TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
4 2012
Số 418

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kỉ niệm ngày Giải phóng miền Nam 30-4
và Quốc tế Lao động 1-5

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ KĨ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ để giải phương trình vô tỉ

PHẠM TRUNG KIÊN
(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Có rất nhiều dạng phương trình vô tỉ (chứa ẩn dưới dấu căn) và tương ứng có rất nhiều cách giải. Một trong những cách hay được áp dụng để giải chúng là phương pháp đặt ẩn phụ. Bài viết này xin giới thiệu một số kĩ thuật đặt ẩn phụ thường dùng để giải phương trình vô tỉ.

❖KĨ THUẬT 1. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai

• **Dạng 1.** $\alpha.f(x)+\beta.\sqrt{f(x)}+\gamma=0.$

Đặt $t=\sqrt{f(x)}$, $(t\ge 0)$ thì $f(x)=t^2$.

PT đã cho trở thành $\alpha.t^2+\beta.t+\gamma=0.$

• **Dạng 2.** $\alpha.(x-a)(x-b)+\beta.(x-a)\sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}+\gamma=0.$

Đặt $t=(x-a)\sqrt{\dfrac{x-b}{x-a}}$ thì $t^2=(x-a)(x-b).$

PT đã cho trở thành $\alpha.t^2+\beta.t+\gamma=0.$

• **Dạng 3.** $\alpha(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})^2+\beta(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})+\gamma=0.$

Đặt $t=\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$. PT trở thành $\alpha.t^2+\beta.t+\gamma=0.$

★**Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$x^2-4x+2=2\sqrt{x^2-4x+5} \qquad (1)$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt{x^2-4x+5}, (t\ge 0)$. PT (1) trở thành

$$t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ (loại)} \\ t=3. \end{array}\right.$$

Với $t=3$ thì $\sqrt{x^2-4x+5}=3 \Leftrightarrow x^2-4x-4=0$

$\Leftrightarrow x=2\pm 2\sqrt{2}$ là hai nghiệm của PT (1). ❒

★**Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$(x+5)(x-2)-4(x+5)\sqrt{\frac{x-2}{x+5}}+3=0 \qquad (2)$$

Lời giải. ĐK $x<-5$ hoặc $x\ge 2$.

Đặt $t=(x+5)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}} \Rightarrow t^2=(x+5)(x-2).$

PT (2) trở thành $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3. \end{array}\right.$

•Với $t=1$ thì $(x+5)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5>0 \\ (x+5)(x-2)=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x^2+3x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{53}}{2}$ (tmđk).

•Với $t=3$ thì $(x+5)\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5>0 \\ (x+5)(x-2)=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x^2+3x-19=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{85}}{2}$ (tmđk).

Tập nghiệm của PT (2) là $\left\{\dfrac{-3+\sqrt{53}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{85}}{2}\right\}$. ❒

★**Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x \quad (3)$$

Lời giải. ĐK $x\ge\dfrac{6}{7}$. Đặt $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}$, $(t\ge 0)$. PT (3) trở thành

$$t^2+t-182=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-14 \text{ (loại)} \\ t=13. \end{array}\right.$$

Với $t=13$ thì $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13$

$\Leftrightarrow \sqrt{49x^2+7x-42}=84-7x \Leftrightarrow x=6.$

Vậy PT (3) có nghiệm duy nhất $x=6$. ❒

❖KĨ THUẬT 2. Đặt ẩn phụ không triệt để

Đối với phương trình có dạng

$$\sqrt{f(x)}.Q(x)=f(x)+P(x).$$

Đặt $t=\sqrt{f(x)}\,(t\ge 0)$. PT đã cho trở thành $t^2-t.Q(x)+P(x)=0$. Đến đây tìm t theo x. Cuối cùng giải PT $\sqrt{f(x)}=t$ và kết luận nghiệm.

★ **Thí dụ 4.** *Giải phương trình*

$$2012x^2 - 4x + 3 = 2011x.\sqrt{4x-3} \qquad (4)$$

Lời giải. ĐK $x \geq \frac{3}{4}$. Đặt $t = \sqrt{4x-3} (t \geq 0)$.

PT (4) trở thành $2012x^2 - 2011xt - t^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x = \frac{-t}{2012} \leq 0 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $x = t$, ta có $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Vậy PT (4) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$. ❐

★ **Thí dụ 5.** *Giải phương trình*

$$(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1 \qquad (5)$$

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2-2x+3} (t \geq \sqrt{2})$.

PT (5) trở thành

$$(x+1)t = x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - (x+1).t + 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = x-1. \end{array}\right.$$

– Với $t = 2$, ta có $\sqrt{x^2-2x+3} = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}; x = 1-\sqrt{2}.$$

– Với $t = x - 1$ thì dẫn đến $2 = 0$ (vô lí)

Vậy PT (5) có hai nghiệm $x = 1\sqrt{2}; x = 1-\sqrt{2}$. ❐

❖ KĨ THUẬT 3. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình tích

★ **Thí dụ 6.** *Giải phương trình*

$$x = (2010+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2 \qquad (6)$$

Lời giải. ĐK $0 \leq x \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$.

Khi đó $\sqrt{x} = 1 - t^2 \Rightarrow x = (1-t^2)^2$. PT (6) trở thành

$$(1-t^2)^2 = (2011-t^2)(1-t)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1-t)^2(t^2+t-1005) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^2 = 0 \text{ (vì } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } t^2+t-1005 < 0)$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 1 = \sqrt{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (tmđk)}.$$

Vậy PT (6) có nghiệm duy nhất $x = 0$. ❐

★ **Thí dụ 7.** *Giải phương trình*

$$2(x^2+2) = 5\sqrt{x^3+1} \qquad (7)$$

Lời giải. ĐK $x \geq -1$. Đặt $u = \sqrt{x+1} (u \geq 0)$; $v = \sqrt{x^2-x+1} (v \geq 0)$. PT (7) trở thành

$$2(u^2+v^2) = 5uv \Leftrightarrow (u-2v)(2u-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2v \\ 2u = v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2-5x+3 = 0 \\ x^2-5x-3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}; x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}.$$

Vậy PT (7) có hai nghiệm như trên. ❐

★ **Thí dụ 8.** *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2 \qquad (8)$$

Lời giải. Đặt $a = \sqrt[3]{7x+1}; b = -\sqrt[3]{x^2-x-8}$;

$c = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$, ta có

$$a+b+c = 2 \Leftrightarrow (a+b+c)^3 = 8 \qquad (8')$$

$$a^3+b^3+c^3 = (7x+1)-(x^2-x-8)+(x^2-8x-1) = 8 \qquad (8'')$$

Từ (8') và (8'') ta có

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \\ \sqrt[3]{x^2-x-8} = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \\ \sqrt[3]{x^2-8x-1} = -\sqrt[3]{7x+1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x-9 = 0 \\ 7x-7 = 0 \\ x^2-x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1; x = 9 \\ x = 1 \\ x = 0; x = 1. \end{array}\right.$$

Vậy PT(8) có tập nghiệm là $S = \{-1;0;1;9\}$. ❐

❖ KĨ THUẬT 4. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đơn giản

★ **Thí dụ 9.** *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6 \qquad (9)$$

Lời giải. ĐK $x \leq 12$. Đặt $u = \sqrt[3]{24+x}; v = \sqrt{12-x}$

$\Rightarrow u \leq \sqrt[3]{36}; v \geq 0$. Ta có HPT

$$\left\{\begin{array}{l} u+v = 6 \\ u^3+v^2 = 36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = 6-u \\ u^3+(6-u)^2 = 36 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = 6-u \\ u(u^2+u-12) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 6-u \\ u = 0; u = -4; u = 3. \end{array}\right.$$

Từ đây ta tìm được $x = -24$; $x = -88$, $x = 3$.

Tập nghiệm của PT (9) là $\{-88;-24;3\}$. ❐

★KĨ THUẬT 5. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2

Đối với PT có dạng

$(\alpha x+\beta)^n = p\sqrt[n]{ax+b}+\gamma$ (với $\alpha p=a; \beta p+\gamma=b$).

Đặt $\alpha t+\beta=\sqrt[n]{ax+b}$, ta có hệ đối xứng loại 2

$$\begin{cases}(\alpha x+\beta)^n = at+b\\(\alpha t+\beta)^n = ax+b.\end{cases}$$

★Thí dụ 10. *Giải phương trình*

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1} \qquad (10)$$

Lời giải. Đặt $t=\sqrt[3]{2x-1}$, ta có HPT

$$\begin{cases}x^3+1=2t\\t^3+1=2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+1=2t\\x^3-t^3=2(t-x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3+1=2t\\(x-t)(x^2+t^2+tx+2)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\x^3-2t+1=0\end{cases} \text{(do } x^2+t^2+tx+2>0).$$

Giải HPT ta được $x=1; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của PT (10) là $\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. □

★Thí dụ 11. *Giải phương trình*

$$x^2-2x=2\sqrt{2x-1} \qquad (11)$$

Lời giải. ĐK $x\ge\dfrac{1}{2}$. Đặt $y-1=\sqrt{2x-1}\Rightarrow y\ge 1$.

Ta có HPT

$$\begin{cases}x^2-2x=2(y-1)\\y^2-2y=2(x-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y)=0\\x^2-2x=2(y-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\x^2-2x=2(y-1)\ (*)\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=-y\\x^2-2x=2(y-1)\end{cases}$$

– Thay $x=y$ vào PT (*) có $x^2-4x+2=0$ $\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$. Do $y=x=2-\sqrt{2}<1$ (loại), nên $x=2+\sqrt{2}$.

– Thay $x=-y$ vào PT (*) có $x^2=-2$ (vô nghiệm).

Vậy PT (11) có nghiệm duy nhất $x=2+\sqrt{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Giải các phương trình sau

a) $(x+1)(x+4)=5\sqrt{x^2+5x+28}$.

b) $-4\sqrt{(4-x)(2+x)}=x^2-2x-12$.

c) $5\sqrt{x}+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{2x}+4$.

d) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

e) $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}+3=0$.

2. Giải các phương trình sau

a) $x^2+(3-\sqrt{x^2+2})x=1+2\sqrt{x^2+2}$.

b) $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$.

c) $2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$.

3. Giải các phương trình sau

a) $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=0$.

b) $x^2+\sqrt{x+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{9}{4}$.

c) $x(x+5)=3\sqrt[3]{x^2+5x+2}-4$.

d) $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

4. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$.

b) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$.

c) $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

d) $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.

5. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$.

b) $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$.

c) $\sqrt[3]{3x^2-x+2011}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2012}-\sqrt[3]{6x-2013}=\sqrt[3]{2012}$.

6. Giải các phương trình sau

a) $x.\sqrt[3]{25-x}(x+\sqrt[3]{25-x^3})=30$.

b) $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$.

c) $x+\sqrt{2011+\sqrt{x-1}}=2012$.

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x}=1$.

e) $x^2+\sqrt{x+5}=5$.

7. Giải các phương trình sau

a) $x=2011+\sqrt{2011+\sqrt{x}}$.

b) $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$.

c) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$.

d) $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$.

Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU, VINH, NGHỆ AN

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên THTT số 417, tháng 3 năm 2012)

Câu 1. a) ĐK. $\frac{5}{8} \le x \le 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{45x-9x^2} = 8x-20$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

b) HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=4 \\ \frac{1}{(x+1)^2-1}+\frac{1}{(y+1)^2-1}=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Đặt $u=x+1, v=y+1$, HPT đã cho trở thành

$$\begin{cases} uv=4 \\ \frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{v^2-1}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=4; u\ne \pm 1; v \ne \pm 1 \\ 3\left(u^2+v^2-2\right)=2\left(u^2v^2-u^2-v^2+1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=4; u\ne \pm 1; v \ne \pm 1 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=2 \\ u=v=-2. \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra HPT đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(-3;-3)$.

Câu 2. Ta có $5x^2+2xy+y^2-4x-40=0$

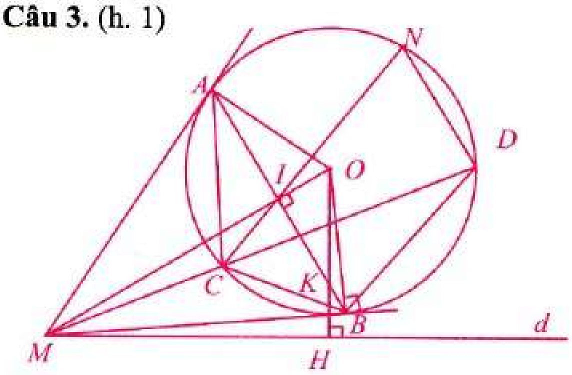
$\Leftrightarrow (2x-1)^2+(x+y)^2=41=5^2+4^2$.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}, 2x-1$ là số nguyên lẻ nên

$$\begin{cases} (2x-1)^2=25 \\ (x+y)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=\pm 5 \\ x+y=\pm 4. \end{cases}$$

Từ đó suy ra bốn cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(3;1),(3;-7),(-2;6),(-2;-2)$.

Câu 3. (h. 1)



Hình 1

a) Dễ thấy $\widehat{IAC}=\widehat{BDC}; \widehat{ICA}=\widehat{BCD}$

$$\Rightarrow \Delta IAC \backsim \Delta BDC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IC}{IA}=\frac{BC}{BD} \quad (1)$$

Tương tự, ta có $\frac{IC}{IB}=\frac{AC}{AD}$ (2)

Dễ chứng minh được $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MC}{MB}=\frac{BC}{BD} \quad (3)$$

Tương tự, ta có $\frac{MC}{MA}=\frac{AC}{AD}$ (4)

Vì $MA = MB$ nên từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $IA = IB$.

b) Kẻ $OH \perp d$ tại H. Gọi K là giao điểm của OH và AB. Ta có M, I, O thẳng hàng và $OI \perp AB$ nên $\Delta OIK \backsim \Delta OHM$ suy ra $OK.OH = OI.OM$.

Mà $OI.OM = OB^2 \Rightarrow OK=\frac{OB^2}{OH}$ (không đổi), suy ra K cố định.

Vì $OI \perp IB$ và O, K cố định nên I thuộc đường tròn đường kính OK cố định (đpcm).

Câu 4. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}$$
$$\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)} \quad (1)$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, BÌNH ĐỊNH

NĂM HỌC 2011 - 2012

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*) Hãy tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a-b}{1+ab}$, biết $a=\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}$; $b=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (với $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1$).

Câu 2. (2,5 *điểm*) Cho phương trình bậc hai

$$x^2+4x+m+1=0.$$

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm kép.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{10}{3}$.

Câu 3. (1,5 *điểm*) Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$.

Câu 4. (3 *điểm*) Cho hình vuông $ABCD$ và điểm E di động trên đoạn CD (E khác D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a) Chứng minh rằng hai tam giác ABF và ADK bằng nhau, suy ra tam giác AFK vuông cân.

b) Hãy xác định vị trí của điểm E sao cho độ dài đoạn EK nhỏ nhất.

Câu 5. (1 *điểm*) Tìm cặp số tự nhiên $(m\ ;\ n)$ thỏa mãn hệ thức

$$m^2+n^2=m+n+8.$$

BÙI VĂN CHI

(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

sưu tầm và giới thiệu

☛ Đặt $\dfrac{a}{b}=x, \dfrac{b}{c}=y, \dfrac{c}{a}=z$ thì $x, y, z>0$; $xyz=1$.

Khi đó BĐT (1) trở thành

$$\sqrt{(xy+yz+zx)(x+y+z)}$$
$$\geq 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

Do $xyz=1$ suy ra

$$\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+1}$$
$$\geq 1+\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \qquad (2)$$

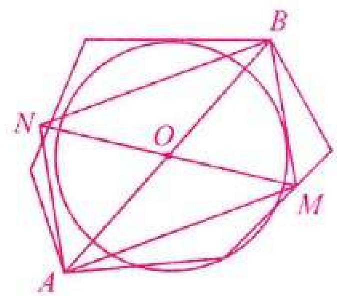
Đặt $\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}=t \Rightarrow t\geq 2$.

