, y=\frac{4}{3}$ B. $x=0, y=0$ C. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\ y=\frac{4}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=0, y=0\\ x=\frac{-3}{4}, y=\frac{-3}{10}\end{cases}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{10}{3}, y=\frac{4}{3}\\ x=\frac{-3}{4}, y=\frac{-3}{10}\end{cases}\end{array}\right.$

Hướng dẫn: Theo giả thiết ta có hệ :

$$\begin{cases}(5x-y)+(x+2y)=2(2x+3y)\\ (y+1)^2(x-1)^2=(xy+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=5y\\ \left[\begin{array}{l}x+y=2\\ xy+x+y=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x=5y\\ x+y=2\end{cases}\\ \begin{cases}2x=5y\\ y(5y)+5y+2y=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{10}{3}\\ y=\frac{4}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=0, y=0\\ x=-\frac{3}{4}, y=-\frac{3}{10}\end{cases}\end{array}\right.$$

Câu 34. Cho 2 số : x,,y lập thành một cấp số nhân và $x^4=y\sqrt{3}$. Tìm x,y và công bội q của cấp số đó ?

A. $x=\sqrt{3}, y=3\sqrt{3}$ B. $x=\sqrt{3}, y=2\sqrt{3}$

C. $x=3\sqrt{3}, y=2\sqrt{3}$ D. $x=3\sqrt{3}, y=3\sqrt{3}$

Hướng dẫn:Theo giả thiết : $\begin{cases}xy=3^2\\ x^4=y\sqrt{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{9}{x}\\ x^4=\frac{9\sqrt{3}.}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{9}{x}\\ x^5=9\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt[5]{\sqrt{3^5}}\\ y=\frac{3^2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=3\sqrt{3}\end{cases}$

Câu 35. Tìm x để ba số : $\ln 2, \ln(2^x-1), \ln(2^x+3)$ lập thành một cấp số cộng ?

A. $x=\log_2 6$ B. $x=\log_3 5$ C. $x=\log_3 7$ *D.* $x=\log_2 5$

Hướng dẫn:

Điều kiện : $2^x-1>0 \Leftrightarrow 2^x>1=2^0 \Rightarrow x>0(*)$

Khi đó ta có phương trình : $2\ln(2^x-1)=\ln 2+\ln(2^x+3) \Leftrightarrow (2^x-1)^2=2(2^x+3)$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}-4.2^x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=-1\\ 2^x=5>1\end{array}\right. \Rightarrow x=\log_2 5>0$$

Câu 36. Tổng của số hạng thứ hai và thứ tư của một cấp số nhân tăng nghiêm ngặt là 30 , và tích của chúng bằng 144. Tìm tổng mười số hạng đầu tiên của dãy số đó ?

A. 3069 B. 4069 C. 5069 D. 6069

Câu 37. Cho tam giác ABC có $A=90^0$ còn a,b,$\frac{\sqrt{6}}{3}$,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân . Tam giác ABC là tam giác có đặc điểm gì ?

A. tam giác cân B. tam giác thường C. tam giác nửa đều D. tam giác đều

Giải thích: tam giác nữa đều là tam giác vuông có 1 góc bằng 60, góc còn lại là 30

Hướng dẫn : Theo giả thiết ta có hệ : $\begin{cases} A=90^0 \\ \ddot{-}a,b,\frac{\sqrt{6}}{3},c \\ .. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ \frac{2}{3}b^2=ac \Leftrightarrow b^2=\frac{3}{2}ac \end{cases}$

Từ đó suy ra : $a^2=\frac{3}{2}ac+c^2 \Leftrightarrow 2a^2=3ac+2c^2 \Leftrightarrow (2a+c)(a-2c)=0 \Rightarrow a=2c(2a+c>0)$

Mà : $\cos B=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow B=60^0, C=30^0$. Vậy tam giác ABC là tam giác nửa đều .

Câu 38. Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện : tanA, tanB, tanC theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của góc B có thể có được ?

A. 30^0 B. 45^0 C. 60^0 D. 15^0

Hướng dẫn

Theo giả thiết : tanA,tanB,tanC lập thành cấp số cộng thì ta có : tanA+tanC=2tanB

$\Leftrightarrow \tan A+\tan C=\frac{\sin(A+C)}{\cos A.\cos C}=\frac{\sin B}{\cos A.\cos C} \Rightarrow \frac{2\sin B}{\cos B}=\frac{\sin B}{\cos A.\cos C}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\cos B}=\frac{1}{\cos A.\cos C} \Leftrightarrow 2\cos A.\cos C=\cos B \Leftrightarrow \cos(A+C)+\cos(A-C)=\cos B$

$\Leftrightarrow -\cos B+\cos(A-C)=\cos B \Leftrightarrow \cos B=\frac{1}{2}\cos(A-C)\le\frac{1}{2}$ (2)(vì $0<\cos(A-C)\le 1$)

Do $0<B\le\pi \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $B=\frac{\pi}{3}\to 60^o$

Giới Hạn

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$ ***2. Định lí :*** *a) Nếu* $\lim u_n=a$, $\lim v_n=b$ *thì* • $\lim(u_n+v_n)=a+b$ • $\lim(u_n-v_n)=a-b$ • $\lim(u_n.v_n)=a.b$ • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *(nếu* $b\neq 0$*)* *b) Nếu* $u_n\geq 0$, $\forall n$ *và* $\lim u_n=a$ *thì* $a\geq 0$ *và* $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ *c) Nếu* $\lvert u_n\rvert\leq v_n, \forall n$ *và* $\lim v_n=0$ *thì* $\lim u_n=0$ *d) Nếu* $\lim u_n=a$ *thì* $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\ (\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a)Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu* $\lim u_n=a$, $\lim v_n=\pm\infty$ *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ *c) Nếu* $\lim u_n=a\neq 0$, $\lim v_n=0$ *thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\ -\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu* $\lim u_n=+\infty$, $\lim v_n=a$ *thì* $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\ -\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Cách tính giới hạn bằng CASIO:

Thực ra ở đây chúng ta vẫn sử dụng ứng dụng của tính năng CALC mà thôi, các em cùng xét xét ví dụ sau :

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$

A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{-4}{15}$

Các em nhập biểu thức $\frac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$ vào máy tính rồi bấm CALC

$$\frac{\sqrt{2X+7}+X-4}{X^3-4X^2+3} \qquad X? \quad 1.0000001 \qquad \frac{\sqrt{2X+7}+X-4}{X^3-4X^2+3} \quad -0.26666666$$

Mục đích mình thêm 0.0000001 ở đây là để tránh mẫu bằng 0 do đó máy không tính được giá trị biểu thức còn khi mẫu và tử xấp xỉ 0 thì máy sẽ cho ra giá trị xấp xỉ giới hạn cần tìm là : (để ra được phân số như anh thì ít nhất nhập 13 số 6)

$$-0.2666666666666 \quad -\frac{4}{15}$$

Vậy chọn D.

Vậy tổng quát cho bài tính $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì các em tính giá trị của $f(x)$ tại $a+0.0000001$

Ngoài ra đối với dạng $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ các em có thể dùng công thức Lopital $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ khi đó nó sẽ mất dạng $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ và chỉ việc tính $\frac{f'(x)_{|x=a}}{g'(x)_{|x=a}}$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, với a> 0

A. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{a}}$ D. $-\frac{1}{\sqrt{a}}$

Hướng dẫn:

Các em chọn luôn a=100 ta được :

$$\frac{\sqrt{X}-\sqrt{100}+\sqrt{X-100}}{\sqrt{X^2-100^2}} \qquad \frac{\sqrt{X}-\sqrt{100}+\sqrt{X-100}}{\sqrt{X^2-100^2}} \quad 0.0707107897 \qquad Ans^2 \quad 5.00001578\times10^{-3}$$

Vậy các em chọn A.

Tương tự với các ví dụ sau:

Bài 1 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{7}$

Bài 2 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{4-x}$

A. $\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

Bài 3 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$

A. $\frac{1}{54}$ *B.* $-\frac{1}{54}$ C. $\frac{1}{53}$ D. $-\frac{1}{53}$

Bài 4 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

A. $\frac{1}{56}$ *B.* $-\frac{1}{56}$ C. $\frac{1}{57}$ D. $-\frac{1}{57}$

Bài 5 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x^2-1}$

A. $\frac{9}{4}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{13}{6}$

Bài 6 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}{x-1}$

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{2}$ *C.* $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{3}$

Bài 7 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x}$

A. $\frac{2}{9}$ *B.* $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{3}{18}$ D. $-\frac{3}{18}$

Bài 8 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

A. $\frac{14}{47}$ B. $-\frac{14}{47}$ *C.* $\frac{7}{24}$ D. $-\frac{7}{24}$

Bài 9 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ *D.* $\frac{1}{3}$

Bài 10 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$

A. 0 *B.* 1 C. $\frac{99}{100}$ D. $\frac{101}{100}$

Bài 11 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}$

A. 0 B. $\frac{99}{100}$ *C.* 1 D. $\frac{101}{100}$

Bài 12 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$

A. $\dfrac{7}{161}$ B. $-\dfrac{7}{161}$ C. $\dfrac{7}{162}$ D. $-\dfrac{7}{161}$

Bài 13 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}$

A. 0 B. $-\dfrac{1}{10^9}$ C. $\dfrac{1}{10^5}$ D. -1

Bài 14 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi\cos x}{2}\right)}{\sin(\tan x)}$

A. 0 B. $-\dfrac{1}{10^9}$ C. $\dfrac{1}{10^5}$ D. -1

Bài 15 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

A. 0 B. $\dfrac{99}{100}$ C. 1 D. $\dfrac{101}{100}$

Bài 16 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cot^3 x}{2-\cot x-\cot^3 x}$

A. $\dfrac{6}{7}$ B. $-\dfrac{3}{4}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $-\dfrac{6}{7}$

Bài 17 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{1-\cos 2x}$

A. $\dfrac{3}{2}$ B. $-\dfrac{3}{2}$ C. $\dfrac{6}{5}$ D. $-\dfrac{6}{5}$

Bài 18 : Tính giới hạn của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$

A. $\dfrac{1}{3}$ B. $-\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{1}{4}$ D. $-\dfrac{1}{3}$

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Hình không gian là một trong những chuyên đề Khó nếu thi trắc nghiệm bởi các em phải mất thời gian vẽ hình và suy luận- không có sự trợ giúp của máy tính. Kiến thức của hình học không gian được giới thiệu chủ yếu vào năm lớp 11 mặc dù các em học sinh đã được biết đến một số hình không gian trong chương trình học cấp 2.

Những bài toán thường gặp khi thi Toán trắc nghiệm:

1. Tính thiết diện
2. Tính thể tích
3. Tính khoảng cách
4. Tính Góc
5. Một số bài toán kết hợp khác

Trước khi vào đọc chuyên đề này thì những kiến thức bổ trợ các em cần phải nắm vững đó là:

- Những Kiến thức cơ bản về Hình không gian
- Những kiến thức phục vụ cho việc tính toán: Hệ thức lượng trong tam giác vuông và hệ thức lượng trong tam giác thường.
- Kỹ năng tính toán và luyện tập chăm chỉ.

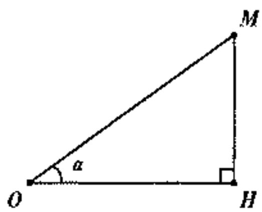
Với những kiến thức bổ trợ tốt thì phần Hình không gian sẽ là thế mạnh của các em.

1. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1.1. Kiến thức liên quan (Đây là kiến thức hình học phẳng để giúp các em tính toán một cách dễ dàng các cạnh, góc…)

1.1.1. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

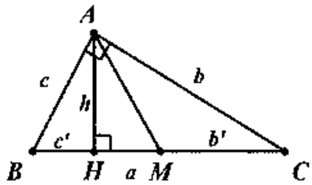
- $\sin\alpha = \dfrac{MH}{OM}$
- $\cos\alpha = \dfrac{OH}{OM}$
- $\tan\alpha = \dfrac{MH}{OH}$
- $\cot\alpha = \dfrac{OH}{MH}$



1.1.2. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông ở A

- Định lý Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2$
- $BA^2 = BH.BC;\ CA^2 = CH.CB$ hay $b^2 = a.b', c^2 = a.c'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $bc = ah$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ hay $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$
- $BC = 2AM$



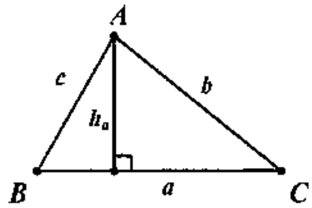
1.1.3. Hệ thức lượng trong tam giác thường

- Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$
- Định lý hàm số Sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

1.1.4. Các công thức tính diện tích.

a. Công thức tính diện tích tam giác.

- $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
- $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$
- $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{183}}{8}$
- $S = pr$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$ (Công thức Hê-rông)



Đặc biệt: • ΔABC vuông ở A: $S = \frac{1}{2}AB.AC$

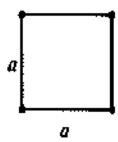
• ΔABC đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b. Diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$ (H.1)

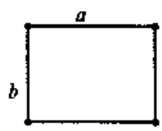
c. Diện tích hình chữ nhật: $S = a.b$ (H.2)

d. Diện tích hình thoi: $S = \frac{1}{2}m.n$ (H.3)

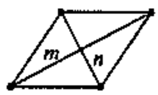
e. Diện tích hình thang: $S = \frac{1}{2}h(a+b)$ (H.4)



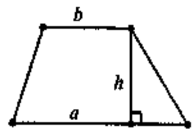
H.1



H.2



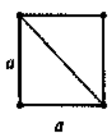
H.3



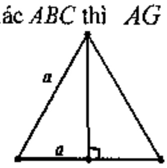
H.4

1.1.5. Một số tính chất đặc biệt thường sử dụng

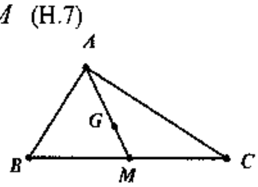
- Đường chéo hình vuông cạnh a là $d = a\sqrt{2}$ (H.5)
- Đường cao tam giác đều cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (H.6)
- Điểm G là trọng tâm tam giác ABC thì $AG = \frac{2}{3}AM$ (H.7)



H.5



H.6

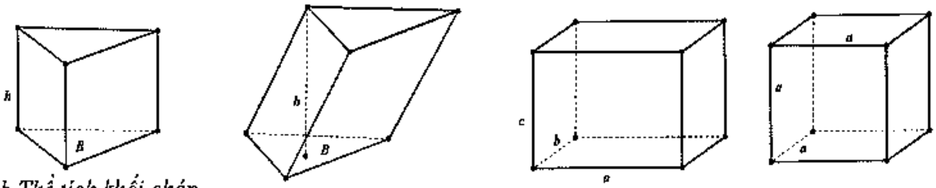


H.7

1.1.6. Thể tích khối đa diện

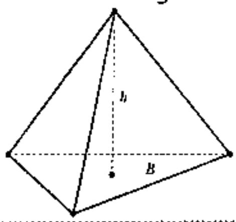
a. Thể tích khối lăng trụ

- Thể tích khối lăng trụ: $V = Bh$, với B là diện tích đáy ; h là chiều cao
- Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = abc$, với a, b, c là chiều dài, rộng, cao
- Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là cạnh



b.Thể tích khối chóp

•Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$, với B là diện tích đáy, h là chiều cao



1.2.Phương pháp tính thể tích khối đa diện

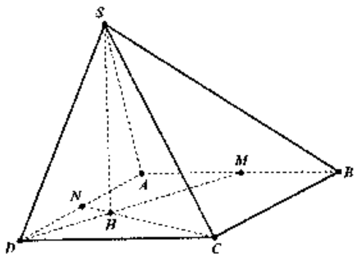
1.2.1.Phương pháp tính trực tiếp bằng việc sử dụng công thức thể tích

Khi tính thể tích khối đa diện đầu tiên cần quan tâm hai yếu tố quan trọng xác định thể tích là: chiều cao và diện tích đáy dựa trên các công cụ đã học như các hệ thức lượng trong tam giác thường, hệ thức lượng trong tam giác vuông,...

a. *Thể tích khối chóp.*

Ví dụ 1. (Đề thi TSĐH Khối A năm 2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM theo a.

Lời giải. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên



$$V_{S.CDMN} = \frac{1}{3}SH.S_{CDMN} = \frac{1}{3}SH.\left(S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{AMN}\right)$$

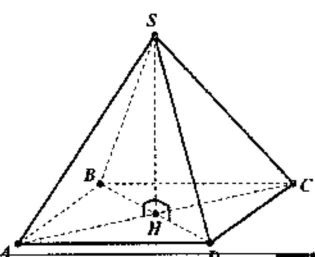
$$= \frac{1}{3}a\sqrt{3}\frac{5}{8}a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{24}a^3$$

**Nhận xét: Trong nhiều bài toán yếu tố quan trọng chính là chiều cao. Với khối chóp cần chính xác hóa đường cao (chân đường cao) của hình chóp. Ở đây ta có thể liệt kê một số trường hợp thường gặp sau:*

Ví dụ 2. Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a.

Lời giải Gọi H là tâm của hình vuông

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SH \perp (ABCD)$



Do đó, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$ (đvdt)

Ta có $SA^2 + SC^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 2a^2$

nên ΔSAC vuông tại S, mà H là trung điểm của AC nên

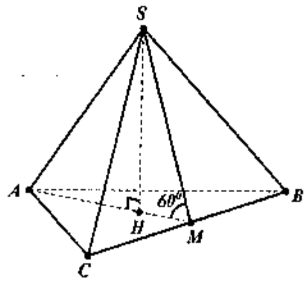
$$SH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \text{ (đvtt)}$$

**Nhận xét: Với khối chóp đều, chiều cao chính là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy*

Ví dụ 3. Tính thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$, biết cạnh đáy bằng a và các cạnh bên hợp đáy góc 60^0.

Lời giải Gọi H là tâm của tam giác ABC, M là trung điểm của BC

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SH \perp (ABC)$



Do đó, $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC}$

Vì ABC là tam giác đều nên $AM \perp BC$

Trong tam giác vuông ACM,

$$AM^2 = AC^2 - CM^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ (1)}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ (đvdt) (2)}$$

Mà ta lại có $AM \perp BC, SH \perp BC$ nên $SM \perp BC$. Do đó, Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa SM và AM hay góc $SMA = 60^0$.

Do H là trọng tâm tam giác ABC nên $HM = \frac{1}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Trong tam giác vuông SHM, $\tan SMH = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = HM.\tan 60^0 = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}a^3 \text{ (đvtt)}$$

+ Cách xác định góc giữa đt d và mặt phẳng (α):

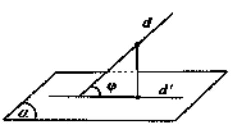
-Nếu $d \perp (\alpha)$ thì góc giữa d và (α) bằng 90^0

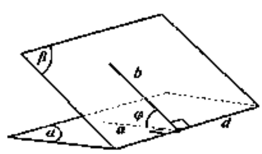
-Nếu $d \not\perp (\alpha)$ thì góc giữa d và (α) bằng góc giữa d và d' là hình chiếu của d trên (α)

+Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

-Cách 1: Xác định hai đt A, B sao cho $a \perp (\alpha), b \perp (\beta)$ thì góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b

-Cách 2: Nếu giao tuyến của (α) và (β) là d thì xác định hai đt A, B lần lượt nằm trong (α) và (β) sao cho $a \perp d, b \perp d$ thì thì góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b





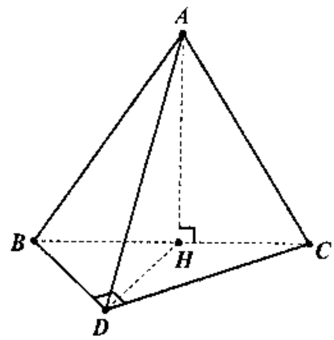
Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, BCD là tam giác vuông cân tại D, mặt phẳng πr^2. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Lời giải Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$

mà $(ABC) \perp (BCD), (ABC) \cap (BCD) = BC$

$\Rightarrow$ AH $\perp (BCD)$.



Ta có ΔABC là tam giác đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà ΔBCD là tam giác vuông cân nên

$$DH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = DH\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}BD^2 = \frac{a^2}{4} \text{ (đvdt)}$$

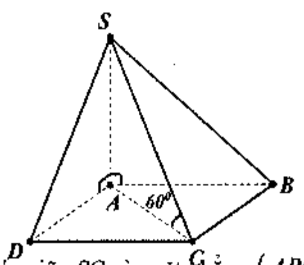
$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{24}a^3 \text{(đvtt)}$$

**Nhận xét: Hình chóp có một mặt bên hoặc mặt chéo vuông góc với đáy góc thì chân đường cao thuộc giao tuyến mặt đó với đáy, đường cao nằm trong mặt bên hoặc mặt chéo đó.*

**Ghi nhớ:* $\begin{cases}(\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha), a \perp d\end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải Ta có: $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA\end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$



Do đó, $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}$

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB.BC = 2a^2$

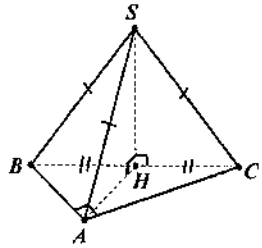
Do AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $SCA = 60^0$

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow SA = AC.\tan SCA = a\sqrt{5}.\tan 60^0 = a\sqrt{15}$

Vậy thể tích khối chóp là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$ (đvtt)

**Nhận xét: Hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao là giao tuyến của hai mặt đó.*

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, BC = 2a$. Các cạnh bên $SA = SB = SC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.



Lời giải Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) vì các đường xiên $SA = SB = SC$ nên các hình chiếu tương ứng $HA = HB = HC$

Do đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC mà tam giác ABC vuông tại A nên H là trung điểm của BC.

Vì SBC là tam giác đều cạnh $2a$ nên đường cao $SH = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Theo định lí Pitago, $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 3a \Rightarrow AC = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt)

Nên thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3}{2}$ (đvtt)

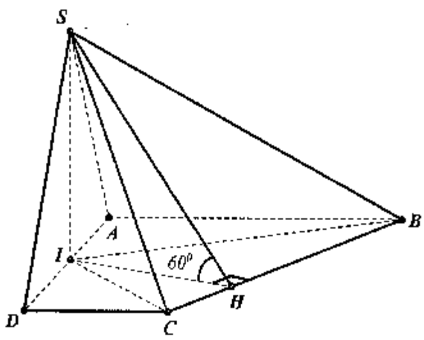
**Nhận xét: Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau (hoặc hợp đáy góc bằng nhau) thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.*

Ví dụ 9. (Đề TSĐH khối A năm 2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A,D; AB=AD=2a, CD=a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính $V_{S.ABCD}$

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của I trên BC

Từ giả thiết suy ra SI vuông góc với mặt đáy. Ta có thể dễ dàng tính được: $IC = a\sqrt{2}, IB = BC = a\sqrt{5}$,

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD.(AB + CD) = 3a^2$



Ta có $\frac{1}{2}IH.BC = S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{ABI} - S_{CDI}$

$= 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

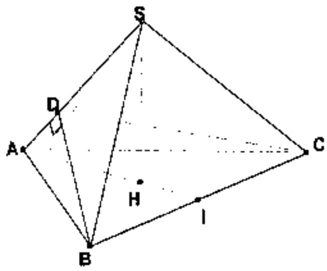
nên $IH = \frac{2S_{BCI}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$.

Từ đó tìm được $V_{S.ABCD} = \frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$ (đvtt)

Ví dụ 10. Hai cạnh đối diện của một tứ diện có độ dài bằng x, các cạnh khác đều có độ dài bằng 1. Với giá trị nào của x thể tích của tứ diện đạt giá trị lớn nhất ?

Lời giải Giả sử SA = BC = x, các cạnh khác của tứ diện có độ dài bằng 1. Gọi I, D lần lượt là trung điểm của BC & SA.

Ta có: SA $\perp$ (BCD). Do đó:



$V = \frac{1}{3}dt\Delta BCD.SA = \frac{1}{6}BC.ID.SA$

mà $ID = CD^2 - CI^2 = SC^2 - SD^2 - CI^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$

Suy ra, $V = \frac{1}{6}x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{12}x^2\sqrt{4-2x^2}$

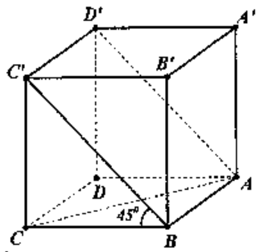
Vì vậy, $MaxV = \frac{2}{9\sqrt{3}}$ đạt tại x = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b. Thể tích khối lăng trụ.

Với thể tích khối lăng trụ ta vẫn sử dụng những hướng trên để làm đó là tìm cách xác định đường cao và diện tích đáy là được.

Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4a, AC = 5a$ mặt phẳng $(ABC'D')$ hợp đáy góc 45^0. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đó.

Lời giải Theo ĐL Pitago ta có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3a \Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC = 12a^2$ (đvdt)



Do $\begin{cases}(ABCD)\cap(ABC'D') = AB \\ BC \subset (ABCD), BC \perp AB \\ BC' \subset (ABC'D'), BC' \perp AB\end{cases}$

Nên góc giữa mặt phẳng $(ABC'D')$ và đáy là góc $CBC' = 45^0$

Suy ra, tam giác vuông cân nên $CC' = BC = 3a$

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = 36a^3$ (đvtt)

**Nhận xét: Với khối lăng trụ và khối đa diện khác ta có thể sử dụng một số hướng sau:*

+Sử dụng trực tiếp các công thức đã biết về thể tích khối lăng trụ

+Quy về tính thể tích một khối chóp đặc biệt.

+ Chia nhỏ thành nhiều khối chóp để tính

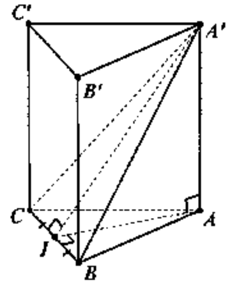
+Bù thêm vào khối đa diện phức tạp để được khối đa diện dễ tính thể tích.

Ví dụ 2. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a và diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có ΔABC đều nên $AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì AI là hình chiếu của $A'I$ trên mặt phẳng (ABC),



$AI \perp BC \Rightarrow A'I \perp BC$ (ĐL ba đường vuông góc)

$$S_{A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4a$$

Do tam giác AIA' vuông tại A nên $AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = \frac{\sqrt{61}}{2}a$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{183}}{8} \text{ (đvtt)}$$

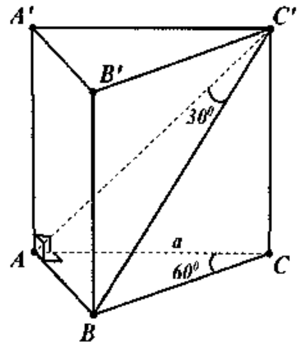
Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với AC = a, $ACB = 60^0$, biết BC' hợp với $(AA'C'C)$ một góc 30^0. Tính AC' và thể tích khối lăng trụ.

Lời giải Ta có ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a, ACB = 60^0$

$\Rightarrow AB = AC.\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AB \perp AC; AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$ nên AC' là hình chiếu của BC' trên $(AA'C'C)$.

Vậy góc giữa BC' và mặt phẳng $(AA'C'C)$ là góc $AC'B = 30^0$



$$\Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^o} = 3a$$

Trong tam giác vuông $AC'A'$,

$$AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a$$

Trong tam giác vuông ABC,

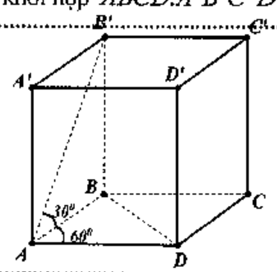
$$\tan ACB = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{(đvdt)}$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

Ví dụ 4. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $BAD = 60^0$, biết AB' hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30^0. Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải Vì ΔABD đều cạnh a nên



$$S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

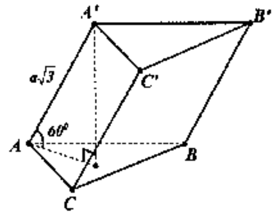
$\Delta ABB'$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = AB\tan 30^o = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.BB' = \frac{3a^3}{2}$ (đvtt)

Ví dụ 5. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)

Nên góc giữa CC' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0



$\Rightarrow C'H = CC'.\sin 60^0 = \frac{3a}{2}$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

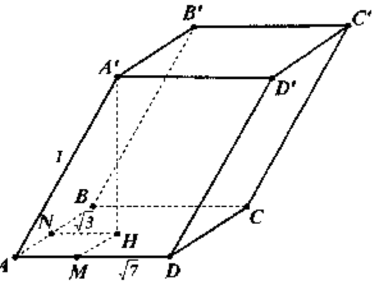
Vậy $V = S_{ABC}.C'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}, AD = a\sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc $45^0, 60^0$. Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng *a*.

Lời giải Gọi *H* là hình chiếu của *A'* trên mặt phẳng $(ABCD)$, *M,N* lần lượt là hình chiếu của trên *AD,AB*.

Dễ thấy, góc giữa các mặt $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ và đáy lần lượt là $ANH = 45^0, AMH = 60^0$

Đặt $A'H = x$ ta có: $NH = A'H\cot ANH = x$



$MH = A'H.\cot AMH = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Vì *AMHN* là hình chữ nhật nên

$AH^2 = AM^2 + AN^2 = x^2 + \frac{x^2}{3} = \frac{4x^2}{3}$

mà $AA'^2 = AH^2 + A'H^2 \Rightarrow a^2 = x^2 + \frac{4x^2}{3} = \frac{7x^2}{3} \Rightarrow x = a\sqrt{\frac{3}{7}}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D} = S_{ABCD}.A'H = a\sqrt{3}.a\sqrt{7}.a\sqrt{\frac{3}{7}} = 3a^3$ (dvtt)

Ví dụ 7. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* cạnh bằng *a*, $K \in CC'$ sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) qua *A,K* và song song với *BD* chia khối lập phương trình hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.

Lời giải. Gọi *O,O'* là tâm của hình vuông *ABCD,A'B'C'D'*, $M = AK \cap OO'$

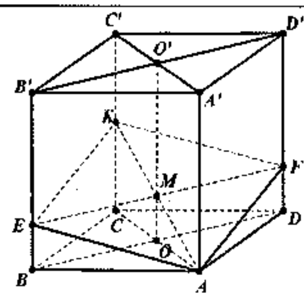
Qua *M* kẻ đường thẳng song song với *BD* cắt *BB',DD'* lần lượt tại *E,F*

Khi đó, thiết diện tạo bởi (α) và hình lập phương chính là hình bình hành *AEKF*.

Có *OM* là đường trung bình tam giác *ACK* nên $OM = \frac{1}{2}CK = \frac{a}{3}$

Do đó, $BE = DF = \frac{a}{3}$. Đặt $V_1 = V_{ABEKFDC}, V_2 = V_{AEKFA'B'C'D'}$

Để ý rằng tứ giác *BCKF=C'B'EK*, mặt phẳng *(AA'C'C)* chia khối *ABEKFDC* thành hai phần bằng nhau nên

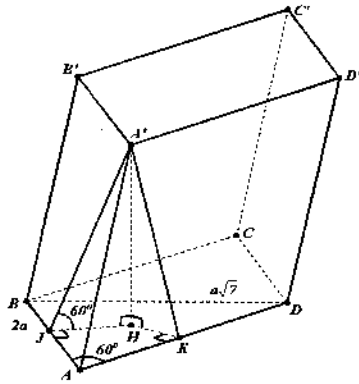


$V_1 = 2V_{A.BCKE} = 2.\frac{1}{3}.AB.S_{BCKE} = \frac{2}{3}a.\frac{1}{2}.S_{BCC'B'} = \frac{a^3}{3}$,

$V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt bên hợp và mặt $(A'BD)$ với đáy góc 60^0, biết góc $BAD = 60^0$, $AB = 2a, BD = a\sqrt{7}$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABD),

J,K là hình chiếu của H trên AB, AD

Áp dụng ĐL cosin cho ΔABD

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD$

$\Rightarrow AD^2 - 2a.AD - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow AD = 3a$

$\Rightarrow S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}AB.AD.\sin BAD = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

Từ giả thiết suy ra hình chóp $A'.ABD$ có các mặt bên hợp đáy góc 60^0

Nên H là cách đều các cạnh của ΔABD

*TH1: Nếu H nằm trong ΔABD thì H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABD.

Góc giữa mặt bên $(ABB'A')$ và đáy bằng $A'JH = 60^0$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABD thì

$$r = \frac{S_{\Delta ABD}}{p} = \frac{3\sqrt{3}a}{5+\sqrt{7}} \Rightarrow A'H = r.\tan 60^0 = \frac{9a}{5+\sqrt{7}}$$

Từ đó, $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A'.ABD} = 6.\frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABD} = \frac{27\sqrt{3}a^3}{5+\sqrt{7}}$

*TH2: Nếu H nằm ngoài ΔABD thì H là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABD.

Nếu H nằm trong góc BAD, gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp ΔABD tương ứng thì

$$r_a = \frac{S_{\Delta ABD}}{p - BD} = \frac{3\sqrt{3}a}{5-\sqrt{7}} \Rightarrow A'H = r.\tan 60^0 = \frac{9a}{5-\sqrt{7}}$$

Từ đó, $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A'.ABD} = 6.\frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABD} = \frac{27\sqrt{3}a^3}{5-\sqrt{7}}$

Tương tự hai TH còn lại ta được các kết quả: $\frac{27\sqrt{3}a^3}{1+\sqrt{7}}, \frac{27\sqrt{3}a^3}{\sqrt{7}-1}$

Ví dụ 9.(Đề dự bị ĐH khối A năm 2006) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh

$AB = AD = a, AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BAD = 60^o$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$.

a) Chứng minh rằng $AC' \perp (BDMN)$.

b) Tính thể tích khối chóp A.BDMN

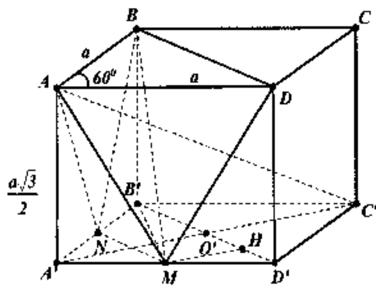
Lời giải.

a) Ta có AC là hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$

và $AC \perp BD$ nên $AC' \perp BD(1)$

Mà $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)\left(\overrightarrow{AA'} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$= AA'^2 - \dfrac{1}{2}AB^2 - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{1}{2}a^2\cos 60^0 = 0 \Rightarrow AC' \perp BN\,(2)$



Từ (1) và (2) suy ra, $AC' \perp (BDMN)$

b) *Cách 1*: dựa theo câu a) tính chiều cao và S_{BDMN}

Cách 2:

$V_{A.BDMN} = V_{ABD.A'B'D'} - V_{A.A'MN} - V_{B.B'MN} - V_{M.BDD'B'}$

$V_{ABD.A'B'D'} = AA'.S_{ABD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}a^2\sin 60^0 = \dfrac{3a^3}{8}$ (đvtt)

$V_{A.A'MN} = V_{B.B'MN} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{A'MN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{4}\sin 60^0 = \dfrac{a^3}{32}$ (đvtt)

Gọi $O' = A'C' \cap B'D'$, kẻ $MH // A'C'$. Dễ thấy $A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow MH \perp (BDD'B')$

$V_{M.BDD'B'} = \dfrac{1}{3}MH.S_{BDD'B'} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{8}$ (đvtt) $\Rightarrow V_{A.BDMN} = \dfrac{3a^3}{16}$ (đvtt)

Bài tập tự luyện

Bài 1. (Đề TN-THPT PB 2007 Lần 2) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = AC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Đáp số: $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$

Bài 2. (Đề thi TN THPT 2009) Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh *a*, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt đáy và góc *A* của tam giác *ABC* bằng 120^0. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Đáp số: $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{36}a^3$

Bài 3. (Trích đề thi ĐH khối D – 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết B = $2a\sqrt{3}$ và $SBC = 30^o$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Đáp số: $V = 2\sqrt{3}a^3$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B. AB = SD = 3a, AD = SB = 4a, a > 0. Đường chéo $AC \perp (SBD)$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Đáp số: $V = \frac{15}{2}a^3$

Bài 5. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH khối A – 2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD = a; Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Đáp số: $V = \frac{2\sqrt{15}}{5}a^3$

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân, AB//CD, AB = 2CD = 4a, $BC = a\sqrt{10}$, biết mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy; mặt bên (SAB) là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Đáp số: $V_{S.ABCD} = 6a^3\sqrt{2}$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, cạnh 2a, SA = SB = SC = 2a. Gọi V là thể tích khối chóp S.ABCD, chứng minh $V \le 2a^3$.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp.

Đáp số: $V_{SABC} = 8\sqrt{3}a^3$.

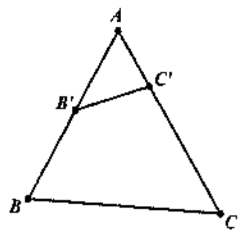
1.2.2. Phương pháp sử dụng tỉ số diện tích, thể tích và tính chất khoảng cách

Thông thường, khi tính diện tích đáy ta có thể linh hoạt sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác hay tính toán dựa trên việc thêm bớt các đa giác dễ tính diện tích. Ngoài ra, ta có thể sử dụng thêm tính chất về tỉ số diện tích. Cụ thể:

Cho ΔABC, $B' \in AB, C' \in AC$. *Khi đó,*

$\oplus \frac{S_{B'BC}}{S_{ABC}} = \frac{B'B}{AB}$

$\oplus \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$



a. Sử dụng tính chất khoảng cách trong tính thể tích

Khi tính thể tích, việc linh hoạt sử dụng các tính chất về khoảng cách giúp ta có thể giải quyết bài toán khá nhanh gọn. Công cụ thường dùng là các tính chất khoảng cách đó là:

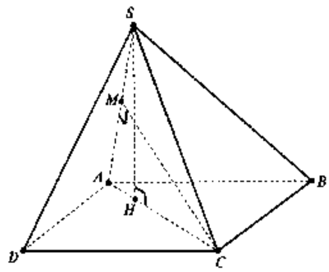
- *Cho hình chóp* $S.ABC, M \in SA \Rightarrow \frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA}{SA}$

- *Cho hình chóp* $S.ABC, S, M \in d // (ABC) \Rightarrow V_{M.ABC} = V_{S.ABC}$

Kết quả được mở rộng cho khối chóp đa giác

Ví dụ 1.(Đề TSĐH khối D năm 2010) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên *SA = a*; hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm *H* thuộc đoạn *AC*, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi *CM* là đường cao của tam giác *SAC*. Chứng minh *M* là trung điểm của *SA* và tính thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a*.

Lời giải. Trong tam giác vuông SAH và SCH



Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{14a^2}{16} + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

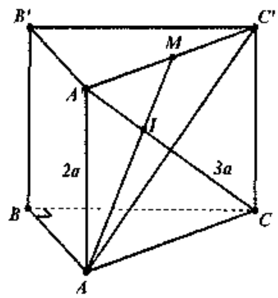
$= \sqrt{\frac{32a^2}{16}} = a\sqrt{2} = AC$

Vậy ΔSAC cân tại C mà CM là đường cao hạ từ C của ΔSAC nên M là trung điểm của SA.

$\Rightarrow V_{SMBC} = V_{AMBC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right).\frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$

*Ví dụ 2.(Đề TSĐH khối D năm 2009)*Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC.

Lời giải. Dễ dàng tính được $AC = a\sqrt{5}, BC = 2a$



Ta có I là trọng tâm tam giác AA'C' nên $IA = \frac{2}{3}AM$

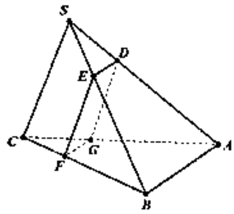
nên $\frac{V_{I.ABC}}{V_{M.ABC}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow V_{I.ABC} = \frac{2}{3}V_{M.ABC} = \frac{2}{3}V_{A'.ABC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{6}.a.2a.2a = \frac{4}{9}a^3$

Ví dụ 4. Trên cạnh SA, SB của hình chóp $SABC$ lần lượt lấy điểm D và E sao cho $\frac{SD}{DA} = \frac{SE}{EB} = \frac{1}{2}$. Mặt phẳng qua DE và song song với SC chia khối chóp $SABC$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Lời giải. Dễ dạng xác định được thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua DE, song song với SC và hình chóp $SABC$ chính là hình bình hành $DEFG$.

Ta có $V_{ABDEFG} = V_{A.DFG} + V_{B.DEF} + V_{ABDF}$



Do $AB//(DEFG), S_{DEF} = S_{DFG} \Rightarrow V_{A.DFG} = V_{B.DEF}$

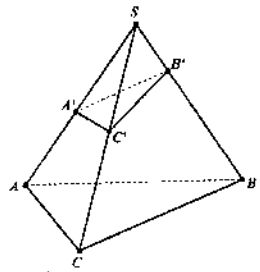
$$V_{B.DEF} = V_{F.BDE} = \frac{2}{3}V_{C.BDE} = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}d\left(C,(SAB)\right).S_{BDE}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{3}d\left(C,(SAB)\right).\frac{2}{3}S_{SBD}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{3}d\left(C,(SAB)\right).\frac{2}{3}.\frac{1}{3}S_{SAB} = \frac{4}{27}V_{SABC}$$

$$V_{ABDF} = V_{F.ABD} = \frac{2}{3}V_{C.ABD} = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}d\left(C,(SAB)\right).S_{ABD} = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}d\left(C,(SAB)\right).\frac{2}{3}S_{SAB} = \frac{4}{9}V_{SABC}$$

$$\Rightarrow V_{ABDEFG} = V_{A.DFG} + V_{B.DEF} + V_{ABDF} = \frac{20}{27}V_{SABC}$$



Do đó, tỉ số thể tích của hai phần là: $\frac{20}{7}$

b. Sử dụng tỉ số thể tích

Cho hình chóp S.ABC có $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$. Khi đó,

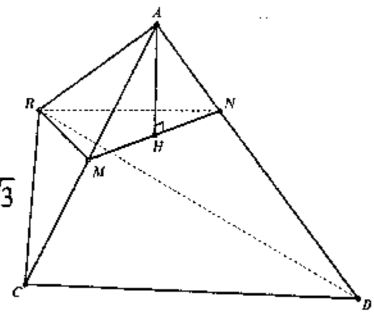
$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Lưu ý: Công thức trên chỉ được áp dụng cho khối chóp tam giác,còn với khối chóp đa giác khi áp dụng cần chia nhỏ khối đa diện thành nhiều khối chóp tam giác để tính tỉ số

<u>*Ví dụ 5.*</u> Cho tứ diện ABCD có $AB = a, AC = 2a, AD = 3a, BC = a\sqrt{3}, BD = a\sqrt{10}$, $CD = a\sqrt{19}$. Tính V_{ABCD}

<u>*Lời giải.*</u> Sử dụng định lý Cosin cho các tam giác ABC, ABD, ACD ta được

$BAC = 60^0, CAD = 120^0, BAD = 90^0$



Lấy $M \in AC, N \in AD$ sao cho AM=AN=a

Ta có $BM = \frac{1}{2}AC = a, BN = a\sqrt{2},$

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos MAN = 3a^2 \Rightarrow MN = a\sqrt{3}$

Do đó, tam giác BMN vuông tại B.

Vì AB=AM=AN nên hình chiếu của A trên (BMN) là tâm H của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMN$, H cũng chính là trung điểm của MN

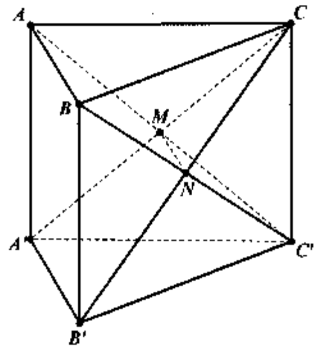
Có $\frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{AB}{AB}.\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AD} = \frac{1}{6}$

$$V_{A.BMN} = \frac{1}{3}AH.S_{BMN} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2}.\frac{1}{2}a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt)}$$

<u>*Ví dụ 6*</u> Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Các mặt phẳng $(ABC'),(A'B'C)$ chia

lăng trụ thành 4 phần. Tính tỷ số thể tích của 4 phần đó.

Lời giải.