Khi đó BĐT (2) trở thành

$\sqrt{t^3+1}\geq 1+t \Leftrightarrow t^3+1\geq 1+2t+t^2 \Leftrightarrow t(t-2)(t+1)\geq 0$ (luôn đúng do $t\geq 2$).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 5. (h. 2). Gọi A, B là hai điểm thuộc cạnh của đa giác sao cho A, B chia biên đa giác thành hai đường gấp khúc có độ dài bằng nhau và bằng $\dfrac{1}{2}$. Gọi O là trung điểm của AB. Vẽ hình tròn tâm O, bán kính $R=\dfrac{1}{4}$.



Hình 2

Ta sẽ chứng minh hình tròn này chứa đa giác đã cho. Thật vậy, giả sử tồn tại một điểm M thuộc cạnh đa giác và M nằm ngoài hình tròn $\left(O;\dfrac{1}{4}\right)$.

Khi đó $MA+MB\leq\dfrac{1}{2}$ (độ dài đường gấp khúc chứa điểm M) (1)

Gọi N là điểm đối xứng với M qua O. Ta có

$$MA+MB=MA+AN\geq MN>2R=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Vì (1) và (2) mâu thuẫn nhau, suy ra điều phải chứng minh

THÁI VIẾT THẢO

(Sở GD-ĐT Nghệ An) sưu tầm và giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

(Tiếp theo kì trước)

HÀ VĂN THẮNG
(GV THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang)

II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

✪DẠNG 1. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm M, $\overrightarrow{u_d} \perp \vec{a}$; $\overrightarrow{u_d} \perp \vec{b}$ ($\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương).

Cách giải. Đưa về viết PT đường thẳng d đi qua M và có VTCP $\overrightarrow{u_d} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

★Thí dụ 8. *Cho hai mặt phẳng*

(P): $x+y-z-1=0$; (Q): $2x-y-z-1=0$

và đường thẳng d: $x-1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng a

a) *Đi qua điểm O, song song với hai mặt phẳng (P) và (Q).*

b) *Đi qua điểm O, song song với (P) và vuông góc với đường thẳng d.*

c) *Là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).*

d) *Nằm trên (P), cắt và vuông góc với đường thẳng d.*

e) *Nằm trên (P), vuông góc với d đồng thời cách giao điểm của d và (P) một khoảng là* $\sqrt{78}$.

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} a // (P) \\ a // (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases}$. Chọn $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right]$

suy ra PT của đường thẳng a là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$.

b) $\begin{cases} a // (P) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases}$. Chọn $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{u_d}\right]$

suy ra PT của đường thẳng a là $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$.

c) $\begin{cases} a \subset (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_Q}. \end{cases}$ Chọn $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right]$.

Điểm $M(0;\,0;\,-1)$ thuộc cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên M thuộc đường thẳng a. Từ đó PT của đường thẳng a là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

d) $\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases}$. Chọn $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_d}\right]$.

Gọi $M = d \cap a \Rightarrow M = d \cap (P) \Rightarrow M(1;1;1)$.

Từ đó ta có PT của a là $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$.

e) $\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{u_a} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases}$. Chọn $\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_d}\right] = (4;-3;1)$.

Gọi J là hình chiếu của M trên a. Giả sử $J(a;b;\,c)$, ta có

$$\begin{cases} J \in (P) \\ \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{u_a} \\ MJ = \sqrt{78} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c-1=0 \\ 4a-3b+c-2=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=78 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{5a-3}{2} \\ c = \dfrac{7a-5}{2} \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=78. \end{cases}$$

Tìm được $(a;b;c)=(3;6;8)$ và $(-1;-4;-6)$.

Từ đó có hai đường thẳng thỏa mãn

$a_1: \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-8}{1}$; $a_2: \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z+6}{1}$. ❐

✪ DẠNG 2a. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm M, $\overrightarrow{u_d} \perp \vec{a}$ và d cắt đường thẳng b.

✪ DẠNG 2b. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm M và d cắt hai đường thẳng a, b.

✪ DẠNG 2c. Viết phương trình đường thẳng d biết trước (hoặc tìm được) $\overrightarrow{u_d}$, d cắt hai đường thẳng a, b.

Cách giải. Cách giải chung của các dạng toán trên là đi *tìm tọa độ giao điểm* của d với các đường thẳng đã cho.

★Thí dụ 9. *Cho điểm M (1;1;1) và hai đường thẳng $a: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$; $b: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.*

Viết phương trình đường thẳng d

a) Đi qua điểm M và cắt hai đường a, b.

b) Đi qua điểm M, vuông góc với a và cắt b.

c) Vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x - y + z - 1 = 0$, đồng thời cắt hai đường thẳng a và b.

d) Là đường vuông góc chung của a và b.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử d cắt a, b lần lượt tại A, B suy ra $A(t;1-2t;1+t), B(k;2k;2k)$.

Do M, A, B thẳng hàng nên tồn tại số thực s sao cho $\overrightarrow{MA} = s.\overrightarrow{MB}$ tức là

$$\begin{cases} t-1 = s(k-1) \\ -2t = s(2k-1) \\ 1+t = s(2k-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sk = 1 \\ s = 2 \\ t = 0. \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA}(-1;0;0)$$

Vậy PT của d là $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

b) Gọi $B = d \cap b$ thì $B(k;2k;2k)$.

Từ $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{u_a} \Rightarrow k = 0$. PT đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

c) Giả sử $d \cap a = A; d \cap b = B$ thì $A(t;1-2t;1+t)$; $B(k;2k;2k) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(k-t;2k+2t-1;2k-t-1)$.

Do $d \perp (P)$ nên $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P} = (3;-1;1)$. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = s.\overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \begin{cases} k-t-3s = 0 \\ 2k+2t+s = 1 \\ 2k-t-s = 1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{7}{13}.$$

nên $B\left(\frac{7}{13};\frac{14}{13};\frac{14}{13}\right)$. PT của $d: \begin{cases} x = \frac{7}{13} + 3t \\ y = \frac{14}{13} - t \\ z = \frac{14}{13} + t. \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

d) Do $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \end{cases}$ nên $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_a};\overrightarrow{u_b}\right] = (-6;-1;4)$, tương tự phần c) ta có $B\left(\frac{23}{53};\frac{46}{53};\frac{46}{53}\right)$.

PT của d: $\begin{cases} x = \frac{23}{53} - 6t \\ y = \frac{46}{53} - t \\ z = \frac{46}{53} + 4t. \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ □

✪DẠNG 3a. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Viết phương trình đường thẳng a' là hình chiếu vuông góc của a lên mặt phẳng (P)

Cách giải

Bước 1. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa a và $(Q) \perp (P)$. Viết phương trình (Q).

Bước 2. Đường thẳng a' là giao tuyến của (P) và (Q). Viết phương trình đường thẳng a'.

✪DẠNG 3b. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b không song song với nhau. Viết phương trình đường thẳng a' là hình chiếu song song của a lên mặt phẳng (P) với phương chiếu b.

Cách giải

Bước 1. Gọi mặt phẳng $(Q) \supset a$ và (Q) song song (hoặc chứa) b. Viết phương trình (Q).

Bước 2. a' là giao tuyến của (P) và (Q). Viết phương trình đường thẳng a'.

★Thí dụ 10. *Cho hai đường thẳng*

$$a: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}; \quad b: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1};$$

mặt phẳng (P): $x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng a' là

a) Hình chiếu vuông góc của a lên (P).

b) Hình chiếu song song của a lên (P) với phương chiếu là đường thẳng b.

Hướng dẫn giải

a) Gọi $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) \perp (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_a} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P}. \end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_a};\overrightarrow{n_P}\right] = (-2;3;-4)$, $M(0;1;0) \in (Q)$ suy ra PT của (Q) : $2x - 3y + 4z + 3 = 0$. Khi đó $a' = (P)\cap(Q)$ nên mọi điểm thuộc a' có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} x-2y-2z-1=0 \\ 2x-3y+4z+3=0. \end{cases}$

Từ đó PT của a' là $\begin{cases} x=-9-14t \\ y=-5-8t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=t \end{cases}$

b) Gọi $\begin{cases} (R)\supset a \\ (R)//b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{u_a} \\ \overrightarrow{n_Q}\perp\overrightarrow{u_b}. \end{cases}$

Chọn $\overrightarrow{n_R}=\left[\overrightarrow{u_a};\overrightarrow{u_b}\right]=(0;1;-2)$; $M(0;1;0)\in(R)$ suy ra PT của (R) là $y-2z-1=0$. Từ $a'=(R)\cap(Q)$, tương tự phần a) ta có PT đường thẳng a': $\begin{cases} x=3+6t \\ y=1+2t\ (t\in\mathbb{R}). \\ z=t \end{cases}$ □

Chú ý. Để thiết lập phương trình đường thẳng d ta có thể tìm VTCP (tương tự như chú ý ở phần I).

★Thí dụ 11. *Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(1;1;2)$ và vuông góc với $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{2}$ đồng thời Δ tạo với trục Oz một góc α sao cho*

a) $\alpha=45^o$.

b) α nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\overrightarrow{u_\Delta}(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2>0)$.

Do $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{u_d}\Rightarrow b=-2a-2c \quad (1)$

$$\cos\left(\widehat{\Delta;Oz}\right)=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\alpha \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) được $\cos\alpha=\dfrac{|c|}{\sqrt{5a^2+8ac+5c^2}}$.

a) Khi $\alpha=45^o$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{|c|}{\sqrt{5a^2+8ac+5c^2}}$.

$\Leftrightarrow 5a^2+8ac+3c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-c \\ 5a=-3c. \end{array}\right.$

• Với $a=-c$, chọn $c=1$ suy ra $a=-1; b=0$.

Từ đó PT Δ: $\begin{cases} x=1-t \\ y=1 \qquad (t\in\mathbb{R}). \\ z=2+t \end{cases}$

• Với $5a=-3c$, chọn $c=5$ suy ra $a=-3; b=-4$.

Từ đó PT $\Delta:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{5}$.

b) Ta có $\cos^2\alpha=\dfrac{c^2}{5a^2+8ac+5c^2}$.

• Với $c=0$ ta có $\alpha=90^o$.

• Với $c\neq 0$, đặt $t=\dfrac{a}{c}$. Khi đó

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{5t^2+8t+5}=\frac{1}{5\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}\leq\frac{5}{9}.$$

Với $0^o\leq\alpha\leq 90^o$ thì α nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos^2\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow t=\dfrac{-4}{5}$ hay $\dfrac{a}{c}=\dfrac{-4}{5}$.

Chọn $c=5\Rightarrow a=-4; b=-2$. Suy ra PT

$$\Delta:\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{5}.$$

Khi đó $\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}\approx 41^o48'$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hai đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$ và $\Delta:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d đồng thời tạo với đường thẳng Δ

a) Một góc 30^o; b) Một góc nhỏ nhất.

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;2-1)$, song song với đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ đồng thời (P) tạo với mặt phẳng (Q): $x-z-1=0$ một góc 45^o.

3. Lập phương trình đường thẳng d qua $A(1;0;1)$, vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ đồng thời d cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\sqrt{2}$.

4. Cho đường thẳng a là giao tuyến của hai mặt phẳng: $(P): 2x-3y+z-1=0$; $(Q): x+y+z-1=0$. Lập phương trình hình chiếu của a lên mặt phẳng (R): $2x-y-z=0$.

5. Lập phương trình mặt phẳng

a) Chứa hai đường thẳng song song

$$a:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1};\ b:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$$

b) Đi qua điểm $A(1;2;1)$ và chứa đường thẳng a.

c) Chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng có phương trình $x+y-z=0$.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 7

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*) Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2\ (C)$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2) Qua điểm uốn I của đồ thị (C) viết phương trình đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B khác I sao cho tam giác MAB vuông tại M, trong đó M là điểm cực đại của đồ thị (C).

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình $\dfrac{2\cos^2 3x}{\sin 2x}+\tan x=\cot x$.

2) Xác định tham số m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x+\sqrt{y}(\sqrt{x}+3)=19-m \\ y+\sqrt{x}(\sqrt{y}+3)=21+m \end{cases}$$
có nghiệm.

Câu III. (1 *điểm*) Tính tích phân
$$I=\int_0^1 (2x^2+x+1)e^{x^2+x+1}\,dx.$$

Câu IV. (1 *điểm*) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối nón có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC và đỉnh của khối nón nằm trên mặt phẳng (SDC).

Câu V. (1 *điểm*) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}+\frac{\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ac}+\frac{\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}$$
trong đó a, b, c là ba số thực dương tùy ý.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes Oxy, lập phương trình đường tròn có bán kính $R=2$, có tâm I nằm trên đường thẳng $(d_1): x+y-3=0$ và đường tròn đó cắt đường thẳng $(d_2): 3x+4y-6=0$ tại hai điểm A, B sao cho góc $\widehat{AIB}=120^\circ$.

2) Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;1;0), C(1;0;-2)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$ sao cho tổng $MA^2+2MB^2+3MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu VIIa. (1 *điểm*) Giải phương trình
$$\tan x=2012^{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}.$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 *điểm*) 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Descartes Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): \sqrt{3}.x-y-\sqrt{3}+2=0$ và $(d_2): \sqrt{3}.x+y-\sqrt{3}-2=0$. Lập phương trình đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC đều có diện tích bằng $3\sqrt{3}$, trong đó đỉnh A là giao điểm của (d_1) và (d_2).

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ hai đường thẳng chéo nhau
$$(d_1): \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3} \text{ và } (d_2): \frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$$
Lập phương trình mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ (d_1) đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ (d_2) đến (P).

Câu VIIb. (1 *điểm*) Giải phương trình
$$\tan x=2012^{\cos 2x}.$$

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Lấy $A(0;a)\in Oy$ và $M(x_0;y_0)\in(C)$. PTTT với (C) tại M có dạng

$$(d): y=\left(\frac{-2}{(x_0-1)^2}\right)x+\frac{x_0^2+2x_0-1}{(x_0-1)^2}.$$

Qua A kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (C) khi và chỉ khi PT

$$(a-1)x_0^2-2(a+1)x_0+a+1=0$$

có đúng một nghiệm.

Đáp số. $A_1(0;1)$ và $A_2(0;-1)$.

Câu II. 1) ĐK $\cos x\neq 0, \sin x\neq 0$. Biến đổi PT về dạng

$$8-2\sin^2 2x=15\cos 4x \Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}.$$

Đáp số. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

2) Đặt $u=\frac{x}{y+1}; v=\frac{y}{x+1}$.

Đưa về hệ $\begin{cases} u^2+v^2=\frac{1}{2} \\ uv=\frac{1}{4}. \end{cases}$

Đáp số. $(x;y)=\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right);(x;y)=(1;1)$.

Câu III. $V=\int_{\frac{1}{2}}^{2}4^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2}{x}\right)^2dx-\int_{1}^{2}(2^x)^2\,dx$

$$=20\pi-\frac{12\pi}{\ln 4}\text{ (đvtt).}$$

Câu IV. Gọi $O=AC\cap BD; I=SO\cap AC'$. Chứng minh được I là trọng tâm tam giác SAC và đường cao h của hình chóp $S.AB'C'D'$ chính là đường cao của tam giác đều SAC' cạnh a.

Vậy $V_{SAB'C'D'}=\frac{1}{3}h.S_{AB'C'D'}=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Câu V. Đặt P là vế trái của BĐT cần chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$2\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Từ đó

$$2\left(\frac{ab+1}{(a+b)^2}\right)\geq\frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}=1+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}.$$

Cùng với hai BĐT tương tự và sử dụng BĐT Cauchy ta được

$$2P\geq 3+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)}+\frac{(b+c)(b+a)}{(a+c)^2}$$

$\geq 3+3=6$. Suy ra $P\geq 3$ (đpcm).

Câu VIa. 1) $G_1\left(3;\frac{4}{3}\right)$ và $G_2\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$.

2) Gọi $M=d\cap(P)$. Tìm được $M(5;6;7)$. Kẻ đường thẳng (d_1) qua A song song với (d) và gọi $N=d_1\cap(P)$, tìm được $N(-3;-4;1)$.

Giả sử C là điểm trên (P) sao cho $\overrightarrow{NC}+2\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ thì $C(-19;-24;-11)$. Đường thẳng (d') cần tìm là đường thẳng CA có PT $\frac{x+1}{18}=\frac{y}{24}=\frac{z-2}{13}$.

Câu VIIa. PT đã cho được viết dưới dạng

$$\left((z+1)^2+1\right)^2=-(z+4)^2=\left(i(z+4)\right)^2.$$

Đáp số. $-2i; 2i; -2-i; -2+i$.

Câu VIb. 1) $(d)\perp(d')$, $A(-1;1)\in(d)$, $B(3;2)\in(d')$.

Tập hợp các giao điểm của (d) và (d') là đường tròn đường kính AB có PT

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}.$$

2) PT mặt cầu cần tìm là

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9.$$

Câu VIIb. Ta có $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow z^{2010}=2^{2010};\ S=\frac{z^{2010}-1}{z-1}=\frac{i\sqrt{3}}{3}\left(1-2^{2010}\right).$$

HUỲNH TẤN CHÂU
(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÍ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2012

LTS. Bắt đầu từ số này, Tòa soạn sẽ giới thiệu các bài ôn tập môn Vật lí lớp 12. Nội dung được đăng tải trên 3 số từ tháng 4 tới tháng 6. Sau đây là phần ôn tập của Chương I. DAO ĐỘNG CƠ và Chương II. SÓNG CƠ VÀ SÓNG ÂM.

DAO ĐỘNG CƠ

I – CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. Lập phương trình dao động; xác định các đại lượng đặc trưng của dao động điều hoà.
2. Xác định các giá trị li độ, vận tốc, tốc độ, gia tốc, quãng đường chuyển động, lực hồi phục tại các thời điểm, các vị trí khác nhau trong quá trình dao động điều hoà.
3. Sự thay đổi chu kì dao động điều hoà do thay đổi cấu tạo của hệ dao động hoặc thay đổi điều kiện môi trường.
4. Sự bảo toàn cơ năng, năng lượng trong dao động điều hoà, dao động tắt dần.
5. Tổng hợp các dao động điều hoà.

II – MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TẬP

1. Trong phương trình dao động điều hoà: x, a cùng đơn vị chiều dài; góc pha đơn vị là rad; Biên độ và tần số góc là các giá trị dương.
2. Trong các công thức tính chu kì, năng lượng dao động, tất cả các đại lượng có đơn vị chuẩn.
3. Các giá trị thời điểm phải xét so với mốc thời gian đã chọn ($t = 0$); thời gian chuyển động từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 bằng $t_2 - t_1$.
4. Khi chất điểm dao động điều hoà, chuyển động có tính chất là biến đổi (nhanh dần hoặc chậm dần) nhưng không đều; gia tốc và lực hồi phục biến thiên theo thời gian.
5. Bỏ qua các lực cản, con lắc đơn chỉ dao động điều hoà nếu biên độ góc $\alpha_0 \leq 10^o$.
6. Với con lắc lò xo cần phân biệt lực hồi phục (lực hoặc hợp lực gây ra dao động điều hoà) với lực đàn hồi (lực giúp lò xo lấy lại hình dạng ban đầu).
7. Công thức về sự nở dài khi nhiệt độ thay đổi từ t_1 đến t_2 chỉ có thể viết dưới dạng gần đúng là $l_2 = l_1(1+\alpha(t_2 - t_1))$ nếu $\alpha|t_2 - t_1| << 1$.
8. Trong trường hợp con lắc được gắn với thang máy hay toa xe chuyển động có gia tốc thì con lắc chỉ dao động điều hoà trong hệ quy chiếu phi quán tính.
9. Công thức xác định dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà từ giản đồ Fre - xnen chỉ dùng cho trường hợp hai dao động thành phần cùng phương dao động, cùng tần số. Phân biệt phương dao động với pha của dao động.

III – BÀI TẬP VÍ DỤ

❖**Câu 1.** *Một vật dao động điều hoà có biểu thức toạ độ* $x = 2\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$. *Trong đó x tính bằng cm và t tính bằng giây (s). Tìm thời điểm lúc vật qua vị trí* $x = -\sqrt{2}$ (cm) *theo chiều dương.*

A. $t = 3{,}5$s. **B.** $t = 3{,}25$s.
C. $t = 2$s. **D.** $t = 2{,}75$s.

Hướng dẫn. Thời điểm cần tính phải là nghiệm thoả mãn của hệ

$$\begin{cases} x = 2\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \\ v = 2\pi\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow t = 2\text{s}.$$

❖**Câu 2.** *Con lắc lò xo gồm lò xo có độ cứng k, vật nặng m treo thẳng đứng dao động điều hoà. Khi vật ở vị trí biên thì lò xo không biến dạng. Trong quá trình dao động lực đàn hồi tác dụng lên vật có độ lớn cực đại, cực tiểu là*

A. 0; $2mg$. **B.** mg; $2mg$.
C. 0; mg. **D.** mg; $3mg$.

Hướng dẫn. Khi vật ở vị trí cân bằng, trọng lực cân bằng với lực đàn hồi (ứng với độ dãn của lò xo là Δl) $P = F_{dh0} \Leftrightarrow mg = k\Delta l$. Để khi vật ở vị trí biên, lò xo không biến dạng thì biên độ $A = \Delta l$. Vậy $F_{đhmin} = k(\Delta l - A) = 0$; $F_{đhmax} = k(\Delta l + A) = 2k.\Delta l = 2mg$.

❖**Câu 3.** *Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương thẳng đứng với phương trình dao động có dạng* $x = 4\cos\left(5\pi t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$(cm). *Tỉ số giữa chiều dài lớn nhất và nhỏ nhất của lò xo là* $\dfrac{7}{5}$. *Lấy* $g = 10\text{m/s}^2$. *Chiều dài tự nhiên của lò xo là*

A. $l_0 = 22$cm. **B.** $l_0 = 18$cm.
C. $l_0 = 20$cm. **D.** $l_0 = 24$cm.

Hướng dẫn. Khi vật ở vị trí cân bằng, $P = F_{dh0}$

$$\Leftrightarrow mg = k.\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Khi con lắc dao động điều hoà: Chiều dài lớn nhất của lò xo $l_{max} = l_0 + \Delta l + A$.

Chiều dài nhỏ nhất của lò xo $l_{min} = l_0 + \Delta l - A$.

❖**Câu 4.** *Đồng hồ hoạt động dựa trên dao động điều hòa của một con lắc đơn chạy đúng ở* 19°C, *hệ số nở dài dây treo con lắc là* $\alpha = 5.10^{-5}\text{K}^{-1}$. *Khi nhiệt độ tăng lên đến* $27^{o}C$ *thì sau một ngày đêm, đồng hồ sẽ chạy:*

A. *chậm* 17,28s. **B.** *nhanh* 20s.
C. *chậm* 20s. **D.** *nhanh* 17,28s.

Hướng dẫn. Thời gian đồng hồ chạy sai trong một ngày đêm (86400s)

$$\Delta t = 86400\left|\frac{T_{sai} - T_{đúng}}{T_{đúng}}\right| = 86400\left(\frac{T_{sai}}{T_{đúng}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t \approx 86400.\frac{\alpha(t_2 - t_1)}{2}$$

$$\Delta t = 86400\left|\frac{T_{sai} - T_{đúng}}{T_{đúng}}\right| = 86400\left(\frac{T_{sai}}{T_{đúng}} - 1\right).$$

Do chiều dài dây treo tăng lên nên $T_{sai} > T_{đúng}$, vậy đồng hồ chạy chậm đi.

❖**Câu 5.** *Con lắc đơn dao động điều hoà với chu kì 2s khi thang máy đi lên chậm dần đều với gia tốc* $0{,}2\text{m/s}^2$ (*lấy* $g = 10\text{m/s}^2$). *Khi thang máy chuyển động đều thì chu kì dao động điều hoà của con lắc này là*

A. 1,8s. **B.** 2,1s. **C.** 1,7s. **D.** 1,98s.

Hướng dẫn. Khi thang máy đi lên chậm dần đều $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - a}} = 2$.

Khi thang máy chuyển động đều $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

SÓNG CƠ - SÓNG ÂM

I – CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. Viết phương trình sóng; xác định các đại lượng đặc trưng của sóng.
2. Tìm khoảng cách, xác định quan hệ về pha giữa các điểm nằm trên phương truyền sóng.
3. Xác định số vân giao thoa, số cực đại, cực tiểu giao thoa giữa hai điểm nằm trong vùng giao thoa của hai sóng kết hợp.
4. Xác định điều kiện có sóng dừng, số lượng và vị trí các nút và bụng khi hình thành sóng dừng.
5. Tính cường độ âm, mức cường độ âm tại các điểm nhận năng lượng sóng âm.

II – MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TẬP

1. Trong phương trình sóng, li độ và biên độ sóng cùng đơn vị; toạ độ x và bước sóng cùng đơn vị và có thể khác đơn vị của biên độ.
2. Biểu thức quan hệ của khoảng cách giữa hai điểm M, N và độ lệch pha chỉ xét trong trường hợp M, N nằm trên cùng phương truyền sóng.
3. Thiết lập điều kiện để một điểm nằm trong vùng giao thoa là cực đại hay cực tiểu giao thoa phải lưu ý tới độ lệch pha của hai nguồn phát sóng.
4. Khi tìm điều kiện để có sóng dừng trên một sợi dây (hay ống khí) cần lưu ý trạng thái dao động của hai đầu là nút hay bụng.
5. Viết công thức tính mức cường độ âm cần lưu ý đơn vị tương ứng là B hay dB.

III – BÀI TẬP VÍ DỤ

❖**Câu 1.** *Một sóng ngang truyền trên sợi dây đàn hồi rất dài với vận tốc sóng v = 0,2m/s, chu kì dao động T = 10s. Khoảng cách giữa hai điểm gần nhau nhất trên dây dao động ngược pha nhau là*

A. 1,5m. **B.** 1m. **C.** 0,5m. **D.** 2m.

Hướng dẫn. Khoảng cách giữa hai điểm trên phương truyền sóng dao động ngược pha nhau thỏa mãn: $d=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, với k = 0, 1, 2... Hai điểm gần nhau nhất ứng với k = 0 nên $d=\frac{\lambda}{2}=\frac{vT}{2}$.

❖**Câu 2.** *Sóng âm khi truyền trong nước có bước sóng là 2,68m. Sóng này truyền trong không khí sẽ có bước sóng là bao nhiêu nếu tốc độ truyền âm trong không khí là 340m/s và tốc độ truyền âm trong nước là 1520m/s*

A. 0,6m. **B.** 0,75m.

C. 0,54m. **D.** 1,2m.

Hướng dẫn. Khi sóng âm truyền từ môi trường này sang môi trường khác thì tần số, chu kì sóng không đổi. Do đó ta có phương trình $\frac{\lambda_n}{v_n}=\frac{\lambda_{kk}}{v_{kk}}\Rightarrow \lambda_{kk}=\frac{\lambda_n}{v_n}v_{kk}$.

❖**Câu 3.** *Tại hai điểm A và B cách nhau 11cm trên mặt nước có hai nguồn phát sóng ngang đồng bộ theo phương trình u = acos(40πt)(cm). Tốc độ truyền sóng là 50cm/s. M là một điểm trên mặt nước cách A và B tương ứng là 10cm và 5cm. Số điểm cực đại giao thoa trên đoạn AM là*

A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn. Với A, B là hai nguồn đồng bộ thì số điểm cực đại giao thoa trên đoạn AM thỏa mãn $d_{AA}-d_{BA}\le k\lambda\le d_{AM}-d_{BM}$.

Trong đó d_{AA}, d_{BA} lần lượt là khoảng cách từ các nguồn A, B đến điểm A.

d_{AM}, d_{BM} lần lượt là khoảng cách từ nguồn A, B đến điểm M.

$k\in\mathbb{Z}$ và $\lambda=\frac{v}{f}=2{,}5$cm.

Ta có $0-11\le 2{,}5k\le 10-5$ hay $-4{,}4\le k\le 2$. Vậy có tất cả bảy giá trị k nguyên tương ứng là 7 điểm.

❖**Câu 4.** *Biết vận tốc truyền sóng trên dây có biểu thức $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; trong đó F là lực căng dây và μ là khối lượng của một đoạn dây dài 1m. Dây dài 2m, lực căng dây bằng 10N. Khi dao động với tần số 10Hz, trên dây với hai đầu là hai nút có hai múi sóng. Khối lượng một đơn vị chiều dài dây là*

A. 25g. **B.** 20g.

C. 5g. **D.** 50g.

Hướng dẫn. Khi hình thành sóng dừng trên dây với hai đầu là hai nút và có hai múi sóng thì chiều dài dây thỏa mãn $l=2.\frac{\lambda}{2}$. Vậy $\lambda=2$m và tốc độ truyền sóng trên dây v = 20m/s.

Suy ra $\mu=\frac{F}{v^2}=\frac{10}{20^2}=0{,}025\text{ (kg)}=25\text{(g)}$.

❖**Câu 5.** *Mức cường độ âm tại một điểm cách nguồn âm 1m là 50dB. Khi Beethoven đi từ vị trí nguồn âm đến vị trí cách nguồn âm 100m thì không còn nghe được âm do nguồn phát ra nữa. Coi sóng âm lan toả theo mọi hướng và môi trường không hấp thụ âm thì ngưỡng nghe của người này là bao nhiêu? Lấy $I_0=10^{-12}$W/m².*

A. 1dB. **B.** 40dB.

C. 10^{-11}W/m². **D.** 10^{-9}W/m².

Hướng dẫn. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm $L=10\lg\frac{I}{I_0}$ dB.

Tại điểm cách nguồn âm r_1 = 1m có L_1 = 50dB nên có cường độ âm $I_1=10^5.I_0=10^{-7}$W/m². Tại điểm cách nguồn âm r_2 = 100m, người đó không còn nghe được âm do nguồn phát ra nữa thì cường độ âm tại đó I_2 là ngưỡng nghe của người này. Mặt khác, coi sóng âm lan toả theo mọi hướng và môi trường không hấp thụ âm nên $4I_1\pi r_1^2=4I_2\pi r_2^2$. Suy ra $I_2=10^{-11}$W/m².

ĐÀO THỊ THU THỦY
(GV trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng)

XUNG QUANH BÀI 3 TRONG KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT NĂM 2012

NGUYỄN VĂN LINH
(SV K50 - TCNH ĐH Ngoại thương, Hà Nội)

Trong bài viết này chúng tôi đưa ra một cách chứng minh Bài 3 trong Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2012. Đồng thời khai thác bài toán này trong trường hợp tổng quát.

BÀI TOÁN. *Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc* $\widehat{MAN}$ *và* $\widehat{MBN}$, $\widehat{MBN}$ *và* $\widehat{MCN}$, $\widehat{MCN}$ *và* $\widehat{MDN}$, $\widehat{MDN}$ *và* $\widehat{MAN}$. *Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.*

1) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm đường tròn đó.

2) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

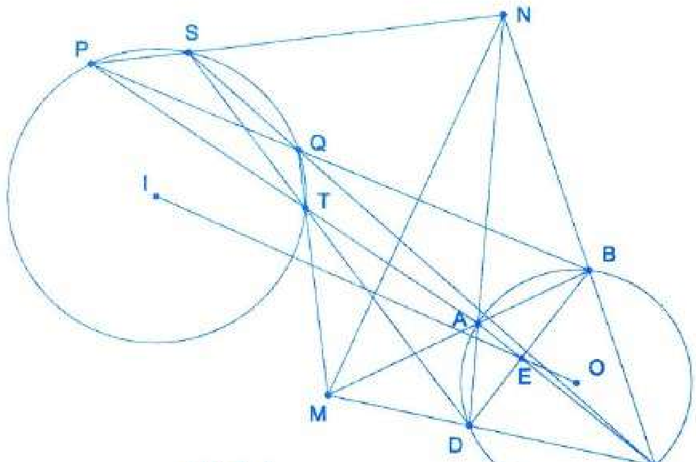
1. ***CHỨNG MINH BÀI TOÁN*** (h. 1).