Gọi $V_1 = V_{C.MNC'}; V_2 = V_{C'.MNB'A'}; V_3 = V_{C.MNBA}; V_4 = V_{MNABB'A'}$

V là thể tích của lăng trụ. Ta có $V_{C.A'B'C'} = V_1 + V_2$

Mặt khác:

$$\frac{V_1}{V_{C.A'B'C'}} = \frac{CM.CN.CC'}{CA'.CB'.CC'} = \frac{1}{4}$$

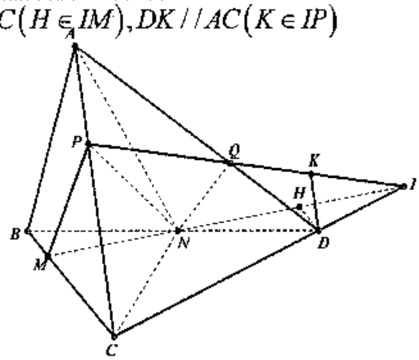
$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{4}.\frac{V}{3} = \frac{V}{12}; \quad V_2 = \frac{1}{3}.V - \frac{V}{12} = \frac{V}{4}$$

$$V_3 = V_{C'.ABC} - V_{CMNC'} = V_{CA'B'C'} - V_{CMNC'} = V_2; V_3 = \frac{V}{4}; V_4 = V - V_1 - V_2 - V_3 = \frac{5V}{12}$$

Vậy $V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 1:3:3:5$

Ví dụ 7. (Đề thi dự bị ĐH khối D năm 2008) Cho tứ diện $ABCD, M, N, P$ lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, BD = 2BN, AC = 3AP$, mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện ABCD bị chia bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải. Gọi $I = MN \cap CD, Q = PI \cap AD$, kẻ $DH // BC(H \in IM), DK // AC(K \in IP)$



$$\Delta NMB = \Delta NDH \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{DH}{CM} = \frac{BM}{CM} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{IK}{IP} = \frac{DK}{CP} = \frac{ID}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DK}{2AP} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DK}{AP} = \frac{2}{3}$$

ΔAPQ đồng dạng ΔDKQ

$$\Rightarrow \frac{AQ}{DQ} = \frac{AP}{DK} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}$$

Đặt $V = V_{ABCD}$ Ta có:

$$\frac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \frac{AP}{AC}.\frac{AQ}{AD} = \frac{1}{5}, \frac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{DACN}}{V_{DABC}} = \frac{DN}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{ANPQ} = \frac{1}{10}V$$

$$\frac{V_{CDMP}}{V_{CDBA}} = \frac{CM}{CB}.\frac{CP}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{CDMP} = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_{N.ABMP} = \frac{1}{2}V_{DABMP} = \frac{1}{2}(V - V_{CDMP}) = \frac{1}{4}V$$

$$\Rightarrow V_{ABMNQP} = V_{ANPQ} + V_{N.ABMP} = \frac{7}{20}V \Rightarrow \frac{V_{ABMNQP}}{V_{CDMNQP}} = \frac{7}{13}$$

Vậy mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần với tỉ lệ thể tích $\frac{7}{13}$

Bài tập tự luyện

Bài 1. (Trích đề thi khối A – 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD. Tính thể tích khối tứ diện CMNP theo a. *Đáp số:* $V_{CMNP} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Bài 2. (Đề thi ĐH khối B - 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{2}$, SA = a và SA $\perp$ (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Tính thể tích khối tứ diện ANIB.

Đáp số: $V_{ABIN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{72}$.

Bài 3. (Trích đề khối A - 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính V_{SBCNM}.

Đáp số: $V_{SBCNM} = \sqrt{3}a^3$.

Bài 4. (Trích đề khối B - 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B; AB = BC = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Tính V_{SBCNM}.

Đáp số: $V_{SBCNM} = \dfrac{a^3}{3}$.

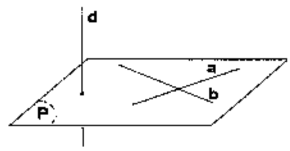
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

2.1. Các bài toán về chứng minh tính vuông góc

2.1.1. Kiến thức cơ bản cần biết

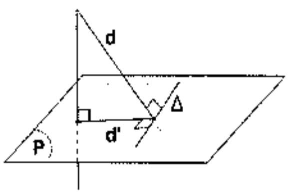
a. Tiêu chuẩn vuông góc

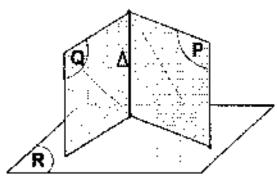
+ Đường thẳng (d) vuông góc mặt phẳng (P) khi (d) vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (P).

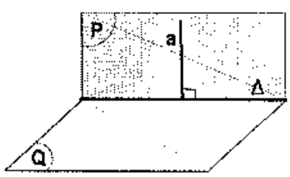


+ Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi góc tạo bởi hai mặt phẳng đó bằng 90^0.

b. Các định lý về tính vuông góc







+ Định lý ba đường vuông góc: Giả sử $d \not\subset (P)$ và d không vuông góc (P), $\Delta \subset (P)$, d' là hình chiếu của d lên (P). Khi đó $\Delta \perp d \Leftrightarrow \Delta \perp d'$

+ Giả sử (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $(P) \cap (Q) = \Delta$. Nếu $a \subset (P), a \perp \Delta$ thì $a \perp (Q)$

+ Nếu $\Delta \perp (P)$ thì Δ sẽ vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mp(P).

+ Giả sử (P) và (Q) cùng vuông góc với (R) trong đó $(P) \cap (Q) = \Delta$ thì $\Delta \perp (R)$

+ Nếu $a \perp (Q)$ và $(P) \supset a$ thì $(P) \perp (Q)$

2.1.2. Các dạng toán thường gặp

*** Chứng minh đường thẳng a và b vuông góc:**

- *Cách 1*: Ta chứng minh góc giữa hai đt đó bằng 90^0.
- *Cách 2*: Ta chứng minh a//c mà $c \perp b$.
- *Cách 3*: Ta chứng minh tích vô hướng của hai vectơ chỉ phương $\overline{u}.\overline{v} = 0$.
- *Cách 4:* Ta chứng minh a *vuông góc với một mp(α)* chứa đường thẳng b. (hay dùng)
- *Cách 5:* Sử dụng định lí ba đường vuông góc

*** Chứng minh đường thẳng d vuông góc với mp(α):**

- *Cách 1*: chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a và b cắt nhau nằm trog (α).
- *Cách 2*: Ta chứng minh d song song với một đường thẳng d' vuông góc với *(α).*
- *Cách 3:* Nếu hai mp cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến (nếu có) của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng này.
- *Cách 4:* Nếu hai mp vuông góc với nhau, một đường thẳng nằm trong mp này mà vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mp kia.

Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau:

- *Cách 1*: Ta chứng minh mp này chứa một đường thẳng vuông góc với mp kia.
- *Cách 2*: Ta chứng minh góc giữa chúng là 90^0.

Ví dụ 1. (ĐH Khối A năm 2007) Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

Lời giải Gọi H là trung điểm AD, do tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$

Vì $(SAD) \perp (ABCD)$, suy ra $SH \perp (ABCD)$ suy ra $SH \perp BP$ (1)

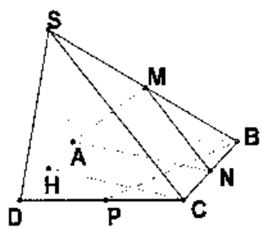
Dễ thấy hai tam giác vuông BPC và CHD bằng nhau, nên ta có

$CBP = DCH \Rightarrow CBP + HCB = 90^0 \Rightarrow BP \perp CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$ (3)

Do HC // AN, MN // SC $\Rightarrow (SHC) // (MAN)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $BP \perp (MAN) \Rightarrow AM \perp BP$ (đpcm)



Ví dụ 2. (ĐH khối B năm 2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh $MN \perp BD$.

Lời giải Ta có SEAD là hình bình hành $\Rightarrow SE // DA$ và SE = DA

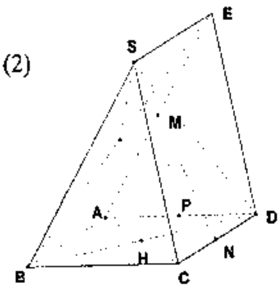
$\Rightarrow$ SEBC cũng là hình bình hành $\Rightarrow SC // EB$

Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó trong các tam giác EAB và ABC ta có MP // EB, PN // AC.

Từ đó suy ra (MNP) // (SAC) (1)

Ta có $DB \perp AC$ và $BD \perp SH\left(do \text{ SH} \perp \text{(ABCD)}\right) \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $DB \perp \left(MNP\right) \Rightarrow BD \perp MN$ (đpcm)



Ví dụ 3. (ĐH Khối B năm 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

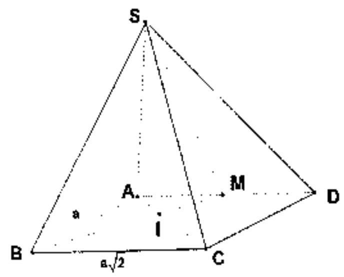
Lời giải Giả sử I là giao điểm của AC và MB

Ta có MA = MD và AD // BC

nên theo định lý Talet suy ra $AI = \frac{1}{2}IC$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{a^2}{6}$$



Từ đó suy ra $AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = MA^2$

Vậy AMI là tam giác vuông tại I $\Rightarrow MB \perp AC$ (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC) \Rightarrow$ đpcm

Bài tập tự luyện.

Bài 1. (ĐH Khối D năm 2007) Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, trong đó $ABC = BAD = 90^0, BA = BC = a, AD = 2a$. Giả sử $SA = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $SC \perp SD$.

Bài 2. (Cao đẳng khối A năm 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, với $ABC = BAD = 90^0, SA \perp (ABCD)$, BA = BC = a, AD = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh BCNM là hình chữ nhật.

Bài 3. (Cao đẳng khối A, B, D năm 2009) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng a.Cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD, DC.Chứng minh rằng $MN \perp SP$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC trong đó đáy ABC là tam giác vuông tại C, hai mặt bên (SAC) và (SAB) cùng vuông góc với đáy. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB. Chứng minh $(SAB) \perp (ADE)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Đoạn SA cố định vuông góc với (P) tại A, M và N là hai điểm tương ứng di động trên các cạnh BC và CD. Đặt BM = u, DN = v. Chứng minh rằng $a(u + v) = a^2 + u^2$ là điều kiện cần và đủ để (SAM) $\perp$ (SMN).

Bài 6. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Hai nửa đường thăng Bx và Dy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P), M và N là hai điểm di động tương ứng trên Bx, Dy. Đặt BM = u, DN = v.

a. Tìm mối liên hệ giữa u, v để $(MAC) \perp (NAC)$

b. Giả sử ta có điều kiện ở câu 1, chứng minh $(AMN) \perp (CMN)$.

Đáp số: a. $(MAC) \perp (NAC) \Leftrightarrow 2uv = a$

Bài 7. (ĐH khối A năm 2003) Cho hình hộp chữ nhật ABCD,A'B'C'D' đáy là hình vuông ABCD cạnh a, AA' = b. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc với nhau.

Bài 8. Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh hai mặt phẳng (SAI) và (SBC) vuông góc với nhau.

Bài 10. (ĐH Khối B năm 2002) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.Gọi M. N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D'. Chứng minh $MP \perp C'N$.

KHOẢNG CÁCH

2.2.1. Tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Cách 1. Phương pháp tính trực tiếp

Tìm hình chiếu H của A lên mặt phẳng (P). Khi đó, AH = d(A; (P)).

Để tìm hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (P) có 2 phương pháp thường dùng:

Phương pháp 1: Dựng đường thẳng Δ qua A và Δ $\perp$ (P) (nếu có), khi đó $H = \Delta \cap (P)$

Phương pháp 2: Dựng mặt phẳng (Q) qua A và (Q) $\perp$ (P), gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q), từ A hạ AH $\perp$ Δ tại H. Khi đó, H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Cách 2. Phương pháp tính gián tiếp

Việc tính gián tiếp thông qua điểm khác dựa vào các tính chất hình học sau:

a) Nếu đường thẳng Δ qua A và Δ // (P) thì d(A; (P)) = d(B; (P)) với $\forall B \in \Delta$.

b) Nếu Δ qua A cắt mặt phẳng (P) tại I, khi đó $\forall B \in A$, ta có: $\frac{AI}{BI} = \frac{d(A;(P))}{d(B;(P))}$.

c) Mặt phẳng (Q) qua A và (Q) // (P) thì d(A; (P)) = d(B; (P)) với $\forall B \in (Q)$.

Cách 3. Để tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P), ta có thể dựa vào công thức tính thể tích khối chóp với đỉnh là A và đáy nằm trên mặt phẳng (P) có diện tích S. Khi đó,

$$d(A;(P))=\frac{3V}{S}.$$

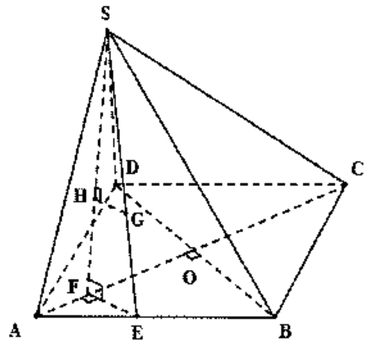
Cách 4. Dựa vào bài toán cơ bản: Cho tứ diện OABC trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH $\perp$ (ABC). Khi đó, $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), $SA=a\sqrt{3}$, gọi G là trọng tâm Δ_{SAB}. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

Lời giải 1: Tính trực tiếp

Tìm hình chiếu H của G lên mặt phẳng (SAC).



• *Phân tích lời giải:* Việc tìm một đường thẳng qua G và $\perp$ mặt phẳng (SAC) là rất khó. Vậy, để tìm hình chiếu H của A lên mặt phẳng (SAC) ta dùng cách 2: Dựng mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với mặt phẳng (SAC).

• *Cách dựng mặt phẳng (P):* Vì SA $\perp$ (ABCD) nên SA vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P). SG cắt AB tại E nên từ E hạ EF $\perp$ AC $\Rightarrow$ EF $\perp$ (SAC)

$\Rightarrow$ (SEF) $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ (SEF) $\equiv$ (P).

Từ G hạ GH $\perp$ SF tại H $\rightarrow$ GH = d(G; (SAC)). Ta có $GH=\frac{2}{3}EF=\frac{1}{3}BO=\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải 2: Tính gián tiếp

Nhận xét: EG cắt (SAC) tại S và $\frac{ES}{GS}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ d(G;(SAC)) = $\frac{2}{3}d(E;(SAC))=\frac{2}{3}EF=\frac{a\sqrt{2}}{6}$

GB cắt SA tại N và $\frac{BN}{GN}=3$ $\Rightarrow d(G;(SAC))=\frac{1}{3}d(B;(SAC))=\frac{1}{3}BO=\frac{a\sqrt{2}}{6}$

Từ G dựng đường thẳng Δ song song với SA cắt AB tại P. Từ P hạ PJ $\perp$ AC tại J $\rightarrow$ PJ = d(P;(SAC)) = $d(G;(SAC))=\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Ta có $d(G;(SAC))=\frac{3V_{GSAC}}{S_{\Delta ASC}}$. Ta có $V_{GSAC}=\frac{1}{3}V_{BASC}\rightarrow d(G;(SAC))=\frac{V_{SABC}}{S_{\Delta ASC}}$

$V_{SABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$, $S_{\Delta ASC}=\frac{1}{2}SA.AC=\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ $\Rightarrow d(G;(SAC))=\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

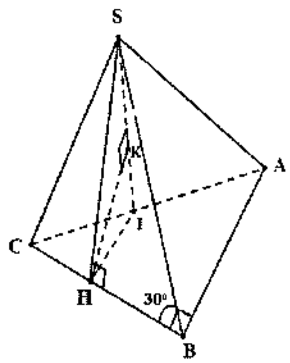
Ví dụ 2. (Trích đề thi ĐH khối D – 2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết SB = $2\sqrt{3}a$, $\widehat{SBC} = 30^o$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

• *Lời giải 1:*

$SH = \sqrt{3}a$, HB = 3a, HC = a. Từ H hạ HI ⊥ AC tại I ⇒ $HI = \frac{3}{5}a$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SI ⇒ HK = d(H;(SAC))

⇒ HK = $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$ ⇒ d(B;(SAC)) = 4.HK = $\frac{6a}{\sqrt{7}}$.



• *Lời giải 2:*

Ta dễ dàng tính được $V_{SABC} = 2\sqrt{3}a^3$.

Lại có SB ⊥ AB ⇒ $SA = \sqrt{SB^2 + BA^2} = a\sqrt{21}$.

CA = 5a; SC = $\sqrt{SH^2 + CH^2} = 2a$.

Từ đó ta tính được $S_{\Delta SAC} = \sqrt{p(p-SA)(p-CA)(p-SC)}$

Trong đó, $p = \frac{a\left(7+\sqrt{21}\right)}{2} \Rightarrow S_{\Delta SAC} = \sqrt{21}a$.

Vậy d(B;(SAC)) = $\frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6a}{\sqrt{7}}$.

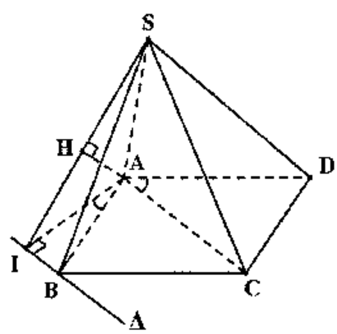
Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a$, SA ⊥ (ABCD). Tính khoảng cách giữa SB và AC.

Lời giải 1: Trong mặt phẳng (ABCD) dựng Δ qua B song song với AC.

Đặt (P) = (Δ, SB).

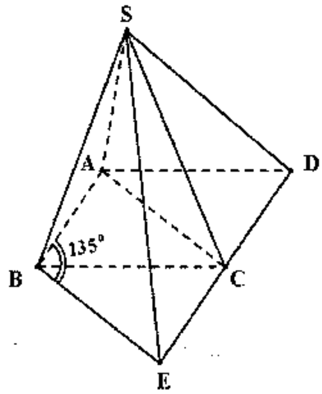
Khi đó, AC // (P) và d(AC; SB) = d(AC; (P)) = d(A; (P)).

Từ A hạ AI ⊥ Δ tại I; Từ A hạ AH ⊥ SI tại H suy ra AH = d(A; (P)). Ta có AI = $\frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Lời giải 2: Dựng hình bình hành ABEC.

Ta có $V_{SABC} = V_{SBEC}$; AC // BE → AC // (SBE)



$\Rightarrow$ d(AC; SB) = d(AC; (SBE)) = d(A; (SBE)) = $\dfrac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SBE}}$

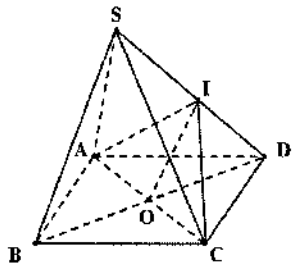
Ta có: BE = AC = $a\sqrt{2}$, SB = $a\sqrt{2}$, $AE = a\sqrt{3},\ SE = a\sqrt{6}$.

$$S_{\Delta SBE} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)a.\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2.\left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)a}$$

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{6\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right).\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SA\frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^3}{6} \to d(A;(SBE)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{\Delta SBE}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Lời giải 3:



$AC \cap BD = O$, I là trung điểm của SD.

d(AC; SB) = d(SB; (ACI)) = d(B; (ACI) = $\dfrac{3V_{BACI}}{S_{\Delta ACI}} = \dfrac{\frac{3}{2}.V_{SABC}}{S_{\Delta ACI}}$.

Tính $dt_{\Delta ACI}$: Ta có $S_{\Delta ACI} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(AC;SB) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập tự luyện

Bài 1. *(Trích đề thi khối A – 2012)* Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm h thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Đáp số: d(BC; SA) = $\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Bài 2. (ĐH khối D năm 2002) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), ngoài ra AD = AC = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tìm khoảng cách từ A đến (BCD).

Đáp số: $\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$

Bài 3. (ĐH khối D năm 2008) Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông có BA = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C.

Đáp số: $d(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

2.2.2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

<u>*Cách 1:*</u> Dựng và tính độ dài đường vuông góc chung.

<u>*Cách 2:*</u> Dựng mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2. Khi đó, khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 bằng khoảng cách từ Δ_2 đến mặt phẳng (P) và bằng khoảng cách từ $A \in \Delta_2$ đến mặt phẳng (P).

Ví dụ 1. (Đề thi tuyển sinh ĐH khối A – 2006) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

Lời giải: Ta có BC // MN

$\Rightarrow$ MN // (A'BC)

$\Rightarrow$ d(MN,A'C) = d(MN,(A'BC)) = d(M,(A'BC)) (1)

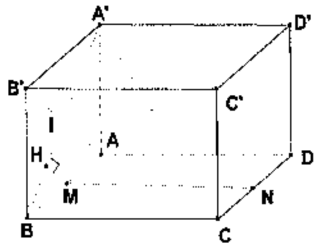
Ta có $AI \perp A'B$ ($AB' \cap A'B = I$)

Lại có $BC \perp (BAA'B') \Rightarrow BC \perp AI$

Từ đó $AI \perp (A'BC)$.

Vì thế nếu kẻ MH // AI ($H \in A'B$)

thì $MH \perp (A'BC)$ và $d(M,(A'BC)) = MH = \frac{1}{2}AI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (2)



Từ (1), (2) suy ra $d(MN,A'C) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ví dụ 2. Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh a = $6\sqrt{2}$ cm. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải: Gọi M và N tương ứng là các trung điểm của AB và CD.

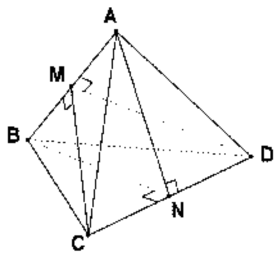
Do ABCD là tứ diện đều, nên ta có $CM \perp AB$ và $DM \perp AB \Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow AN \perp MN$

Lý luận tương tự ta có: $CD \perp (ANB) \Rightarrow CD \perp MN$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

Ta có: $MC = MD = \frac{6\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

Vậy $MN^2 = MC^2 - CN^2 = (3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 36 \Rightarrow MN = 6cm$



Bài tập tự luyện

<u>Bài 1.</u> Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MN, AC theo a.

Đáp số: $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

<u>Bài 2.</u> Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

Đáp số: $d(A_1B, B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có SA = 3a, SA $\perp$ (ABCD) .Giả sử AB = AC = 2a, $ABC = 120^0$. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Đáp số: $d(A,(SBC)) = \dfrac{3a}{2}$

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$, đường chéo AC = 4, SO = $2\sqrt{2}$ và SO $\perp$ (ABCD), với O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm cạnh SC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Đáp số: $d(SA, BM) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Đáp số: $a\sqrt{2}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng 2a. Đường thẳng A'C tạo với mặt đáy góc 30^0. Thể tích khối đa diện ABCC'B' là:

A. $4a^3$ B. $\dfrac{4a^3}{3}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh 2*a*; gọi *H* là trung điểm của *AB* và *SH* □ *ABCD*. Góc giữa *SC* và mặt đáy bằng 45^0. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *SC* và *SD*. Thể tích khối chóp *S.ABMN* bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{3}$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$ D. $a^3\sqrt{5}$.

Câu 3: Cho khối chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật *ABCD* có *AB* □ 2*a*; *AD* □ 3*a*. Hình chiếu vuông góc của đỉnh *S* lên đáy trùng với trọng tâm *G* của tam giác *ACD*, biết góc giữa mặt bên *SCD* và đáy *ABCD*

bằng 60^0. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là:

A. $2a^3$ B. $2a^3\sqrt{3}$ C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $6a^3\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A có $AB = 2a; AB = 2a\sqrt{3}$. Thể tích lăng trụ là $V = 6a^3\sqrt{2}$. Gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC). Tìm tỉ số $\dfrac{h}{a}$.

A. 2 B. 1 C.3 D.4.

Câu 5: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, gọi M là trung điểm của SA. Tính tỷ số $\dfrac{SA}{a}$ sao cho khoảng cácg từ M đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình chữ nhật $AB = AD = a\sqrt{3}$; các cạnh bên đều tạo với mặt đáy (ABCD) một góc 60^o. Thể tích khối chóp S.ABCD là:

A. a^3 B. $\frac{a^3}{3}$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $3a^3\sqrt{3}$.

Câu 7: Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a. Tam giác (SAB) là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp S.ABCD là:

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{5}$ D. $4a^3\sqrt{15}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M và n lần lượt là trung điểm của BC và CC'. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMN) với lăng trụ là:

A. Tam giác B. Tứ giác C. Ngũ giác D. Lục giác.

Câu 9: Cho hình chóp $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a; AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính tỷ số $\frac{V_{A'ABC}}{a^3}$.

A. 1 B. 0,5 C. 2 D. 3.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 2a, $SA = a; SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính tỷ số $\frac{V_{BMDN}}{a^3}$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. 2.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A. $SC = 2a\sqrt{5}$, hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng đáy là trung điểm M của cạnh AB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính tỉ số $\frac{V_{S.ABC}}{2a^3\sqrt{15}}$.

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{4}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi d là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC). Tính tỷ số $\frac{d}{a}$ biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. 0,5 D. 2.

Câu 13: Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền BC bằng a. Trên đường vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt (ABC) và (SBC) là $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính độ dài đoạn SA theo a.

Điền vào ô trống: $\boxed{}$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB □ a, BC □ $2a$ và cạnh SA vuông góc với đáy đồng thời SA □ $2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích tam giác AMB theo a.

Điền vào ô trống: $\boxed{}$

Câu 15: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $a/6$. Tính AA'.

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ D. $a\sqrt{6}$.

ĐÁP ÁN HÌNH KHÔNG GIAN

1. B	2. C	3. B	4. B	5. C	6. A	7. B	8. C	9. B	10. A
11. A	12. A	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}$	15. A					

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD với AB = 2a, BC = $a\sqrt{3}$. Biết rằng ΔSAB cân đỉnh S, (SAB) ⊥ (ABCD), góc giữa SC với mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi thể tích hình chóp S.ABCD là V. Tìm tỷ số $\dfrac{V}{a^3}$

A. 12   B. 4   C. $8\sqrt{3}$ D. $12\sqrt{3}$

Câu 2: Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$; $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng 60^0. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $3a^3$ B. $\sqrt{2}a^3$ C. $\sqrt{6}a^3$ **D.** $3\sqrt{2}a^3$

Câu 3: Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0; cạnh $AB = a$. Thể tích khối đa diện $ABCC'B'$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$ B. $\sqrt{3}a^3$ C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^3$ D. $\dfrac{3}{4}a^3$

Câu 4: Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a; $SA \perp (ABCD)$; góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Thể tích của hình chóp $S.ADNM$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}a^3$ B. $\dfrac{a^3}{4\sqrt{6}}$ C. $\dfrac{\sqrt{6}}{8}a^3$ D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}a^3$

Câu 5: Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$; các cạnh bên đều có độ dài bằng $5a$. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $9a^3\sqrt{3}$ B. $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $10a^3\sqrt{3}$ D. $\dfrac{10a^3}{\sqrt{3}}$

Câu 6: Hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; SA ⊥ (ABCD). Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Tìm tỷ số $\dfrac{SA}{a}$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) bằng $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

A. $\frac{a}{2}$ B. a C. a$\sqrt{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 7: Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Gọi *M, N, K* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AA'*, *BC* và *CD*. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng *(MNK)* với hình hộp là:

A. Lục giác B.Tam giác C. Tứ giác D. Ngũ giác

Câu 8: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông cân cạnh AB=AC=2a. Thể tích lăng trụ $2a^3\sqrt{2}$ Gọi h là khoảng cách từ A đến (A'BC). Tìm tỷ số $\frac{h}{a}$

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. SA vuông góc với đáy, G là trọng tâm tam giác SAC, mặt phẳng (ABG) cắt SC tại M, cắt SD tại N. Tính thể tích khối đa diện MNABCD biết SA=AB=a và góc hợp bởi đường thẳng AN và (ABCD) là 30^0

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3 5\sqrt{3}}{24}$ C. $\frac{a^3 5\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3}{24}$

Câu 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$, BD = a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt (SBC)và đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp S.ABCD là?

A, $\frac{2a^3}{\sqrt{15}}$ **B.** $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 11. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy A'ABD là hình chóp đều, AB = a, AA' = $a\sqrt{3}$. Thể tích khối hộp là:

A, $\frac{a^3}{2}$ B. $2a^3$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $a^3\sqrt{2}$

Câu 12 Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (α) tạo với (ABC) một góc 30° và cắt tất cả các cạnh bên tại M, N, P. Khi đó, S_{MNP} bằng:

A, $\frac{a^2}{2}$ B. a^2 C. $\frac{2a^2}{3}$ D. $3a^2$

Câu 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp BC$. Tính góc giữa SD và BC?

A, 30° B. 45° **C.** 60° D. 90°

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật.E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và AB > AE. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBE) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Góc hợp bởi *SB* và mặt phẳng (*SAC*) bằng 30^0.Cho $AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}, BE = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa SB, CD

Câu 14: Tính AB

A. 2a B. 3a C. 4a D. a

Câu 15: Tính theo a thể tích khối chóp SABCD

A. $\frac{32a^3\sqrt{15}}{30}$ **B.** $\frac{32a^3\sqrt{15}}{15}$ C. $\frac{32a^3\sqrt{15}}{25}$ D. $\frac{32a^3\sqrt{15}}{35}$

Câu 16: Tính khoảng cách giữa SB, CD

A. $a\sqrt{15}$ B. 3a C. 4a D. a

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, SA=2a, M là trung điểm của cạnh BC, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AM, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB

Câu 17: Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC

A. $V = 2a^3$;   **B.** $V = a^3$ C. $V = 3a^3$ D. $V = 4a^3$

Câu 18: Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB

A. $d\left(C;(SAB)\right) = \frac{5\sqrt{39}}{3}a$ B. $d\left(C;(SAB)\right) = \frac{\sqrt{39}}{3}a$

C. $d\left(C;(SAB)\right) = \frac{2\sqrt{39}}{3}a$ **D.** $d\left(C;(SAB)\right) = \frac{4\sqrt{39}}{3}a$

Hình không gian Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B. SA $\perp$(ABC) , SA=AB=a; BC=a$\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm SB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 19: Tính theo a thể tích khối tứ diện GSIC .

A.$V_{GSIC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{26}$ **B.**$V_{GSIC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ C.$V_{GSIC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ D.$V_{GSIC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{30}$

Trong không gian cho hình chóp S.ABCD, tứ giác ABCD là hình thang cân, hai đáy là BC và AD. Biết $SA = a\sqrt{2}, AD = 2a, AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng ABCD trùng với trung điểm cạnh AD. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

Câu 20: Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 21: Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ B. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$

Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, biết AB = 2a , AD = a . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a}{2}$, cạnh AC cắt MD tại H . Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SH = a .

Câu 22: Tính thể tích khối chóp S. HCD.

A. $\frac{4a^3}{15}$ B. $\frac{2a^3}{15}$ C. $\frac{a^3}{15}$ D. $\frac{7a^3}{15}$

Câu 23: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC theo a

A. $\frac{2a}{3}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{2a}{5}$ D. $\frac{2a}{7}$

Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, mặt bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa AB và đi qua trọng tâm tam giác SAC cắt SC,SD lần lượt tại M,N.

Câu 24: Tính thể tích khối chóp S.ABMN theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{26}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, góc ABD bằng 120^0, SA vuông góc (ABC), góc giữa cạnh SC và (ABC) bằng 60^0.

Câu 25: Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

A. $\frac{3a^3}{2}$ B. $\frac{a^3}{3}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ D. $\frac{a^3}{4}$

Câu 26: Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM với M là trung điểm cạnh SD.

A. $\frac{a\sqrt{11}}{14}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ C. $\frac{2a\sqrt{21}}{14}$ D. $\frac{2a\sqrt{11}}{14}$

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a; AC = 2a. Mặt bên (SBC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc giữa hai mặt (SAB) và (ABC) bằng 30^0. Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB theo a

Câu 27: Tính thể tích khối chóp SABC

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 28: Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB theo a

A. a B. 2a C.3a D. 4 a

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ΔABC đều có cạnh bằng a, $AA'=a$ và đỉnh A' cách đều A,B,C. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $A'B$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN).

Câu 29: Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$

Câu 30: Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN).

A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{11}$ C. $\frac{2a\sqrt{22}}{11}$ D. $\frac{3a\sqrt{22}}{11}$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và điểm I là trung điểm cạnh AD. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên đáy là điểm K thuộc đoạn OB sao cho BK = 2 OK và N là hình chiếu vuông góc của K lên SO. Biết rằng SK = $a\sqrt{3}$ và SK hợp với mp(SAC) góc 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CI .

Câu 31: Tính thể tích khối chóp S.ABCD

A.$16a^3\sqrt{3}$ **B.** $6a^3\sqrt{3}$ C. $3a^3\sqrt{3}$ D. $12a^3\sqrt{3}$

Câu 32: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CI

A. $\frac{3a}{\sqrt{37}}$ **B.** $\frac{6a}{\sqrt{37}}$ C. $\frac{9a}{\sqrt{37}}$ D. $\frac{a}{\sqrt{37}}$

Câu 33 : Cho hình chóp S.ABC có AB=AC=a, BC=$\frac{a}{2}$, $SA=a\sqrt{3}, SAB=SAC=30^0$.Tính thể tích khối chóp S.ABC

A. $\frac{a^3}{32}$ **B.** $\frac{a^3}{16}$ C. $\frac{a^3}{8}$ D. $\frac{a^3}{4}$

Câu 34: Cho khối tứ diện đều ABCD. Gọi M là trung điểm AB; (α) là mặt phẳng qua M , song song với AD và BC. Mặt phẳng (α) chia khối tứ diện ABCD thành 2 khối đa diện. Tính tỉ số thể tích 2 khối đa diện đó.

A. 1 B.2 C.3 D.4

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh bên SC và đáy bằng 60^0.

Câu 35: Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD

A. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{6}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{4a^3\sqrt{15}}{13}$

Câu 36: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SA

A. $2\sqrt{\frac{15}{31}}a$ B. $\sqrt{\frac{15}{31}}a$ C. $3\sqrt{\frac{15}{31}}a$ D. $4\sqrt{\frac{15}{31}}a$

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB=AC=a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a.

Câu 37: Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Câu 38: tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$

Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật ABCD có $AD=a$, $AB=a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABCD), góc $SBA=30^0$.

Câu 39: Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Câu 40: Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

A. $5\pi a^2$ B. $4\pi a^2$ C. $3\pi a^2$ D. $2\pi a^2$

1.A	2.D	3.A	4.A	5.C	6.A	7.D	8.A	9.B	10.B
11.D	12.A	13.C	14.A	15.B	16.A	17.B	18.D	19.B	20.C
21.A	22.A	23.A	24.A	25.C	26.B	27.A	28.A	29.B	30.A
31.B	32.B	33.B	34.A	35.B	36.A	37.C	38.C	39.A	40.A

Phương trình – Bất phương trình – Hệ Phương trình

*Các kĩ thuật casio cơ bản trong phần này:

1. Kĩ thuật CALC : Dùng để thử nghiệm và thử giá trị tham số

Nghiệm của phương trình: $4\left(2\sqrt{10-2x}-\sqrt[3]{9x-37}\right)=4x^2-15x-33$

A. 3;5 B. $-3;5$ C. $3;-5$ D. $-3;-5$

Bước 1: Các em nhập phương trình vào máy tính:

```
◀-(4X²-15X-33)|
```

Bước 2: các em bấm CALC rồi bấm 3= xem giá trị biểu thức có bằng 0

```
X?                4(2√10-2X - ³√9X-▶
        3               66.61773876
X?                4(2√10-2X - ³√9X-▶
        5                         0
X?                4(2√10-2X - ³√9X-▶
       -3                         0
```

Cứ như vậy em thử các giá trị khác ở các đáp án, tương tự với phần Bất phương trình thì các em xét tính âm dương với 1 giá trị thuộc đoạn hay khoảng mà đề bài cho.

2. Kĩ thuật SOLVE : Dùng để dò nghiệm, xem phương trình có bao nhiêu nghiệm

Số nghiệm của phương trình: $2x^2-x-17+\sqrt{x+1}=0$

A.0 B.1 C.2 D.3

Bước 1: Nhập phương trình

```
2X²-X-17+√X+1
                 0
```

Bước 2: Tiến hành giải phương trình bằng cách bấm khi máy hỏi "Solve for X ? " thì các em chọn 1 số thuộc tập xác định rồi nhập =

```
Solve for X                  2X²-X-17+√(X+1)
                             X=              3
                          3  L-R=            0
```

Ta được nghiệm đầu tiên là $x = 3$

Đẩy sang trái và nhấn lưu luôn phương trình lại

```
2X²-X-17+√(X+1)

                  0
```

Sau đó ta sẽ tiến hành lưu nghiệm này vào biến A. để biến X còn để máy lưu nghiệm mới : **RCL X Shift Sto A** ( )

```
Ans→A

                  3
```

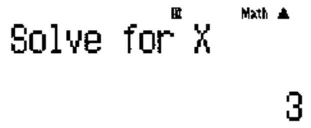
Bước 3: Sau khi đã lưu được nghiệm thứ nhất, ta sẽ tiến hành dò nghiệm thứ 2 bằng cách giải phương trình: $\dfrac{2x^2-x-17+\sqrt{x-1}}{x-3}=0$

Ta ấn đẩy lên để tìm phương trình đã lưu rồi ấn sang trái sửa thành:

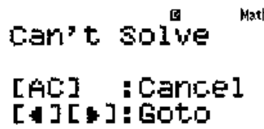
```
◀17+√(X+1))÷(X-A)
```

Sau khi ấn **thì nhận được thông báo**

Các em ấn "="



Các em ấn = tiếp để bắt đầu máy tìm nghiệm.



Như vậy tức là không còn nghiệm nào nữa phương trình này chỉ có duy nhất 1 nghiệm $x=3$ mà thôi .

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^4+4x^3-2x^2-3x-m}+x^2-1=0$ có nghiệm thực.

A. $m\le 0$ **B.** $m\ge -2$ **C.** $-2\le m\le 0$ **D.** $m\ge 0$

Giải :

****Tự luận :***

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^4+4x^3-2x^2-3x-m}=1-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2\ge 0\\ x^4+4x^3-2x^2-3x-m=(1-x^2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ 4x^3-3x-1=m\end{cases}$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình : $4x^3-3x-1=m$ phải có nghiệm thực thỏa mãn

$-1\le x\le 1 \Leftrightarrow$ hai đồ thị $\begin{cases}y=4x^3-3x-1; x\in[-1;1]\\ y=m\end{cases}$ phải có điểm chung

Xét hàm số : $y=4x^3-3x-1; x\in[-1;1]$

Ta có : $y'=12x^2-3; y'=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
y'		+	0	-	0	+	

y	-2	↗	0	↘	-2	↗	0

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm là : $-2 \le m \le 0$

***Trắc nghiệm:**

Các em chọn 1 giá trị đại diện ở từng đáp án, ví dụ muốn kiểm tra xem A có khả năng đúng không thì lấy $m = -100$

Các em nhập vào máy tính thay m bằng Y nhé

Math ▲

√(X²−3X−Y) + X²−1

SHIFT CALC

Math ▲

Y?

0

− 1 0 0 = =

Math

Can't Solve

[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

Vậy loại A, tương tự xét B

◀

Math ▲

√(X²−3X−Y) + X²−1

SHIFT CALC 1 0 0 = =

Math

Can't Solve

[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

Vậy Loại B và D , cuối cùng chọn C

3. Kĩ Thuật TABLE: kiểm tra tính đơn điệu hoặc xem phương trình có bao nhiêu nghiệm

Tìm số nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x+2} - 2\sqrt{3-x} - \dfrac{12x-20}{\sqrt{9x^2-18x+25}} = 0$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn:

Các em SOLVE thử xem sẽ chỉ tìm ra 1 nghiệm trừ khi lúc tìm nghiệm thứ 2 các em mồi cho nó là 2.5

Các em thử bằng table như sau: trước hết là xem điều kiện: $-1 \le x \le 3$

Do cái điều kiện này khá hẹp nên dùng Table là một lợi thế

MODE 7

Math

f(X)=

√ 2 ALPHA) + 2 ► − 2 √ 3 − ALPHA) ► − ▭/▭ 1 2 ALPHA) − 2 0 ▼ √ 9 ALPHA) x² − 1 8 ALPHA) + 2 5

Math

f(X)=◂$\dfrac{12X-20}{{}^{2}-18X+25}$

= =

Math

Start?

1

− 1 =

Math

End?

5

3 =

Math

Step?

0.2105263158

(3 − (− 1)) ÷ 1 9 =

	X	F(X)
1	-1	0.4376
2	-0.789	1.158
3	-0.578	1.4805

-1

	X	F(X)
13	1.5263	[illegible]
14	1.7368	-0.092
15	1.9473	-0.31

0.2115423368

	X	F(X)
18	2.5789	-0.388
19	2.7894	-0.177
20	3	[illegible]

0.6096263398

Các em quan sát vào các đoạn nó đổi dấu từ âm sang dương hoặc từ dương sang âm tức là đoạn đó có nghiệm và ở đây có 2 đoạn như vậy nên có 2 nghiệm.

Ngoài ra thì Table cực kì mạnh khi dò biểu thức ghép căn và phương trình bậc 2 tạo ra nghiệm lẻ nhưng do nội dung thi trắc nghiệm sẽ không liên quan nhiều tới phần đó nên anh không đề cập ở đây.

Lời giải theo hình thức tự luận:

Bấm máy được nghiệm $x=\frac{5}{3}\Rightarrow 3x-5=0$ và $x\approx 2,8856\to 9x^2-18x\text{-}23=0$

Các em chú ý là ở phép dò trên sử dụng  để chuyển về phân số

$$pt\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+2}-2\sqrt{3-x}\right)-\frac{4(3x-5)}{\sqrt{9x^2-18x+25}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{6x\text{-}10}{\sqrt{2x+2}+2\sqrt{3-x}}=\frac{4(3x-5)}{\sqrt{9x^2-18x+25}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x\text{-}5=0\Leftrightarrow x=5/3\\ 2\left(\sqrt{2x+2}+2\sqrt{3-x}\right)=\sqrt{9x^2-18x+25}(*)\end{array}\right.$$

Bình phương (*) lên ta được:

$$4\left(4\sqrt{2(x+1)(3-x)}-2x+14\right)=9x^2-18x+25$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{2(x+1)(3-x)}-8x+8=9x^2-18x-23$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x-23\right)+8\left(x-1-2\sqrt{2(x+1)(3-x)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x-23\right)+8.\frac{\left(x^2-2x+1\right)-8(-x^2+2x+3)}{x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(9x^2-18x-23\right)\left(1+\frac{8}{x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}}\right)=0(**)$$

Ta có :

$$16\sqrt{2(x+1)(3-x)}-8x+8=9x^2-18x-23$$

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{2(x+1)(3-x)}=9x^2-10x-31\geq 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\frac{5+\sqrt{19}}{9}>2\\ x\leq\frac{5-\sqrt{19}}{9}<-1(\text{loai})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 1+\frac{8}{x-1+2\sqrt{2(x+1)(3-x)}}>0$$

Do đó: (**) $\Rightarrow 9x^2-18x-23 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+4\sqrt{2}}{3} \\ x=\dfrac{3-4\sqrt{2}}{3}\text{(loại)}\end{array}\right.$

Do đó phương trình có 2 nghiệm : $x=\dfrac{5}{3}, x=\dfrac{3+4\sqrt{2}}{3}$

Phương Trình

I. Phương trình cơ bản

1. $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$

2. $\sqrt[3]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g^3(x)$

Bài 1. Nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{-2x^2-3x+12}$

A. $\dfrac{-4}{3}$ **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** $\dfrac{-3}{4}$

Giải

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{-2x^2-3x+12}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4\ge 0 \\ x^2-5x+4=-2x^2-3x+12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-4)\ge 0 \\ 3x^2-2x-8=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 4\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{-8}{6}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{6}$. Nghiệm PT: $x=\dfrac{-4}{3}$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{6-x}$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \\ 6-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\dfrac{1}{2}\le x\le 6\right.$

Với điều kiện trên ta có

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{6-x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{6-x}+\sqrt{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow 3x+1=6-x+2x-1+2\sqrt{6-x}\sqrt{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2x-4=2\sqrt{6-x}\sqrt{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{6-x}\sqrt{2x-1} \quad (x\ge 2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=-2x^2+13x-6$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-17x+10=0 \qquad \Rightarrow \text{Nghiệm PT: } x=5$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{2}{3}(l) \end{array}\right.$$

Bài 3. Nghiệm của phương trình: $\sqrt{3x+7}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x+1}$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Giải

Điều kiện: $x\ge 3$

Bình phương hai vế ta được phương tình $2\sqrt{(3x+7)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{7}{3}\ (L) \\ x=3\ (tm) \end{array}\right.$

Vậy x = 3 là nghiệm duy nhất của phương trình..

Bài 4: Nghiệm của phương trình : $\sqrt{-x^2+x\sqrt{x+5}+7}=\sqrt{-x^2-2x+3}$

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-2x+3\ge 0 \\ -x^2+x\sqrt{x+5}+7=-x^2-2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le x\le 1 \\ x\sqrt{x+5}=-2(x+2)\,(*) \end{cases}$

Với $x=0$ thì (*) không thỏa mãn

Với $-3\le x<0 \cup 0<x\le 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x+5}=-2\left(\frac{x+2}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\left(\frac{x+2}{x}\right)>0 \\ x+5=4\frac{(x+2)^2}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<0 \\ x^3+x^2-16x-16=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<0 \\ (x+1)(x^2-16)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\pm 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Nghiệm phương trình: $x=-1$

Bài 5: Số nghiệm của phương trình : $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=-\frac{1}{2}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Giải

Điều kiện $\forall x \in R$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}=\sqrt{x^2-x+1}$

Bình phương 2 vế ta được : $\sqrt{x^2+x+1}=-2x-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+x+1}=-8x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x-1\geq 0 \\ 16(x^2+x+10=(-8x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\frac{1}{8} \\ 48x^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{15}{48}}$

Bài 6. Nghiệm của phương trình sau : $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Giải

Đk $x\geq 0$

Bình phương 2 vế không âm của phương trình ta được: $1+\sqrt{(x+3)(3x+1)}=x+2\sqrt{x(2x+1)}$, để giải phương trình này dĩ nhiên là không khó nhưng sẽ phức tạp

=> Phương trình giải sẽ rất đơn giản nếu ta chuyển vế phương trình :

$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{4x}-\sqrt{x+3}$ tuy chưa xét đc 2 vế có dương hay không

Nhưng bình phương hai vế ta có PT hệ quả sau : $\sqrt{6x^2+8x+2}=\sqrt{4x^2+12x} \Leftrightarrow x=1$

Thử lại x=1 thỏa mãn PT=> x=1 là nghiệm

<u>Nhận xét:</u> Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Có $f(x)+h(x)=g(x)+k(x)$, thì ta biến đổi phương trình:

$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương được phương trình hệ quả và thử lại nghiệm.

Bài 7. Tổng các nghiệm phương trình sau: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Giải: Điều kiện : $x\ge -1$

Bình phương 2 vế phương trình => được pt khá phức tạp

Ta có: $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}.\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x+1}$ khi đó

$PT\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}$

Bình phương 2 vế ta được: $\frac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Thử lại : $x=1-\sqrt{3}, x=1+\sqrt{3}$

<u>Nhận xét:</u> Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Mà có : $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì ta biến đổi $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$

<u>Bài 8:</u> Nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=x$ (1)

A.0 B.1 C.2 D.3i

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}=x-\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}$

$\Rightarrow x^2-\frac{7}{x^2}=x^2+\left(x-\frac{7}{x^2}\right)-2x.\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}$

$\Leftrightarrow 0=x\left(1-2\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}\right)\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{7}{x^2}\right)=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0\\ (x-2)(4x^2+7x+14)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

<u>Bài 9.</u> Số nghiệm của phương trình: $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$ (1)

A.0 B.1 C.2 D.3

$(1) \Leftrightarrow 2x-3=\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)^3$

$\Leftrightarrow 2x-3=2x-3+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}\right)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$

Thử lại PT ta được nghiệm: x = 1, x= 2, x=3/2

Bài 10. Số nghiệm của phương trình: $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x+1}$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow 3x+1=\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)^3$

$\Leftrightarrow 3x+1=3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right) \Rightarrow 1=\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x+1)}$

$\Leftrightarrow 1=6x^3-7x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2(6x-7)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{7}{6}$

Thử lại phương trình ta được nghiệm: x = 7/6

Bài 11. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$

A. $[-1;1]$ B. $[-1;1)$ C. $(-1;1)$ D. $(-1;1]$

Giải

Để phương trình đã cho có nghiệm thì 2 đồ thị:

$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}; x\in R \\ y=m \end{cases}$ phải cắt nhau.

Xét hàm $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}; x\in R$

Ta có: $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$

Xét hàm $f(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}; t\in R$ $\quad f'(t)=\frac{3}{4.\sqrt{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^3}}>0\forall t$

=> f(t) là hàm đồng biến => $f\left(x+\frac{1}{2}\right)>f\left(x-\frac{1}{2}\right)\forall x$ => $y'>0\forall x$ => y là hàm đồng biến.

$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$

$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-1$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
y'	+
y	$-1 \nearrow 1$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm là -1 < m < 1

Bài 12. Nghiệm của phương trình: $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$

A.0 B.1 C.2 D.3

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow (x+2)\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right)=-x.\left(\sqrt{(-x)^2+3}+1\right)$ (*)

Xét hàm $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+1\right)$

Ta có: $f'(t)=1+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0\forall t\in R$

Vậy f(t) là hàm đồng biến. Do đó ta có (*) ⇔ f(x + 2) = f(-x) ⇔ x + 2 = -x ⇔ x = -1

Đáp số: x = -1

Bài 13. Nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$; điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}$

A.0 B.1 C.2 D.3

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}=\frac{x+3}{5}\Leftrightarrow 5(x+3)=(x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+3).\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}-5\right)=0$$

⇔ Hoặc: x + 3 = 0 ⇔ x = -3 (loại)

Hoặc: $\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5\Leftrightarrow 4x+1+2\sqrt{(4x+1)(3x-2)}+3x-2=25$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{12x^2-5x-2}=26-7x\Leftrightarrow\begin{cases}26-7x\ge 0\\ 4\left(12x^2-5x-2\right)=(26-7x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{26}{7}\\ x^2-344x+684=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{26}{7}\\ x=342;x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

Đáp số: x = 2

Bài 14. Số nghiệm của phương trình $3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}$; điều kiện: $x\ge 2$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}-\sqrt{x+6}=2x-6$$

$$\Leftrightarrow\frac{8(x-3)}{3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}}=2(x-3)\Leftrightarrow 4(x-3)=\left(3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}\right)(x-3)$$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}-4\right)=0$

$\Leftrightarrow$ Hoặc: x = 3

Hoặc: $\left(3\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}\right)=4 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+4x+12}=14-5x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}14-5x\ge 0\\ 9\left(x^2+4x-12\right)=(14-5x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{14}{5}\\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{45}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11-\sqrt{45}}{2}$$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{11-\sqrt{45}}{2}\end{array}\right.$

Bài 15. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$;

A.2 B.3 C.4 D.5

điều kiện $-\frac{1}{3}\le x\le 6$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2-14x-5=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{(x-5)}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

Vì: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+4}>0\\ \dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}>0\\ 3x+1\ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)>0$

Bài 16. $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$; điều kiện: $x\ge 0$

$\Leftrightarrow 4x^2-1+\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1)+\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$

$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)=0 \Leftrightarrow (2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vì: $\left(2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)>0$

Bài 17. Số nghiệm của phương trình : $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Điều kiện: $\begin{cases} 3x^2-7x+3\ge 0 \\ x^2-2\ge 0 \\ 3x^2-5x-1\ge 0 \\ x^2-3x+4\ge 0 \end{cases}$

Phương trình: $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left[\frac{-2}{\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right]}_{>0}=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Với x = 2 thử vào điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình là x = 2.

Bài 18. Nghiệm của phương trình : $\sqrt{x^2+91}=x^2+\sqrt{x-2}$,

A.0 B.1 C.2 D.3

Điều kiện: $x\ge 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+91}-10=\sqrt{x-2}-1+x^2-9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-x-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}-1\right)-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right]=0$$

Do: $\left[(x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}-1\right)-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right]<0\,\forall x\ge 2$

Nên phương trình $\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

Bài 19. Nghiệm của phương trình : $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=3x^2-4x-2$

A.0 B.1 C.2 D.3

Giải

Điều kiện: $1\le x\le 3$

Phương trình: $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1+\sqrt{3-x}-1=3x^2-4x-4$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2-x}{\sqrt{3-x}+1}=(x-2)(3x+2)$$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{1}{\sqrt{3-x}+1}-3x-2\right]=0$

Dễ thấy với $1\le x\le 3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông là hàm nghịch biến và tại x = 1 thì biểu thức đó nhận giá trị là $\frac{-5-4\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}<0$. Chứng tỏ với mọi $1\le x\le 3$ thì biểu thức trong dấu ngoặc vuông luôn âm. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất là x = 2.

Bài 20. Tích các nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$

A.1 B.13 C.26 D.–26

Giải

Điều kiện: $x=-2\cup x\ge 1$

Phương trình: $\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(x+2)}-\sqrt{(x-1)(x+2)}=\sqrt{3(x+2)}$

+) Với x = -2 thì phương trình thỏa mãn.

+) Với $x\ge 1$ thì phương trình: $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2x+1=x+2+2\sqrt{3(x-1)}\Leftrightarrow 2\sqrt{3(x-1)}=x-1$

$\Leftrightarrow 4\left[3(x-1)\right]=(x-1)^2\Leftrightarrow x^2-14x+13\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=13\end{array}\right.$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=13\Rightarrow tich=-26\\x=-2\end{array}\right.$

Bất phương trình cơ bản

$$1)\sqrt{f(x)}\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\f(x)\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)\ge g^2(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$2)\sqrt{f(x)}\ge g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\f(x)\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)> g^2(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$3)\sqrt{f(x)}\le g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)\ge 0\\f(x)\le g^2(x)\end{cases}$$

$$4)\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Bài 1. Tìm giao 2 tập nghiệm của 2 bất phương trình sau:

$$x+1 \ge \sqrt{2\left(x^2-1\right)} \text{ và } 2x-5 < \sqrt{-x^2+4x-3}$$

A. $\left[1;\frac{14}{5}\right)$ B. $[1;3)$ C. $[-1;3)$ D. $S=\left[-1;\frac{14}{5}\right)$

Giải

Ta có :

$$x+1 \ge \sqrt{2\left(x^2-1\right)} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ (x+1)^2 \ge 2\left(x^2-1\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2-2x-3 \le 0 \\ x^2-1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ -1 \le x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 1 \le x \le 3 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $S=[1;3]\cup\{-1\}$

Ta có $$2x-5 < \sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x-5<0 \\ -x^2+4x-3 \ge 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 2x-5 \ge 0 \\ (2x-5)^2 < -x^2+4x-3 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{5}{2} \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < \frac{5}{2} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ 5x^2-24x+28<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ 2<x<\frac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \le x < \frac{14}{4}$$

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[1;\frac{14}{5}\right)$

Từ đó suy ra giao 2 tập nghiệm là $S=\left[1;\frac{14}{5}\right)$

Trắc nghiệm:

Đối với dạng cho đáp số kiểu như thế này thì các em vẫn dùng CALC để thay các đáp án vào để xem đáp án nào thỏa mãn cả 2 bất phương trình, chú ý tới sự khá nhau của các đáp án nhé.

Ví dụ để xem B và D có đúng không thì chỉ cần thay x=0 , đúng thì xét tiếp 2 đáp án đó không thì loại và xét A,B tương tự như các bài khác.

Bài 2. Tập nghiệm của bất phương trình $2\sqrt{x-3}-\frac{1}{2}\sqrt{9-2x}\geq\frac{3}{2}$ (2)

A. $\left[4;\frac{9}{4}\right]$ B. $\left[2;\frac{9}{2}\right]$ C. $\left[4;\frac{9}{2}\right]$ D. $\left[1;\frac{9}{2}\right]$

Giải

Điều kiện $\begin{cases}x-3\geq 0\\9-2x\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 3\leq x\leq\frac{9}{2}$

Với điều kiện trên ta có

$$(2)\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3}\geq\frac{1}{2}\sqrt{9-2x}+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-3)\geq\frac{1}{4}(9-2x)+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{9-2x}$$

$$\Leftrightarrow 16x-48\geq 18-2x+6\sqrt{9-2x}$$

$$\Leftrightarrow 9x-33\geq 3\sqrt{9-2x}\Leftrightarrow\begin{cases}18x-64\geq 0\\(9x-33)^2\geq 9(9-2x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{32}{9}\\81x^2-576x+1008\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{32}{9}\\\left[\begin{array}{l}x\leq\frac{28}{9}\\x\geq 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 4$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[4;\frac{9}{2}\right]$

Bài 3: Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$

A. $T=[2;9)$ B. $T=[1;10)$ C. $T=(2;10)$ D. $T=[2;10)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 5x-1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ 2x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2$

Bất phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{5x-1} > \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-4}$

$\Leftrightarrow 5x-1 > x-1+2x-4+2\sqrt{(x-1)(2x-4)}$

$\Leftrightarrow 2x+4 > 2\sqrt{(x-1)(2x-4)}\ \left(x\geq 2 \Rightarrow x+2>0\right)$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 > (x-1)(2x-4) \Leftrightarrow 0<x<10$

Kết hợp điều kiện: $T=[2;10)$

Bài 4: Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x}<2$

A. $\left(\dfrac{9}{8};\dfrac{4}{3}\right]\cup[-2;0)$ B. $\left(\dfrac{9}{8};\dfrac{4}{3}\right]\cup[-1;0)$ C. $\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{4}{3}\right]\cup[-1;0)$ D. $\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{4}{5}\right]\cup[-1;0)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} -1\leq x\leq \dfrac{4}{3} \\ x\neq 0 \end{cases}$

* Xét: $0<x\leq\dfrac{4}{3}$ (1)

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x}<2 \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+x+4}<2x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2>0 \\ -3x^2+x+4<(2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 7x^2-9x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{9}{7}$

Kết hợp với (1) ta có: $T_1=\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{4}{3}\right]$

* Xét $-1\leq x<0 \Rightarrow$ bất phương trình luôn đúng.

Vậy tập nghiệm $T_2=[-1;0)$

Kết hợp chung : $\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{4}{3}\right]\cup[-1;0)$

Bài 5: Nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$

A. $x\geq 4\cup x=1$ B. $x>4\cup x=1$ C. $x\geq 4$ D. $x>4$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \\ x^2-5x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 4 \\ x\leq 1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1 : $x \ge 4$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ (i)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\right) \ge 2\sqrt{x-1}.\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} \ge 2\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}-\sqrt{x-4} \ge \sqrt{x-4}-\sqrt{x-3}$

Vì $x \ge 4$ nên vế trái dương còn vế phải âm nên bất phương trình nghiệm đúng.

Vậy $x \ge 4$ là nghiệm.

Trường hợp 2 : $x \le 1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)} + \sqrt{(1-x)(3-x)} \ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$ (ii)

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}\right) \ge 2\sqrt{1-x}.\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{4-x} \ (*) \end{array}\right.$

Dễ thấy (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{4-x} \ge \sqrt{4-x}-\sqrt{3-x}$

Vì $x \le 1$ nên $0 < 2-x < 4-x \Leftrightarrow \sqrt{2-x}-\sqrt{4-x} < 0$

$4-x > 3-x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x}-\sqrt{3-x} > 0$

$\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Kết luận : Bất phương trình có nghiệm $x \ge 4$ hoặc $x = 1$.

Bài 6 : Tập nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{3x+2}-\sqrt{4x+1} \le \dfrac{x-1}{5}$

A. $[-1;+\infty)$ B. $[1;+\infty)$ C. $(-\infty,1]$ D. $(-\infty,-1]$

Giải:

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{4}$

Rõ ràng: $\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1} > 0$ do đó bất phương trình tương đương:

$$\frac{-(x-1)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}} \le \frac{x-1}{5} \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}}+\frac{1}{5}\right) \ge 0$$

Nhận thấy: $\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{4x+1}}+\dfrac{1}{5} > 0$ nên bất phương trình tương đương với $x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình: $T = [1;+\infty)$

Bài 7: Nghiệm của bất phương trình: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \ge 0$

A. $x \le -\dfrac{1}{2}$ B. $x \le -\dfrac{1}{2} \vee x = 2$ C. $x \le -\dfrac{1}{2} \vee x = 2 \vee x \ge 3$ D. $x \le -\dfrac{1}{2} \vee x \ge 3$

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-3x-2}=0\\ \begin{cases}\sqrt{2x^2-3x-2}>0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

Trường hợp 1 :

$$\sqrt{2x^2-3x-2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Trường hợp 2 :

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-3x-2}>0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x-2>0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<-\frac{1}{2}\vee x>2\\ x\le 0\vee x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}\vee x\ge 3$$

Từ hai trường hợp trên suy ra đáp số : $x\le -\frac{1}{2}\vee x=2\vee x\ge 3$.

Bài 8: Nghiệm của bất phương trình: $9x^2+2\sqrt{x}>\sqrt{x+1}+1$

A. $x>\frac{1}{3}$ B. $x<\frac{1}{3}$ C. $x=\frac{1}{3}$ D. $x\ge\frac{1}{3}$

Giải:

Điều kiện: $x\ge 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 9x^2-1+2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}>0$

$$(3x-1)(3x+1)+\frac{3x-1}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left(3x+1+\frac{1}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 3x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$$

Bài 9: Nghiệm của bất phương trình : $\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}>3$

A. $\left[\begin{array}{l}x>-1\\ x<-\frac{4}{3}\end{array}\right.$ B. $-\frac{4}{3}\le x\le -1$ C. $-\frac{4}{3}<x<-1$ D. $\left[\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\le -\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Giải :

Điều kiện : $x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ $(t>0)$

$\Rightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{1}{t^2}$

Ta được : $\frac{1}{t^2}-2t>3 \Leftrightarrow 2t^3+3t^2-1<0$ $(t>0)$

$\Leftrightarrow (t+1)(2t^2+t-1)<0$ $(t>0) \Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<\sqrt{\frac{x+1}{x}}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<x<-1$.

Bài 10: Giải bất phương trình : $5\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)<2x+\frac{1}{2x}+4$ (2)

A. $\left(0;1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$ B. $\left(0;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

C. $\left(0;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$ D. $\left(0;\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};+\infty\right)$

Giải :

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow t\ge\frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t\ge\sqrt{2}$ (theo bất đẳng thức côsi)

$\Rightarrow t^2=x+\frac{1}{4x}+1 \Rightarrow 2x+\frac{1}{2x}=2t^2-2$

Bất phương trình (2) trở thành :

$5t<2t^2-2+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>2 \\ t<\frac{1}{2}\end{array}\right.$

+ Với $t>2$ ta có : $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}>\frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 0<\sqrt{x}<\frac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{3}{2}+\sqrt{2} \\ 0<x<\frac{3}{2}-\sqrt{2}\end{array}\right.$

+ Với $t<\frac{1}{2}$ (loại – không thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm : $T=\left(0;\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};+\infty\right)$

Bài 11: Nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}\le x-2$

A. $x>4$ B. $x<4$ C. $x=4$ D. $x\ge 4$

Giải :

Điều kiện : $x \ge 0$

Biến đổi bất phương trình về dạng : $\sqrt{2(x-2)^2+2x} \le x-2+\sqrt{x}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x} \ge 0 \\ v=x-2 \end{cases}$ khi đó bất phương trình trở thành : $\sqrt{2u^2+2v^2} \le u+v$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ 2u^2+2v^2 \le (u+v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \ge 0 \\ (u-v)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ \sqrt{x}=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Vậy nghiệm của bất phương trình : $x=4$.

Bài 12: Tập nghiệm của bất phương trình : $2x^2+\sqrt{x^2-5x-6} > 10x+15$ (1)

A. $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ B. $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ C. $\frac{5-\sqrt{53}}{2} \le x \le \frac{5+\sqrt{53}}{2}$ D. $\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$

Giải :

Điều kiện : $x \in (-\infty;-1]\cup[6;+\infty)$

$(1) \Leftrightarrow 2(x^2-5x-6)+\sqrt{x^2-5x-6}-3>0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-5x-6}$ $(t \ge 0)$

Bất phương trình trở thành : $2t^2+t-3>0$ $(t \ge 0) \Rightarrow t>1$

Từ đó ta được : $x^2-5x-7>0$

Giải ra và kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình :

$$T=\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{53}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{53}}{2};+\infty\right)$$

Bài 13: Tập nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{(1-x^2)^5}+\sqrt{x^5} \le 1$ (2)

A. $[0;1]$ B. $(0;1)$ C. $(0;1]$ D. $[0;1)$

Giải :

Điều kiện để căn thức có nghĩa : $x \in [0;1]$

+ Đặt $x=\cos t$, với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có bất phương trình : $\sin^5 t+\cos^{5/2} t \le 1$

Do $\sin^5 t \le \sin^2 t$ và $\cos^{5/2} t \le \cos^2 t$ nên $\sin^5 t+\cos^{5/2} t \le \sin^2 t+\cos^2 t=1$ với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Do đó bất phương trình có nghiệm là : $x \in [0;1]$

Bài 14: Nghiệm bất phương trình : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \ge 2-\frac{x^2}{4}$

A. 0 B. $(0;1)$ C. $(0;1]$ D. $[0;1)$

Giải :

Điều kiện : $\begin{cases}1+x\geq 0\\1-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Khi đó bất phương trình $\Leftrightarrow 1+x+1-x+2\sqrt{1-x^2}\geq 4-x^2+\dfrac{x^4}{16}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2+\dfrac{x^4}{16}\leq 0$

mà $\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2+\dfrac{x^4}{16}\geq 0\ \forall x[-1;1]$

$\Rightarrow\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2+\dfrac{x^4}{16}=0\Rightarrow x=0$

Vậy nghiệm của bất pt là x=0

Bài 15: Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm : $x^3+3x^2-1\leq a\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$ (*)

A. $a\geq 6$ B. $a\geq 3$ C. $a\leq 4$ D. $a\leq 6$

Giải

Điều kiện : $x\geq 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x^3+3x^2-1\leq a\dfrac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow\left(x^3+3x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\leq a$

+ Xét hàm số : $f(x)=\left(x^3+3x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$

$f'(x)=(3x^2+6x)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)+\left(x^3+3x^2-1\right).\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)>0$ với $x\geq 1$

(Vì $x\geq 1$ thì $3x^2+6x>0;\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>0;\ x^3+3x^2-1>0$ và $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$)

Suy ra : $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

$\Rightarrow f(x)\geq f(1)=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+3x^2-1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\right]=+\infty$

$f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty]$

Lập bảng biến thiên :

x	1	$+\infty$
y	3 ↗	$+\infty$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $a\geq 3$.

Hệ phương trình

Bài 1: Số nghiệm của hệ phương phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Giải:

$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \ (1) \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \ (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow \dfrac{2^{2x} + 2^x.2}{2^x + 2} = y \Leftrightarrow \dfrac{2^x(2^2 + 2)}{2^2 + 2} = y \Leftrightarrow 2^x = y,\ y > 0$

Thế vào (1) ta có: $y^3 = 5y^2 - 4y \Leftrightarrow y(y^2 - 5y + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = (0;1)$, $(2;4)$

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 \ (1) \\ x^2 + y^2 = 25 \ (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ ,Tính : $y_1 - x_1 = ?$

A. 0 **B.** 1 C. 2 D. 3

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y - x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$PT\ (1) \Leftrightarrow -\log_4(y - x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 \dfrac{y}{y - x} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{y - x} = 4$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{4}{3}x$ thế vào (2) ta có: $x^2 + \dfrac{16x^2}{9} = 25$

$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = -4\ (loại) \end{array}\right.$

Đáp số: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (3;4)$

Bài 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \ (1) \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \ (2) \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 nghiệm của hệ:

A. $x + 2y - 1 = 0$ **B.** $x - 2y - 1 = 0$ C. $x + 2y + 1 = 0$ D. $-x + 2y - 1 = 0$

Giải:

$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 1 - x \end{array}\right.$

• Với $y = x$ thế vào (2) ta có: $2^{2x} - \dfrac{2^x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x+1} = 2^x \Leftrightarrow 2x+1 = x \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1$

• Với $y = 1-x$ thế vào (2) ta có: $2 - 2^{x-1} = 2x - 1 \Leftrightarrow 3 - 2x = 2^{x-1}$

Ta thấy $x = 1$ là nghiệm. Mặt khác vế phải đồng biến còn vế trái nghịch biến nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất. Vậy với $x = 1 \Rightarrow y = 0$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (-1;-1),\ (1;0) \Rightarrow pt: x - 2y - 1 = 0$

Bài 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \ (1) \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \ (2) \end{cases}$

Tính độ dài đoạn nối 2 điểm có tọa độ là nghiệm của hệ:

A. $\sqrt{38}$ B. $\sqrt{58}$ C. $\sqrt{68}$ D. $\sqrt{48}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \log_4 x = \log_2 y \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2 x = \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x = 2\log_2 y$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 y^2 \Leftrightarrow x = y^2$

Thế vào (1) ta có: $y^2 - 4|y| + 3 = 0$

Kết hợp điều kiện: $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 9 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (1;1),\ (9;3)$.

Bài 5: Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \ (1) \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \ (2) \end{cases}$

A. $(3;9)$ B. $\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)$ C. $(3;9),\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)$ D. $(3;9),\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right),(2;6)$

Giải:

Điều kiện: $x, y > 0$

$(2) \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow y = 3x$

Thế vào (1) ta có: $(3x)^{\log_3 x} + 2(3x)^{\log_3 x} = 27$

$\Leftrightarrow (3x)^{\log_3 x} = 9 \Leftrightarrow \log_3 (3x)^{\log_3 x} = \log_3 9 \Leftrightarrow \log_3 x(\log_3 3 + \log_3 x) = 2$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 9 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (3;9),\ \left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{-x}.2^{y} = 1152 \ (1) \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \ (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ ,Tính : $y_1 - x_1 = ?$

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Giải:

Điều kiện: $x + y > 0$

$PT \ (2) \Leftrightarrow x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$ thế vào (1) ta có:

$3^{-x}.2^{5-x} = 1152 \Leftrightarrow 6^{-x}.32 = 1152 \Leftrightarrow 6^{-x} = 36 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 7$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (-2; 7)$

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{x}.2^{y} = 972 \ (1) \\ \log_{\sqrt{3}}(x-2) = 2 \ (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ ,Tính : $y_1 + x_1 = ?$

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Giải:

Điều kiện: $x > 2$

$PT \ (2) \Leftrightarrow x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5$, thế vào (1) ta được: $2^{y} = \dfrac{972}{3^5} = \dfrac{972}{243} = 4 \Leftrightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = (5; 2)$

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \ (1) \\ |x^3| + y^2 - 2y = 0 \ (2) \end{cases}$

Viết phương trình qua 2 điểm có tọa độ là nghiệm của hệ:

A. $y = 2$ B. $y = x + 5$ C. $y = 1$ D. $y = 2x - 1$

Giải:

Điều kiện: $x \neq 0, \ y > 0$

$PT \ (1) \Leftrightarrow \log_3 |x| = \log_3 y \Leftrightarrow |x| = y$ thế vào (2) ta có:

$y^3 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = (1; 1), \ (-1; 1) \Rightarrow \text{pt}: y = 1$

Bài 9: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \ (1) \\ \log_y(y - 2x).\log_3 y = 1 \ (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ ,Tính : $y_1.x_1 = ?$

A. 27 B. 26 C. 52 D. 48

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y - 2x > 0 \\ 0 < y \neq 1 \end{cases}$

$PT\ (1) \Leftrightarrow 2x^4 - 2x^2y + (x^2)^3 - y^3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(x^2 - y) + (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - y)(2x^2 + x^4 + x^2y + y^2) = 0$

$\Leftrightarrow y = x^2$

Thế vào (2) ta có: $\log_{x^2}(x^2 - 2x) = \dfrac{1}{\log_3 x^2} = \log_{x^2} 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 1$ (không thỏa mãn điều kiện nên loại).

Với $x = 3 \Rightarrow y = 9$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (3;9)$

Bài 10: Số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 8y + 15} + \sqrt{y^2 + 2|x| - 15} = \sqrt{4x^2 - 18y + 18}\ (1) \\ 3\log_{49}(49x^2) - \log_7 y^3 = 3\ (2) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Xét phương trình (2) $\Leftrightarrow \log_7 |7x| - \log_7 y = 1 \Leftrightarrow \log_7 \dfrac{|7x|}{y} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|7x|}{y} = 7 \Leftrightarrow |x| = y$

Thế vào (1) ta có: $\sqrt{y^2 - 8y + 15} + \sqrt{y^2 + 2y - 15} = \sqrt{4y^2 - 18y + 18}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(y-3)(y-5)} + \sqrt{(y-3)(y+5)} = \sqrt{(y-3)(4y-6)}$ (*)

Điều kiện (*) là: $y = 3;\ y \geq 5$

+ Với y = 3 thì (*) thỏa mãn: $\Rightarrow |x| = y = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

+ Với $y \geq 5$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{y-5} + \sqrt{y+5} = \sqrt{4y-6} \Leftrightarrow y = \dfrac{17}{3}$ (loại)

Vậy nghiệm của hệ phương trình: $(x; y) = (3;3), (-3;3), \left(-\dfrac{17}{3}; \dfrac{17}{3}\right), \left(\dfrac{17}{3}; \dfrac{17}{3}\right)$

Vậy chọn 4 nghiệm

Bài 11: Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} |x| + y = 4 + \sqrt{y^2 + 2}\ (1) \\ \dfrac{1}{2}\lg x^2 - 2\lg 2 = \lg\left(1 + \dfrac{y}{2}\right)\ (2) \end{cases}$

A. $\left(5; \dfrac{1}{2}\right)$ B. $\left(-5; \dfrac{1}{2}\right)$ C. $\left(5; \dfrac{1}{2}\right); \left(-5; \dfrac{1}{2}\right)$ D.

$\left(5; \dfrac{1}{2}\right); (-5;1)$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y > -2 \end{cases}$

$PT\ (2) \Leftrightarrow \lg|x| = \lg(4+2y) \Leftrightarrow |x| = 4+2y$ thế vào (1) ta có:

$$\sqrt{y^2+2} = 3y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2+2 = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 5$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) = \left(5;\frac{1}{2}\right);\left(-5;\frac{1}{2}\right)$

Bài 12: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (x-4)(x+1) = y(y+5)\ (1) \\ \lg_{(x-2)}(y+2) = \dfrac{x-2}{y^2}\ (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ ,Tính : $\dfrac{x_1}{y_1} = ?$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x-2 \neq 1 \\ y+2 > 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$$PT\ (1) \Leftrightarrow x^2-3x-4 = y^2+5y \Leftrightarrow x^2-3x+\frac{9}{4} = y^2+5y+\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{3}{2} = y+\dfrac{5}{2} \\ x-\dfrac{3}{2} = -\left(y+\dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y+4 \\ x = -y-1 \end{array}\right.$$

- Với $x = -y-1$ (loại) vì $x = -y-1 \Rightarrow x-2 = -y-3 > 0 \Rightarrow y < -3$

- Với $x = y+4$ thế vào (2) ta có: $\log_{y+2}(y+2) = \dfrac{y+2}{y^2}$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{y+2}{y^2} \Leftrightarrow y^2-y-2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 6$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (6;2)$.

Bài 13: Số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x} = y-\dfrac{1}{y}\ \ (1) \\ 2y = x^3+1\ \ (2) \end{cases}$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

Giải:

Điều kiện: $x; y \neq 0$

$$PT\ (1) \Leftrightarrow x-y = \frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ \dfrac{1}{xy} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ xy = -1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$

+ Với $y = x$ thế vào (2) ta có: $2x = x^3 + 1$

$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

+ Với $y = -\dfrac{1}{x}$ thế vào (2) ta có:

$-\dfrac{2}{x} = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \dfrac{1}{4} + x^2 + x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Vậy hệ có 3 nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Bài 14: Số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x + y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ x + y + 2 \ge 0 \end{cases}$

Mũ 6 hai vế phương trình (1) ta được:

$(x-y)^2 = (x-y)^3 \Leftrightarrow (x-y)^2(1 - x + y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = x - 1 \end{array}\right.$

+ Với $y = x$ thế vào (2) ta có: $\sqrt{2x+2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ 2x + 2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 = y$

+ Với $y = x - 1$ thế vào (2) ta có: $\sqrt{2x+1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \\ 2x + 1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

Kết luận: Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (1;1), \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

Bài 15: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 2y^2 + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-2y} = 3y & (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ ,Tính : $y_1 + x_1 = ?$

A. 20 B. 22 C. 18 D. 25

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-2y\ge 0 \end{cases}$

$PT\ (1) \Leftrightarrow x=2y^2+y+1$ thế vào (2) ta có:

$\sqrt{2y^2+2y+1}+\sqrt{2y^2-y+1}=(2y^2+2y+1)-(2y^2-y+1)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y^2+2y+1}+\sqrt{2y^2-y+1}\right)\left(1-\sqrt{2y^2+2y+1}+\sqrt{2y^2-y+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2y^2+2y+1}=1+\sqrt{2y^2-y+1}$

$\Leftrightarrow 2y^2+2y+1=1+2\sqrt{2y^2-y+1}+2y^2-y+1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2y^2-y+1}=3y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1\ge 0 \\ 4(2y^2-y+1)=(3y-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y=3 \Rightarrow x=22$

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=(22;3)$.

Bài 16: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2x+y^2+y=3-xy\ \ (1) \\ xy+x+2y=1\ \ (2) \end{cases}$

Viết phương trình qua 2 điểm có tọa độ là nghiệm của hệ:

A. $x+y+1=0$ B. $x+y-1=0$ C. $x-y-1=0$ D. $x+y-2=0$

Giải:

Lấy (1) + (2), ta có $(x+y)^2+3(x+y)-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=-4 \end{array}\right.$ thay vào (2) ta được nghiệm của hệ: $(x;y)=(1;0),\ (-1;2)$

Bài 17: Số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6\ \ (1) \\ (x+2).\sqrt{y+1}=(x+1)^2\ \ (2) \end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Giải:

Điều kiện: $y\ge -1$

$PT\ (1) \Leftrightarrow 2x^2(y-x^2)+y^3-x^6=0$

$\Leftrightarrow (y-x^2)(2x^2+y^2+yx^2+x^4)=0$

$\Leftrightarrow y=x^2$ thế vào (2) ta được: $(x+2)\sqrt{x^2+1}=x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+1}=x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x^2+1}-2x\right)+\left(2\sqrt{x^2+1}-(x^2+1)\right)=0$

$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{x^2+1}-2\right)+\sqrt{x^2+1}\left(2-\sqrt{x^2+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-2\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}=x\quad \text{(vô nghiệm)} \\ \sqrt{x^2+1}=2 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow y=x^2=3 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=\left(-\sqrt{3};3\right),\left(\sqrt{3};3\right)$

Bài 18: Số nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+4y=y^3+16x\\1+y^2=5(1+x^2)\end{cases}$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Giải:

Hệ phương trình: $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-16x=y^3-4y\\y^2-4=5x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x^2-16)=y(y^2-4)\ (1)\\y^2-4=5x^2\quad(2)\end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có: $x(x^2-16)=5x^2y\Leftrightarrow x(x^2-16-5xy)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\y=\dfrac{x^2-16}{5x}\end{array}\right.$

- Với $x=0$ thế vào (2) ta có: $y=\pm2$

- Với $y=\dfrac{x^2-16}{5x}$ thế vào (2) ta có: $124x^4+132x^2-256=0$

$\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-3\\x=-1\Rightarrow y=3\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=(0;2),(0;-2),(1;-3),(-1;3)$.

Bài 19: Với giá trị nào của m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}x^2+y^2+2(x+y)=2\\xy(x+2)(y+2)=2^m(2^{m+1}-1)\end{cases}$

A. $m=0$ B. $m<0$ C. $m\le0$ D. $m>0$

Giải:

$HPT\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+y^2+2y=2\\xy(x+2)(y+2)=2^{2m+1}-2^m\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x^2+2x=u,\ u\ge-1\\y^2+2y=v,\ v\ge-1\end{cases}$ $(u=x^2+2x=(x+1)^2-1\ge-1)$

Khi đó hệ phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\ (1)\\uv=2^{2m+1}-2^m\quad(2)\\u\ge-1;\ v\ge-1\end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow v=2-u\ (do\, v\ge-1\Rightarrow2-u\ge-1\Rightarrow u\le3)$

Thế vào (2) ta có: $u(2-u)=2^{2m+1}-2^m,\ -1\le u\le3$

$\Leftrightarrow-u^2+2u=2^{2m+1}-2^m\ (*),\ -1\le u\le3$

Để hệ đã cho có nghiệm thì phương trình (*) phải có nghiệm thỏa mãn: $-1\le u\le3$

$\Leftrightarrow$ 2 đồ thị $\begin{cases}f(u)=-u^2+2u,\ -1\le u\le3\\f(m)=2^{2m+1}-2^m\end{cases}$ phải cắt nhau.

Xét hàm: $f(u) = -u^2 + 2u,\ -1 \le u \le 3$

Ta có: $f' = -2u + 2;\ f' = 0 \Leftrightarrow u = 1$

Bảng biến thiên:

u	-1		1		3
f'		+	0	-	
f	-3	↗	1	↘	-3

Từ bảng biến thiên, suy ra: $-3 \le 2^{2m+1} - 2^m \le 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2m+1} - 2^m \le 1 \\ 2^{2m+1} - 2^m \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.2^{2m} - 2^m - 1 \le 0 \\ 2.2^{2m} - 2^m + 3 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2^m \le 1 \\ \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$

Bài 20: Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$

A. $m \le \frac{1}{4}$ B. $0 \le m \le \frac{1}{4}$ C. $0 \le m$ D. $0 < m < \frac{1}{4}$

Giải:

Điều kiện: $x, y \ge 0$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x} = u;\ u \ge 0 \\ \sqrt{y} = v,\ v \ge 0 \end{cases}$

Khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1\ (1) \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m\ (2) \\ u \ge 0;\ v \ge 0 \end{cases}$

Từ (1) suy ra $v = 1 - u$ $(do\ v \ge 0 \Rightarrow 1 - u \ge 0 \Rightarrow u \le 1)$

Thế vào (2) ta có: $u^3 + (1-u)^3 = 1 - 3m,\ 0 \le u \le 1$

$\Leftrightarrow -u^2 + u = m\ (*),\ 0 \le u \le 1$

Để hệ đã cho có nghiệm thì phương trình (*) phải có nghiệm thỏa mãn: $0 \le u \le 1$

$\Leftrightarrow$ 2 đồ thị $\begin{cases} f(u) = -u^2 + u,\ 0 \le u \le 1 \\ f(m) = m \end{cases}$ phải cắt nhau.

Xét hàm: $f(u) = -u^2 + u,\ 0 \le u \le 1$

Ta có: $f' = -2u + 1; f' = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

u	0		1/2		1
f'		+	0	-	
f	0	↗	1/4	↘	-0

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm là: $0 \le m \le \dfrac{1}{4}$

Bài 21: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=10m+6\end{cases}$

A. $m=3$ B. $m\le 3$ C. $m\ge 3$ D. $\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{5}\\m\ge 3\end{array}\right.$

Giải:

Điều kiện: $xy\ne 0$. Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=4\\\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=10m+10\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=u,\ u\le -2\cup u\ge 2\\y+\dfrac{1}{y}=v,\ v\le -2\cup v\ge 2\end{cases}$

Khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\ (1)\\u^2+v^2=10m+10\ (2)\\u\le -2\cup u\ge 2\\v\le -2\cup v\ge 2\end{cases}$

Từ (1) suy ra $v=4-u\left(do\left[\begin{array}{l}v\le -2\\v\ge 2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}4-u\le -2\\4-u\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u\ge 6\\u\le 2\end{array}\right.\right)$

Kết hợp với: $u\le -2\cup u\ge 2\Rightarrow u\le -2\cup u=2\cup u\ge 6$

Thế vào (2) ta có: $u^2-4u+3=5m$ (*), $u\le -2\cup u=2\cup u\ge 6$

Để hệ đã cho có nghiệm thì phương trình (*) phải có nghiệm thỏa mãn: $u\le -2\cup u=2\cup u\ge 6$

$\Leftrightarrow$ 2 đồ thị : $\begin{cases}f(u)=u^2-4u+3, u\le -2\cup u=2\cup u\ge 6\\f(m)=5m\end{cases}$ phải cắt nhau.

Xét hàm $f(u)=u^2-4u+3,\ u\le -2\cup u=2\cup u\ge 6$

Ta có: $f'=2u-4,\ f'=0\Rightarrow u=2$

Bảng biến thiên:

u	-∞		-2		2		6		+∞
f'				-	0	+			
f	+∞	↘	15		-1		15	↗	+∞

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm là: $\left[\begin{array}{l}5m=-1\\5m\ge 15\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\dfrac{1}{5}\\m\ge 3\end{array}\right.$

Bài 22: Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1\\\sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5\end{cases}$

A.1 B.2 C.3 D.4

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ne 0;\ y\ne -1\\x+y+1\ge 0\\x-y+10\ge 0\end{cases}$

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}=t\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=\dfrac{1}{t}$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t-2\dfrac{1}{t}=1\Leftrightarrow t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=2\end{array}\right.$

+ Với t = -1 ta có: $\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}=-1\Leftrightarrow\dfrac{y+1}{x}=-1\Leftrightarrow y=-x-1$ thế vào (2) ta được:

$\sqrt{2x+11}=5\Leftrightarrow 2x=14\Leftrightarrow x=y\Rightarrow y=-8$

+ Với t = 2, ta có: $\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}=2\Leftrightarrow\dfrac{y+1}{x}=8\Leftrightarrow y=8x-1$ thế vào (2) ta được:

$\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=7\\x=\dfrac{49}{64}\Rightarrow y=\dfrac{41}{8}\end{array}\right.$

Đáp số: $(x;y)=(7;-8);\ (1;7);\ \left(\dfrac{49}{64};\dfrac{41}{8}\right)$

Bài 23: Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}(2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(2x-y)^2=0\\2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}$

A. $\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{1}{4}\right)$ B. $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ C. $\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ D. $\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right);(1;2)$

Giải:

Điều kiện: $2x-y\neq 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2x+y}{2x-y}\right)^2-5\dfrac{2x+y}{2x-y}+6=0$ (*)

Đặt $\dfrac{2x+y}{2x-y}=t$ khi đó phương trình (*) trở thành: $t^2-5t+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ t=3\end{array}\right.$

+ Với t = 2, ta có: $\dfrac{2x+y}{2x-y}=2\Leftrightarrow 2x+y=2(2x-y)\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x$ thế vào (2) ta có: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{8}\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}\\ x=\dfrac{3}{4}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

+ Với t = 3, ta có: $\dfrac{2x+y}{2x-y}=3\Leftrightarrow 2x+y=3(2x-y)\Leftrightarrow y=x$ thế vào (2) ta có phương trình vô nghiệm.

Đáp số: $(x;y)=\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 24: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-3x^2=y^3-3y-2\\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)=(x-3)^3\end{cases}$

Gọi $(x_1;y_1)$ là nghiệm của hệ ,Tính : $x_1-y_1=?$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0<x,y\neq 1\\ (x-2)(y-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, y>1\\ 0<x<2,\ 0<y<1\end{array}\right.$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=y^3-3y$

Xét hàm: $f(t)=t^3-3t$, dễ thấy hàm này đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng (-1; 1)

Đặt $x-1=t_1$; $y=t_2$

+ Với $x>2$, $y>1$ thì $t_1>1, t_2>1$, khi đó $(1)\Leftrightarrow f(t_1)=f(t_2)\Leftrightarrow t_1=t_2\Leftrightarrow x-1=y$

+ Với $0<x<2; 0<y<1$ thì $-1<t_1<1; 0<t_2<1$, khi đó $(1)\Leftrightarrow f(t_1)=f(t_2)\Leftrightarrow t_1=t_2\Leftrightarrow x-1=y$

Vậy với $y=x-1$ thế vào (2) ta có: $(x-3)^3=0\Leftrightarrow x=3\Rightarrow t=2$

Đáp số: $(x;y)=(3;2)$

Bài 25: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x^3=y^2+7x^2-mx\\ y^3=x^2+7y^2-my\end{cases}$

A. $m>16$ B. $m<16$ C. $m>20$ D. $m<20$

Giải:

Lấy $(1)-(2)$ ta có: $x^3-y^3=6(x^2-y^2)-m(x-y)$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+xy+y^2-6(x+y)+m\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+(y-6)x+y^2-6y+m\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x \\ x^3=8x^2-mx \end{cases} (I) \\ \begin{cases} x^2+(y-6)x+y^2-6y+m=0 \\ x^3=y^2+7x^2-mx \end{cases} (II) \end{array}\right.$$

+ Xét hệ (I): số nghiệm của hệ (I) đúng bằng số nghiệm của phương trình:

$x^3=8x^2-mx \Leftrightarrow x(x^2-8x+m)=0$ (3)

- Nếu : $\Delta'=16-m\ge 0$ thì phương trình: $x^2-8x+m=0$ có 2 nghiệm với tổng bằng 8 $\Rightarrow x^2-8x+m=0$ có ít nhất 1 nghiệm khác 0 $\Rightarrow$ (3) có ít nhất 2 nghiệm khác nhau $\Rightarrow$ hệ (I) có $\ge$ 2 nghiệm.