1) Không mất tổng quát, ta có thể giả sử D nằm giữa M và C, B nằm giữa N và C. Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ta có $\widehat{PQS} = \widehat{QBN} - \widehat{QCB}$

$= \frac{1}{2}\left(\widehat{NBM} - \widehat{BCD}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BMC}.$

Tương tự $\widehat{PTS} = \frac{1}{2}\widehat{MBC}$. Do đó $\widehat{PTS} = \widehat{PQS}$. Suy ra bốn điểm P, R, S, T cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1

2) Do Q là giao điểm của phân giác góc $\widehat{MCB}$ và $\widehat{MBN}$ nên Q là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác MBC. Suy ra MQ là phân giác ngoài của góc $\widehat{BMC}$.

Tương tự, MT là phân giác ngoài của góc $\widehat{AMD}$. Do đó ba điểm M, T, Q thẳng hàng.

Do T là tâm đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác MDA nên $\widehat{MTA} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{MDA} = \widehat{QBA}$

(lưu ý rằng $\widehat{MDA} + \widehat{MBN} = 180^\circ$).

Do đó tứ giác $TQBA$ nội tiếp. Ta suy ra $MT.MQ = MA.MB$ hay M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I). Tương tự N cũng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I). Suy ra $MN \perp OI$.

Để chứng minh O, I, E thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $OE \perp MN$. Đây là nội dung của *định lí Brocard*. Có nhiều cách để chứng minh kết quả này. Ở đây chúng tôi giới thiệu một cách giải bằng cực và đối cực.

Do AC cắt BD tại E nên E lần lượt nằm trên đường đối cực của M, N đối với đường tròn (O). Suy ra MN là đường đối cực của E đối với (O), từ đó $OE \perp MN$. Vậy ta có đpcm.

2. KHAI THÁC BÀI TOÁN

Chúng ta nhận thấy câu 1) của bài toán không dùng đến điều kiện "tứ giác $ABCD$ nội tiếp". Điều đó có nghĩa là nó vẫn đúng trong trường hợp tứ giác lồi $ABCD$ bất kì. Một cách tương tự, bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh các kết quả sau đây:

Cho tứ giác lồi $ABCD$ thì

- 4 phân giác trong góc A, B, C, D cắt nhau tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_1).
- 4 phân giác ngoài góc A, B, C, D cắt nhau tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_2).
- 2 phân giác trong góc A, C cắt 2 phân giác ngoài góc B, D tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_3).
- 2 phân giác trong góc B, D cắt 2 phân giác ngoài góc A, C tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_4).
- 2 phân giác trong góc A, B cắt 2 phân giác ngoài góc C, D tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_5).
- 2 phân giác trong góc B, C cắt 2 phân giác ngoài góc D, A tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_6).
- 2 phân giác trong góc C, D cắt 2 phân giác ngoài góc A, B tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_7).
- 2 phân giác trong góc D, A cắt 2 phân giác ngoài góc B, C tại 4 điểm thuộc đường tròn (I_8).

Chúng ta sẽ không chứng minh lại các kết quả trên mà sẽ bàn đến những tính chất xoay quanh 8 đường tròn nói trên.

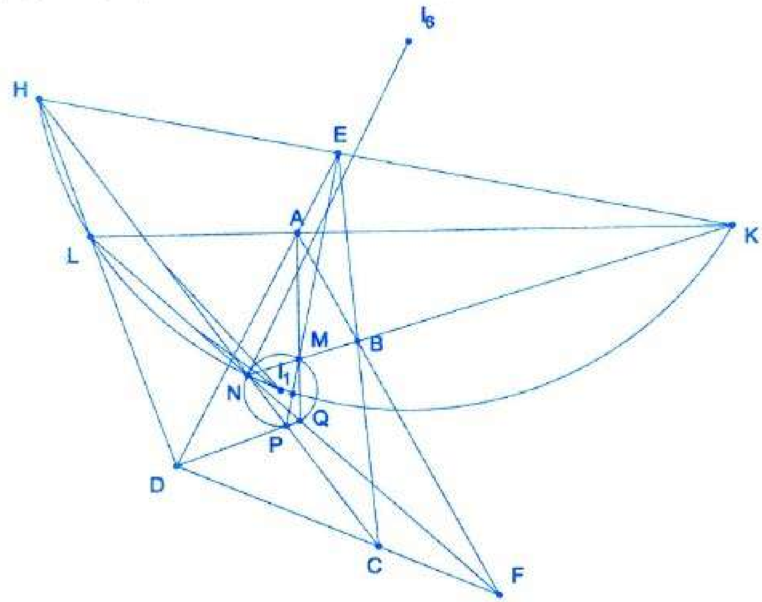
❖**Tính chất 1.** *Bốn điểm I_1, I_2, I_3, I_4 thẳng hàng trên đường thẳng d, ta gọi bốn đường tròn $(I_1), (I_2), (I_3), (I_4)$ là bộ đường tròn (ω_1). Bốn điểm I_5, I_6, I_7, I_8 thẳng hàng trên đường thẳng l, ta gọi bốn đường tròn $(I_5), (I_6), (I_7), (I_8)$ là bộ đường tròn (ω_2). Đồng thời d vuông góc với l.*

Chứng minh. Theo cách định nghĩa trên, ta thấy rằng hai đường tròn bất kì (I_x) $(x \in \{1,2,3,4\})$ và (I_y) $(y \in \{5,6,7,8\})$ thuộc hai bộ (ω_1) và (ω_2) đều có một điểm chung.

Ta sẽ chứng minh hai đường tròn (I_x) và (I_y) trực giao (nghĩa là nếu gọi J là giao điểm của hai đường tròn thì $\widehat{I_xJI_y} = 90^\circ$).

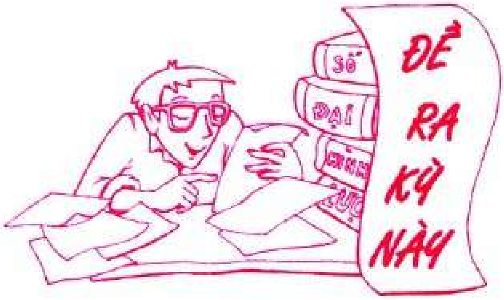
Thật vậy ta chứng minh với trường hợp (I_1) và (I_6) (Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự) (h. 2). Kí hiệu d_X, l_X thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài góc X (X là các đỉnh của tứ giác $ABCD$).

Gọi M, N, P, Q, H, K, L lần lượt là giao điểm của các cặp (d_A, d_B), (d_B, d_C), (d_C, d_D), (d_D, d_A),



Hình 2

(Xem tiếp trang 28)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/418. (Lớp 6). Cho

$$A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 2011^5.$$

Hãy tìm chữ số tận cùng của A.

ĐỖ CAO TRÍ

(GV THCS Phạm Hữu Chí, Long Điền, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T2/418. (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C vẽ tam giác ABD vuông cân tại B. Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng BD. Vẽ CM vuông góc với AE tại M. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng CM, K là giao điểm của BM và DN. Tính số đo góc $\widehat{BKD}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/418. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $3^x - 32 = y^2$.

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T4/418. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^3 + xy + y^3} + \frac{4x^2y^2 + 2}{xy}$$

trong đó x và y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$.

BÙI VĂN HỢI

(SV Lớp động lực AK28TC, trường ĐHSP Kĩ thuật Vinh, Nghệ An)

Bài T5/418. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm H. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $\dfrac{AH}{BC} = \dfrac{BH}{CA} = \dfrac{CH}{AB}$.

NGUYỄN KHÁNH TOÀN

(GV THCS Bắc Hải, Tiền Hải, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/418. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, ngoại tiếp đường tròn tâm I. Tiếp điểm của BC với đường tròn (I) là D. Đường tròn đường kính AI cắt (O) tại M ($M \neq A$) và cắt đường thẳng đi qua A song song với BC tại N. Chứng minh rằng MO đi qua trung điểm của DN.

NGUYỄN NGỌC DUY

(THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Bài T7/418. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{xy + (x-y)\left(\sqrt{xy} - 2\right)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \\ (x+1)\left(y + \sqrt{xy} + x(1-x)\right) = 4. \end{cases}$$

PHẠM KIM CHUNG

(THPT Đặng Thúc Hứa - Nghệ An)

Bài T8/418. Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C + \cos A.\cos B.\cos C \geq \frac{1}{2}.$$

PHAN ĐỨC VIỆT

(THPT Chu Văn An, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/418. Với mỗi số tự nhiên n, kí hiệu (S_n) là tổng các chữ số của n (khi n biểu diễn trong hệ thập phân). Đặt $S_k(n) = \underbrace{S(S(\ldots(S(n))\ldots))}_{k \text{ lần}}$

(kí hiệu S xuất hiện k lần).

Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn

$$S_1(n) + S_2(n) + \ldots + S_k(n) + \ldots + S_{223}(n) = n.$$

NGUYỄN TIẾN LÂM

(SV K50A1S, Khoa Toán - Cơ Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T10/418. Tồn tại hay không tập hợp X thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

i) Tập X gồm 2012 số tự nhiên.

ii) Tổng của một số phần tử bất kì trong X đều có dạng lũy thừa bậc k của một số nguyên dương ($k \geq 2$)?

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T11/418. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{xf(y)}{2}\right)+f\left(\frac{yf(x)}{2}\right)=4xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

NGUYỄN TÀI CHUNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Gia Lai)

Bài T12/418. Cho trước hai đường tròn (K) và (O), trong đó đường tròn (K) nằm trong đường tròn (O). Hai đường tròn (O_1), (O_2) di chuyển sao cho chúng tiếp xúc ngoài với nhau tại M và cùng tiếp xúc với đường tròn (O), đồng thời chúng cùng tiếp xúc ngoài với đường tròn (K). Chứng minh rằng điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định.

TẠ HỒNG SƠN
(SV Lớp Ngân hàng AK50, Khoa Ngân hàng - Tài chính, ĐH KTQD Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/418. Một vật nhỏ khối lượng m nằm yên tại một điểm O trên mặt phẳng ngang. Người ta truyền cho nó một vận tốc ngang v_0. Xác định

a) Công suất trung bình của lực ma sát trong suốt quá trình chuyển động của vật, biết hệ số ma sát $k = 0,27$; $m = 1,0$kg và $v_0 = 1,5$m/s.

b) Công suất tức thời cực đại của lực ma sát, biết hệ số ma sát $k = b.x$ với b là hằng số, x là khoảng cách từ vật đến điểm O.

TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/418. Hai thấu kính O_1 và O_2 có tiêu cự lần lượt là f_1 và f_2 đặt đồng trục và cách nhau $O_1O_2 = L = 12$cm. Một vật AB đặt trước O_1 và cách O_1 một khoảng $O_1A = 12$cm. Sau O_2 và cách O_2 là 8cm ta thu được ảnh thật A_2B_2. Nếu tráo đổi vị trí cho nhau giữa O_1 và O_2 thì sau O_1 và cách O_1 là 6cm ta cũng thu được ảnh thật A_3B_3. Hãy xác định vị trí các tiêu cự f_1, f_2 và độ phóng đại k của ảnh A_2B_2 và k' của ảnh A_3B_3.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/418. (For 6th grade). Given

$$A = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 2011^5.$$

Find the last digit of A.

T2/418. (For 7th grade). Let ABC be an isosceles right triangle with right angle at A. On the half-plane defined by AB containing C draw an isosceles right triangle ABD with right angle at B. Let E be the midpoint of segment BD. Draw CM perpendicular to AE at M. Let N be the midpoint of segment CM, K is the intersection of BM and DN. Find the measure of the angle BKD.

T3/418. Find all positive integer solutions of the equation $3^x - 32 = y^2$.

T4/418. Find the minimal value of the expression

$$A=\frac{1}{x^3+xy+y^3}+\frac{4x^2y^2+2}{xy}$$

where x and y are positive real numbers satisfying $x + y = 1$.

T5/418. Let ABC be an acute triangle with orthocenter H. Prove that ABC is an equilateral triangle if and only if $\frac{AH}{BC}=\frac{BH}{CA}=\frac{CH}{AB}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/418. Let ABC be a triangle with circumcenter O, and incenter I. BC touches the circle (I) at D. The circle whose diameter is AI meets (O) at M $(M \neq A)$ and cuts the line passing through A parallel to BC at N. Prove that MO passes through the midpoint of DN.

T7/418. Solve the system of equations

$$\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y}\\ (x+1)\left(y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right)=4.\end{cases}$$

(Xem tiếp trang 29)

★Bài T1/413. *Có tồn tại hay không hai số tự nhiên a, b để có*

$$(3a+2b)(7a+3b)-4=\overline{22*12*2011}\,?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số tự nhiên a, b để có

$$(3a+2b)(7a+3b)=\overline{22*12*2015} \qquad (1)$$

Vế phải của (1) chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 (vì số chia hết cho 25 phải có hai chữ số cùng là một trong bốn số dạng 00, 25, 50, 75) (2)

Từ (1) ta thấy tích $(3a+2b)(7a+3b)$ phải chia hết cho 5 nên ít nhất một thừa của tích chia hết cho 5. Mặt khác lại có

$$(3a+2b)+(7a+3b)=10a+5b=5(2a+b).$$

Suy ra cả hai thừa số của tích $(3a+2b)(7a+3b)$ đều chia hết cho 5, dẫn đến tích đó chia hết cho 25. Điều này mâu thuẫn với (2). Vậy không tồn tại hai số tự nhiên a, b nào thỏa mãn (1). ❒

➢**Nhận xét.** Nhiều bạn xét các số a, b khi chia cho 5 thiếu số dư 0, hoặc lập luận dài dòng. Các bạn có lời giải đúng là:

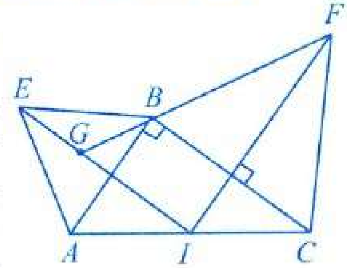
Vĩnh Phúc: *Trương Thảo Nguyên, Đinh Thị Cẩm Tú,* 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, *Dương Xuân Đức, Dương Xuân Duy, Hoàng Kiều Nguyệt Thu, Phạm Thị Thúy Nga,* 6A1, *Lê Thu Trang,* 6A3, *Phan Thị Nguyệt,* 6A5, THCS Yên Lạc; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tuấn Anh,* 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Bùi Minh Thúy, Võ Thị Hồng Liệu, Trần Thị Tường Vy, Lê Thị Thu Uyên,* 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ.

VIỆT HẢI

★Bài T2/414. *Về phía ngoài của tam giác ABC, ta dựng các tam giác đều ABE và BCF. Gọi G là trọng tâm tam giác ABE và I là trung điểm của AC. Tính số đo góc GIF.*

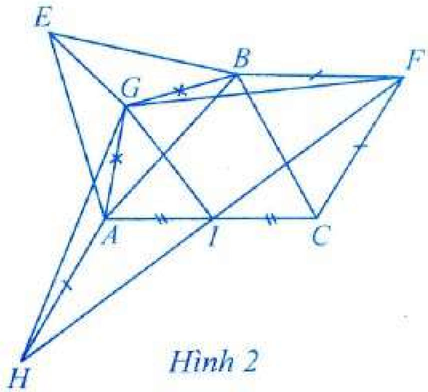
Lời giải. • Trường hợp $\widehat{ABC}=90^\circ$ (h. 1).