- Nếu $\Delta'<0 \Rightarrow m>16$ *thì* $x^2-8x+m=0$ vô nghiệm.

$\Rightarrow$ (3) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ hệ (I) có nghiệm duy nhất.

+ Với m > 16 xét phương trình đầu của hệ (II): $x^2+(y-6)x+y^2-6y+m=0$

$\Delta=(y-6)^2-4(y^2-6y+m)=-3y^2+12y+36-4m$

$=-3(y-2)^2+4(12-m)=-3(y-2)^2-4(m-12)<0,\ \forall y,\ \forall m>16$

$\Rightarrow$ với m > 16 thì (II) vô nghiệm $\Rightarrow$ khi đó hệ đã cho có đúng 1 nghiệm.

Kết luận: $m>16$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 26: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m} \end{cases}$

A. $m=3$ B. $m\le 3$ C. $m\ge 3$ D. $\left[\begin{array}{l} m=-\frac{1}{5} \\ m\ge 3 \end{array}\right.$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 2 \\ m\ge 0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+2\sqrt{(x+1)(y-2)}+y-2=m \quad (1) \\ y+1+2\sqrt{(y+1)(x-2)}+x-2=m \quad (2) \end{cases}$

Lấy (1) – (2) ta có: $\sqrt{(x+1)(y-2)}=\sqrt{(y+1)(x-2)}$

$\Leftrightarrow (x+1)(y-2)=(y+1)(x-2)$

$\Leftrightarrow xy-2x+y-2=yx-2y+x-2 \Leftrightarrow 2x-2y+x-y=0$

$\Leftrightarrow x=y$

Thế vào phương trình đầu của hệ ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m}$ (*)

Để hệ đã cho có nghiệm thì phương trình (*) phải có nghiệm thỏa mãn $x\ge 2 \Leftrightarrow$ 2 đồ thị:

$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\ , x>2 \\ f(m)=\sqrt{m} \end{cases}$ phải cắt nhau.

Xét hàm: $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2},\ x>2$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}>0,\ \forall x>2$

Bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm là: $\sqrt{m}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow m\ge 3$.

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Một số phép toán vectơ

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
2. $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
3. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$
4. $k.\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$
5. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
6. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
7. $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
8. $\vec{a}\ cp\ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
9. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$
10. $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$
11. M là trung điểm AB

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

12. G là trọng tâm tam giác ABC

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3},\right)$$

1.2. Phương trình mặt phẳng

*) Phương trình mp(α) qua $M(x_0\,; y_0\,; z_0)$ có vtpt $\vec{n}$ = (A;B;C)

$$\boxed{\mathbf{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}}$$

(α) : **A**x + **B**y + **C**z + D = 0 thì ta có vtpt $\vec{n}$ = **(A; B; C)**

*) Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn đi qua **A(a,0,0)** **B(0,b,0)** ; **C(0,0,c)** là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

<u>Chú ý</u> *: Muốn viết phương trình mặt phẳng ta cần xác định tọa độ* ***điểm đi qua và 1 véctơ pháp tuyến.***

*) Vị trí tương đối của hai mp (α_1) và (α_2) *:*

° (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

° $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

° $(\alpha)\equiv(\beta)\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

° $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

*) Khoảng cách từ $M(x_0,y_0,z_0)$ đến (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M,\alpha)=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

*) Góc giữa hai mặt phẳng : $\cos((\alpha),(\beta))=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$

1.3. Phương trình đường thẳng

*) *Phương trình tham số của đường thẳng d* qua $M(x_o;y_o;z_o)$ có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

$$\boxed{d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\quad(t\in\mathbb{R})\\z=z_0+a_3t\end{cases}}$$

*) *Phương trình chính tắc của d* :

$$\boxed{d:\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}}$$

*) *Vị trí tương đối của 2 đường thẳng d , d'* : Ta thực hiện hai bước

+ Tìm quan hệ giữa 2 vtcp $\vec{a}_d$, $\overrightarrow{a_{d'}}$

+ Tìm điểm chung của d , d' bằng cách xét hệ: $\begin{cases}x_0+a_1t=x'_0+a'_1t'\\y_0+a_2t=y'_0+a'_2t'\quad(I)\\z_0+a_3t=z'_0+a'_3t'\end{cases}$

Hệ (I)	Quan hệ giữa $\vec{a}_d$, $\overrightarrow{a_{d'}}$	Vị trí giữa d , d'
Vô số nghiệm	Cùng phương	$d\equiv d'$
Vô nghiệm		$d//d'$
Có 1 nghiệm	Không cùng phương	d cắt d'
Vô nghiệm		d , d' chéo nhau

*). *Góc giữa 2 đường thẳng* : Gọi φ là góc giữa d và d'

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{|\vec{a}_d.\overrightarrow{a_{d'}}|}{|\vec{a}_d|.|\overrightarrow{a_{d'}}|}\quad(0^0\le\varphi\le90^0)}$$

Phương pháp tọa độ trong không gian

$\vec{u}(x;y;z)$

$\vec{v}(x';y';z')$

Tích có hướng hai vecto: $[\vec{u},\vec{v}]=(yz'-zy';zx'-xz';xy'-yx')$

Các ứng dụng:

$\vec{u},\vec{v}$ cùng phương: $\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v}]=\vec{0}$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng: $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right]\vec{w} = 0$

Công thức tính diện tích, thể tích:

Tính diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

Tính thể tích tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|$

Góc giữa hai mặt phẳng (P_1) và (P_2):

$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}$ (Với $\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}$ là vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng)

Góc giữa hai đường thẳng d_1; d_2:

$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}$ (Với $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ là vecto chỉ phương của 2 đường thẳng)

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

$\sin\beta = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{u_1}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{u_1}|}$ (Với $\overrightarrow{n_1}$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P1) và $\overrightarrow{u_1}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng d1.

Khoảng cách giữa điểm $M(x_o;y_o;z_o)$ và mặt phẳng $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d\left(M,(P)\right) = \frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Khoảng cách giữa điểm A đến đường d qua điểm M:

$$d\left(A,d\right) = \frac{\left|\left[\vec{u}.\overrightarrow{MA}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

Đường d1 có vecto chỉ phương $\vec{u}$ và đi qua M

Đường d2 có vecto chỉ phương $\vec{v}$ và đi qua N

$$d\left(d_1,d_2\right) = \frac{\left|\left[\vec{u}.\vec{v}\right]\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u}.\vec{v}\right]\right|}$$

1.4. Một số dạng toán thường gặp

- Dạng 1: Các bài toán cơ bản(các yếu tố đã cho sẵn)
- Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm, đi qua một điểm và song song với mặt phẳng cho trước...
- Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm, song song với đường thẳng cho trước...
- Chứng minh ABCD là một tứ diện, tính diện tích tam giác biết tọa độ ba điểm...
- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm trên đường thẳng, mặt phẳng...
- Viết phương trình mặt cầu biết tâm và bán kính, đi qua 4 điểm đã cho...
- Dạng 2: Bài toán về phương trình mặt phẳng và các vấn đề liên quan
- Viết phương trình mặt phẳng bằng cách xác định VTPT
- Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến khoảng cách
- Viết phương trình mặt phẳng dạng đoạn chắn
- Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến góc
- Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

- Các dạng toán khác về mặt phẳng

➢ Dạng 3: Bài toán về phương trình đường thẳng và các vấn đề liên quan

- Viết phương trình đường thẳng bằng cách xác định VTCP
- Viết phương trình đường thẳng liên quan đến đường thẳng khác
- Viết phương trình đường thẳng liên quan đến khoảng cách
- Viết phương trình đường thẳng liên quan đến góc
- Viết phương trình đường thẳng liên quan đến diên tích tam giác

➢ Dạng 4 Các bài toán tổng hợp

1.5. Phương trình mặt cầu

1.5.1. Phương trình mặt cầu tâm I(a ; b ; c), bán kính R

$$\boxed{(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad (1)}$$

+/(S): $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2) (với $a^2+b^2+c^2-d>0$)

+/Ta có: Tâm I(a ; b ; c) và $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

1.5.2. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho $(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ và $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

Gọi d = d(I,(α)) : khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mp(α).

- **d > r** : $(S)\cap(\alpha)=\varnothing$
- **d = r** : (α) tiếp xúc (S) tại H (H: tiếp điểm, (α): tiếp diện)

****Tìm tiếp điểm H (là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mp(α))***

+ Viết phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc mp(α) : ta có $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n}_{(\alpha)}$

+ H = d ∩ (α)

✓ Gọi H (theo t) ∈ d

✓ H∈(α) ⇒ t = ? ⇒ tọa độ H

- **d < r** : (α) cắt (S) theo đường tròn (C): $\begin{cases}(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\\(\alpha): Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$

****Tìm bán kính R và tâm H của đường tròn giao tuyến:***

+ Bán kính $R=\sqrt{r^2-d^2(I,(\alpha))}$

+ Tìm tâm H (là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mp(α))

1.5.3. Các dạng toán cơ bản về mặt cầu

- Viết phương trình mặt cầu bằng cách xác định tâm và bán kính.
- Viết phương trình mặt cầu bằng cách xác định hệ số của phương trình tổng quát.
- Bài toán khác liên quan đến mặt cầu.

2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{2} \;\&\; d_2: \begin{cases}x=t\\y=1+2t\,(t\in R)\\z=t\end{cases}$$

Chứng minh hai đường thẳng song song. Viết phương trình mp(P) chứa 2 đường thẳng trên

- Ta có $\overrightarrow{u_1}=(2;4;2);\overrightarrow{u_2}=(1;2;1)$ suy ra hai véc tơ cùng phương.
- Ta có $M(2;2;2)\in d_1$ và $M(2;2;2)\notin d_2$
- Suy ra hai đường thẳng song song
- Ta có $\overrightarrow{u_1}=(2;4;2);\overrightarrow{MN}=(-2;-1;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]=(6;0;6)$ với N(0;1;0)
- Phương trình mp(P): x+z-4=0

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): 3x-2y-3z+1=0 và mặt phẳng (Q): 5x+2y+5z-1=0. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với mp(P) và mp(Q) đồng thời biết khoảng cách từ gốc tọa độ đến mp(R) bằng 1.

- Ta có $\overrightarrow{n_R}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-4;-30;16)$
- Suy ra phương trình (R) là: -4x-30y+16z+D=0
- Ta có $d(O;(R))=\dfrac{|D|}{2\sqrt{293}}=1$
- Vậy phương trình mp(R) là: $-2x-15y+8z\pm\sqrt{293}=0$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(0,1,2), B(2,-2,1), C(-2;0;1)

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng 2x+2y+z-3=0 sao cho MA=MB=MC

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C

- Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1);\overrightarrow{AC}=(-2;-1;-1)\Rightarrow\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;4;-8)$
- Phương trình mặt phẳng(ABC) : x+2y-4z+6=0

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng 2x+2y+z-3=0 sao cho MA=MB=MC

- Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ nên M thuộc đường thẳng vuông góc với (ABC) tại trung điểm I(0;-1;1) của đoạn BC
- Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+2y+z-3=0\\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-4}\end{cases}$$

- Suy ra tọa độ M(2;3;-7)

Ví dụ 4: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho A(1;2;3) B(2;2;2) C(1;2;0) Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến mặt phẳng đó bằng $\sqrt{3}$.

- Gọi $\vec{n}=(a;b;c)\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow a-c=0$
- Phương trình mp có dạng ax+by+cz-a-2b-3c=0
- Ta có $d(C;(P))=\dfrac{|-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{3}$
- Suy ra a=b=c=1 hoặc a=c=1, b=-1
- Phương trình mp(P) là x+y+z-6=0 hoặc x-y+z-2=0

Ví dụ 5: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c), trong đó b,c dương và mặt phẳng (P): y-z+1=0. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$

- Ta có phương trình (ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
- Ta có $\overrightarrow{n_{ABC}}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow b=c$
- Ta có $d(O;(ABC))\frac{|-bc|}{\sqrt{b^2c^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{3}$
- Suy ra $b=c=\frac{1}{2}$

Ví dụ 6 Trong không gian tọa độ Oxyz, cho 2 đường thẳng

$$d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}\ \&\ d_2:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\,(t\in R)\\z=-t\end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng d cắt cả 2 đường thẳng d_1 và d_2 đồng thời vuông góc với mp(P): 2x+y-5=0

- Ta có

$$d\cap d_1=A\Rightarrow A(-1-u;-1+3u;1+2u)$$
$$d\cap d_2=B\Rightarrow B(2+t;1-2t;-t)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(t+u+3;-2t-3u+2;-t-2u-1)$$

- T a có $d\perp(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{n_P}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\u=-2\end{cases}$
- Suy ra phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+2t'\\y=-7+t'\,(t'\in R)\\z=-5\end{cases}$

Ví dụ 7: Trong không gian Oxyz cho A(0;1;2), B(-3;1;4), C(1;-2;-1). Viết phương trình tham số của đường thẳng d biết:

a) d qua điểm A và trung điểm I của đoạn thẳng BC.
b) d qua C và vuông góc với mp(ABC).

a) I là trung điểm BC nên $I\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

VTCP: $\overrightarrow{AI} = \left(-1;-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.Phương trình tham số đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - \frac{3}{2}t \\ z = 2 - \frac{1}{2}t \end{cases}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3;0;2)$, $\overrightarrow{BC} = (4;-3;-5)$

VTCP: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (6;-7;9)$

Phương trình đường thẳng d cần tìm:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -2 - 7t \\ z = -1 + 9t \end{cases}$$

Ví dụ 8: Xét vị trí tương đối của d $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 3t \end{cases}$ với các đường thẳng:

a) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$ b) $\Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ c) $\Delta_3 : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

a) d có VTCP $\vec{u} = (1;-1;3)$.

Δ_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2;-2;6)$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + 2t = -1 + t' \\ -2t = 3 - t' \\ 3 + 6t = 3t' \end{cases}$. $\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - t' = -2 \\ -2t + t' = 3 \\ 6t - 3t' = -3 \end{cases}$ vô nghiệm.

Và $\vec{u}_1 = (2;-2;6) = 2\vec{u}$

Suy ra: d // Δ_1.

b) Thực hiện tương tự: d và Δ_2 cắt nhau.

c) Thực hiện tương tự: d và Δ_3 chéo nhau.

Ví dụ 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz , cho mặt phẳng (P): x-2y-3z+5=0. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (P) đồng thời chứa Oy

- Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{j}\right] \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = (3;0;1)$
- Phương trình mặt phẳng là: 3x+z=0

Ví dụ 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz , cho hai đường thẳng

$$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases} \quad d':\begin{cases} x=2+t' \\ y=-1+t' \\ z=3+t' \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng trên

- Ta có hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} t=1 \\ t'=0 \end{cases}$ suy ra d cắt d' tại I(2;-1;3)
- Ta có $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right] \Rightarrow \overrightarrow{n_P}=(-3;0;3)$
- Phương trình mặt phẳng là: -x+z-1=0

Ví dụ 11: Cho A(1;3;1), B(2;1;2), C(0;2;-6) và mp(P) $x-2y+2z+1=0$

a) Viết phương trình mặt cầu tâm B qua A.
b) Viết phương trình mặt cầu đường kính BC.
c) Viết phương trình mặt cầu tâm C, tiếp xúc mp(P).

a) Mặt cầu tâm B, qua A nên có bán kính r = AB.

$$AB=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=6$.

b) Gọi I là trung điểm BC

Khi đó, $I\left(1;\frac{3}{2};-2\right)$, $\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{69}}{2}$

Mặt cầu đường kính BC có tâm $I\left(1;\frac{3}{2};-2\right)$, bán kính r = $\frac{\sqrt{69}}{2}$ có phương trình:

$$(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2+(z+2)^2=\frac{69}{4}$$

c) Mặt cầu tâm C tiếp xúc với (P) nên có bán kính

$$r=d(C,(P))=\frac{|0-4-12+1|}{\sqrt{1+4+4}}=5$$

Phương trình mặt cầu cần tìm: $x^2+(y-2)^2+(z+6)^2=25$

Ví dụ 12: Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+6y-8z+1=0$.

a) Xác định tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S).
b) Viết phương trình mp(P) tiếp xúc với mặt cầu tại M(1;1;1).

a) Từ phương trình mặt cầu ta có: $\begin{cases} -2a=-2 \\ -2b=6 \\ -2c=-8 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=4 \\ d=1 \end{cases}$

Tọa độ tâm I(1; -3; 4).

Bán kính: $r=\sqrt{1+9+16-1}=5$

b) Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại M nên IM vuông với mp.

$\overrightarrow{IM} = (0;4;-3)$

Mp(P) qua M(1;1;1), có VTPT $\overrightarrow{IM} = (0;4;-3)$ có phương trình:

$$0(x-1)+4(y-1)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow 4y-3z-1=0$$

CASIO HÌNH OXYZ, OXY

a. Tính khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng:

Với Oxy $d_{A\to(\Delta)} = \dfrac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, với Oxyz : $d_{A\to(P)} = \dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

b. Tính góc tạo bởi 2 đường thẳng (2 vecto chỉ phương) , 2 mặt phẳng (2 vecto pháp tuyến)

$cos\alpha = \dfrac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ với Oxy thì các em bỏ z đi là được

c. Tính tích có hướng, vô hướng của 2 vecto,tích hỗn tạp- Ứng dụng tính V bằng tích hỗn tạp

Các em vào tính năng vecto

MODE 8

```
Vector?
1:VctA   2:VctB
3:VctC
```

Sau đó nhẽ nhập dữ liệu cho từng vecto: Chọn 1 để nhập cho VectoA

```
VctA(m)  m?
1:3      2:2
```

Chọn 1 để chọn hệ trục Oxyz

```
        VCT
A
[0      0      0]

               0
```

Sau đó các em nhập dữ liệu cho nó

```
        VCT
A
[1      2      3]

               3
```

Để nhập tiếp dữ liệu cho vectoB các em bấm

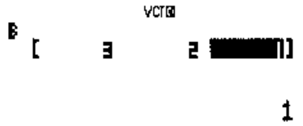
SHIFT 5 2 2 1

```
        VCT
B
[0      0      0]

               0
```

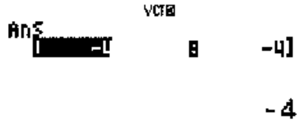
Lại nhập dữ liệu cho nó:

3 = 2 = 1 =



Tính tích có hướng của vecto A và B ta bấm như sau:

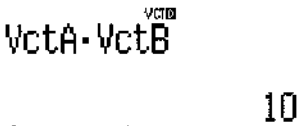
AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 =



Ta được vecto mới vuông góc với 2 vecto A và B là tích có hướng của chúng

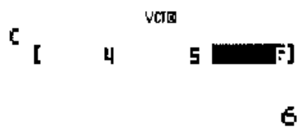
Để tính tích vô hướng ta bấm như sau:

AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =

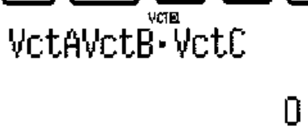


Để tính tích hỗn tạp của 3 vecto thì ta sẽ nhập thêm dữ liệu cho vectoC

AC SHIFT 5 2 3 1 4 = 5 = 6 =



AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 SHIFT 5 7 SHIFT 5 5 =



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho mp(P): x + y + z – 3 = 0 và hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1};\qquad d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{5}$$

Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc d_1, tiếp xúc với d_2 và cắt mp(P) theoo một đường tròn có bán kính r = $\sqrt{3}$,biết rằng tâm mặt cầu có cao độ dương

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$

B. $(x+1)^2+(y+1)^2+z^2=6$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=6$

D. $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=16$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm *M*(2;3;-1) và đường thẳng

$$d:\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{2}$$

Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên d. Tìm tâm của mặt cầu (S) tâm M cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác MAB bằng $2\sqrt{2}$.

A. $H(-2;5;-1)$ B. $H(2;5;1)$ C. $H(2;-5;1)$ D. $H(2;5;-1)$

Câu 3: Trong không gian Oxyz ,cho điểm M(0;2;0) và hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình: $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$; $d_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M , song song với trục Ox , sao cho (P) cắt hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt tại A, B sao cho AB = 1 .

A. - 4 y - z + 8 = 0

B. - 4 y + z - 8 = 0

C. - 4 y + z + 8 = 0

D. 4 y - z + 8 = 0

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1;-1;2), B(3;0;-4)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2x+2y-z-2=0$

B. $2x-2y+z-2=0$

C. $2x-2y-z-2=0$

D. $2x+2y+z-2=0$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ và mặt phẳng (P): x + y + z + 2015 = 0

Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (P) và tiếp xúc (S)

A. $x - y - z - 2\pm 4\sqrt{3}=0$

B. $x + y - z - 2\pm 4\sqrt{3}=0$

C. $x - y + z - 2\pm 4\sqrt{3}=0$

D. $x + y + z - 2\pm 4\sqrt{3}=0$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1;-1;2), B(3;0;-4)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P)

A. $M\left(\dfrac{-4}{3};-\dfrac{5}{6};-1\right)$ **B.** $M\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{6};1\right)$ C. $M\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{5}{6};-1\right)$ D. $M\left(\dfrac{-4}{3};-\dfrac{5}{6};1\right)$

Câu 7: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d

A. $-2x-y+3z-18=0$ B. $-2x+y-3z-18=0$

C. $-2x-y-3z-18=0$ **D.** $-2x+y+3z-18=0$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $I(7;4;6)$ và mp$(P): x+2y-2z+3=0$. Lập phương trình của mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mp(P).

A. $(x-7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$

B. $(x+7)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=4$

C. $(x-7)^2+(y+4)^2+(z-6)^2=4$

D. $(x-7)^2+(y-4)^2+(z+6)^2=4$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2), B(1;-1;4)$. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB

A. $x^2 + y+1^{2} + z-3^{2} = 6$

B. $x^2 + y-1^{2} + z-3^{2} = 6$

C. $x^2 + y-1^{2} + z+3^{2} = 6$

D. $x^2 + y+1^{2} + z+3^{2} = 6$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-6=0$. Tìm tọa độ giao điểm của d với (P)

A. $(-7;0;-8)$ B. $(7;0;8)$ **C.** $(7;0;-8)$ D. $(7;1;-8)$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x+y+z+1=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I(1;1;0) và tiếp xúc với mp(P).

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$

Câu 12: Viết phương trình mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mp(P): $x+y+z+1=0$.

A. $y-2z=0$ **B.** $y-z=0$ C. $2y-z=0$ D. $2y-3z=0$

Câu 13: Trong không gian O.xyz cho A(1;2;3) , B(-3; -3;2) Tìm điểm M nằm trên trục hoành sao cho M cách đều hai điểm A, B

A. M(1;0;0) B. M(-1;0;0) C. M(2;0;0) D. M(-2;0;0)

Câu 14: Trong không gian Oxyz cho $(P): x-2y+2z+3=0$, đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-2}{2}$, $d_2: \frac{x-3}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z}{-5}$. Tìm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho MN song song với (P) và khoảng cách từ MN đến (P) bằng 2

A. $M(1;-1;0)$, $N(-3;2;5)$ B. $M(-1;2;-2)$, $N(-3;6;0)$

C. $M(-1;2;-2)$, $N(3;-6;0)$ D. $M(-1;2;2)$, $N(3;6;0)$

Câu 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và song song với đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$.

A. $x-4y-3z=0$ B. $-x+4y-3z=0$ **C.** $x+4y-3z=0$ D. $x+4y-3z+1=0$

Câu 16: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y-2z-1=0$ và hai điểm $A(2;0;0), B(3;-1;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I thuộc mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B và điểm gốc toạ độ O.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$

B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=6$

D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=6$

Câu 17: Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và đường thẳng Δ: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với đường thẳng Δ

A. 2x - y +2z +3 = 0 B. 2x + y +2z +3 = 0 C. 2x - y -2z -3 = 0 D. 2x - y +2z -3 = 0

Câu 18: Trong không gian (Oxyz), cho đường thẳng (d): $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mp(P):x+y+z-3=0. Tìm tọa độ điểm A trên đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) bằng $2\sqrt{3}$

A.(4;-5;2) B.(-2;-7;4) **C.**(4;-5;-2) D.(-2;7;-4).

Câu 19: Trong không gian *Oxyz* cho ba điểm A(1; -2; 3), B(2; 0; 1), C(3; -1; 5). Tính diện tích tam giác ABC

A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 20: Trong không gian toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$. viết phương trình đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của Δ lên mặt phẳng (Oxy).

A. $\begin{cases}x=-t\\y=-3+2t\\z=0\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=t\\y=-3+2t\\z=0\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=t\\y=-3-2t\\z=0\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=-t\\y=-3-2t\\z=0\end{cases}$

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $M(3;5;1)$, $N(-1;1;3)$ và điểm A trên đường thẳng *(d)*: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ sao cho AMN là tam giác cân tại A. Tìm tọa độ điểm A

A. $(12;-5;8)$ B. $(12;5;8)$ C. $(2;-5;8)$ D. $(12;-5;-8)$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;4)$, $B(1;0;0)$. tìm điểm M trên tia Oy sao cho $MA=MB\sqrt{13}$

A. $(0;1;0)$ B. $(0;2;0)$ C. $(0;-2;0)$ D. $(0;3;0)$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-11=0$. Tìm toạ độ tâm H của đường tròn giao tuyến của (P) và (S).

A. $(2;3;-3)$. B. $(2;3;-3)$. **C.** $(2;3;-3)$. D. $(2;3;-3)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mp (P): x + y – 2z – 1 = 0, (Q): 2x – y + z – 5 = 0 và điểm A(2; 1; 1). Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P)

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=1+2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1;\ 0;\ 0)$ và $B(1;\ 2;\ 3)$. Lập phương trình tham số của đường thẳng AB và phương trình mặt cầu có tâm $I(1;\ 1;\ 1)$, tiếp xúc với đường thẳng AB

A. $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2t \\ z=3t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=-3t \end{cases}$

Câu 26 : Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$ trên mặt phẳng (P): x + y – z +1 =0

A. $d':\begin{cases} x=\frac{1}{3}-2t \\ y=-\frac{2}{3}+t \\ z=\frac{2}{3}+3t \end{cases}$ **B.** $d':\begin{cases} x=\frac{1}{3}+2t \\ y=-\frac{2}{3}+t \\ z=\frac{2}{3}+3t \end{cases}$ C. $d':\begin{cases} x=\frac{1}{3}+2t \\ y=-\frac{2}{3}+t \\ z=\frac{2}{3}-3t \end{cases}$ D. $d':\begin{cases} x=\frac{1}{3}+2t \\ y=-\frac{2}{3}-t \\ z=\frac{2}{3}+3t \end{cases}$

Câu 27 : Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm A(2; 1; 5), B(3; 4; 1). Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại B

A. x + 3y – 4z – 11 = 0 B. x - 3y – 4z – 11 = 0 C. x + 3y + 4z – 11 = 0 D. x + 3y – 4z + 11 = 0

Câu 28 : Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm A(2; 1; 5), B(3; 4; 1).Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Oz sao cho M cách đều A và mặt phẳng (Oxy)

A. M(0 ; 0 ; 2) B. M(0 ; 0 ; 1) **C.** M(0 ; 0 ; 3) D. M(0 ; 0 ; 4)

Câu 29 Trong không gian Oxyz ,cho điểm M(0;2;0) và hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình: $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1};\ d_2:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M , song song với trục Ox , sao cho (P) cắt hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt tại A, B sao cho AB = 1

A. - 4 y + z + 8 = 0 B. - 4 x + z -8 = 0 C. - 4 y -z + 8 = 0 D. - 4 y + z - 8 = 0

Câu 30 Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(0;1;0); B(2;2;2); C(−2;3;4) và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{2}$. Tìm M thuộc d sao cho thể tích khối tứ diện MABC bằng 3.

A.(1; 2; -3) **B.**(1; -2; -3) C.(1; -2; 3) D.(1; 2; 3)

ĐÁP ÁN

1A	2B	3C	4D	5D	6B	7D	8A	9B	10C
11D	12B	13A	14A	15C	16D	17A	18C	19A	20B
21A	22A	23C	24D	25C	26B	27A	28D	29A	30B

CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC OXY

Vì để phục vụ cho mục đích Trắc nghiệm nên phần này đã dễ đi khá nhiều so với thi Tự luận 2014,2015, 2016. Thầy sẽ chỉ tập trung vào giới thiệu các vấn đề cơ bản còn Các bài toán nâng cao và hệ thống tính chất – tâm pháp Oxy thì các em hãy đọc trong cuốn Tâm pháp Oxy hoặc sẽ được update ở các Quyển sách phiên bản sau.

A. ĐIỂM

A.1 Xác định tọa độ của một điểm.

Bài toán 1: Tìm tọa độ điểm đối xứng M_1 với M(x;y) qua I(a;b)

(Hay là tìm điểm A khi biết điểm B và trung điểm M của A,B)

Cách làm: Gọi $M_1(x_1;y_1)$. Vì M_1 đối xứng với M qua I(a;b)=> I(a;b) là trung điểm của MM_1

$$\begin{cases} X_1 = 2a - x \\ Y_1 = 2b - y \end{cases}$$

VD1: Tìm M_1 đối xứng với M(1;2) qua I(2;0)

Vì M1 đối xứng với M qua I=> I là trung điểm của MM1.

$$\begin{cases} X_1 = 2a - x = 2.2 - 1 = 3 \\ Y_1 = 2b - y = 2.0 - 2 = -2 \end{cases}$$

Các em thấy bài toán này vô cùng dễ đúng không? Nhìn chung là mọi cái khó đều bắt nguồn từ cái dễ mà.

Bài toán 2: Tìm tọa độ M1 là hình chiếu của M(x;y) trên đường thẳng của d_1

Cách 1: Viết phương trình đường thẳng d_2 qua M(x;y) và vuông góc với đường thẳng d_1 đã cho. Sau đó tìm giao điểm Đường thẳng d_2 với d_1 ta sẽ tìm ra hình chiếu.

Cách 2: Viết phương trình dạng tham số của d_1. Sau đó gọi $M_1(x_1;y_1)$ thuộc d_1 viết theo tọa độ tham số. Sau đó dùng $\overline{MM_1}$ x $\overline{u_{d1}}$ =0. ($\overline{u_{d1}}$:là vecto chỉ phương của d_1)

Các em có thể đọc trước phần đường thẳng để xem dạng phương trình đường thẳng tổng quát, tham số, chính tắc là gì nhé

VD2: Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M(-1;4) trên đường thẳng d:2x-3y+1=0

Cách 1: d:2x-3y+1=0=> vecto pháp tuyến: $\overline{n_{d1}}(2;-3)$; vecto chỉ phương: $\overline{u_{d1}}(3;2)$. Phần này thầy sẽ nói kĩ hơn ở đường thẳng.

Đường thẳng d_1 qua M(-1;4) và vuông góc với d có phương trình dạng:

d_1: 3x+2y+c=0

M(-1;4) thuộc d_1=> 3(-1)+2.4+c=0=>c=-5=>d_1: 3x+2y-5=0

Tọa độ giao điểm I=d cắt d_1:

$$\begin{cases}2x-3y+1=0\\3x+2y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \Leftrightarrow H(1;1)$$

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d:

Vì H thuộc d nên H(t; $\frac{2t+1}{3}$) => $\overrightarrow{MH}(t+1;\frac{2t-11}{3})$ là đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}(3;2)$

$\overrightarrow{MH} \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} \Leftrightarrow$ 3(t+1)+2($\frac{2t-11}{3}$)=0 $\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow H(1;1)$

Bài toán 3: Tìm tọa độ điểm M1 biết M1 đối xứng với M(x;y) qua đường thẳng đã cho.

Cách giải bài toán 3 đơn giản là quy về bài toán 2 ta tìm điểm là hình chiếu và suy ra M1 do H là trung điểm của MM1.

VD3: Tìm tọa độ điểm M_1 đối xứng với M(-1;4) qua đường thẳng d:2x-3y+1=0

Cách 1: Đường thẳng d_1 qua M(-1;4) và vuông góc với d có phương trình dạng:

d_1: 3x+2y+c=0

M(-1;4) thuộc d_1=> 3(-1)+2.4+c=0=>c=-5=>d_1: 3x+2y-5=0

Tọa độ giao điểm I=d cắt d_1:

$$\begin{cases}2x-3y+1=0\\3x+2y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \Leftrightarrow H(1;1)$$

M_1 là đối xứng của M(-1;4) qua H(1;1)=> M_1(3;-2)

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d:

Vì H thuộc d nên H(t; $\frac{2t+1}{3}$) => $\overrightarrow{MH}(t+1;\frac{2t-11}{3})$ là đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}(3;2)$

$\overrightarrow{MH} \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} \Leftrightarrow$ 3(t+1)+2($\frac{2t-11}{3}$)=0

$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow H(1;1)$

M_1 là đối xứng của M(-1;4) qua H(1;1)=> M_1(3;-2)

Bài toán 4: Tìm tọa độ điểm khi biết mối quan hệ vecto.

Cách làm dùng các tính chất cộng, trừ, nhân vecto để tìm điểm M. Làm các ví dụ cho hình dung dễ dàng.

VD 4: Cho A(1; -2); B(0; 4); C(3; 2). Tìm D sao cho:

a. $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}-4\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Giải: Gọi $D(x;y)$

a) Ta có: $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow(x-3;y-2)=2(-2;6)-3(2;4)=)-2;12)-(6;12)$

$\Leftrightarrow(x-3;y-2)=(-8;0)\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=-8\\y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=2\end{cases}$

Vậy D(-5; 2)

b) Ta có: $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BD}-4\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow(x-1;y+2)+2(x;y-4)-4(x-3;y-2)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(x-1;y+2)+(2x;2y-8)+(12-4x;8-4y)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(11-x;2-y)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x=11\\y=2\end{cases}$

Vậy D(11; 2).

VD 5: Cho A(1; -2), B(2; 1), C(-3; 5). Tìm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải: Gọi $D(x;y)$. Điều kiện để ABCD là hình bình hành là:

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow(x-1;y+2)=(-5;4)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-5\\y+2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}$

Vậy D(-4; 2)

VD 6: Cho A(1; -2). Tìm trên Ox điểm M để đường trung trực của AM đi qua gốc tọa độ O.

Giải: Gọi $M(x;0)\in Ox$ và I là trung điểm của AM $\Rightarrow I\left(\frac{x+1}{2};-1\right)$

Vì đường trung trực của AM đi qua gốc tọa độ O nên:

$OI\perp AM\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow\left(\frac{x+1}{2};-1\right)(x-1;2)=0$

$\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{2}-2=0\Leftrightarrow(x-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn: $M_1(3;0)$ và $M_2(-1;0)$

VD 7: Cho A(-1; -3), B(3; 3). Tìm M, N để chia AB thành 3 đoạn có độ dài bằng nhau.

Giải: Theo giả thiết ta có: AM = MN = NB suy ra:

$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}\Rightarrow$ tọa độ M là: $\left(\frac{x_A+\frac{1}{2}x_B}{1+\frac{1}{2}};\frac{y_A+\frac{1}{2}y_B}{1+\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{1}{3};-1\right)$

$\overrightarrow{NA}=-2\overrightarrow{NB}\Rightarrow$ tọa độ N là: $N\left(\frac{x_A+2x_B}{1+2};\frac{y_A+2y_B}{1+2}\right)=\left(\frac{5}{3};1\right)$

Vậy $M\left(\frac{1}{3};-1\right)$ và $N\left(\frac{5}{3};1\right)$

VD 8: Giả sử M(1; 2), N(0; 4) chia AB thành 3 đoạn có độ dài bằng nhau. Tìm tọa độ A, B.

Giải: Theo giả thiết ta có: AM = MN = NB suy ra:

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}\Rightarrow$ tọa độ A là $\left(\frac{x_M-\frac{1}{2}x_N}{1-\frac{1}{2}};\frac{y_M-\frac{1}{2}y_N}{1-\frac{1}{2}}\right)=(2;0)$

$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}\Rightarrow$ tọa độ A là $\left(\frac{x_N-\frac{1}{2}x_M}{1-\frac{1}{2}};\frac{y_N-\frac{1}{2}y_M}{1-\frac{1}{2}}\right)=(-1;6)$

Vậy A(2; 0) và B(-1; 6)

VD 9: Cho A(-2; -6), B(10; 6); C(-11; 0). Gọi M là điểm chia AB theo tỉ số (-3) và N là điểm chia AC theo tỉ số -2. Tìm $I=BN\cap CM$.

Giải: M là điểm chia AB theo tỉ số (-3)

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB}\Rightarrow M\left(\frac{x_A+3x_B}{1+3};\frac{y_A+3y_B}{1+3}\right)\Leftrightarrow M(7;3)$$

N là điểm chia AC theo tỉ số (-2)

$$\Rightarrow \overrightarrow{NA}=-2\overrightarrow{NC}\Rightarrow N\left(\frac{x_A+2x_C}{1+2};\frac{y_A+2y_C}{1+2}\right)\Leftrightarrow N(-8;-2)$$

Giả sử $I(x;y)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IB}//\overrightarrow{IN}\\ \overrightarrow{IC}//\overrightarrow{IM}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{10-x}{x+8}=\frac{6-y}{y+2}\\ \frac{x+11}{7-x}=\frac{y}{3-y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-9y+14=0\\ x-6y+11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

Vậy I(1; 2)

B. ĐƯỜNG THẲNG

1.2 Viết phương trình đường thẳng

Nói đến đường thẳng là nói đến Vecto chỉ phương và vecto pháp tuyến.

Học sinh: Làm thế nào để viết được phương trình đường thẳng?

Thầy: Muốn viết được phương trình đường thẳng các em cần tìm 1 điểm đi qua và vecto pháp tuyến hoặc vecto chỉ phương. Đây là mấu chốt của mọi bài toán tìm phương trình đường thẳng.

Học sinh: Thầy ơi. Vecto pháp tuyến là gì? Vecto chỉ phương là gì? Làm thế nào để chuyển hóa từ vecto pháp tuyến thành vecto chỉ phương?

Vectơ $\vec{u}$ là VTCP của đường thẳng (d) nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với (d)

Vectơ $\vec{n}$ là VTPT của đường thẳng (d) nếu $\vec{n}\neq\vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với (d)

Học sinh: Làm thế nào để chuyển hóa từ vecto pháp tuyến thành vecto chỉ phương?

Chuyển từ VTCP sang VTPT và ngược lại:

Nếu (d) có VTCP $\vec{u} = (a;b)$ thì (d) có VTPT là $\vec{n} = (-b;a)$

Nếu (d) có VTPT là $\vec{n} = (A;B)$ thì (d) có VTCP $\vec{u} = (-B;A)$

Học sinh: Nếu có được VTPT hoặc VTCP và một điểm đi qua thì viết đường thẳng như thế nào ạ?

- Nếu đường thẳng (d) biết $\begin{cases} vtcp\ \vec{u} = (a;b) \\ \text{qua } M(x_0;y_0) \end{cases} \Rightarrow$

Phương trình tham số của (d) là: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

Phương trình chính tắc của (d) là $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ *Trong trường hợp a=0 hoặc b=0 đường thẳng (không có phương trình chính tắc)*

Nếu đường thẳng (d) biết $\begin{cases} vtpt\ \vec{n} = (a;b) \\ \text{qua } M(x_0;y_0) \end{cases} \Rightarrow$ Phương trình tổng quát của (d) là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Nói đến phương trình tổng quát là nói đến vecto pháp tuyến, nói đến phương trình chính tắc và tham số là nói đến vecto chỉ phương.

Học sinh: Vậy làm thế nào để tìm được Vecto chỉ phương hoặc pháp tuyến và một điểm đi qua.

Thầy: Các em xem qua một số bài toán quen thuộc sau và đọc ví dụ để hiểu thêm chi tiết.

- ✓ **Bài toán 1:** Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A(xa;ya), B(xb;yb)=> Vecto AB chính là vecto chỉ phương và có 1 điểm đi qua là A hoặc B. Tư đó dễ dàng viết được phương trình đường thẳng.
- ✓ **Bài toán 2:** Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm và biết vecto pháp tuyến hoặc chỉ phương=> thầy đã trả lời ở trên.
- ✓ **Bài toán 3:** Viết phương trình đoạn chắn đi qua 2 điểm A(a;0), B(0;b)
    - ⇨ Các em viết phương trình đoạn chắn luôn: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ hoặc không nhớ thì viết phương trình AB khi biết hai điểm kết quả vẫn không thay đổi.

✓ **Bài toán 4:** Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm Song song hoặc Vuông góc với một đường thẳng cho trước.=> thì các em cũng sẽ biết được Vecto chỉ phương và vecto pháp tuyến của nó và một điểm đi qua về vẽ.

Hãy nhớ Phương trình đường thẳng có 3 loại chính và một trường hợp đặc biệt.

Phương trình tổng quát	$Ax+By+C=0$	*Từ phương trình này => VTPT (A;B), VTCP (B;-A)* *Một điểm đi qua A(0;-C/B) với B khác không.*
Phương trình tham số	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$	*VTCP (a;b) và VTPT(b;-a)* *Một điểm đi qua là M(x0;y0)*
Phương trình chính tắc	$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$	*VTCP (a;b) và VTPT(b;-a)* *Một điểm đi qua là M(x0;y0)*
Phương trình đoạn chắn	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	*VTCP (a;-b) và VTPT(b;a)* *Một điểm đi qua là A(a;0) hoặc B(0;b)*

Từ phương trình tổng quát có thể suy ra phương trình tham số, phương trình chính tắc và ngược lại. Tại sao lại vậy??? vì từ vecto pháp tuyến sẽ dễ dàng suy ra chỉ phương và ngược lại nên khi có 1 điểm đi qua và vecto pháp tuyến hoặc 1 điểm đi qua thì các em dễ dàng làm được.

1.3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

Cho (d_1): $a_1x+b_1y+c_1=0$

(d_2): $a_2x+b_2y+c_2=0$

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} (I)$$

- Hệ (I) có 1 nghiệm (x_0;y_0) ⇔ (d_1)cắt (d_2) tại điểm M(x_0;y_0)
- Hệ (I) vô số nghiệm ⇔ (d_1) trùng (d_2)
- Hệ (I) vô nghiệm ⇔ (d_1)// (d_2). ((d_1) và (d_2) không có điểm chung)

Bài toán 1: Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm $M_1(x_1;y_1)$ và $M_2(x_2;y_2)$

Phương pháp: (d)$\begin{cases} qua\ M_1(x_1;y_1) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1) \end{cases} \Rightarrow (d)\begin{cases} qua\ M_1(x_1;y_1) \\ \text{VTPT } \vec{n}=(y_1-y_2;x_2-x_1) \end{cases}$

VD10: Viết phương trình đường thẳng d biết: Qua A(1;2); B(3;4)

Lời giải : Do (d) đi qua A và B nên (d): $\begin{cases} qua\ \text{A}(1;2) \\ vtcp\ \overrightarrow{\text{AB}}(2;2) \end{cases}$

$\Rightarrow$Phương trình tham số của (d) là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

(d): $\begin{cases} qua\ \text{A}(1;2) \\ vtpt\ \vec{n}(2;-2) \end{cases}$ $\Rightarrow$Phương trình tổng quát của (d): 2(x-1)-2(y-2)=0$\Leftrightarrow 2x-2y+2=0$ $\Leftrightarrow x-y+1=0$

Bài toán 2: Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm và biết vecto pháp tuyến hoặc chỉ phương

Giả sử bài toán nó cho phương trình đường thẳng: Ax+By+C=0=> các em phải suy ra ngay Vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (A;B)$ và vecto chỉ phương là: $\vec{u} = (\text{B};-A)$

Giả sử bài toán nó cho phương trình đường thẳng dạng tham số:

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$

thì các em phải suy ra ngay: Vecto chỉ phương là $\vec{u} = (\text{a};\text{b})$ và vecto pháp tuyến là $\vec{n} = (-\text{b};\text{a})$

Phương pháp: (d)$\begin{cases} qua\ M_0(x_0;y_0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (A;B) \\ \text{VTCP } \vec{u} = (\text{B};-A) \end{cases}$

VD11: Viết phương trình đường thẳng d qua A(-3;2) và song song với $(\Delta): 2x - y - 1 = 0$

Lời giải : Δ có VTPT là $\vec{n} = (2;-1)$

d// Δ nên d có VTPT là $\vec{n} = (2;-1) \Rightarrow (d)\begin{cases} qua\ \text{A}(-3;2) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (2;-1) \end{cases}$

d có phương trình tổng quát là: 2(x+3)-1(y-2)=0$\Leftrightarrow$2x-y+8=0

VD12: Viết phương trình tổng quát, phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng (d) trong các trường hợp sau:

a) (d) đi qua điểm M(1;-2) và có vtcp $\vec{u}$=(2;-1).

b) (d) đi qua điểm A(3;2) và vuông góc với (d_1):5x+2y-1=0

Lời giải:

a) Ta có: (d): $\begin{cases} qua\ M(1;-2) \\ vtcp\ \vec{u}(2;-1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình tham số của (d) là: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-t \end{cases}$

(d): $\begin{cases} qua\ M(1;-2) \\ vtpt\ \vec{n}(1;2) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của (d): 1(x-1)+2(y+2)=0 $\leftrightarrow$ (d): x+2y+3=0

Phương trình chính tắc của (d) là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1}$

b) (d): $\begin{cases} qua\ A(3;2) \\ \perp d_1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} qua\ A(3;2) \\ vtcp\ \overrightarrow{n_{d_1}}(5;2) \end{cases}$ $\Rightarrow$ phương trình tham số của (d): $\begin{cases} x = 3+5t \\ y = 2+2t \end{cases}$

(d) $\begin{cases} qua\ A(3;2) \\ vtpt\ \vec{n}(2;-5) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của (d): 2(x-3)-5(y-2)=0 $\Leftrightarrow 2x-5y+4=0$

Phương trình chính tắc của (d): $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{2}$

1.4. Các bài toán liên quan đến góc và khoảng cách

1.3.1. Kiến thức liên quan

a. Góc giữa hai đường thẳng:

Định nghĩa: Hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau tạo thành 4 góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó là góc giữa 2 đường thẳng (d_1) và (d_2). Kí hiệu (d_1, d_2)

Suy ra, góc giữa hai đường thẳng luôn bằng hoặc kề bù với góc giữa hai VTPT (hoặc góc giữa hai VTCP).

Nếu (d_1): $a_1x+b_1y+c_1=0$, (d_2): $a_2x+b_2y+c_2=0$ thì

$$\cos(d_1,d_2) = \left|\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Chú ý:

* $(d_1)\perp(d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

* Nếu (d_1) và (d_2) lần lượt có dạng $y=k_1x+m_1$ và $y=k_2x+m_2$ thì $(d_1)\perp(d_2) \Leftrightarrow \overline{k_1}.\overline{k_2}=-1$

b. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Cho (d): ax+by+c=0 và điểm $M(x_0;y_0)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng (d):

$$d(M,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Chú ý: * Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) là:

- Là khoảng cách từ M đến M' là hình chiếu của M lên (d)
- Là khoảng cách ngắn nhất từ M đến 1 điểm bất kỳ thuộc (d)

* Cho (d): ax+by+c=0 và hai điểm $M(x_0;y_0)$, $N(x_1;y_1)$.

Đặt t = $(ax_0+by_0+c)(ax_1+by_1+c)$

- Nếu t < 0 thì M, N nằm về hai phía của (d).
- Nếu t>0 thì M, N nằm cùng một phía với (d).

Một số bài toán liên quan đến viết phương trình đường thẳng khi biết hệ số góc, góc, khoảng cách như sau :

✓ **Bài toán 5:** Viết phương trình đi qua 1 điểm và có hệ số góc k.=> các e cần biết hệ số góc là gì? Nếu đường thẳng được viết có dạng $y=kx+m$ thì k là hệ số góc. Từ đó dễ dàng biết được phương trình đường thẳng.

✓ **Bài toán 6:** Viết phương trình đường thẳng biết đi qua một điểm và tạo với một đường thẳng khác một góc=> nhiệm vụ của chúng ta là tìm Vecto pháp tuyến hoặc chỉ phương. Dùng công thức góc giữa 2 đường thẳng để làm.

✓ **Bài toán 7:** Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm A và biết khoảng cách từ một điểm B đã cho đến đường thẳng đó.=> Dùng công thức khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng để làm.

✓ **Bài toán 8:** Viết phương trình đường thẳng đối xứng qua một đường=> Cách làm ta lấy 2 điểm đối xứng qua đường thẳng đã cho và viết đường thẳng cần tìm đi qua 2 điểm vừa tìm được.

Các em hiểu được cách làm rồi thì đọc và thử làm ví dụ để THỰC CHIẾN nhé !

VD 13: a) Tìm góc giữa 2 đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=3t\\y=2-t\end{cases}$ và $d_2: x-2y-4=0$

b) Tính khoảng cách từ M(-2;3) đến $d:\begin{cases}x=3-2t\\y=1+t\end{cases}$

Đây là bài toán áp dụng công thức về góc và khoảng cách=> dễ dàng giải quyết được. Các em làm nhé!

Hướng dẫn giải: a) d_1 có VTCP $\vec{u}=(3;-1)\Rightarrow$ VTPT $\vec{n_1}=(1;3)$

d_2 VTPT $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$

$$\cos(d_1,d_2)==\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|1.1+3.(-2)|}{\sqrt{1+9}.\sqrt{1+4}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow (d_1,d_2)=45^0$

b) d $\begin{cases} qua\ \text{A}(3;1) \\ VTPT\ \ \vec{n}=(1;2) \end{cases} \Rightarrow d:1(x-3)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$

$$d(M,d)=\frac{|-2+2.3-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

VD 14: Viết phương trình đường thẳng d qua M(0;1) và tạo với d: $x+2y+3=0$ một góc 45^0

Bài này một bài toán mà các em cần phải tìm vecto pháp tuyến hoặc vecto chỉ phương thì mới làm được tiếp. Bài này các em chú ý cách làm nhé!

Hướng dẫn giải: Δ là đường thẳng $\begin{cases} qua\ M(0;1) \\ VTPT\ \vec{n}=(\text{A;B}),\ \text{A}^2+\text{B}^2\neq 0 \end{cases}$

d có VTPT là $\overrightarrow{n_1}=(1;2)$

$$\cos(\Delta,d)=\cos45^0 \Leftrightarrow \frac{|A.1+B.2|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{1+4}}=\cos45^0 \Leftrightarrow \frac{|A+2B|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 5(A^2+B^2)=2(A+2B)^2 \Leftrightarrow 3A^2-8AB-3B^2=0 \Leftrightarrow (A-3B)(3A+B)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=3B \\ 3A=-B \end{array}\right.$$

*) A=3B: chọn A=3 $\Rightarrow$B=1$\Rightarrow \Delta:3(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y-1=0$

*) 3A=-B: chọn A=1 $\Rightarrow$B=-3$\Rightarrow \Delta:1(x-0)-3(y-1)=0 \Leftrightarrow x-3y+3=0$

Vậy có 2 đường thẳng: $\left[\begin{array}{l} 3x+y-1=0 \\ x-3y+3=0 \end{array}\right.$

VD 15: Cho hai đường thẳng $d_1:2x-y+5=0;d_2:3x+6y-1=0$. Lập phương trình đường thẳng qua P(2;-1), d cắt $d_1;d_2$ tạo thành 1 tam giác cân tại giao điểm d_1 và d_2.

Bài toán này các em phải viết được dạng tổng quát của đường thẳng và dùng tính chất của tam giác cân – là 2 góc ở đáy bằng nhau.

Hướng dẫn giải: Giả sử d có VTPT $\vec{n}$=(A;B), $A^2+B^2 \neq 0$

d là đường thẳng $\begin{cases} qua\ P(2;-1) \\ VTPT\ \vec{n}=(A;B),\ A^2+B^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow d: A(x-2)+B(y+1)=0$

Tam giác cân tại giao điểm của d_1 và d_2 nên $(d;d_1)=(d;d_2)$

$$\cos(d,d_1)=\cos(d,d_2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{|A.2+B.(-1)|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{4+1}}=\frac{|3.A+6.B|}{\sqrt{9+36}.\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow 3|2A-B|=|3A+6B| \Leftrightarrow |2A-B|=|A+2B|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2A-B=A+2B \\ 2A-B=-(A+2B) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=3B \\ 3A=-B \end{array}\right.$$

*) A=3B Chọn A=3 thì B=1 $\Rightarrow d: 3(x-2)+1(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+y-5=0$

*) 3A=-B chọn A=1 thì B=-3 $\Rightarrow d: 1(x-2)-3(y+1)=0 \Leftrightarrow x-3y-5=0$

VD 16: Cho hình vuông, 1 đỉnh có tọa độ (-4; 5) và đường chéo có phương trình 7x-y+8=0. Lập phương trình các cạnh.

Bài này tương tự cách làm bài trên – các em thực hành chú ý nhé

Hướng dẫn giải: Gọi A(-4; 5) và d: 7x-y+8=0 , do $A \notin d \Rightarrow BD: 7x-y+8=0$

Lập phương trình đường thẳng Δ qua A tạo với BD 1 góc 45^0

Giả sử Δ có VTPT $\vec{n}=(A;B)$ với $A^2+B^2 \neq 0$

$$Cos45^0=\frac{|7.A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{49+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|7A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}.\sqrt{50}}$$

$$\Leftrightarrow (7A-B)^2=25(A^2+B^2) \Leftrightarrow 12A^2-7AB-12B^2=0$$

$$\Leftrightarrow (3A-4B)(4A+3B)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3A=4B \\ 4A=-3B \end{array}\right.$$

*) 3A=4B, chọn A=4 thì B=3 $\Rightarrow \Delta: 4(x+4)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow 4x+3y+1=0$

*) 4A=-3B, chọn A=3 thì B=-4 $\Rightarrow \Delta: 3(x+4)-4(y-5)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+32=0$

Chọn AB: $4x+3y+1=0$

AD: $3x-4y+32=0$

$B=AB\cap BD\Rightarrow B(-1;1)$

$D=AD\cap BD\Rightarrow D(0;8)\Rightarrow$ Tâm $I(-\frac{1}{2};\frac{9}{2})$

I là trung điểm của AC nên: $\begin{cases}x_C=2.\left(-\frac{1}{2}\right)-(-4)=3\\ y_C=2.\frac{9}{2}-5=4\end{cases}\Rightarrow C(3;4)$

CD: $\begin{cases}qua\ C(3;4)\\ //\ AB\end{cases}\Rightarrow CD:\begin{cases}qua\ C(3;4)\\ VTPT\ \ \vec{n}=(4;3)\end{cases}$

CD: $4(x-3)+3(y-4)=0\Leftrightarrow 4x+3y-24=0$

BC: 3x-4y+7=0

Vậy phương trình các cạnh: 4x+3y+1=0 3x-4y+32=0

4x+3y-24=0 3x-4y+7=0

VD 17: Cho tam giác ABC, A(3;2), B(1;6), C(-5;3). Tính chiều cao h_a

Hướng dẫn giải: $h_a=d(A,BC)$

$BC:\begin{cases}qua\ B(1;6)\\ VTCP\ \ \overrightarrow{BC}=(-6;-3)\end{cases}\Rightarrow BC:\begin{cases}qua\ B(1;6)\\ VTPT\ \ \vec{n}=(1;-2)\end{cases}$

$\Rightarrow BC:1(x-1)-2(y-6)=0\Leftrightarrow x-2y+11=0$

$h_a=d(A,BC)=\dfrac{|3-2.2+11|}{\sqrt{1+4}}=2\sqrt{5}$

VD 18: Tìm M thuộc $\Delta:\begin{cases}x=1\\ y=3+t\end{cases}$ để $d(M,\Delta')=\sqrt{2}$ với $\Delta':x+y+1=0$

Hướng dẫn giải: $M\in\Delta\Rightarrow M(1;3+t)$

$$d(M,\Delta')=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|1+3+t+1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|t+5|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t+5=2\\t+5=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=-7\end{array}\right.$$

*) $t=-3\Rightarrow M(1;0)$

*) $t=-7\Rightarrow M(1;-4)$

VD 19: Cho tam giác ABC, A(2;-3), B(3;-2), trọng tâm G thuộc $\Delta:3x-y-8=0$. Tìm tọa độ C để $S_{ABC}=\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải: Vì $G\in\Delta\Rightarrow G(a;3a-8)$

G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_B+x_C=3x_G\\y_A+y_B+y_C=3y_G\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=3x_G-x_A-x_B=3a-2-3\\y_C=3y_G-y_A-y_B=9a-24+3+2\end{cases}$$

C(3a-5;9a-19)

$$S_{ABC}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.CH.AB=\frac{3}{2}\Leftrightarrow d(C,AB).AB=3\ (1)$$

$$\overrightarrow{AB}=(1;1)\Rightarrow AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$AB:\begin{cases}qua\ \text{A(2;-3)}\\VTCP\ \ \overrightarrow{AB}=(1;1)\end{cases}\Leftrightarrow AB:\begin{cases}qua\ \text{A(2;-3)}\\VTPT\ \ \vec{n}=(1;-1)\end{cases}$$

$$AB:1(x-2)-1(y+3)=0\Leftrightarrow x-y-5=0$$

$$d(C,AB)=\frac{|3a-5-(9a-19)-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-6a+9|}{\sqrt{2}}$$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{|-6a+9|}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=3\Leftrightarrow|6a-9|=3\Leftrightarrow|2a-3|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a-3=1\\2a-3=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=1\end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm: $C_1(1;-1);C_2(-2;-10)$

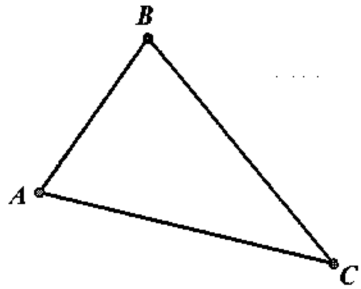
Sau khi đã luyện tập các bài toán ở trên, các em luyện tập đến những bài toán tiếp theo. Những bài toán trong Đề thi đại học ở mức độ dễ dàng các em có thể làm được nếu các em học chắc kiến thức ở trên.

Tuy nhiên kiến thức thế vẫn chưa đủ nếu các em không biết Tam giác là gì? Các tính chất của các đường phân giác, đường trung tuyến, đường cao, đường trung trực, đường trung bình,....

Thôi dài dòng quá, thầy bắt đầu vào KIẾN THỨC TAM GIÁC

C. KIẾN THỨC TAM GIÁC

Tam giác: tam theo tiếng Tàu khựa là ba có nghĩa là hình có 3 cạnh, 3 đỉnh, 3 góc.



Tổng 3 góc bằng 180°: $A+B+C=180^o$

Tổng 2 cạnh lớn hơn cạnh còn lại: AB+BC>AC; AC+BC>AB; AC+AB>BC

C.1 Phân loại tam giác

+ Tam giác vuông: tam giác là tam giác có 1 góc vuông

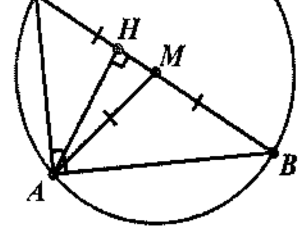
+ Tam giác cân: là tam giác có hai cạnh bằng nhau hoặc 2 góc bằng nhau

+ Tam giác đều: là tam giác có 3 cạnh bằng nhau hoặc 3 góc bằng nhau

+ Tam giác nhọn: là tam giác có 3 góc nhỏ hơn 90^0

+ Tam giác tù: là tam giác có 1 góc lớn hơn 90^0

C.1.1 Tam giác vuông



Tam giác vuông là tam giác có 1 góc vuông.

Với tam giác ABC vuông tại A=> MA =MB=MC=BC/2=R

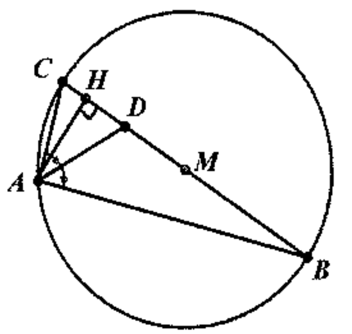
(R : là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Nếu tam giác ABC có tính chất MA =MB=MC=BC/2=R=> tam giác ABC vuông tại A.

Một loạt tính chất khác có thể suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

Hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính toán các đoạn thẳng sau này:

- ✓ Pitago: $AB^2+AC^2=BC^2$ (bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương 2 cạnh bên)
- ✓ Trung tuyến AM: MA =MB=MC=BC/2=R
- ✓ Diện tích tam giác vuông: $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}AH.BC \Rightarrow AH=\frac{AB.AC}{BC}$
- ✓ Đường cao AH bằng cách: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$
- ✓ Có AH thì ta dễ dàng tính được HB,HC dựa vào Pitago. $\begin{matrix} HB^2=AB^2-AH^2 \\ HC^2=AC^2-AH^2 \end{matrix}$
- ✓ Phân giác AD của tam giác vuông:



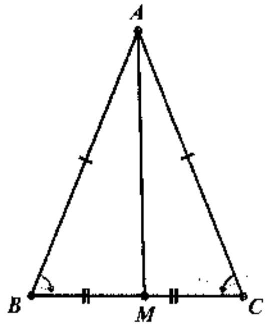
- ✓ Ta có $\frac{CD}{AC}=\frac{DB}{AB}=\frac{BC}{AC+AB}$ => tính được DC, DB. Và tính được HD, HC, HB.
- ✓ Ta tính được phân giác AD từ $AD^2=HD^2+AH^2$

Nhìn chung là cho bất kỳ dữ kiện nào khi biết 2 cạnh của tam giác vuông ta sẽ suy ra các dữ kiện còn lại để tính toán sau này.

Học sinh: Muốn chứng minh tam giác đó là tam giác vuông thì làm thế nào?

Thầy: Thì có thể dựa vào Pitago, tính chất trung tuyến, tính chất tích 2 vecto bằng 0….đọc kĩ một số tính chất và cách tính các khoảng cách trong tam giác vuông nhé. Đây là kiến thức từ những năm cấp 2 nhưng sẽ rất hữu ích cho các em đó trong việc áp dụng khoảng cách để tìm điểm sau này.

C.1.2 Tam giác cân



Tính chất tam giác cân ABC tại A=> AB=AC ; $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

M là trung điểm BC => AM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến, vừa là đường phân giác và vừa là đường trung trực của cạnh BC.

Học sinh: Muốn chứng minh tam giác vuông ta phải làm thế nào?

Thầy: Ngoài chứng minh 2 cạnh bằng nhau hoặc 2 góc bằng nhau thì cần chú ý dưới đây.

Chú ý: Nếu tam giác ABC có AM vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến hoặc vừa đường phân giác, đường trung trực của cạnh BC thì đó là tam giác cân.

C.1.3 Tam giác đều

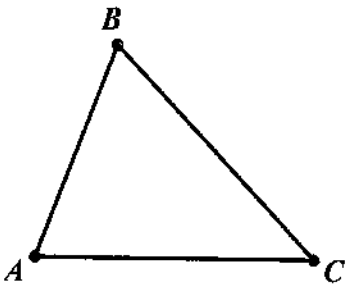
Tam giác đều là tam giác đặc biệt nhất: có 3 góc bằng nhau = 60^0, có 3 cạnh bằng nhau.

Các đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác, đường trung trực, đường phân giác trong TRÙNG nhau.

Các điểm đặc biệt: trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp TRÙNG nhau.

Ta dễ dàng tính được diện tích và chu vi tam giác đều khi biết cạnh của tam giác đều. Diện tích $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$*, Chu vi C=3a (a: là độ dài cạnh của tam giác đều).*

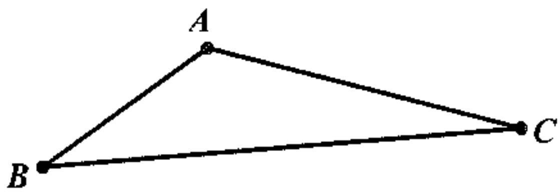
C.1.4 Tam giác nhọn



Tam giác nhọn: là tam giác có 3 góc nhỏ hơn 90^0.

C.1.5 Tam giác tù

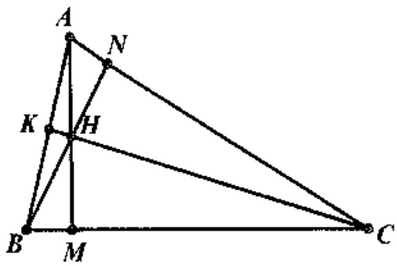
Tam giác tù: là tam giác có 1 góc lớn hơn 90^0



Chúng ta đã biết về tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông tuy nhiên bài toán lại rơi vào tam giác thường nhiều hơn ☹

C.2 Các đường đặc biệt trong tam giác:

C.2.1Đường cao



Đường cao AH là đường cao hạ từ A

Đường cao BN là đường cao hạ từ B

Đường cao CK là đường cao hạ từ C

$AM \cap BN \cap BK = H$ => H là trực tâm của Tam giác ABC.

Hãy nhớ Trực tâm là giao điểm của các Đường cao.

Chỉ cần 2 đường cao là ta vẽ được trực tâm rồi nên không cần phải vẽ đủ 3 đường cao.

Tính chất rất quan trọng của trực tâm:

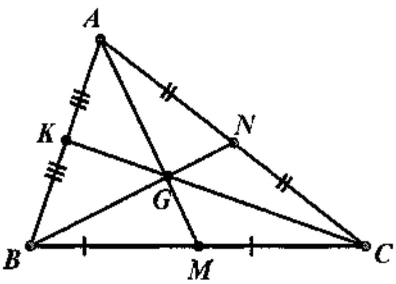
+Nếu Đường cao AH là đường cao hạ từ A

+Đường cao BN là đường cao hạ từ B

+ $AM \cap BN = H$

- ⇨ *CH (CK) chính là đường cao hạ từ C và* $CK \perp AB$
- ⇨ *Đây là một trong những cách chứng minh Tính chất VUÔNG GÓC quan trọng sau này*

C.2.2 Đường trung tuyến



Cách vẽ đường trung tuyến là kẻ từ ĐỈNH đến Trung điểm cạnh đối diện. Tam giác có 3 đỉnh=> có 3 đường trung tuyến.

Đường AMlà đường trung tuyến hạ từ A

Đường BN là đường trung tuyến hạ từ B

Đường CK là đường trung tuyến hạ từ C

$AM \cap BN \cap CK = G$=> G là trọng tâm – giao điểm các đường trung tuyến.

Các em hãy nhớ: G là trọng tâm là giao điểm các đường trung tuyến.

Chỉ cần 2 đường trung tuyến là ta vẽ được trọng tâm rồi nên không cần phải vẽ đủ 3 đường trung tuyến.

Tính chất rất quan trọng của trọng tâm:

- Đường AM là đường trung tuyến hạ từ A
- Đường BN là đường trung tuyến hạ từ B
- $AM \cap BN = G$

⇨ *CG (CK) chính là đường trung tuyến hạ từ C và K chính là trung điểm của AB. Đây là một trong những cách chứng minh Tính chất trung điểm quan trọng sau này*

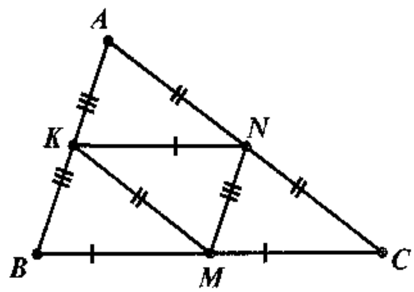
Tính chất cơ bản về đường trung tuyến

$AG = \frac{2}{3}AM = 2GM$

$BG = \frac{2}{3}BN = 2GN$

$CG = \frac{2}{3}CK = 2CK$

C.2.3 Đường trung bình



Đường trung bình là nối trung điểm 2 cạnh với nhau. Tam giác có 3 cạnh nên sẽ tạo thành 3 đường trung bình.

Tính chất đường trung bình:

MN= AK=KB=AB/2 và MN song song AB.

MK=AN=CN=AC/2 và MK song song với AC

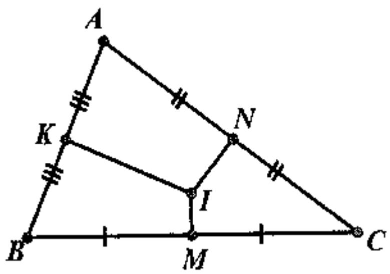
NK=BM=CM=BC/2 và NK song song với BC

Nhìn vào hình vẽ các em sẽ suy luận ra rất nhiều tính chất của đường trung bình.

Diện tích tam giác: $S_{\Delta MNK} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$

Cách học nhanh nhất của việc NHỚ TÍNH CHẤT là vẽ hình và Tư duy => đừng nhớ máy móc khó nhớ lắm.

C.2.4 Đường trung trực



Đường trung trực của cạnh BC là đường vuông góc với cạnh BC tại điểm M

Đường trung trực của cạnh AC là đường vuông góc với cạnh AC tại điểm N

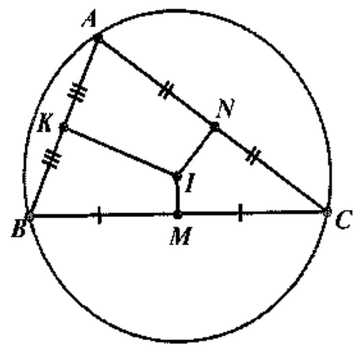
Đường trung trực của cạnh AB là đường vuông góc với cạnh AB tại điểm K

Giao điểm của các đường trung trực là điểm I – tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Học sinh: Đường tròn ngoại tiếp là gì?

NGOẠI có nghĩa là ngoài ☺ nhớ thế cho nhanh nhưng chú ý nó đi qua 3 đỉnh.

Đường tròn ngoại tiếp là đường tròn nằm ngoài tam giác và đi qua 3 đỉnh của tam giác.



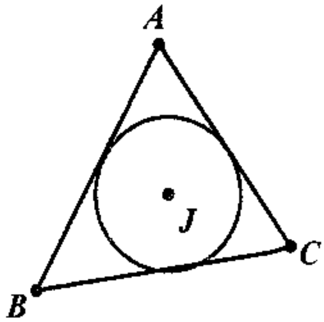
IA=IB=IC=R

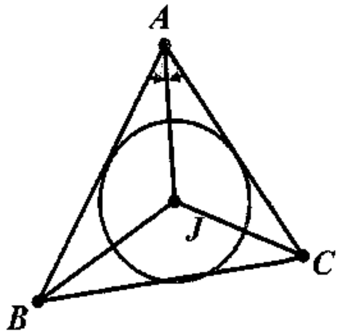
R: là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tính bán kính R như thế nào? Ta dùng công thức $S = \frac{abc}{4R}$ với S là diện tích tam giác ABC; còn a;b;c là độ dài các cạnh.

Học sinh: Phân biệt đường tròn ngoại tiếp với đường tròn nội tiếp tam giác ABC ở dưới đây.

Đường tròn nội tiếp tam giác là đường tròn NẰM BÊN TRONG tam giác và tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác.





Khoảng cách từ J đến đường AB,BC,BC là bằng nhau và bằng bán kính r.

r: là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Tính bán kính r như thế nào? Ta dùng công thức S=pr với S là diện tích tam giác ABC; còn a;b;c là độ dài các cạnh.

P: nửa chu vi tính bằng chu vi chia 2: $p=\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{2}$

Chú ý: **Tâm đường tròn nội tiếp J** là giao điểm các **đường phân giác trong.** Bây h chúng ta học combo về đường Phân giác.

C.2.5 Đường phân giác

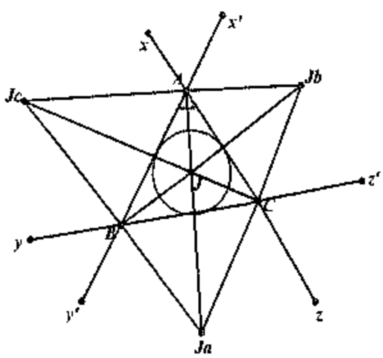
Đường phân giác là đường chia góc đó làm 2 phần bằng nhau.

Đường phân giác chia làm 2 loại: Phân giác trong và phân giác ngoài

Nào các em cùng thầy phân biệt đâu là phân giác trong phân giác ngoài nhé!

Nhìn góc A ta dễ dàng thấy: AJ chính là **phân giác trong** của góc A

AJ_b, AJ_c chính là **phân giác ngoài** của góc A.



Giao điểm của 3 đường phân giác trong là Tâm đường tròn nội tiếp tam giác (J)

Giao điểm của 1 đường phân giác trong và 2 đường phân giác ngoài là tâm đường tròn bàng tiếp.

Ta dễ dàng nhận thấy có 3 tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC là đường tròn nằm ngoài tam giác và tiếp xúc với các cạnh của tam giác (như hình vẽ).

Chú ý đường phân giác trong vuông góc với đường phân giác ngoài.

$\begin{matrix} AJ \perp AJ_b \\ AJ \perp AJ_c \end{matrix}$ tương tự thế $BJ \perp BJ_a, BJ_c$ và $CJ \perp CJ_a, CJ_b$

Tính chất thẳng hàng:

A, J,Ja thẳng hàng

B, J, Jb thẳng hàng

C, J,Jc thẳng hàng

Tính r, ra, rb, rc như thế nào?
$$\begin{aligned} r &= \frac{S}{p} \\ r_a &= \frac{S}{p-a} = p.\tan\frac{A}{2} \\ r_b &= \frac{S}{p-b} = p.\tan\frac{B}{2} \\ r_c &= \frac{S}{p-c} = p.\tan\frac{C}{2} \end{aligned}$$

Tính chất rất quan trọng của tâm đường tròn bàng tiếp và tâm đường tròn nội tiếp:

- Đường AJ à đường phân giác trong của góc A
- Đường BJ là đường phân giác trong của góc B
  - ⇨ *CJ chính là đường phân giác trong C. Đây là một trong những cách chứng minh Tính chất Phân giác quan trọng sau này*

Đường AJ (Aja) là đường phân giác trong của góc A

Đường BJa là đường phân giác ngoài của góc B

⇨ CJ là đường phân giác ngoài của góc C. Đây là một trong những cách chứng minh Tính chất phân giác sau này

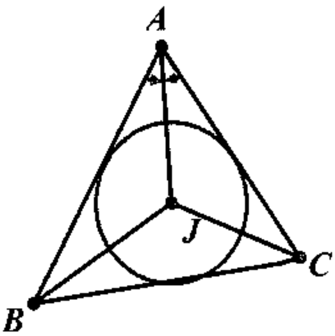
***Học sinh:** Viết đường phân giác trong và ngoài như thế nào ạ???*

Cho $\begin{cases} \Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0;\ \overrightarrow{n_1} = (a_1; b_1) \\ \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0;\ \overrightarrow{n_2} = (a_2; b_2) \end{cases}$ cắt nhau thì phương trình 2 đường phân giác

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Dấu hiệu	Phân giác góc nhọn	Phân giác góc tù
$a_1a_2+b_1b_2>0$	$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$	$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$
$a_1a_2+b_1b_2<0$	$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$	$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

Làm thế nào để phân biệt chính xác đó là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của tam giác?



Xem 2 đỉnh nó nằm cùng phía hay khác phía với đường phân giác đã cho.

Nếu nằm khác phía: là phân giác trong

Nếu nằm cùng phía: là phân giác ngoài.

Cho (d): ax+by+c=0 và hai điểm $M(x_0;y_0)$, $N(x_1;y_1)$.

Đặt t = $(ax_0+by_0+c)(ax_1+by_1+c)$

- Nếu t < 0 thì M, N nằm về hai phía của (d).
- Nếu t>0 thì M, N nằm cùng một phía với (d).

Học sinh: *Thầy ơi thế làm sao để tính các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác.... Tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp.....*

Thầy: *Các em cần nhớ lại kiến thức cuối cấp 2 và đầu cấp 3 mà cụ thể là lớp 9,10 về hệ thức lượng trong tam giác thường.*

Quy ước thế này nhé các em! Cho tam giác ABC có:

- ✓ Độ dài các cạnh: BC = a, CA = b, AB = c
- ✓ Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C: m_a, m_b, m_c
- ✓ Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C: h_a, h_b, h_c
- ✓ Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
- ✓ Nửa chu vi tam giác: p
- ✓ Diện tích tam giác: S

1. Định lí Cosin: $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{aligned}$$
2. Định lí Sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
3. Độ dài trung tuyến: $$\begin{aligned} {m_a}^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ {m_b}^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ {m_c}^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{aligned}$$
4. Diện tích tam giác: $$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ S &= \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C \\ S &= \frac{abc}{4R} \\ S &= pr \\ S &= \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

C.3 CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

Học sinh : *Trọng tâm là gì ? Trực tâm là gì ? tâm đường tròn ngoại tiếp là gì ? tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp là gì ?*

- ✓ Trực tâm : là giao điểm các đường cao
- ✓ Trọng tâm : Giao điểm các đường trung tuyến
- ✓ Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác: giao điểm các đường trung trực
- ✓ Tâm đường tròn nội tiếp tam giác: giao điểm các đường phân giác trong
- ✓ 3 tâm đường tròn bàng tiếp tam giác: giao điểm 1 đường phân giác trong và 2 phân giác ngoài.

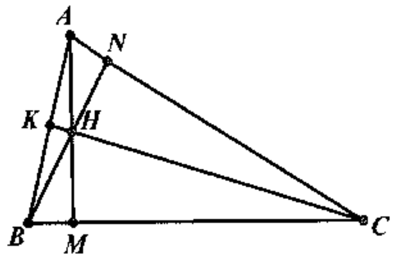
LÝ THUYẾT VỀ TAM GIÁC VỀ CƠ BẢN ĐÃ XONG.

GIỜ CHÚNG TA BẮT ĐẦU VÀO THỰC CHIẾN

Bài toán liên quan đến TRỰC TÂM- các đường cao.

VD 1: Cho tam giác ABC, A(2;2), B(-1;6),C(5;5). Viết phương trình các đường cao và tìm tọa độ trực tâm H.

Bình luận: *H là trực tâm – giao điểm các đường cao. Mình cần tìm viết phương trình ít nhất 2 đường cao và cho chúng cắt nhau là ra H.*



Hướng dẫn giải

$$+AH:\begin{cases}qua\ \text{A(2;2)}\\ VTPT\ \ \overline{BC}=(6;-1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow AH:6(x-2)-1(y-2)=0\Leftrightarrow 6x-y-10=0$$

$$+\ BH:\begin{cases}qua\ \text{B(-1;6)}\\ VTPT\ \ \overline{AC}=(3;3)\end{cases}\Rightarrow BH:3(x+1)+3(y-6)=0\Leftrightarrow x+y-5=0$$

$$*)\,CH:-3x+4y-5=0$$

$$*)\,H=AH\cap BH\Rightarrow H\left(\frac{15}{7};\frac{20}{7}\right)$$

VD 2: Tam giác ABC, A(4;1), 2 đường cao xuất phát từ đỉnh B và C lần lượt có phương trình là: $-2x+y+8=0;2x+3y-6=0$. Viết phương trình đường cao AH, tìm tọa độ B, C.

Bình loạn: Các em chịu khó đọc bình loạn này nhé bởi sẽ gợi ý cho các em nhiều thứ.

Đọc đề bài coi như ta đã biết phương trình 2 đường cao? Nhưng nó là đường cao nào? Ta cần phải xem có phải là đường cao AM, hay BN hay CK

B1: ta thay tọa độ A vào phương trình các đường đã cho nhận thấy nó khác 0 => 2 đường cao đó là: BN,CK

B2: Giao điểm 2 đường cao là trực tâm H.

B3: Viết phương trình đường thẳng AH đi qua 2 điểm A, H.

B4: Ta có thể dễ dàng viết được đường AC, đi qua điểm A và vuông góc với BN

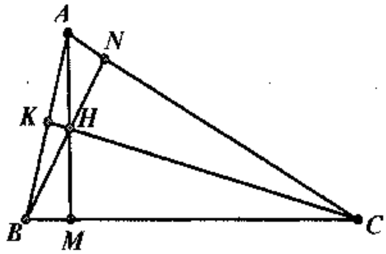
Viết đường AB qua A và vuông góc với CK .

Sau đó B chính là giao điểm giữa BN và AB.

Và C chính là giao điểm giữa CK và AC.

B6: Viết phương trình đường BC khi biết 2 điểm B,C

Hoặc là viết phương trình đường BC qua B và vuông góc với đường AH.



Bình loạn:

A(4;1) không thuộc 2x+3y-6=0 do 2.4+3.1-6≠0

Gọi BI: -2x+y+8=0; CK: 2x+3y-6=0

$$H = BI \cap CK \Rightarrow H\left(\frac{15}{4};-\frac{1}{2}\right)$$

$$AH:\begin{cases} qua\ \text{A}(4;1) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{AH} = (-\frac{1}{4};-\frac{3}{2}) \end{cases} \Rightarrow AH:\begin{cases} qua\ \text{A}(4;1) \\ VTPT\ \ \overrightarrow{n_{AH}} = (6;-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AH: 6(x-4)-1(y-1)=0 \Leftrightarrow 6x-y-23=0$$

*) AB: $\begin{cases} qua\ \text{A} \\ \perp\ \text{CK} \end{cases} \Rightarrow AB:\begin{cases} qua\ \text{A}(4;1) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{n_{CK}} = (2;3) \end{cases} \Rightarrow AB:\begin{cases} qua\ \text{A}(4;1) \\ VTPT\ \ \vec{n} = (3;-2) \end{cases}$

$$AB: 3(x-4)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2y-10=0$$

$$B = AB \cap BI \Rightarrow B(6;4)$$

*) AC: $\begin{cases} qua\ \text{A} \\ \perp\ \text{BI} \end{cases} \Rightarrow AC:\begin{cases} qua\ \text{A}(4;1) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{n_{BI}} = (-2;1) \end{cases} \Rightarrow AC:\begin{cases} qua\ \text{A}(4;1) \\ VTPT\ \ \overrightarrow{n_1} = (1;2) \end{cases}$

$$AB: 1(x-4)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-6=0$$

$$C = AC \cap CK \Rightarrow C(-6;6)$$

VD 3: Cho tam giác ABC có A(2;2), hai đường cao xuất phát từ đỉnh B và C lần lượt có phương trình là: $9x-3y-4=0; x+y-2=0$. Viết phương trình đường các cạnh và tính diện tích của tam giác.

***Bình loạn :** Bài này tương tự như bài trên nhưng tăng mức độ khó hơn vì đòi hỏi thêm các em tính toán Diện tích. Nhưng nhìn chung khi các e tìm được điểm B,C thì viết phương trình các cạnh ko còn là chuyện khó khăn nữa ☺*

Lời giải : Phương trình các cạnh AB: x-y=0, BC: 7x+5y-8=0, CA: x+3y-8=0

$S=\frac{1}{2}AC.d(B,AC)$; $B=AB\cap BH \Rightarrow B(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$; C(-1;3)

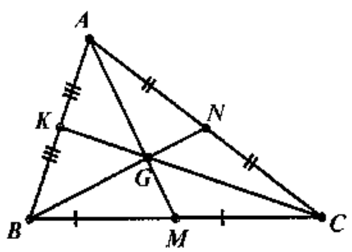
$\overrightarrow{AC}(-3;1) \Rightarrow AC=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

$$d(B,AC)=\frac{\left|\frac{2}{3}+3.\frac{2}{3}-8\right|}{\sqrt{1+9}}=\frac{16}{3\sqrt{10}}$$

$$S=\frac{1}{2}AC.d(B,AC)=\frac{1}{2}.\sqrt{10}.\frac{16}{3\sqrt{10}}=\frac{8}{3}$$

Bài toán liên quan đến Đường trung tuyến và trọng tâm

VD 4: Cho tam giác ABC, C(-4;1), phương trình các đường trung tuyến AM: 2x-y+3=0; BN:x+y-6=0. Viết phương trình các cạnh của tam giác.



***Bình loạn:** Có rất nhiều cách xử lý bài này. Muốn viết phương trình 3 cạnh tam giác thì ta cần tìm 3 đỉnh của tam giác.*

Lời giải : $B\in BN \Rightarrow B(b;-b+6)$

M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(\frac{b-4}{2};\frac{-b+7}{2})$

$$M\in AM \Leftrightarrow 2.\frac{b-4}{2}-\frac{-b+7}{2}+3=0 \Leftrightarrow 2b-8+b-7+6=0 \Leftrightarrow 3b=9 \Leftrightarrow b=3$$

B(3;3), $A \in AM \Rightarrow A(a;2a+3)$

N là trung điểm của AC$\Rightarrow N(\frac{a-4}{2};\frac{2a+4}{2})$

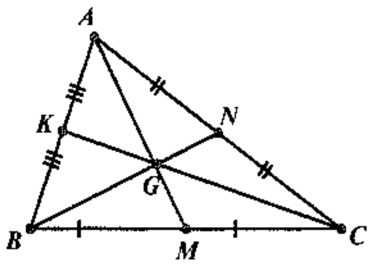
$N \in BN \Leftrightarrow \frac{a-4}{2}+\frac{2a+4}{2}-6=0 \Leftrightarrow a-4+2a+4-12=0 \Leftrightarrow 3a=12 \Leftrightarrow a=4$

A(4;11)

Cách 2: từ tọa độ của G và M ta có tọa độ của A

AB: $8x-y-21=0$; BC: $2x-7y+15=0$; CA: $5x-4y+24=0$

VD 5: Cho tam giác ABC, phương trình cạnh AB:x-2y+7=0, phương trình các đường trung tuyến AM: x+y-5=0; BN:2x+y-11=0. Viết phương trình các cạnh AC,BC của tam giác.



Bình loạn: *Bài này khá dễ dàng*

A = AM∩AB; B=BN∩AB; G=AM∩BN

G là trọng tâm tam giác ABC=> điểm C.

Lời giải: $A=AB\cap AM \Rightarrow A(1;4)$

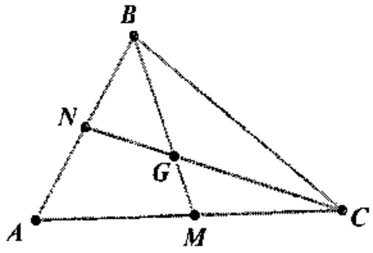
$B=AB\cap BN \Rightarrow B(3;5)$

$G=AM\cap BN \Rightarrow G(6;-1)$

G là trọng tâm tam giác ABC nên C(3.6-1-3;3.(-1)-4-5)$\Rightarrow$C(14;-12)

AC: $16x+13y-68=0$; BC: $17x+11y-106=0$

VD 6: Cho tam giác ABC, trọng tâm G, đỉnh A(3;9), hai đường trung tuyến BM:3x-4y+9=0; CN: y-6=0. Viết phương trình trung tuyến AG, tìm tọa độ B,C?



Bình loạn: *G=BMxCN .Dễ dàng viết AG khi biết đi qua 2 đỉnh A,G. Tham số hóa điểm C theo đường CN=> Biến đổi M theo điểm A,C.*

Cho M thuộc đường BM=> giải được điểm C. Từ G,A,C=> điểm B.

Lời giải: $G = BM \cap CN \Rightarrow G(5;6)$

AG: $\begin{cases} qua\ \text{A}(3;9) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{AG} = (2;-3) \end{cases} \Rightarrow AG: \begin{cases} qua\ \text{A}(3;9) \\ VTPT\ \ \vec{n} = (3;2) \end{cases}$

$AG: 3(x-3)+2(y-9)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-27=0$

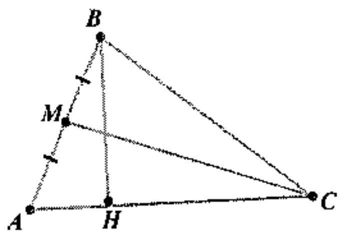
$C \in CN \Rightarrow C(c;6)$

M là trung điểm của AC $\Rightarrow M(\frac{c+3}{2};\frac{15}{2})$

$M \in BM \Leftrightarrow 3.\frac{c+3}{2} - 4.\frac{15}{2} + 9 = 0 \Leftrightarrow 3c+9-60+18=0 \Leftrightarrow 3c=33 \Leftrightarrow c=11$

C(11;6);B(3.5-3-11;3.6-9-6)$\Rightarrow$B(1;3)

VD 7. Cho tam giác A(4;3), đường cao BH:3x-y+11=0, đường trung tuyến CM:x+y-1=0. Viết phương trình các cạnh của tam giác.



Bình loạn: *Từ đường cao=> nghĩ ngay đến cạnh vuông góc với đường cao đó.*

Ta dễ dàng viết được đường AC khi biết A và vuông góc với BH.

C=ACxCM. Tham số hóa B theo BH=> M là trung điểm của AB.

M thuộc CM=> tìm được B.