Ta thấy G, B, F thẳng hàng; E, G, I thẳng hàng và $EI//BC$ đồng thời $IF//AB$. Do đó $EI\perp IF$ suy ra $\widehat{GIF}=90^\circ$.



Hình 1

• Trường hợp $\widehat{ABC}<90^\circ$ (h. 2).



Hình 2

Dựng điểm H sao cho I là trung điểm của HF thì $\Delta AIH=\Delta CIF$ (c.g.c) $\Rightarrow AH=CF=BF$ (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác đều ABE nên $AG=BG$ (2)

Lại có $\widehat{GAH}=360^\circ-\widehat{GAB}-\widehat{BAC}-\widehat{IAH}$

$$=360^\circ-30^\circ-\widehat{BAC}-(\widehat{ACB}+60^\circ)$$

$$=270^\circ-(\widehat{BAC}+\widehat{ACB})$$

$$=90^\circ+\widehat{ABC}=\widehat{GBF} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta AGH=\Delta BGF$ (c.g.c) $\Rightarrow GH=GF$. Tam giác GHF cân tại G, có GI là trung tuyến đồng thời là đường cao nên $GI\perp HF$. Vậy $\widehat{GIF}=90^\circ$.

• Trường hợp $\widehat{ABC} > 90^0$ được xét tương tự như trường hợp $\widehat{ABC} < 90^0$. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Một số bạn đưa ra thêm kết quả: Tam giác GIF vuông tại I có $\widehat{IGF} = 60^0$, $\widehat{IFG} = 30^0$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Đinh Mạnh Hà*, 7A1, *Nguyễn Tiến Hải*, *Vũ Thị Ngọc Ánh*, *Lê Hữu Hùng*, 7A3, THCS Lâm Thao; **Nam Định:** *Phạm Quang Huy*, 7A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Hoàng Bảo Long*, *Lê Quang Dũng*, *Đỗ Minh Thắng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Quảng Ngãi:** *Vũ Thị Thi*, *Nguyễn Thị Hạnh*, 7A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; *Trần Thị Mỹ Ninh*, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Đỗ Lê Đăng Khoa*, 5A, TH Đức Thắng, Mộ Đức; **Trà Vinh:** *Trương Hoàng Việt*, 7/4, THCS Cầu Quan, Tiểu Cần.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/414. *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $2^n - 1$ chia hết cho 2011.*

Lời giải. (Theo bạn *Lê Thị Hải Linh*, 9^0, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**).

Trong bài này ta dùng kí hiệu $a \equiv b \pmod m$ nghĩa là $(a-b) \vdots m$.

Vì 2011 là số nguyên tố và (2, 2011) = 1 nên theo định lí Fermat nhỏ, ta có $2^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ hay $(2^{2010} - 1) \vdots 2011$.

Giả sử n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $(2^n - 1) \vdots 2011$ (1)

Suy ra $n \le 2010$.

Giả sử $2010 = nq + r$ với $q, r \in \mathbb{N}, 0 \le r < n$.

Ta có $2^n \equiv 1 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{nq} \equiv 1 \pmod{2011}$.

Mà $2^{2010} = 2^{nq+r} \equiv 1 \pmod{2011}$.

Do đó $2^{nq}(2^r - 1) \vdots 2011 \Rightarrow (2^r - 1) \vdots 2011$ (vì dễ thấy $(2^{nq}, 2011) = 1$).

Mà $r < n$ và n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn (1) nên $r = 0$. Vậy $n \in Ư(2010)$. Do $2^{10} - 1 = 1023 < 2011$ nên $n > 10$.

Do $2010 = 2.3.5.67$ nên $n \in \{15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, 2010\}$.

Ta có $2^{15} = 32768 \equiv 592 \pmod{2011}$;

$2^{30} \equiv 592^2 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{30} \equiv 550 \pmod{2011}$;

$2^{60} \equiv 550^2 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{60} \equiv 850 \pmod{2011}$

$\Rightarrow 2^{60}.2^7 \equiv 850.2^7 \pmod{2011}$

$\Rightarrow 2^{67} \equiv 206 \pmod{2011}$;

$2^{134} \equiv 206^2 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{134} \equiv 205 \pmod{2011}$;

$2^{201} \equiv 206^3 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{201} \equiv 2010 \pmod{2011}$;

$2^{335} \equiv 205.2010 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{335} \equiv 1806 \pmod{2011}$;

$2^{402} \equiv 2010^2 \pmod{2011} \Rightarrow 2^{402} \equiv 1 \pmod{2011}$

$\Rightarrow (2^{402} - 1) \vdots 2011$.

Vậy $n = 402$ là giá trị cần tìm. ❒

➢**Nhận xét.** Duy nhất bạn *Hải Linh* làm đúng bài này, các bạn còn lại hoặc lập luận không chặt chẽ, hoặc giải sai.

Sai lầm của đa số các bạn ở chỗ

+ Khi áp dụng định lí Phermat nhỏ $2^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ và từ yêu cầu của bài toán $2^n \equiv 1 \pmod{2011}$, các bạn đều cho rằng $n = 2010.k, k \in \mathbb{N}$, và do n nguyên dương nhỏ nhất nên $k = 1$ và $n = 2010$. Điều này là không đúng, vì n có thể là ước của 2010 (chẳng hạn $n = 402$).

+ Từ $2010 \vdots n$ và $2010 = 30.67$ (67 là số nguyên tố) suy ra $30 \vdots n$ hoặc $67 \vdots n$, do đó tìm được $n = 2010$.

Sai lầm ở chỗ: *Từ $ab \vdots n$, b là số nguyên tố không suy ra được $a \vdots n$ hoặc $b \vdots n$.* Ví dụ $a = 8$; $b = 3$, $n = 6$.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/414. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên k thì phương trình*

$$x^4 - 2010x^3 + (2009 + k)x^2 - 2007x + k = 0$$

không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^4 - 2010x^3 + (2009+k)x^2 - 2007x + k$.

Nhận xét. Nếu a là nghiệm nguyên của PT $f(x) = 0$ thì a là số chẵn (1)

Thật vậy, ta có $f(1) = 2k - 2007$ là số lẻ với $\forall k \in \mathbb{Z}$ nên $x = 1$ không là nghiệm của (1).

Do a là nghiệm nên $a \ne 1$ và $f(a) = 0$ và

$$f(a) - f(1) = (a^4 - 2010a^3 + (2009+k)a^2 - 2007a + k) - (2k - 2007)$$

$$= (a^4 - a^3) - 2009(a^3 - a^2) + k(a^2 - 1) - 2007(a - 1).$$

Mỗi số hạng của tổng trên đều chia hết cho $a - 1$ nên $f(a) - f(1)$ chia hết cho $a - 1$, mà $f(a) - f(1)$ là số lẻ nên $a - 1$ phải là số lẻ, suy ra a là số chẵn (đpcm).

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên phân biệt của PT (1) theo nhận xét trên trên suy ra x_1, x_2 là hai số chẵn, $x_1 - x_2 \ne 0$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Ta có $0=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$$=\frac{(x_1^4-x_2^4)-2010(x_1^3-x_2^3)+(2009+k)(x_1^2-x_2^2)-2007(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3)-2010(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$
$$+(2009+k)(x_1+x_2)-2007=0 \quad (2)$$

Do x_1, x_2 chẵn nên vế trái của (2) là một số lẻ, vế phải của (2) là số chẵn nên đẳng thức (2) không xảy ra. Điều này chứng tỏ giả sử sai.

Vì vậy PT (1) không thể có hai nghiệm nguyên phân biệt. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Một số bạn đã suy luận: Nếu PT (1) có nghiệm nguyên thì $\dfrac{2008-3x}{x^2+1}$ phải là số nguyên, từ đây tìm ra $x=0$, dẫn đến $k=0$, rồi giải phương trình $x^4-2010x^3+2009x^2-2007x=0$ (3). Để chứng tỏ PT (3) này có nghiệm nguyên duy nhất $x=0$. Tuy nhiên PT (3) không thuộc dạng cơ bản nên các bạn đã suy luận rất dài dòng và thiếu chính xác.

2) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

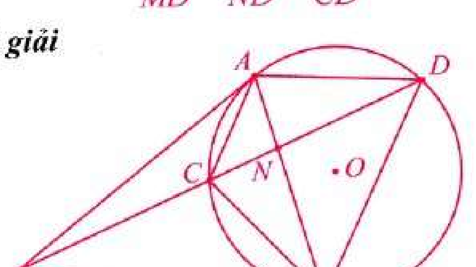
Vĩnh Phúc: *Ngô Tuấn Anh*, 8T, THCS Đồng Xuân, TX. Phúc Yên; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tài*, 9A, THCS Yên Phong; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Minh Khang*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T5/414. *Từ điểm M ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD đến (O), C nằm giữa M và D. AB cắt CD tại N. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{MD}+\frac{1}{ND}=\frac{2}{CD}.$$

Lời giải



Vì $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ nên $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g), suy ra $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{AC}{AD}$ (1)

Tương tự, $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$ (g.g) suy ra

$$\frac{MB}{MD}=\frac{BC}{DB} \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) với lưu ý $MA=MB$ ta có

$$\frac{MC}{MD}=\frac{AC}{AD}.\frac{BC}{DB} \quad (3)$$

Lại có $\Delta ANC \backsim \Delta DNB$ (g.g), $\Delta AND \backsim \Delta CNB$ (g.g) suy ra

$$\frac{AN}{DN}=\frac{AC}{DB},\frac{AN}{CN}=\frac{AD}{CB}\Rightarrow\frac{NC}{ND}=\frac{AC}{DB}.\frac{CB}{AD} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{MC}{MD}=\frac{NC}{ND}\Rightarrow 1-\frac{CD}{MD}=\frac{CD}{ND}-1.$$

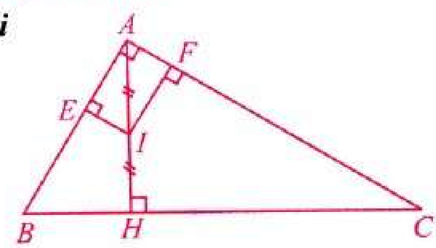
Suy ra $\dfrac{2}{CD}=\dfrac{1}{MD}+\dfrac{1}{ND}$. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn tham gia đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Thị Nga*, 8A, *Nguyễn Đức Đại*, $9A_1$, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh**: *Chu Văn Trang*, *Lưu Đức Mạnh*, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Mai Trường An*, 9D, THCS Chu Văn An, Nga Sơn; **Hà Nội**: *Vũ Hoàng Minh*, $9A_{10}$, THCS Giảng Võ; **Hà Nam**: *Đinh Thị Diệu Linh*, $9A_2$, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Hà Tĩnh**: *Đặng Trần Đức Anh*, 7C, THCS Liên Hương, Vũ Quang; **TP. Hồ Chí Minh**: *Phan Huỳnh Lan Chi*, $9A_6$, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/414. *Cho tam giác ABC vuông tại A và thỏa mãn $AB+\sqrt{3}AC=2BC$. Xác định vị trí điểm M sao cho $4\sqrt{3}.MA+3\sqrt{7}.MB+\sqrt{39}.MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải



Bổ đề. *Cho tam giác ABC vuông tại A ($BC=a$; $AC=b$; $AB=c$). Kẻ AH vuông góc với BC ($H\in BC$). Gọi I là trung điểm của đoạn AH. Khi đó ta có hệ thức*

$$a^2.\overrightarrow{IA}+b^2.\overrightarrow{IB}+c^2.\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$$

Chứng minh. Kẻ $IE\perp AB$ ($E\in AB$); $IF\perp AC$ ($F\in AC$). Lúc đó tứ giác *AEIF* là hình chữ nhật. Suy ra

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{AE}{AB}.\overrightarrow{AB}+\frac{AF}{AC}.\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

Mặt khác, $\Delta AIE \backsim \Delta ABH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AI}{AB}=\dfrac{AE}{AH}$.

Từ đó $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AI.AH}{AB^2}=\dfrac{AH^2}{2AB^2}=\dfrac{AB^2.AC^2}{(AB^2+AC^2).2AB^2}$

$=\dfrac{b^2}{2(b^2+c^2)}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$. Tương tự có

$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$. Từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AB}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}.\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right)+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}\right)$$

$\Leftrightarrow a^2.\overrightarrow{IA}+b^2.\overrightarrow{IB}+c^2.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (đpcm).

Từ *Bổ đề* trên, lưu ý rằng với mọi điểm M, ta có

$$a^2.MA.IA+b^2.MB.IB+c^2.MC.IC$$
$$\geq a^2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}+b^2.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB}+c^2.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$$
$$=a^2\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)\overrightarrow{IA}+b^2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)\overrightarrow{IB}+c^2\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right)\overrightarrow{IC}$$
$$=a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2-\overrightarrow{IM}\left(a^2\overrightarrow{IA}+b^2\overrightarrow{IB}+c^2\overrightarrow{IC}\right)$$
$$=a^2.IA^2+b^2.IB^2+c^2.IC^2 \qquad (2)$$

Trở lại bài **T6/414.** Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta thấy

$$AB+\sqrt{3}AC\leq\sqrt{(1+3)\left(AB^2+AC^2\right)}=2BC.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AC=\sqrt{3}.AB$.

Đặt $AB=c$ thì $AC=c\sqrt{3};BC=2c$. Từ $AH.BC$ $=AB.AC\Rightarrow AH=\dfrac{c\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IA=\dfrac{c\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $BA^2=BH.BC$ nên $BH=\dfrac{c}{2}$; $CH=\dfrac{3c}{2}$.

Từ định lí Pythagore ta có

$$IB=\sqrt{IH^2+HB^2}=\frac{c\sqrt{7}}{4};$$
$$IC=\sqrt{IH^2+HC^2}=\frac{c\sqrt{39}}{4}.$$

Từ bất đẳng thức (2) ta nhận được

$$4c^2.\frac{c\sqrt{3}}{4}MA+3c^2.\frac{c\sqrt{7}}{4}MB+c^2.\frac{c\sqrt{39}}{4}MC$$
$$\geq 4c^2\left(\frac{3c^2}{16}\right)+3c^2\left(\frac{7c^2}{16}\right)+c^2\left(\frac{39c^2}{16}\right).$$

Hay $4\sqrt{3}.MA+3\sqrt{7}.MB+\sqrt{39}.MC\geq 18c$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv I$.

Tóm lại, khi M là trung điểm của đường cao AH của tam giác vuông ABC ($\widehat{BAC}=90^{\circ}$) thỏa mãn $AB+\sqrt{3}.AC=2BC$ thì biểu thức $4\sqrt{3}MA+3\sqrt{7}MB+\sqrt{39}MC$ đạt giá trị nhỏ nhất. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Thực chất tam giác vuông ABC với giả thiết $AB+\sqrt{3}AC=2BC$ là *tam giác nửa đều* ($\widehat{BAC}=90^{\circ}$; $\widehat{ABC}=60^{\circ}$; $\widehat{ACB}=30^{\circ}$).

2) Bài toán tổng quát của bài T6/414 được phát biểu như sau: *Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z. Hãy tìm điểm M trên mặt phẳng chứa tam giác sao cho tổng x.MA + y.MB + z.MC nhỏ nhất. (Bài toán Toricelli mở rộng, xem Tuyển tập 5 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, trang* 126).

3) Số lời giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tương đối tốt:

Nghệ An: *Hồ Bá Đức*, 11A12, THPT Diễn Châu II, *Hồ Đức Nhân*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu II, *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Quảng Nam:** *Lê Văn Thành*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Bùi Trần Hải Đăng, Nguyễn Thành Thi*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

HỒ QUANG VINH

★Bài T7/414. *Giải phương trình*
$$\log_3(7^x+2)=\log_5(6^x+19).$$

Lời giải.

• Nếu $x\leq 0$ thì ta có $7^x\leq 1$, suy ra
$$\log_3(7^x+2)\leq\log_3 3=1.$$

Mặt khác $\log_5(6^x+19)>\log_5 19>1$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm trong khoảng $(-\infty\,;0]$.