Lời giải: AC$\begin{cases} qua\ A \\ \perp BH \end{cases} \Rightarrow AC \begin{cases} qua\ A(4;3) \\ VTPT\quad \bar{n}=(1;3) \end{cases}$

$\Rightarrow AC: 1(x-4)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y-13=0$

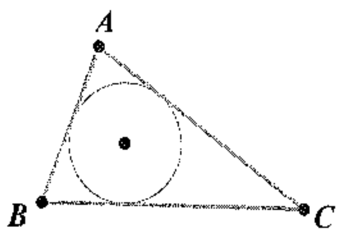
$C = AC \cap CM \Rightarrow C(-5;6)$

$B \in BH \Rightarrow B(b;3b+11) \Rightarrow M(\frac{b+4}{2};\frac{3b+14}{2})$

$M \in CM \Leftrightarrow \frac{b+4}{2}+\frac{3b+14}{2}-1=0 \Leftrightarrow b+4+3b+14-2=0 \Leftrightarrow 4b=-16 \Leftrightarrow b=-4$

$\Rightarrow$B(-4;-1)=> AB: $x-2y+2=0$; BC: $7x+y+29=0$; CA: $x+3y-13=0$

VD 8 : Cho tam giác ABC, vuông tại A; BC:x-y-2=0, A, B thuộc Ox, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác r=3. Tìm tọa độ trọng tâm G.



Bình loạn: *AB thuộc Ox=> sẽ có phương trình AB: y=0*

B=AB x BC.

Tham số hóa A theo Ox và C theo phương trình BC. => 2 ẩn. Nhiệm vụ của ta là cần tìm 2 phương trình 2 ẩn là xong.

Phương trình 1: AB vuông góc AC=> $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0$

Phương trình 2: Bài này mấu chốt các em sử dụng công thức S=pr.

S: diện tích tam giác ABC. P: nửa chu vi; Từ đó sẽ tìm được

Lời giải: AB: y=0

$B = AB \cap BC \Rightarrow B(2;0)$

$C \in BC \Rightarrow C(c;c-2)$; $A \in Ox \Rightarrow A(a;0)$; $a \neq 2$

$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (a-c)(a-2)+(2-c).0 = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow G(\frac{2c+2}{3};\frac{c-2}{3})$

$S = p.r \Leftrightarrow \frac{1}{2}AC.AB = \frac{1}{2}(AB+BC+CA).r$ (1)

$AC = |c-2|; AB = |c-2|; BC = \sqrt{(c-2)^2+(c-2)^2} = |c-2|.\sqrt{2}$

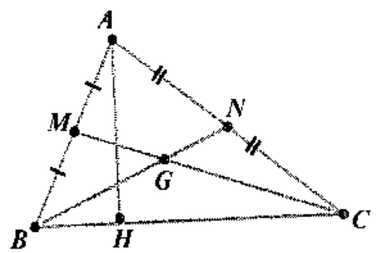
$(1) \Leftrightarrow |c-2|.|c-2| = (|c-2|+|c-2|+|c-2|.\sqrt{2}).3$

$\Leftrightarrow t^2 = (2+\sqrt{2})t.3 \Leftrightarrow t^2 - 3(2+\sqrt{2})t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t = 6+3\sqrt{2} \end{array}\right.$

*)t=0 $\Leftrightarrow |c-2| = 0 \Leftrightarrow c = 2$ loại (do c=a$\neq 2$)

*) $t = 6+3\sqrt{2} \Leftrightarrow |c-2| = 6+3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 8+3\sqrt{2} \Rightarrow G(6+2\sqrt{2};2+\sqrt{2}) \\ c = -4-3\sqrt{2} \Rightarrow G(-2-2\sqrt{2};-2-\sqrt{2}) \end{array}\right.$

VD 9: Cho tam giác ABC, M(-1;3) là trung điểm của AB, trung tuyến BN: x-3y+5=0; đường cao AH: 2x-y+5=0. Tìm tọa độ A, B, C.



Bình loạn: *Tham số hóa điểm A theo AH.*

Tham số hóa điểm B theo M và A.

B thuộc NB=> tìm được B.

Viết đường BC qua B và vuông góc với AH.

Tham số hóa C theo BC.

Cho N là trung điểm AC thuộc BN=> tìm ra C.

Lời giải: $A \in AH \Rightarrow A(a;2a+5)$

M là trung điểm của AB nên B(2.(-1)-a;2.3-2a-5)$\Rightarrow B(-a-2;-2a+1)$

$B \in NB \Leftrightarrow -a-2+6a-3+5=0 \Leftrightarrow 5a=0 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow A(0;5);B(-2;1)$

BC: $1(x+2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y=0$

$C \in BC \Rightarrow C(-2c;c)$; N là trung điểm của AC$\Rightarrow N(-c;\dfrac{c+5}{2})$

$N \in NB \Leftrightarrow -c-3.\dfrac{c+5}{2}+5=0 \Leftrightarrow -2c-3c-5+10=0$

$\Leftrightarrow -5c=-5 \Leftrightarrow c=1 \Rightarrow C(-2;1)$

Đường phân giác và tâm đường tròn nội tiếp tam giác

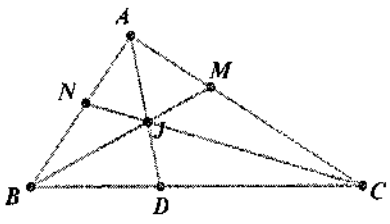
Bài toán phụ: Cho tam giác ABC, BK là đường phân giác trong của góc ABC, A_1 là điểm đối xứng với A qua BK. Chứng minh rằng: $A_1 \in BC$

Xét $\Delta ABI = \Delta A_1BI\left(C.G.C\right) \Rightarrow \angle IBA = \angle IBA_1$

Mà $\angle IBA = \angle IBC\left(gt\right) \Rightarrow \angle IBA_1 = \angle IBC \Rightarrow A_1 \in BC$

Hãy nhớ rằng: Lấy đối xứng đỉnh của tam giác qua đường phân giác trong (ngoài)

VD 10: Cho tam giác ABC, phương trình cạnh AB: 2x+y-5=0; BC: x+2y+2=0; CA: 2x-y+9=0.Viết phương trình các đường phân giác trong của A, B và tìm tâm, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.



Bình loạn: *Bài này là bài đơn thuần sử dụng công thức.*

Đầu tiên các em tìm được 3 đỉnh của tam giác. Sau đó viết đường thẳng AB,AC,BC. Đến bước viết phương trình đường phân giác trong và ngoài

Dùng tính chất cùng phía, khác phía để xác định phân giác trong và phân giác ngoài.

Lời giải: $A = AB \cap AC \Rightarrow A\left(-1;7\right)$

$B = AB \cap BC \Rightarrow B\left(4;-3\right)$

$C = BC \cap AC \Rightarrow C(-4;1)$

*) Các đường phân giác của góc B

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|x+2y+2|}{\sqrt{1+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y-5 = x+2y+2 \\ 2x+y-5 = -x-2y-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-7=0(l_1) \\ x+y-1=0(l_2) \end{array}\right.$$

Với (l_1): $(-1-7-7)(-4-1-7) > 0$

$\Rightarrow$ Đường phân giác trong của góc B là $(l_2): x+y-1=0$

*) Các đường phân giác của góc A:

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2x-y+9|}{\sqrt{4+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y-5 = 2x-y+9 \\ 2x+y-5 = -2x+y-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-7=0(l_3) \\ x+1=0(l_4) \end{array}\right.$$

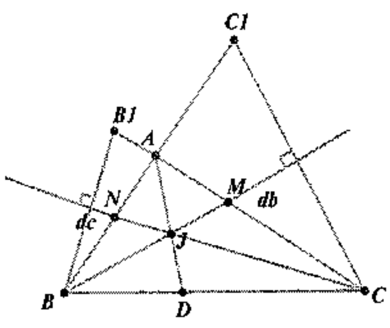
Với (l_3): $(-3-7)(1-7) > 0$

$\Rightarrow$ Đường phân giác trong của góc A là $(l_4): x+1=0$

$I = (l_2) \cap (l_4) \Rightarrow I(-1;2)$

$$r = d(I, AB) = \frac{|2.(-1)+2-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

VD 11: Cho tam giác ABC. phương trình cạnh BC: 4x-y-3=0; các đường phân giác trong kẻ từ B,C lần lượt có phương trình: $d_B: x-2y+1=0; d_C: x+y+3=0$. Viết phương trình cạnh AB, AC.



Bình loạn: *ta dễ dàng tìm được B = BC ∩ DB*

Ta nhớ tính chất của phân giác. Nếu lấy đối xứng B_1 của B qua dC thì B_1 sẽ thuộc đường AC.=> khi đó ta sẽ tìm được B_1 và đường AC (qua B1 và C).

Nếu lấy đối xứng C_1 của C qua dB thì C_1 sẽ thuộc AB.=> khi đó ta sẽ tìm được C_1 và đường AB (qua B và C_1).

Lời giải: $B = BC \cap (d_B) \Rightarrow B(1;1)$

$B = BC \cap (d_C) \Rightarrow C(0;-3)$

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua d_C, E là trung điểm của BB_1

$$BB_1\begin{cases} qua\ \text{B} \\ \perp d_C \end{cases} \Rightarrow BB_1\begin{cases} qua\ \text{B}(1;1) \\ VTPT\ \ \overrightarrow{n_{BB_1}} = (1;-1) \end{cases} \Rightarrow BB_1 : 1(x-1)-1(y-1)=0 \Leftrightarrow x-y=0$$

$$E = BB_1 \cap (d_C) \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$$

E là trung điểm của $BB_1 \Rightarrow B_1\left(2.(-\frac{3}{2})-1;2.(-\frac{3}{2})-1\right) \Rightarrow B_1(-4;-4)$

$$AC\begin{cases} qua\ \text{C}(0;-3) \\ qua\ \text{B}_1(-4;-4) \end{cases} \Rightarrow AC\begin{cases} qua\ \text{C}(0;-3) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{CB_1} = (-4;-1) \end{cases}$$

AC: 1(x-0)-4(y+3)=0 ⇔ x-4y-12=0

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua d_B, F là trung điểm của CC_1

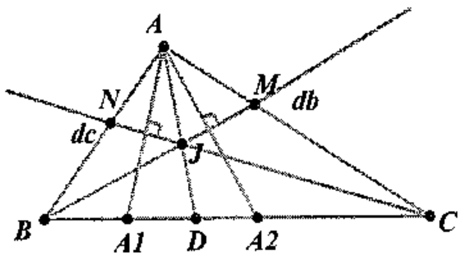
$$\Rightarrow CC_1 : 2(x-0)+1(y+3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+3=0$$

$$F = CC_1 \cap (d_B) \Rightarrow F\left(-\frac{7}{5};-\frac{1}{5}\right)$$

Vì F là trung điểm của $CC_1 \Rightarrow C_1\left(2.(-\frac{7}{5})-0;2.(-\frac{1}{5})+3\right) \Rightarrow C_1\left(-\frac{14}{5};\frac{13}{5}\right)$

AB: 8x+19y-27=0

VD 12: Cho tam giác ABC, A(2;-4), các đường phân giác trong kẻ từ B,C lần lượt có phương trình: $d_B : x+y-2=0; d_C : x-3y-6=0$. Viết phương trình cạnh BC.



Bình loạn: *Tính chất quen thuộc của đường phân giác.*

Lấy A1 đối xứng với A qua dc thì A1 sẽ thuộc BC

Lấy đối xứng với B qua db thì A2 sẽ thuộc BC.

Từ 2 điểm A1, A2 ta sẽ viết được đường BC.

Lời giải: Gọi Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua d_B, D là trung điểm của AA_1

$\Rightarrow AA_1: x-y-6=0$

$D = AA_1 \cap (d_B) \Rightarrow D(4;-2) \Rightarrow A_1(6;0)$

Gọi A_2 là điểm đối xứng với A qua d_C, E là trung điểm của AA_2

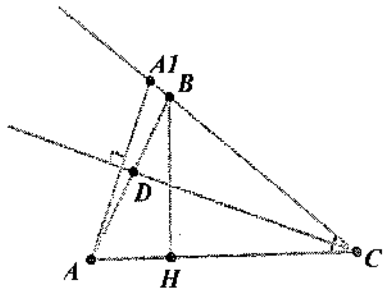
$\Rightarrow AA_2: 3x+y-2=0$

$E = AA_2 \cap (d_C) \Rightarrow D\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right) \Rightarrow A_2\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$

$$BC\begin{cases} qua\ \mathrm{A}_1(6;0) \\ qua\ \mathrm{A}_2\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)\end{cases} \Rightarrow BC\begin{cases} qua\ \mathrm{C}(6;0) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{A_1A_2} = (-\frac{28}{5};\frac{4}{5})\end{cases}$$

BC: $1(x-6)+7(y-0)=0 \Leftrightarrow x+7y-6=0$

VD 13: Cho tam giác ABC, A(-1;3), đường cao BH: y=x,đường phân giác trong CD có phương trình: $x+3y+2=0$. Viết phương trình cạnh BC.



Bình luận: *Viết đường AC qua A và vuông góc với BH.*

C=AC x CD. Dùng tính chất đường phân giác: Lấy đối xứng A1 của A qua phân giác CD thì A1 sẽ thuộc đường BC. Từ A1 và C ta sẽ dễ dàng viết được đường BC.

Lời giải: $AC\begin{cases} qua\ \text{A(-1;3)} \\ \perp BH \end{cases} \Rightarrow AC\begin{cases} qua\ \text{A(-1;3)} \\ VTPT\ \ \bar{n}=(1;1) \end{cases}$

$\Rightarrow AC: 1(x+1)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$

$C=CD\cap AC \Rightarrow C(4;-2)$

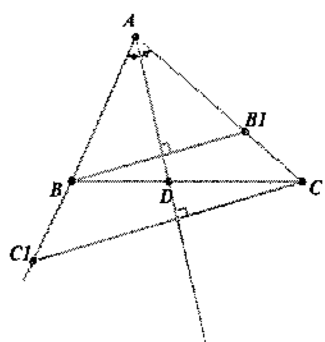
Gọi Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua CD, D là trung điểm của AA_1

$\Rightarrow \text{AA}_1: 3x-y+6=0$

$D=\text{AA}_1\cap CD \Rightarrow D(-2;0) \Rightarrow A_1(-3;-3)$

$BC\begin{cases} qua\ \text{C}(4;-2) \\ qua\ \text{A}_1(-3;-3) \end{cases}$ BC: $x-7y-18=0$

VD 14: Cho tam giác ABC, B(3;5),C(4;-3),đường phân giác trong AD có phương trình: $x+2y-8=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.



Bình loạn: *Viết dễ dàng đường BC (đi qua 2 điểm B,C)*

Đây là một bài khá dễ nếu các e biết cách làm quen thuộc khi gặp đường phân giác. Hãy nhớ là lấy đối xứng.

B1 đối xứng với B qua AD=> B1 thuộc AC=> từ B1 và C ta sẽ viết được đường AC.

C1 đối xứng với C qua AD => C1 thuộc AB => Từ C1 và B ta sẽ viết được đường AB.

Lời giải: $BC\begin{cases} qua\ C(4;-3) \\ qua\ B(3;5) \end{cases} \Rightarrow BC\begin{cases} qua\ B(3;5) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{BC}=(1;-8) \end{cases}$

BC: $8(x-3)+1(y-5)=0 \Leftrightarrow 8x+y-29=0$

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua AD, D là trung điểm của BB_1

$\Rightarrow BB_1: 2(x-3)-1(y-5)=0 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$

$D = BB_1 \cap AD \Rightarrow D(2;3)$

D là trung điểm của $BB_1 \Rightarrow B_1(2.2-3;2.3-5) \Rightarrow B_1(1;1)$

$AC\begin{cases} qua\ C(4;-3) \\ qua\ B_1(1;1) \end{cases} \Rightarrow AC\begin{cases} qua\ B_1(1;1) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{CB_1}=(-3;4) \end{cases}$

AC: 4(x-1)+3(y-1)=0 $\Leftrightarrow$ 4x+3y-7=0

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua AD, E là trung điểm của CC_1

$\Rightarrow CC_1: 2(x-4)-1(y+3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-11=0$

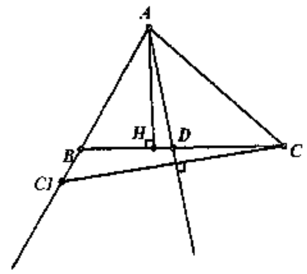
$E = CC_1 \cap AD \Rightarrow E(6;1)$

E là trung điểm của $CC_1 \Rightarrow C_1(2.6-4;2.1+3) \Rightarrow C_1(8;5)$

$AB\begin{cases} qua\ B(3;5) \\ qua\ C_1(8;5) \end{cases} \Rightarrow AB\begin{cases} qua\ B(3;5) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{BC_1}=(5;0) \end{cases}$

AB: 1(y-5)=0 $\Leftrightarrow$ y-5=0

VD 15: Cho tam giác ABC, C(-3:1), đường phân giác trong AD: $x+3y+12=0$, đường cao AH: $x+7y+32=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.



Bình loạn: *Dễ dàng tìm được điểm A= AHxAD.*

Viết đường BC qua C và vuông góc với AH.

Tìm được điểm C1 đối xứng với C qua AD => C1 thuộc AB.

Ta sẽ dễ dàng viết được đường AB qua 2 điểm A, C1.

Lời giải: $A = AD \cap AH \Rightarrow A(3;-5)$

$$BC\begin{cases} qua\ \text{C(-3;1)} \\ \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC: 7(x+3)-1(y-1)=0 \Leftrightarrow 7x-y+22=0$$

$$AC\begin{cases} qua\ \text{C} \\ qua\ \text{A} \end{cases} \Rightarrow AB\begin{cases} qua\ \text{C}(-3;1) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{AC}=(-6;6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC: 1(x+3)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2=0$$

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua AD, E là trung điểm của CC_1

$$\Rightarrow CC_1: 3(x+3)-1(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-y+10=0$$

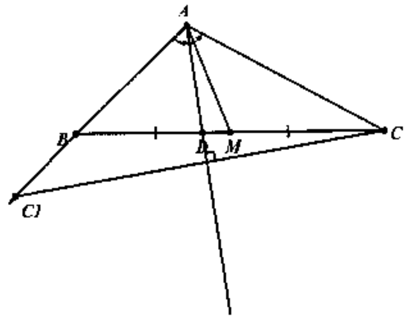
$$E = CC_1 \cap AD \Rightarrow E\left(-\frac{21}{5};-\frac{13}{5}\right)$$

E là trung điểm của $CC_1 \Rightarrow C_1\left(2.(-\frac{21}{5})+3;2.(-\frac{13}{5})-1\right) \Rightarrow C_1\left(-\frac{27}{5};-\frac{31}{5}\right)$

$$AB\begin{cases} qua\ \text{A}(3;-5) \\ qua\ C_1\left(-\frac{27}{5};-\frac{31}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow AB\begin{cases} qua\ \text{A}(3;-5) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{C_1A}=(\frac{42}{5};\frac{6}{5}) \end{cases}$$

AB: $1(x-3)-7(y+5)=0 \Leftrightarrow x-7y-38=0$

VD 16: Cho tam giác ABC, C(4;3), đường phân giác trong AD: $x+2y-5=0$, đường trung tuyến AM: $4x+13y-10=0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.



Bình loạn: *Dễ dàng tìm được điểm A =ADxAM*

Tìm điểm C1 đối xứng với C qua AD=> C1 thuộc AB.

Viết phương trình đường AB qua A và C1.

Tham số hóa điểm B theo AB.

Tham số hóa điểm M theo B,C và cho M thuộc AM=> tìm được B.

Lời giải: $A = AD \cap AM \Rightarrow A(9;-2)$

$$AC\begin{cases} qua\ C(4;3) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{AC}=(-5;5) \end{cases}$$

AC: $1(x-4)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow x+y-7=0$

*) Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua AD, D là trung điểm của CC_1

$\Rightarrow CC_1: 2(x-4)-1(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-5=0$

$D = CC_1 \cap AD \Rightarrow D(3;1)$

D là trung điểm của $CC_1 \Rightarrow C_1(2.3-4;2.1-3) \Rightarrow C_1(2;-1)$

$$AB\begin{cases} qua\ A(9;-2) \\ qua\ C_1(2;-1) \end{cases} \Rightarrow AB\begin{cases} qua\ C(2;-1) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{C_1A}=(7;-1) \end{cases}$$

AB: $1(x-2)+7(y+1)=0 \Leftrightarrow x+7y+5=0$

$B \in AB \Rightarrow B(-7b-5;b)$

M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(\frac{-7b-1}{2};\frac{b+3}{2})$

$M \in AM \Rightarrow 4.\left(\frac{-7b-1}{2}\right)+13.\frac{b+3}{2}-10=0 \Leftrightarrow -28b-4+13b+39-20=0$

$\Leftrightarrow b=1 \Rightarrow B(-12;1)$

$$BC\begin{cases} qua\ \mathrm{C}(4;3) \\ qua\ \mathrm{B}(-12;1) \end{cases} \Rightarrow AB\begin{cases} qua\ \mathrm{C}(4;3) \\ VTCP\ \ \overrightarrow{CB}=(-16;-2) \end{cases}$$

BC: $1(x-4)-8(y-3)=0 \Leftrightarrow x-8y+20=0$

TỨ GIÁC

- ✓ Tứ giác có thể chia thành tứ giác lồi, tứ giác lõm.
- ✓ Tứ giác có thể chia thành: hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.
- ✓ Tứ giác chia làm tứ giác nội tiếp và không nội tiếp.

Đặc biệt trong đề thi chuyển cấp lớp 9 lên 10 và 12 luyện thi đại học thì kiến thức về tứ giác nội tiếp là vô cùng quan trọng.

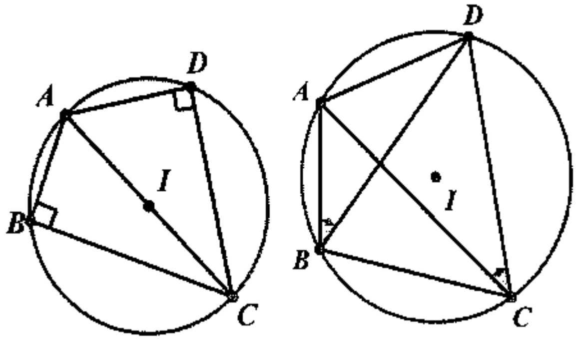
Các em bắt đầu học về Tứ giác nội tiếp nhé!

2.2.1 Tứ giác nội tiếp

Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp: đây chính là cách để chứng minh tứ giác nội tiếp.

- ✓ Tứ giác có tổng hai góc đối nhau bằng 180
- ✓ Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó.
- ✓ Tứ giác có bốn đỉnh cách đều 1 điểm. Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- ✓ Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới 1 góc.

ABCD là tứ giác nội tiếp=> $ABD=ACD$; $ADB=ACB\ldots$

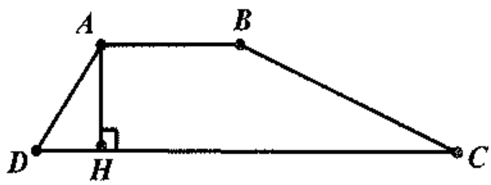


Những bài như trên rất hay áp dụng trong đề thi THPT quốc gia nên các em nhớ kỹ: $B = D = 90^o$ => tứ giác ABCD nội tiếp=> $ABD = ACD$; $ADB = ACB$...

Tiếp theo các em cần phải học thêm về các loại hình tứ giác: hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi và hình vuông cho vững kiến thức.

Cách học các loại hình này=> các cần vẽ được hình vẽ đó và suy ra một số tính chất quen thuộc, cách tính diện tích+ chu vi+ một số đại lượng quen thuộc.

2.2.2 Hình thang



AB: đáy nhỏ.

CD: đáy lớn

AD,BC là cạnh bên.

Phân loại: Hình thang cân, Hình thang vuông, hình thang thường

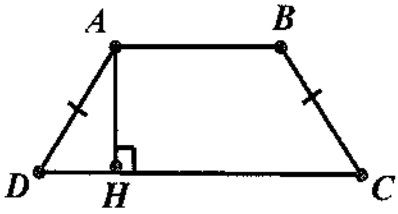
Tính chất hình thang:

AB//CD. (Từ đó sẽ suy ra các góc so le, góc đồng vị bằng nhau).

Diện tích: $S = \frac{1}{2} AH.(AB + CD)$

Chu vi: Tổng 4 cạnh C=AB+BC+CD+AD

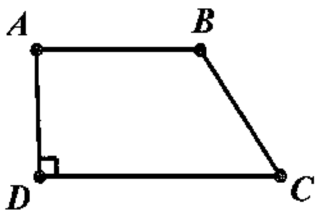
Hình thang cân



Hình thang cân: là hình thang có 2 cạnh bên bằng nhau hoặc 2 góc ở đáy bằng nhau.

Tính chất: AD=BC; $A = B; C = D$

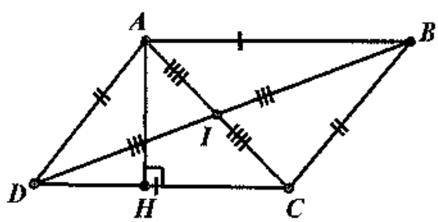
Hình thang vuông



Hình thang vuông: là hình thang 2 góc vuông

Tính chất: $A = D = 90^o$

2.2.3 Hình bình hành



ABCD là hình bình hành

Tính chất: AB song song và bằng CD.

AD song song và bằng BC

AC cắt BD tại trung điểm I của mỗi đường.

Các góc sole, đồng vị bằng nhau thì quá nhiều rồi.

Diện tích: $S = AH.AB$ **. Cách nhớ để đỡ lẫn là dùng cách ghép tam giác.**

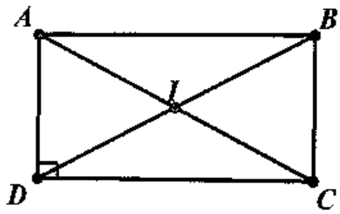
Chu vi: C= 2(AB+BC)

Vậy làm thế nào để chứng minh là hình bình hành? Chứng minh bằng cách dùng tính chất.

Ví dụ tứ giác ABCD có AB song song và bằng CD=> tứ giác ABCD là hình bình hành.

Ví dụ tứ giác ABCD có AC và BD cắt tại trung điểm I của mỗi đường=> tứ giác ABCD là hình bình hành.

2.2.4 Hình chữ nhật



ABCD là hình chữ nhật.

Tính chất: $A = B = C = D = 90^o$

AB song song và bằng CD.

AD song song và bằng BC

AC cắt BD tại trung điểm I của mỗi đường.

Phân biệt hình chữ nhật và hình bình hành=> đó là các góc ở các đỉnh bằng 90

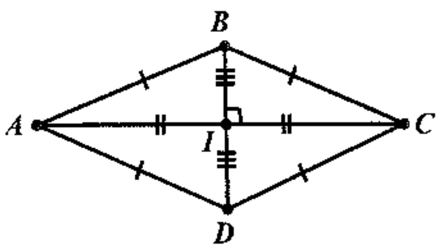
Diện tích: S=AB.AD

Chu vi: C= 2(AB+BC)

Chú ý: Hình chữ nhật là hình nội tiếp đường tròn tâm I

Cách chứng minh là hình chữ nhật? thường chứng minh là hình bình hành có 1 góc vuông. (4 góc vuông).

2.2.5 Hình thoi



Hãy nhớ hình thoi ABCD là hình có 4 cạnh bằng nhau và có 2 đường chéo vuông góc nhau.

Tính chất : $AC \perp BD$

AB=BC=CD=AD

Còn những tính chất này các hình bình hành, hình chữ nhật đều có

AB song song và bằng CD.

AD song song và bằng BC

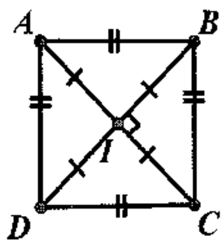
AC cắt BD tại trung điểm I của mỗi đường.

Diện tích: $S = \frac{1}{2}AC.$BD **Chu vi:** C=4AB.

Muốn chứng minh tứ giác ABCD là hình thoi? cần chứng minh $AC \perp BD$

AB=BC=CD=AD

2.2.6 Hình vuông



ABCD là hình vuông

Tính chất: AC=BD ; $AC \perp BD$; AB=BC=CD=AD

Phân biệt hình vuông với hình thoi? Hình vuông có 2 đường chéo bằng nhau còn hình thoi không có.

Phân biệt hình vuông với hình chữ nhật? Hình vuông có 4 cạnh bằng nhau,

Diện tích: $S = AB^2$

Chu vi: C=4AB

D. ĐƯỜNG TRÒN, ELIP, HYPEBOL, PARABOL

D.1 - ĐƯỜNG TRÒN

I. PHƯƠNG TRÌNH:

1. Dạng chính tắc: $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow$ Tâm I(a; b); bán kính R.

2. Dạng khai triển: $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

$\Rightarrow$ Tâm I(a; b); bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$ với $a^2+b^2-c>0$

II. TIẾP TUYẾN:

1. $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)\in(C)$:

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

2. $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \Rightarrow$ Tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)\in(C)$:

$$x_0x+y_0y-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

3. $(D):Ax+By+C=0$ tiếp xúc (I; R) $\Leftrightarrow d(I,D)=R$

III. PHƯƠNG TÍCH:

$(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$, điểm M(m, n)

$\Rightarrow P(M/(C))=m^2+n^2-2am-2bn+c$

+ P > 0: M nằm ngoài.

+ P < 0: M nằm trong.

+ P = 0: $M\in(C)$

IV. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG:

$$\begin{cases}(C_1):f(x;y)=x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0\\(C_2):g(x;y)=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0\end{cases}$$

$$P(M/C_1)=P(M/C_2)\Leftrightarrow f(x;y)=g(x;y)\Leftrightarrow 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+(c_2-c_1)=0$$

C. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐƯỜNG TRÒN

$\begin{cases}(C_1):(I_1;R_1)\\(C_2):2(I_2,R_2)\end{cases} d = I_1I_2 \Rightarrow$

+ $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$: (C_1), (C_2) cắt nhau.

+ d = R_1 + R_2: tiếp xúc ngoài

+ d = $|R_1 - R_2|$: tiếp xúc trong

+ d > R_1 + R_2: ngoài nhau

+ d < $|R_1 - R_2|$: trong nhau

MỘT SỐ BÀI TẬP MẪU MINH HỌA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

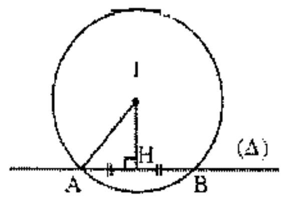
Bài 1: Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I(3; 1) và chắc trên đường thẳng $\Delta: x-2y+4=0$ một đoạn có độ dài bằng 4.

Hướng dẫn giải:

Giả sử (C) chắn trên Δ một dây cung có độ dài bằng 4.

Từ I kẻ IH $\perp$ AB tại H thì H là trung điểm của AB.

Khi đó: $HA = \dfrac{AB}{2} = 2$ và $IH = d(I;\Delta) = \sqrt{5}$



Gọi R là bán kính của (C) ta có: $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{5+4} = 3$.

Phương trình của (C) là: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$

Bài 2: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A(2; 3), B(-1; 1) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x-3y-11=0$.

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Gọi I; R lần lượt là tâm và bán kính của (C). Ta có:

Điểm I $\in \Delta \Rightarrow I(3t+11;t)$. Điểm A, B $\in (C) \Rightarrow IA = IB = R \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow (3t+9)^2 + (3-t)^2 = (3t+12)^2 + (1-t)^2 \Leftrightarrow t = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow I\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{2}\right), R = \sqrt{\dfrac{65}{2}}$

Phương trình của (C) là: $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{65}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

Cách 2: Giả sử (C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Tâm I của (C) là $I(a;b)\in\Delta$

Suy ra: a- 3b – 11 = 0 (1). Ta có: $A;B\in(C)\Rightarrow\begin{cases}-4a-6b+c=-13 & (2)\\ 2a-2b+c=-2 & (3)\end{cases}$

Từ (1); (2) & (3) ta có: $a=\dfrac{7}{2};\ b=-\dfrac{5}{2};\ c=-14$. Vậy $(C):x^2+y^2-7x+5y-14=0$

Bài 3: Trong mặt phẳng *Oxy* cho hai điểm A(0; 5), B(2; 3). Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R=\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải: Gọi I(a; b) là tâm của (C). Từ giả thiết, ta có: IA = IB = $R=\sqrt{10}$

$$\Rightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(5-b)^2=(2-a)^2+(3-b)^2\\ a^2+(5-b)^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a+3\\ a^2-2a-3=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=3\\ b=6\end{cases}$. Vậy có 2 đường tròn cần tìm là:

$(C_1):(x+1)^2+(y-2)^2=10;\ (C_2):(x-3)^2+(y-6)^2=10$

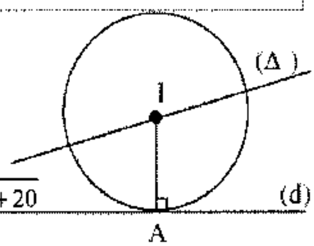
Bài 4: Viết phương trình đường tròn tâm thuộc $\Delta:x+y-5=0;\ R=\sqrt{10}$ và tiếp xúc với $d:3x+y-3=0$.

Hướng dẫn giải: • Gọi tâm I(a; 5-a) $\in\Delta\Rightarrow\sqrt{10}=R=d(I,d)=\dfrac{|3a+(5-a)-3|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|2a+2|=10$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4;\ b=1\\ a=-6;\ b=11\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(C_1):(x-4)^2+(y-1)^2=10\\ (C_2):(x+6)^2+(y-11)^2=10\end{array}\right.$$

Bài 5: Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I $\in\Delta:2x+y=0$ và tiếp xúc với đường thẳng $d:x-7y+10=0$ tại điểm A(4; 2).

Hướng dẫn giải:



Cách 1: Ta có tâm I $\in\Delta\Rightarrow I(t;-2t)\Rightarrow IA=\sqrt{5t^2+20}$.

Đường tròn (C) tiếp xúc với d tại A $\Leftrightarrow d(I,d)=IA\Leftrightarrow\dfrac{|3t+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5t^2+20}$

$\Leftrightarrow(3t+2)^2=2(5t^2+20)\Leftrightarrow t^2-12t+36=0\Leftrightarrow t=6\Rightarrow I(6;-12);\ R=10\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x-6)^2+9y+12)^2=200$.

Cách 2: Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của (C).

Gọi d' là đường thẳng vuông góc với d tại A $\Rightarrow d': 7x+y+c=0$

$A \in d' \Rightarrow c=-30 \Rightarrow d': 7x+y-30=0$

Do (C) tiếp xúc với d tại A nên $I \in d'$.

Mặt khác I $\in \Delta$ nên tọa độ I thỏa mãn hệ $\begin{cases} 7x+y-30=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow I(6;-12) \Rightarrow IA = 10\sqrt{2}$

Vậy phương trình của (C) là: $(x-6)^2+9y+12)^2=200$

Bài 6: Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính R = 5 và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-31=0$ tại điểm A(1; -7).

Hướng dẫn giải: Đường thẳng $d \perp \Delta$ tại A(1; -7) có phương trình tham số (d): $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-7-4t \end{cases}$

Do (C) tiếp xúc với Δ tại A nên có tâm $I \in d \Rightarrow I(1+3t;-7-4t)$

Mặt khác: $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|25t|}{5}=5 \Leftrightarrow |t|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \Rightarrow I=(-2;-3) \\ t=1 \Rightarrow I(4;-11) \end{array}\right.$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là:

$(C_1): (x+2)^2+(y+3)^2=25; (C_2): (x-4)^2+(y+11)^2=25$

Bài 7: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A(6; 4) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$ tại điểm B(3; 1).

Hướng dẫn giải:

Gọi I; R lần lượt là tâm và bán kính của (C); đường thẳng $d \perp \Delta$ tại B(3; 1)

$\Rightarrow d: 2(x-3)-(y-1)=0 \Leftrightarrow d: 2x-y-5=0$

Do (C) tiếp xúc với Δ tại B nên tâm $I \in (d) \Rightarrow I(t;2t-5)$

Mặt khác: IA = IB $\Leftrightarrow IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (6-t)^2+(9-2t)^2=(3-t)^2+(6-2t)^2 \Leftrightarrow t=4$

$\Rightarrow I(4;3)$; $R=IA=\sqrt{5}$. Phương trình đường tròn (C) là: $(x-4)^2+(y-3)^2=5$.

Bài 8: Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I \in \Delta: 4x+3y-2=0$; tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: x+y+4=0; d_2: 7x-y+4=0$.

Hướng dẫn giải: Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = -1-3t \\ y = 2+4t \end{cases}$

Ta có: $I \in \Delta \Rightarrow I(-1-3t; 2+4t)$. Gọi R là bán kính của (C), (C) tiếp xúc với d_1 và d_2:

$$\Leftrightarrow d(I, d_1) = d(I, d_2) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|t+5|}{\sqrt{2}} = \frac{|5t+1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |t+5| = |5t+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow I(-4;6), R = 3\sqrt{2} \\ t = -1 \Rightarrow I(2;2),\ R = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy $(C): (x+4)^2 + (y-6)^2 = 18$ hoặc $(C): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$.

Bài 9: Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A(2; 0) và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B(6; 4) bằng 5.

Hướng dẫn giải: Gọi I(a; b) và R lần lượt là bán kính của (C).

Do (C) tiếp xúc với trục Ox tại A nên ta có: $x_I = x_A = 2 \Rightarrow I(2;b);\ R = |b|$

Mặt khác: IB = 5 $\Leftrightarrow IB^2 = 25 \Leftrightarrow (6-2)^2 + (4-b)^2 = 25 \Leftrightarrow (b-4)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 7 \Rightarrow I(2;7), R = 7 \\ b = 1 \Rightarrow I(2;1), R = 1 \end{array}\right.$. Vậy có hai đường tròn cần tìm là:

$(C_1): (x-2)^2 + (y-7)^2 = 49;\ (C_2): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Bài 10: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: x - 7y + 10 = 0$ và đường tròn

$(C'): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A(1; -2) và các giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C').

Hướng dẫn giải:

Đường tròn (C) qua giao điểm của d và (C') nên phương trình có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 + m(x - 7y + 10) = 0$$
$$A \in (C) \Rightarrow m = 1 \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$$

Bài 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Hướng dẫn giải: Đường tròn (C) có tâm I(6; 2), bán kính R = 2.

Gọi I_1(a; b), R_1 lần lượt là tâm và bán kính của (C_1).

(C_1) tiếp xúc với hai trục Ox, Oy nên ta có: $d(I_1;Oy)=d(I_1;Ox)=R_1$

$$\Leftrightarrow |a|=|b|=R_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b; R_1=|a| \\ a=-b; R_1=|a| \end{array}\right.$$

(C_1) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow II_1=R_1+R \Leftrightarrow II_1^2=(R_1+R)^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-2)^2=(R_1+2)^2$ (1)

Trường hợp 1: $a=b;\ R_1=|a|$

$$(1) \Leftrightarrow (a-6)^2+(a-2)^2=\left(|a|+2\right)^2 \Leftrightarrow a^2-16a-4|a|+36=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a^2-20a+36=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a<0 \\ a^2-12a+36=0 \end{cases}$$: vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=18 \Rightarrow I_1(18;18),\ R_1=18 \\ a=2 \Rightarrow I_2(2;2); R_2=2 \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $a=-b, R_1=|a|$

$$(1) \Leftrightarrow (a-6)^2+(a+2)^2=\left(|a|+2\right)^2 \Leftrightarrow a^2-8a-4|a|+36=0$$

$\Leftrightarrow a=6 \Rightarrow I_1(6;-6), R_1=6$. Vậy có 3 đường tròn cần tìm là:

$(x-18)^2+(y-18)^2=324;\ (x-2)^2+(y-2)^2=4;\ (x-6)^2+(y+6)^2=36$.

<u>Bài 12:</u> Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm A(-1; 7), B(4; -3), C(-4; 1). Hãy viết phương trình đường tròn (C) nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải: Gọi I(a; b), R lần lượt là tâm và bán kính của (C).

Gọi M$(x;y)$ là chân đường phân giác trong của góc A trong tam giác ABC.

Ta có: $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \overline{MB}=-\frac{5}{3}\overline{MC}$. Suy ra điểm M chia đoạn BC theo tỉ số $k=-\frac{5}{3}$ nên ta có tọa độ điểm M là: $\begin{cases} x=\frac{x_B-kx_C}{1-k}=-1 \\ y=\frac{y_B-ky_C}{1-k}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên $\frac{IA}{IM}=\frac{BA}{BM}=2 \Rightarrow \overline{IA}=-2\overline{IM}$

Suy ra điểm I chia đoạn AM theo tỉ số k = -2 $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_M}{1-k} = -1 \\ y = \dfrac{y_A - ky_M}{1-k} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-1;2)$

Phương trình cạnh (AB) là: $2x + y - 5 = 0 \Rightarrow R = d(I, AB) = \sqrt{5}$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

Bài 13: Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O và cắt đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ theo một dây cung có độ dài bằng 8.

Hướng dẫn giải: Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính R = 5.

Phương trình đường thẳng qua O là: $ax + by = 0\ (a^2 + b^2 > 0)$

Giả sử Δ cắt (C) theo dây cung AB có độ dài bằng 8.

Kẻ IH $\perp \Delta$ tại H thì H là trung điểm của AB $\Rightarrow HA = \dfrac{AB}{2} = 4$.

Tam giác IHA vuông tại H, ta có: $IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{25-16} = 3$. Mặt khác:

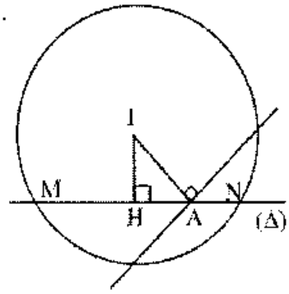
$$d(I,\Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \Leftrightarrow (a-3b)^2 = 9(a^2+b^2) \Leftrightarrow 4a^2 + 3ab = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0;\ b = 1 \\ a = 3; b = -4 \end{array}\right.$. Suy ra: $\Delta_1 : y = 0;\ \Delta_2 : 3x - 4y = 0$.

Bài 14: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2 + x - 4y - 20 = 0$ và điểm A(3; 0). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt đường tròn (C) theo một dây cung MN sao cho:

a) MN có độ dài lớn nhất. b)MN có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải: a. Đường tròn (C) có tâm I(-1; 2), bán kính R = 5.



Dây MN lớn nhất khi MN là đường kính của (C).

Do đó Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A, I.

Phương trình của Δ là: $\dfrac{x-3}{-1-3} = \dfrac{y}{2} \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

b. Ta có: $\overline{IA} = (4;-2) \Rightarrow IA = 2\sqrt{5}$

Kẻ IH $\perp$ MN tại H. Dây MN nhỏ nhất khi IH lớn nhất.

Ta có: $IH \le IA = 2\sqrt{5} \Rightarrow IHmax = 2\sqrt{5}$ khi $H \equiv A \Rightarrow \Delta \perp IA$ tại A.

Δ qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$4(x-3)-2(y-0)=0 \Leftrightarrow 2x-y-6=0.$$

TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho $(C_1):(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2$ và $(C_2):(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R_2^2$.

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2).

1. Phương pháp tổng quát:

(C_1) có tâm $I_1(a_1; b_1)$ bán kính R_1 và (C_2) có tâm $I_2(a_2; b_2)$ bán kính R_2.

Xét $\Delta: Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2 \ne 0)$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{|Aa_1+Bb_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R_1; \frac{|Aa_2+Bb_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R_2$$

Từ đó suy ra hệ 2 phương trình 3 ẩn A, B, C. Giải 2 ẩn theo một ẩn rồi rút gọn .

(Ví dụ: giải A, C theo B) suy ra phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

<u>Ví dụ:</u> Cho $(C_1): x^2+y^2=9$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8=0$.

Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Hướng dẫn giải: (C_1) có tâm $I_1(0; 0)$ bán kính $R_1 = 3$ và (C_2) có tâm $I_2(3; 0)$ bán kính $R_2 = 1$.

Xét $\Delta: Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2 \ne 0)$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

$$\Rightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{|A.0+B.0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3; \frac{|3A+B.0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |C|=3\sqrt{A^2+B^2} \;\; (1) \\ |3A+C|=\sqrt{A^2+B^2} \;\; (2) \end{cases} \Rightarrow |C|=3|3A+C| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C=9A+3C \\ C=-9A-3C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=-\dfrac{9A}{2} \\ C=-\dfrac{9A}{4} \end{array}\right.$$

Xét $C=-\dfrac{9A}{2}$. Từ hệ thức (1) suy ra:

$\left|-\frac{3A}{2}\right| = \sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow \frac{9}{4}A^2 = A^2+B^2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}A^2 = B^2 \Leftrightarrow B = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}A \Leftrightarrow A \neq 0$

$\Delta: Ax \pm \frac{\sqrt{5}}{2}Ay - \frac{9}{2}A = 0 \Leftrightarrow x \pm \frac{\sqrt{5}}{2}y - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x \pm \sqrt{5}y - 9 = 0$

Xét $C = -\frac{9A}{4}$. Từ hệ thức (1) suy ra:

$\left|-\frac{3A}{4}\right| = \sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow \frac{9}{16}A^2 = A^2+B^2 \Leftrightarrow \frac{7}{16}A^2+B^2 = 0 \Leftrightarrow A = B = 0 \Rightarrow$ Vô lý.

2. Phương trình tiếp điểm:

Giả sử tiếp tuyến chung tiếp xúc với (C_1) tại $M(x_0;y_0) \in (C_1)$, khi đó

$(x_0-a_1)^2+(y_0-b_1)^2 = R_1^2$ (1)

Và tiếp xúc $(C_2) \Leftrightarrow d(I_2,\Delta) = R_2 \Leftrightarrow \frac{|(x_0-a_1)(a_2-x_0)+(y_0-b_1)(b_2-y_0)|}{\sqrt{(x_0-a_1)^2+(y_0-b_1)^2}} = R_2$ (2)

Từ (1) & (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_0-a_1)^2+(y_0-b_1)^2 = R_1^2 \\ |(x_0-a_1)(a_2-x_0)+(y_0-b_1)(b_2-y_0)| = R_1.R_2 \end{cases}$$

Giải hệ $\Rightarrow$ tọa độ $M(x_0;y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.

Ví dụ: Cho $(C_1): x^2+y^2=4$ và $(C_2): x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Hướng dẫn giải: (C_1) có tâm $I_1(0; 0)$ bán kính $R_1 = 2$ và (C_2) có tâm $I_2(1; 1)$ bán kính $R_2 = 1$.

Giả sử tiếp tuyến chung tiếp xúc với (C_1) tại $M(x_0;y_0) \in (C_1)$, khi đó $x_0^2+y_0^2=4$ (1)

Và phương trình tiếp tuyến có dạng: $\Delta: x_0x+y_0y-4=0$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (C_2) $\Leftrightarrow d(I_2,\Delta) = R_2 \Leftrightarrow \frac{|x_0+y_0-4|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = 1$

$$\Rightarrow |x_0+y_0-4| = \sqrt{x_0^2+y_0^2} = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+y_0=6 \\ x_0+y_0=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=6-x_0 \\ y_0=2-x_0 \end{array}\right.$$

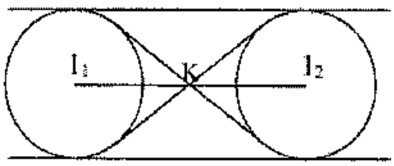
Kết hợp với $x_0^2 + y_0^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; y_0 = 0 \\ x_0 = 0; y_0 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ 2 tiếp tuyến chung là: $x = 2$ và y = 2.

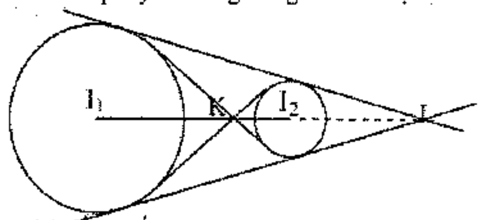
3. Phương pháp xét các trường hợp vị trí tương đối của 2 đường tròn.

TH1: $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Rightarrow$ (C_1) và (C_2) ngoài nhau $\Rightarrow$ có 4 tiếp tuyến chung.

- Nếu $R_1 = R_2$ thì 2 tiếp tuyến chung ngoài // I_1I_2, 2 tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K là trung điểm của I_1I_2

- Nếu $R_1 \neq R_2$ thì tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J và 2 tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K.

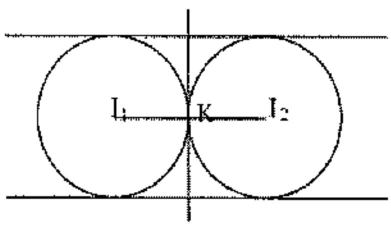


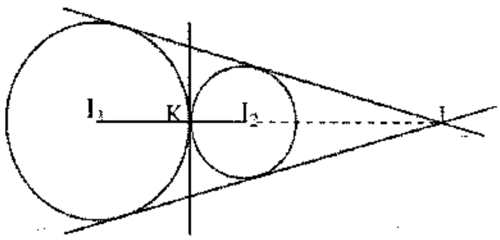


TH2: $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow$($C_1$) và ($C_2$) tiếp xúc ngoài $\Rightarrow$ có 3 tiếp tuyến chung.

- Nếu $R_1 = R_2$ thì 2 tiếp tuyến chung ngoài // I_1I_2, 2 tiếp tuyến chung trong đi qua tiếp điểm K là trung điểm của I_1I_2 và vuông góc với I_1I_2.

- Nếu $R_1 \neq R_2$ thì tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J và tiếp tuyến chung trong đi qua điểm K.

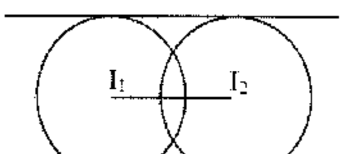


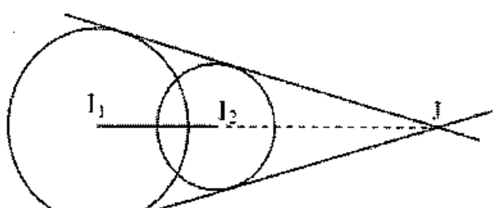


TH3: $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow$($C_1$) và ($C_2$) cắt nhau $\Rightarrow$ có 2 tiếp tuyến chung.

- Nếu $R_1 = R_2$ thì 2 tiếp tuyến chung ngoài // I_1I_2.

- Nếu $R_1 \neq R_2$ thì tiếp tuyến chung ngoài cắt nhau tại J .

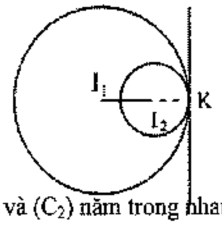




TH4: $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Rightarrow$ (C₁) và (C₂) tiếp xúc nhau $\Rightarrow$ có 1 tiếp tuyến chung.

- Nếu $R_1 \neq R_2$ thì (C_1) và (C_2) có 1 tiếp tuyến chung tại tiếp điểm K của 2 đường tròn.

- Nếu $R_1 = R_2$ thì 2 đường tròn trung nhau $\Rightarrow$ vô số tiếp tuyến chung.



TH5: $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Rightarrow$ (C_1) và (C_2) nằm trong nhau $\Rightarrow$ không có tiếp tuyến chung.

Cách xác định tọa độ điểm J, K:

Ta có: $\frac{KI_1}{KI_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{JI_1}{JI_2} \Rightarrow \overrightarrow{KI_1} = -\frac{R_1}{R_2}\overrightarrow{KI_2}; \overrightarrow{JI_1} = \frac{R_1}{R_2}\overrightarrow{JI_2} \Rightarrow$ Tọa độ 2 điểm J, K.

Phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) là phương trình tiếp tuyến đi qua J, K của (C_1) và (C_2).

• Sau khi tìm được tọa độ của J, K ta viết phương trình tiếp tuyến chung theo 2 phương pháp sau:

Cách 1: Đường thẳng đi qua J là: $\Delta : A(x - x_J) + B(y - y_J) = 0 \ (A^2 + B^2 > 0)$

Tiếp xúc với $(C_1) \Leftrightarrow d(I_1;\Delta) = R_1 \Leftrightarrow \frac{|A(a_1 - x_J) + B(b - y_J)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R_1$

$\Rightarrow$ Tính B theo A hoặc tính A theo B, rút gọn $\Rightarrow \Delta$.

Cách 2: Giả sử tiếp tuyến chung tiếp xúc với (C_1) tại $M(x_0; y_0)$, khi đó

$(x_0 - a_1)^2 + (y_0 - b_1)^2 = R_1^2$ (1)

Và phương trình Δ có dạng: $(x_0 - a_1)(x - x_0) + (y_0 - b_1)(y - y_0) = 0$ (2)

Điểm $J \in \Delta \Leftrightarrow (x_0 - a_1)(x_J - x_0) + (y_0 - b_1)(y_J - y_0) = 0$ (3)

Từ (1) & (3) $\Rightarrow$ tọa độ $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến.

Ví dụ 1: Cho $(C_1): x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Hướng dẫn giải: (C_1) có tâm $I_1(-2; 0)$; $R_1 = 1$; (C_2) có tâm $I_2(4; 0)$; $R_1 = 2$.

Ta có: $I_1I_2 = 6 > R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) ngoài nhau nên có 4 tiếp tuyến chung.

Hai tiếp tuyến ngoài cắt nhau tại J, 2 tiếp tuyến chung trong cắt nhau tại K

Ta có: $\frac{KI_1}{KI_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{JI_1}{JI_2} \Rightarrow \overrightarrow{KI_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KI_2}; \overrightarrow{JI_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI_2} \Rightarrow K \equiv O(0;0); J(-8;0)$

Đường thẳng đi qua J có phương trình $\Delta: A(x+8) + By = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ tiếp xúc với (C_1)

$$\Leftrightarrow d(I_1;\Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|A(-2+8) + B.0|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 6|A| = \sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow 35A^2 = B^2 \Leftrightarrow B = \pm\sqrt{35}A \Rightarrow A \neq 0$$

$$(\Delta): A(x+8) + By = 0 \Leftrightarrow A(x+8) \pm \sqrt{35}Ay = 0 \Leftrightarrow x \pm \sqrt{35}y + 8 = 0$$

Đường thẳng đi qua K có phương trình: $\Delta: Ax + By = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ tiếp xúc với (C_1)

$$\Leftrightarrow d(I_1;\Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|A(-2+0) + B.0|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2|A| = \sqrt{A^2+B^2} \Leftrightarrow 3A^2 = B^2 \Leftrightarrow B = \pm\sqrt{3}A \Rightarrow A \neq 0$$

$$\Delta: Ax + By = 0 \Leftrightarrow x \pm \sqrt{3}y = 0$$

Ví dụ 2: Cho $(C_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ và $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 16$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Hướng dẫn giải: (C_1) có tâm $I_1(1; 1)$; $R_1 = 1$; (C_2) có tâm $I_2(-2; -3)$, bán kính $R_2 = 4$.

Ta có: $I_1I_2 = 5 = R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài tại K nên có 3 tiếp tuyến chung. Hai tiếp tuyến chung này cắt nhau tại J.

Ta có: $\frac{KI_1}{KI_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{JI_1}{JI_2} \Rightarrow \overrightarrow{KI_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KI_2}; \overrightarrow{JI_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JI_2} \Rightarrow K\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right); J\left(2;\frac{7}{3}\right)$

Đường thẳng đi qua J là: $\Delta: A(x-2) + B\left(y - \frac{7}{3}\right) = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$

Tiếp xúc với (C_1) $\Leftrightarrow d(I_1;\Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{\left|A(1-2) + B\left(1 - \frac{7}{3}\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 1$

$\Leftrightarrow \left|A+\frac{4}{3}B\right|^2 = \left(\sqrt{A^2+B^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{7}{9}B^2+\frac{8}{3}AB=0 \Leftrightarrow B=0 \vee 7B=24A$

- Với $B=\frac{24}{7}A \Rightarrow A\neq 0 \Rightarrow \Delta: A(x-2)+\frac{24}{7}A\left(y-\frac{7}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 7x+24y-30=0$
- Với B = 0 $\Rightarrow A\neq 0 \Rightarrow \Delta: A(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

Đường thẳng qua $K\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{I_2I_1}=(3;4)$ có phương trình : $3x+4y=2$

Bài 1: Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm sau: A(2; 0), B(0; 1); C(-1; 2).

Hướng dẫn giải:

Cách 1: Gọi d_1; d_2 lần lượt là trung điểm của AB và BC ta có:

• Lập phương trình đường trung trực của AB: đi qua trung điểm M của AB: $M\left(1;\frac{1}{2}\right)$ và

có vtpt $\overrightarrow{n_{d_1}}=\overrightarrow{AB}=(-2;1)$. Vậy d_1 có phương trình: $-2(x-1)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4x-2y-3=0$

• Lập phương trình đường trung trực của BC: đi qua trung điểm N của BC: $N\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và có vtpt

$\overrightarrow{n_{d_2}}=\overrightarrow{BC}=(-1;1)$. Vậy d_2 có phương trình: $-(x-1)+\left(y-\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x-y+2=0$

• Tọa độ tâm O là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x-2y-3=0\\ x-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow O\left(\frac{7}{2};\frac{11}{2}\right) \Rightarrow R^2=OB^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

Vậy $(C): \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

Cách 2: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có:

$$\begin{cases}OA=OB\\ OA=OC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}OA^2=OB^2\\ OA^2=OC^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\\ (x-2)^2+y^2=(x+1)^2+(y-2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4x+4=-2y+1\\ -4x+4=2x+1-4y+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-2y=3\\ 6x-4y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7}{2}\\ y=\frac{11}{2}\end{cases}$$

Bán kính: $R^2=OB^2=\frac{65}{2}$

Vậy $(C):\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

Cách 3: Gọi PT khai triển của đường tròn là: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

Trong đó tâm I(-a; -b), bán kính: $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Thay tọa độ điểm A, B, C vào phương trình đường tròn ta được:

$$\begin{cases}2^2+0^2+2a.2+2.b.0+c=0\\0^2+1^2+2a.0+2.b.1+c=0\\(-1)^2+2^2+2.a.(-1)+2.b.2+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+c=-4\\2b+c=-1\\-2a+4b+c=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{7}{2}\\b=-\frac{11}{2}\\c=10\end{cases}$$

$R^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2-10=\frac{65}{2}$

Vậy $(C):\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

Bài 2: Viết phương trình đường tròn đi qua A(1; 2) và tiếp xúc với $d:3x-4y+2=0$ tại B(-2; -1).

Hướng dẫn giải:

• Gọi I(a; b) $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AI}=(1-a;2-b)\\\overrightarrow{BI}=9-2-a;-1-b)\end{cases}$. Do: $\begin{cases}AI=BI\\\overrightarrow{BI}\perp\overrightarrow{u_d}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AI^2=BI^2\\\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{u_d}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-a)^2+(2-b)^2=(-2-a)^2+(-1-b)^2\\-4(-2-a)-3(-1-b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-11\\b=11\end{cases}\Leftrightarrow I(-11;11)$

$R^2=IA^2=(-12)^2+9^2=225$

Vậy $(C):(x+11)^2+(y-11)^2=225$.

Bài 3: Viết phương trình đường tròn tâm thuộc $\Delta:4x+3y-2=0$ và tiếp xúc với $d_1:x+y+4=0$ và $d_2:7x-y+4=0$.

Hướng dẫn giải: Ta có phương trình 2 phân giác tạo bởi d_1 và d_2 là:

$$\frac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x-y+4|}{\sqrt{50}}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1:x-3y-8=0\\\Delta_2:3x+y+6=0\end{cases}$$

Tọa độ tâm I_1 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-3y-8=0 \\ 4x+3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow I_1=(2;-2) \Rightarrow R=d(I;d_1)=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (C_1):(x-2)^2+(y+2)^2=8$

Tương tự ta cũng có:

Tọa độ tâm I_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+y+6=0 \\ 4x+3y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow I_2=(-4;6) \Rightarrow R=d(I;d_2)=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow (C_2):(x+4)^2+(y-6)^2=18$

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C): $x^2+y^2-4x-4y-5=0$ với Ox.

Hướng dẫn giải: Hoành độ giao điểm của (C) với Ox là nghiệm của phương trình:

$x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow (C)\cap Ox = A_1(5;0)\,\&\,A_2(-1;0)$

Mà $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=0$. Áp dụng công thức phân đôi tọa độ ta có:

$(x-5)(5-2)+y(0-2)=0 \Leftrightarrow d_1: 3x-2y-15=0$

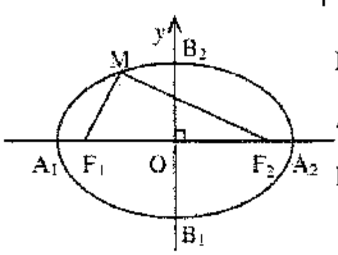
Và $(x+1)(-1-2)+y(0-2)=0 \Leftrightarrow d_2: 3x+2y+3=0$

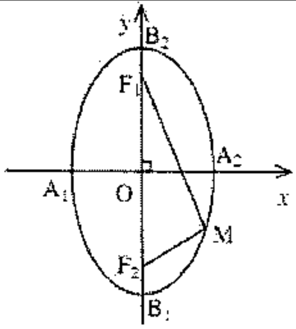
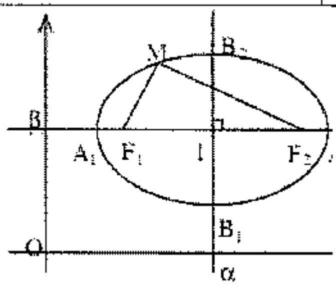
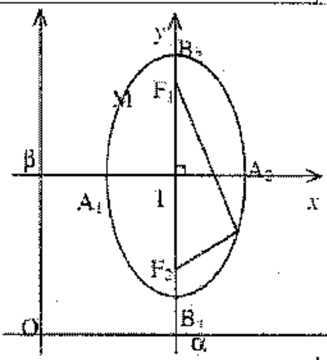
Vậy d_1; d_2 là 2 tiếp tuyến cần tìm.

Phần này nhìn chung là những năm từ 2014 không có trong đề thi nhưng để mang tính chất giới thiệu để phòng những năm sau các trường đại học có thể thi riêng và nên cấu trúc đa dạng hóa hơn + kiến thức rộng lớn hơn. Nhưng nhìn chung thầy chỉ mang tính chất giới thiệu, các em có thể tham khảo thêm.

D.2 - ELIP

CÁC DẠNG ELIP VÀ ĐẶC ĐIỂM

<table>
<tr><td>Trục lớn</td><td>Hình dạng Elip</td><td>Phương trình và các yếu tố trong Elip</td></tr>
<tr><td>Ox
$(a>b)$</td><td>
</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ a^2=b^2+c^2;\ e=\frac{c}{a}$
$F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$. Tiêu cự $F_1F_2=2c$.
$A_1(-a;0)$; $A_2(a;0) \in$ trục lớn. $A_1A_2=2a$.
$B_1(0;-b)$; $B_2(0;b) \in$ trục nhỏ. $B_1B_2=2b$.
$\begin{cases} MF_1=a+ex \\ MF_2=a-ex \end{cases}$; đường chuẩn $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{a}{e}$</td></tr>
</table>

Oy (a < b)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ b^2=a^2+c^2; e=\frac{c}{b}$ $F_1(0; -c)$; $F_2(0; c)$. Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$. $A_1(-a; 0)$; $A_2(a; 0) \in$ trục nhỏ. $A_1A_2 = 2a$. $B_1(0; -b)$; $B_2(0; b) \in$ trục lớn. $B_1B_2 = 2b$. $\begin{cases} MF_1 = b+ey \\ MF_2 = b-ey \end{cases}$; đường chuẩn $x=\pm\frac{b^2}{c}=\pm\frac{b}{e}$
$y=\beta$ (a > b)		$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1;\ a^2=b^2+c^2; e=\frac{c}{a}$ $F_1(\alpha-c;\beta); F_2(\alpha+c;\beta)$. Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$. $A_1(\alpha-a;\beta); A_2(\alpha+a;\beta)\in A_1A_2=2a$ $B_1(\alpha;\beta-b); B_2(\alpha;\beta+b)\in B_1B_2=2b$ $\begin{cases} MF_1 = a+e(x-\alpha) \\ MF_2 = a-e(x-\alpha) \end{cases}$; đường chuẩn $x=\pm\frac{a^2}{c}+\alpha$
$x=\alpha$ (a < b)		$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1;\ b^2=a^2+c^2; e=\frac{c}{b}$ $F_1(\alpha;\beta-c); F_2(\alpha;\beta+c)$. Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$. $A_1(\alpha-a;\beta); A_2(\alpha+a;\beta)\in A_1A_2=2a$ $B_1(\alpha;\beta-b); B_2(\alpha;\beta+b)\in B_1B_2=2b$ $\begin{cases} MF_1 = b+e(y-\beta) \\ MF_2 = b-e(y-\beta) \end{cases}$; đường chuẩn $x=\pm\frac{b^2}{c}+\beta$

MỘT SỐ CÂU TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Bài 1: (TSĐH 2002 D) Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có phương trình: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Xét điểm M chuyển động trên Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

__Giải:__ Giả sử M(m; 0) và N(0; n) với m > 0, n > 0 là hai điểm chuyển động trên hai tia Ox và Oy.

Đường thẳng MN có phương trình: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{m}+\frac{y}{n}-1=0$

Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi:

$16.\left(\frac{1}{m}\right)^2+9.\left(\frac{1}{n}\right)^2=1$.

Theo BĐT Côsi ta có:

$MN^2=m^2+n^2=\left(m^2+n^2\right)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)=25+16.\frac{n^2}{m^2}+9\frac{m^2}{n^2}\ge 25+2\sqrt{16.9}=49\Rightarrow MN\ge 7$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{16n^2}{m^2}=\frac{9m^2}{n^2}\\ m^2+n^2=49\\ m>0,\ n>0\end{cases}\Leftrightarrow m=2\sqrt{7},\ n=\sqrt{21}$.

Kết luận: Với $M\left(2\sqrt{7};0\right)$, $N\left(0;\sqrt{21}\right)$ thì MN đạt GTNN và GTNN (MN) = 7.

Bài 2: TSĐH 2005 D Trong mặt phẳng hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho điểm C(2; 0) và elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Giải: Giả sử $A(x_0;y_0)$. Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên $B(x_0;-y_0)$

Ta có: $AB^2=4y_0^2$ và $AC^2=(x_0-2)^2+y_0^2$.

Vì $A\in(E)$ nên $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\Rightarrow y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$ (1).

Lại có AB = AC nên $(x_0-2)^2+y_0^2=4y_0^2$ (2)

Thay (1) vào (2) và rút gọn ta được: $7x_0^2-16x_0+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\ x_0=\frac{2}{7}\end{array}\right.$

• Với $x_0=2$ thay vào (1) ta có: $y_0=0$. Trường hợp này loại vì $A\equiv C$.

• Với $x_0=\frac{2}{7}$ thay vào (1) ta có: $y_0=\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$; $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 3: TSĐH A – 2008 Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Giải: Gọi phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$.

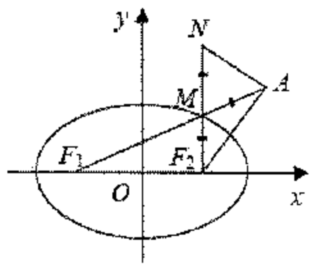
Từ giả thiết ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ 2(2a+2b)=20\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được: a = 3 và b = 2.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Bài 4: TSĐH B – 2010 Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A\left(2;\sqrt{3}\right)$ và elip (E): $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm), M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Giải: Nhận thấy: $F_1(-1;0)$ và $F_2(1;0)$.



Đường thẳng AF_1 có phương trình: $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{\sqrt{3}}$.

M là giao điểm có tung độ dương của AF_1 với (E), suy ra:

$$M=\left(1;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow MA=MF_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

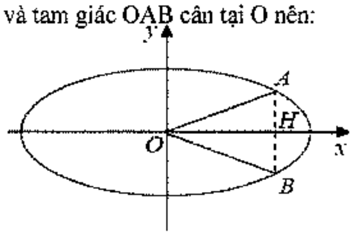
Do N là điểm đối xứng của F_2 qua M nên $MF_2 = MN$, suy ra: $MA = MF_2 = MN$.

Do đó đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ANF_2 là đường tròn tâm M, bán kính MF_2.

Phương trình (T): $(x-1)^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$

Bài 5: TSĐH A – 2011 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Giải: Gọi $A(x;y)$. Do A, B thuộc (E) có hoành độ dương và tam giác OAB cân tại O nên:



$B(x;-y),\ x>0$. Suy ra: $AB = 2|y| = \sqrt{4-x^2}$.

Gọi H là trung điểm AB, ta có: $OH \perp AB$ và $OH = x$.

Diện tích: $S_{OAB} = \frac{1}{2}x.\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(4-x^2)} \le 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{2}$.

Vậy $A\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Toán Trắc nghiệm – Hình Oxy

Bài 1: (ĐH-2009-A) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có C(−1; −2), đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là 5x+y–9 = 0 và x + 3y – 5 = 0. Tìm toạ độ các đỉnh A và B.

A. A(1; 4) B(0; 5) **B.** A(1; 4) B(5; 0) **C.** A(-1; 4) B(5; 0) **D.** A(-1; 4) B(-5; 0)

Bài 2: (ĐH-2009-A) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho các đường thẳng Δ_1 : x – 2y – 3 = 0 và Δ_2 : x + y +1 = 0. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ_2 bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$

A. M (1; -1) **B.** M (1; 2)

C. M $(\frac{1}{3};-\frac{5}{3})$ **D.** M $(\frac{1}{3};\frac{5}{3})$

Bài 3: (ĐH-2009-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có M (2; 0) là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là 7x – 2y – 3 = 0 và 6x – y – 4 = 0. Viết phương trình đường thẳng AC.

A. 3x – 4y + 5 = 0 **B.** 3x + 4y + 5 = 0 **C.** 4x + 3y + 5 = 0 **D.** 4x -3y + 5 = 0

Bài 4: (ĐH-2009-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x – 1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho $IMO = 30^0$.

A. $\left(\pm\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **B.** $M\left(\frac{3}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C.** $M\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$ **D.** $M\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2}\right)$

Bài 5: (ĐH-2009-B) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng Δ_1 : x – y = 0, Δ_2 : x – 7y = 0. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C)

A. $K\left(\frac{8}{5};\frac{-4}{5}\right)$ **B.** $K\left(\frac{-8}{5};\frac{4}{5}\right)$ **C.** $K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$ **D.** $K\left(\frac{-8}{5};\frac{-4}{5}\right)$

Bài 6: (ĐH-2009-B) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh A(-1;4) và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng Δ : x – y – 4 = 0. Xác định toạ độ các điểm B và C , biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

A. $B_1\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)\wedge C_1\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ B. $B_1\left(\frac{-11}{2};\frac{3}{2}\right)\wedge C_1\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$

C. $B_1\left(\frac{11}{2};\frac{-3}{2}\right)\wedge C_1\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ D. $B_1\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)\wedge C_1\left(\frac{-3}{2};-\frac{5}{2}\right)$

Bài 7: (ĐH-2010-A Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* , cho hai đường thẳng d_1: $\sqrt{3}x+y=0$ và d_2: $\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

A. $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$ **B.** $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$

C. $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$ **D.** $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=4$

Bài 8: (ĐH-2010-A Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh *A*(6; 6), đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh *AB* và *AC* có phương trình *x* + *y* – 4 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh *B* và *C*, biết điểm E(1; –3) nằm trên đường cao đi qua đỉnh *C* của tam giác đã cho.

A. B_1 (1; -4); C_1 (-4; 1) hay B_2 (-6; 2); C_2 (2; -6)

B. B_1 (0; -4); C_1 (-4; 0) hay B_2 (-6; 2); C_2 (2; -6)

C. B_1 (0; -4); C_1 (-4; 0) hay B_2 (6; 2); C_2 (2; 6)

D. B_1 (0; 4); C_1 (4; 0) hay B_2 (-6; 2); C_2 (2; -6)

Bài 9: (ĐH-2010-D Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A(3;-7),trực tâm là H(3;-1), tâm đường tròn ngoại tiếp là I(-2;0). Xác định toạ độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

A.($\sqrt{65}-2$; 3) B.($\sqrt{65}+2$; 3)) C.($\sqrt{65}+2$; -3) D.($\sqrt{65}+2$; 13)

Bài 10: (ĐH-2010-D Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(0;2) và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Tìm H

A. $\left(\pm\sqrt{4\sqrt{5}-8};-1+\sqrt{5}\right)$ B $\left(\pm\sqrt{4\sqrt{5}-8};-1-\sqrt{5}\right)$

C. $\left(\pm\sqrt{4\sqrt{5}+8};-1-\sqrt{5}\right)$ D $\left(\pm\sqrt{4\sqrt{5}+8};-1+\sqrt{5}\right)$

Bài 11: (ĐH-2010-B) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC vuông tại A có đỉnh C(–4; 1), phân giác trong của góc A có phương trình x + y – 5 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC biết tam giác ABC có diện tích bằng 24 và điểm A có hoành độ dương.

A. 3x + 4y + 16 = 0 **B.** 4x + 3y – 16 = 0 **C.** 3x - 4y – 16 = 0 **D.** 3x + 4y – 16 = 0

Bài 12: (ĐH-2010-B) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(2; $\sqrt{3}$); elip (E): $x^2 / 3 + y^2 / 2 = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của E (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔANF_2.

A. $(x+1)^2+\left(y+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$ **B.** $(x+1)^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$

C. $(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$ **D.** $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}$

Bài 13: (ĐH-2011-A) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: x + y + 2 = 0 và đường tròn (C): $x^2 + y^2 – 4x – 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

A. M(2; –4) B. M(3;- 1) C. M(3; 1) D. M(2; 4)

Bài 14: (ĐH-2011-A Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $x^2 / 4 + y^2 / 1 = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

A. A($\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}$), B($\sqrt{2};\frac{-1}{\sqrt{2}}$) B.($-\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}$), B($\sqrt{2};+\frac{1}{\sqrt{2}}$)

C. A($\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}$), B($\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}$) D.($\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}$), B($\sqrt{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}$)

Bài 15: (ĐH-2011-B) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Cho D (3; 1) và đường thẳng EF có phương trình y – 3 = 0. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

A. (3; $\frac{13}{3}$) B. (-3; $\frac{13}{3}$) C. (3; - $\frac{13}{3}$) D. (4; $\frac{13}{3}$)

Bài 16: (ĐH-2011-D) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh B(-4; 1), trọng tâm G(1; 1) và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình x – y – 1 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh C.

A. $(3;-1)$ B. (-3;1) C. (3; 2) D. (3;-2)

Bài 17: (ĐH-2011-D) Trong mặt phẳng tỏa độ Oxy, cho điểm A(1; 0) và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A.

A. y = 2 ; y = – 3 B. y = -1 ; y = – 3 C. y = 1 ; y = – 3 D. y = 1 ; y = – 2

Bài 18: (ĐH-2012-A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho CN = 2ND. Giả sử $M\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình 2x – y – 3 = 0. Tìm tọa độ điểm A.

A. A (-4; 5) A (-1; -1) B. A (4; -5) A (1; -1)
C. A (4; 5) A (1; -1) D. A (-4; 5) A (1; -1)

Bài 19: (ĐH-2012-A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

A $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$ **B** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{5}}=1$ **C** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$ **D** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Bài 20: (ĐH-2012-B) Trong mặt phẳng có hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường tròn (C_1) : $x^2+y^2=4$, (C_2): $x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng *d*: $x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với *d* và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt *A* và *B* sao cho *AB* vuông góc với d.

A. $x^2+y^2-6x-6y+10=0$ **B.** $x^2+y^2+6x-6y-10=0$

C. $x^2+y^2+6x+6y+10=0$ **D.** $x^2+y^2-6x-6y-10=0$

Bài 21: (ĐH-2012-B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi *ABCD* có *AC = 2BD* và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh *A, B, C, D* của hình thoi. Biết *A* thuộc *Ox*.

A $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ B $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$ C $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}=1$ D $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$

Bài 22: (ĐH-2012-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là x + 3y = 0 và x – y + 4 = 0; đường thẳng BD đi qua điểm M $(-\frac{1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ C

A. (3; -2) **B.** (3; 1) **C.** (3; -1) **D.** (-3; -1)

Bài 23: (ĐH-2012-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: 2x – y + 3 = 0. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho AB = CD = 2.

A. $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 10$

B. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$

C. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 10$

D. $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Bài 24: (ĐH-2013-A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B, biết rằng N(5;-4).

A.(-4;-7) B.(-4; 7) C.(4;-7 D.(4; 7)

Bài 25: (ĐH-2013-A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho AB = $4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Tìm tâm đường tròn

A. I (-5; 3); I (5; -3) **B.** I (5; 3); I (-5; -3)

C. I (5; 0); I (-5; 0) **D.** I (15; 13); I (-5; -3)

Bài 26: (ĐH-2013-B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và AD = 3BC. Đường thẳng BD có phương trình x + 2y – 6 = 0 và tam giác ABD có trực tâm là H (-3; 2). Tìm tọa độ các đỉnh C

A. (-1; 6) B. (-1; -6) C. (1; 6) D. (0; 6)

Bài 27: (ĐH-2013-B) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5};-\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là D (5; 3) và trung điểm của cạnh AB là M (0; 1). Tìm tọa độ đỉnh C.

A. (-9; 11) B. (-9; -11) C. (9; 11) D. (9; -11)

Bài 28: (ĐH-2013-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm H(-2; 4) và điểm I(-1; 1) lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

A. (4; 1) (-1; 6). B. (-4; -1) (-1; 6). C. (4; 1) (1; 6). D. (4; 1) (1; -6).

Bài 29: (ĐH-2013-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng Δ: y – 3 = 0. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm (C), các đỉnh N và P thuộc đường thẳng Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ đỉnh P.

A. $(-1;3)$ $(3;3)$ B. $(-1;3)$ $(3;3)$ C . $(-1;3)$ $(3;3)$ D. $(-1;3)$ $(3;3)$

Bài 30: (ĐH-2014-A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho AN = 3NC. Viết phương trình đường thẳng CD biết rằng M(1;2) và N(2;-1).

A. 3x+4y-15=0; y=2 B. -3x-4y-15=0; y=2

C. 3x-4y15=0; y=-2 D. 3x-4y15=0; y=2

Bài 31: (ĐH-2014-B-D) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm D (1; -1). Đường thẳng AB có phương trình 3x + 2y – 9 = 0, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường thẳng BC.

A. x + 2y - 1 = 0; 19x - 22y + 3 = 0

B. x + 2y + 1 = 0; 19x + 22y + 3 = 0

C. x + 2y - 1 = 0; 19x + 22y - 3 = 0

D. x - 2y + 1 = 0; 19x - 22y + 3 = 0

Bài 32: (ĐH-2015-A) Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu của vuông góc C trên đường thẳng AD. Giả sử H (-5;-5), K (9;-3) và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng : x - y + 10 = 0 . Tìm tọa độ điểm A

A.(-15; -5) B.(15; 5) C.(-15; 5) D.(- 5; 5)

Bài 33: (ĐH-2016-A) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đường tròn đường kính *BD*. Gọi *M*, *N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên các đường thẳng *BC*, *BD* và *P* là giao điểm của hai đường thẳng *MN*, *AC*. Biết đường thẳng *AC* có phương trình $x-y-1=0$, $M(0;4)$, $N(2;2)$ và hoành độ điểm *A* nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm *B*.

A. $(-1;4)$ B. $(1;4)$ C. $(-1;-4)$ D. $(0;4)$

1B	2A	3A	4B	5C	6A	7A	8B	9A	10A
11D	12C	13A	14C	15A	16A	17C	18C	19D	20A
21A	22C	23A	24A	25B	26A	27C	28A	29A	30D
31B	32C	33A							

XUỐNG NÚI – LUYỆN ĐỀ
Đề thi thử số 1 – thời gian 90 phút

Câu 1. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số y=$\frac{3-x}{x-3}$ là:

A. y=2 B.y=1 C. y= -1 D. y=$\frac{1}{3}$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số sau F(x)=$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}$

A. –ln|1+cosx|+C B.ln(sinx+cosx)+C

C.ln(1+cosx)+C D.ln(1+$\frac{\cos x}{\sin x}$)+C

Câu 3. Tính $[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}$ biết $\vec{a}(4,2,5)$, $\vec{b}(3,1,3)$, $\vec{c}(2,0,1)$

A. 3 B.2 C.1 D.0

Câu 4. Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$ .Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là:

A.1 B.3 C.4 D.6

Câu 5. Cho sinx = $\frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2}$< x <π . Tính tan($\frac{\pi}{4}$ - x)?

A.5 B.6 C.7 D.8

Câu 6. Số nghiệm của phương trình: $x^2.3^x+3^x(12-7x)=-x^3+8x^2-19+12$

A.1 B.2 C.3 D.4

Câu 7. Cho tam giác ABC với A(1;0), B(2;1), C(3;5). Diện tích tam giác ABC là:

A. $\frac{1}{2}$ B.1 C. $\frac{3}{2}$ D.2

Câu 8. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a.
Mặt phẳng (L) tạo với (ABC) một góc 30^o và cắt tất cả các cạnh bên tại M, N, P.
Khi đó, S_{MNP} bằng:

A. $\frac{a^2}{2}$ B. a^2 C. $\frac{2a^2}{3}$ D.3 a^2

Câu 9. Hàm số y = $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+mx+3$ nghịch biến trên (1;3) khi m=?

A.3 B.-6 C.-5 D.-2

Câu 10. Cho tam giác ABC có A(1,0,0), B(0,0,1), C(2,1,1). Diện tích tam giác ABC là:

A.2 B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D.12

Câu 11. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn: $z^2=|z|^2+\bar{z}$?

A.0 B.1 C.2 D.3

Câu 12. Cho tam giác ABC với A(3;m), B(m+1; -4). Tìm m để cho diện tích tam giác OAB đạt giá trị nhỏ nhất:

A. $\frac{-1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C.0 D.1

Câu 13. Chọn công thức lượng giác đúng trong các công thức sau:

A.sin3x=4$(\sin x)^3$ - 3sinx B.sin3x=3sinx+4$(\sin x)^3$

C.$\cos 3x=4(\cos x)^3-3\cos x$ D.$\cos 3x=3\cos x-4(\cos x)^3$

Câu 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, SA=a$\sqrt{3}$, SA $\perp$ BC. Tính góc giữa SD và BC?

A. 30^o B. 45^o C.60^o D.90^o

Câu 15. Tìm n biết $C_{n+2}^{n}+C_{n+2}^{n+1}$=7(n+3)

A.10 B.11 C.12 D.13

Câu 16. Tổng hai nghiệm của phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

A. -1 B.0 C.1 D.2

Câu 17. Kết quả của tích phân $I=\int_0^4 \frac{1}{1+2\sqrt{2x+1}}dx$ là

A.$1+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$ B.$1-\frac{1}{3}\ln\frac{7}{3}$ C.$1-\frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$ D.$1+\frac{1}{4}\ln 2$

Câu 18. Tìm hàm số có tiệm cận xiên?

A.$y=\frac{x+1}{x-2}$ B. $\frac{x^2-3x-1}{x-1}$ C. $y=x^3-3x^2+4$ D. $y=x^4-x^2+2$

Câu 19. Cho tứ diện ABCD có A(2,-1,1), B(3,0,-1), C(2,-1,3) và D thuộc trục Oy. Biết thể tích khối tứ diện bằng 5. Tung độ của điểm D là:

A, 2 hoặc -2 B. 4 hoặc -4 C. -18 hoặc 12 D. 0 hoặc -2

Câu 20. Cho số phức z thỏa mãn: $(1-2i)z-\frac{2-i}{1+i}=(3-i)z$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là:

A.Đường thẳng B. Đường tròn C.Điểm D.Ellip

Câu 21: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2+10x+9\le 0 \\ x^2-2x+1-m\le 0 \end{cases}$

A. m≤9 B. m∈[-9;-1] C. m > -1 D. m≥4

Câu 22: Elip(E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ có tâm sai là:

A.1 B.3 C.$\frac{\sqrt{5}}{3}$ D.1

Câu 23: Tìm n sao cho trong khai triển $(x+2)^n$ hạng tử thứ 11 là số hạng có hệ số lớn nhất?

A.14 B.16 C.18 D.20

Câu 24: Cho tứ diện ABCD có AB=CD=2a.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, MN=a$\sqrt{3}$. Góc giữa AB và CD là:

A. 30^o B.45^o C.60^o D.90^o

Câu 25: Cho $(\Delta_1):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-2-2t \end{cases};(\Delta_2):\begin{cases} x=2+t' \\ y=1-t' \\ z=1 \end{cases}$

Vị trí tương đối của hai đường thẳng là:

A. Song song B. Chéo nhau C. Cắt nhau D. Trùng nhau

Câu 26: Tìm x để 3 số sau lập thành 1 cấp số cộng: $\ln 2, \ln(2^x-1), \ln(2^x+3)$

A.2 B.1 C. $\log_2 5$ D. $\log_2 3$

Câu 27: Đạo hàm của hàm số y= $\log_a x$ là:

A. $\frac{1}{x}$ B. $a^x \ln a$ C. $\frac{1}{2}$ $a^x \ln a$ D. $\frac{1}{x\ln a}$

Câu 28: Cho $\vec{a}(1;t,2)$, $\vec{b}(t+1,2,1)$, $\vec{c}(0,t-2,2)$. Xác định t để $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng:

A. 1 B.-2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

Câu 29: Tìm đạo hàm số: y= 2^x

A. $\frac{2}{x}$ B. $2^x \ln 2$ C. 2^x D. $\frac{1}{2^x \ln 2}$

Câu 30. Cho z_1, z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình $z^2+3(1+i)z+5i=0$ Tổng phần thực của 2 số z_1, z_2 là?

A. -2 B.-3 C.-4 D.-5

Câu 31. Cho M(0;3) và N(1;4). Tìm trên trục hoành điểm D sao cho diện tích tam giác MNP bằng 2016. Một trong hai điểm đó có hoành độ là:

A.4028 B.4029 C.4030 D.4031

Câu 32: Nghiệm của bất phương trình: $\begin{cases} x^2-2x\le 0 \\ x^4-5x^2+4\le 0 \\ -2x^2+x+3>0 \end{cases}$ là:

$A.\left(1;\frac{3}{2}\right]$ $B.\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $C.(-2;-1)$ $D.(-2;-1)\cup(1;2]$

Câu 33: Tính tổng của n số hạng: 3 + 33 + 333 + ⋯

A. $\frac{9+3^n+10^n}{27}$ B. $\frac{1}{27}(10^{n+1}-10-9n)$ C.Đáp án khác D. $\frac{10^n-27}{9}$

Câu 34. Số đo của góc nhỏ nhất tứ giác lồi, biết rằng 4 góc đó lập thành 1 cấp số cộng và góc nhỏ nhất bằng $\frac{1}{5}$ góc lớn nhất là:

A.50^0 B.40^0 C.30^0 D.20^0

Câu 35: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật, AB=a, BC=2a. Mặt ($\propto$) tạo với đáy (A'B'C'D') một góc 30^0 và cắt tất cả các cạnh bên. Diện tích thiết diện của ($\propto$) và lăng trụ là:

A. $2a^2$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2$ C. $\frac{a^2}{2}$ D.$4a^2$

Câu 36: Cho z_1, z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình $z^2-2z+1+2i=0$. Giá trị của $P=|z_1|+|z_2|$?

A.5 B.$1+\sqrt{5}$ C. $2+2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{13}$

Câu 37. Nguyên hàm của hàm số: $F(x)=3^x$ là?