• Nếu $x>0$, PT đã cho tương đương với
$$\log_3\left(7^x+2\right)-\log_5\left(6^x+19\right)=0.$$

Xét hàm số $f(x)=\log_3\left(7^x+2\right)-\log_5\left(6^x+19\right)$ trên $(0;+\infty)$, ta có

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 3}.\frac{7^x\ln 7}{7^x+2}-\frac{1}{\ln 5}.\frac{6^x\ln 6}{6^x+19}$$
$$>\frac{\ln 6}{\ln 5}.\frac{7^x}{7^x+2}-\frac{\ln 6}{\ln 5}.\frac{6^x}{6^x+19}$$
$$=\frac{\ln 6}{\ln 5}.\frac{19.7^x-2.6^x}{(7^x+2)(6^x+19)}>0,\ \forall x>0.$$

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;+\infty)$.

Dễ thấy $x = 1$ là một nghiệm của PT đã cho.

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$. ❐

➤**Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt:
Bắc Ninh: *Lưu Ngân*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Vũ Đình Việt*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Nam Định:** *Trịnh Đức Lợi*, 12A1, THPT Giao Thuỷ B; **Quảng Ngãi:** *Võ Văn Tiên*, 12T1, *Huỳnh Nhật Quang*, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Hà Nam:** *Trương Công Minh*, 12A1, THPT A Duy Tiên, Hà Nam.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/414. *Cho tam giác ABC thỏa mãn*

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10}.$$

Lời giải. Ta có $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sin A\sin B=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=8\sin^2\frac{C}{2}.$$

Lại có $\cos(A+B)=-\cos C=2\sin^2\frac{C}{2}-1$, nên

nên $\cos A\cos B=10\sin^2\frac{C}{2}-1$ (3)

Với các kết quả (2) và (3), ta có hệ thức

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow \sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{10}$$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B=0$, hay tam giác ABC vuông ở A hoặc B. ❐

➤**Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách : Chứng minh $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a+b=3c$; sau đó sử dụng công thức Héron và $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$ để chứng minh $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \widehat{A}=90^{\circ}$ hoặc $\widehat{B}=90^{\circ}$. Tuy nhiên làm như vậy dài và phức tạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Lào Cai: *Trần Phương Thảo, Đỗ Bùi Phương Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai; **Thanh Hóa**: *Trương Văn Cường*, 10A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Gia Lai**: *Lê Lâm Bảo Ngọc*, 10C3B, THPT chuyên Hùng Vương; **Quảng Ngãi**: *Ngô Thành Đạt*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Khiết; **Cần Thơ**: *Hoàng Công Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ; **Đồng Tháp**: *Bùi Trần Hải Đăng, Nguyễn Phương Ngọc*, 10T, *Âu Anh Minh, Võ Hoài Bão*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh; **Bến Tre**: *Võ Thiện Khang*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Cà Mau**: *Lưu Giang Nam*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, TP. Cà Mau.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T9/414. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). M là một điểm không nằm trên đường tròn. MA, MB, MC lần lượt cắt đường tròn tại A_1, B_1, C_1. Gọi r, r_1 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng* $|R^2-OM^2|\geq 4r.r_1$.

Lời giải. Trước hết, ta cần có năm bổ đề.

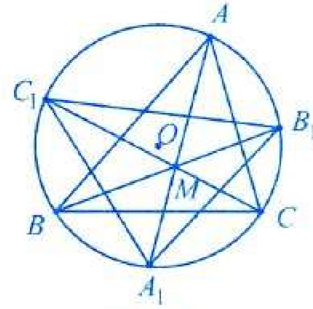
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) và điểm M không nằm trên (O; R). AM, BM, CM theo thứ tự lại cắt (O ; R) tại A_1, B_1, C_1. Khi đó*

$$\frac{MA.BC}{B_1C_1}=\frac{MB.CA}{C_1A_1}=\frac{MC.AB}{A_1B_1}=\frac{MA.MB.MC}{|R^2-OM^2|}.$$

Chứng minh

Trường hợp 1. M nằm trong (O ; R) (h.1).

Các tam giác MBC, MC_1B_1 đồng dạng (g.g), suy ra $\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{MB}{MC_1}$.



Hình 1

Do đó $\frac{BC.MA}{B_1C_1}=\frac{MA.MB.MC}{MC.MC_1}=\frac{MA.MB.MC}{|R^2-OM^2|}$.

Tương tự cho các tỉ số còn lại.

Trường hợp 2. M nằm ngoài $(O\,;\,R)$. Tương tự như trường hợp 1. Đề nghị bạn đọc tự giải.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M không nằm trên (O). AM, BM, CM theo thứ tự lại cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Khi đó hai tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ đồng dạng (cùng hướng).*

Chứng minh.(h. 2) Dễ thấy các bộ bốn điểm B, M, A_2, C_2 và C, M, A_2, B_2 cùng thuộc một đường tròn (1)

Các đường thẳng CB_2, CM, BC_2, BM theo thứ tự trùng với các đường thẳng CA, CC_1, BA, BB_1 (2)

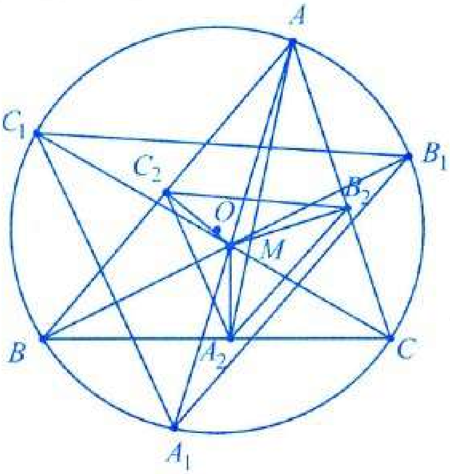
Điểm A_1 thuộc các đường tròn ngoại tiếp các tam giác CAC_1, BAB_1 (3)

Suy ra

$$(A_2B_2,A_2C_2)\equiv(A_2B_2,A_2M)+(A_2M,A_2C_2)\ (\mathrm{mod}\,\pi)$$
$$\equiv(CB_2,CM)+(BM,BC_2)(\mathrm{mod}\,\pi)\quad\text{(theo (1))}$$
$$\equiv(CA,CC_1)+(BB_1,BA)(\mathrm{mod}\,\pi)\quad\text{(theo (2))}$$
$$\equiv(A_1A,A_1C_1)+(A_1B_1,A_1A)(\mathrm{mod}\,\pi)\quad\text{(theo (3))}$$
$$\equiv(A_1B_1,A_1C_1)(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Tương tự $(B_2C_2,B_2A_2)\equiv(B_1C_1,B_1A_1)(\mathrm{mod}\,\pi)$.

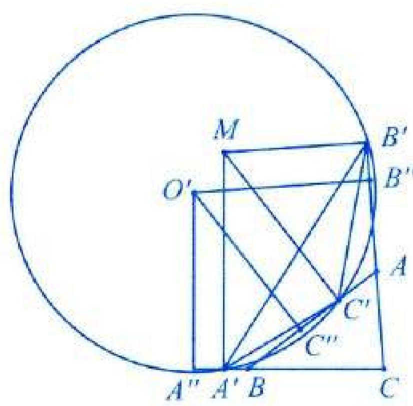
Vậy các tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ đồng dạng (cùng hướng).



Hình 2

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M không nằm trên (O). A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. r, R' theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'. Khi đó $R'\geq r$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Chứng minh. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$, A'', B'', C'' theo thứ tự là hình chiếu của O' trên BC, CA, AB (h.3).



Hình 3

Chú ý rằng $R' = O'A'' = O'B'' = O'C''$;
$O'A'\geq O'A''$, $O'B'\geq O'B''$, $O'C'\geq O'C''$,

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}r(BC+CA+AB)$. Ta có

$$\frac{1}{2}R'.(BC+CA+AB)$$
$$=S_{O'BC}+S_{O'CA}+S_{O'AB}\geq S_{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}r.(BC+CA+AB).\text{ Suy ra } R'\geq r.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bổ đề 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), r là bán kính đường tròn nội tiếp. Điểm M không nằm trên (O). Khi đó*

$$\frac{MA.MB.MC}{|R^2-OM^2|}\geq 2r.$$

Chứng minh 4. (h.2). Chú ý rằng hoặc $\widehat{BAC}=\widehat{B_2AC_2}$ hoặc $\widehat{BAC}=\pi-\widehat{B_2AC_2}$, gọi R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$. Áp dụng các bổ đề 1, 2, 3 và định lí sin trong tam giác, ta có

$$\frac{MA.MB.MC}{|R^2-OM^2|}=\frac{MA.BC}{B_1C_1}=\frac{MA.2R.\sin\widehat{BAC}}{2R.\sin\widehat{B_1A_1C_1}}$$
$$=\frac{MA.\sin\widehat{B_2AC_2}}{\sin\widehat{B_1A_1C_1}}=\frac{B_2C_2}{\sin\widehat{B_2A_2C_2}}=R_2\geq 2r.$$

Bổ đề 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M không nằm trên (O). AM, BM, CM theo thứ tự lại cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Khi đó M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC hoặc M là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi M là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$.*

Bổ đề 5 rất quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh. Trở lại bài toán **T9/413**.

Theo bổ đề 4, ta có $\dfrac{MA.MB.MC}{|R^2-OM^2|}\ge 2r$ và

$$\frac{MA_1.MB_1.MC_1}{|R^2-OM^2|}\ge 2r_1.$$

Suy ra $|R^2-OM^2|=\dfrac{|R^2-OM^2|^3}{|R^2-OM^2|^2}$

$$=\frac{MA.MA_1.MB.MB_1MC.MC_1}{|R^2-OM^2|^2}\ge 4r.r_1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M đồng thời là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và $A_1B_1C_1$.

Vậy theo bổ đề 5, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và M trùng O. ❒

➤**Nhận xét.** Bài toán này khó nên không có bạn nào giải đúng.

NGUYỄN MINH HÀ

★Bài T10/414. *Cho các số thực dương a, b. Tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\frac{k}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\ge\frac{16+4k}{(a+b)^3}.$$

Lời giải. (Theo bạn *Vương Nhật Quân*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, **Nghệ An** và *Lê Nhật Thăng*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**). Ta có

$$\frac{k}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\ge\frac{16+4k}{(a+b)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}-\frac{4}{a^3+b^3}\ge\frac{4(k+4)}{(a+b)^3}-\frac{k+4}{a^3+b^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^3+b^3)^2-4a^3b^3}{a^3b^3(a^3+b^3)}\ge\frac{(k+4)\left(4(a^3+b^3)-(a+b)^3\right)}{(a+b)^3(a^3+b^3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^3-b^3)^2}{a^3b^3}\ge\frac{(k+4)\left(4(a^2-ab+b^2)-(a^2+2ab+b^2)\right)}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2+ab+b^2)^2(a-b)^2}{a^3b^3}\ge\frac{3(k+4)(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow k\le\frac{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)^2}{3a^3b^3}-4 \qquad (1)$$

Với $a>0$, $t>0$, $b=ta$, ta được

$$(1)\Leftrightarrow\ k\le\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)^2}{3t^3}-4 \text{ với mọi } t>0$$

Cho $t\to 1$ suy ra $k\le 8$.

Để chứng minh $k=8$ là giá trị lớn nhất thỏa mãn đầu bài ta chứng minh với mọi $a>0$, $b>0$ thì $\dfrac{8}{a^3+b^3}+\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\ge\dfrac{48}{(a+b)^3}$ (2)

Ta có

$$\frac{8}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=\frac{4}{a^3+b^3}+\frac{4}{a^3+b^3}+\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{4^2}{(a^3+b^3)a^3b^3}} \text{ (theo BĐT Cauchy)} \qquad (3)$$

Lại theo BĐT Cauchy cho bốn số dương ta có

$$(a^3+b^3)a^3b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)ababab$$

$$\le(a+b)\left(\frac{a^2-ab+b^2+ab+ab+ab}{4}\right)^4$$

$$=(a+b)\frac{(a+b)^8}{4^4}=\frac{(a+b)^9}{4^4} \qquad (4)$$

Vậy từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{8}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4^2.4^4}{(a+b)^9}}=\frac{48}{(a+b)^3}.$$ ❒

➤**Nhận xét.** Bài này được nhiều bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Đăng Quả*, 10A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Viết Thủy*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 10A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ; **Nghệ An:** *Dương Khánh Linh*, 9A1, THCS Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn; **Cần Thơ:** *Hoàng Công Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Đồng Nai:** *Dương Ngọc Sơn*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài T11/414. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Thay $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$ vào (1), ta được $f(a)=1$, trong đó $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$.

Tiếp tục thay $y = a$ vào (1), ta thu được
$f(x+a)+f(xa+x)=f(x+a)+2ax, \forall x\in\mathbb{R}$,
hay $f(ax+x)=2ax, \forall x\in\mathbb{R}$ (2)

Từ (2) suy ra $a\neq -1$. Thay $x=\dfrac{t}{a+1}$ vào (2), ta được $f(t)=\dfrac{2at}{a+1}, \forall t\in\mathbb{R}$ hay $f(t)=ct, c\in\mathbb{R}$..

Tiếp theo, thay biểu thức của $f(t)$ vào (1) ta thu được đẳng thức

$$c^2xy+cy+cxy+cx=cx+cy+2xy, \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow (c^2+c-2)xy=0, \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow c=1$ hoặc $c=-2$.

Vậy ta nhận được hai hàm số thỏa mãn điều kiện bài ra là $f(x)=x$ và $f(x)=-2x$. ❒

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Nguyễn Đăng Quả*, 10A2T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** *Vũ Đình Việt*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, *Bùi Quang Tiến*, 11A, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn;**Hưng Yên:** *Trần Ngọc Tiến*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Vương Nhật Quân*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Ngãi:** *Phạm Việt Hoàng*, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Nguyễn Quang Hải*, 12TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Phùng Thanh Dũng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Quảng Trị:** *Hồ Phước Bảo, Trần Đức Anh*, 10T THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Lê Nhật Thăng*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Cần Thơ:** *Hoàng Công Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

NGUYỄN VĂN MẬU

★Bài T12/414. *Với mỗi số nguyên dương n, ta xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi*

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{2n}x^i+1.$$

Chứng minh rằng:

a) Hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại mỗi điểm duy nhất với mỗi số n nguyên dương. Kí hiệu điểm đó là x_n và giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là S_n, tức là $S_n=f_n(x_n)$.

b) $S_n>\frac{1}{2}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Hơn nữa $\frac{1}{2}$ là hằng số tốt nhất theo nghĩa không tồn tại số thực $a>\frac{1}{2}$ sao cho $S_n>a$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (S_n) ($n = 1, 2, ...$) là dãy giảm và $\lim S_n=\frac{1}{2}$.

d) $\lim x_n=-1$.

Lời giải. Với mỗi số tự nhiên $n\geq 1$ ta có các nhận xét sau:

- $f_n(x)\geq 1$, với mọi $x\geq 0$.
- $f_n(x)=\sum_{i=1}^{2n}x^i+1=\sum_{i=1}^{n-1}\left(x^{2i-1}+x^{2i}\right)$

$=\sum_{i=1}^{n-1}x^{2i-1}(1+x)+1\geq 1$, với mọi $x\leq -1$.

Do đó để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n ta chỉ cần xét $-1\leq x\leq 0$.

a) Với $-1\leq x\leq 0$ ta có $f_n(x)=\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}$.

Ta có $f'_n(x)=\dfrac{2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1}{(1-x)^2}$.

Xét hàm số g_n trên đoạn $[-1;0]$ xác định bởi $g_n(x)=2nx^{2n+1}-(2n+1)x^{2n}+1$.

Ta có $g'_n(x)=(2n+1)2nx^{2n-1}(x-1)\geq 0$ với mọi $-1\leq x\leq 0$. Suy ra g_n là hàm tăng trên đoạn $[-1;0]$. Mà $g_n(0)=1$ và $g_n(-1)=-4n<0$, nên phương trình $g_n(x)=0$ có đúng một nghiệm x_n trên đoạn $[-1;0]$.