A. $\frac{3^x}{\ln 3}+C$ B. 3^x+C C. $3^x\ln 3+C$ D. $\frac{3^x}{x+1}+C$

Câu 38. Cho 3 điểm A(1,2,3),B(3,5,4), C(3,0,5). Chu vi tam giác ABC là:

A.12 B. $\sqrt{14}+\sqrt{18}+\sqrt{20}$ C. $\sqrt{12}+\sqrt{14}+\sqrt{26}$ D. $\sqrt{7}+\sqrt{13}+\sqrt{8}$

Câu 39. Phương trình chính tắc của Elip (E) có trục lớn là 6, tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$ là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=0$

Câu 40: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân AB=AC=a, $BAC=120^o$,BB'=a. I là trung điểm của CC'. Tính cosin góc giữa (ABC) và (AB'I)?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 41: Cho (Δ): x-2y+1=0 và hai điểm A(1;2), B(0;-1). Tung độ của điểm M thuộc (Δ) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M là:

A. 1 hoặc $\frac{-4}{9}$ B.0 hoặc $\frac{7}{5}$ C. 1 hoặc $\frac{7}{3}$ D. Đáp án khác

Câu 42. Cho y=cosx,đạo hàm cấp 8 của hàm số là:

A.sinx B.cosx C.cos(x+4π) D.tanx

Câu 43. Cho (d): $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{1}$. (P) : 2x+y-2z+9=0, (Q):x-y+z+4=0. Một phương trình mặt cầu có tâm thuộc (d), tiếp xúc với (P) và cắt (Q) theo một đường tròn có chu vi 2π là:

A. $x^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$ B. $(x-2)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$

C. $(x+3)^2+(y-5)^2+(z-7)^2=4$ D. $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=4$

Câu 44: Cho A(2, −3, −1), B(4, −1,2), phương trình mặt phẳng trung trực của AB là:

A.2x+2y+3z+1=0 B.3x+5x+z=0

C.x+y-z=0 D.4x+4y+6z-7=0

Câu 45: Cho hàm số f(x)= $\frac{x^3}{3}-x^2-3x$. Tổng hai nghiệm của hàm số f'(x)=0 là:

A.4 B.3 C.2 D.1

Câu 46: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ A đến (SBC) là:

A. $\frac{3a}{4}$ B. $\frac{3a}{2}$ C.a D. $\frac{3}{4}$

Câu 47: Cho tam giác ABC biết A(4;4), B(0;2), C(8;-4). Diện tích tam giác ABC là

A.5 B.10 C.15 D.20

Câu 48: Tính $y^{(10)}$ của y=$\frac{1}{x+1}$

A. $\frac{3628800}{(x+1)^{11}}$ B. $\frac{362880}{(x+1)^{11}}$ C. $\frac{36288}{(x+1)^{11}}$ D. Đáp án khác

Câu 49. Cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ và (P):2x+2y-z+16=0 Điểm M di động trên (S), N di động trên (P). Độ dài ngắn nhất của MN là:

A.5 B.4 C.3 D.2

Câu 50. Cho hàm số y=$\frac{2x-1}{x+1}$(C). Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) là? (Biết tiếp tuyến vuông góc với (d): x+3y+2=0

A.1 B.2 C.3 D.4

Đáp án

1.C	**2.A**	**3.D**	**4.C**	**5.C**	**6.C**	**7.C**	**8.A**	**9.A**	**10.B**
11.D	**12.A**	**13.C**	**14.C**	**15.C**	**16.A**	**17.C**	**18.B**	**19.C**	**20.C**
21.D	**22.C**	**23.D**	**24.C**	**25.B**	**26.C**	**27.D**	**28.D**	**29.B**	**30.B**
31.B	**32.B**	**33.B**	**34.C**	**35.B**	**36.B**	**37.A**	**38.C**	**39.B**	**40.C**
41.B	**42.C**	**43.C**	**44.D**	**45.C**	**46.D**	**47.D**	**48.D**	**49.D**	**50.C**

Đề thi thử số 2 – thời gian 90 phút

Câu 1. Cho tam giác ABC có A(2; −1; 6), B(−3; −1; −4), C(5; −1; 0). Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:

A.2 B.3 C. $\sqrt{5}$ D.1

Câu 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ có hệ số góc bằng 2 là:

A. y = 2x + 7 B.y = 2x − 2 C. y = 2x D. y=2x − 4

Câu 3: Phần thực của số phức z thỏa mãn điều kiện $z(1-2i)+\bar{z}=10-4i$ là:

A. -1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 4: Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=0$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-11=0$. Vị trí tương đối giữa (S) và (P) là:

A. Cắt nhau B. Tiếp xúc C. Không cắt nhau D. Đáp án khác

Câu 5: Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x^3-\frac{2}{x})^n$ biết $2C_n^1-C_n^2+n=0$.

A. 125 B.35 C.540 D.560

Câu 6: Tâm của đường tròn giao tuyến của mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-11=0$ có cao độ bằng:

A.2 B. 3 C. -3 D. 1

Câu 7. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B,AB = 3a, AC= $a\sqrt{10}$, SA vuông góc với đáy.

Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60^o . Thể tích khối chóp là:

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{7}$ C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 8. Tiếp tuyến đi qua M(−1;−9) của hàm số: $y=4x^3-6x^2+1$ có phương trình là:

A. y = 24x − 15 B. y= 24x + 15 C. y= 4x D.y=24x

Câu 9. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có A(4; 0; 0), B(0; 3; 0), C(2; 4; 0). Tọa độ điểm B' là bao nhiêu để thể tích khối chóp bằng 10?

A. (1; −2; 0) B. (2; 0; −5) C. (1; 1; 3) D. (0; 3; 6)

Câu 10. Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}. Có bao nhiêu số có 8 chữ số lập từ các số trên sao cho chữ số 1 có mặt hai lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, các chữ số khác có mặt 1 lần?

A. 1120 B. 3360 C. 2240 D. Đáp án khác

Câu 11: Phương trình $36^x-7.6^x+6=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Tổng x_1, x_2 là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 12: Tính tích phân $I=\int_0^4\frac{1}{1+2\sqrt{2x+1}}dx$

A.1 B. $1-\frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$ C.3 D.2

Câu 13. Cho số phức thỏa mãn $z+(1-2i)\bar{z}=2-4i$. Tìm mô đun của số phức w= z^2-z ?

A.5 B.4 C. $\sqrt{10}$ D. Đáp án khác

Câu 14: Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. f(x)=x+1 B. f(x)=sinx+cosx

C. f(x)=x+5 D. $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}(x \neq -1) \\ 2(x=-1) \end{cases}$

Câu 15: Cho 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tổng các số ghi trên trên 3 thẻ là một số chia hết cho 2 là:

A. 0,75 B. 0,5 C. 0,25 D.0,2

Câu 16. Cho tam giác ABC có A(4; 8), B(−8; 2), C(−2; −10). Viết phương trình đường cao còn lại của tam giác ABC.

A. x+3y+2=0 B. x-3y+6=0 C. x-y-2=0 D. Đáp án khác

Câu 17. Tích phân $\int_0^{\sqrt{a}} x^3\sqrt{x^2+1}dx = \dfrac{58}{15}$ khi đó a=?

A. 2 B. 3 C.4 D.5

Câu 18. Tìm m để hàm số sau không có cực trị $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$?

A. $-4 < m < 2$ B. $m \le 4$ và $m \ge 2$ C. m=2 D.m=4

Câu 19. Công sai của cấp số cộng $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_7 + u_6 = 19 \end{cases}$ là

A. 0 B. $\dfrac{-1}{5}$ C.3 D.2

Câu 20: Cho phương trình $x^3 + 4x - 1 = 0$ khẳng định nào sau đây là sai

A.Hàm số liên tục trên R B. Phương trình luôn có ít nhất 1 nghiệm

C. Phương trình có nghiệm x $\in(-\infty;0)$ D. Phương trình có nghiệm x$\in$(-1;1)

Câu 21.Kết quả của tích phân I= $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{3^x+1}dx$ là

A. $\dfrac{\pi}{16}$ B. $\dfrac{3\pi}{16}$ C. $\dfrac{5\pi}{16}$ $\dfrac{7\pi}{16}$

Câu 22: Cho $|z+i|=|z+2|$. Tập hợp biểu diễn số phức z là

A. Điểm B. Elip C. Đường tròn D. Đường thẳng

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\dfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \dfrac{9}{2}x - m = 0$

A. m <2 B.m<0 , m>2 C. m>0 D. m=0

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $3^x - 3^{1-x} = 2$ là:

A. Vô nghiệm B. 1 C. 2 D. 3

Câu 25. Cho A(1; 0), B(−2; 4), C(−1; 4), D(3; 5). Tìm hoành độ điểm M thuộc đường thẳng 3x-y-5=0 sao cho hai tam giác MAB và MCD có diện tích bằng nhau?

A. 0 hoặc 1 B. 1 hoặc 2 C. -1 hoặc 3 D. Đáp án khác

Câu 26: Nghiệm của phương trình $\sin^3 x + \cos^4 x = 1$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ C. $k\pi$ D. Đáp án khác

Câu 27. Trong khai triển $P_{(x)} = (5-4x)^n$. Tổng tất cả lũy thừa lẻ của x là:

A. Không đủ điều kiện để xác định B. 9^n C. 9! D. $\frac{1-9^n}{2}$

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số sau $y = x^2 - x - 3$ và y=x là

A. 5 B.6 C.7 D. $\frac{32}{3}$

Câu 29. Cho A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và $(\Delta): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Điểm M thuộc (Δ) để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. M có tung độ là:

A.1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 30: Cho sina+cosa=1,25 và $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ giá trị của cos 2a là:

A.0,25 B. $\frac{-5\sqrt{7}}{16}$ C. $\frac{-9\sqrt{7}}{35}$ D. Đáp án khác

Câu 31: Kết quả của $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.\sin^3 x dx$ là:

A.1 B. $\frac{2}{5}$ C.0,5 D.2

Câu 32. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau?

A.0,2 B.0,4 D.0,3 D.0,1

Câu 33. Cho $(C): y = x^3 - 3x^2 + m$ nếu (C) nhận A(1;3) làm tâm đối xứng thì giá trị của m là:

A. 5 B. 4 C. 3
D. 2

Câu 34: Nghiệm của phương trình: $\log_2(x^3+1) - \log_2(x^2-x+1) - 2\log_2 x = 0$ là:

A. x=-2 B.x=1 C.x=3 D. Đáp án khác

Câu 35: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là:

A. $\frac{3}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{3}{5}$ D. 3

Câu 36: Có hai số thực a, b để phương trình $z^2 + az + 5b = 0$ nhận số thực z=1+2i làm nghiệm thì a+b=?

A.2 B.-1 C.3 D.4

Câu 37. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{-2x+2}$. Tìm m để đường thẳng y=x-m cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục tung?

A. $\frac{-7}{12}$ B. 0,5 C.1 D.2

Câu 38. Phần thực của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} z + \bar{z} = 10 \\ |z| = 13 \end{cases}$ là:

A.2 B.3 C.4 D.5

Câu 39. Nghiệm của phương trình sin2x-cos2x=2sinx-1 là

A. $\frac{\pi}{2}+k2\pi$ B. $\begin{cases} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{cases}$ C. $x=k\pi$ D. Đáp án khác

Câu 40: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là:

A. 2x-y-2=0 B. x+y+1=0 C. 2x+y-4=0 D. Đáp án khác

Câu 41: Tìm hệ số chứa x^8 trong khai triển $\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)(1+2x)^{2n}$ biết $3C_n^3=7C_n^2$

Đáp số: ____

Câu 42. Biết $I=\int_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\ln 2$,. Giá trị của a là:

A.1 B.ln2 C.2 D.3

Câu 43. Cho ba điểm B(1; 0; 1), C(−1; 1; 0), D(2; −1; −2). Phương trình mặt phẳng qua B, C, D là

A. -4x-7y+z-2=0 B.x-2y+3z-6=0
C.x-2y+3z+1=0 D.4x+7y-z-3=0

Câu 44. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x(C)$.Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại của (C) và vuông góc với tiếp tuyến của (C) tại gốc tọa độ?

A.y=3x B. $y=\frac{-1}{3}x+\frac{5}{3}$ C. Đáp án khác. D. y=2x+3

Câu 45: Có ba khẩu súng 1, 2, 3 bắn độc lập vào một hồng tâm. Mỗi khẩu bắn một viên. Xác suất bắn trúng lần lượt là: 0,7; 0,8; 0,5. Tính xác suất có ít nhất một khẩu bắn trúng?

A. 0,5 B. 0,851 C. 0,47 D. 0,97

Câu 46: Tìm mô đun của z biết $z+2(i-z)\bar{z}=3i-1$?

A. $\sqrt{2}$ hoặc $\frac{\sqrt{185}}{10}$ B. 3 hoặc 2 C. 4 D. Đáp án khác

Câu 47. Tập xác định của phương trình $\log_2(x^3+1)-\log_2(x^2-x+1)-2\log_2 x=0$ là

A. x<1 B.x>0 C. x khác 3 D. R

Câu 48. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{-x-2}{x-1}$, trục hoành và các đường thẳng x=-1,x=0 là:

A. 2ln2 B.3 C.3ln2-1 D. Đáp án khác

Câu 49. Cho $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$

A. 495 B.450 C. 840 D. 240

Câu 50: Cho hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm là nghiệm của phương trình f''(x)=0 là:

A.1 B. $\frac{1}{2}$ C.2 D.3

1.C	**2.A**	**3.C**	**4.A**	**5.D**	**6.C**	**7.C**	**8.B**	**9.D**	**10.B**
11.A	**12.B**	**13.C**	**14.D**	**15.B**	**16.A**	**17.B**	**18.A**	**19.B**	**20.C**
21.B	**22.D**	**23.B**	**24.B**	**25.D**	**26.A**	**27.D**	**28.D**	**29.D**	**30.B**
31.B	**32.B**	**33.A**	**34.D**	**35.B**	**36. B**	**37.A**	**38.D**	**39.B**	**40.A**
41.	**42.C**	**43.D**	**44.B**	**45.D**	**46.A**	**47.B**	**48.C**	**49. A**	**50.B**

Gợi ý

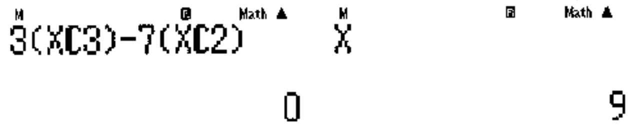
Câu 41:

Cách 1:

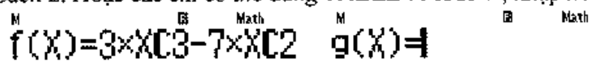
Các em nhập như sau:

Câu lệnh này có tác dụng tăng X lên 1 đơn vị rồi tính giá trị biểu thức

Sau đó bấm CACL rồi cho X=2 rồi cứ ấn = tới khi xuất hiện 0



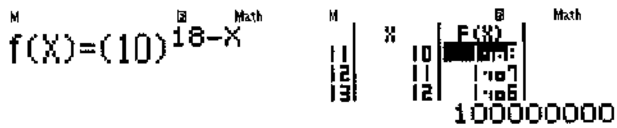
Cách 2: Hoặc các em có thể dùng TABLE : Mode 7 , nhập xong ấn "=" nhé



Vậy được $n=9$

x^8 trong khai triển $\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)(1+2x)^{2n}$

Ta xét riêng khai triển này: $(1+2x)^{2n}$ Cho Start 0= ; End 18= ; Step 1=



Vậy ta quan tâm tới $k=10,11,12 \to x^8, x^7, x^6$

Số hạng x^8 của khai triển là : $\frac{1}{4}.C_{18}^{10}2^8x^8 + x.C_{18}^{11}2^7x^7 + x^2.C_{18}^{12}2^6x^6 = 8062080x^8$ Hệ số: 8062080

Đề thi thử số 3 – thời gian 90 phút

Câu 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số y=$-x^3+3x-2$ và y=-x-2?

A.4 B.6 C.8 D.10

Câu 2. Xác định tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn |2iz-1|=$\sqrt{5}$ là đường tròn có tâm hoành độ là.

A.-1 B.0 C.1 D.2

Câu 3. Cho (P):x-y+z+2=0 và A(1;-1;2). Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) là:

A. (0;1;-1) B.(-1:3:-2) C.(-1;2;3) D.(3;0;2)

Câu 4. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân 3 số ghi trên 3 thẻ với nhau. Tính xác xuất để tích nhận được là một số lẻ?

A. $\frac{3}{42}$ B. $\frac{5}{42}$ C. $\frac{7}{39}$ D. $\frac{6}{43}$

Câu 5. Cho tứ diện O.ABC với A(1; 2; −1), B(2; −1; 3), C(−2; 3; 3), D(0; 0; 0). Thể tích tứ diện O.ABC là:

A. $\frac{40}{3}$ B. $\frac{20}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

Câu 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật cạnh AB = 2a, AD = a. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AB, SC tạo với đáy một góc 45^0 . Thể tích khối chóp là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3}{3}$ D.Đáp án khác

Câu 7: Đồ thị hàm số y=$\frac{2x+1}{x-1}$. Có tâm đối xứng có tọa độ là:

A.(2;1) B.(1;2) C. (1;-2) D. (2;-1)

Câu 8: Nghiệm của phương trình $\log_2(9^x-1)=x\log_2 3+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}$ là:

A.1 B.2 C.4 D. $\log_3 4$

Câu 9. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn|z-2|=|z| và (z+1)($\bar{z}$-1) là số thực:

A.0 B.1 C.3 D.4

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn: 3(z+1-i)=2i($\bar{z}$+2) tìm modum của số phức w=z+iz+5?

A.4 B.5 C.6 D. $\sqrt{13}$

Câu 11: Cho ba điểm A(1; 2; 1), B(0; −1; 0), C(3; −3; 3). Tìm tọa độ D sao cho ABCD là hình chữ nhật?

A. (4; 0; −2) B. (4; 0; 4) C. (2; 0; 2) D. Đáp án khác

Câu 12: Hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2+2)^n$ biết $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$ là

A.210 B.240 C.Đáp án khác D.280

Câu 13: Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho các số phức là nghiệm của phương trình $z^2+2z+3=0$ tính độ dài AB:

A.5 B.7 C.10 D.$2\sqrt{2}$

Câu 14: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^3-\frac{9}{2}\cos^2+3\cos x+\frac{1}{2}$ là

A.-7 B.-8 C.4 D.-9

Câu 15: Tìm hai số thực (x;y) thỏa mãn $x(3+5i)+y(1\text{-}2i)^3=9+14i$ là

A.(1;1) B.(1;-2) C.($\frac{172}{61};\frac{-3}{61}$) D. Đáp án khác

Câu 16: Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)-2\log_4(5-x)<1-\log_2(x-2)$ là:

A. $-4 < x < 3$ B. $2 < x < 3$ C. $2 < x < 5$ D. $3 < x < 5$

Câu 17: Tập hợp nghiệm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$ là:

A. Đường thẳng B. Điểm C. Đường tròn D. Elip

Câu 18: Tính $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2\sqrt{2x+5}}{x+2}$

A. 0 B. 3 C. 1 D. Không tồn tại

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$. Chọn phát biểu sai:

A. Hàm số luôn đồng biến B. Hàm số không có cực trị

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng x = 1 D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang y = 1

Câu 20: Xác định m để đường thẳng y =mx-2m tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+2$?

A. m = 2 B. m = -1 C. m = 1, m = -2 D. m = 0, m = -9

Câu 21. Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu chữ số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A.128 B. 120 C. 60 D. 360

Câu 22: Cho A(3; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; −3). Tìm cao độ trực tâm của tam giác ABC?

A. $\frac{12}{7}$ B. $\frac{-12}{17}$ C.3 D. Đáp án khác.

Câu 23: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy A'ABD là hình chóp đều, AB = a, AA'=a$\sqrt{3}$. Thể tích khối hộp là:

A. $\frac{a^3}{2}$ B. a^3 C.2a^3 D. $a^3\sqrt{2}$

Câu 24: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Tìm m để $x^2(x^2-2)+3=m$ có hai nghiệm phân biệt:

A. m< 3 B. m > 3 C. m > 2 D. m > 3 hoặc m = 2

Câu 25: Khoảng cách giữa hai đường thẳng sau là:

$d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-5+t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=0\\y=4-2t'\\z=5+3t'\end{cases}$

A.4 B.5 C.2$\sqrt{17}$ D.3

Câu 26: Cho (P): $2x-y+z+2=0$ và (Q):x+y+2z-1=0 . Góc giữa (P) và (Q) là;

A.30^o B.60^o C.45^o D.90^o

Câu 27: Tổng hai nghiệm của phương trình $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}$ là:

A.1 B.8 C.7 D.9

Câu 28: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin 2x}$ là

A.0 B. $\frac{7}{12}$ C.1 D.2

Câu 29: Cho A(2; 0; −3), B(4; −2; −1), (P):x + y + 2z + 4 = 0. Phương trình đường thẳng (d) thuộc (P) sao cho mọi điểm thuộc (d) cách đều A và B có véc tơ chỉ phương là:

A. (1; −1; 1) B. (3; 1; −2) C. (1; 1; 2) D. (−1; 0; −2)

Câu 30: Cho khai triển $(1+2x)^{10}(3+4x+4x^2)^2=a_0+a_1x+...+a_{14}x^{14}$ tìm a_6?

A.2441424 B. 482496 C. 209674 D. Không có dữ kiện

Câu 31. Tìm m để đường thẳng (d): $y=-x+m$ cắt $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm A,B sao cho AB= $2\sqrt{2}$.

A. m=1, m=-2 B. m=1, m=-7 C. m=-7, m=5 D. m=1, m=-1

Câu 32: Hệ số góc của đường thẳng 2x − 3y + 3 = 0 là:

A.1 B.2 C. $\dfrac{2}{3}$ D.4

Câu 33: Cho M(2;-1;3) và $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=3t\end{cases}$ Khoảng cách từ M đến (Δ) là

A. $\sqrt{5}$ B.3 C.4 D.2

Câu 34: Tìm a để phương trình sau có nghiệm thực: $3x^2+2x+3=a(x+1)\sqrt{x^2+1}$

A. a>1 B. $a<-3$; $a\ge 2\sqrt{2}$ C. a=-3 D.a<1

Câu 35: Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^{x^2}-\cos 5x}{x^2}$?

A. ln3 B.ln8+$\dfrac{25}{2}$ C. 4 D.2

Câu 36: Phần thực của số phức $z=(1+i)^n$ biết $\log_4(n-3)+\log_5(n+6)=4$ là:

A. 0 B. 208 C. 128 D. -512

Câu 37: Với giá trị nào của m thì 2 điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ nằm về hai phía với trục hoành:

A. 2 < m < 3 B. m > 3 C. m < 3 D. $-1 < m < \sqrt{2}$

Câu 38: Hình chiếu của đường thẳng $(d):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ trên (Oxy) có phương trình là:

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$ B. $\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-3t\\z=0\end{cases}$ C. $\begin{cases}x=-1-2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$ D. Đáp án khác

Câu 39: Cấp số cộng có 3 số hạng , tổng của chúng bằng 9, tổng bình phương là 125 có số hạng thứ 2 là:

A.1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 40: Cho hàm số: $y=-x^3+3mx^2-3m-1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng (d): x + 8y − 2017 =0

A.2011 B. 2012 C. 2013 D. 2014

Câu 41: Cho điểm A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(−1; 4; 2). Diện tích tam giác ABC là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. Đáp án khác

Câu 42: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = a$\sqrt{3}$ và mặt (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Cosin của góc tạo bởi SM và DN là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

Câu 43: Số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}2x+xy+y=14\\x^3+3x^2+3x-y-1=0\end{cases}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Câu 44: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 ,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau.

A. 300 B. 400 C. 500 D. 600

Câu 45: Cho ba điểm A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(−1; 4; 2). Tính độ dài đường cao kẻ từ A của ΔABC?

A.1 B. $\sqrt{2}$ C.3 D.4

Câu 46: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BAD = 60^\circ$, SA = a. Gọi C' là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) đi qua AC song song với BD cắt SB và SD tại B', D'. Tính thể tích S.AB'C'D'?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{17}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{17}$ D. Đáp án khác

Câu 47: Cho hàm số f(x)= $\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \\ a \end{cases}$ khi x $\neq 3$ và khi x=3. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì a bằng?

A.1 B.2 C.3 D $\frac{1}{4}$

Câu 48: Cho tam giác ABC với A(1; 5), B(−4; −5), C(4; 1), tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là?

A. (2; −1) B. (5; −3) C. (1; −1) D. (1; 0)

Câu 49: Tọa độ đỉnh của parabol: $y = x^2 - 3x + 2$ có tung độ là:

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{-1}{4}$ C.1 D.0

Câu 50: Cho bốn điểm A(3; −1; 0), B(0; −7; 3), C(−2; 1; −1), D(5;4m − 1; m^2). Tìm m để 4 điểm trên tạo thành 1 tứ diện có thể tích nhỏ hơn 8?

A. m=3 B. $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};1\right) \cup (2;\frac{3+\sqrt{17}}{2}) \setminus \{0;3\}$ C.m=2 D. Không tồn tại m

Đáp án:

1.C	**2.B**	**3.B**	**4.B**	**5.B**	**6.A**	**7.B**	**8.D**	**9.B**	**10.C**
11.B	**12.D**	**13.D**	**14.D**	**15.D**	**16.B**	**17.A**	**18.B**	**19.C**	**20.D**
21.C	**22.B**	**23.D**	**24.C**	**25.C**	**26.B**	**27.D**	**28.B**	**29.B**	**30.B**
31.B	**32.C**	**33.A**	**34.B**	**35.B**	**36.D**	**37.C**	**38.A**	**39. C**	**40.C**
41.D	**42.C**	**43.C**	**44.D**	**45.B**	**46.B**	**47.D**	**48.D**	**49.B**	**50.B**

Đề thi thử số 4 – thời gian 90 phút

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(2-i)\bar{z}=4-i$, phần thực của z là:

A. 2 B. 1 C. 3. D. -1

Câu 2. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, tỉ số $\frac{SA}{a}$ sao cho khoảng cách từ M - trung điểm AB đến (SCD) bằng $\frac{a}{\sqrt{5}}$ là:

A. 1 B. 2 C. 3. D.4

Câu 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C), phương trình tiếp tuyến (C) tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là

A. $y=-3x+1$ B. $y=3x+3$ C. $y=x$ D. $y=-3x-6$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $A(4,4), B(0;2), C(8,-4)$, diện tích tam giác ABC là:

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

Câu 5. Có 2 thùng đựng táo. Thùng thứ nhất có 10 quả (6 tốt, 4 hỏng), thùng thứ 2 có 8 quả (5 tốt và 3 hỏng). Lấy ngẫu nhiên mỗi thùng 1 quả, tính xác suất để lấy được ít nhất một quả tốt.

A. $\frac{17}{20}$ B. $\frac{3}{20}$ C. $\frac{17}{40}$ D. $\frac{3}{40}$

Câu 6. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-1+3x-2x^2}{\sqrt{x-1}}$

A. $+\infty$ B. $+\infty$ C. 0 D. 1

Câu 7. Cho 3 điểm $B(1;0;1), C(-1;1;0), D(2;-1;-2)$. Phương trình mặt phẳng qua ba điểm trên là:

A. $-4x-7y+z-2=0$ B. $x-2y+3z-6=0$

C. $x-2y+3z+1=0$ D. $4x+7y-z-3=0$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=\cos x-\sin x$ là hàm số:

A. Chẵn B. Lẻ C. Không chẵn không lẻ D. Không xác định

Câu 9. Xác định tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2iz-1|=\sqrt{5}$ là đường tròn có tâm có hoành độ là:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$ là:

A. Vô nghiệm B. 1 C. 2 D. 3

Câu 11. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ A đến (SBC) là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $a\sqrt{3}$ D. $\frac{3a}{4}$

Câu 12. Kết quả của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=f(n)$. Tính f(2)?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 13. Biết $\cos a=\frac{-3}{5}, \frac{\pi}{2}<a<\pi$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{3+2\sin 2a}{4-\cos 2a}$

A. $\frac{25}{107}$ B. $\frac{26}{107}$ C. $\frac{27}{107}$ D. $\frac{28}{107}$

Câu 14. Cho $A(2,-3,-1), B(4,-1,2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là:

A. $2x+2y+3z-3=0$ B. $4x-4y-6z+\frac{15}{2}=0$

C. $x+y-z=0$ D. $4x+4y+6z-7=0$

Câu 15. Hàm số $y=f(x)=\tan x+\sin x$ là hàm số:

A. Chẵn B. Lẻ C. Không chẵn không lẻ D. Không xác định

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x\in R: x^2-x-1>0$

B. $\forall x\in R: x^2>9 \Rightarrow x>3$

C. $\forall x\in N^*: n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6

D. $\forall x\in N^*: n(n+1)$ là số lẻ

Câu 17. Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A(0,2)$ và có đỉnh I(2,5) có tổng b+c là:

A. -1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 18. Cho tứ diện O.ABC $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-\sqrt{3};3;3), O(0;0;0)$. Thể tích tứ diện O.ABC là:

A. 7 B. $\frac{20}{3}$ C. 8 D. $\frac{25}{3}$

Câu 19. Với m bằng bao nhiêu thì 2 đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2$ và y=m có 4 điểm chung?

A. m=2 B. m=1 C. $1<m<2$ D. m<1

Câu 20. Cho tam giác ABC có $a=24, b=13, c=15$. Góc nhỏ nhất của tam giác có giá trị là:

A. $26^0 32'$ B. $33^0 33'$ C. $28^0 38'$ D. $22^0 22'$

Câu 21. Gọi z_1, z_2 là căn của số phức $w=5+12i$. Giá trị của $P=|z_1|+|z_2|$ là:

A. 5 B. $1+\sqrt{5}$ C. $2+2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{13}$

Câu 22. Hình chiếu của đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$ trên mặt phẳng Oxy có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=2-3t \\ z=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$ D. Đáp án khác

Câu 23. Công thức nào sau đây không phải là công thức tính diện tích tam giác chính xác?

A. $S=\frac{abc}{2R}$ B. $S=pr$

C. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ D. $S=\frac{1}{2}ah_a$

Câu 24. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là:

A. $\frac{3}{15}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{15}$

Câu 25. Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc 60^0. Khoảng cách từ A đến (SBC) là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $a\sqrt{3}$ D. $\frac{3a}{4}$

Câu 26. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^0-a)=-\cos a$ B. $\sin(180^0-a)=-\sin a$

C. $\sin(180^0-a)=\sin a$ D. $\sin(180^0-a)=\cos a$

Câu 27. Nghiệm của phương trình $\log_2(9^x - 4) = x\log_2 3 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ là:

A. 1 B. 2 C. 4 D. $\log_3 4$

Câu 28. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120^0?

A. $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}\right)$ B. $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}\right)$ C. $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}\right)$ D. $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$

Câu 29. Một nhóm học sinh có 5 nam và 5 nữ ăn lẩu băng chuyền Kichi-kichi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các e sao cho nam nữ ngồi xen kẽ:

A. 240 B. 120 C. 1024 D. 360

Câu 30. Tích các nghiệm của phương trình: $5^{2x+1} + 7^{x+1} - 175^x - 35 = 0$

A. 0.5 B. 1 C. 1.5 D. 2

Câu 31. Tính thể tích khối chóp tứ giác đều S.ABCD có độ dài tất cả các cạnh bằng a.:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$ C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$ D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

Câu 32. Cho ba điểm A(0,1,2), B(2,-2,1), C(-2;0;1) Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C:

A. x+2y-4z+6=0 B. x+2y-4z-6=0

C. x+2y+4z-6=0 D. x-2y-4z+6=0

Câu 33. Phương trình $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, chọn phát biểu đúng:

A. $x_1 + x_2 = -2$ B. $x_1.x_2 = -1$ C. $x_1 + 2x_2 = -1$ D. $2x_1 + x_2 = 0$

Câu 34. Cho phương trình: $x^3.3^x + 27x = x.3^{x+1} + 9x^3$ tìm tổng các nghiệm của phương trình:

A. 1 B. 2 C. 3 D.4

Câu 35. Cho hàm số $y = x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 - 1$, phát biểu sai là:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ B. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

C. Hàm số không có cực tiểu D. Hàm số cắt Ox tại 2 điểm

Câu 36. Tổng các nghiệm của phương trình: $12 + 6^x = 4.3^x + 3.2^x$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

Câu 37. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B, AB=a, AC=2a và SA vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Thể tích S.ABC là: .

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\dfrac{a^3}{2}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $2a^3$

Câu 38. Gọi z_1, z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$. Tổng phần thực của hai số z_1, z_2 là:

A. -2 B. -3 C. -4 D. -5

Câu 39. Nghiệm của phương trình $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x + 2 = 4\cos^2 x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ D. Đáp án khác

Câu 40. Cho $\vec{a}(1,t,2), \vec{b}(t+1,2,1), \vec{c}(0,t-2,2)$. Xác định t để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. 1 B. -2 C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{2}{5}$

Câu 41. Công sai của cấp số cộng $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_7 + u_6 = 19 \end{cases}$ là:

A. 0 B. $\frac{-1}{5}$ C. $\frac{-2}{5}$ D. $\frac{-3}{5}$

Câu 42. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2}$. Tìm mođun của z^9?

A. $\sqrt{17}$ B. 5 C. $\sqrt{205}$ D. $16\sqrt{2}$

Câu 43. Xác định m để đường thẳng $y = mx - 2m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$?

A. m = 3 B. m = -1 C. m = 1, m = -2 D. m = 0, m = -9

Câu 44. Nghiệm của bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x \le 0 \\ x^4 - 5x^2 + 4 \le 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases}$

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$ C. $(-2;-1)$ D. $(-2;-1) \cup (1;2]$

Câu 45: Cho A(1; 5; 0), B(3; 3; 6) và (Δ): $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Điểm M thuộc (Δ) để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất có tung độ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 46. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt{1-x}}{\sin 2x}$ là:

A. 0 B. $\frac{7}{12}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}$

Câu 47. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{x}$ và đường thẳng $y = -2x + 3$ là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3} + 2\ln 2$ C. $\frac{3}{4} - \ln 2$ D. $4 + \frac{2}{3}\ln 2$

Câu 48. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$ và $(P): 2x + 2y - z + 16 = 0$. Điểm M di động trên (S), N di động trên (P). Độ dài ngắn nhất của MN là:

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

Câu 49. Phương trình chính tắc của elip (E) có trục lớn là 6, tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$ là:

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ D. $\frac{x^2}{\frac{9}{3}} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$

Câu 50. Tích các nghiệm phương trình: $\frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}} + 1 = 2^{x\sqrt{x}} + 3^{x\sqrt{x}-1}$

A.1 B. 2 C.4 D.0

ĐÁP ÁN ĐỀ 04

1A	2B	3A	4D	5A	6C	7D	8C	9B	10B
11B	12B	13C	14A	15B	16C	17A	18A	19C	20C
21D	22A	23A	24B	25D	26C	27D	28B	29A	30A
31A	32A	33D	34B	35C	36C	37A	38B	39A	40D
41B	42D	43A	44B	45D	46B	47C	48D	49B	50D

Đề thi thử số 5– thời gian 90 phút

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2;2)$ Tìm tổng a+b?

A. 2 B.4 C.6 D. 8

Câu 2: Tam giác với 3 cạnh là 5, 12 và 13 thì có diện tích là bao nhiêu?

A.20 B.30 C.$10\sqrt{2}$ D.$10\sqrt{3}$

Câu 3: Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và vuông góc với mp $(Q): 2x + y - z = 0$ có phương trình là

A. 2x − y − 1=0 B. x − 2y - 1=0 C. x + 2y + z=0 D. x + 2y − 1 =0

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, góc BAD=120^0. BD=a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là:

A. $\frac{2a^3}{\sqrt{15}}$ B. $\frac{a^3}{\sqrt{15}}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{3a^3}{4}$

Câu 5: Hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồngbiến trên miền $(0;+\infty)$khi giá trị của m là

A. $m\le 0$ B. $m\ge 0$ C. $m\le 12$ D. $m>12$

Câu 6: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$ là

A. Đườngthẳng B.Điểm C.Đườngtròn D. Elip

Câu 7: Nghiệmcủa phươngtrình: $\log_2 x + \log_2 4x = 3$ là

A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 8: Hình thoi ABCDcạnh a ,góc ABC=60 độ có diện tích bằng?

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$ D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{10}$

Câu 9: Từ các số 0, 1, 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số phân biệt?

A.20 B.16 C. 12 D. Đáp ánkhác

Câu 10: Tam giác ABC có BC = 10 ,góc A = 30 độ, . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

A.5 B.10 C. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ D. $10\sqrt{3}$

Câu11: Cho mặt cầu(S):$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng (P) : x+2y−z−11=0. Vị trí tương đối của (S) và (P)là:

A.Cắt nhau B.Tiếp xúc C. Không cắt nhau D. Đáp án khác

Câu 12: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và nhân 3 số ghi trên 3 thẻ với nhau. Tính xác xuất để tích nhận được là một số lẻ

A. $\frac{5}{42}$ B. $\frac{5}{43}$ C. $\frac{6}{43}$ D. $\frac{7}{43}$

Câu 13: Tổng hai nghiệm của phương trình sau $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$ là

A. -1 B. 1 C. 2 D. -2

Câu 14: Hàm số $y = (m-1)x^4 + (m^2-2m)x^2 + m$ có 3 điểm cực trị khi?

A $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ 1<m<2 \end{array}\right.$ B $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ 1<m<2 \end{array}\right.$ C $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ -1<m<1 \end{array}\right.$ D $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$

Câu 15: Trong khai triển $(x\sqrt[3]{x}+x^{\frac{-28}{15}})^n$ Số hạng không phụ thuộc vào x là số hạng thứ bao nhiêu, biết $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

A. 6   B. 7   C. 8   D. 9

Câu 16: Véc tơ nào là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{1}$

A.(2;-1)   B.(-1;2)   C. (-1;-2)   D. (2;1)

Câu 17: Cho tứ diện ABCD có A(2,-1,1), B(3,0,-1), C(2,-1,3) và D thuộc trục Oy. Biết thể tích khối tứ diện bằng 5. Tung độ của điểm D là:

A, 2   B. 4   C. -6   D.8

Câu 18: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn |z− 2| = |z| và (z + 1)(z□ − i) là số thực?

A.0   B.1   C.2   D.3

Câu 19.:Xác định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ luôn đồng biến trên R?

A. m<3   B. $m \geq 3$ C. m>3   D. m≤3

Câu 20.:Lập phương trình đường phân giác của góc nhọn của góc tạo bởi hai đườngthẳng: (d):x + 2y + 7 = 0 và (Δ): x − 2y − 3 = 0

A.2y-5=0   B. x + 2=0   C. 2x − 6y + 7=0   D. Không xác định

Câu 21. Phương trình sin 2x − sin x = 2 − 4 cosx có nghiệm là

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{-\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$

Câu 22: Cho ba điểm A(1;2;1), B(0;-1;0), C(3;-3;3). Tìm tọa độ D sao cho ABCD là hình chữ nhật?

A.(4;0;-2)   B.(4;0;4)   C.(2;0;2)   D. Đáp án khác

Câu 23:Tính giới hạn $\lim_{x\to 2} = \frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2}$

A.-1   B. 1   C. 0.5   D. Đáp án khác

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z-\frac{2-i}{1+i}=(3-z)$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là

A.Đường thẳng   B.Đường tròn   C.Điểm   D. Elip

Câu 25 Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-x^2-1$ phát biểu nào là sai

A. Đồ thị hàm số nhận Ox làm trục đối xứng   B. Hàm số đạt cực đại tại x =0

C.Hàm số đạt cực tiểu tại x =±1   D.Hàm số đồngbiến trên(-1;0)và(1;+∞)

Câu 26: Một lớp có 27 học sinh nữ và 21 học sinh nam. Cô giáo chọn ra 5 học sinh để tham gia thi chào mừng ngày 20/11. Tính xác suất để trong tốp ca đó có ít nhất 1 nữ?

A . $\frac{40562}{1712304}$ B . $\frac{C_{21}^3.C_{21}^2}{C_{48}^5}$ C . $\frac{C_{21}^1.C_{21}^2}{C_{48}^5}$ D. đáp án khác

Câu 27. Cho tứ diện ABCD có AB=CD=2a,Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và AD, MN = a$\sqrt{3}$ Góc giữa AB và CD là:

A.30^0 B.45^0 C. 60^0 D.90^o

Câu 28: Gọi A, B là hai điểm biểu diễn cho các số phức là nghiệm của phương trình: $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tính độ dài AB?

A. $2\sqrt{2}$ B. 2   C. 3   D. $3\sqrt{2}$

Câu 29: Hàm số y= x^3 - x+1 là hàm số

A. hàm chẵn B. hàm lẻ C. hàm không chẵn ,không lẻ D. không xác định

Câu 30: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{-x-2}{x-1}$ và trục hoành ,các đường x=-1,x=0

A. 1 B.2 C. 3ln2−1 D. 2ln3 −1

Câu 31: Tâm của đường tròn giao tuyến của mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và mặt phẳng (P): x + 2y − z − 11 = 0 có cao độ là:

A.2 B.3 C. − 3 D.1

Câu 32: phương trình $5^{2x}-24.5^{x-1}-1=0$ có nghiệm là

A. 5 B.1 C.−1 D 4

Câu 33: Gọi z_1, z_2 lần lượt là nghiệm của phươngtrình: $z^2-2z+1+2i=0$ giá trị của $P=|z_1|+|z_2|$ là

A. $1+\sqrt{5}$ B. $2+\sqrt{5}$ C. $3+\sqrt{5}$ D. $4+\sqrt{5}$

Câu 34.: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có A(4;0;0),B(0;3;0),C(2;4;0). Tọa độ điểm B' là bao nhiêu để thể tíchkhối chóp bằng10?

A.(1;−2;0) B.(2;0;−5) C. (1;1;3) D(0;3;2)

Câu 35: Cho hàm số $y=\tan 2x+\frac{2}{3}\tan^3 2x+\frac{1}{5}\tan^5 2x$, đạo hàm y' là

A. $2(1+\tan^2 2x)^3$ B. $2(2+\tan^2 2x)^3$ C. $(2+\tan^2 2x)^3$ D. $(2-\tan^2 2x)^3$

Câu 36: Cho (Δ): x − 2y + 1 = 0 và hai điểm A(1;2), B(0;-1). Tung độ của điểm M thuộc (Δ) sao cho tam giác MAB vuông tại M là

A. 0 hoặc $\frac{7}{5}$ B. 1 hoặc $\frac{7}{3}$ C. 2 hoặc $\frac{7}{4}$ D. 3 hoặc $\frac{7}{5}$

Câu 37: Cho $A(2,-3,-1), B(4,-1,2)$ phương trình mặt phẳng trung trực của AB là:

A. 4x+4y+6z-7=0 B. 3x-y-2=0 C. x+y+4=0 D. 2x-y-6=0

Câu 38: Nghiệm của bất phương trình $\log_4(x+1)-\log_4(5-x)<1$là:

A.-4<x<3 B. -1<x<19/5 C. x<3 D. 3<x<5

Câu 39: Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}. Có bao nhiêu số có 8 chữ số lập từ các số trên sao cho chữ số 1 có mặt hai lần, chữ số 2 có mặt 3 lần, các chữ số khác có mặt 1 lần?

A. 1120 B.3360 C. 2240 D. Đáp ánkhác

Câu 40 : Tính $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^2}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

A. $\frac{-1}{3}$ B. $\frac{-5}{8}$ C. $\frac{-11}{8}$ D. $\frac{-1}{8}$

Câu 41: Tam giác ABC biết A(4;4), B(0;2), C(8;-4). Diện tích tam giác ABC là:

A.5 B.10 C. 15 D.20

Câu 42. Đường tròn có tâm I(-1;3) và tiếp xúc với đường thẳng (Δ): 5x + 12y + 8 = 0 là:

A. $(x-1)^2+(y+3)^2=9$ B. $x^2+y^2-10x-4y+12=0$

C. $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ D.Đáp án khác

Câu 43: Một trong số phức thỏa mãn|z+1−2i|=5 và $z.\bar{z}=34$ có phần ảo là:

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Câu 44: Cho góc α thỏa $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ Giá trị của A= (sin4α+2sin 2α) cos α là:

A. $\frac{199}{228}$ B. $\frac{225}{128}$ C. $\frac{-123}{256}$ D. $\frac{224}{127}$

Câu 45: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ .Tìm m để hàm số có cực đại,cực tiểu?

A. m<2 B. m>3 C. m<3 D. m >2

Câu 46: Cho $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Điểm D có tung độ là bao nhiêu thì C là trọng tâm của tam giác ABD?

A. -11 B.8 C. 10 D. 9

Câu 47: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^3 x$ là:

A. $\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ B. $\frac{tanx^4}{4} + C$ C. $tanx^2 + C$ D. Đáp án khác

Câu 48; Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu chữ số có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

A. 128 B.120 C.60 D.360

Câu 49: Tam giác ABC có $A(4,0,0), B(0,3,1), C(2,4,-1)$ là tam giácgì?

A, Tam giác cân B. Tam giác vuông C. Tam giác thường D. Tam giác đều

Câu 50: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ tại điểm có hoành độ là 3 vuông góc với đường thẳng $x+9y-1 = 0$

A. 1 B.−1 C. Đáp án khác D.2

ĐÁP ÁN ĐỀ 05

1C	2B	3B	4C	5D	6B	7C	8A	9B	10B
11C	12A	13A	14B	15B	16B	17C	18B	19B	20B
21B	22B	23C	24C	25A	26D	27D	28A	29C	30C
31C	32B	33A	34D	35A	36A	37A	38B	39B	40A
41D	42D	43A	44B	45C	46A	47A	48C	49C	50C