Từ đó suy ra $f'_n(x)\leq 0$ với $-1\leq x\leq x_n$ và $f'_n(x)\geq 0$ với $x_n\leq x\leq 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số f_n, suy ra trên đoạn $[-1;0]$ hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất là $x_n\in[-1;0]$.

b) Ta có $S_n=f_n(x_n)=\dfrac{1-x_n^{2n+1}}{1-x_n}>\dfrac{1}{1-x_n}\geq\dfrac{1}{2}$ với mọi $n\geq 1$ $\left(\text{vì} -1\leq x_n\leq -\dfrac{1}{2}\right)$.

Giả sử tồn tại số thực a sao cho $S_n>a$ với mọi $n\geq 1$.

Khi đó ta có $f_n(x)=\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}>a$ với mọi $-1\leq x\leq 0$ và $n\geq 1$.

Cố định $x_0\in[-1;0]$, theo trên ta có $\dfrac{1-x_0^{2n+1}}{1-x_0}>0$ với mọi $n\geq 1$. Cho $n\to+\infty$ ta nhận được đánh giá $\dfrac{1}{1-x_0} \geq a$. Chú ý rằng bất đẳng thức này đúng với mọi $x_0 \in [-1;0]$ nên cho $x_0 \to (-1)^+$ ta có $\dfrac{1}{a} \geq a$. Vậy $\dfrac{1}{2}$ là hằng số tốt nhất theo nghĩa không tồn tại số thực $a > \dfrac{1}{2}$ sao cho $S_n > a$ với mọi $n \geq 1$.

c) Với mọi $-1 \leq x \leq 0$, ta có

$$f_{n+1}(x) = \left(x^{2n+2} + x^{2n+1}\right) + f_n(x)$$
$$= x^{2n+1}(x+1) + f_n(x) \leq f_n(x).$$

Suy ra $S_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n) = S_n$ với mọi $n \geq 1$. Do đó (S_n) $(n = 1,2,...)$ là dãy giảm. Do dãy bị chặn dưới bởi $\dfrac{1}{2}$ nên tồn tại

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S_0 \geq \frac{1}{2}.$$

Vì $(S_n)(n=1,2,...)$ là dãy giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S_0$ nên $S_n \geq S_0$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh tương tự câu b) ta nhận được $S_0 \leq \dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra $S_0 = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

d) Với mọi số thực x, ta có $f_{n+1}(x) = f_n(x)x^2 + x + 1$.

Ta có $S_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n\left(x_{n+1}\right)x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1$ (1)

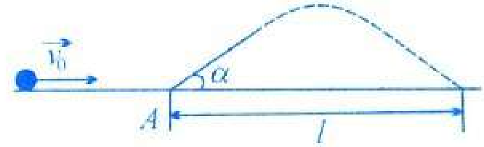
Vì $f_n\left(x_{n+1}\right) \geq f_n(x_n) = S_n > \dfrac{1}{2}$ nên từ (1) ta suy ra $S_{n+1} > \dfrac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1 = \dfrac{1}{2}\left(x_{n+1}+1\right)^2 + \dfrac{1}{2}$, hay $S_{n+1} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}\left(x_{n+1}+1\right)^2 \geq 0$. Cho $n \to +\infty$ với chú ý $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$ ta nhận được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Trương Giang Khang*, 11A1, THPT Thuận Thành 1; **Thái Bình:** *Bùi Đình Hiếu*, 11A1, THPT Quỳnh Côi; **Nghệ An:** *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa.

THTT

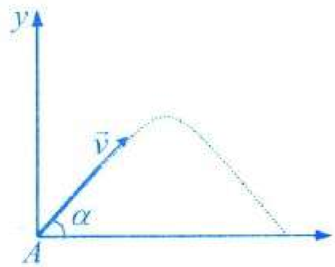
★**Bài L1/414.** *Một vật đang chuyển động trên mặt sàn nằm ngang với vận tốc $\vec{v}_0$ thì đi lên một mặt phẳng nghiêng nhẵn tạo với phương ngang một góc α ($\alpha < 45^o$) như hình vẽ.*



Sau khi rời mặt phẳng nghiêng, vật rơi xuống sàn cách chân mặt phẳng nghiêng A một đoạn l.

Hỏi chiều dài của mặt phẳng nghiêng phải bằng bao nhiêu để khoảng cách l đạt cực đại? Giá trị cực đại đó bằng bao nhiêu? Bỏ qua sự mất mát động năng ở chân mặt phẳng nghiêng và sức cản không khí.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi L là chiều dài mặt phẳng nghiêng, v là vận tốc của vật khi rời mặt phẳng nghiêng.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgL\sin\alpha \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gL\sin\alpha \quad (1)$$

Chọn gốc thời gian $t = 0$ khi vật rời mặt phẳng nghiêng. Phương trình chuyển động của vật theo các trục tọa độ:

$$x = L\cos\alpha + v\cos\alpha.t \quad (2)$$

$$y = L\sin\alpha + v\sin\alpha.t - \frac{gt^2}{2} \quad (3)$$

Khi vật rơi chạm sàn thì $x = l$ và $y = 0$ nên từ (2) và(3) khử t ta được phương trình

$$L\sin\alpha + \tan\alpha(l - L\cos\alpha) = \frac{g(l-L\cos\alpha)^2}{2v^2\cos^2\alpha} \quad (4)$$

Thay (1) vào (4) và biến đổi ta được

$$g(L\cos\alpha)^2 - 2gl\cos2\alpha.(L\cos\alpha) + gl^2 - lv_0^2\sin2\alpha = 0 (5)$$

Do góc α cố định nên ta coi PT (5) là PT bậc 2 mà ẩn số là $L\cos\alpha$. Để tồn tại khoảng cách l cực đại thì PT (5) phải có nghiệm, tức là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow g^2l^2\cos^2 2\alpha - g\left(gl^2 - lv_0^2\sin2\alpha\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow gl\sin^2 2\alpha \leq v_0^2\sin2\alpha \quad (6)$$

Do $\alpha < 45^o$ nên từ (6) suy ra $l \leq \dfrac{v_0^2}{g\sin2\alpha}$.

Vậy $l_{max} = \dfrac{v_0^2}{g\sin 2\alpha}$ xảy ra khi $\Delta' = 0$, khi ấy $L = \dfrac{v_0^2 \cot 2\alpha}{g\cos\alpha}$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Nghệ An:** *Hồ Bá Đức*, 11A12, THPT Diễn Châu II; *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hòa; **Phú Thọ:** *Hà Thị Huyền Trang*, 12K1, THPT chuyên Hùng Vương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Tiệp*, 12A1, THPT Hậu Lộc IV.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/414.** *Cho đoạn mạch R, L, C nối tiếp, trong đó điện dung C của tụ điện thay đổi được. Điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 200\sqrt{2}\cos(100\pi t)$V. Khi $C = C_1 = \dfrac{10^{-4}}{4\pi}$F và $C = C_2 = 2C_1$ thì mạch điện có cùng công suất $P = 200$W.*

a) Xác định L, R và hệ số công suất $\cos\varphi$ của mạch điện.

b) Viết biểu thức của cường độ dòng điện ứng với các giá trị của C_1 và C_2.

c) Với giá trị C bằng bao nhiêu thì U_C đạt cực đại? Tính $U_{C\max}$.

Lời giải. a) Ta có

$$Z_{C_1} = \frac{1}{C_1\omega} = \frac{1}{\frac{10^{-4}}{4\pi}.100\pi} = 400(\Omega)$$

$$Z_{C_2} = \frac{1}{C_2\omega} = \frac{1}{2C_1\omega} = \frac{1}{2.\frac{10^{-4}}{4\pi}.100\pi} = 200(\Omega).$$

Vì R không đổi và theo giả thiết khi $C = C_2 = 2C_1$ thì $P_1 = P_2$, nên ta suy ra $I_1 = I_2$. Do đó

$$Z_1 = Z_2 \text{ hay } \sqrt{R^2 + \left(Z_L - Z_{C_1}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(Z_L - Z_{C_2}\right)^2}.$$

Từ đây ta tìm được $Z_L = \dfrac{Z_{C_1} + Z_{C_2}}{2} = 300(\Omega)$

$$Z_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{300}{100\pi} \approx 0{,}96(\text{H}).$$

Từ công thức $P = RI^2 = \dfrac{RU^2}{R^2 + \left(Z_L - Z_C\right)^2}$, ta có

$$P = \frac{200^2 R}{R^2 + 100^2} = 200(\text{W}), \text{ suy ra } R = 100(\Omega).$$

Hệ số công suất $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) • Khi $C = C_1 \Rightarrow Z_{C_1} = 400(\Omega)$.

$$I_1 = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{200}{100}} = \sqrt{2}(\text{A}).$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{Z_L - Z_{C_1}}{R} = \frac{300 - 400}{100} = -1,$$

suy ra $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4}$.

Biểu thức của cường độ dòng điện:

$$i_1 = 2\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)(\text{A}).$$

• Khi $C = C_2 = 2C_1 \Rightarrow Z_{C_2} = 200(\Omega)$.

$$I_2 = I_1 = \sqrt{2}\text{A}, \ \tan\varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Biểu thức của cường độ dòng điện

$$i_2 = 2\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)(\text{A}).$$

c) U_C cực đại khi

$$Z_C = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L} = \frac{100^2 + 300^2}{300} = \frac{1000}{3}(\Omega).$$

Suy ra $C = \dfrac{1}{Z_C\omega} \approx 9{,}6(\mu\text{F})$;

$$U_{C\max} = \frac{U\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R} = 200\sqrt{10} \approx 632{,}5(\text{V}). \ \square$$

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nghệ An:** *Nguyễn Ngọc Minh*, 11A3, K48, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, *Nguyễn Văn Nguyên*, K43A6, THPT chuyên ĐH Vinh; **Thanh Hóa:** *Hoàng Phương Thảo*, *Đỗ Thị Hoài*, 12A1, THPT Lê Hoàn, *Nguyễn Văn Tiệp*, 12A1, THPT Hậu Lộc IV; **Thái Nguyên:** *Ma Thị Trang* (A), 12A1, Trường Phổ thông Dân tộc Nội trú Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Hà Thị Huyền Nhung*, 12K1, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nam:** *Trương Công Minh*, 12A1, THPT A Duy Tiên; **Đồng Tháp:** *Âu Anh Minh*, *Võ Hoài Bảo*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Thái Bình:** *Hoàng Đình Quang*, 12A1, THPT Quỳnh Côi, *Nguyễn Văn Minh*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Mai Loan*, *Nguyễn Khắc Tuấn*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Cần Thơ:** *Trương Hà Giang*, 11A3, THPT chuyên Lí Tự Trọng; **Bắc Giang:** *Vũ Thị Huyền*, 12A2, THPT Lục Ngạn; **Nam Định:** *Đặng Phúc Cường*, 11 Lí, *Đinh Việt Thắng*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, *Trịnh Đức Lợi*, 12 A1, THPT Giao Thủy B.

NGUYỄN VĂN THUẬN

XUNG QUANH BÀI 3... *(Tiếp trang 15)*
(d_C, l_D), (l_A, d_B), (l_A, l_D); E, F lần lượt là giao điểm của AD và BC, AB và CD. Ta cần chứng minh $\widehat{I_1NI_6} = 90^\circ$. Chú ý rằng M là tâm đường tròn bàng tiếp góc E của tam giác AEB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AEB}$. Từ đó $\widehat{I_1NQ} = 90^\circ - \widehat{NMQ} = 90^\circ - \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AEB}$ (1)

Mặt khác, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác AEB nên $\widehat{AKB} = \frac{1}{2}\widehat{AEB}$.

Từ đó $\widehat{I_6NL} = 90^\circ - \widehat{LKN} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AEB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{I_1NQ} + \widehat{I_6NL} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{I_1NI_6} = 90^\circ$.

Trở lại bài toán. Theo chứng minh trên thì I_1N là tiếp tuyến kẻ từ I_1 tới đường tròn (I_6). Tương tự I_1M, I_1P, I_1Q lần lượt là tiếp tuyến kẻ từ I_1 tới các đường tròn $(I_5), (I_7), (I_8)$. Vậy I_1 có cùng phương tích tới bộ đường tròn (ω_2). Tương tự, I_2 có cùng phương tích tới bộ đường tròn (ω_2). Nghĩa là I_1I_2 là trục đẳng phương của bộ bốn đường tròn (ω_2), suy ra bốn điểm I_5, I_6, I_7, I_8 cùng nằm trên đường thẳng l vuông góc với I_1I_2. Tương tự ta thu được I_1, I_2, I_3, I_4 thẳng hàng trên đường thẳng d. Vậy $d \perp l$. Ta có điều phải chứng minh. ❐

➢ **Nhận xét.** *Điều thú vị là bộ đường tròn (ω_1) có chung trục đẳng phương l còn bộ đường tròn (ω_2) có chung trục đẳng phương d.*

Trước khi đến với tính chất 2, ta phát biểu lại điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$ như sau:
Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi E là giao điểm của AD và BC. F là giao điểm của AB và CD. Khi đó bốn đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABE, CBF, CDE, ADF đồng quy tại một điểm J gọi là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$.

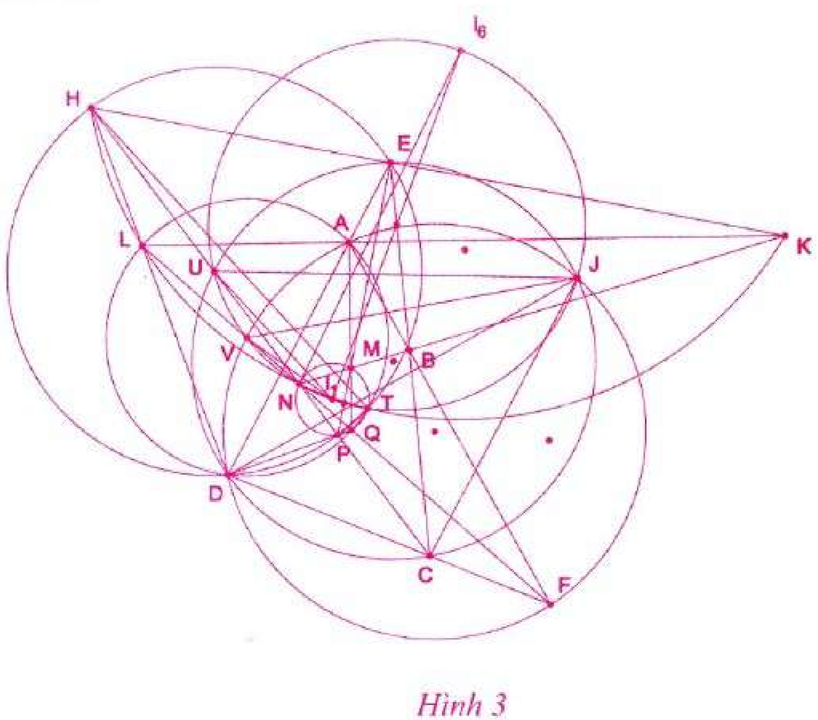
❖ **Tính chất 2.** *Sử dụng kí hiệu như lời giải tính chất 1. Ta có giao điểm của d và l là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$.*

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh rằng $\widehat{I_xJI_y} = 90^\circ$.

Chứng minh (h. 3). Ta sẽ chứng minh bổ đề với $I_x \equiv I_1, I_y \equiv I_6$. Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

Gọi T là giao điểm thứ hai của (I_1) và (I_6). d_C cắt (EDC) lần thứ hai tại U, FL cắt (ADF) lần thứ hai tại V.

Do P là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác EDC nên U là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác EPD. Mà $\widehat{HEP} = \widehat{HDP} = 90^\circ$ nên U là trung điểm HP. Tương tự, V là trung điểm của LQ.



Hình 3

Ta có $\widehat{HTN} = 90^\circ - \widehat{I_6NH}$; $\widehat{NTP} = 90^\circ - \widehat{I_1NP}$. Suy ra $\widehat{HTP} = \widehat{HTN} + \widehat{NTP} = 180^\circ - \widehat{I_6NH} - \widehat{I_1NP}$ $= \widehat{I_1NI_6} = 90^\circ$. Từ đó $\widehat{NUT} = 2\widehat{NHT} = \widehat{NI_6T}$.

Suy ra U nằm trên đường tròn (NI_6T), hay đường tròn đường kính I_6I_1.

Tương tự, V nằm trên đường tròn đường kính I_6I_1.

Ta có $\widehat{UJV} = \widehat{UJD} - \widehat{VJD} = \widehat{DCU} - \widehat{DFV} = \widehat{PNQ} = \widehat{VNU}$. Vậy J nằm trên đường tròn đường kính I_6I_1. Suy ra $\widehat{I_1JI_6} = 90^\circ$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{I_1JI_5} = 90^\circ$. Vậy ba điểm I_5, I_6, J thẳng hàng hay $J \in l$. Tương tự, $J \in d$. Vậy J là giao điểm của d và l.

❖**Tính chất 3.** *Kí hiệu Γ_1 là phương tích từ J tới bộ đường tròn (ω_1), Γ_2 là phương tích từ J tới bộ đường tròn (ω_2). Khi đó $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$.*

Chứng minh. Theo chứng minh ở tính chất 1 và 2 ta có $\widehat{I_1NI_6} = \widehat{I_1JI_6} = 90^\circ$. Suy ra $I_1N^2 + I_6N^2$ $= I_1I_6^2 = I_1J^2 + I_6J^2$ hay $I_1J^2 - I_1N^2 + I_6J^2 - I_6N^2 = 0$. Vậy $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$. ❑

➢**Nhận xét.** Ta quay lại bài số 3 VMO 2012. Trong trường hợp này, tâm của bộ đường tròn (ω_1) nằm trên đường thẳng OE. Gọi J là giao của (NAB) và MN. Dễ dàng chứng minh được tứ giác $MJAD$ nội tiếp hay J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDMN$. Theo tính chất 2, J là giao điểm của OE và l. Theo *định lí Brocard*, $OE \perp MN$ vậy $MN \equiv l$. Ta thu được tâm của bộ đường tròn (ω_2) nằm trên đường thẳng MN.

Như vậy, từ một bài toán tưởng chừng đơn giản, nếu biết đào sâu suy nghĩ, chúng ta có thể tìm ra được nhiều điều thú vị ẩn chứa bên trong nó.

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T8/418. Let ABC be an acute triangle. Prove the inequality

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C + \cos A.\cos B.\cos C \geq \frac{1}{2}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/418. For each natural number n, let (S_n) be the sum of all digits of n (in the decimal system). Put $S_k(n) = S(S(...(S(n))...))$ (k times).

Find all natural numbers n such that

$$S_1(n) + S_2(n) + ... + S_k(n) + ... + S_{223}(n) = n.$$

T10/418. Does there exist a set X satisfying the following two conditions:

i) X contains 2012 natural numbers.

ii) The sum of any arbitrary elements in X is the k –th power of a positive integer ($k \geq 2$)?

T11/418. Find all functions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f\left(\frac{xf(y)}{2}\right) + f\left(\frac{yf(x)}{2}\right) = 4xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

T12/418. Fix two circles (K) and (O), where (K) is inside (O). Two circles (O_1), (O_2) are moving so that they always externally touch each other at M. Both also internally touch (O), and externally touch (K). Prove that M belongs to a fixed circle.

Translated by LE MINH HA

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC HÀ NỘI MỞ RỘNG (HOMO)

NĂM 2012

Kì thi HOMO lần thứ XI đã được Hội Toán học Hà Nội phối hợp với Sở GD&ĐT Hà Nội tổ chức vào ngày 11.3.2012 tại Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. Tham dự kì thi có 111 học sinh ở lứa tuổi Senior (tương đương lớp 10 THPT) và 114 học sinh ở lứa tuổi Junior (tương đương lớp 8 THCS) thuộc 15 tỉnh, thành phố: Hà Nội, Bắc Ninh, Hà Giang, Hòa Bình, Hưng Yên, Lào Cai, Lạng Sơn, Phú Thọ, Thái Bình, Thái Nguyên, Tuyên Quang, Vĩnh Phúc, Yên Bái, Đăk Lăk, Phú Yên. Sau đây là đề bài của Kì thi.

Important:

Answer all 15 questions.

Enter your answers on the answer sheet provided.

For the multiple choice questions, enter only the letters (A, B, C, D or E) corresponding to the correct answers in the answer sheet.

No calculators are allowed.

SENIOR SECTION

Sunday, 11 March 2012 *08h30 – 11h30*

Q1. Let $x = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{20}}$.

Theo value of $H = \left(1+x^5-x^7\right)^{2012^{3^{11}}}$ is

(A): 1 ; (B): 11 ; (C): 21 ; (D): 101 ; (E) None of the above.

Q2. Compare the numbers

$P=2^{\alpha}$, $Q=3$, $T=2^{\beta}$, where $\alpha=\sqrt{2}; \beta=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(A): $P<Q<T$; (B): $T<P<Q$; (C): $P<T<Q$; (D): $T<Q<P$; (E): $Q<P<T$.

Q3. Let be given a trapezoidal $ABCD$ with the based edges BC = 3cm, DA = 6cm ($AD//BC$). Then the length of the line EF ($E \in AB$, $F \in CD$ and $EF//AD$), through the common point M of AC and BD is

(A): 3,5cm ; (B): 4cm; (C): 4,5cm; (D): 5cm ; (E): None of the above.

Q4. What is the largest integer less than or equal to $4x^3-3x$, where $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)$?

(A): 1 ; (B): 2 ; (C): 3 ; (D): 4 ; (E) None of the above.

Q5. Let $f(x)$ be a function such that

$$f(x)+2f\left(\frac{x+2010}{x-1}\right)=4020-x$$

for all $x \neq 1$. Then the value of $f(2012)$ is

(A): 2010 ; (B): 2011 ; (C): 2012 ; (D): 2014; (E): None of the above.

Q6. For every $n = 2, 3, ...,$ we put

$$A_n=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\times\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}\right).$$

Determine all positive integer n ($n \geq 2$) such that $\dfrac{1}{A_n}$ is an integer.

Q7. Prove that the number $a=\overline{\underbrace{1....1}_{2012}\underbrace{5...5}_{2011}6}$ is a perfert square.

Q8. Determine the greates number m such that the system

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ |x^3-y^3|+|x-y|=m^3 \end{cases}$$

has a solution.

Q9. Let P be the common point of three internal bisectors of a given ABC. The line passing through P and perpendicular to CP intersects AC and BC at M and N, respectively. If AP = 3cm, BP = 4cm, compute the value of $\dfrac{AM}{BN}$.

Q10. Suppose that the equation $x^3+px^2+qx+1=0$, with p, q are rational numbers, has three real roots x_1, x_2, x_3, where $x_3 = 2+\sqrt{5}$. Compute the values of p and q.

Q11. Suppose that the equation $x^3+px^2+qx+r=0$ has three real roots x_1, x_2, x_3, where p, q, r are integer numbers. Put $S_n = x_1^n+x_2^n+x_3^n$, n = 1, 2, ... Prove that S_{2012} is an interger.

Q12. In an isosceles triangle ABC with the base AB given a point $M \in BC$. Let O be the center of its circumscribed circle and S be the center of the inscribed circle in triangle ABC and $SM \,//\, AC$. Prove that $OM \perp BS$.

Q13. A cube with sides of length 3cm is painted red and then cut into $3\times3\times3=27$ cubes with sides of length 1cm. If a denotes the number os small cubes (of 1cm × 1cm × 1cm) that are not painted at all, b the number painted on one sides, c the number painted on two sides, and d the number painted on three sides. Determine the value $a-b-c+d$.

Q14. Solve, in integers, the equation

$$16x+1=(x^2-y^2)^2.$$

Q15. Determine the smallest value of the sum $M=xy-yz-zx$, where x, y, z are real numbers satisfying the following condition

$$x^2+2y^2+5z^2=22.$$

JUNIOR SECTION

Sunday, 11 March 2012 *13h30 – 16h30*

Q1. Assume that $a-b=-(a-b)$. Then

(A): $a=b$; (B): $a<b$; (C): $a>b$;

(D): It is impossible to compare those of a and b.

Q2. Let be given a parallelogram $ABCD$ with the area of 12cm^2. The line through A and the midpoint M of BC meets BD at N. Compute the area of the quadrilateral $MNDC$.

(A): 4cm^2; (B): 5cm^2; (C): 6cm^2;

(D): 7cm^2; (E): None of the above.

Q3. For any possitive ingeger a, let $[a]$ denote the smallest prime factor of a. Which of the following numbers is equal to [35]?

(A): [10]; (B): [15]; (C): [45];

(D): [55]; (E): [75].

Q4. A man travels from town A to town E through towns B, C and D with uniform speeds 3km/h, 2km/h, 6km/h and 3km/h on the horizontal, up slope, down slope and horizontal road, respectively. If the road between town A and town E can be classified as horizontal, up slople, down slope and horizontal and total length of each type of road is the same. What is the average speed of his journey?

(A): 2km/h; (B) 2,5km/h; (C): 3km/h;
(D): 3,5km/h; (E): 4km/h.

Q5. How many differen 4-digit even integers can be form from the elements of the set $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

(A): 4; (B): 5; (C): 8; (D): 9;

(E): None of the above.

Q6. At 3:00 A.M. the temperature was 13° below zero. By noon it had risen to 32°. What is the average hourly increase in temperature?

Q7. Find all integers n such that $60+2n-n^2$ is a perfert square.

Q8. Given a triangle ABC and two points $K \in AB$, $N \in BC$ such that $BK=2AK$, $CN=2BN$ and Q is the common point of AN and CK. Compute $\dfrac{S_{ABC}}{S_{BCQ}}$.

Q9. Evaluate the integer part of the number

$$H=\sqrt{1+2011^2+\frac{2011^2}{2012^2}}+\frac{2011}{2012}.$$

Q10. Solve the following equation

$$\frac{1}{(x+29)^2}+\frac{1}{(x+30)^2}=\frac{13}{36}.$$

Q11. Let be given a sequence $a_1=5$, $a_2=8$, and $a_{n+1}=a_n+3a_{n-1}$, $n=2, 3, \ldots$ Calculate the greates common divisor of a_{2011} and a_{2012}.

Q12. Find all positive integers P such that the sum and product of all its divisors are $2P$ and P^2, respectively.

Q13. Determine the greatest value of the sum $M=11xy+3xz+2012yz$, where x, y, z are non negative integers satisfying the following condition $x+y+z=1000$.

Q14. Let be given a triangle ABC with $\angle A=90^\circ$ and the bisectrices of angles B and C meet at I. Suppose that IH is perpendicular to BC (H belongs to BC). If $HB=5$cm, $HC=8$cm, compute the area of triangle ABC.

Q15. Determine the greatest value of the sum $M=xy+yz+zx$, where x, y, z are real numbers satisfying the following condition

$$x^2+2y^2+5z^2=22.$$

THANH LOAN
(Nguồn: *http://hms.org.vn*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 418 (4.2012)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Cảnh đẹp Quảng trường Trụ sở UBND TP. Hồ Chí Minh. Nguồn: *www.google.com*

Bìa 3. **Giải trí toán học – Math Recreation**

Giải trí toán học

Giải đáp: BỐN BÔNG HOA SỐ

(Đề đăng trên THTT số 414, tháng 12.2011)

Tổng của 31 số từ 1 đến 31 bằng $31 \times 16 = 496$.

Tổng các số ở mỗi bông hoa bằng $496 : 4 = 124$.

Mỗi bông hoa đã có 32 nên còn cần điền thêm $124 - 32 = 92$.

Cách 1. Trong lần thứ nhất lấy từng bộ hai số hạng đặt vào ba bông hoa bên trái, còn lấy 23 đặt vào bông hoa bên phải như sau:

$$9 + 14 = 10 + 13 = 11 + 12 = 23.$$

Trong lần thứ hai và lần thứ ba lấy từng bộ hai số hạng đặt vào bốn bông hoa như sau:

$$5 + 18 = 6 + 17 = 7 + 16 = 8 + 15.$$

$$19 + 27 = 20 + 26 = 21 + 25 = 22 + 24.$$

Cách 2. Lần đầu: $5 + 22 = 10 + 17 = 11 + 16 = 27$.

Lần thứ hai: $6 + 15 = 7 + 14 = 8 + 13 = 9 + 12$.

Lần thứ ba: $18 + 26 = 19 + 25 = 20 + 26 = 21 + 27$.

Làm tương tự như thế sẽ còn nhiều cách khác.

Bạn *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 10A1, THPT Hắc Dịch, Tân Thành, **Bà Rịa - Vũng Tàu** có lời giải tốt được nhận tặng phẩm.

AN MINH

XẾP QUE TÍNH

Bạn *Toán* xếp các que tính thành đẳng thức như sau:

$$37 \times 73 - 689 = 2012$$

Bạn *Cộng* nhìn thấy nói: Tôi chuyển cách xếp 6 que ở vế trái vẫn được 2012.

Bạn *Trừ* tiếp lời: Tôi chuyển cách xếp 5 que ở vế trái vẫn được 2012.

Bạn *Nhân* nhanh nhẩu: Tôi chỉ cần chuyển cách xếp 4 que ở vế trái vẫn được 2012.

Bạn *Bằng* khẳng định: Tôi chỉ cần chuyển cách xếp 3 que ở vế trái vẫn được 2012.

Bạn có thể làm được như thế không ? Và không chỉ có *bốn cách* đâu nhé!

NGUYỄN VĂN HIẾU

(80 đường Xuân 68, TP. Huế, Thừa Thiên - Huế)

ĐAN QUỲNH (*Hà Nội*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI

Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Q. Đống Đa, Hà Nội

Tel: (04) 39947746; 35122068 - Fax: (04) 35123278

Giới thiệu bộ sách

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THPT

Bộ sách ***"Tài liệu chuyên Toán"*** lớp 10, 11, 12 có tất cả 12 cuốn, mỗi lớp có 4 cuốn gồm 2 cuốn lí thuyết (Đại số - Giải tích và Hình học) và 2 cuốn bài tập. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình cho học sinh các trường THPT chuyên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Ở mỗi cuốn lí thuyết giới thiệu các chuyên đề bắt buộc của chương trình chuyên được trình bày khá sâu và chặt chẽ, có khá nhiều các ví dụ, bài tập là những bài thi của khối chuyên Toán, thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Toán Quốc tế. Trong mỗi cuốn bài tập, ngoài hướng dẫn giải khá đầy đủ các bài tập trong cuốn lí thuyết, còn có một số bài tập bổ sung để học sinh tham khảo. Các tác giả của bộ sách là các thầy giáo có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, đều đã hoặc đang trực tiếp giảng dạy tại các trường THPT chuyên, khối chuyên Toán, các trường Đại học, Viện nghiên cứu, . . . trên khắp cả nước, như : GS. *Đoàn Quỳnh*, GS.TS. *Văn Như Cương*, PGS. TS. *Nguyễn Đăng Phất*, PGS.TSKH *Vũ Đình Hòa*, GS.TSKH *Hà Huy Khoái*, TS. *Nguyễn Minh Hà*, GS.TSKH *Đặng Hùng Thắng*, PGS.TS. *Nguyễn Vũ Lương*, ThS. *Đỗ Thanh Sơn*, TS. *Trần Nam Dũng*, TS. *Lê Bá Khánh Trình*, ThS. *Nguyễn Trọng Tuấn*,...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh, việc giảng dạy của giáo viên ở các trường THPT chuyên; cũng như nhu cầu đọc của những người yêu thích Toán.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT04M2

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2012

Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng