NĂM THỨ MƯỜI TÁM
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

3/9
176 + 177
NĂM HỌC 2017 - 2018

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Giá: 20000đ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

DANH SÁCH HỌC SINH ĐƯỢC KHEN NHIỀU LẦN TRÊN TẠP CHÍ HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2017 - 2018

Dương Quỳnh Anh, Nguyễn Tiến Dũng, 9A3, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định**; *Tạ Nam Khánh, Thiều Ngọc Tuấn, Phạm Thành Dũng, Trần Hồng Quý, Bùi Anh Tuấn, Lê Ngọc Hoa*, 9E1, *Trương Minh Tuyên*, 9B, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Đỗ Phúc Xuân, Lương Tùng Lâm*, 7H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Nguyễn Chí Công*, 8A3, *Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh*, 9A3, *Vũ Minh Khải, Nguyễn Công Hải, Nguyễn Minh Tiến*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Thị Hằng Nhi*, 8A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Diêm Đăng Hoàng, Nguyễn Trung Thế, Phan Quang Huy*, 9A1, THCS Chất lượng cao Mai Sơn, Mai Sơn, **Sơn La**; *Lê Đức Chính*, 6B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn An Thịnh*, 6A5, THCS Chu Văn An, Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Nguyễn Đình Quân*, 9C, *Nguyễn Hoàng Đạo*, 8C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Nguyễn Huỳnh Ngọc Anh*, 6A, THCS Nguyễn Chí Thanh, Đông Hòa, **Phú Yên**; *Nguyễn Quang Thành*, 7A, THCS Thị trấn Cao Thượng, Tân Yên, **Bắc Giang**.

Giấy khen được gửi về trường cũ của các bạn.

DANH SÁCH ĐOẠT GIẢI CUỘC THI VUI SỐ VÀ HÌNH 2017

❋ **Giải Nhất:** *Nguyễn Thị Hiền*, GV. THCS Nhân Bình, Lý Nhân, **Hà Nam**; *Vũ Minh Khải*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

❋ **Giải Nhì:** *Nguyễn Công Hải*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Hải Phong*, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

❋ **Giải Ba:** *Nguyễn Minh Tiến*, 7B, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hưng Phát*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

❋ **Giải Khuyến khích:** *Đặng Thị Hiền*, 7A, THCS Yên Phụ, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Đào Thanh Dung*, 8A1, THCS Chất lượng cao Mai Sơn, Mai Sơn, **Sơn La**.

ĐĂNG KÍ CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ CẤP TRƯỜNG

Đề nghị mỗi trường THCS thành lập một câu lạc bộ Toán Tuổi thơ khối lớp 8 năm học 2017-2018, gồm 6 học sinh (theo quy chế và mẫu đăng kí tải về tại website: toantuoitho.vn) và gửi đăng kí về địa chỉ: *Tạp chí Toán Tuổi thơ, tầng 5, số 361 Trường Chinh, Thanh Xuân, Hà Nội.*

BẠN CẦN BIẾT

Trong năm 2018, khi đặt báo cả năm, bạn cần chú ý ngoài các số đơn 5/9, 7/9, 8/9, 9/9, 2/9, 4/9 phát hành vào các tháng 1, 3, 4, 5, 10, 12 còn có các số gộp:

❋ Số 6/9 phát hành vào dịp Tết;

❋ Số 1/9 phát hành vào dịp Khai giảng năm học mới;

❋ Số 3/9 phát hành nhân dịp Ngày nhà giáo Việt Nam.

Toán tuổi thơ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Children's Fun Maths Journal
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

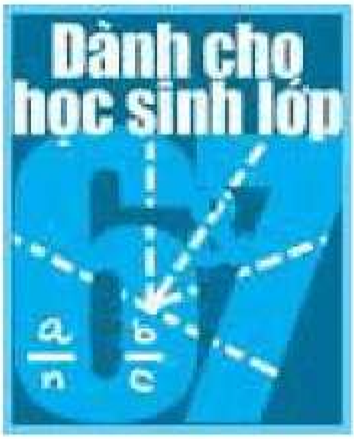
TÒA SOẠN
Tầng 5, số 361 đường Trường Chinh,
quận Thanh Xuân, Hà Nội
Điện thoại (Tel): 024.35682701
Điện sao (Fax): 024.35682702
Điện thư (Email): bbttoantuoitho@gmail.com
toantuoitho@vnn.vn
Trang mạng (Website): http://www.toantuoitho.vn

ĐẠI DIỆN TẠI MIỀN NAM
NGUYỄN VIẾT XUÂN
391/150 Trần Hưng Đạo, P. Cầu Kho, Q.1, TP. HCM
ĐT: 028.66821199, DĐ: 0973 308199

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1: Công ty cổ phần Mĩ thuật và Truyền thông

TRONG SỐ NÀY



Một phương pháp TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

NGUYỄN VĂN NHO
(GV. THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài toán tính diện tích hình phẳng thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi ở lớp 6 hoặc lớp 7. Học sinh thường gặp lúng túng khi giải các bài toán này. Bài viết sau giới thiệu cho các em phương pháp so sánh để tính diện tích hình phẳng.

A. Phương pháp

- Để tính diện tích hình phẳng (H) bằng phương pháp so sánh ta thực hiện như sau: Xét thêm một hình phẳng liên quan (H') *(dễ tính diện tích)*, sau đó tính tỉ số diện tích của hình (H) và hình (H'). Từ đó ta suy ra được diện tích của hình (H).
- Một số tính chất thường sử dụng để tính tỉ số diện tích của hai hình:

* Hai tam giác cùng đường cao hoặc đường cao bằng nhau thì tỉ số diện tích bằng tỉ số độ dài hai cạnh đáy *(tương ứng)*;

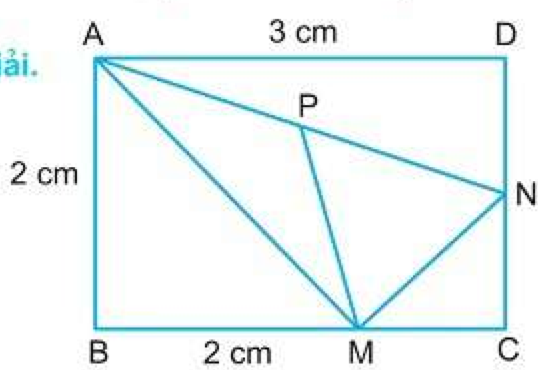
* Hai tam giác cùng cạnh đáy hoặc cạnh đáy bằng nhau thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đường cao *(tương ứng)*;

* Đường trung tuyến của tam giác chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau *(chứng minh dành cho bạn đọc)*.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật ABCD, có cạnh AB = 2 cm, AD = 3 cm, M thuộc cạnh BC sao cho BM = 2 cm, gọi N là trung điểm của cạnh DC, P là trung điểm của cạnh AN. Tính diện tích tam giác MNP.

Lời giải.



Diện tích hình chữ nhật ABCD là:

$S_{ABCD} = AB \times AD = 2 \times 3 = 6\ (cm^2)$.

Diện tích của các tam giác ABM, ADN, CMN lần lượt là

$$S_{ABM} = \frac{AB \times BM}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2\ (cm^2).$$

$$S_{ADN} = \frac{AD \times DN}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1{,}5\ (cm^2).$$

$$S_{CMN} = \frac{CM \times CN}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = 0{,}5\ (cm^2).$$

Từ đó diện tích tam giác AMN là

$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN}$

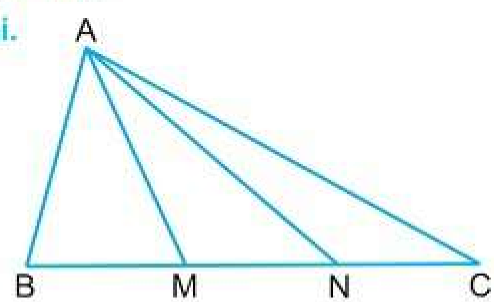
$= 6 - 2 - 1{,}5 - 0{,}5 = 2\ (cm^2)$.

Vì MP là đường trung tuyến của tam giác MNA nên diện tích tam giác MNP bằng một nửa diện tích tam giác AMN.

Do đó $S_{MNP} = \dfrac{S_{AMN}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1\ (cm^2)$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho BM = MN = NC. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác AMN là 4 cm^2.

Lời giải.



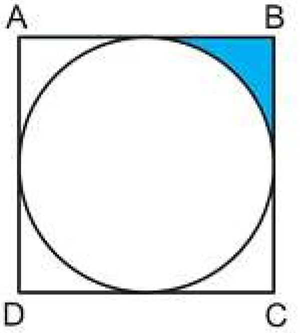
Vì AM và AN lần lượt là trung tuyến của các tam giác ABN và AMC nên ta có:

$S_{ABM} = S_{AMN}$; $S_{AMN} = S_{ANC}$.

Do đó diện tích tam giác ABC là

$S_{ABC} = 3S_{AMN} = 3 \times 4 = 12\ (cm^2)$.

Ví dụ 3. Cho hình vẽ sau, hãy tính diện tích của hình được tô đậm, biết hình vuông ABCD có cạnh là 4 cm.



Lời giải. Diện tích hình vuông ABCD là

$S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16$ (cm^2).

Hình tròn có đường kính bằng 4 cm nên bán kính của hình tròn đó là 2 cm.

Do vậy diện tích hình tròn là

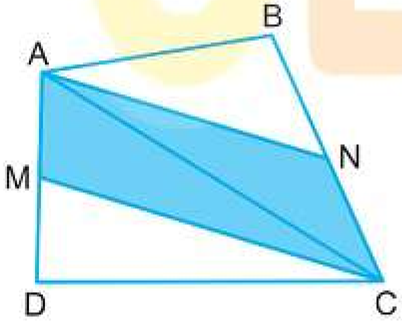
$3{,}14 \times 2 \times 2 = 12{,}56$ (cm^2).

Ta thấy diện tích phần tô đậm bằng $\frac{1}{4}$ phần diện tích phần hình vuông bên ngoài hình tròn.

Vậy diện tích phần tô đậm cần tìm là

$(16 - 12{,}56) : 4 = 0{,}86$ (cm^2).

Ví dụ 4. Cho hình vẽ, trong đó M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC. Tính diện tích hình tô đậm biết diện tích tứ giác ABCD là 10 cm^2.



Lời giải. Nối A với C, khi đó AN, CM lần lượt là trung tuyến của các tam giác ABC và ACD nên ta có $S_{ABC} = 2 \times S_{ANC}$; $S_{ACD} = 2 \times S_{ACM}$.

Từ đó

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 2 \times S_{ANC} + 2 \times S_{ACM}$

$= 2 \times (S_{ANC} + S_{ACM}) = 2 \times S_{AMCN}$.

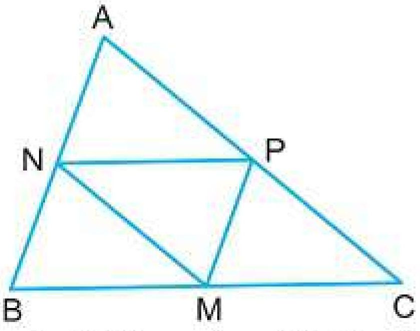
Vậy diện tích hình tô đậm là

$$S_{AMCN} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

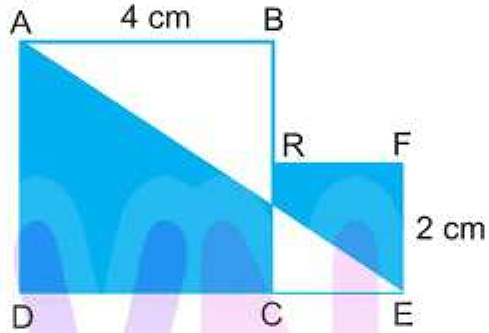
Nhận xét. Qua 4 ví dụ trên chúng ta rút ra kinh nghiệm trong việc học toán, đó là: Tìm ra phương pháp giải các bài toán, từ đó rút ra phương pháp chung để giải được nhiều bài toán cùng loại.

Bài tập

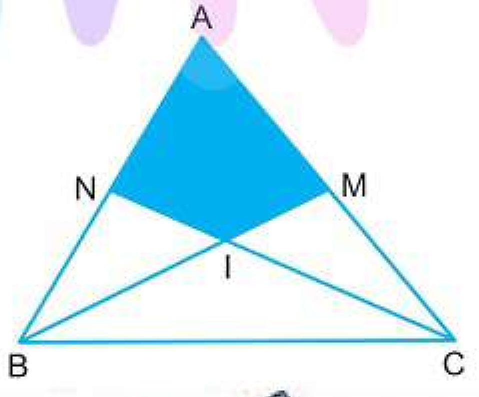
Bài 1. Cho tam giác ABC (như hình vẽ). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AB và AC. Tính tỉ số diện tích của tam giác MNP và tam giác ABC.

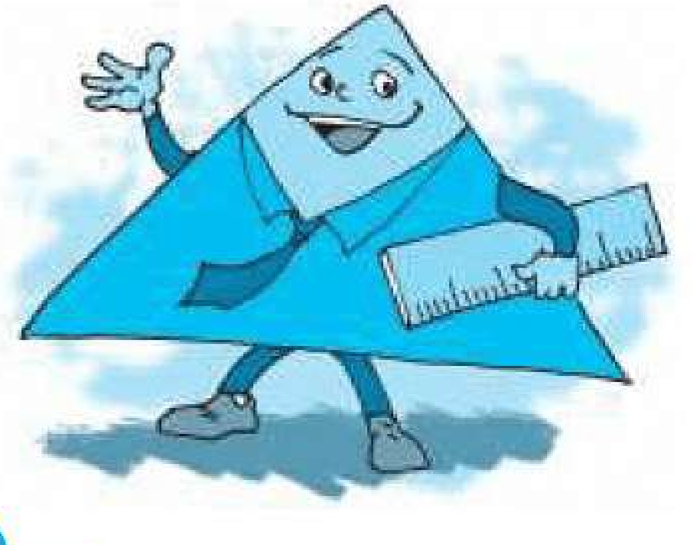


Bài 2. Cho hai hình vuông ABCD và CEFR có cạnh lần lượt là 4 cm và 2 cm tựa vào nhau (như hình vẽ). Hãy tính tổng diện tích của hai hình được tô đậm.



Bài 3. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 3 cm (như hình vẽ). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và AB. Hãy tính diện tích hình được tô đậm.





Một số bài toán VỀ TỈ LỆ THỨC

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Các dạng toán về tỉ lệ thức xuất hiện nhiều trong các bài kiểm tra học kì hoặc trong các đề thi học sinh giỏi lớp 7. Sau đây là một số bài toán về tỉ lệ thức.

Bài toán 1. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a+c-b}{b}=\dfrac{b+c-a}{a}$.

Tính $A=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

(vì $a+b+c\neq 0$).

Do đó $a+b-c=c$; $a+c-b=b$; $b+c-a=a$.

Suy ra $a+b=2c$; $a+c=2b$; $b+c=2a$.

Vậy $A=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\dfrac{2c.2a.2b}{abc}=8$.

Bài toán 2. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c=1\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$ và $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

Chứng minh rằng $xy+yz+zx=0$.

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=x+y+z$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=(x+y+z)^2.$$

Mặt khác

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+z^2.$$

Từ đó suy ra

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2\Rightarrow xy+yz+zx=0.$$

Bài toán 3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\dfrac{a}{2016}=\dfrac{b}{2015}=\dfrac{c}{2014}$.

Chứng minh rằng $4(a-b)(b-c)=(a-c)^2$.

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\dfrac{a}{2016}=\dfrac{b}{2015}=\dfrac{c}{2014}$

$$=\frac{a-b}{2016-2015}=\frac{a-c}{2016-2014}=\frac{b-c}{2015-2014}$$

$$=\frac{a-b}{1}=\frac{a-c}{2}=\frac{b-c}{1}.$$

Suy ra

$$\begin{cases}2(a-b)=a-c\\ 2(b-c)=a-c\end{cases}\Rightarrow 4(a-b)(b-c)=(a-c)^2.$$

Bài toán 4. Cho các số thực x, y, z, a, b, c thỏa mãn $\dfrac{x}{a+2b+c}=\dfrac{y}{2a+b-c}=\dfrac{z}{4a-4b+c}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}.$$

(biết rằng các mẫu thức khác 0).

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\dfrac{x}{a+2b+c}=\dfrac{2y}{4a+2b-2c}=\dfrac{z}{4a-4b+c}$

$$=\frac{x+2y+z}{(a+2b+c)+(4a+2b-2c)+(4a-4b+c)}$$

$$=\frac{x+2y+z}{9a}.\ (1)$$

$$\frac{2x}{2a+4b+2c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}$$

$$=\frac{2x+y-z}{(2a+4b+2c)+(2a+b-c)-(4a-4b+c)}$$

$= \dfrac{2x+y-z}{9b}$. (2)

$$\frac{4x}{4a+8b+4c} = \frac{4y}{8a+4b-4c} = \frac{z}{4a-4b+c}$$
$$= \frac{4x-4y+z}{(4a+8b+4c)-(8a+4b-4c)+(4a-4b+c)}$$
$$= \frac{4x-4y+z}{9c}. \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{x+2y+z}{9a} = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}.$$

Bài toán 5. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $\dfrac{bz-cy}{a} = \dfrac{cx-az}{b} = \dfrac{ay-bx}{c}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$$
$$= \frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2}$$
$$= \frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2} = 0.$$

Suy ra $\begin{cases} bz = cy \\ cx = az \\ ay = bx \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

Bài toán 6. Cho các số thực x, y, z, a, b, c khác 0 thỏa mãn $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$

(biết rằng các mẫu khác 0).

Lời giải. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{ax} = \dfrac{y^2}{by} = \dfrac{z^2}{cz} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(ax+by+cz)^2}. \ (1)$$

Mặt khác

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(ax+by+cz)^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

(Vì x, y, z khác 0 nên $x^2+y^2+z^2 \neq 0$).

Bài tập

Bài 1. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=2$; $a^2+b^2+c^2=4$ và $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

Chứng minh rằng $xy+yz+zx=0$.

Bài 2. Cho x khác 0, −1, 1 thỏa mãn

$$\frac{a}{x-1} = \frac{b}{x} = \frac{c}{x+1}.$$

Chứng minh rằng $4(a-b)(b-c) = (a-c)^2$.

Bài 3. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$\frac{x}{a+2b-c} = \frac{y}{2a+b+c} = \frac{z}{4b+c-4a}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{x+2y-z} = \frac{b}{2x+y+z} = \frac{c}{4y+z-4x}.$$

(biết rằng các mẫu thức khác 0).

Bài 4. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$\frac{4bz-5cy}{3a} = \frac{5cx-3az}{4b} = \frac{3ay-4bx}{5c}.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{x}{3a} = \dfrac{y}{4b} = \dfrac{z}{5c}$.

Bài 5. Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} = \dfrac{4}{z}$. Chứng minh rằng

$$(x+3y+4z)^2 = 26(x^2+9y^2+16z^2).$$

Bài 6. Cho các số thực x, y, z, a, b, c khác 0 thỏa mãn $\dfrac{x^2-6yz}{a} = \dfrac{4y^2-3zx}{2b} = \dfrac{9z^2-2xy}{3c}$.

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-6bc}{x} = \frac{4b^2-3ca}{2y} = \frac{9c^2-2ab}{3z}.$$

Bài 7. Cho các số thực a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn

$$a(y+z) = b(z+x) = c(x+y).$$

Chứng minh rằng $\dfrac{y-z}{a(b-c)} = \dfrac{z-x}{b(c-a)} = \dfrac{x-y}{c(a-b)}$.

VẼ THÊM HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

HÀ VĂN NHÂN
(GV. THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

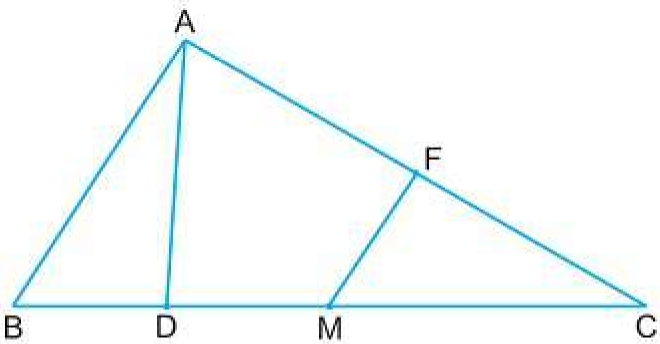
Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một số phương pháp để giải toán hình học bằng cách vẽ thêm yếu tố phụ.

1. Vẽ thêm trung điểm, vẽ thêm đoạn thẳng bằng đoạn thẳng cho trước

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có BC = 2AB, M là trung điểm của BC, D là trung điểm của BM.

Chứng minh rằng $AD = \frac{1}{2}AC$.

Lời giải. *Cách 1.*



Gọi F là trung điểm của AC.

$\Rightarrow FC = \frac{1}{2}AC$. (1)

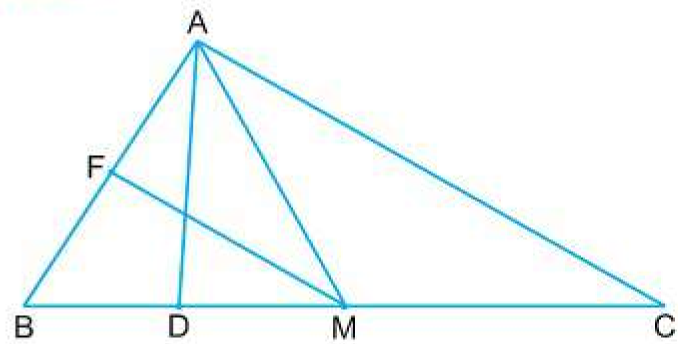
Ta có $FM = \frac{1}{2}AB = BD$; MC = AB.

Do đó $\Delta ADB = \Delta CFM$ (c.g.c). (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD = FC = \frac{1}{2}AC$ (đpcm).

Nhận xét. Nhờ vẽ thêm trung điểm F của AC mà ta tạo nên tam giác mới và dựa vào tính chất đường trung bình của tam giác để chứng minh $\Delta ADB = \Delta CFM$, từ đó dẫn đến $AD = \frac{1}{2}AC$ thông qua đoạn thẳng trung gian FC. Giờ ta đặt vấn đề, nếu không vẽ thêm trung điểm của AC mà vẽ thêm trung điểm của AB thì sao?

Cách 2.



Gọi F là trung điểm của AB.

$\Rightarrow MF = \frac{1}{2}AC$. (1)

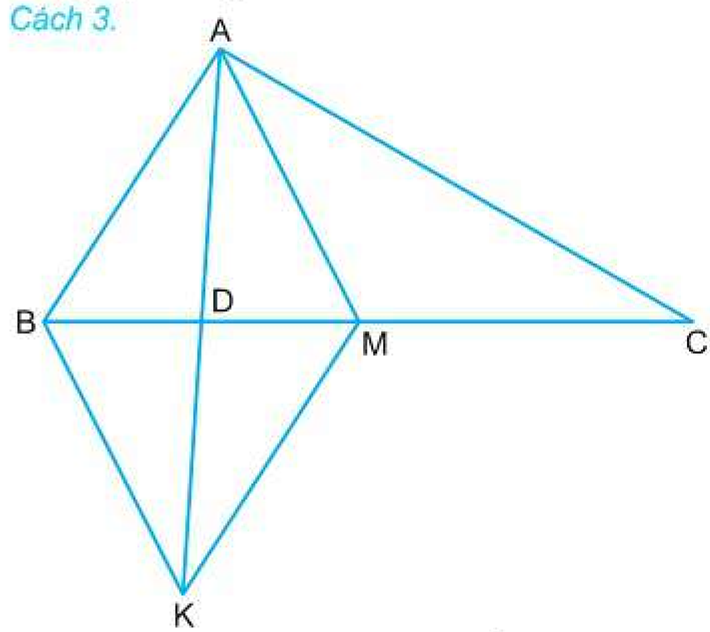
Ta có $\Delta ADB = \Delta MFB$ (c.g.c).

$\Rightarrow AD = MF$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD = \frac{1}{2}AC$ (đpcm).

Nhận xét. Ta cũng có thể vẽ thêm đoạn thẳng bằng đoạn thẳng cho trước.

Cách 3.



Trên tia đối của của tia DA lấy điểm K sao cho D là trung điểm của AK.

Ta có AK = 2AD (1); tứ giác ABKM là hình bình hành.

Suy ra $\Delta ABK = \Delta CMA$ (c.g.c).

$\Rightarrow AK = CA$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2AD = AC \Rightarrow AD = \frac{1}{2}AC$ (đpcm).

Cách 4. Trên tia đối của tia AB lấy điểm K sao cho A là trung điểm của BK.

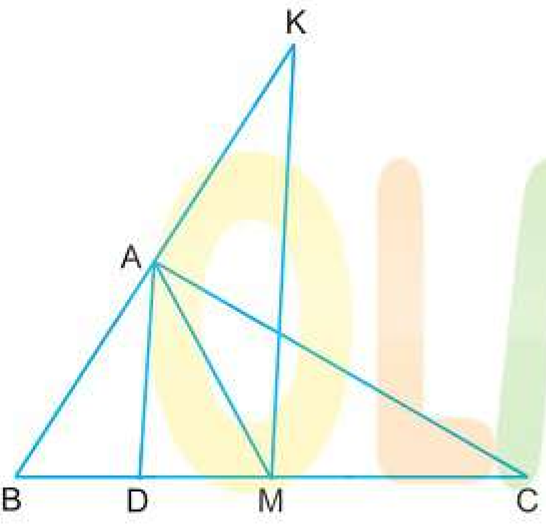
Khi đó AD là đường trung bình của ΔBMK, suy ra $MK = 2AD$. (1)

Ta có $\Delta AMK = \Delta MAC$ (c.g.c).

$\Rightarrow MK = AC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2AD = AC$.

$\Rightarrow AD = \frac{1}{2}AC$ (đpcm).



2. Vẽ thêm đường vuông góc

Bài toán 2. Cho M là một điểm bất kì thuộc miền trong của hình chữ nhật ABCD. Chứng minh rằng $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Nhận xét. Từ đẳng thức cần chứng minh ta liên hệ đến định lí Pythagore. Vì vậy vẽ đường phụ qua M vuông góc với AB tại E và cắt DC tại F.

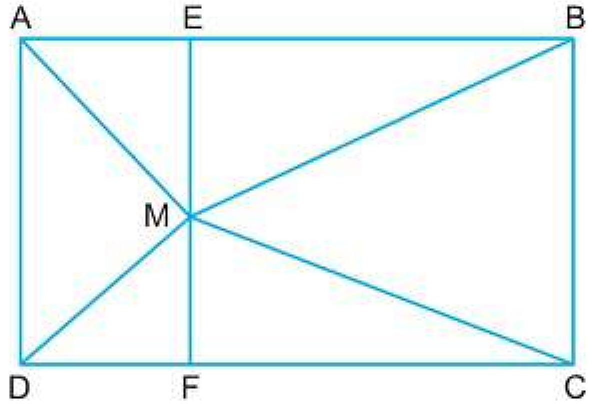
Ta có $MF \perp DC$.

Từ đó tạo ra các tam giác vuông EAM, FMC, EBM, FMD và hai hình chữ nhật AEFD, EBCF. Dựa vào định lí Pythagore ta có các hệ thức sẽ giúp ta tìm ra lời giải của bài toán.

Lời giải. Từ M kẻ $ME \perp AB$, $E \in AB$, EM cắt DC tại F.

Tứ giác AEFD là hình chữ nhật nên EA = FD.

Tứ giác EBCF là hình chữ nhật nên EB = FC.



Áp dụng định lí Pythagore vào các tam giác vuông EAM, FMC, EBM, FMD ta có

$MA^2 = EM^2 + EA^2$; $MC^2 = FM^2 + FC^2$.

$MB^2 = EM^2 + EB^2$; $MD^2 = FM^2 + FD^2$.

Do đó $MA^2 + MC^2 = EM^2 + EA^2 + FM^2 + FC^2$.

$MB^2 + MD^2 = EM^2 + EB^2 + FM^2 + FD^2$.

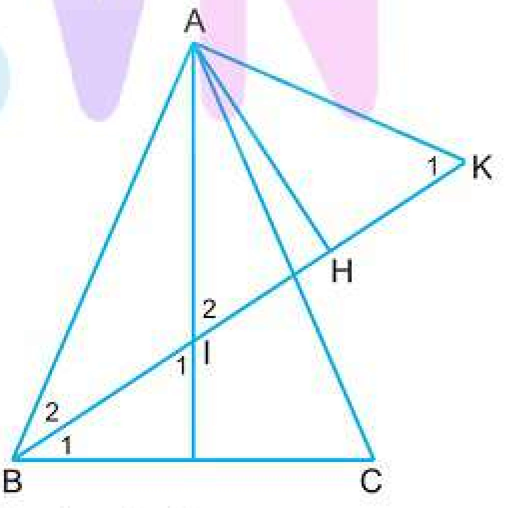
Mà EA = FD; FC = EB.

Suy ra $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Chúng ta hãy nghĩ xem trường hợp M nằm ngoài hình chữ nhật thì hệ thức trên có còn đúng không?

Bài toán 3. Cho ΔABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, IB = 3 cm. Tính độ dài AB.

Lời giải. Từ A kẻ đường vuông góc với AB cắt BI tại K.



Ta có $\widehat{B_2} + \widehat{I_2} = \widehat{B_1} + \widehat{I_1} = 90^o$.

Lại có $\widehat{B_2} + \widehat{K_1} = 90^o$.

Từ đó suy ra $\widehat{K_1} = \widehat{I_2}$.

Vậy ΔAIK cân tại A.

Nên $AK = AI = 2\sqrt{5}$ cm.

Kẻ $AH \perp BK$ ($H \in BK$).

Đặt $HK = x \Rightarrow HI = x$ và $BK = 2x + 3$.

Vì ΔABK vuông tại A nên

$AK^2 = HK.BK \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = x(2x+3)$.

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 20 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2{,}5; x_2 = -4$.

Vì ΔABK vuông tại A nên $AB^2 = BH.BK$

$= 5{,}5(5+3) = 44 \Rightarrow AB = 2\sqrt{11}$ (cm).

Nhận xét. Nhờ tạo ra tam giác vuông và đưa đoạn thẳng cần tính AB trở thành một cạnh của tam giác vuông để tính độ dài các cạnh của nó. Từ đó tính được độ dài AB. Thông qua hệ thức lượng trong tam giác vuông, lập được mối liên hệ giữa độ dài đã biết với độ dài cần tính giúp ta giải được bài toán.

Chú ý. *Cần biết kết hợp và sử dụng kiến thức đại số vào giải các bài toán hình học.*

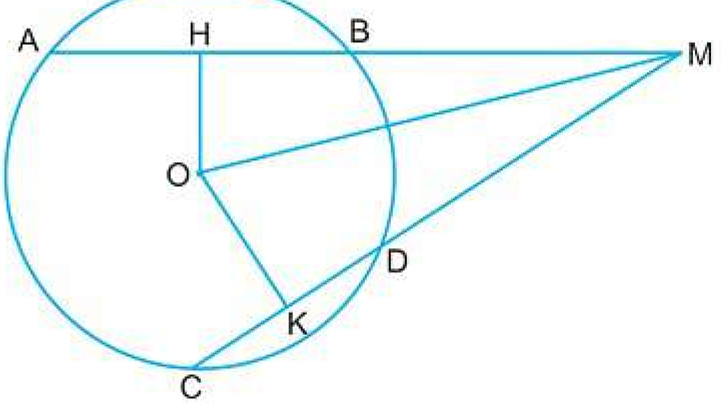
Bài toán 4. Cho đường tròn (O; R), hai dây cung AB và CD (AB > CD). Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M.

Chứng minh rằng MA + MB > MC + MD. (1)

Nhận xét. Vì AB > CD nên để chứng minh (1) ta nghĩ đến đường phụ $OH \perp AB$ và $OK \perp CD$ ($H \in AB$, $K \in CD$).

Lời giải. Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$ ($H \in AB$, $K \in CD$)

Vì AB > CD nên OH < OK và BH > DK.



Áp dụng định lí Pythagore vào hai tam giác vuông MHO và MKO ta được MH > MK.

Lại có MA + MB = MH + HA + MB = 2MH.

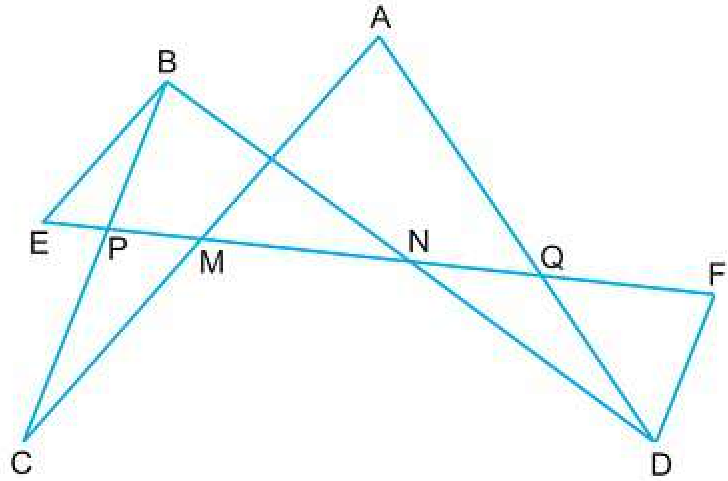
Tương tự ta có MC + MD = 2MK.

Suy ra MA + MB > MC + MD.

3. Kẻ đường thẳng song song

Bài toán 5. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng cắt nhau AC và BD. Đường thẳng MN cắt BC và AD lần lượt ở P và Q. Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{QD}{QA}$.

Lời giải. ***Cách 1.*** Từ B và D kẻ các đường thẳng song song với AC cắt MN lần lượt tại E và F.



Ta có $\Delta PBE \backsim \Delta PCM \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{BE}{CM}$. (1)

Ta có $\Delta QDF \backsim \Delta QAM \Rightarrow \frac{QD}{QA} = \frac{DF}{AM}$. (2)

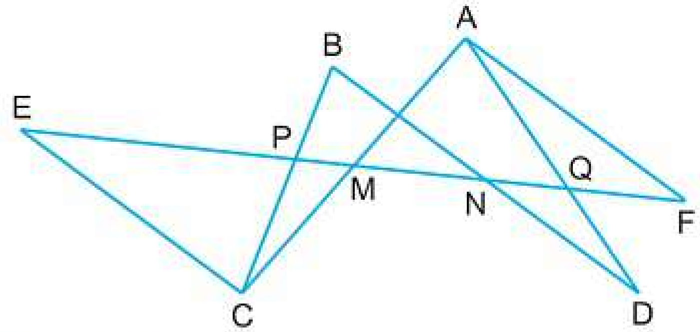
$\Delta NBE = \Delta NDF$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = DF$. (3)

Mặt khác CM = AM. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) $\Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{QD}{QA}$ (đpcm).

Nhận xét. Nhờ vẽ thêm các đường thẳng song song mà trong hình vẽ xuất hiện các cặp đoạn thẳng tỉ lệ với các cặp đoạn thẳng được nêu trong đề bài. Phương pháp vẽ đường thẳng song song là phương pháp thường dùng để vận dụng định lí Thales; tam giác đồng dạng trong chứng minh hệ thức của các đoạn thẳng. Vì AC và BD có vai trò như nhau nên ta cũng có thể vẽ các đường thẳng song song với BD từ A và C (hình vẽ) và chứng minh tương tự như cách 1.

Cách 2. Từ A và C kẻ các đường thẳng song song với BD, cắt MN lần lượt tại E và F. *(Bạn đọc tự chứng minh)*

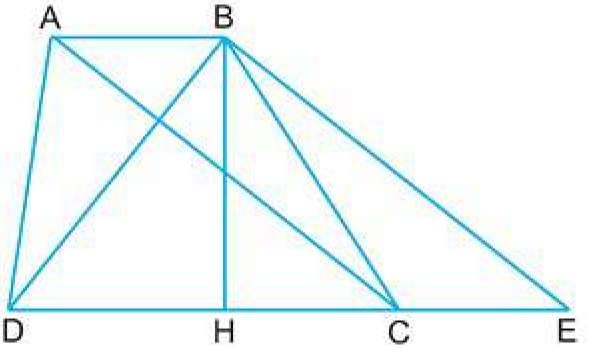


Bài toán 6. Cho hình thang ABCD (AB // DC) có đường cao BH bằng 4 cm, đường chéo BD = 5 cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Tính diện tích hình thang ABCD.

Nhận xét. Vì hình thang ABCD có hai đường chéo vuông góc nên để tính diện tích hình thang ta chỉ cần tính độ dài AC.

Nhận thấy rằng đường phụ BE // AC, E ∈ DC sẽ giúp ta tính được AC.

Lời giải.



Từ B kẻ BE song song với AC (E ∈ DC).

⇒ Tứ giác ABEC là hình bình hành.

⇒ AC = BE và tam giác BDE vuông tại B.

Do đó ta có

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BD^2}+\frac{1}{BE^2}$$

$$\Rightarrow BE=\sqrt{\frac{BD^2.BH^2}{BD^2-BH^2}}=\frac{20}{3}\ (cm)$$

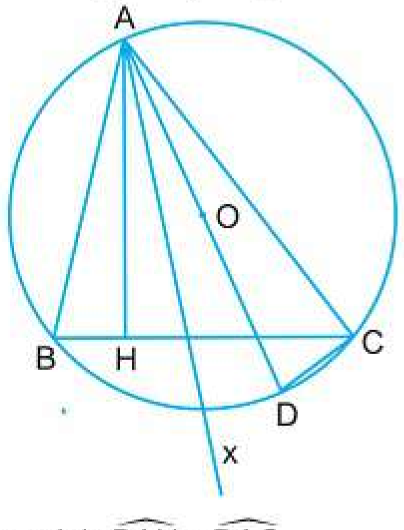
$$\Rightarrow AC=BE=\frac{20}{3}\ (cm).$$

Vậy $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{50}{3}\ (cm^2)$.

4. Vẽ thêm đường phân giác

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O; R), AH là đường cao. Chứng minh rằng $\widehat{BAC}$ và $\widehat{HAO}$ có cùng một tia phân giác.

Lời giải. Vẽ tia phân giác Ax của $\widehat{HAO}$, vẽ đường kính AD của đường tròn (O; R).



Ta sẽ chứng minh $\widehat{BAH}=\widehat{DAC}$.

Có $\widehat{ACD}=90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{DAC}+\widehat{ADC}=90^o$. (1)

Trong tam giác vuông AHB có

$\widehat{BAH}+\widehat{ABH}=90^o$. (2)

Lại có $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) hay $\widehat{ABH}=\widehat{ADC}$. (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{DAC}$.

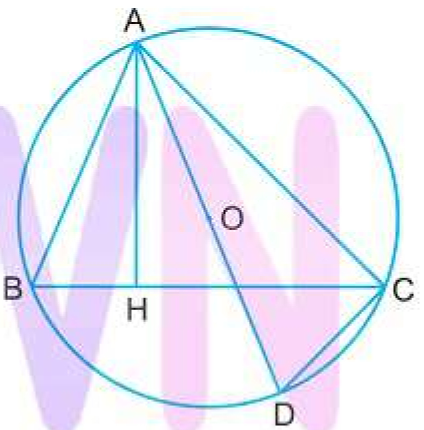
Vậy $\widehat{BAC}$ và $\widehat{HAO}$ có cùng một tia phân giác Ax.

5. Vẽ thêm đường kính của đường tròn

Trong một số bài toán hình học về đường tròn, nhiều khi vẽ đường phụ là đường kính của đường tròn làm xuất hiện yếu tố mới, từ đó tìm được lời giải dễ dàng hơn.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c nội tiếp đường tròn (O; R), AH là đường cao của tam giác ABC, AH = h_a. Chứng minh rằng bc = $2Rh_a$.

Lời giải.



Vẽ đường kính AD của đường tròn (O; R).

Xét ΔHBA và ΔCDA có

$\widehat{AHB}=\widehat{ACD}=90^o$.

$\widehat{ABH}=\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Do đó ΔHBA ∽ ΔCDA (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow AB.AC=AD.AH.$$

Vậy bc = $2Rh_a$ (đpcm).

Bài tập

Bài 1. Cho ΔABC có AC > AB. Các điểm D và E theo thứ tự nằm trên các cạnh AB và AC sao cho BD = CE. Chứng minh rằng khi các điểm D, E thay đổi vị trí (vẫn thoả mãn điều kiện trên) thì đường trung trực của DE luôn đi qua điểm cố định.

Bài 2. Cho ΔABC vuông cân đỉnh A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng $2MA^2 = MB^2 + MC^2$.

Học ra sao? Giải toán thế nào?

CHỌN THAM SỐ ĐỂ GIẢI TOÁN

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài viết này chúng ta sẽ xét một số dạng toán đại số giải bằng cách đưa về dạng phương trình hoặc bất phương trình chứa tham số.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^2-n+1 không chia hết cho 9.

Lời giải. Giả sử $n^2-n+1 \,\vdots\, 9$

$\Leftrightarrow n^2-n+1=9k$ ($k\in\mathbb{Z}$).

Suy ra $n^2-n+1-9k=0$. (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn n với tham số k.

Ta có $\Delta=36k-3$.

Ta thấy Δ chia hết cho 3 và không chia hết cho 9.

Suy ra Δ không là số chính phương.

Do đó phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Suy ra điều giả sử là sai.

Vậy n^2-n+1 không chia hết cho 9 với mọi số nguyên n.

Bài toán 2. Giải phương trình nghiệm nguyên

$\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=\dfrac{39}{7}$. (1)

Lời giải. ĐKXĐ $x\neq -y$.

Từ (1) $\Rightarrow 39(x+y)=7(x^2+xy+y^2)\,\vdots\,7$. (2)

Mặt khác $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}\geq 0$.

Đặt $x+y=7t$ ($t\in\mathbb{N}^*$).

Thay $y=7t-x$ vào (2) ta được

$x^2+x(7t-x)+(7t-x)^2=39t$

$\Leftrightarrow x^2-7tx+49t^2-39t=0$. (3)

Phương trình (3) là phương trình bậc hai ẩn x với tham số t có nghiệm khi

$\Leftrightarrow \Delta=(-7t)^2-4(49t^2-39t)\geq 0$

$\Leftrightarrow -147t^2+156t\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq t\leq \dfrac{52}{49} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=1\end{array}\right.$

Vì $t\neq 0$ nên $t=1$.

$\Rightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow y=5\\ x=5\Rightarrow y=2.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên (x, y) là (2, 5); (5, 2).

Bài toán 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}$.

Lời giải. Vì $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ nên A xác định với mọi số thực x.

Ta có

$A=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+3}\Leftrightarrow Ax^2-2(A+1)x+3A+1=0$. (1)

- Nếu $A=0$ thì $x=\dfrac{1}{2}$.
- Nếu $A\neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai ẩn x có nghiệm khi

$\Delta'=(A+1)^2-A(3A+1)\geq 0$

$\Leftrightarrow -2A^2+A+1\geq 0\Leftrightarrow (1-A)(1+2A)\geq 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq A\leq 1$.

Vậy $\text{Min}A=-\dfrac{1}{2}$ khi $x=-1$.

MaxA = 1 khi x = 2.

Bài toán 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $m=x+3y$ với x, y là các số thực thỏa mãn $5x^2+5y^2-5x-15y+8\leq 0$. (1)

Lời giải. Ta có $m=x+3y\Rightarrow x=m-3y$, thay vào (1) ta có

$5(m-3y)^2+5y^2-5(m-3y)-15y+8\leq 0$

$\Leftrightarrow 50y^2-30my+5m^2-5m+8\leq 0$. (2)

Vế trái của (2) là tam thức bậc hai của y với tham số m có nghiệm.

Ta có $\Delta' = -25m^2 + 250m - 400$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì $50y^2 - 30my + 5m^2 - 5m + 8 > 0$ $\forall y$ (loại).
- Nếu $\Delta' = -25m^2 + 250m - 400 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 10m + 16 \leq 0$

$\Leftrightarrow (m-2)(m-8) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 8$.

* Với $m = 2$, thay vào (2) ta được $y = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$.

* Với $m = 8$, thay vào (2) ta được $y = \frac{12}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 2 khi $x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}$.

Giá trị lớn nhất của m là 8 khi $x = \frac{4}{5}, y = \frac{12}{5}$.

Bài toán 5. Giải phương trình

$x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$. (1)

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \geq 1$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (x+3)t + 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = x \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = x \ (2) \\ \sqrt{x^2+1} = 3 \ (3) \end{array}\right.$$

Ta có $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Ta có (3) $\Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \pm 2\sqrt{2}$.

Bài toán 6. Giải bất phương trình

$\sqrt{9x^2+16} \geq 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x}$. (1)

Lời giải. ĐKXĐ $-2 \leq x \leq 2$.

Vì hai vế của (1) đều dương nên bình phương hai vế của (1) rồi rút gọn ta được

$9x^2 + 8x - 32 - 16\sqrt{-2x^2+8} \geq 0$. (2)

Đặt $t = 2\sqrt{-2x^2+8} \geq 0 \Rightarrow t^2 = -8x^2 + 32$.

Bất phương trình (2) trở thành

$-t^2 - 8t + x^2 + 8x \geq 0$

$\Leftrightarrow (t-x)(t+x+8) \leq 0 \Leftrightarrow -x-8 \leq t \leq x$

$$\Leftrightarrow -x-8 \leq 2\sqrt{-2x^2+8} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq \frac{32}{9}. \end{cases}$$

Kết hợp với ĐKXĐ thì bất phương trình có nghiệm là $\frac{4\sqrt{2}}{3} \leq x \leq 2$.

Bài toán 7. Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ có bậc là n $(n \in \mathbb{N}^*)$ thỏa mãn điều kiện $P(x^2-6) \vdots P(x)$?

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = (x+m)^n$ $(m \in \mathbb{R})$.

Ta có $P(x^2-6) = (x^2-6+m)^n$.

$= \left[(x+m)^2 - 2m(x+m) + m^2 + m - 6\right]^n$.

Nếu m thỏa mãn $m^2 + m - 6 = 0$ (1) thì

$P(x^2-6) = \left[(x+m)^2 - 2m(x+m)\right]^n \vdots (x+m)^n$.

Suy ra $P(x^2-6) \vdots P(x)$.

Giải (1) ta được $m = -3$ hoặc $m = 2$.

Vậy tồn tại đa thức $P(x)$ có bậc n thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$x^3(1+x) = 2(m+x)(2m+x)$. (1)

Lời giải. Ta có

(1) $\Leftrightarrow 4m^2 + 6xm - x^4 - x^3 + 2x^2 = 0$. (2)

Phương trình (2) là phương trình bậc hai ẩn m với tham số x.

Giải (2) ta được

$m = -\frac{1}{2}x^2 - x$ hoặc $m = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm khi ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$x^2 + 2x + 2m = 0$ (3)

$x^2 - x - 2m = 0$ (4)

Phương trình (3) có nghiệm khi

$\Delta'_3 = 1^2 - 2m = 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Phương trình (4) có nghiệm khi

$\Delta_4 = (-1)^2 - 4.1.(-2m) = 1 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{8}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = \frac{x^2-2x-1}{2}$;

b) $2\sqrt{x-2} = 7x - x^2 - 10$;

c) $(x^2-x+1)^4 - 6x^2(x^2-x+1)^2 + 5x^4 = 0$.

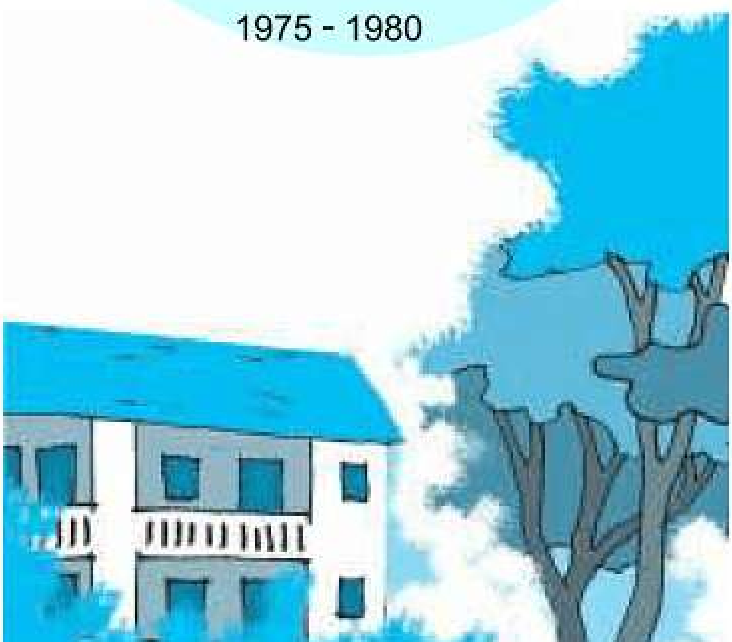
BÍNH NAM HÀ

Xa nhé

Tặng trường ĐHSP của tôi

Trường ơi xa nhé từ đây
Gửi lại cổng trường đàn em ngỡ ngàng trước cửa
Gửi lại giảng đường sáng ngời trăm ánh mắt
Gửi lại những đêm chong đèn
Cho bạn bè sau, mùa thi bận bịu
Gửi lại những ngày nặng trĩu
Những nỗi buồn rất đỗi trẻ con
Những nụ cười hồn nhiên vang giòn
Chỉ thời sinh viên mới có
Cả mơ ước và bao niềm yêu thương
Cho ai còn tuổi đến trường
Gửi cả vần thơ còn dang dở
Chỉ mang theo một nỗi nhớ trường

1975 - 1980



VŨ ĐÔ QUAN

Xa gần lại

Sáng nay một buổi học bình thường
Sao tôi sẽ không thể nào quên được
Tôi phải xa ngôi trường thân thuộc
Xa đàn em từ phút giây này.

Không còn nữa những ngày như hôm nay
Được thấy các em đùa vui nghịch ngợm
Trong khoảng sân trường từng quen thuộc
Thầy cô đi trong tiếng ríu rít chào.

Không còn đâu những hôm nào
Mỗi giờ bao nhiêu niềm yêu thích
Các em hướng đôi mắt ngời đen nhánh
Đăm đắm nhìn lên chăm chú nghe thầy

Biết bao nhiêu kỉ niệm mỗi ngày
Các em hát lời ca xanh tuổi trẻ
Thầy trò hát cùng nhau đêm hội trại
Những ngày vui suốt tháng mọi tuần.

Nhưng thời gian trôi nhanh vô chừng
Thầy cô chẳng kịp thăm nhà đủ lượt
Em vừa quen tiếp thu bài trên lớp
Đã chia tay rồi lưu luyến, nhớ nhung.

Gặp nhau lần đầu hồng sắc đào phai
Các em nhớ mùa hoa phượng này từ giã
và hãy hiểu tại thời gian vội vã
Còn lòng ta đâu muốn chia lìa.

Chẳng biết nói gì - Thôi tạm biệt các em
Còn mãi giữa lòng tôi những ngày yêu quý
và hình ảnh các em tươi trẻ
Nuôi nhiệt tình tôi ngày sống với nghề.

Chữ & Chữ số

Kì này KÌ 30

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau. Lời giải cần có lập luận lôgic.

$$\begin{array}{r} G\ O \\ \times\ F\ L\ Y \\ \hline K\ I\ T\ E\ S \end{array}$$

TRƯƠNG CÔNG THÀNH

Kết quả KÌ 29 (TTT2 số 173+174)

TEN × TEN = FIFTY + FIFTY

Ta viết trong dạng $\overline{TEN}^2 = 2.\overline{FIFTY}$. (1)

Vế phải của (1) là số chẵn nên N là chữ số chẵn. N có thể lấy các giá trị 0, 2, 4, 6, 8, do đó N^2 chỉ có chữ số tận cùng là 0, 4, 6.

Nếu N = 0 thì Y = 0 = N (loại).

Do $\overline{TEN}^2$ chia hết cho 4 và không chia hết cho 8 nên Y = 2 và 2Y có tận cùng là 4.

Từ (1) và N^2 có tận cùng là 4 mà N khác 2 nên N = 8. Thay Y, N vào (1) được

$100.\overline{TE}^2 + 160.\overline{TE} + 64 = 20.\overline{FIFT} + 4$.

Suy ra $5.\overline{TE}^2 + 8.\overline{TE} = \overline{FIFT} - 3$. (2)

Từ $5.\overline{TE}^2 < 1000 - 3$ thì $\overline{TE} < 44$, suy ra $T \le 4$.

Do T khác 2 nên T có thể là 1, 3, 4.

Xét T lẻ hoặc chẵn.

1. Với T lẻ thì vế phải của (2) là số chẵn nên $5.\overline{TE}^2$ là số chẵn, suy ra E là số chẵn, lúc đó $5.\overline{TE}^2$ có tận cùng là 0 nên 8E và $\overline{FIFT} - 3$ có chữ số tận cùng giống nhau.

- Nếu T = 1 thì $\overline{FIF1} - 3 = 10.\overline{FIF} - 2$ có tận cùng là 8 nên 8E có tận cùng là 8, suy ra E = 6 (vì E chẵn).

Thay vào (2) có $5.16^2 + 8.16 + 3 = 1411 = \overline{FIFT}$ (loại).

- Nếu T = 3 thì $\overline{FIF1} - 3$ có tận cùng là 0 nên 8E có tận cùng là 0.

Suy ra E = 0 (vì E là số chẵn).

Thay vào (2) có $5.30^2 + 8.30 + 3 = 4743 = \overline{FIFT}$.

Suy ra F = 4, I = 7 (thỏa mãn).

2. Với T = 4 thì vế phải của (2) là số lẻ có tận cùng là 1 nên $5.\overline{TE}^2$ là số lẻ.

Suy ra E là số lẻ, lúc đó $5.\overline{TE}^2$ có tận cùng là 5 nên 8E có tận cùng là 6.

Mà E khác Y = 2 nên E = 7, nhưng $\overline{TE} < 44$ (loại).

Bài toán có một nghiệm là

$308 \times 308 = 47432 + 47432$.

Kì này có nhiều bạn tham gia giải bài. Hầu hết các bạn nêu lời giải chưa đầy đủ. Một số bạn có lẽ do vội vàng nên chưa tìm đúng đáp án. Chỉ có một bạn giải đúng được nhận phần thưởng là: *Giang Bảo Minh*, 9A, THCS Thụy Thanh, Thái Thụy, **Thái Bình**.

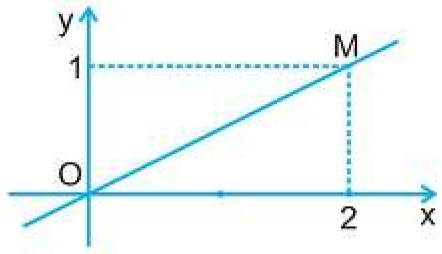
ĐAN QUỲNH

CUỘC THI SÁNG TÁC CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP
PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC MÔN TOÁN
CỦA HỌC SINH BẬC THCS

Đề lớp 7 (BVT)

Câu 1. Khi nào tổng của hai số hữu tỉ nhỏ hơn mỗi số hạng?

Câu 2. Trên hình vẽ dưới đây, đường thẳng OM là đồ thị của hàm số nào?



Câu 3. Bạn làm theo các bước sau:

Bước 1. Lấy một số hữu tỉ khác 0 bất kì;

Bước 2. Lấy số đối của số đó;

Bước 3. Lấy số nghịch đảo của số có ở bước 2;

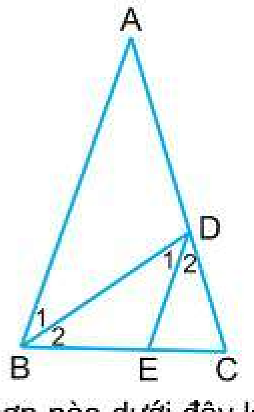
Bước 4. Lấy số ban đầu nhân với số có ở bước 3;

Bước 5. Nâng kết quả ở bước 4 lên luỹ thừa n ($n \in \mathbb{N}$).

Kết quả là số nào?

Câu 4. Cho n đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo thành 12 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt). Hỏi n là số nào?

Câu 5. Hình vẽ dưới có $\widehat{A} = 36^o$; $\widehat{C} = 2\widehat{A}$; $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$. Hỏi trong hình vẽ có mấy tam giác cân?



Câu 6. Trường hợp nào dưới đây không thể xảy ra đối với một tam giác?

a) Cả ba góc trong đều nhỏ hơn ba góc ngoài;

b) Có hai góc trong lớn hơn hai góc ngoài;

c) Có một góc trong lớn hơn một góc ngoài (tại mỗi đỉnh chỉ xét một góc ngoài).

Câu 7. So sánh hai số 3^{95} và 4^{76}.

Câu 8. Cho đa thức $A(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó $3a + b = 0$.

Chứng minh rằng $A(1) . A(2) \geq 0$.

Câu 9. Cho các đa thức:

$A = -7x^3y + 5x^2y^2 + 6y^4$;

$B = 3x^3y - 4x^2y^2 + 2y^4$;

$C = 4x^3y + x^2y^2 + 1$.

Chứng minh rằng trong ba đa thức này có ít nhất một đa thức có giá trị dương với mọi giá trị của x, y.

Câu 10. Cho tam giác ABC. Giả sử chỉ có thước kẻ có vạch chia, hãy nêu cách vẽ một góc bằng $\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 5 cm; AC = 12 cm. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = MA + 2MB + 3MC$.

Câu 12. Cho tam giác ABC, các đường phân giác BD, CE cắt nhau tại O.

Chứng minh rằng nếu $\widehat{BOE} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC}$ thì OD = OE và BE + CD = BC.

ĐỀ DỰ TUYỂN CUỘC THI CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2017

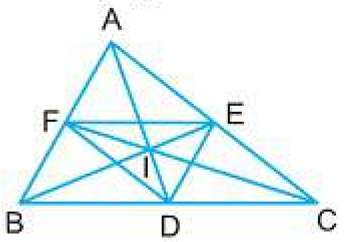
TNP
Vũ Thành Nam *(dịch)*

1. How many 3-digit numbers are multiple of 30?

2. Given that $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} (a \neq \pm b, a \neq -c, b \neq -c)$.

Determine the value of the expression $M = \frac{c}{a+b}$.

3. Given the following figure.



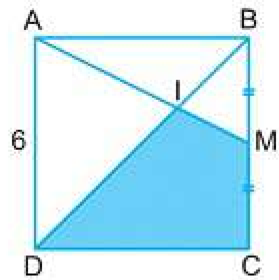
How many triangles are there that take 3 of the 7 points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, and *I* as vertices?

4. Let *A* be the set of natural numbers between 1 and 50 and divisible by 3, and *B* be the set of natural numbers between 1 and 50 and divisible by 4. How many elements does the set $A \cup B$ contain?

5. Find an integer x such that the value of the following expression is an integer.

$$A = \frac{2x^2 - 2x}{2x^2 - x - 1}.$$

6. In the below figure, *ABCD* is a square of sides 6 cm. Let *M* be the midpoint of *BC*, and *I* be the intersection of *AM* and *BD*. Find the area of the quadrilateral *DIMC*.

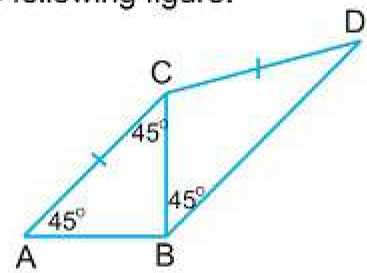


7. Before the start of a football match, there are 3 referees and 2 teams of 11 players each in the field. Each player of one team shakes hands with each of the players of the other team. The players from the same team do not shake hands with one another. All players shake hands with the 3 referees and the referees also shake hands with one another. In total, how many handshakes take place?

8. Find the value of the following expression.

$$A = \frac{1^2 + 20172017^2}{10086008^2 + 10086009^2}.$$

9. Given the following figure.



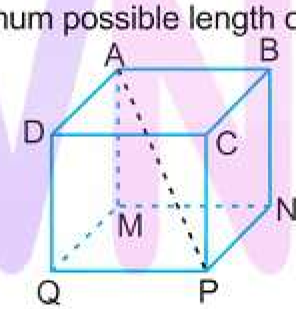
Given that $\angle A = \angle ACB = \angle CBD = 45^o$ and CA = CD. Find the measure of $\angle D$.

10. Find the smallest integer x that satisfies $x^{78} < 5^{117}$.

11. Solve the following equation.

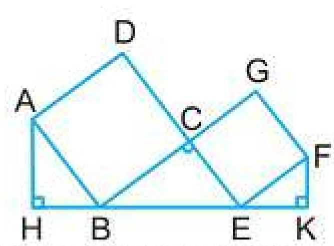
$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{4} = 0.$$

12. In the given figure, the cuboid *ABCDMNPQ* has a volume of $\frac{27}{2}$ cm^3, and a height of $\frac{3}{2}$ *cm.* Find the minimum possible length of *AP*.



13. Let $a * b = a^2 + b^2$. Find x and y such that $(x+2) * (x+y) = 2(1-y)$.

14. In the figure, the square *ABCD* has sides of 8 cm, and the square *CEFG* has sides of 6 cm. Given that $\angle AHB = \angle BCE = \angle EKF = 90^o$ and that *H*, *B*, *E*, and *K* are collinear. Find the length of *HK*.



15. Solve the following inequation.

$$2x + 18 < \frac{72}{3-x}.$$

16. Given a triangle *ABC* having *BC* = 2*AB*. Let *D* be a point on the side *BC* such that $BD = \frac{1}{2}AB$. Prove that *AC* = 2*AD*.

Đề thi TRƯỜNG CHUYÊN & HSG TRUNG HỌC CƠ SỞ CÁC TỈNH

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10

THPT CHUYÊN TP. HÀ NỘI

Năm học 2017 - 2018 ★ Môn thi: Toán (chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(2 điểm)*

1) Giải phương trình $\sqrt{5x - x^2} + 2x^2 - 10x + 6 = 0.$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2. \end{cases}$

Bài 2. *(2,5 điểm)*

1) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x + y - z = 2$ và $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 13$.

2) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh ab chia hết cho a + b + c.

3) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn 2n + 1, 3n + 1 là các số chính phương và 2n + 9 là số nguyên tố.

Bài 3. *(1,5 điểm)*

Cho các số thực dương a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(2b + c + a)^2} + \frac{1}{(2c + a + b)^2}.$

Bài 4. *(3 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC (với AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của cạnh BC, E là hình chiếu của điểm A trên cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh $BC^2 = 4DA.DF$.

2) Tia DH cắt đường tròn (O) tại điểm G. Chứng minh 4 điểm A, G, E và D cùng thuộc một đường tròn.

3) Đường thẳng FE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K. Chứng minh đường thẳng BC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác GKE.

Bài 5. *(1 điểm)*

Ta viết lên bảng 99 số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3,..., 99. Ta thực hiện các thao tác sau: Xóa ba số a, b, c bất kì trên bảng rồi lại viết lên bảng số (abc + ab + bc + ca + a + b + c).

Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng còn lại đúng một số. Tìm số còn lại đó.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10

THPT CHUYÊN BÌNH DƯƠNG

Năm học: 2016 - 2017

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. *(2 điểm)*

a. Giải phương trình $x^2 - 2x - 2\sqrt{2x+1} - 2 = 0$.

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x + y + xy = x^2 - 2y^2. \end{cases}$

Câu 2. *(2 điểm)*

Cho biểu thức $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$ $(x > 4)$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 3. *(2 điểm)*

a. Cho phương trình $x^2 + mx + n + 1 = 0$ có hai nghiệm nguyên dương.

Chứng minh rằng $m^2 + n^2$ là hợp số.

b. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x(x^2 + x + 1) = 4y(y - 1)$.

Câu 4. *(1 điểm)*

Cho tam giác ABC đều. Trên BC, CA, AB lần lượt lấy M, N, P sao cho P khác A và B và $\widehat{MPN} = 60^o$.

Chứng minh rằng $AN.BM \le \dfrac{AB^2}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Câu 5. *(3 điểm)*

Từ D nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ tiếp tuyến DA, DB đến đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Tia Dx nằm giữa hai tia DA, DO; Dx cắt (O) tại hai điểm C và E (E nằm giữa C và D). Đường thẳng OD cắt đoạn thẳng AB tại N. Chứng minh rằng

a. Tứ giác OMEC nội tiếp.

b. Tia MA là tia phân giác của $\widehat{EMC}$.

c. $\dfrac{MB^2}{MC^2} = \dfrac{DE}{DC}$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 8 HUYỆN YÊN LẠC, TỈNH VĨNH PHÚC

Năm học 2015 - 2016

(Đề đăng trên TTT số 175)

Bài 1. a) ĐKXĐ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$A = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4x^2-4x+4} - \frac{3}{4x^2+4x+4}\right).\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right).\frac{(x^4+2x^2+1)-x^2}{x^2+1}$$

$$= \frac{2x}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}.\frac{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}.$$

b) Để $A = 2$ thì $\frac{2x}{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ (vô nghiệm).

Vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$

Do đó không tồn tại x để $A = 2$.

c) Ta có

$$A = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = -1$.

Vậy Min$A = -1$ khi $x = -1$.

Ta lại có

$$A = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{-x^2+2x-1+x^2+1}{x^2+1} = \frac{-(x-1)^2}{x^2+1} + 1 \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Vậy Max$A = 1$ khi $x = 1$.

Bài 2. a) Ta có

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2) \,\vdots\, 2.$ (1)

Xét hiệu

$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$

$= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) \,\vdots\, 2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d \,\vdots\, 2$.

Mà $a + b + c + d > 2$.

Suy ra $a + b + c + d$ là hợp số.

Vậy $a + b + c + d$ không là số nguyên tố.

b) Ta có

$f(x) = (x-2015).A(x) + 1 \Rightarrow (x-2016).f(x)$

$= (x-2015)(x-2016)A(x) + x - 2016.$

$(x-2015)f(x)$

$= (x-2015)(x-2016)B(x) - (x-2015).$

Suy ra

$[(x-2015) - (x-2016)]f(x)$

$= (x-2015)(x-2016)(B(x) - A(x))$

$-(x-2015) - (x-2016).$

Suy ra

$f(x) = (x-2015)(x-2016)(B(x) - A(x)) - 2x + 4031.$

Vậy đa thức trong phép chia đa thức f(x) cho $(x-2015)(x-2016)$ là $-2x + 4031$.

Bài 3. a) Vì q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$).

- Nếu $q = 3k + 1$ thì $p = 3k + 3 \,\vdots\, 3$ và $p > 3$ nên p là hợp số (loại).
- Nếu $q = 3k + 2$ thì $p = 3k + 4$, vì q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên k là số lẻ.

Ta có $p + q = 6(k+1) \,\vdots\, 12$.

Vậy số dư khi chia $p + q$ cho 12 bằng 0.

b) Đặt $x = \frac{1}{2a+1}; y = \frac{1}{2b+1}; z = \frac{1}{2c+1}$ thì

$a = \frac{1-x}{2x}; b = \frac{1-y}{2y}; c = \frac{1-z}{2z}.$

Vì a, b, c > 0 nên $0 < x, y, z < 1$ và $x + y + z \geq 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{3-2x} + \frac{y}{3-2y} + \frac{z}{3-2z} \geq \frac{3}{7}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$$\frac{x}{3-2x} + \frac{y}{3-2y} + \frac{z}{3-2z}$$

$$= \frac{x^2}{3x-2x^2} + \frac{y^2}{3y-2y^2} + \frac{z^2}{3z-2z^2}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)-2(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)-\frac{2}{3}(x+y+z)^2} = \frac{3}{\frac{9}{x+y+z}-2} \geq \frac{3}{7}.$$

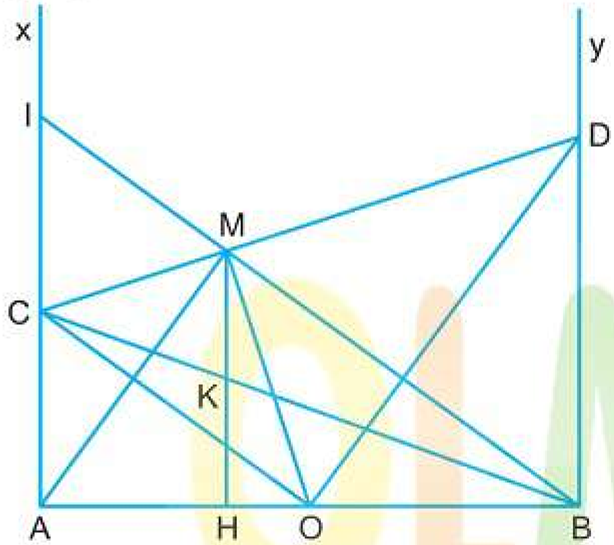
Vậy $\frac{1}{6a+1}+\frac{1}{6b+1}+\frac{1}{6c+1} \geq \frac{3}{7}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 4. a) Ta có $\Delta OAC \backsim \Delta DBO$ (g-g).

$\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{BO} \Rightarrow OA.OB = AC.BD$

$\Rightarrow \frac{AB}{2}.\frac{AB}{2} = AC.BD \Rightarrow AB^2 = 4AC.BD$.



b) Theo chứng minh trên ta có

$\Delta OAC \backsim \Delta DBO \Rightarrow \frac{OC}{DO} = \frac{AC}{BO}$.

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$.

Ta chứng minh

$\Delta OAC \backsim \Delta DOC$ (g-g) $\Rightarrow \widehat{ACO} = \widehat{OCM}$.

$\Delta OAC = \Delta OMC$ (cạnh huyền - góc nhọn).

$\Rightarrow AC = MC$.

c) Ta có

$\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM$.

Suy ra OC là đường trung trực của AM.

Do đó $OC \perp AM$.

Vì $OA = OM = OB$ nên tam giác AMB vuông tại M.

Suy ra OC // BM (vì cùng vuông góc AM) hay OC // BI.

Xét tam giác ABI có OC đi qua trung điểm O của AB và song song với BI, suy ra OC đi qua trung điểm AI.

Do đó $IC = AC$.

Vì MH // AI nên theo hệ quả định lí Thales ta có

$\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$.

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK$.

Vậy BC đi qua trung điểm của MH.

d) Vì tứ giác ABDC là hình thang vuông nên

$S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AC+BD).AB$.

Ta thấy AC, BD > 0 nên theo bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$, ta có

$(AC+BD)^2 \geq 4AC.BD = AB^2$

$\Rightarrow AC+BD \geq AB \Rightarrow S_{ABDC} \geq \frac{1}{2}AB^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $AC = BD = \frac{AB}{2} = OA$.

Vậy điểm C thuộc tia Ax và cách điểm A một đoạn bằng OA.

Bài 5. Giả sử sau một số bước biến đổi, trên bảng có đúng 2016 dấu trừ. Giả sử ở hàng thứ i ta đã đổi dấu x_i lần, còn ở cột thứ j ta đã đổi dấu y_j lần. Như vậy dấu ở ô (i; j) đã thay đổi $x_i + y_j$ lần.

Suy ra tại ô này có dấu (–) khi và chỉ khi $x_i + y_j$ là số lẻ. Gọi p là số các số lẻ giữa các số x_i, q là số các số lẻ giữa các số y_j. Khi đó tổng số dấu (–) trong bảng là

$p(100-q)+(100-p)q = 100p+100q-2pq = 2016$.

$\Leftrightarrow (p-50)(q-50) = 1492 = 12.131$. (1)

Vì 131 là số nguyên tố nên p – 50 hoặc q – 50 chia hết cho 131.

Giả sử $p-50 \vdots 131$.

Ta lại có $-50 \leq p-50 \leq 50 \Rightarrow p-50 = 0$ (Mâu thuẫn với (1)).

Vậy không thể thực hiện được theo yêu cầu của đề bài.

Kì thi SHARYGIN GEOMETRY OLYMPIAD

ThS. *Nguyễn Bá Đang*

Nhà toán học Fedorovich Sharygin (1937-2004) sinh tại Matxcơva. Năm 1984, ông là Tổng biên tập tạp chí *Toán học trong trường* của Liên Xô cũ. Ngay năm 2004, để đánh giá công lao của ông, Bộ Giáo dục và Khoa học Liên Bang Nga đã tổ chức kì thi cho học sinh trung học từ lớp 8 đến lớp 10, mang tên ***Sharygin Geometry Olympiad***, đề thi hoàn toàn là những bài hình học. Kì thi này gồm 2 vòng là: sơ loại và chung kết.

- Vòng sơ loại, thí sinh cần phải giải 8-16 bài cho khối lớp của mình, có tất cả 3 khối lớp là 8, 9, 10. Các thí sinh ở xa có thể giải và gửi bài qua email, Ban tổ chức sẽ chọn ra khoảng 30-40 bạn học sinh cao điểm nhất ở mỗi khối vào vòng chung kết.

– Vòng chung kết: Các thí sinh sẽ thi trực tiếp 2 ngày thi mỗi ngày 4 câu hỏi, thời gian mỗi ngày thi là 4 giờ. Đề thi gồm 8 câu hỏi về hình phẳng thuần túy, hình tổ hợp, hình học tính toán (bất đẳng thức hình học, lượng giác,...). Thí sinh làm bằng tiếng Anh, sau đó sẽ phải thuyết trình trực tiếp bằng tiếng Anh cho giám khảo về bài làm của mình để họ chấm điểm.

Năm nay, đoàn Việt Nam có em Trương Tuấn Nghĩa được giải nhất và 2 giải khuyến khích cho 2 em học sinh khối 9 và khối 10. Hệ thống trường THPT của Liên Bang Nga là 11 năm, còn của Việt Nam là 12 năm.

Xin giới thiệu một số bài thi năm 2017 của các lớp để các bạn tham khảo.

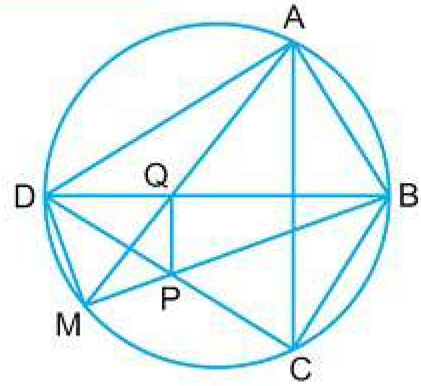
Bài 1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn, thỏa mãn AB = BC, CD = DA, M là một điểm trên cung nhỏ CD, MB cắt CD tại P và MA cắt DB tại Q. Chứng minh PQ song song với AC. (lớp 9)

Lời giải. Theo giả thiết AB = BC, CD = DA nên $\Delta ABD = \Delta CBD$ (c.c.c).

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DCB}; \widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^o.$

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DCB} = 90^o.$

Do đó BD là đường kính của đường tròn suy ra $AC \perp BD$.



Vì $\widehat{DQM} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MD} + \overset{\frown}{AB}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MD} + \overset{\frown}{BC}) = \widehat{DPM}.$

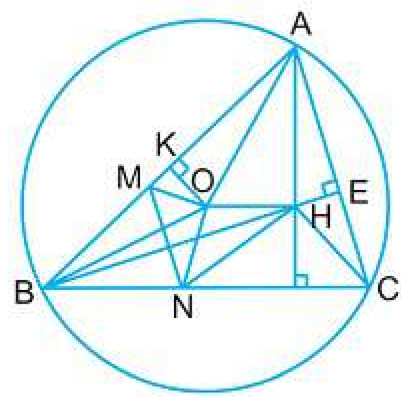
$\Rightarrow$ Tứ giác DQPM nội tiếp.

Mà $\widehat{DMB} = 90^o \Rightarrow \widehat{DQP} = 90^o \Rightarrow PQ \perp BD$

$\Rightarrow PQ \,//\, AC.$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC, H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường trung trực của BH cắt AB, BC tại M và N. Chứng minh OB là phân giác góc MON.

Lời giải. Kẻ $BH \perp AC$ tại E, $OK \perp AB$ tại K.



Ta có

$\widehat{OBA} = \widehat{BAO} = 90^o - \widehat{AOK} = 90^o - \widehat{ACB} = \widehat{HBC}.$

Ta lại có NB = NH.

$\Rightarrow \Delta NBH$ là tam giác cân $\Rightarrow \Delta OBA \backsim \Delta NBH$.

$\Rightarrow \frac{OB}{AB} = \frac{NB}{BH}$ và $\widehat{ABH} = \widehat{OBN}.$

Từ đó $\Delta OBN \backsim \Delta ABH$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{NOB} = \widehat{HAB} = 90^o - \widehat{ABC}.$

Tương tự $\Delta OMB \backsim \Delta CBH$

$\Rightarrow \widehat{MOB} = \widehat{HCB} = 90^o - \widehat{ABC}.$

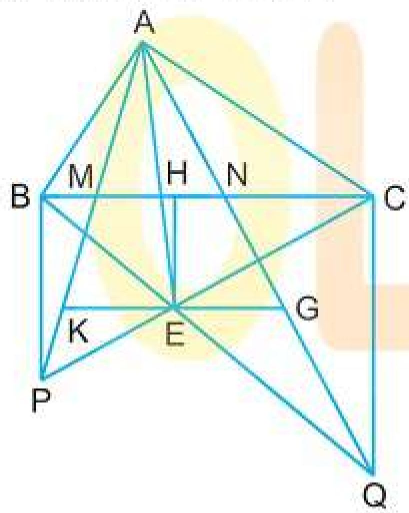
$\Rightarrow \widehat{MOB} = \widehat{NOB}.$

$\Rightarrow$ OB là tia phân giác của $\widehat{MON}$.

Bài 3. (Đề của Trần Quang Hùng, Việt Nam) Cho hình vuông ABCD, P là điểm bất kỳ trên cung nhỏ DC của đường tròn ngoại tiếp hình vuông. Các đường thẳng PA, PB cắt đường chéo BD và AC tương ứng tại K và L. Gọi M, N là hình chiếu tương ứng của K, L trên cạnh CD. Gọi Q là giao điểm KN và LM. Chứng minh rằng PQ đi qua trung điểm của AB. (lớp 8).

Trước hết ta cần Bổ đề: *Cho tam giác ABC vuông tại A, hai đường thẳng BP, CQ vuông góc với BC thỏa mãn BP = AB và CQ = CA (P và Q không cùng phía với A bờ BC), E là giao điểm BQ và CP. Cạnh BC cắt AP và AQ tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng AE đi qua trung điểm của MN.*

Chứng minh Bổ đề. Theo giả thiết BA = BP nên tam giác BAP cân $\Rightarrow \widehat{BAP} = \widehat{BPA}$.



Mặt khác ta có $\widehat{MAC} = 90^o - \widehat{BAP}$, $\widehat{AMC} = \widehat{BMP} = 90^o - \widehat{BPA}$.

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{AMC} \Rightarrow \Delta CAM$ cân $\Rightarrow$ CA = CM = CQ.

Tương tự BA = BN = BP.

Gọi K, G là giao điểm của AP và AQ với đường thẳng qua E song song với BC, H là hình chiếu của E trên BC.

$\Rightarrow \dfrac{EK}{CM} = \dfrac{PE}{PC} = \dfrac{BE}{BQ} = \dfrac{EH}{CQ} \Rightarrow EK = EH.$

Tương tự EH = EG.

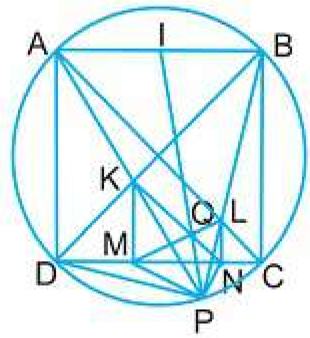
$\Rightarrow$ AE là trung tuyến của ΔAKG.

$\Rightarrow$ AE đi qua trung điểm của MN.

Trở lại bài toán. KM $\perp$ CD $\Rightarrow \widehat{KMD} = 90^o$. Vẽ đường tròn tâm M bán kính MD = MK, $\widehat{APD} = 45^o$

$\Rightarrow$ M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔPKD.

$\Rightarrow MK = MP \Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MKP} = \widehat{DAP}.$



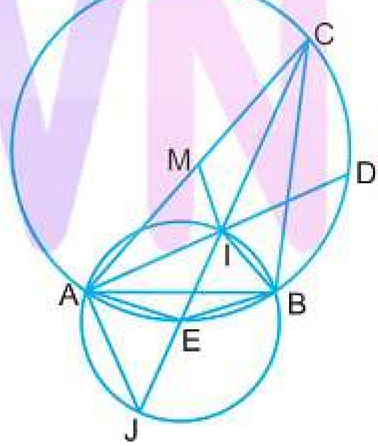
Tương tự LN = PN $\Rightarrow \widehat{NPL} = \widehat{NLP} = \widehat{CBP}$. Từ đó $\widehat{MPN} = \widehat{MPK} + \widehat{APB} + \widehat{NPL} = \widehat{DAP} + \widehat{APB} + \widehat{CBP} = 90^o.$

$\Rightarrow \Delta MPN$ là tam giác vuông. Áp dụng bổ đề trên ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của AC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác thỏa mãn $\widehat{AIM} = 90^o$, E là điểm chính giữa của cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tính tỉ số $\dfrac{CI}{IE}$. (lớp 9)

Lời giải.



Đường thẳng CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB tại điểm thứ hai J.

Theo giả thiết I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên CI đi qua trung điểm E của cung AB và AI đi qua trung điểm D của cung BC.

Từ đó $\widehat{AIJ} = \widehat{ACE} + \widehat{CAD} = \widehat{BCE} + \widehat{BAD} = \widehat{IAE}.$

Suy ra EA = EB = EI $\Rightarrow$ E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB.

$\Rightarrow JA \perp AI.$

Theo giả thiết $MI \perp AI$.

$\Rightarrow$ MI // AJ. Do MA = MC nên IC = IJ = 2IE

$$\Rightarrow \frac{CI}{IJ - \frac{IJ}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{CI}{IE} = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2.$$

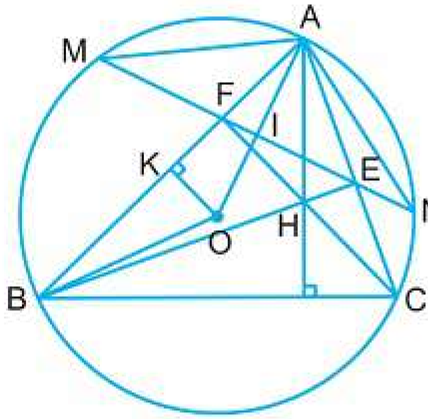
Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao BE và CF, đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M và N. Gọi P là điểm đối xứng của M qua AB, Q là điểm đối xứng N của qua AC. Chứng minh rằng PQ song song với BC. (lớp 9)

Lời giải. a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

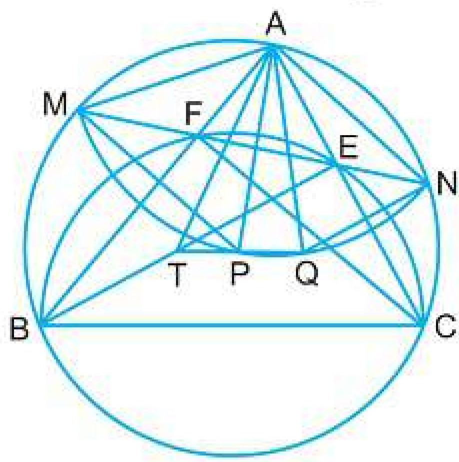
Kẻ $OK \perp AB$. Chứng minh như ở bài toán 2 ta có $\widehat{BAO} = 90^o - \widehat{ACB} = \widehat{HAC}$.

Đường tròn đường kính AH đi qua E và F nên $\widehat{AFE} = \widehat{AHE} = 90^o - \widehat{HAC} = 90^o - \widehat{BAO}$.

Suy ra $\widehat{AIF} = 90^o \Rightarrow AO \perp MN \Rightarrow AM = AN$.



b) P là đối xứng của A qua MN nên AM = AP, Q là điểm đối xứng của N qua AC nên AN = AQ, mà theo chứng minh trên AM = AN nên AM = AP = AQ = AN $\Rightarrow$ M, P, Q, N nằm trên đường tròn tâm A.



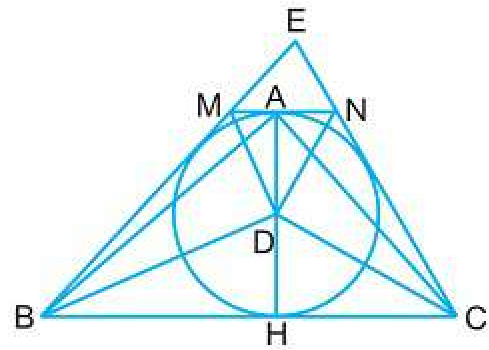
Đường thẳng PQ cắt BE ở T. Giả sử $\widehat{QTA} < 90^o$ (nếu là góc tù thì làm tương tự).

Ta có $\widehat{QTE} = 180^o - \widehat{PQN} = \widehat{PMN} = \widehat{CFN} = \widehat{CBE}$, suy ra PQ // BC.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, D là trung điểm AH. Gọi E là giao điểm của đường thẳng đối xứng với BC qua BD và đường thẳng đối xứng với CB qua CD. Tính tỉ số $\dfrac{S_{EBC}}{S_{ABC}}$.

Lời giải. Qua A dựng đường thẳng song song với BC cắt BE, CE tại M và N $\Rightarrow$ tứ giác MNCB là hình thang. BE và BC đối xứng qua BD, CB và CE đối xứng qua CD $\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{DBC}$ và $\widehat{NCD} = \widehat{DCB}$.

$\Rightarrow$ D là tâm đường tròn nội tiếp hình thang MNCB.



Do $\widehat{AMB} + \widehat{MBH} = 180^o$ nên

$\widehat{AMD} = 90^o - \widehat{HBD} = \widehat{HDB}$.

$\Rightarrow \Delta AMD \backsim \Delta HDB$.

$\Rightarrow \dfrac{MA}{DH} = \dfrac{AD}{HB}$.

$\Rightarrow MA = \dfrac{AD^2}{HB} = \dfrac{AH^2}{4HB} = \dfrac{BH.HC}{4HB} = \dfrac{HC}{4}$.

Tương tự ta có $AN = \dfrac{BH}{4} \Rightarrow MN = \dfrac{BC}{4}$.

$\Rightarrow$ Đường cao của ΔEBC kẻ từ E bằng $\dfrac{4}{3}$ đường cao của ΔABC kẻ từ A.

$\Rightarrow \dfrac{S_{EBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{4}{3}$.

ĐÁP ÁN

ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ 2016 (TIMC 2016)

(Đề đăng trên TTT2 số 175)

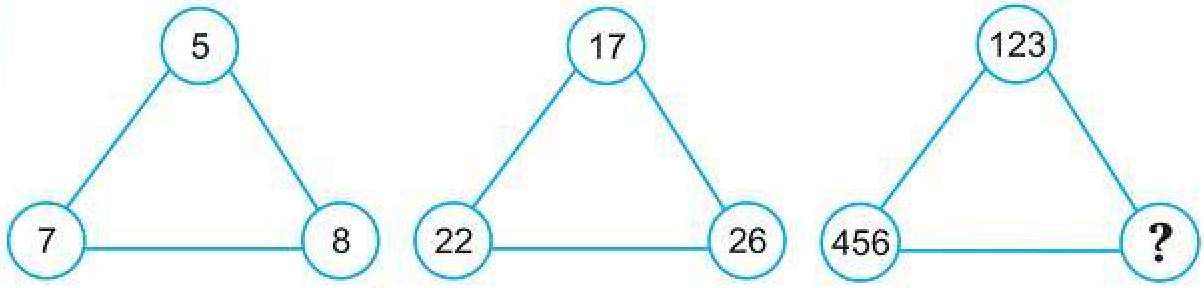
Bài 1. 10
Bài 2. 6
Bài 3. 4
Bài 4. 3333
Bài 5. 42
Bài 6. 24
Bài 7. 99
Bài 8. 6
Bài 9. 72
Bài 10. 51
Bài 11. 737192329
Bài 12. 99
Bài 13. 72
Bài 14. 201
Bài 15. 14

Kì này

SỐ NÀO TIẾP THEO?

Bài 1. Tìm số tiếp theo của dãy số:
1, 3, 7, 15, 31, ...

Bài 2. Điền vào chỗ trống cho hợp lôgic.



CAO NGỌC TOẢN *(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)*

Kết quả

QUY LUẬT NÀO? (TTT2 số 173+174)

Quy luật. Bài 1. Mỗi số hạng của dãy số bằng tổng của 2017 với lũy thừa bậc 4 của các số tự nhiên liên tiếp, kể từ 0:

$2017 = 2017 + 0^4$; $2018 = 2017 + 1^4$; $2033 = 2017 + 2^4$; $2098 = 2017 + 3^4$; ...

Theo quy luật đó, số tiếp theo của dãy là

$2017 + 4^4 =$ **2273.**

Bài 2. Trong mỗi hình, số ở bên trái bằng tổng các chữ số của số ở giữa, số ở bên phải bằng tích các chữ số của số ở giữa.

Do đó $x = 5 + 9 = 14$; $y = 5 . 9 = 45$.

Xin trao thưởng cho các bạn: *Nguyễn Công Hùng*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Tưởng Hương Thảo*, 7A, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**; *Trương Thị Phương Nga*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Diệu Hằng*, 8/2, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh; *Nguyễn Quang Minh*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Đào Thanh Dung*, 9A1, THCS Chất lượng cao Mai Sơn, Mai Sơn, **Sơn La**; *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Ngọc Nữ*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Lê Đăng Phú Quý*, 8/4, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Kết quả

CUỘC THI VUI SỐ VÀ HÌNH 2017

(Đề đăng trên TTT2 số 171 và 172)

Bài 1. • Xét hàng đơn vị có $2 + 4 + 4 = 10$ nên $B = 0$ và nhớ $k = 1$ sang hàng chục.

• Xét hàng trăm có $3 + 3 + 9 + m = 17$ nên ở hàng nghìn $H = 1$ và ở hàng chục có nhớ $m = 2$ sang hàng trăm nên $7 + 8 + N + k = 21$, hay là $15 + N + 1 = 21$, suy ra $N = 5$.

Bài 2. Từ giả thiết có $TA = TB = TC$ nên T là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C của tam giác, suy ra T là giao điểm của ba đường trung trực của AB, BC, CA. Giả sử BC là cạnh lớn nhất của tam giác ABC.

* Dựng hai đường tròn tâm B, tâm C với cùng bán kính R sao cho $2R > BC$, hai đường tròn này cắt nhau tại D và E.

* Dựng đường tròn tâm A với bán kính R, hai đường tròn tâm A và tâm B cắt nhau tại H và K. Hai đường thẳng DE và HK cắt nhau tại T thì ta có $TA = TB = TC$.

Bài 3.

$$\begin{array}{rccccc} & S & I & X & T & Y \\ & F & O & R & T & Y \\ + & F & O & R & T & Y \\ & & F & O & U & R \\ \hline & G & R & O & S & S \\ \text{Cột} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Ta kí hiệu số hàng chục của cột thứ j $(1 \le j \le 4)$ là n_j và số đó được nhớ ở cột $j + 1$. Dễ thấy tổng có 4 số hạng nên $0 \le n_j \le 3$ với mọi j. Từ đề bài ta có các đẳng thức và bất đẳng thức sau.

$3Y + R = 10n_1 + S$ (1)

$3T + U + n_1 = 10n_2 + S$ (2)

$2R + X + n_2 = 10n_3$ (3)

$2.O + I + F + n_3 = 10n_4 + R$ (4)

$2F + S + n_4 = G \le 9$ (5)

Từ (5) có $1 \le F \le 4$. Từ (3) suy ra $1 \le n_3 \le 2$.

Xét các trường hợp sau đối với F và S.

(Do khuôn khổ bài báo có hạn nên ở đây chỉ ghi chi tiết trường hợp đầu tiên khi $F = 1$, $S = 2$, $n_1 = 1$ và các trường hợp tìm được nghiệm, các trường hợp còn lại xét tương tự dẫn đến vô nghiệm).

1. Với $F = 1$ và $S = 2$ từ (5) có $4 + n_4 = G$. Từ (1) có $2 \le 3Y + R = 10n_1 + 2$ nên $1 \le n_1 \le 3$.

• Xét $n_1 = 1$ có $3Y + R = 12$ thì $Y = 4$, $R = 0$. Từ (2) có $3T + U = 10n_2 + 1 > 3.3 + 4 = 13$ nên $2 \le n_2 \le 3$.

* Với $n_2 = 2$ từ (3) có $X + 2 = 10n_3 \Rightarrow n_3 = 1$, $X = 8$ và $3T + U = 20$ (loại).

* Với $n_2 = 3$ từ (3) có $X + 3 = 10n_3 \Rightarrow n_3 = 1$, $X = 7$ và $3T + U = 31$ (loại).

• Xét $n_1 = 2$ có $3Y + R = 22$ thì (Y, R) bằng (5, 7) hoặc (6, 4).

• Xét $n_1 = 3$ có $3Y + R = 32$ thì $Y = 9$, $R = 5$.

2. Với $F = 1$ và $S = 3$ thì từ (5) có $5 + n_4 = G$. Xét $3Y + R$ bằng 13, 23, 33.

3. Với $F = 1$ và $S = 4$ thì từ (5) có $6 + n_4 = G$. Từ (1) có $3Y + R = 10n_1 + 4$ nên $1 \le n_1 \le 3$.

• Xét $n_1 = 1$ thì $3Y + R = 14$ nên (Y, R) bằng (2, 8) hoặc (3, 5). Khi $Y = 3$, $R = 5$, với $n_2 = 3$ thì $3T + U = 33$ nên $T = 8$, $U = 9$, từ (3) có $13 + X = 10n_3$ nên $n_3 = 2$ và $X = 7$. Từ (4) có $2.O + I = 10n_4 + 2 < 30$.

Nếu $n_4 = 0$ thì $O = 0$, $I = 2$ (thỏa mãn),

• Xét $n_1 = 2$, $n_1 = 3$, tức là $3Y + R$ bằng 24, 34.

4. Với $F = 1$ và $S = 5$ thì từ (5) có $7 + n_4 = G$. Từ (1) có $3Y + R = 10n_1 + 5$ nên $0 \le n_1 \le 3$.

• Xét $n_1 = 0$ có $3Y + R = 5$ thì $Y = 0$, $R = 5$.

• Xét $n_1 = 1$ có $3Y + R = 15$ thì (Y, R) bằng (2, 9) hoặc (3, 6) hoặc (4, 3).

• Xét $n_1 = 2$ có $3Y + R = 25$ thì (Y, R) bằng (6, 7) hoặc (7, 4). Khi $Y = 7$, $R = 4$, với $n_2 = 0$ thì $3T + U = 3$ nên $T = 0$, $U = 3$ và từ (3) có $8 + X = 10n_3$ nên $X = 2$, $n_3 = 1$. Từ (4) có $14 = 2.4 + 6 \le 2.O + I = 10n_4 + 2 < 30$. Nếu $n_4 = 2$ thì $G = 9$ và $2.O + I = 22$ nên $O = 8$, $I = 6$ (thỏa mãn).

• Xét $n_1 = 3$ thì $3Y + R = 35$ nên $Y = 9$, $R = 8$.

5. Với $F = 1$ và $S = 6$ thì từ (5) có $8 + n_4 = G$. Từ (1) có $3Y + R = 10n_1 + 6$ nên $0 \le n_1 \le 2$.

• Xét $n_1 = 0$ có $3Y + R = 6$ thì $Y = 2$, $R = 0$.

• Xét $n_1 = 1$ có $3Y + R = 16$ thì (Y, R) bằng (3, 7) hoặc (4, 2).

• Xét $n_1 = 2$ có $3Y + R = 26$ thì (Y, R) bằng (7, 5) hoặc (8, 2). Khi $Y = 8$, $R = 2$ thì $G = 9$, $n_4 = 1$ và

$3T + U = 10n_2 + 4$. Với $n_2 = 2$ thì $3T + U = 24$ nên $T = 7$, $U = 3$. Từ (3) có $6 + X = 10n_3$ nên $n_3 = 1$, $X = 4$ và $2.O + I = 10$ nên $O = 5$, $I = 0$ (thỏa mãn).

6. Với $F = 1$ và $S = 7$ thì từ (5) có $G = 9$. Xét $3Y + R$ bằng 7, 17, 27.

7. Với $F = 2$ và $S = 1$ thì từ (5) có $5 + n_4 = G$.
Xét $3Y + R$ bằng 11, 21, 31.

8. Với $F = 2$ và $S = 3$ thì từ (5) có $7 + n_4 = G$.
Xét $3Y + R$ bằng 3, 13, 23, 33.

9. Với $F = 2$ và $S = 4$ thì từ (5) có $8 + n_4 = G$. Từ (1) có $3Y + R = 10n_1 + 4$ nên $0 \le n_1 \le 3$.

- Xét $n_1 = 0$ có $3Y + R = 4$.
- Xét $n_1 = 1$ có $3Y + R = 14$ thì $Y = 3$, $R = 5$. Với $n_2 = 3$ có $3T + U = 33$ nên $T = 9$, $U = 6$ và từ (3) có $13 + X = 10n_3$ nên $n_3 = 2$, $X = 7$ và $2.O + I = 10n_4 + 1$. Nếu $n_4 = 0$ thì $G = 8$ và $2.O + I = 5$ nên $O = 0$, $I = 1$ (thỏa mãn).
- Xét $n_1 = 2$ có $3Y + R = 24$ thì (Y, R) bằng $(5, 9)$ hoặc $(7, 3)$ hoặc $(8, 0)$. Khi $Y = 8$, $R = 0$ với $n_2 = 3$ có $3T + U = 32$ nên $T = 9$, $U = 5$ và từ (3) có $3 + X = 10n_3$ nên $n_3 = 1$, $X = 7$ và $2.O + I + 3 = 10n_4$. Nếu $n_4 = 1$ thì $G = 9$ và $2.O + I = 7$ nên $O = 3$, $I = 1$ (thỏa mãn).
- Xét $n_1 = 3$ có $3Y + R = 34$ thì $Y = 9$, $R = 7$.

10. Với $F = 2$ và $S = 5$ thì từ (5) có $G = 9$.
Xét $3Y + R$ bằng 5, 15, 25, 35.

11. Với $F = 3$ và $S = 1$ thì từ (5) có $7 + n_4 = G$.
Xét $3Y + R$ bằng 11, 21, 31.

12. Với $F = 3$ và $S = 2$ thì từ (5) có $8 + n_4 = G$.
Xét $3Y + R$ bằng 12, 22, 32.

13. Với $F = 4$ và $S = 1$ thì từ (5) có $G = 9$.
Xét $3Y + R$ bằng 11, 21, 31.

Kết luận: Bài toán có 5 nghiệm là:

41793 + 20593 + 20593 + 2065 = 85044;
41798 + 20598 + 20598 + 2350 = 90344;
42783 + 10583 + 10583 + 1095 = 65044;
56207 + 18407 + 18407 + 1834 = 94855;
60478 + 15278 + 15278 + 1532 = 92566.

Bài 4.

V	U	I	Đ	O	N	H	E
E	V	U	I	Đ	O	N	H
H	E	V	U	I	Đ	O	N
N	H	E	V	U	I	Đ	O
O	N	H	E	V	U	I	Đ
Đ	O	N	H	E	V	U	I
I	Đ	O	N	H	E	V	U
U	I	Đ	O	N	H	E	V

Bài 5. Theo giả thiết, tích $\overline{VUIHE}.\overline{abcde}$ có 10 chữ số và các chữ số *V*, a lớn hơn 0.

Ta có

$\overline{VUIHE}.e = \overline{*****E}$ (1),

$\overline{VUIHE}.d = \overline{****H}$ (2),

$\overline{VUIHE}.c = \overline{*****I}$ (3),

$\overline{VUIHE}.b = \overline{****U}$ (4),

$\overline{VUIHE}.a = \overline{****V}$ (5).

Số $\overline{VUIHE}$ có 5 chữ số mà tích trong hai đẳng thức (1), (3) có 6 chữ số nên $e \ge 2$ và $c \ge 2$, mà các chữ số tận cùng của (1), (3) là *E*, *I* khác nhau nên *E* khác 0.

Xét tích số trong (1) có $E.e - E = E(e - 1)$ chia hết cho $10 = 2.5$ mà $e \ge 2$ nên $E \ge 2$. Mỗi chữ số a, b, c, d, e nhân với *E* cho các chữ số tận cùng *V*, *U*, *I*, *H*, *E* khác nhau nên a, b, c, d, e đều khác nhau và khác 1.

Nếu $E = 5$ thì trong ba chữ số tận cùng *E*, *H*, *I* của *E*.e, *E*.d, *E*.c ở (1), (2), (3) phải có hai chữ số giống nhau, trái giả thiết, suy ra $e - 1 = 5$, hay là $e = 6$. Từ đó xét các chữ số tận cùng của các tích ở (5), (4), (3), (2), (1) ta thấy các chữ số *V*, *U*, *I*, *H*, *E* đều là chữ số chẵn. Từ $a \ge 2$ và tích ở (5) có 5 chữ số suy ra $V < 5$ nên *V* bằng 2 hoặc 4.

\+ Nếu $V = 4$ thì từ (2), (4), (5) suy ra các chữ số a, b, d đều nhỏ hơn 3 và khác 1, tức là chỉ lấy 2 giá trị 0 và 2, điều này không xảy ra, nên $V = 2$.

\+ Với $V = 2$ thì do tích trong (3) có 6 chữ số nên $c \ge 4$ (6), do tích trong (5), (4), (2) có 5 chữ số, bằng số chữ số của $\overline{VUIHE}$ nên các chữ số a, b, d đều nhỏ hơn 5, tức là $2 \le a \le 4$ và b, d chỉ lấy các giá trị 0, 2, 3, 4 (7).

a) Nếu $a = 2$ thì tích $\overline{2UIHE}.\overline{2bcde} < 30000.30000 = 9.10^8$ chỉ có 9 chữ số.

b) Nếu $a = 3$ thì từ (5) tích $3.E$ có tận cùng là $V = 2$ nên $E = 4$. Nếu $b = 0$ thì $\overline{28IHE}.\overline{30cd6} < 29000.31000 < 10^9$ (loại).

- Nếu $b = 2$ thì từ (4) tích $2.E = 2.4 = 8 = U$, lúc đó $\overline{28IH4}.\overline{32cd6} < 28700.33000 < 10^9$ (loại).
- Nếu $b = 4$ thì từ (4) tích $2.E = 4.4 = 16$ nên $U = 6$, lúc đó $\overline{26IH4}.\overline{34cd6} < 26900.35000 < 10^9$ (loại).

c) Nếu $a = 4$ thì từ (5) tích $4.E$ có tận cùng là $V = 2$ nên $E = 8$, đồng thời b khác 4.

- Nếu $b = 0$ thì từ (4) tích $2.E = 0 = U$, lúc đó $\overline{20IHE}.\overline{40cd6} < 21000.41000 < 10^9$ (loại).
- Nếu $b = 2$ thì từ (4) tích $2.E = 2.8 = 16$ nên $U = 6$, lúc đó $\overline{VUIHE}$ bằng 26048 hoặc 26408.

+ Với $\overline{VUIHE} = 26048$, cùng với (6), (7) suy ra $c = 5$, $d = 3$, ta có $\overline{VUIHE}.\overline{abcde} = 26048.42536 = 1107977728$, thỏa mãn giả thiết.

+ Với $\overline{VUIHE} = 26408$, cùng với (6), (7) suy ra $c = 8$, $d = 0$, ta có $\overline{VUIHE}.\overline{abcde} = 26408.42806 = 1130420848$, thỏa mãn giả thiết.

- Nếu $b = 3$ thì từ (4) tích $3.E = 3.8 = 24$ nên $U = 4$, lúc đó $\overline{VUIHE}$ bằng 24068 hoặc 24608.

+ Với $\overline{VUIHE} = 24068$, cùng với (6), (7) suy ra $c = 5$, $d = 2$, ta có $\overline{VUIHE}.\overline{abcde} = 24068.43526 = 1047583768$, thỏa mãn giả thiết.

+ Với $\overline{VUIHE} = 24608$, cùng với (6), (7) suy ra $c = 7$, $d = 0$, ta có $\overline{VUIHE}.\overline{abcde} = 24608.43706 = 1075517248$, thỏa mãn giả thiết.

Vậy bài toán có 4 nghiệm.

Bài 6.

$$
\begin{array}{lr}
 & \text{T H R E E} \\
+ & \text{T H R E E} \\
 & \text{T H R E E} \\
 & \text{E L E V E N} \\
\hline
 & \text{T W E N T Y} \\
\text{Cột} & 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1
\end{array}
$$

Ta kí hiệu số hàng chục của cột thứ j $(1 \le j \le 5)$ là n_j và số đó được nhớ ở cột $j + 1$. Dễ thấy tổng có 4 số hạng nên $0 \le n_j \le 3$ với mọi j. Từ giả thiết đề bài có các đẳng thức và bất đẳng thức sau.

$3E \le 3E + N = 10n_1 + Y$ (1)

$4E \le 4E + n_1 = 10n_2 + T$ (2)

$3R + V + n_2 = 10n_3 + N$ (3)

$3H + n_3 = 10n_4$ (4)

$3T + L + n_4 = 10n_5 + W$ (5)

$E + 1 \le E + n_5 = T \le E + 3$ (6)

Xét các trường hợp sau xuất phát từ (6) đối với E và T.

1. Với $E = 1$ thì $2 \le T \le 4$, từ (1) có $10n_1 + Y = 3 + N \le 12$ nên $n_1 \le 1$. Từ (2) có $4 \le 10n_2 + T = 4 + n_1 \le 5$ nên $T = 4$, $n_1 = n_2 = 0$, $n_5 = 3$, từ (5) có $12 + L + n_4 = 30 + W$, hay $L + n_4 = 18 + W$ (loại).

2. Với $E = 2$ thì $3 \le T \le 5$, từ (1) có $10n_1 + Y = 6 + N \le 15$ nên $n_1 \le 1$. Từ (2) có $9 \le 10n_2 + T = 9 + n_1 \le 10$ (loại).

3. Với $E = 3$ thì $4 \le T \le 6$, từ (1) có $10n_1 + Y = 12 + N \le 19$ nên $n_1 \le 1$. Từ (2) có $12 \le 10n_2 + T = 12 + n_1 \le 13$ (loại).

4. Với $E = 4$ thì $5 \le T \le 7$, từ (1) có $10n_1 + Y = 12 + N$ nên $n_1 \ge 1$, từ (2) có $17 \le 10n_2 + T = 16 + n_1 \le 19$, nên $T = 7$, $n_1 = n_2 = 1$, $n_5 = 3$ và $Y = 2 + N$ (7). Từ (5) có $21 + L + n_4 = 30 + W$ nên $L \ge 6$. Xét giá trị của L.

a) Nếu $L = 6$ thì từ (5) có $n_4 = 3$, $W = 0$, từ (4) có $3H + n_3 = 30$, suy ra $H = 9$, $n_3 = 3$, từ (3) có $3R + V + 1 = 30 + N$, hay là $3R + V = 29 + N$, suy ra $R = 8$ và $V = 5 + N \ge 6$ (loại).

b) Nếu $L = 8$ thì từ (5) có $21 + 8 + n_4 = 30 + W$

$\Rightarrow n_4 = 1 + W$.

- Cho $n_4 = 1$ thì $W = 0$, từ (4) có $3H + n_3 = 10 \Rightarrow H = 3$, $n_3 = 1$. Từ (7) thì $Y = 4$, $N = 2$. Từ (3) có $3R + V + 1 = 10 + 2 \Rightarrow 3R + V = 11$ (loại).

* Cho $n_4 = 2$ thì $W = 1$, từ (4) có $3H + n_3 = 20$, suy ra $H = 6$, $n_3 = 2$. Từ (7) thì $Y = 4$, $N = 2$, hoặc $Y = 5$, $N = 3$, Từ (3) có $3R + V + 1 = 20 + N$, hay là $3R + V = 19 + N$ (loại).

* Cho $n_4 = 3$ thì $W = 2$, từ (4) có $3H + n_3 = 30$, suy ra $H = 9$, $n_3 = 3$. Từ (7) chỉ có thể $Y = 3$, $N = 1$, hoặc $Y = 5$, $N = 3$, Từ (3) có $3R + V + 1 = 30 + N$ $\Rightarrow 3R + V = 29 + N$ (loại).

c) Nếu $L = 9$ thì từ (5) có $21 + 9 + n_4 = 30 + W$

$\Rightarrow n_4 = W > 0$ do (4) và (3).

* Cho $n_4 = W = 1$, từ (4) có $3H + n_3 = 10 \Rightarrow H = 3$, $n_3 = 1$. Từ (7) chỉ có thể $Y = 4$, $N = 2$, hoặc $Y = 8$, $N = 6$.

Nếu $N = 2$ thì từ (3) có $3R + V + 1 = 10 + 2$ $\Rightarrow 3R + V = 11$ (loại). Nếu $N = 6$ thì từ (3) có $3R + V + 1 = 10 + 6 \Rightarrow 3R + V = 15$, với $R = 5$, $V = 0$ (thỏa mãn).

* Cho $n_4 = W = 2$, từ (4) có $3H + n_3 = 20 \Rightarrow H = 6$, $n_3 = 2$. Từ (7) thì $Y = 3$, $N = 1$, hoặc $Y = 5$, $N = 3$. Từ (3) có $3R + V + 1 = 20 + N \Rightarrow 3R + V = 19 + N$ (loại).

* Cho $n_4 = W = 3$, từ (4) có $3H + n_3 = 30 \Rightarrow H = 9$, $n_3 = 3$. Từ (7) thì $Y = 4$, $N = 2$, hoặc $Y = 8$, $N = 6$. Từ (3) có $3R + V + 1 = 30 + N \Rightarrow 3R + V = 29 + N$ (loại).

5. Với $E = 5$ thì $6 \le T \le 8$, từ (2) có $20 \le 10n_2 + T = 20 + n_1 \le 23$ (loại).

6. Với $E = 6$ thì $7 \le T \le 9$, từ (2) có $24 \le 10n_2 + T = 24 + n_1 \le 27$ nên $T = 7$, $n_1 = 3$, nhưng từ (1) có $30 + Y = 18 + N \le 18 + 9 = 27$ (loại).

7. Với $E \ge 7$ thì $8 \le T \le 9$, từ (1) có $n_1 \ge 2$ và từ (2) có $10n_2 + T \ge 28 + 2 = 30$ (loại).

Vậy bài toán chỉ có một nghiệm là

$73544 + 73544 + 73544 + 494046 = 714678$.

Bài 7. a) $(2 + (0 \times 1) + 7)^2 + (2^2 + 0^2 + 1^2 - 7^2)^2 = 2017$.

b) $(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6) : (5 + 4 + 3 \times 2) + 1 = 2017$ hoặc $(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6) : (5 \times 4 - 3 - 2) + 1 = 2017$.

c) $10 \times 9 \times 8 \times 7 : 6 : 5 \times 4 \times 3 + 2 - 1 = 2017$.

Có thể đặt dấu + hoặc dấu – trước số 0.

Bài 8. Gọi số đo các cạnh của các khối lập phương là m, m và n, theo giả thiết có $2m^3 + n^3 = 2017$ (*).

Ta có $n^3 < 2017$ và $2m^3 < 2017$, suy ra $n \le 12$ và $m \le 10$. Xét hai trường hợp sau.

- TH1. $n < m$ thì $2017 < 3m^3 \Rightarrow 672 < m^3$ $\Rightarrow 8 < m$. Thử với m bằng 9, 10 thì không có số nguyên n thỏa mãn (*).
- TH2. $m < n$ thì $2017 < 3n^3 \Rightarrow 672 < n^3 \Rightarrow 8 < n$. Số n là số lẻ theo (*) nên thử với n bằng 9, 11 thì chỉ có số $n = 11$ thỏa mãn, lúc đó có $7^3 + 7^3 + 11^3 = 2017$.

Bài 9. Ban đầu trên bàn có 1 mảnh giấy. Sau lần cắt thứ nhất có $k = 1 + (k - 1)$ mảnh giấy. Sau mỗi lần cắt một mảnh giấy nào đó thành k mảnh ($k \ge 2$) thì trên bàn thêm k mảnh nhưng bớt đi mảnh đang cắt nên thêm đúng $k - 1$ mảnh. Như vậy sau n lần cắt trên bàn có $1 + (k - 1)n$ mảnh giấy.

Nếu sau lần cắt thứ n có 2017 mảnh giấy thì

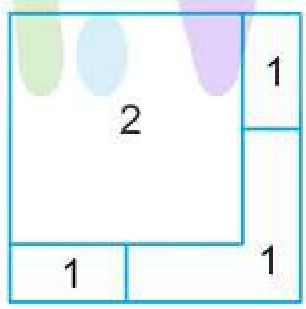
$1 + (k - 1)n = 2017 \Rightarrow (k - 1)n = 2016$.

Do đó $k - 1$ phải là ước số của $2016 = 2^5.3^2.7$.

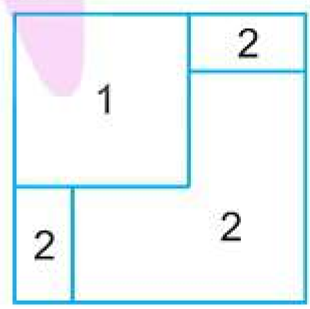
Với $2 \le k - 1 \le 9$ thì $k - 1$ có thể bằng 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, tức là k có thể bằng 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10.

Bài 10. Giả sử số mảnh đa giác bị cắt rời là 3 mảnh. Nếu giữ nguyên hình vuông kích thước 4×4 đặt vào một góc của hình vuông ABCD kích thước 5×5 thì không thể cắt hình vuông kích thước 3×3 thành 2 mảnh để ghép vào phần còn lại của hình vuông ABCD. Nếu giữ nguyên hình vuông kích thước 3×3 đặt vào một góc hoặc đặt vào chính giữa của hình vuông ABCD kích thước 5×5 thì không thể cắt hình vuông kích thước 4×4 thành 2 mảnh để ghép vào phần còn lại của hình vuông ABCD. Vậy số mảnh đa giác bị cắt rời ít nhất phải là 4 mảnh.

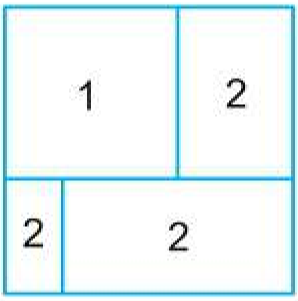
Có nhiều cách cắt. Xin giới thiệu 10 cách cắt sau:



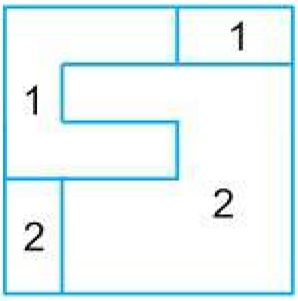
Cách 1



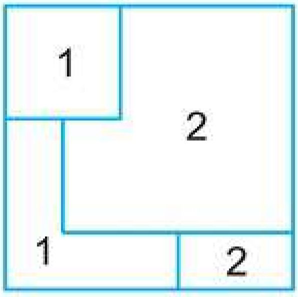
Cách 2



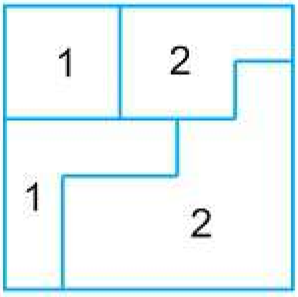
Cách 3



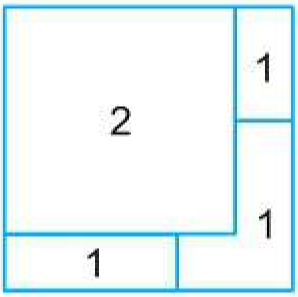
Cách 4



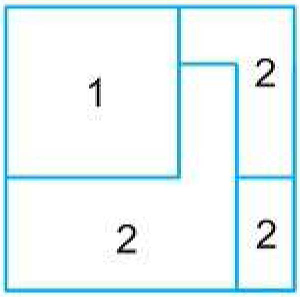
Cách 5



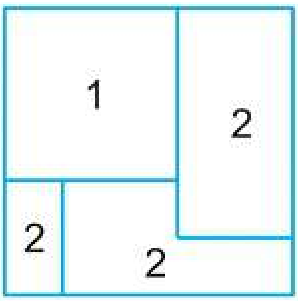
Cách 6



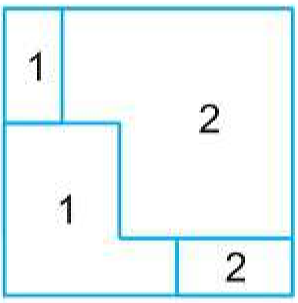
Cách 7



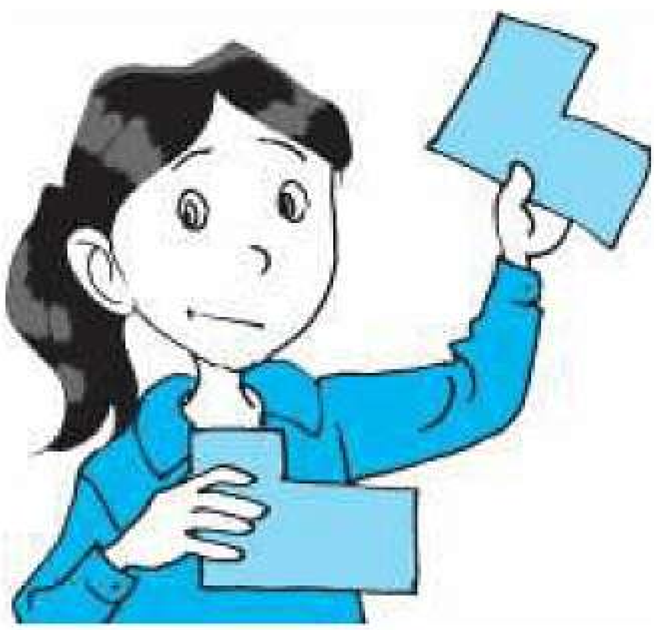
Cách 8



Cách 9



Cách 10



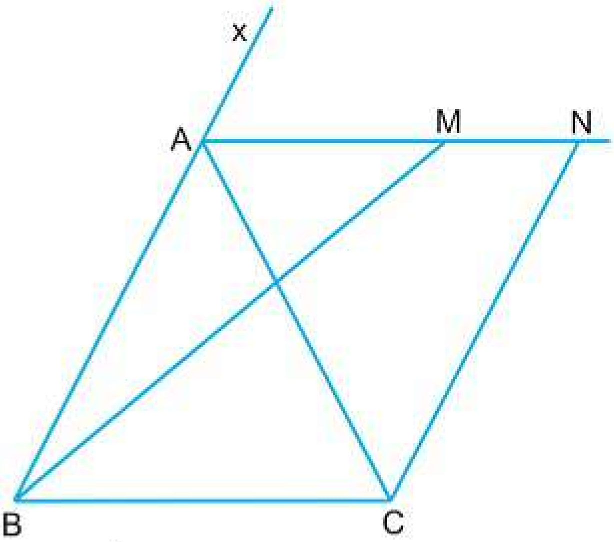
Kết quả (TTT2 số 173+174)

SAI ĐÂU SỬA CHO ĐÚNG?

- Lời giải của học sinh đã đăng mới chỉ xét trường hợp điểm A nằm giữa hai điểm M và N, lúc đó $\widehat{ABM} = \widehat{BCN}$.
- Lời giải chưa đầy đủ vì chưa xét trường hợp hai điểm M, N nằm trên cùng một tia phân giác ngoài của góc A.

Xét điểm M nằm giữa hai điểm A và N như hình vẽ.

Lúc đó tia BM nằm giữa hai tia BA và BC nên $\widehat{ABM} < \widehat{ABC}$.



Tia CA nằm giữa hai tia CB và CN nên $\widehat{ACB} < \widehat{BCN}$.

Tam giác ABC cân tại đỉnh A nên $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$.

Từ các điều trên suy ra

$\widehat{ABM} < \widehat{ABC} = \widehat{ACB} < \widehat{BCN}$, tức là $\widehat{ABM} < \widehat{BCN}$.

Theo đề bài hai điểm M, N có thể đổi vị trí cho nhau khi điểm A nằm ngoài đoạn thẳng MN nhưng chứng minh trên vẫn đúng.

Kết luận. Nếu điểm A nằm giữa hai điểm M và N thì $\widehat{ABM} = \widehat{BCN}$, nếu điểm A nằm ngoài đoạn thẳng MN thì $\widehat{ABM} < \widehat{BCN}$.

Nhận xét. Khi giải các bài toán hình học nhiều lúc chứng minh đúng cho hình vẽ này nhưng lại không đúng cho hình vẽ khác dù vẫn thỏa mãn giả thiết, vì vậy các bạn cần xét đầy đủ vị trí tương đối của các điểm, các đường theo điều kiện của bài toán.

Không có bạn nào giải đúng kì này, phần thưởng xin gác lại kì sau.

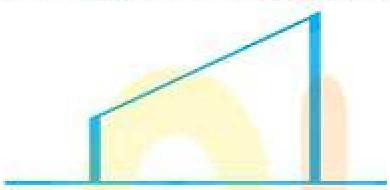
ANH KÍNH LÚP

Tính số đo KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM

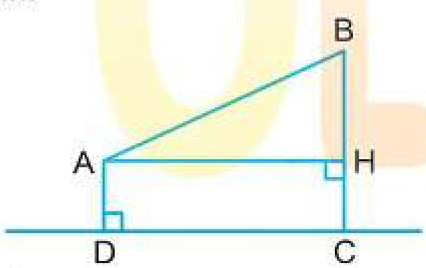
NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Trong thực tế cuộc sống nhiều khi để tìm số đo khoảng cách giữa hai điểm, chúng ta không thể đo đạc trực tiếp được mà cần sử dụng các kiến thức hình học. Đó là định lí Pythagore, định lí Thales, tam giác đồng dạng, tỉ số lượng giác của góc nhọn, ... Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. Ông Hà cần đóng hai chiếc cọc xuống đất và vuông góc với mặt đất sao cho phần cọc nhô lên khỏi mặt đất dài 1 m và 2,5 m (xem hình vẽ). Hỏi ông Hà phải đóng hai chiếc cọc này cách nhau bao nhiêu mét để khoảng cách giữa hai đỉnh của hai chiếc cọc là 3,9 m.



Hướng dẫn.



Gọi các điểm như hình vẽ, kẻ $AH \perp BC$ tại H.

Tứ giác AHCD là hình chữ nhật nên AH = CD, HC = AD = 1 m.

Suy ra BH = BC − HC = 1,5 m.

Vì tam giác HAB vuông tại H nên

$AH^2 + BH^2 = AB^2$ (định lí Pythagore).

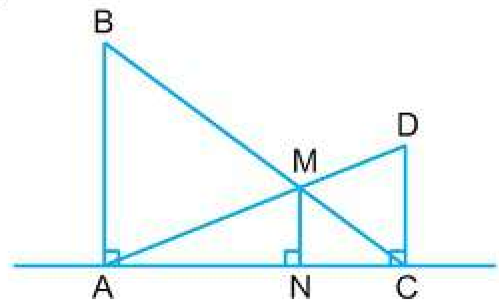
Suy ra $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3{,}9^2 - 1{,}5^2 = 3{,}6^2$.

Do đó AH = 3,6 m.

Vậy ông Hà phải đóng hai chiếc cọc cách nhau 3,6 m.

Bài toán 2. Hai chiếc cọc được đóng vuông góc với mặt đất sao cho phần cọc nhô lên khỏi mặt đất cao 6 m và 3 m (xem hình vẽ). Người ta buộc hai sợi dây từ đỉnh cọc này đến gốc của cọc kia. Gọi M là giao điểm của hai sợi dây. Hỏi khoảng cách giữa hai cây cột là bao nhiêu để khoảng cách từ M đến mặt đất là 2 m.

Hướng dẫn.



Ta có $AB \perp AC, CD \perp AC, MN \perp AC$.

Do đó AB // CD // MN.

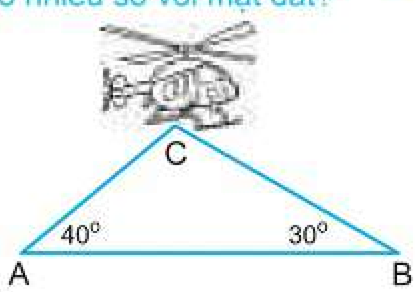
Vì ΔABC có MN // AB nên $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CN}{AC}$.

Vì ΔACD có MN // CD nên $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{AN}{AC}$.

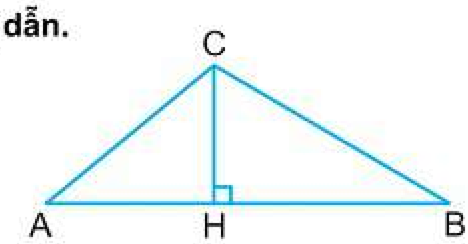
Do đó $\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MN}{CD} = 1 \Rightarrow \dfrac{MN}{6} + \dfrac{MN}{3} = 1$.

Suy ra MN = 2 m, không phụ thuộc vào khoảng cách của hai chiếc cọc.

Bài toán 3. Hai người quan sát ở vị trí A và B cách nhau 300 m, máy bay trực thăng dự định hạ cánh thẳng đứng ở vị trí giữa hai người quan sát (xem hình vẽ). Tại vị trí đó hai người nhìn thấy máy bay với góc nhìn lần lượt là 40° và 30° so với phương nằm ngang. Hỏi hiện tại máy bay đang ở độ cao bao nhiêu so với mặt đất?



Hướng dẫn.



Vẽ $CH \perp AB$ tại H.

Vì tam giác HAC và tam giác HBC vuông tại H nên

$AH = CH.\cot A = CH.\cot 40^o$;

$BH = CH.\cot B = CH.\cot 30^o$.

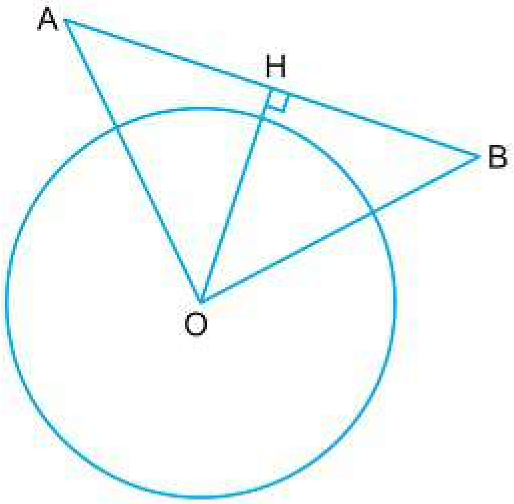
Ta có $AH + BH = AB$

$\Rightarrow CH.\cot 40^o + CH.\cot 30^o = 300$

$\Rightarrow CH(\cot 40^o + \cot 30^o) = 300$

$\Rightarrow CH = \dfrac{300}{\cot 40^o + \cot 30^o} \approx 102,6$ (m).

Bài toán 4. Hai vệ tinh đang bay ở vị trí A và B cách mặt đất 230 km, khoảng cách giữa chúng là 2200 km. Hỏi hai vệ tinh đó có nhìn thấy nhau hay không?



Hướng dẫn. Vẽ $OH \perp AB$ tại H.

Ta có $OB = OA = 230 + 6400 = 6630$ (km).

Vì tam giác OAB cân tại O có đường cao OH nên OH là đường trung tuyến của tam giác.

Do đó $AH = \dfrac{AB}{2} = 1100$ (km).

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông OHA, ta có

$OH^2 + AH^2 = OA^2$

Suy ra

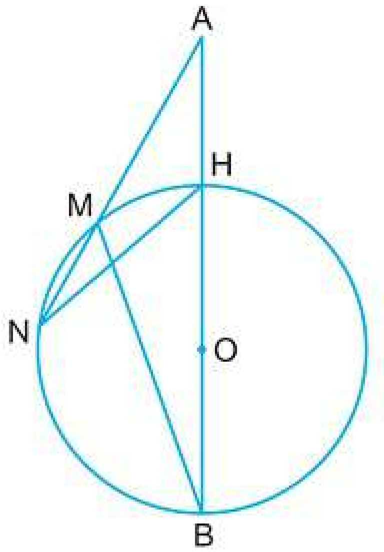
$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 6630^2 - 1100^2 = 42746900$.

Do đó $OH \approx 6538\text{ km} > 6400\text{ km}$ (Vì bán kính trái đất là 6400 km).

Vậy hai vệ tinh đó nhìn thấy nhau.

Bài toán 5. Một vệ tinh địa tĩnh chuyển động theo một quỹ đạo tròn cách bề mặt trái đất một khoảng là 36000 km. Tâm quỹ đạo của vệ tinh trùng với tâm O của trái đất. Vệ tinh phát tín hiệu vô tuyến điện theo một đường thẳng đến một vị trí trên mặt đất. Hỏi vị trí xa nhất trên mặt đất có thể nhận được tín hiệu từ vệ tinh, cách vệ tinh một khoảng bằng bao nhiêu km (ghi kết quả gần đúng chính xác đến hàng đơn vị). Biết rằng trái đất được xem như một quả cầu có bán kính khoảng 6400 km.

Hướng dẫn.



Gọi A là vị trí vệ tinh và M là vị trí trên mặt đất nhận được tín hiệu từ vệ tinh.

Ta có AH = 36000 km, OH = 6400 km.

Gọi B là giao điểm thứ hai khác H của tia AO với đường tròn (O), N là giao điểm thứ hai của tia AM với đường tròn (O) (M thuộc đoạn thẳng AN).

Xét ΔANH và ΔABM có

Chung $\widehat{A}$;

$\widehat{ANH} = \widehat{ABM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MH).

Suy ra $\Delta ANH \backsim \Delta ABM$ (g.g).

Do đó $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AH}{AM} \Rightarrow AM.AN = AH.AB$.

Vì $AB = AH + HB = 36000 + 6400.2 = 48800$ (km) nên $AM.AN = 36000.48800$.

Vì $AM \le AN$ nên

$AM^2 \le AM.AN = 36000.48800$

$\Rightarrow AM \le \sqrt{36000.48800} \approx 41914$ (km).

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv N$ hay AM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Vậy vị trí xa nhất trên trái đất có thể nhận được tín hiệu từ vệ tinh là vị trí cách vệ tinh 41914 km.

Kết quả

Giải toán qua thư

Bài 1(173+174). Ba bạn Hưng, Toàn và Sơn cùng học một lớp mới.

Đề bài

Hưng nói "Tớ nghĩ lớp mình có nhiều hơn 20 bạn".

Toàn thì nói "Tớ nghĩ lớp mình có ít hơn 21 bạn".

Sơn cam đoan "Tớ nghĩ lớp mình có nhiều nhất 22 bạn".

Cuối cùng họ nhận ra chỉ có hai bạn đoán đúng. Vậy ai là người đoán sai?

Lời giải

- Nếu lớp có ít hơn hoặc bằng 20 bạn thì có Toàn và Sơn đoán đúng, còn Hưng đoán sai.
- Nếu lớp có 21 hoặc 22 bạn thì Hưng và Sơn đoán đúng, còn Toàn đoán sai.
- Nếu lớp có nhiều hơn 22 bạn thì Hưng đoán đúng, còn Toàn và Sơn đoán sai.

Vậy bài toán có 2 khả năng xảy ra: hoặc là Hưng đoán sai, hoặc là Toàn đoán sai.

Bài toán này có thể viết lại dưới dạng biểu thức như sau:

Gọi số học sinh trong lớp là x, $x \in \mathbb{N}^*$.

Hưng nói "Tớ nghĩ là lớp mình có nhiều hơn 20 bạn", $x > 20$.

Toàn thì bảo "Tớ nghĩ là lớp mình có ít hơn 21 bạn", $x < 21$.

Sơn cam đoan "Tớ nghĩ là lớp mình có nhiều nhất là 22 bạn", $x \le 22$.

Như vậy ta có thể thấy rõ ràng sẽ có 2 trường hợp xảy ra:

* Với $x \le 20$ thì sẽ có 2 bạn Sơn và Toàn nói đúng, còn Hưng nói sai.

* Với $x = 21$ hoặc $x = 22$ thì sẽ có 2 bạn Hưng và Sơn nói đúng, còn Toàn nói sai.

Nhận xét

Đây là bài toán lôgic hay, yêu cầu cần có suy nghĩ lí luận chính xác và cẩn thận. Nhiều bạn đã thiếu mất đi 1 trường hợp của bài toán.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Tuấn Minh*, 8A1, THCS Nam Hà, Q. Kiến An, **Hải Phòng**; *Nguyễn Trung Kiên*, 7A2, Ngô Gia Đức, 7A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Tạ Kim Nam Tuấn, Nguyễn Ngọc Tuấn Anh*, 6A2, THCS Yên Lac, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Bùi Thu Trang*, 6A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**.

PHÙNG KIM DUNG

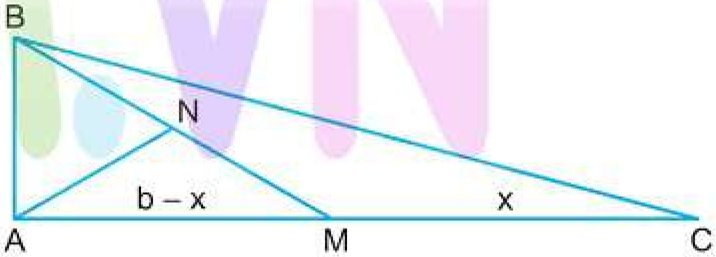
Bài 2(173+174). Cho tam giác ABC vuông tại A với AB < AC. Đặt BC = a, CA = b, AB = c. Giả sử $a^2 = 4bc$. Tính số đo các góc nhọn của tam giác ABC.

Đề bài

Lời giải

Vì AB < AC nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC}$.

Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{MCB}$.



Khi đó tam giác MBC cân tại M. Đặt MB = MC = x thì MA = b – x.

Áp dụng định lý Pytagore vào tam giác vuông ABM ta có

$$c^2 + (b-x)^2 = x^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2bx$$

$$\Rightarrow x = \frac{b^2 + c^2}{2b} = \frac{a^2}{2b} = \frac{4bc}{2b} = 2c.$$

Do đó MB = 2AB. (1)

Trên BM lấy điểm N sao cho $\widehat{NAB} = \widehat{NBA}$.

Suy ra tam giác NAB cân tại N $\Rightarrow$ NA = NB.

Mặt khác $\widehat{ABN} + \widehat{NMA} = 90^o = \widehat{BAN} + \widehat{NAM}$

$\Rightarrow \widehat{NMA} = \widehat{NMA}$, suy ra ΔNAM cân tại N.

Do đó NA = NM.

Từ (1) có NA = NB = AB (= NM), suy ra ΔABN đều.

Do đó $\widehat{ABN} = 60^o \Rightarrow \widehat{AMN} = 30^o$.

Do đó $\widehat{ACB} = 15^o$; $\widehat{ABC} = 75^o$.

Nhận xét Các bạn sau có lời giải đúng được khen kì này: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Tuấn Dương*, 7B5, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng**; *Hà Minh Hiếu*, 7F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.

HỒ QUANG VINH

Đề bài **Bài 3(173+174).** Không sử dụng máy tính, hãy so sánh A và B:

$$A = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}; B = \frac{1}{2009} + \frac{1}{1007}.$$

Lời giải

Ta có

$$A - B = \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2009} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2014}$$

$$= \frac{1}{2011} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2009}$$

$$= \frac{3}{2011.2014} + \frac{2}{2012.2014} - \frac{1}{2010.2009}.$$

Mặt khác ta có

$$\frac{3}{2011.2014} + \frac{2}{2012.2014} > \frac{2}{2012.2014} + \frac{2}{2012.2014}$$

$$= \frac{4}{2012.2014}.$$

Mà $\frac{4}{2012.2014} > \frac{4}{4018.4020} = \frac{1}{2009.2010}$.

Từ đó $A - B > 0$.

Vậy suy ra $A > B$.

Nhận xét Nhiều bạn tham gia giải bài, tuy nhiên cách biến đổi hơi dài. Những bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn: *Nguyễn Ngọc Tuấn*; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Quang Minh*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Phan Khánh An*; *Đinh Xuân Linh*, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Quang Đức*; *Lê Minh Long*, 7B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Trần Thị Yến Khanh*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

VŨ THỊ MAI

Đề bài **Bài 4(173+174).** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \geq \sqrt[3]{2}$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2z^3} + \sqrt[3]{y^3 + z^3 + 2x^3} + \sqrt[3]{z^3 + x^3 + 2y^3}.$$

Lời giải

Với $a, b > 0$ thì

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}. (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta được

$$x^3 + y^3 + 2z^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4} + \frac{(2z)^3}{4} \geq \frac{(x+y+2z)^3}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2z^3} \geq \frac{x+y+2z}{2\sqrt[3]{2}}. (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt[3]{y^3 + z^3 + 2x^3} \geq \frac{y+z+2x}{2\sqrt[3]{2}}. (3)$$

$$\sqrt[3]{z^3 + x^3 + 2y^3} \geq \frac{z+x+2y}{2\sqrt[3]{2}}. (4)$$

Do đó $P \geq \frac{4(x+y+z)}{2\sqrt[3]{2}} \geq \frac{4\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = 2$.

Vậy $MinP = 2$ khi $x = y = z = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

Nhận xét Có nhiều bạn tham gia giải bài. Một số bạn biến đổi dài mới đi đến kết quả. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Dương Minh Quang Huy*, 9G, *Nguyễn Ngọc Hiển*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Cao Thị Khánh Linh*, *Trần Đức Tùng*, 8B, *Lê Thị Hằng Nhi*, 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Công Khải*, 8A3, *Nguyễn Đức Tân*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, THCS Yên Phong; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị Trấn Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Hải Sơn*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**.

CAO VĂN DŨNG

Đề bài **Bài 5(173+174).**

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}5x^2+2y^2+2xy=26\ (1)\\3x+(2x+y)(x-y)=11\ (2)\end{cases}$$

Lời giải

Ta có

$(2)\Leftrightarrow 2x^2+3x-xy-y^2=11$

$\Leftrightarrow 4x^2+6x-2xy-2y^2=22.\ (3)$

Cộng theo vế của (1) và (3) ta được

$$9x^2+6x=48\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\dfrac{8}{3}.\end{array}\right.$$

- Với $x=2$ thay vào (1) ta được

$$y^2+2y-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-3\\y=1.\end{array}\right.$$

- Với $x=-\dfrac{8}{3}$ thay vào (1) ta được

$\left(y-\dfrac{4}{3}\right)^2+3=0$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm

$(x;y)=(2;1),(2;-3)$.

Nhận xét Một số bạn sử dụng phương pháp đặt $a=2x+y$; $b=x-y$ sau đó biến đổi và đặt tiếp $S=a+b; P=ab$ cũng ra kết quả đúng.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Trung Phúc Linh*, 9E; *Nguyễn Ngọc Hiển*, 9D; *Dương Minh Quang Huy*, 9G; *Hoàng Nghĩa Hiệp*, 9A THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Lê Văn Mạnh*, *Lê Văn Quang Trung*, *Lê Quang Huy*, 8B, *Hoàng Mạnh Nghĩa*, *Nguyễn Sỹ Trọng*, *Lê Đình Tú*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Nguyễn Đức Tân*, 9A3; *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Thị Hằng Nhi*, *Nguyễn An Na*, 9A, *Nguyễn Trí Dũng*, 8B, *Trần Đình Hoàng*, 8C, *Nguyễn Hưng Phát*, 8B THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Minh Hiếu*, 7F, *Hà Minh Tuấn*, 8F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Đức Minh*, *Ngô Văn Tuân*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; *Đặng Thị Hiền*, 8A, THCS Yên Phụ; *Nguyễn Mạnh Kiên*, *Trần Quang Tài*, *Nguyễn Duy Bảo*, 9A1, *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, *Trịnh Văn Dương*, 8A1, THCS Yên Phong; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; *Nguyễn Đức Sơn*, *Nguyễn Minh Huế*, *Phan Đình Trường*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình, **Bắc Ninh**.

LÊ ĐỨC THUẬN

Đề bài **Bài 6(173+174).**

Giải phương trình nghiệm nguyên

$m(m+1)(m+2)(m+3)=n^3(n+2).\ (1)$

Lời giải

Chú ý. *Khi chia 4 số nguyên liên tiếp cho 4 thì được 4 số dư khác nhau nên tồn tại số dư bằng 0, do đó tích của 4 số nguyên liên tiếp $m(m+1)(m+2)(m+3)$ chia hết cho 4.*

Xét các trường hợp sau đối với n.

- Với $n=0$ hoặc $n=-2$ thì vế phải của (1) bằng 0 nên $m(m+1)(m+2)(m+3)=0$, phương trình này có nghiệm m bằng $0, -1, -2, -3$.

- Với $n=1$ thì (1) trở thành

$m(m+1)(m+2)(m+3)=3.\ (2)$

Theo chú ý trên thì phương trình (2) không có nghiệm nguyên.

- Với $n=-1$ thì (1) trở thành

$m(m+1)(m+2)(m+3)=-1.\ (3)$

Theo chú ý trên thì phương trình (3) không có nghiệm nguyên.

- Với $n\ge 2$ hoặc $n\le -3$ thì $n^2>1$ và $n(n+2)>0$.

Ta có $m(m+1)(m+2)(m+3)=(m^2+3m)(m^2+3m+2)=(m^2+3m+1)^2-1$ nên (1) trở thành

$(m^2+3m+1)^2=n^4+2n^3+1.\ (4)$

Ta luôn có

$n^4+2n^3+1<n^4+2n^3+n^2=(n^2+n)^2;$

$n^4+2n^3+1>n^4+2n^3+1-n(n+2)=(n^2+n-1)^2.$

Suy ra $(n^2+n-1)^2<n^4+2n^3+1<(n^2+n)^2$.

Mà $(n^2+n-1)^2$ và $(n^2+n)^2$ là hai số chính phương liên tiếp nên n^4+2n^3+1 không thể là số chính phương, do đó phương trình (4) không có nghiệm nguyên.

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(m; n)$ là $(0; 0), (-1; 0), (-2; 0), (-3; 0), (0; -2), (-1; -2), (-2; -2), (-3; -2)$.

Có thể sử dụng (4) để xét các trường hợp $n=1$ và $n=-1$ như sau:

- Với $n = 1$ thì $(m^2 + 3m + 1)^2 = 4$, suy ra $m(m + 3)$ bằng $1 = 1.1 = (-1)(-1)$ hoặc bằng $-3 = 1.(-3) = 3(-1)$, nhưng không tồn tại số nguyên m như thế.
- Với $n = -1$ thì (1) trở thành $(m^2 + 3m + 1)^2 = 0$, suy ra $m(m + 3)$ bằng $-1 = 1(-1) = (-1)1$, nhưng không tồn tại số nguyên m như thế.

Nhận xét Một số bạn khi xét các phương trình (2) và (3) đã không giải thích chi tiết mà chỉ khẳng định *vô lí* hoặc *vô nghĩa* là chưa đầy đủ, hơn nữa khi giải phương trình thì chỉ nói là vô nghiệm (không tồn tại số thỏa mãn phương trình), chứ phương trình cần giải luôn *có lí* và *có nghĩa*.

Các bạn sau có lời giải đúng: *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Văn Mạnh*, *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Đề bài **Bài 7(173+174).** Giải phương trình

$$2018x^4 + x^4\sqrt{x^2+2018} + x^2 = 2017.2018.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4\left(\sqrt{x^2+2018}+2018\right)+x^2+2018-2018^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^4\left(\sqrt{x^2+2018}+2018\right)$$
$$+\left(\sqrt{x^2+2018}+2018\right)\left(\sqrt{x^2+2018}-2018\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+2018}+2018\right)\left(x^4+\sqrt{x^2+2018}-2018\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+\sqrt{x^2+2018}-2018=0$$

(vì $\sqrt{x^2+2018}+2018>0, \forall x$)

$$\Leftrightarrow x^4+x^2+\frac{1}{4}=x^2+2018-\sqrt{x^2+2018}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+2018}-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}=\sqrt{x^2+2018}-\frac{1}{2}$$

(vì $x^2+\frac{1}{2}>0, \forall x$ và $\sqrt{x^2+2018}-\frac{1}{2}>0, \forall x$)

$$\Leftrightarrow x^2-\sqrt{x^2+2018}+1=0. \ (1)$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+2018}\ge\sqrt{2018}$ thì (1) trở thành

$$t^2-t-2017=0\Leftrightarrow t=\frac{1+\sqrt{8069}}{2} \text{ (vì } t>0)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2018}=\frac{1+\sqrt{8069}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2018=\frac{4035+\sqrt{8069}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{8069}}}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là:

$$S=\left\{\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{8069}}}{2}\right\}.$$

Nhận xét Cách giải trên đưa về dạng phương trình tích và sử dụng công thức $A^2=B^2\Leftrightarrow A=\pm B$.

Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, *Nguyễn Mạnh Kiên, Trần Quang Tài, Nguyễn Tiến Phong*, 9A1, THCS Yên Phong, *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Hải Sơn*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Đào Nhân Độ, Nguyễn Công Hải, Vũ Minh Khải*, 8A3, *Triệu Hồng Ngọc, Nguyễn Đức Tân*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Trung Kiên*, 9B, *Nguyễn Ngọc Hiển*, 9D, *Nguyễn Trung Phúc Anh*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Nguyễn Thị Linh Đan*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN HIỆP

Đề bài **Bài 8(173+174).** Có năm đống sỏi, số viên sỏi trong mỗi đống lần lượt là 41, 35, 37, 38 và 39. Ta thực hiện trò chơi như sau: Chọn tùy ý bốn đống sỏi, mỗi đống lấy ra a viên sỏi ($a\in\mathbb{N}^*$) và bỏ vào đống sỏi còn lại. Tiếp tục chọn bốn đống sỏi tùy ý, mỗi đống lấy ra b viên sỏi ($b\in\mathbb{N}^*$, b có thể khác a) và bỏ vào đống sỏi còn lại, ... cứ tiếp tục như thế. Hỏi sau một số lần thực hiện trò chơi như trên chúng ta có thể làm cho số sỏi ở cả năm đống bằng nhau hay không?

Lời giải Gọi các đống sỏi có 41, 35, 37, 38, 39 viên sỏi lần lượt là Đ1, Đ2, Đ3, Đ4, Đ5. Đầu tiên ta thấy số dư khi chia số viên sỏi của Đ1, Đ2, Đ3, Đ4, Đ5 cho 5 lần lượt là 1, 0, 2, 3, 4 (năm số dư phân biệt).

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng sau mỗi lần biến đổi thì số sỏi của cả 5 đống khi chia cho 5 vẫn có 5 số dư phân biệt.

Thật vậy, gọi số sỏi của Đ1, Đ2, Đ3, Đ4, Đ5 sau lần biến đổi thứ n lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 và 5 số này có số dư khác nhau khi chia cho 5. Trong lần biến đổi thứ n + 1, không mất tính tổng quát, giả sử trong mỗi đống sỏi Đ2, Đ3, Đ4, Đ5, ta lấy ra a viên sỏi (với $a \in \mathbb{N}^*$), được $4a$ viên sỏi và cho $4a$ viên sỏi đó vào đống sỏi Đ1. Ta thấy các số $x_1 - a$, $x_2 - a$, $x_3 - a$, $x_4 - a$, $x_5 - a$ khi chia cho 5 có số dư khác nhau.

Chú ý rằng $x_1 + 4a = (x_1 - a) + 5a$, do đó $x_1 + 4a$, $x_2 - a$, $x_3 - a$, $x_4 - a$, $x_5 - a$ khi chia cho 5 có số dư khác nhau. Như vậy sau lần biến đổi thứ n + 1, số sỏi của cả 5 đống khi chia cho 5 vẫn có số dư khác nhau.

Theo phương pháp quy nạp toán học, dù thực hiện bao nhiêu lần đi chăng nữa thì số dư khi chia số viên sỏi của Đ1, Đ2, Đ3, Đ4, Đ5 cho 5 vẫn khác nhau.

Vậy với cách biến đổi đã cho ở đề bài, chúng ta không thể nào làm cho số sỏi trong năm đống bằng nhau.

Nhận xét Đây là một bài toán tổ hợp sử dụng yếu tố bất biến, cụ thể *yếu tố bất biến* ở bài toán này là số dư khác nhau khi chia cho 5. Đối với các bài toán dạng tương tự, chú ý rằng yếu tố bất biến có thể là bất biến hình học, bất biến đẳng thức đại số, ...

Trong các bạn có lời giải đúng, có một bạn quên ghi tên.

Các bạn có lời giải đúng: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Bá Cầm*, 9H, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Trần Quang Tài*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

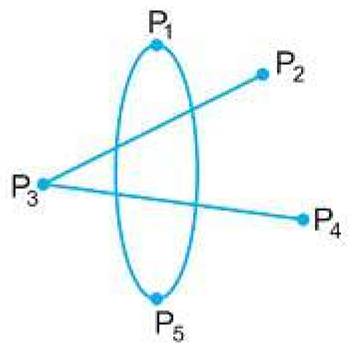
Đề bài **Bài 9(173+174).** Hãy vẽ một biểu đồ thể hiện mỗi đa đồ thị vô hướng G(V, E), trong đó $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ và

a) $E = [\{P_1, P_5\}, \{P_3, P_4\}, \{P_2, P_3\}, \{P_5, P_1\}]$;

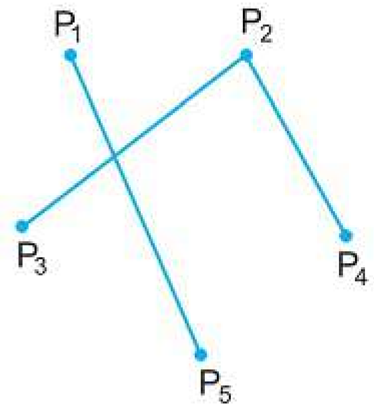
b) $E = [\{P_2, P_3\}, \{P_2, P_4\}, \{P_1, P_5\}]$.

Lời giải

a)



b)



Nhận xét Các bạn sau có đáp án đúng được khen kì này: *Nguyễn Bá Cầm*, 9H, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Đức Tân*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Đề bài **Bài 10(173+174).** Cho tam giác ABC không cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A, gọi M là trung điểm của BC. Qua M kẻ đường thẳng song song với AD, đường thẳng này cắt cung BC (không chứa D) tại I. Tia DI cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E, F. Chứng minh rằng I là trung điểm của EF.

Lời giải Không mất tính tổng quát giả sử AB < AC. Gọi K là điểm đối xứng của B qua I.

Ta có AD // IM // KC. (1)

Vì D là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) nên $\widehat{BID} = \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{FCK}$.

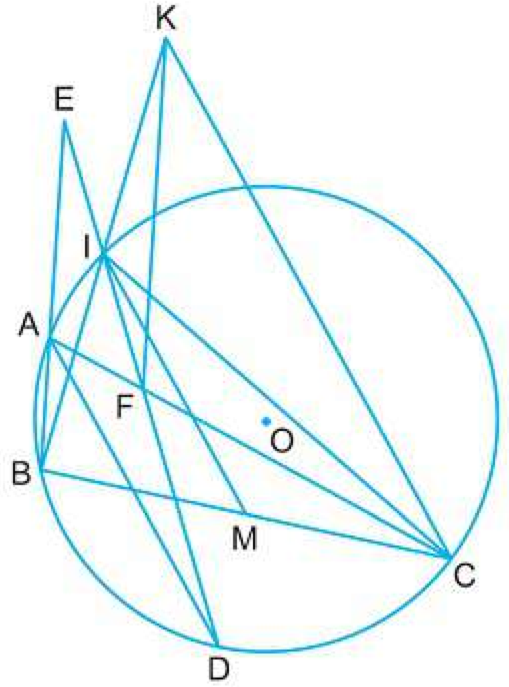
Do đó tứ giác CFIK nội tiếp.

Suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{ACI} = \widehat{FCI} = \widehat{FKI}$.

Do đó BE // KF.

Theo định lí Thales ta có $\frac{IE}{IF} = \frac{IB}{IK} = 1 \Rightarrow IE = IF$.

Vậy I là trung điểm của EF.



Nhận xét Chỉ có một bạn có lời giải đúng, đó là: *Ngô Văn Tuân*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

NGUYỄN MINH HÀ

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Vũ Hải Sơn, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Trần Quang Tài, Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, THCS Yên Phong; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; *Ngô Văn Tuân*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh, **Bắc Ninh**; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Bùi Thu Trang*, 6A5, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Hà Minh Hiếu*, 7F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Lê Thị Hằng Nhi*, 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Dương Minh Quang Huy*, 9G, *Nguyễn Ngọc Hiển*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Đức Tân*, 9A3; *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

Kết quả HỌC TOÁN BẰNG TIẾNG ANH

Các số nguyên (TTT2 số 173 +174)

Tổng của 2 số nguyên không âm luôn là một số nguyên không âm. Tập hợp các số nguyên không âm đóng kín đối với phép cộng, nhưng điều này có đúng đối với phép trừ không? Khi chúng ta lấy 4 trừ đi 9 ta sẽ được gì? Kết quả là –5, đó không phải là một số nguyên không âm. Vì vậy ta mở rộng tập hợp các số nguyên không âm và bao gồm cả số nguyên âm nữa. Tập hợp mới này bao gồm các số nguyên không âm và các số nguyên âm được gọi là tập hợp số nguyên.

Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ (hoặc I) = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}.

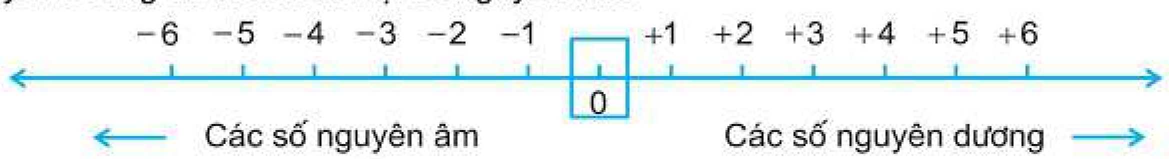
Các số +1, +2, +3, ... được gọi là các số nguyên dương. Các số –1, –2, –3, ... được gọi là các số nguyên âm. Số 0 không phải là số âm cũng không phải là số dương.

Với mỗi số nguyên dương +a đều tồn tại một số đối được gọi là âm của a, được biểu diễn bằng –a.

Tổng của một số nguyên bất kì và âm của nó luôn bằng 0, nghĩa là: a + (–a) = 0.

Để cho đơn giản ta bỏ dấu + và viết a thay cho +a, ở đây a là một số nguyên dương.

Mọi số nguyên dương đều lớn hơn mọi số nguyên âm.



Mỗi số nguyên dương thì lớn hơn mỗi số nguyên âm.

Số 0 bé hơn mỗi số nguyên dương. Số 0 lớn hơn mỗi số nguyên âm.

Các bạn sau được thưởng kì này: *Nguyễn Thị Quỳnh Phương*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Đặng Anh Quế*, 7A5, THCS Cầu Giấy, Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Nguyễn Yến Nhi*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Cao Thị Khánh Linh*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Vũ Duy Linh*, 8A6, THCS Hồng Bàng, TP. Hải Phòng, **Hải Phòng**.

MAI VŨ

Vài kinh nghiệm dạy toán

PHÁT TRIỂN TƯ DUY CHO ĐỐI TƯỢNG LỚP 6

NGUYỄN THỊ BÍNH *(Hà Nội)*

(Đăng tiếp TTT2 số 173 + 174)

Bài toán được phát triển tiếp như sau

Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $A = \dfrac{8n+193}{4n+3}$ có giá trị là số tự nhiên.

Lời giải. Ta có

$$\frac{8n+193}{4n+3} = \frac{8n+6+187}{4n+3} = \frac{2(4n+3)+187}{4n+3}.$$

ƯCLN(8n + 193; 4n + 3) = ƯCLN(187; 4n + 3).

$A \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 4n + 3 \in Ư(187)$ mà $4n + 3 \geq 3$.

$\Rightarrow 4n + 3 \in \{11; 17; 187\} \Rightarrow n \in \{2; 46\}$.

Bằng cách giải quyết như trên, HS đã có thể nắm được bản chất vấn đề của 3 loại toán về phân số:

1. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để một phân số là tối giản (hoặc chứng minh 1 phân số là tối giản).

2. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để một phân số rút gọn được (hay phân số rút gọn được cho những số tự nhiên nào?).

3. Tìm $n \in \mathbb{N}$ để một phân số có giá trị là số tự nhiên.

Kĩ năng biến đổi những bài toán này còn giúp HS giải quyết tốt những bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một phân số. Ta đã có nền móng để đào sâu thêm suy nghĩ của học sinh trong bài tập.

Tìm giá trị lớn nhất của phân số $B = \dfrac{n+9}{n-6}$.

Ta có $B = \dfrac{n-6+15}{n-6} = 1 + \dfrac{15}{n-6}$.

B đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow n - 6$ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0.

Suy ra $n - 6 = 1 \Rightarrow n = 7$.

Vậy $\max B = 1 + \dfrac{15}{1} = 16$ khi $n = 7$.

GV nên cho HS biết rằng đây là loại bài toán được coi là khó (ngay cả khi học đến lớp 9) nhưng ta vẫn làm được, mà chỉ dựa vào một vài tính chất của phép cộng, phép chia phân số. Khi hiểu rồi bài toán trở nên dễ dàng hơn.

Bây giờ HS đã có thể tự giải được bài toán tổng hợp sau

Bài 1. Tìm các số tự nhiên n để phân số $P = \dfrac{6n+67}{3n+1}$

a) Có giá trị là số tự nhiên;

b) Là phân số tối giản;

c) Rút gọn được.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của phân số

a) $\dfrac{\overline{ab}}{a+b}$; b) $\dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}$.

III. Nhìn các bài toán tương tự một cách bản chất

Xin nêu một khía cạnh nữa của vấn đề. Đó là dạy học sinh biết đào sâu suy nghĩ, tương tự hóa vấn đề thông qua việc tập cho các em cách nhìn cấu trúc vấn đề mình đang nghiên cứu.

Lấy bài "toán chuyển động" ở lớp 6 làm ví dụ. Học sinh đều biết cần giải một bài toán chuyển động cùng chiều làm thế nào, ngược chiều làm thế nào. Khi học sinh nắm tốt bản chất vấn đề là gì rồi, ta cho làm các bài tập sau:

Bài 3. Vòi nước thứ nhất chảy một mình 15 giờ đầy bể, vòi nước thứ hai chảy một mình 18 giờ đầy bể. Người ta mở vòi nước thứ nhất 4 giờ sau đó mở vòi thứ hai cùng chảy đến khi đầy bể. Hỏi thời gian vòi thứ hai chảy là bao lâu?

Phân tích bài toán, ta thấy nó hoàn toàn tương tự bài toán chuyển động ngược chiều sau:

Hai người đi quãng đường AB, người thứ nhất cần 15 giờ, người thứ hai cần 18 giờ để đi hết quãng đường AB. Sau khi người thứ nhất đi từ A được 4 giờ thì người thứ hai bắt đầu đi ngược chiều từ B đến khi gặp người thứ nhất thì dừng. Hỏi người thứ hai đi trong mấy giờ?

Với cách nhìn nhận như thế, học sinh đã có thể dễ dàng giải được bài toán "vòi nước chảy" này, vì việc giải bài toán chuyển động trên là bài cơ bản.

Cũng với ý nghĩa như trên, ta cho học sinh làm bài toán khó hơn.

Bài 4. Có 2 vòi nước: vòi 1 chảy vào, vòi 2 chảy ra (được lắp ở đáy bể). Nếu khóa vòi 2 thì vòi 1 chảy đầy bể sau 15 giờ. Nếu khóa vòi 1 thì vòi 2 sẽ làm cạn bể đầy nước sau 20 giờ. Hỏi nếu đồng thời mở cả 2 vòi thì sau bao lâu bể sẽ đầy?

Nhận xét. Thực ra đây chính là bài toán anh em ruột với bài toán "đuổi kịp nhau" sau: "Hai người đi trên quãng đường AB, người thứ nhất đi hết quãng đường trong 15 giờ, người thứ hai hết quãng đường trong 20 giờ. Họ cùng khởi hành từ A. Hỏi sau bao lâu họ gặp nhau ở B".

Ta tính được $t = \dfrac{1}{\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{20}} = 1 : \dfrac{1}{60} = 60$ (giờ).

Hãy giúp học sinh khai thác tiếp vấn đề: Nếu có 3 vòi cùng chảy vào hoặc 2 vòi chảy vào, 1 vòi chảy ra thì sao?

Vẫn làm được! Học trò sẽ tin và trả lời như thế. Vậy thì hãy tự nghĩ ra đề toán phức tạp hơn rồi giải.

Thầy có thể "ngẫu hứng" sáng tác ngay một bài như sau:

Bài 5. Có 3 vòi nước: Vòi 1, vòi 2 chảy vào 1 bể, vòi 3 (đặt ở đáy bể) chảy ra. Vòi 1 chảy một mình đầy bể trong 15 giờ, vòi 2 chảy một mình đầy bể trong 20 giờ, vòi 3 chảy ra một mình thì làm cạn một bể đầy trong 30 giờ. Lúc đầu người ta mở cả 3 vòi chảy trong 3 giờ. Sau đó khóa vòi 1, cho vòi 2 và 3 cùng chảy trong 2 giờ nữa. Cuối cùng khóa vòi 2, cho vòi 1 và 3 cùng chảy cho đến khi đầy bể. Hỏi phải bơm bao lâu mới đầy bể?

Các phép tính cơ bản là

$\dfrac{3}{15} + \dfrac{3}{20} - \dfrac{3}{30} = \dfrac{15}{60}$.

$\dfrac{2}{20} - \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{30}$.

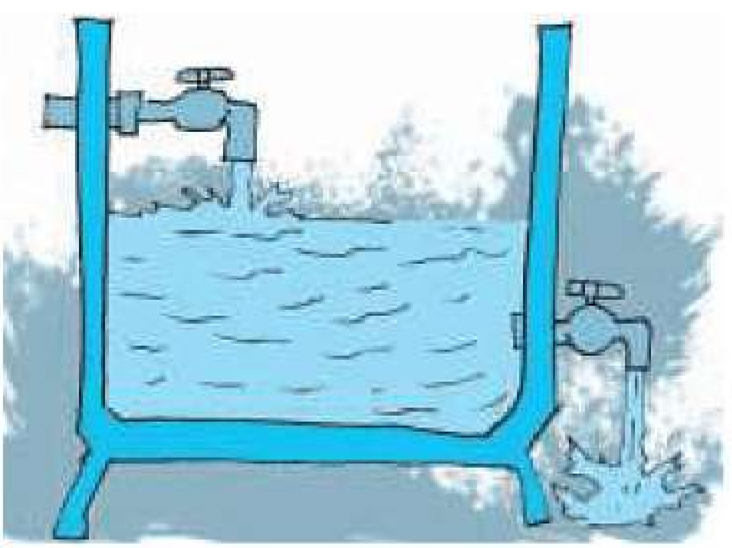
$1 - \left(\dfrac{15}{60} + \dfrac{2}{60}\right) = \dfrac{43}{60}$.

$\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{30}$.

$\dfrac{43}{60} : \dfrac{1}{30} = \dfrac{43}{2} = 21\dfrac{1}{2}$.

Đáp số: $3 + 2 + 21\dfrac{1}{2} = 26\dfrac{1}{2}$ (giờ).

Kết luận. Như khi đặt vấn đề đã nêu, gần như bài nào, người thầy cũng có thể khai thác khéo léo để gây hứng thú cho học sinh. Tôi đã cố gắng áp dụng như vậy trong quá trình dạy học. Trên đây chỉ là một vài vấn đề của toán lớp 6. Thực tế cho thấy học sinh nắm bài tốt và rất thích những giờ học như vậy.



63 ô cửa

*LTS: Từ số 1/9 của năm học 2017 - 2018, Toán Tuổi thơ mở chuyên mục **63 ô cửa** để nói về đất nước, con người Việt Nam. Hiểu để thêm yêu đất nước và phấn đấu lớn lên xây dựng non sông gấm vóc ngày càng tươi đẹp hơn.*

SỐ VỊ
28 THỨ

VŨ HÀ ĐÔNG

Chuyên mục 63 ô cửa là nói về 63 tỉnh, thành phố trực thuộc Trung ương (TTTW) của nước ta. Trong số đó có 58 tỉnh và 5 thành phố. Có nhiều điều thú vị khi ta mở 63 ô cửa này. Ví dụ ngoài 5 thành phố trên, nước ta còn bao nhiêu thành phố khác. Hôm nay chúng ta thử từ ngoài nhìn vào 63 ô cửa đó theo các cách khác nhau. Từ biển Đông và biển Tây vào, hay từ Quảng Ninh theo bờ biển đi tới Kiên Giang bạn có biết con số là bao nhiêu tỉnh, thành phố TTTW (sau đây sẽ gọi tắt là tỉnh, thành) không?

Đó là số 28 đấy. **Nước ta có 28 tỉnh, thành giáp biển:** Quảng Ninh, Hải Phòng, Thái Bình, Nam Định, Ninh Bình, Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên - Huế, Đà Nẵng, Quảng Nam, Quảng Ngãi, Bình Định, Phú Yên, Khánh Hòa, Ninh Thuận, Bình Thuận, Bà Rịa - Vũng Tàu, TP. Hồ Chí Minh, Tiền Giang, Bến Tre, Trà Vinh, Sóc Trăng, Bạc Liêu, Cà Mau, Kiên Giang.

Trong đó 26 tỉnh chỉ giáp biển Đông, một tỉnh giáp cả biển Đông và biển Tây là Cà Mau, một tỉnh giáp biển Tây là Kiên Giang. Có mấy lầm tưởng: Một là nhiều người lầm tưởng TP. Hồ Chí Minh không giáp biển, hai là tưởng Long An giáp biển. Đúng ra, hai bên của Soi Rap là TP. Hồ Chí Minh và Tiền Giang còn tỉnh Long An ở phía trong, không tính là giáp biển. Hai phần ba trong số này là các tỉnh thành phát triển. Trong số này Cà Mau có bờ biển dài nhất với 254 km và Ninh Bình chỉ có bờ biển 17 km (thật ra đo theo đường chim bay từ 2 mép cửa 2 sông) thì chỉ hơn 10 km. Nhìn trên bản đồ thì bờ biển huyện Hải Hậu lại trùm hết bờ đông và đông nam của biển Ninh Bình. Do vậy khi dự báo thời tiết nói vùng biển từ Quảng Ninh đến Ninh Bình tức là hiểu từ Quảng Ninh đến Nam Định hoặc từ Quảng Ninh đến Thanh Hóa đều được. *Thật ra dự báo bão mà nói tới bờ biển Ninh Bình là chính xác tới 5 km (!)*

Tiếp theo ta sẽ gặp các tỉnh đồng bằng hay còn gọi là các tỉnh vùng xuôi. Điều thú vị là chúng ta có **28 tỉnh thành vùng xuôi:** Hà Nội, Hải Phòng, Nam Định, Hải Dương, Bắc Ninh, Hưng Yên, Vĩnh Phúc, Hà Nam, Thái Bình, Ninh Bình, Bà Rịa - Vũng Tàu, Đồng Nai, TP. Hồ Chí Minh, Bình Dương, Tây Ninh, Long An, Tiền Giang, Bến Tre, Vĩnh Long, Đồng Tháp, Trà Vinh, An Giang, Cần Thơ, Hậu Giang, Sóc Trăng, Bạc Liêu, Cà Mau và Kiên Giang. Trong số này có 3 tỉnh thành không có rừng: Bắc Ninh, Hưng Yên, Cần Thơ. Các tỉnh, thành không có núi là: Hưng Yên, Thái Bình, Long An, Tiền Giang, Bến Tre, Vĩnh Long, Đồng Tháp, Trà Vinh, Cần Thơ, Hậu Giang, Sóc Trăng, Bạc Liêu, Cà Mau. Nhiều tỉnh không có núi nhưng có rừng là rừng ngập mặn ven biển.

Đặc biệt khi chúng ta cũng có **28 tỉnh vùng cao:** Quảng Ninh, Lạng Sơn, Bắc Giang, Thái Nguyên, Bắc Kạn, Cao Bằng, Hà Giang, Tuyên Quang, Phú Thọ, Yên Bái, Lào Cai, Lai Châu, Điện Biên, Sơn La, Hòa Bình, Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên - Huế, Quảng Nam, Kon Tum, Gia Lai, Đắk Lắk, Đắk Nông, Lâm Đồng, Bình Phước. Ở đây có tỉnh Quảng Ninh thuộc miền núi Bắc Bộ, diện tích đồi núi chiếm 80% diện tích, mật độ dân cư chỉ có 200 người/km^2 nhưng do xếp vào tam giác phát triển nên thỉnh thoảng có tài liệu lại thống kê Quảng Ninh vào vùng Đồng bằng Bắc Bộ. Vùng Đồng bằng Bắc Bộ chỉ đến Hải Phòng như mọi phân chia và thống kê từ 1990 trở về trước. Còn 2 điều đáng nói nữa. Từ Lạng Sơn theo quốc lộ 1, bạn tới Bắc Giang đếm là 1 thì Cà Mau sẽ là tỉnh thứ 28. Từ Lào Cai xuôi sông Hồng theo cao tốc, rẽ cầu Trung Hà qua Hà Nội để vào Nam theo quốc lộ 1 tới Cà Mau cũng là tỉnh thứ 28. Địa lí nước ta có con số 28 rất đặc biệt, bạn cần nhớ.

Suy nghĩ từ
Một bài toán thi học sinh giỏi

TRƯƠNG QUANG AN
(GV. THCS Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, Quảng Ngãi)

Trong đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2016-2017 có bài toán sau.

Bài toán 1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng $(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \le 8$.

Trước hết ta xét bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{x^3+z^3+1}.$$

Lời giải. Ta có $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2xy$.

Do đó

$$x^3 + y^3 + 1 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xyz$$
$$\ge (x+y)(2xy - xy) + xyz = xy(x+y+z). \ (1)$$

Chứng minh tương tự ta có

$$y^3 + z^3 + 1 \ge yz(x+y+z). \ (2)$$
$$z^3 + x^3 + 1 \ge xz(x+y+z). \ (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta được

$$P \le \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{yz(x+y+z)} + \frac{1}{xz(x+y+z)}$$
$$= \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = \frac{1}{xyz} = 1.$$

Vậy MaxP = 1 khi $x = y = z = 1$.

Bài toán 3. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1}.$$

Hướng dẫn. Ta đặt $a = x^3; b = y^3; c = z^3$ thì $xyz = 1$. Khi đó bài toán 3 đưa về bài toán 2.

Trở lại bài toán 1.

Cách 1.

Đặt $\begin{cases} a+b-c-1 = 2z^3 \\ c+b-a-1 = 2x^3 \\ a+c-b-1 = 2y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y^3 + z^3 + 1 \\ b = x^3 + z^3 + 1 \\ c = y^3 + x^3 + 1 \end{cases}$

Ta có

$$ab + bc + ca = abc \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{x^3+z^3+1} + \frac{1}{y^3+x^3+1} = 1.$$

Ta lại có

$$(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \le 8.$$
$$\Leftrightarrow x^3y^3z^3 \le 1 \Leftrightarrow xyz \le 1. \ (*)$$

Vì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ nên $a; b; c > 1$.

Mặt khác

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = c - 1 > 0 \\ z^3 + y^3 = a - 1 > 0 \\ x^3 + z^3 = b - 1 > 0 \end{cases}$$

Do đó trong 3 số x, y, z có không quá 1 số nhỏ hơn 0.

- Nếu trong 3 số x, y, z có 1 số âm và hai số còn lại dương thì bất đẳng thức (*) đúng.
- Nếu $x, y, z > 0$, giả sử $xyz > 1$ thì

$$xyz(x+y) + z > x + y + z. \ (4)$$

Mặt khác

$$xy(x+y) + 1 \le x^3 + y^3 + 1$$
$$\Rightarrow z[xy(x+y) + 1] \le z(x^3 + y^3 + 1).$$
$$\Rightarrow xyz(x+y) + z < z(x^3 + y^3 + 1). \ (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra

$z(x^3+y^3+1) > x+y+z$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^3+y^3+1} < \dfrac{z}{x+y+z}$. (6)

Chứng minh tương tự ta được

$\dfrac{y}{x+y+z} < \dfrac{1}{x^3+z^3+1}$. (7)

$\dfrac{x}{x+y+z} < \dfrac{1}{y^3+z^3+1}$. (8)

Từ (6), (7) và (8) suy ra

$$1 = \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{x^3+z^3+1} + \frac{1}{y^3+x^3+1}$$

$$< \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1.$$

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy $(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \le 8$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Nhận xét. *Qua bài toán trên chúng ta thấy mối liên hệ giữa các bài toán với nhau. Nhiều khi ta tìm được lời giải dựa vào lời giải của các bài toán quen thuộc khác.*

Cách 2.

Đặt $\begin{cases} a-1=x \\ b-1=y \\ c-1=z \end{cases} \Rightarrow x, y, z > 0.$

Ta có

$ab+bc+ac=abc$

$\Rightarrow (x+1)(y+1)+(z+1)(y+1)+(x+1)(z+1)$

$=(x+1)(y+1)(z+1).$

$\Rightarrow x+y+z+2 = xyz.$ (9)

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$abc = ab+bc+ac \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

$\Rightarrow (abc)^3 \ge 27(abc)^2 \Rightarrow abc \ge 27.$

Do đó

$x+y+z=(a-1)+(b-1)+(c-1)$

$=(a+b+c)-3 \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3.\sqrt[3]{27}-3=6.$ (10)

Mặt khác từ (9) và (10) suy ra

$x+y+z \ge 6$

$\Rightarrow xyz = (x+y+z)+2 \le \dfrac{4(x+y+z)}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{xyz}{x+y+z} \le \dfrac{4}{3}.$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{xyz}{x+y+z}\sqrt{\frac{27xyz}{x+y+z}} \ge (x+y-z)(z+y-x)(x+z-y)$$

$\Leftrightarrow 27x^3y^3z^3 \ge (x+y+z)^3(x+y-z)^2 \times$

$\times (z+y-x)^2(x+z-y)^2.$ (11)

Đặt $m=x+y-z; n=z+y-x; \ p=x+z-y.$

Ta có $m+p=2x; n+m=2y; p+n=2z.$

Bất đẳng thức (11) viết lại thành

$27(m+n)^3(n+p)^3(m+p)^3$

$\ge 512m^2n^2p^2(m+n+p)^3.$ (13)

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$m^2n+m^2p+mn^2+n^2p+mp^2+np^2 \ge 6mnp$

$\Rightarrow 9(m+n)(n+p)(m+p)$

$\ge 8(m+n+p)(mn+np+mp).$ (14)

$(mn+np+mp)^3 \ge 27m^2n^2p^2.$ (15)

Từ (15) suy ra

$(m+n+p)^3(mn+np+mp)^3$

$\ge 27m^2n^2p^2(m+n+p)^3.$ (16)

Từ (14) và (16) suy ra (13) đúng.

Vậy $(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \le 8$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Compa vui...tính

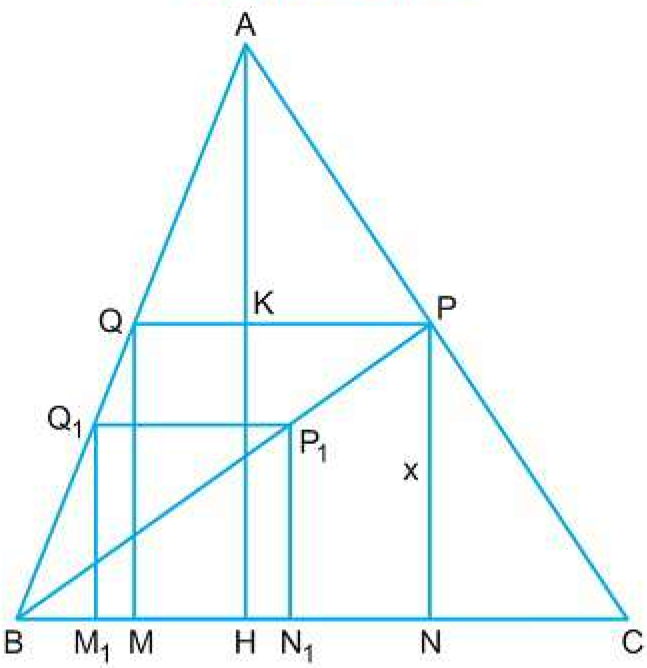
Kì này KẺ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

Bài toán. Trên một mảnh giấy đã vẽ hai đường thẳng *a* và *b* cắt nhau tại một điểm nằm ngoài mảnh giấy. Chỉ dùng thước thẳng và compa, bạn hãy dựng trên mảnh giấy đó đường phân giác của góc (nhỏ hơn 180^o) tạo bởi hai đường thẳng *a* và *b* sao cho số thao tác dựng hình là ít nhất (kẻ một đường thẳng hoặc vẽ một đường tròn coi là một thao tác).

NGUYỄN VIỆT HẢI *(Hà Nội)*

Kết quả (TTT2 số 173+174)

HÌNH VUÔNG NỘI TIẾP TAM GIÁC



Lời giải. a) Xét tam giác ABC. Giả sử hình vuông MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC = a, điểm P thuộc cạnh AC và điểm Q thuộc cạnh AB. Vẽ đường cao AH = h_a và AH cắt PQ tại K. Đặt PQ = PN = HK = x.

Cách 1. - Dựng hình vuông $M_1N_1P_1Q_1$ có điểm Q_1 thuộc cạnh AB và cạnh M_1N_1 nằm trên cạnh BC với điểm P_1 nằm trong tam giác ABC.

- Dựng tia BP_1, tia này cắt cạnh AC tại điểm P.

- Dựng đường thẳng PQ // BC và cắt cạnh AB tại điểm Q.

- Dựng đường thẳng QM ⊥ BC và cắt cạnh BC tại M.

- Dựng đường thẳng PN ⊥ BC và cắt cạnh BC tại N.

Từ các cặp tam giác đồng dạng BQP và BQ_1P_1, BNP và BN_1P_1 suy ra MNPQ là hình chữ nhật, mà QP = PN nên MNPQ là hình vuông.

Cách 2. • Phân tích. Vì PQ // BC nên theo hệ quả của định lí Thales ta có

$$\frac{x}{BC}=\frac{PQ}{BC}=\frac{AQ}{AB}=\frac{AK}{AH}=\frac{AH-HK}{AH}=\frac{AH-x}{AH}.$$

Suy ra

$x.AH = BC.AH - x.BC \Leftrightarrow x(BC + AH) = BC.AH$,

hay là $x(a + h_a) = a.h_a$. (1)

• Cách dựng. - Dựng AH ⊥ BC tại điểm H.

- Dựng đoạn thẳng tỉ lệ thứ tư x thỏa mãn $\frac{x}{h_a}=\frac{a}{a+h_a}$.

- Dựng điểm K trên HA sao cho HK = x.

- Dựng đường thẳng QP ⊥ AK và đi qua K, đường thẳng này cắt AB tại Q và cắt AC tại P.

- Dựng đường thẳng QM ⊥ BC và cắt cạnh BC tại M.

- Dựng đường thẳng PN ⊥ BC và cắt cạnh BC tại N.

• Chứng minh. Từ phần phân tích và cách dựng bài toán suy ra đpcm.

b) Đặt BC = a, CA = b, AB = c và giả sử $c \le b \le a$ thì $a - b = k \ge 0$. Gọi các đường cao từ đỉnh A và đỉnh B tương ứng là AH = h_a và h_b.

Ta có $b(h_b - h_a) = bh_b - bh_a = ah_a - bh_a$

$= h_a(a - b) = h_ak \le bk$ (do $AH \le AB \le AC$).

Do đó $h_b - h_a \le k = a - b$ hay là $b + h_b \le a + h_a$.

Gọi y (hoặc z) là độ dài cạnh hình vuông nội tiếp tam giác ABC mà một cạnh hình vuông nằm trên AC (hoặc AB).

Từ (1) có $x(a + h_a) = ah_a = 2S_{ABC} = bh_b = y(b + h_b)$.

Do $b + h_b \le a + h_a$ nên $x \le y$.

Tương tự ta có $x \le y \le z$.

• Kết luận. Trong các hình vuông nội tiếp tam giác thì hình vuông ứng với đáy nhỏ nhất của tam giác là hình vuông có diện tích lớn nhất.

Bạn *Hà Minh Hiếu*, 8F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa** đã giải đúng bài này, được nhận phần thưởng.

ANH COMPA

MỘT BUỔI SÁNG MƯA LẠNH

NGUYỄN THỊ HẰNG B
(9C, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Nghệ An)

Sáng nay trời mưa lạnh nên thám tử Sêlôccôc quyết định sẽ ở nhà, chờ đến chiều tạnh ráo mới đến văn phòng. Khi ông đang say sưa xem phim trên TV thì chuông cổng bỗng reo vang. "Chà! Ai đến vào lúc mưa gió thế này nhỉ?" - vừa nghĩ thám tử vừa ra mở cổng. Một người phụ nữ trung tuổi xin gặp ông để nhờ giúp đỡ.

Thám tử mời người phụ nữ vào nhà rồi ân cần hỏi han.

- Bà uống trà cho ấm rồi bình tĩnh kể mọi chuyện cho tôi. Hi vọng tôi sẽ giúp được bà.

- Vâng, cám ơn ông. Chuyện là thế này: Trưa hôm qua, con trai chị giúp việc nhà tôi mới từ quê lên. Cậu ta xin ở tạm nhà tôi 3 ngày để giải quyết việc gì đó. Gần tối hôm qua thì em gái tôi đưa con trai của cô ấy đến gửi nhà tôi 2 ngày vì vợ chồng em tôi phải đi công tác xa. Sáng sớm nay, tôi phát hiện chiếc nhẫn kim cương bị mất. Chuyện xảy ra đúng lúc trong nhà có 2 cậu thanh niên làm tôi khó nghĩ quá. Chúng vừa đến nhà mình, chả lẽ mình đã làm toáng lên.

- Tôi rất hiểu ý bà. Đúng là cũng khó xử thật... Nhưng một mất mười ngờ, mình vẫn phải làm cho rõ để không ai bị nghi oan. Nào! Bà kể việc phát hiện chiếc nhẫn bị mất đi!

- Tối qua vì có thêm hai thanh niên ăn cơm nên tôi vào bếp phụ với chị giúp việc. Tôi tháo nhẫn và để tạm ở bàn bếp. Mải nấu nướng nên tôi quên bẵng đi. Sớm nay tỉnh giấc mới sực nhớ ra. Tôi đã hỏi chị giúp việc nhưng chị ấy nói là không hề nhìn thấy.

- Như vậy là lúc chiếc nhẫn bị mất, trong nhà bà có chị giúp việc, con trai chị ta và đứa cháu con cô em của bà?

- Vâng, đúng thế.

- Tôi cần nói chuyện với từng người một. Gọi điện cũng được. Bà có số của từng người chứ?

- Vâng

Một lát sau, thám tử bắt đầu gọi cho bà giúp việc.

- Chắc bà đã biết việc bà chủ bị mất chiếc nhẫn?

- Vâng, tôi có nghe bà chủ hỏi, nhưng quả thực tôi không hề nhìn thấy chiếc nhẫn.

- Từ lúc bà chủ nấu ăn cùng bà cho tới sáng hôm sau, bà đã làm những gì?

- Tôi nấu nướng, dọn dẹp rồi vào phòng nghỉ ngơi. Mọi hôm tôi thường xem TV ở phòng khách, nhưng hôm qua cậu Minh cháu bà chủ xem ở đó nên tôi về phòng mình luôn.

Tiếp theo, thám tử gọi điện cho Minh:

- Tối qua và sáng sớm nay cháu đã làm gì? Có thể cho bác biết được không?

- Được chứ ạ. Cháu ăn cơm rồi ra phòng khách xem TV. Đến khoảng hơn 10h thì cháu lên gác, đi ngủ.

- Cháu xem phim hay chương trình gì?

- Dạ, cháu xem *Mặt Trời bé con* ạ. Những em bé thật đáng yêu bác nhỉ!

Cuối cùng là cậu Bình, con trai bà giúp việc.
- Tối qua và sáng sớm nay cháu đã làm gì, ở đâu?
- Cháu ăn cơm rồi xin phép mẹ ra ngoài để xem phim. Chả mấy khi lên thành phố nên cháu tranh thủ giải trí ạ. Cháu về nhà thì đã khuya nên đi ngủ luôn. Sáng nay cháu dậy muộn ạ.
- Cháu xem phim gì thế? Hay không?
- Phim Đảo Đầu lâu ạ. Ôi! Thiên nhiên Việt Nam mình lên phim đẹp quá bác ạ! Trên màn ảnh rộng, biển đảo Nha Trang hiện ra vô cùng quyến rũ!
Sau đó, thám tử Sêlôccôc nói với người phụ nữ:
- Tạm thời tôi đã tìm ra một người đáng nghi rồi. Tất nhiên, để kết luận chính xác thì còn phải tìm hiểu kĩ hơn. Trước mắt bà có thể tế nhị nói chuyện riêng với người đó xem sao.

Người phụ nữ nghĩ mãi mà vẫn chưa đoán được thám tử đã nghi ai. Các thám tử Tuổi Hồng hãy giúp một tay nhé!

Kết quả (TTT2 số 173+174)

THẾ CỜ (Kì 92)

1.♗h6+ ♔xh6 2.♕g5#

Các bạn được thưởng kì này: *Nguyễn Tuấn Minh*, 8A1, THCS Nam Hà, phường Nam Sơn, Kiến An, **Hải Phòng**; *Nguyễn Duy Bảo*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Quang Đức*, 7B, THCS Nhữ Bá Sĩ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Quang Anh*, 6A7, THCS Cầu Giấy, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**.

LÊ THANH TÚ

Kết quả (TTT2 số 173 +174)

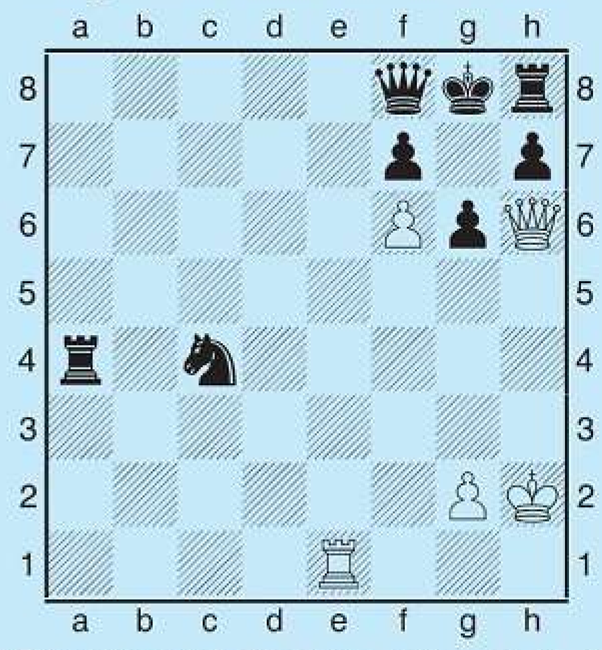
Món quà quý giá biến mất

Kì này khá nhiều bạn gửi bài nhưng rất tiếc là không bạn nào có câu trả lời đúng. Bạn nghi anh Bốp, bạn đoán cô Linda, cũng có bạn ngờ anh Jim. Thế nhưng lí do mà các bạn đưa ra thì hoàn toàn chưa thuyết phục.
Khi đọc câu chuyện, các bạn đã bỏ qua một chi tiết rất quan trọng là: Lúc thám tử hỏi cậu Jim rằng HÔM QUA cậu đã làm gì, ở đâu thì Jim lập tức trả lời về những việc mình làm TỐI QUA. Tại sao cậu Jim lại tự “khoanh vùng” thời gian như thế?
Rất mong các thám tử Tuổi Hồng trau dồi hơn nữa kĩ năng quan sát, phán đoán, lập luận, mà để có được thì ở chuyên mục Thám tử Sêlôccôc này, trước hết các bạn cần rèn luyện kĩ năng đọc hiểu.
Phần thưởng kì này đành phải để dành cho những kì tiếp theo. Các thám tử Tuổi Hồng hãy cố gắng nhé!

Thám tử Sêlôccôc

THẾ CỜ (Kì 94)

Trắng đi trước chiếu hết sau 2 nước.



LÊ THANH TÚ *(Đại kiện tướng Quốc tế)*

TRIANGLES

(Tiếp theo TTT2 số 173+174)

VŨ BỒ ĐỀ

The sum of the lengths of any two sides of a triangle must be longer than the remaining side.

If two angles in a triangle are equal, then the lengths of the sides opposite the equal angles are equal.

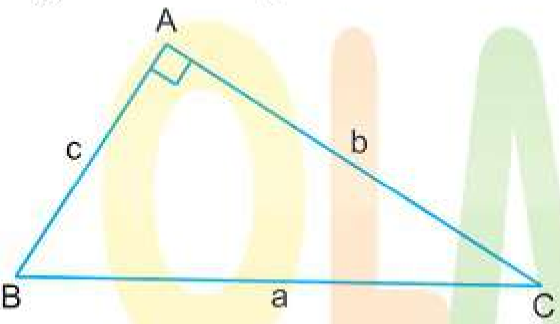
If two sides of a triangle are equal, then the angles opposite the two equal sides are equal.

If one angle in a triangle is larger than another angle, the side opposite the larger angle is longer than the side opposite the smaller angle.

If one side is longer than another side, then the angle opposite the longer side is larger than the angle opposite the shorter side.

In the right triangle, the side opposite the right angle is called the hypotenuse. The remaining two sides are called legs.

"The square of the length of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the lengths of the legs." (Pythagoras' Theorem)



BC: hypotenuse

AB, AC: leg

$\widehat{A}$: right angle

We have: $a^2 = b^2 + c^2$.

If the lengths of the three sides of a triangle are a, b and c and $a^2 = b^2 + c^2$, then the triangle is a right triangle, where a is the length of the hypotenuse.

- **Math terms**

side	cạnh
angle	góc
length	chiều dài, độ dài
equal	bằng nhau
opposite	đối diện
larger than	lớn hơn
hypotenuse	cạnh huyền
leg	cạnh góc vuông
theorem	định lí

- **Practice**

Bạn hãy dịch bài trên sang tiếng Việt dựa vào từ vựng đã cho ở trên. Nếu không phải dùng đến gợi ý này thì càng tốt. Bài dịch tốt, gửi đến tòa soạn trước ngày 8.12.2017 thì được nêu tên trên báo TTT và có quà tặng.

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH
BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHỬ SỐ HẠNG TỰ DO

NGUYỄN TRỌNG THỌ
(GV. THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)

Hệ phương trình là dạng toán thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi, thi vào các trường THPT và các trường THPT chuyên. Có nhiều phương pháp để giải hệ phương trình, trong đó phương pháp khử số hạng tự do để tìm hệ thức liên hệ giữa các biến thường xuyên được sử dụng. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên KHTN Hà Nội, năm học 2014 - 2015).

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1\ (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4xy + 4y^2 = 4\ (2) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 4\ (3) \end{cases}$$

Trừ theo vế của (2) cho (3) ta được

$$3x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3xy - 2xy + 2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-y) - 2y(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(3x-2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \dfrac{2}{3}y \end{array}\right.$$

- Với $x = y$, thay vào (1) ta được

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right. \text{(thoả mãn).}$$

- Với $x = \dfrac{2}{3}y$, thay vào (1) ta được

$$y^2 = \frac{9}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \\ y = \dfrac{-3\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = \dfrac{-2\sqrt{7}}{7} \end{array}\right. \text{(thoả mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;\ y)$ là

$$(1;\ 1); (-1;\ -1); \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}; \frac{3\sqrt{7}}{7}\right); \left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}; -\frac{3\sqrt{7}}{7}\right).$$

Bài toán 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, tỉnh Hà Tĩnh năm học 2012 - 2013).

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3 = 4x\ (1) \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 9 = 12x\ \ (2) \\ x^3 + 12x + y^3 = 6x^2 + 9\ \ (3) \end{cases}$$

Cộng theo vế của (2) và (3) ta được

$$(3x^2 + 3y^2 + 9) + (x^3 + 12x + y^3) = 12x + (6x^2 + 9)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y \\ x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0. \end{array}\right.$$

- Với $x = -y$ thay vào (1) ta được

$$2y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(y+1)^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

- Với $x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y = 0.$ (4)

Trừ theo vế của (1) cho (4) ta được

$$xy - x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow y = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 2 \end{array}\right. \text{(thoả mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;\ y)$ là $(3;\ 0)$; $(2;\ 1)$.

Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(1 + x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x}\ (1) \\ 2(1 + y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y}.\ (2) \end{cases}$$

(Đề thi tuyển sinh trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Lời giải. ĐKXĐ $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Trừ theo vế của (1) và (2) ta có

$$2(1+x\sqrt{y})^2 - 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9y\sqrt{x} - 9x\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y - 2xy^2 + 11x\sqrt{y} - 11y\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})(2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (không thoả mãn)} \\ y = 0 \text{ (không thoả mãn)} \\ x = y \\ 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x} + 11 = 0 \text{ (vô nghiệm, do } x, y > 0) \end{array}\right.$$

- Với x = y thay vào (1) ta được hệ phương trình có nghiệm (x; y) là $\left(\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{4}\right)$; $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}};\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$.

Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - x + xy = 2 \\ 3x^2 - x + 3xy + y = 4 \end{cases}$$

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên Đại học Vinh, năm học 2014 - 2015)

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x^2 - x + xy = 2 \ (1) \\ 3x^2 - x + 3xy + y = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 2xy = 4 \ (2) \\ 3x^2 - x + 3xy + y = 4 \ (3) \end{cases}$$

Trừ theo vế của (3) cho (2) ta được

$$(3x^2 - x + 3xy + y) - (2x^2 - 2x + 2xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + xy + y = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -y \end{array}\right.$$

- Với x = –1, thay vào (1) ta được y = 0 (thỏa mãn).
- Với x = –y, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được y = 2, suy ra x = –2 (thoả mãn).

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là (–1 ; 0); (–2 ; 2).

Bài toán 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2}. \end{cases}$

Lời giải. Từ hai phương trình của hệ ta suy ra $x > 0$ và $y > 0$.

Ta có $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \ (1) \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \ (2) \end{cases}$

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$$3x^2y - 3xy^2 + x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3xy(x-y) + (x-y)(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(3xy + x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 3xy + x + y = 0 \end{array}\right.$$

- Với x = y thay vào (1) ta được

$$3x^3 = x^2 + 2 \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$ (thoả mãn).

- Với $3xy + x + y = 0$ (loại vì x, y > 0).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x; y) là (1 ; 1).

Bài tập

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ \dfrac{2}{xy} - \dfrac{1}{z^2} = 4. \end{cases}$$

(Đề thi chọn HSG Toán 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2 + 3x = \dfrac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \dfrac{6}{y}. \end{cases}$

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An, năm học 2009 - 2010)

Một số bài toán CỰC TRỊ TỔ HỢP

CAO MINH QUANG
(GV. THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Các bài toán cực trị tổ hợp của các số tự nhiên thường xuyên gặp trong đề thi các nước. Trong bài viết này chúng tôi xin trình bày một số bài toán cực trị tổ hợp trên tập hợp số tự nhiên.

Bài toán 1. Phân tích số 2017 thành tổng của hai số nguyên dương a, b. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = ab$.

Lời giải.

Cách 1. Trước hết, ta hãy thử giải bài toán này cho trường hợp số khá nhỏ, ví dụ ta phân tích

$11 = 10 + 1 = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$.

Ta nhận thấy rằng $10.1 < 9.2 < 8.3 < 7.4 < 6.5$. Điều này gợi ý cho ta bổ đề sau:

- **Bổ đề.** Nếu a và b là hai số tự nhiên thỏa mãn $a \geq b \geq 1$ thì $ab > (a+1)(b-1)$.

Chứng minh. Ta có

$ab - (a + 1)(b - 1) = a - b + 1 > 0.$

Nếu a và b là hai số tự nhiên thỏa mãn $a > b \geq 1, a + b = 2017$.

Ta có $2017 = a + b = (a+1) + (b-1)$.

Sử dụng bổ đề, ta suy ra

$1009.1008 > 1010.1007 > 1011.1006$

$> ... > 2014.3 > 2015.2 > 2016.1$.

Vậy phân tích 2017 để tích số có giá trị nhỏ nhất là $2017 = 1 + 2016$, lớn nhất là $2017 = 1009 + 1008$, hay giá trị nhỏ nhất của P là 2016.1 và giá trị lớn nhất của P là 1009.1008.

Cách 2. Vì 2017 là số lẻ nên ta có thể giả sử rằng $a > b \geq 1, a + b = 2017$.

Ta có $2017 = a + b \leq a + a - 1 = 2a - 1$

hay $a \geq 1009$. Suy ra $b \leq 1008$.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$1009.1008P = (1008a).(1009b)$

$\leq \frac{1}{4}(1008a + 1009b)^2 = \frac{1}{4}\left[1008(a+b) + b\right]^2$.

$\leq \frac{1}{4}\left[1008.2017 + 1008\right]^2 = (1009.1008)^2$.

Suy ra $P \leq 1009.1008$.

Đẳng thức xảy ra khi đồng thời $a + b = 2017$ và $1008a = 1009b$, $b = 1008$ hay $a = 1009$, $b = 1008$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1009.1008.

Bài toán 2. Phân tích số 2017 thành tổng của hai số nguyên dương a, b. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = a!.b!$.

Lời giải. Thực hiện phép thử cho trường hợp số khá nhỏ, từ đó ta có bổ đề sau:

- **Bổ đề.** Nếu a và b là hai số tự nhiên thỏa mãn $a \geq b \geq 1$ thì $a!.b! < (a+1)!(b-1)!$.

Thật vậy, ta có $(a+1)!(b-1)! = \frac{a+1}{b}.a!.b! > a!.b!$.

Suy ra

$1008!.1007! < 1009!.1006!$

$< ... < 2015!.2! < 2016!.1!$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $1008!.1007!$ và giá trị lớn nhất của P là $2016!.1!$.

Bài toán 3. Phân tích số 2017 thành tổng của hai số nguyên dương a, b. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P = a! + b!$.

Lời giải. • **Bổ đề.** Nếu a và b là hai số tự nhiên thỏa mãn $a \geq b \geq 1$ thì $a! + b! < (a+1)! + (b-1)!$.

Thật vậy, ta có

$(a+1)! + (b-1)! = a!(a+1) + \frac{b!}{b}$

$= (a! + b!) + (a.a! - b!) + \frac{b!}{b} > a! + b!$.

Từ đó suy ra

$1009! + 1008! < 1010! + 1007! < ... < 2016! + 1!$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1008! + 1007!$, giá trị lớn nhất của P là $2016! + 1!$.

Bài toán 4. Phân tích số 2017 thành tổng của ba số tự nhiên x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của P = xyz.

Phân tích. Giả sử $x \le y \le z$.

Khi đó $3x \le x + y + z = 2017$, suy ra $x \le 672$.

Tương tự ta cũng đánh giá được $z \ge 673$.

Dự đoán P đạt giá trị lớn nhất khi x = y = 672, z = 673, suy ra $673x = 673y = 672z = 672.673$.

Lời giải. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$xyz = \frac{1}{673^2 \cdot 672} \cdot 673x \cdot 673y \cdot 672z$$
$$\le \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{673^2 \cdot 672}(673x + 673y + 672z)^3$$
$$= \frac{1}{3^3 \cdot 673^2 \cdot 672} \cdot (673(x+y+z) - z)^3$$
$$\le \frac{1}{3^3 \cdot 673^2 \cdot 672} \cdot (673 \cdot 2017 - 673)^3 = 672^2 \cdot 673.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 673x = 673y = 672z \\ x + y + z = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 672 \\ z = 673. \end{cases}$$

Do đó giá trị lớn nhất của P là $672^2 \cdot 673$.

Bài toán 5. Phân tích số 2017 thành tổng của ba số tự nhiên phân biệt x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của P = xyz.

Phân tích. Về mặt hình thức, bài toán có phát biểu gần giống bài toán 4 nhưng điều kiện các biến là các số tự nhiên phân biệt nên sẽ có sự khác biệt nhỏ trong bước đánh giá điều kiện ràng buộc của các biến. Giả sử $x < y < z$.

Khi đó $y \ge x + 1$ và $z \ge y + 1$.

Ta có

$$2017 = x + y + z \le z - 2 + z - 1 + z$$
$$= 3z - 3 \Rightarrow z \ge \frac{2020}{3} \Rightarrow z \ge 674.$$
$$2017 = x + y + z \ge x + x + 1 + x + 2$$
$$= 3x + 3 \Rightarrow x \le \frac{2014}{3} \Rightarrow x \le 671.$$

Dự đoán P đạt giá trị lớn nhất khi $x = 671, y = 672, z = 674$.

Khi đó $672.674x = 671.674y = 671.672z$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$xyz = \frac{1}{671^2 \cdot 672^2 \cdot 674^2}(672.674x).(671.674y).(671.672z)$$
$$\le \frac{1}{3^3.671^2 \cdot 672^2.674^2} \cdot (671.674(x+y+z) + 674x - 2.671z)^3$$
$$\le \frac{1}{3^3.671^2 \cdot 672^2.674^2} \cdot (671.674.2017 + 674.671 - 2.671.674)^3$$
$$= 671.672.674.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 672.674x = 671.674y = 671.672z \\ x + y + z = 2017 \end{cases}.$$
$$\Leftrightarrow x = 671, y = 672, z = 674.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 671.672.674.

Bài toán 6. Phân tích số 2017 thành tổng của 12 số nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tích các số này.

Lời giải. Giả sử $2017 = x_1 + x_2 + ... + x_{12}$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_{12}$ là các số nguyên dương và $P = x_1x_2...x_{12}$.

Giả sử $2 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_{12}$.

Khi đó $(x_1 - 1)x_2...(x_{12} + 1) < x_1x_2...x_{12}$

(vì $(x_1 - 1)(x_{12} + 1) < x_1x_{12}$).

Do đó $P = x_1x_2...x_{12}$ chưa thể đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị này sẽ giảm đến khi $x_1 = 1$.

Chứng minh tương tự suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi trong 12 số đó có 11 số bằng 1 và 1 số bằng 2006.

Giả sử $2 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_{12}$ và $x_{12} - x_1 > 1$.

Khi đó $x_1x_2...x_{12} < (x_1 + 1)x_2...(x_{12} - 1)$ (vì $x_{12} - x_1 > 1$).

Do đó $P = x_1x_2...x_{12}$ chưa thể đạt giá trị lớn nhất và giá trị này tăng cho đến khi xảy ra điều kiện $x_{12} - x_1 \le 1$ hay $x_{12} - x_1 = 0$ hoặc $x_{12} - x_1 = 1$.

Do đó muốn P đạt giá trị lớn nhất thì trong 12 số $x_1, x_2, ..., x_{12}$ phải có k số bằng x_0 và $12 - k$ số bằng $x_0 + 1$. Khi đó

$$kx_i + (12 - k)(x_i + 1) = 2017 \Leftrightarrow 12x_i - k = 2005.$$

Chú ý rằng $1 \le k \le 12$ nên phương trình có nghiệm nguyên là $k = 11$ và $x_0 = 168$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1.1...1.2006 = 2006$ và giá trị lớn nhất của P là $168^{11}.169$.

Bài tập

Bài 1. Phân tích số 2017 thành tổng của bốn số nguyên dương a, b, c, d. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = abcd.

Bài 2. Phân tích số 2017 thành tổng của năm số nguyên dương phân biệt a, b, c, d, e. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = abcde.

Bài 16NS. Giải phương trình nghiệm nguyên
$$\sqrt{4x^2+(x^2-5)y-20}=2\sqrt{x^2-5}+\sqrt{y+4}+5.$$

CAO NGỌC TOẢN
(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

Bài 17NS. Giải phương trình $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(3x^2+1)^2}{144}.$

TRẦN VĂN HƯNG *(GV. THCS Yên Thanh, Can Lộc, Hà Tĩnh)*

Bài 18NS. Cho đường tròn (O) đường kính BC và dây AD cắt BC. Kẻ BH vuông góc với AD tại H, kẻ HK vuông góc với AB tại K. Đường thẳng CK cắt đường tròn (O) tại E và cắt đường tròn (B, BH) tại F. Hai đường tròn (O) và (B; BH) cắt nhau tại M và N. Chứng minh rằng $EF^2 = EM.EN$.

THÂN VĂN CHƯƠNG *(GV. THCS Võ Như Hưng, TX. Điện Bàn, Quảng Nam)*

Kết quả (TTT2 số 173+174)

Cuộc thi giải toán dành cho nữ sinh

Bài 10NS. Giả sử (x ; y) = (a ; b) là nghiệm nguyên của phương trình f(x) + f(y) = f(x).f(y) thì $f(a), f(b)\in\mathbb{Z}$ và $f(a)+f(b)=f(a).f(b)$. (1)

$\Rightarrow f(a), f(b)$ là các số chẵn. (2)

Mặt khác f(2015).f(2016) = 2017 nên f(2015) và f(2016) đều là số lẻ, từ đó 2015 và 2016 lần lượt là nghiệm của $f(x)-2k-1$ và $f(x)-2h-1$ (với $k, h\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow f(x)=(x-2015)P(x)+2k+1$ và $f(x)=(x-2016)Q(x)+2h+1$ với P(x), Q(x) là các đa thức có các hệ số nguyên, do đó f(a) lẻ. (3)

(vì nếu ngược lại thì hai số nguyên liên tiếp $a-2016$ và $a-2015$ cùng là số lẻ, vô lí).

Từ (2) và (3) suy ra phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Nhận xét. Bạn *Cao Thị Thùy Dung*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh** có cách giải đúng bài toán trên.

Bài 11 NS. (Theo lời giải của bạn *Nguyễn Thị Mai Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**). Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta được
$$\left(\frac{2^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{3^2}{z}\right)(x+y+z)\ge(2+1+3)^2$$
$$\Rightarrow A=\frac{2^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{3^2}{z}\ge\frac{(2+1+3)^2}{x+y+z}=\frac{36}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z)=\left(\frac{5}{3};\frac{5}{6};\frac{5}{2}\right)$.

Vậy $\min A=\frac{36}{5}$ khi $(x;y;z)=\left(\frac{5}{3};\frac{5}{6};\frac{5}{2}\right)$.

Nhận xét. Các bạn sau cũng có lời giải đúng: *Cao Thị Thùy Dung*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Cao Thị Việt Hằng*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Nguyễn Thị Linh Đan*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Cao Thị Thùy Linh*, 8A, *Nguyễn Thị Thu Hà*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Bài 12 NS. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Vẽ đường kính BE của đường tròn (O). Ta có $\widehat{BCE}=\widehat{BDE}=90^o$, $AH\perp BC$, $BH = CH$.

Xét ΔHBA và ΔCEB có $\widehat{AHB}=\widehat{BCE}(=90^o)$, $\widehat{HBA}=\widehat{CEB}\Rightarrow\Delta HAB\backsim\Delta CBE$

$$\Rightarrow\frac{BH}{EC}=\frac{AH}{BC}=\frac{2MH}{2CH}=\frac{MH}{CH}.$$

Xét ΔHBM và ΔCEH có $\widehat{BHM}=\widehat{ECH}$ $(=90^o)$, $\frac{BH}{EC}=\frac{MH}{HC}\Rightarrow\Delta HBM\backsim\Delta CEH\Rightarrow\widehat{HBM}=\widehat{CEH}$.

Mặt khác $\widehat{HBM}=\widehat{CED}$. Suy ra $\widehat{CEH}=\widehat{CED}$.

Suy ra hai tia EH và ED trùng nhau nên $HD\perp BM\Rightarrow\widehat{AHD}=\widehat{CBD}$. Mà $\widehat{CBD}=\widehat{ACD}$

$\Rightarrow\widehat{AHD}=\widehat{ACD}$. Suy ra tứ giác ACHD nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{AHC}=90^o$.

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔADH là
$$\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{OA^2-OC^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-R^2}.$$

Nhận xét. Không có bạn nào giải đúng bài toán này.

Các bạn được thưởng kì này: *Cao Thị Thùy Dung*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Cao Thị Việt Hằng*, 9E, *Nguyễn Thị Mai Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, *Nguyễn Thị Linh Đan*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**; *Cao Thị Thùy Linh*, 8A, *Nguyễn Thị Thu Hà*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Lưu ý. *Các bạn cần dán 01 ảnh thẻ 4×6 vào bài làm mỗi lần tham gia giải bài của cuộc thi giải toán dành cho nữ sinh.*

NGUYỄN HIỆP

MỘT SỐ BÀI TOÁN NỔI TIẾNG TRONG LỊCH SỬ

PGS.TS. LÊ QUỐC HÁN
(GV. Đại học Vinh, Nghệ An)

1. Định lí lớn Fermat

Có lẽ trong Lịch sử toán học nhân loại, việc chứng minh Định lí lớn Fermat: "Với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ cho trước, phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên (x; y; z) khác không" được nhiều người quan tâm nhất. Có thể vì cách phát biểu bài toán đơn giản, ai cũng hiểu được. Cũng có thể vì nhiều nhà toán học vĩ đại qua nhiều thế hệ hoặc đã bó tay hoặc chỉ giải được một số trường hợp cụ thể của n. Khi nhân loại tưởng đã bó tay thì khoảng 300 năm sau khi Fermat phát biểu bài toán, ngày 23 tháng 6 năm 1993, nhà toán học người Anh Andrew Wiles đã công bố giải được bài toán này. Nhưng vào tháng 8 năm 1993, các nhà toán học phát hiện ra một số chi tiết chứng minh chưa chặt chẽ. Một vài người bạn đã cùng với Wiles hiệu đính những chỗ đó và đến tháng 5 năm 1995 tạp chí toán Annals of Mathematics mới đăng đầy đủ chứng minh định lí lớn Fermat. Sau một thời gian kiểm tra cẩn thận, giới toán học thế giới đã công nhận lời giải của ông hoàn toàn chính xác. Nhiều tài liệu đã nói tới sự kiện này nên ở đây chúng tôi không trình bày chi tiết nữa. Tuy nhiên có nhiều bài toán khác cũng đơn giản nhưng cho đến nay nhân loại đang bó tay.

2. Giả thuyết Goldbach

Năm 1742, nhà toán học người Anh Christian Goldbach (1690 - 1764) viết thư cho nhà toán học Euler, trong thư Goldbach đã đưa ra bài toán sau (mà sau này thường được gọi là "Giả thuyết Goldbach yếu"): *Mỗi số nguyên lẻ lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của ba số nguyên tố.* Euler trả lời rằng, ông chưa chứng minh được điều đó và theo ông, *mỗi số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố* (thường được gọi là "Giả thuyết Goldbach mạnh"). Các giả thuyết trên là một trong những thách đố đối với các nhà toán học gần 300 năm nay, và đã giải quyết được một phần. Chú ý rằng tính đúng đắn của Giả thuyết Goldbach mạnh kéo theo tính đúng đắn của Giả thuyết Goldbach yếu.

Năm 1937, nhà toán học Nga I.M.Vinogradov đã chứng minh được rằng: *Mọi số lẻ lớn hơn một số a đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố lẻ.* Tuy nhiên số a đó quá lớn đến nỗi máy vi tính cũng không kiểm tra được giả thuyết Goldbach đối với mọi số nhỏ hơn a. Năm 1973 nhà toán học Chen Jing Run đã chứng minh rằng: *Mỗi số chẵn đủ lớn đều biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số nguyên tố hoặc một số nguyên tố với một số nửa nguyên tố (tích của hai số nguyên tố).* Năm 2013, Harald Andres Helfgott (giáo sư Trường Đại học Paris VII) đã thông báo về chứng minh Giả thuyết Goldbach yếu trong tiền ấn phẩm của mình với tựa đề *Major arcs for Goldbach's problem.*

3. Các giả thuyết về số hoàn chỉnh

Ta biết rằng, *Số hoàn chỉnh* là số nguyên dương bằng tổng các ước thực sự của nó. Trong tác phẩm *Cơ sở* (khoảng thế kỉ thứ III trước Công nguyên), nhà toán học Hy Lạp Euclid đã chứng minh được rằng: *Nếu $m \geq 2$ là số nguyên dương và $p = 2^m - 1$ là số nguyên tố thì $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ là số hoàn chỉnh chẵn.* Sau đó nhà toán học Euler đã chứng minh: *Mỗi số hoàn chỉnh chẵn có dạng $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ trong đó $m \geq 2$ là số nguyên dương và $p = 2^m - 1$ là số nguyên tố.* Như vậy, mỗi số hoàn chỉnh chẵn gắn với một số nguyên tố dạng $M_m = 2^m - 1$. Các số nguyên tố M_m như vậy được gọi là *số nguyên tố Mersenne.*

Nhà toán học Pháp Marin Mersenne (1588 - 1648) đã dự đoán rằng: *Giả sử $n \le 257$, khi đó $2^n - 1$ là số nguyên tố chỉ với n = 2, 3, 5, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257. Giả thuyết này không đúng hoàn toàn. Các nhà toán học đã chứng minh rằng với $n \le 258$ thì số Mersenne là số nguyên tố ứng với n = 2, 3, 5, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127.*

Năm 1903, nhà toán học Cole đã chứng tỏ rằng $M_{67} = 193707721 \times 761838257287$ là hợp số. Đầu năm 2017, chỉ mới biết 49 số nguyên tố Mersenne và số nguyên tố Mersenne lớn nhất đã biết là $M_{74207281}$ có 22338618 chữ số thập phân.

Cho đến nay, câu hỏi: *Có hữu hạn hay vô hạn số nguyên tố Mersenne* vẫn là bài toán mở.

Một câu hỏi khác: *tồn tại hay không số hoàn chỉnh lẻ* vẫn là một bí mật đối với nhân loại!

4. Vô hạn hay hữu hạn?

Cũng trong tác phẩm *Cơ sở*, Euclid đã chứng minh được rằng: *Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.* Euclid đã đưa ra một chứng minh ngắn gọn bằng phương pháp phản chứng, được các nhà toán học sau này khen là một trong những sự tinh tế nhất của toán học. Bắt chước cách chứng minh của Euclid, ta có thể chứng minh được rằng: *Tập hợp các số nguyên tố dạng 4n + 3 là vô hạn.* Tuy nhiên, giả thuyết "tương tự": *Tập hợp các số nguyên tố dạng n^2+1 vô hạn* lại thêm một thách đố khác đối với nhân loại.

5. Số nguyên tố Fermat hiếm, số nguyên tố Euclid dồi dào?

Fermat đã dự đoán rằng: Với m là số tự nhiên thì số dạng $F_m = 2^{2^m} + 1$ luôn là số nguyên tố. Tuy nhiên, năm 1732, Euler đã chứng tỏ rằng F_5 là hợp số vì $F_5 = 641 \times 6700417$. Các số nguyên tố dạng $F_m = 2^{2^m} + 1$ được gọi là *số nguyên tố Fermat.* Bằng công cụ máy vi tính, đến tháng 3 năm 2017, người ta đã kiểm tra được hơn 292 hợp số có dạng $F_m = 2^{2^m} + 1$, nhưng ngoài 5 số nguyên tố Fermat ứng với $n = 0, 1, 2, 3, 4$ người ta chưa tìm được thêm một nguyên tố Fermat nào nữa.

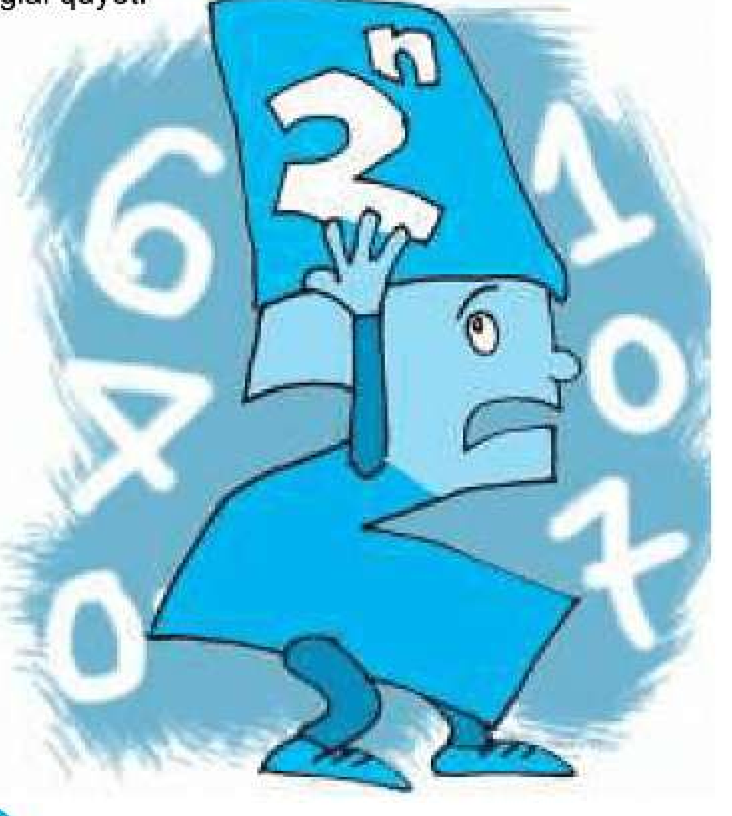
Giả sử p là một số nguyên tố. Kí hiệu $p^{\#}$ là tích tất cả các số nguyên tố không vượt quá p. Số nguyên tố có dạng $p^{\#}+1$ được gọi là *số nguyên tố Euclid.* Đến nay đã tìm được nhiều số nguyên tố Euclid: $p^{\#}+1$, chẳng hạn p = 2, 3, 5, 7, 11, 31, 379, 1019, 1021, 2657, 3229, 4547, 4787, 11549, 13649, 18523, 23801, 24029, ... Số nguyên tố Euclid lớn nhất được biết đến năm 2001 ứng với p = 392113 có 169966 chữ số thập phân.

Tuy nhiên câu hỏi: *Tập hợp các số nguyên tố Euclid là hữu hạn hay vô hạn* lại thêm một bí mật đối với nhân loại!

6. Sinh đẻ không "kế hoạch"?

Người ta chưa tìm được một quy luật nào về sự phân bố các số nguyên tố trong tập hợp các số tự nhiên. Dường như có một bức màn huyền bí nào đó trùm lên tập hợp các số nguyên tố. G.S.Telang khẳng định: "Chưa ai có thể đưa ra lí do phân tích được sự phân bố không quy luật của các số nguyên tố". Tuy nhiên có những dòng suối ngầm trong mênh mông cánh rừng vô tận số nguyên tố. Năm 1937, nhà toán học Đức Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) đã chứng minh được rằng: *Nếu a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì dãy cấp số cộng a, a + b, a + 2b, a + 3b, ... chứa vô hạn số nguyên tố.* Ngày nay vấn đề về sự phân bố số nguyên tố vẫn thu hút sự quan tâm của các nhà toán học. Năm 2005, Thần đồng toán học Terence Tao và nhà toán học Ben Green đã chứng minh được rằng: *Với mỗi số tự nhiên $k \ge 3$ bất kì cho trước, tồn tại cấp số cộng độ dài k gồm toàn số nguyên tố.*

Xem thế đủ biết còn vấn đề số học có vẻ rất "sơ cấp" đang chờ chúng ta và con cháu chúng ta giải quyết.



ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN

VŨ THÀNH NAM *(dịch)*

Kì 11

CLB51. Find the number of roots of the following equation.

$$(x-2017)(x^2-2018^2)(x^3-2019^3)(x^4-2020^4)=0.$$

CLB52. Let $P=\left|x^2-5\right|+\left|x^2-6\right|+\left|x^2-2017\right|$.

What is the value of x so that P attains its minimum value?

CLB53. The whole numbers from 1 to 50 are written on a board. Erase any two numbers and replace them with the absolute value of the difference of the two numbers. Repeat the same steps 49 times and there will be only one number x left on the board. Find the remainder when x^2 is divided by 8.

CLB54. Let x be an integer. Find the maximum value of the expression $M=\dfrac{2017}{2x^2-2x+1}$.

CLB55. Given an acute triangle ABC and its heights AD and BE. If AB = 13, AC = 15, and AD = 12, find the length of BE.

Kết quả

(TTT2 số 173+174)

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ

CLB41. Ta có $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{4}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=4$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\right)(a+b+c)=a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

CLB42. Ta có $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$.

Do đó

$A=1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+...+2016^2$
$=(1^2-2^2-3^2+4^2)+(5^2-6^2-7^2+8^2)+...+(2013^2-2014^2-2015^2+2016^2)=504.4=2016.$

CLB43. Đặt $x=\dfrac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z}$, $b>0$, $(a,b)=1$).

Ta có $x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{b(a+b)}$ là số nguyên. Suy ra $a^2+ab+b^2\,\vdots\, b\Rightarrow a^2\,\vdots\, b$.

Mà $(a, b) = 1$ nên $(a^2, b) = 1$, suy ra $b = 1$.

Do đó $a+\dfrac{1}{a+1}$ là số nguyên. Suy ra a + 1 là ước của 1 $\Rightarrow a+1\in\{1;-1\}\Rightarrow a\in\{0;-2\}\Rightarrow x\in\{0;-2\}$.

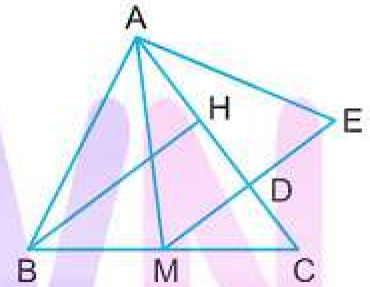
CLB44. Ta có $B=\dfrac{a^2+1}{ab+a+1}+\dfrac{b^2+1}{bc+b+1}+\dfrac{c^2+1}{ca+c+1}$

$$\ge\frac{2a}{ab+a+1}+\frac{2b}{bc+b+1}+\frac{2c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{2a}{ab+a+1}+\frac{2ab}{abc+ab+a}+\frac{2abc}{a^2bc+abc+ab}$$

$$=\frac{2a}{ab+a+1}+\frac{2ab}{1+ab+a}+\frac{2}{a+1+ab}=\frac{2(ab+a+1)}{ab+a+1}=2.$$

CLB45.



Vẽ $MD\perp AC$ tại D, trên tia đối của tia DM lấy điểm E sao cho DE = DM.

Ta có tam giác AME cân tại A nên AM = AE.

Vì MD là đường trung bình của tam giác HBC nên

$MD=\dfrac{BH}{2}\Rightarrow BH=ME$. Mà AM = BH (gt).

Suy ra AM = AE = ME. Từ đó ΔAME là tam giác đều $\Rightarrow\widehat{MAE}=60^o\Rightarrow\widehat{MAC}=\dfrac{\widehat{MAE}}{2}=30^o$.

Các bạn có lời giải tốt, được thưởng kì này: *Nguyễn Hưng Phát*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Hữu Tuấn Nam, Nghiêm Thị Mai Phương*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên phong, **Bắc Ninh**; *Lê Minh Quỳnh Anh*, 8F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Hoàng Thị Việt Hằng*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**.

Các bạn sau được khen kì này: *Nguyễn Hà Thân Lâm, Hà Minh Hiếu*, 8F, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

CUỘC THI TOÁN QUỐC TẾ KANGAROO 2016

LỚP 7-8

Thời gian làm bài: *75 phút*

ĐỖ THỊ THÚY NGỌC

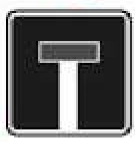
(Sở Giáo dục và Đào tạo Ninh Bình, dịch)

Các câu hỏi 3 điểm

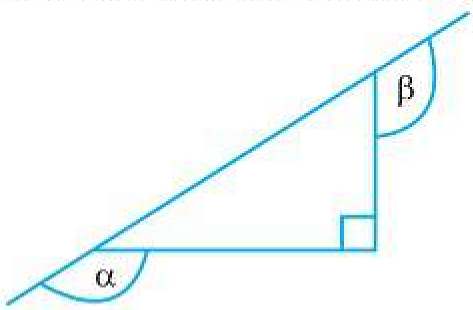
Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên nằm giữa hai số 3,17 và 20,16?

A. 15   B. 16   C. 17   D. 18   E. 19

Câu 2. Trong các biển báo giao thông dưới đây, biển báo nào có nhiều trục đối xứng nhất?

A. 
B. 
C. 
D. 
E. 

Câu 3. Tìm tổng của hai góc được đánh dấu α và β.

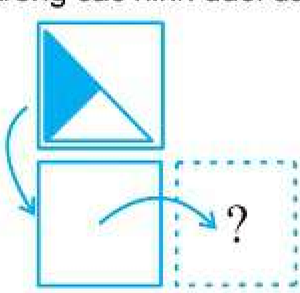


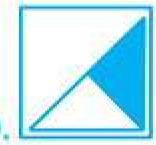
A. 150^o B. 180^o C. 270^o D. 320^o E. 360^o

Câu 4. Jenny phải làm phép cộng số 26 với một số cho trước. Thay vì thế cô ấy trừ số cho trước đó cho 26 và thu được kết quả bằng -14. Tìm kết quả của phép cộng lẽ ra cô ấy thu được.

A. 28   B. 32   C. 36   D. 38   E. 42

Câu 5. Joanna lật một tấm thẻ qua cạnh bên dưới rồi qua cạnh bên phải như trong hình vẽ. Cô ấy thấy hình nào trong các hình dưới đây?



A. 
B. 
C. 
D. 
E. 

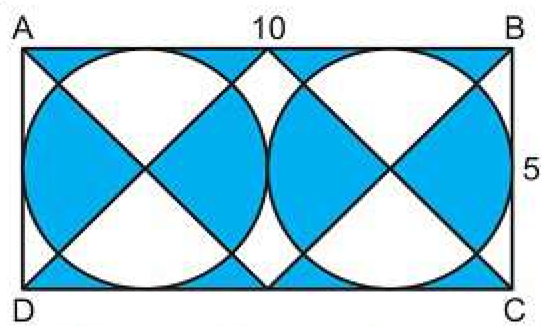
Câu 6. Kanga gom 555 vốc đá, mỗi vốc có 9 viên, thành một đống. Sau đó cô ấy chia đống đá thành các vốc, mỗi vốc có 5 viên. Hỏi cô ấy thu được bao nhiêu vốc đá?

A. 999   B. 900   C. 555   D. 111   E. 45

Câu 7. Trong trường em, 60% giáo viên đi tới trường bằng xe đạp, số giáo viên đó là 45 người. Chỉ 12% giáo viên sử dụng ô tô của họ để đi tới trường. Hỏi có bao nhiêu giáo viên đi tới trường bằng ô tô?

A. 4   B. 6   C. 9   D. 10   E. 12

Câu 8. Diện tích của phần được tô đậm bằng bao nhiêu?

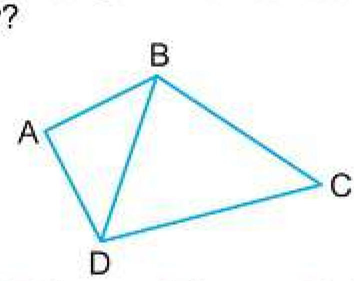


A. 12.5   B. 20   C. 25   D. 30   E. 37.5

Câu 9. Hai đoạn dây dài 1 m và 2 m. Alex cắt các đoạn dây thành các mẩu dây. Tất cả các mẩu dây có độ dài bằng nhau. Số nào dưới đây không thể là tổng số mẩu dây mà Alex thu được?

A. 6   B. 8   C. 9   D. 12   E. 15

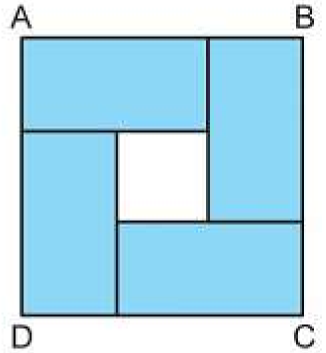
Câu 10. Bốn thành phố A, B, C, D được kết nối bởi các con đường như hình vẽ. Một đường đua đi qua mỗi con đường đúng một lần. Đường đua bắt đầu tại B và kết thúc tại D. Hỏi có bao nhiêu đường đua như vậy?



A. 10   B. 8   C. 6   D. 4   E. 2

Các câu hỏi 4 điểm

Câu 11. Hình bên phải cho thấy bốn hình chữ nhật bằng nhau được đặt trong hình vuông ABCD. Chu vi của mỗi hình chữ nhật bằng 16. Tìm chu vi của hình vuông ABCD.



A. 16 B. 20 C. 24 D. 28 E. 32

Câu 12. Petra có 49 hạt đậu màu xanh và một hạt đậu màu đỏ. Petra cần phải bỏ đi bao nhiêu hạt đậu để 90% số đậu còn lại của cô ấy là màu xanh?

A. 4 B. 10 C. 29 D. 39 E. 40

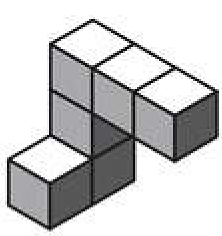
Câu 13. Phân số nào dưới đây có giá trị gần với $\frac{1}{2}$ nhất?

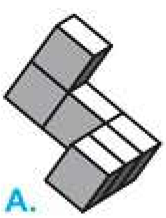
A. $\frac{25}{79}$ B. $\frac{27}{59}$ C. $\frac{29}{57}$ D. $\frac{52}{79}$ E. $\frac{57}{92}$

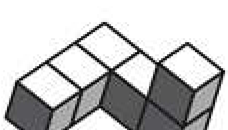
Câu 14. Ivor ghi lại kết quả của các trận tứ kết, bán kết và chung kết của một giải đấu loại trực tiếp. Các kết quả đó là (không nhất thiết theo đúng thứ tự tứ kết, bán kết và chung kết): Bart thắng Antony, Carl thắng Damien, Glen thắng Henry, Glen thắng Carl, Carl thắng Bart, Ed thắng Fred and Glen thắng Ed. Hỏi cặp đôi nào chơi ở trận chung kết?

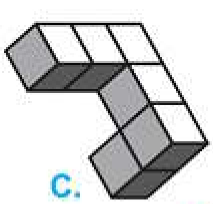
A. Glen và Henry B. Glen và Carl
C. Carl và Bart D. Glen và Ed
E. Carl và Damien

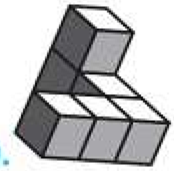
Câu 15. Anne dán một số hình lập phương lại với nhau như hình bên. Cô ấy quay hình khối thu được để quan sát nó từ các hướng khác nhau. Cô ấy không thể thấy được hình nào trong các hình dưới đây?

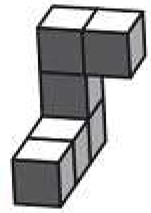



A.


B.


C.


D.


E.

Câu 16. Tim, Tom và Jim là anh em sinh ba (ba anh em sinh cùng một ngày). Hai em sinh đôi John và James ít hơn họ 3 tuổi. Số nào dưới đây có thể là tổng số tuổi của cả năm anh em?

A. 36 B. 53 C. 76 D. 89 E. 92

Câu 17. Tìm chữ số hàng đơn vị của số $2^{2016} + 2016^2$.

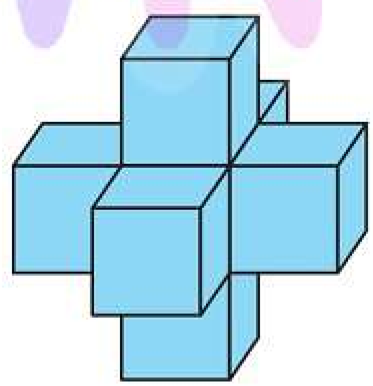
A. 0 B. 2 C. 4 D. 6 E. 8

Câu 18. Hai chú kăng-ga-ru Jum và Per bắt đầu nhảy cùng một lúc, từ cùng một điểm, theo cùng một hướng. Kể từ đó, mỗi giây chúng nhảy một lần. Mỗi bước nhảy của Jum dài 6 m. Bước nhảy đầu tiên của Per dài 1 m, bước nhảy thứ hai dài 2 m, bước nhảy thứ ba dài 3 m, v.v.... Hỏi sau bao nhiêu bước nhảy thì Per bắt kịp được Jum?

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13 E. 14

Câu 19. Sáu quân súc sắc dạng tiêu chuẩn được dán lại với nhau để tạo thành một hình khối như trong hình vẽ. Hai mặt được dán lại với nhau của hai quân súc sắc có cùng một số chấm. Hỏi có bao nhiêu chấm trên các mặt của hình khối?

A. 24 B. 90 C. 95 D. 105 E. 126

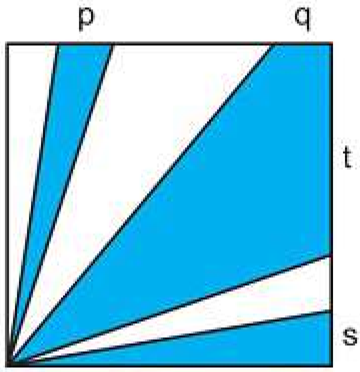


Câu 20. Một lớp học có 20 học sinh. Họ ngồi thành từng cặp sao cho có đúng một phần ba số bạn nam ngồi với bạn nữ và có đúng một nửa số bạn nữ ngồi với bạn nam. Hỏi có bao nhiêu bạn nam trong lớp học đó?

A. 9 B. 12 C. 15 D. 16 E. 18

Các câu hỏi 5 điểm

Câu 21. Trong một hình vuông có diện tích bằng 36, có một số miền được tô đậm như hình vẽ. Tổng diện tích các miền được tô đậm là 27. Tìm tổng p + q + r + s.



A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 9 **E.** 10

Câu 22. Đồng hồ của Theo chạy chậm 10 phút, nhưng anh ấy tin rằng nó chạy nhanh 5 phút. Đồng hồ của Leo chạy nhanh 5 phút, nhưng anh ấy tin rằng nó chạy chậm 10 phút. Vào cùng một thời điểm, mỗi người trong họ nhìn vào đồng hồ của mình. Theo nghĩ rằng lúc đó là 12 giờ. Hỏi Leo nghĩ lúc đó là mấy giờ?

A. 11:30 **B.** 11:45 **C.** 12:00 **D.** 12:30 **E.** 12:45

Câu 23. Mười hai bạn nữ gặp nhau trong một quán cà phê. Trung bình mỗi bạn ăn 1,5 cái bánh ngọt. Không có ai trong số họ ăn nhiều hơn hai cái bánh ngọt và có hai người trong số họ chỉ uống nước khoáng. Hỏi có bao nhiêu bạn nữ ăn hai cái bánh ngọt?

A. 2 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** 8

Câu 24. Cô bé quàng khăn đỏ mang bánh đến cho ba người bà. Ban đầu cô ấy có một giỏ đầy bánh. Ngay trước khi cô bé đến nhà một người bà, Chó sói ăn hết một nửa số bánh trong giỏ của cô bé. Khi cô ấy dời khỏi nhà của người bà thứ ba, cô ấy không còn cái bánh nào trong giỏ. Cô ấy đã mang đến cho các bà số bánh ngọt bằng nhau. Số bánh ban đầu cô ấy có chắc chắn chia hết cho số nào trong các số dưới đây?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** 9

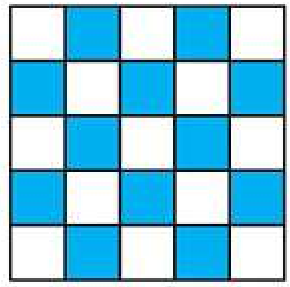
Câu 25. Một số nguyên dương được gọi là "suspicious" nếu tổng các chữ số của nó lớn hơn tích các chữ số. Tìm số các số nguyên dương suspicious có hai chữ số.

A. 13 **B.** 26 **C.** 39 **D.** 44 **E.** 79

Câu 26. Có một vài số nguyên dương khác nhau được viết lên bảng. Tích của hai số nhỏ nhất là 16. Tích của hai số lớn nhất là 225. Tìm tổng của các số nguyên được viết lên bảng.

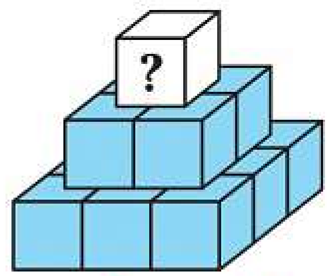
A. 38 **B.** 42 **C.** 44 **D.** 58 **E.** 243

Câu 27. Một hình vuông 5×5 được chia thành 25 ô vuông nhỏ. Ban đầu tất cả các ô vuông đều mầu trắng. Các ô vuông liền kề là các ô vuông có một cạnh chung. Mỗi bước di chuyển từ ô này sang ô kia thì màu của hai ô đó được đổi thành màu ngược lại (màu trắng trở thành đen và màu đen trở thành trắng). Tìm số nhỏ nhất các bước di chuyển cần thiết để đạt được một cách tô màu giống bàn cờ như hình vẽ.



A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14 **E.** 15

Câu 28. Katie viết các số nguyên dương khác nhau lên mỗi một trong mười bốn khối lập phương của kim tự tháp. Tổng của chín số nguyên viết trên các khối lập phương ở đáy bằng 50. Số nguyên viết trên mỗi khối lập phương bằng tổng của các số nguyên viết trên bốn khối lập phương nằm ngay dưới nó. Tìm số nguyên lớn nhất có thể được viết lên khối lập phương ở trên cùng.



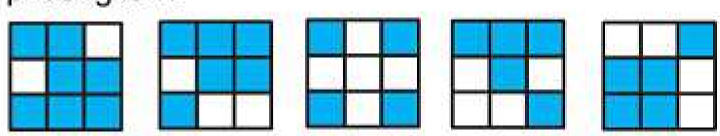
A. 98 **B.** 104 **C.** 110 **D.** 118 **E.** 120

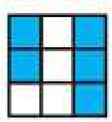
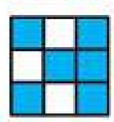
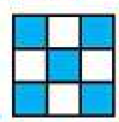
Câu 29. Một đoàn tàu có năm toa, mỗi toa có ít nhất một hành khách. Hai hành khách được gọi là "láng giềng" nếu hai người ngồi trong cùng một toa hoặc trong hai toa cạnh nhau. Mỗi hành khách có đúng năm hoặc mười "láng giềng". Hỏi có bao nhiêu hành khách trên đoàn tàu?

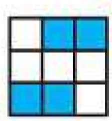
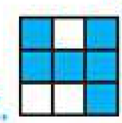
A. 13 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 20

E. Có nhiều hơn một khả năng

Câu 30. Một khối lập phương lớn $3 \times 3 \times 3$ được tạo nên từ 15 khối lập phương nhỏ màu đen và 12 khối lập phương nhỏ màu trắng. Năm mặt của khối lập phương lớn đã được chỉ ra ở hình bên phải. Hình nào dưới đây là mặt thứ sáu của khối lập phương lớn?



A.  **B.**  **C.** 

D.  **E.** 

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM BỐN MƯƠI CHÍN

Người thách đấu: *Thái Nhật Phượng*, GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.

Bài toán thách đấu: Cho tam giác nhọn ABC không cân tại A. Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H, K theo thứ tự là trực tâm của ΔABC và ΔAEF. HK cắt EF tại L và DL cắt AH tại J. Chứng minh rằng AJ = r.

Thời hạn: Trước ngày 08.12.2017 theo dấu bưu điện.

Kết quả **(TTT2 số 173+174)**

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM BỐN MƯƠI BẢY

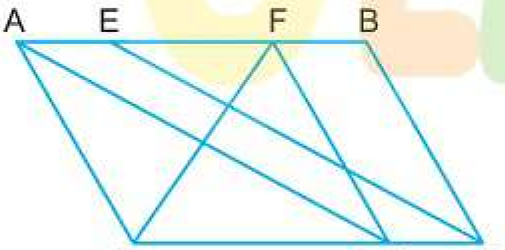
Ta cần có hai bổ đề.

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC, (I), (I_A) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp trong góc A. Gọi D, A_1 theo thứ tự là tiếp điểm của (I), (I_A) và BC. Khi đó $BD = CA_1$.

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề này.

Bổ đề 2. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{ABC} > 90^o$. Hai điểm E, F trên cạnh AB sao cho AE = BF. Khi đó CE > DF.

Chứng minh. Lấy G thuộc đoạn CD sao cho CG = AE = BF *(hình 1)*.



Hình 1

Dễ thấy các tứ giác AECG và AFGD là hình bình hành.

Từ đó, chú ý rằng $\widehat{AFG} = \widehat{ABC} > 90^o$.

Suy ra CE = GA > DF.

Trở lại giải bài toán thách đấu.

Gọi (I, r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC; D, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I, r) và BC, BA; H là hình chiếu của B trên AC *(hình 2)*.

Trong hai góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{CBA}$ có một góc nhọn.

Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{BAC} < 90^o$.

Dựng hình bình hành ABGC.

Dễ thấy các tam giác ABC và GCB bằng nhau.

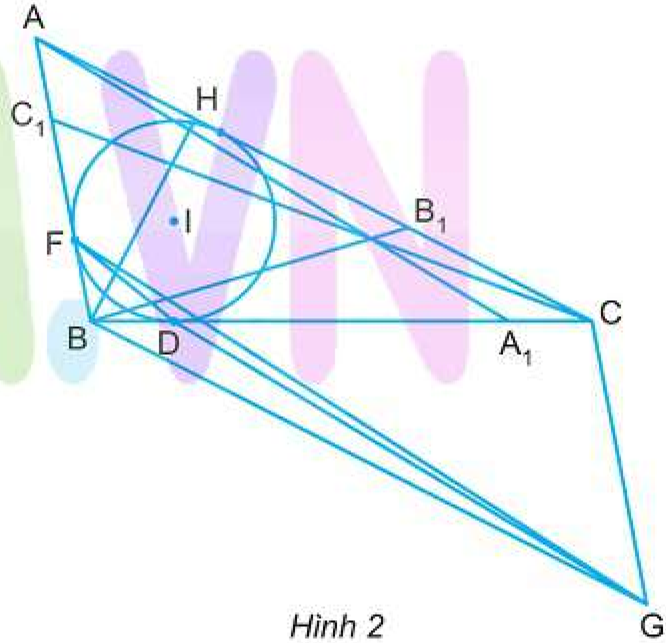
Theo bổ đề 1 ta có $CA_1 = BD$.

Vậy các tam giác ACA_1 và GBD bằng nhau.

Do đó $AA_1 = GD$. (1)

Vì $\widehat{BAC} < 90^o$ và AC // BG nên

$\widehat{ABG} = 180° - \widehat{BAC} > 90°$.



Hình 2

Theo bổ đề 1 ta có $BF = AC_1$.

Do đó theo bổ đề 2 ta có $GF > CC_1$. (2)

Mặt khác $BB_1 > BH > 2r > DF$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$AA_1 + BB_1 = GD + BB_1 > GD + DF > GF > CC_1$.

Chứng minh tương tự ta được

$CC_1 + BB_1 > AA_1$;

$AA_1 + CC_1 > BB_1$.

Vậy AA_1, BB_1, CC_1 là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Nhận xét. Rất tiếc bài này không có võ sĩ nào có lời giải đúng. Phần thưởng xin gác lại kì sau.

NGUYỄN MINH HÀ

APEC QUA CÁC CON SỐ VÀ BIỂU ĐỒ

VŨ NAM HÀ

APEC là viết tắt của ASIA - PACIFIC ECONOMIC COOPERATION (Diễn đàn Hợp tác Kinh tế châu Á - Thái Bình Dương) là một tổ chức diễn đàn hiện tập hợp 21 nền kinh tế thành viên: Canada, Brunei, Australia, Hàn Quốc, Indonesia, Malaysia, Mỹ, New Zealand, Philippines, Nhật Bản, Singapore, Thái Lan, Đài Loan, Hồng Kông, Trung Quốc, Chile, Mexico, Papua New Guinea, Nga, Peru và Việt Nam. Việt Nam tham gia từ 11.1998. Mục tiêu của APEC là tăng cường mối quan hệ về kinh tế và chính trị giữa 21 nền kinh tế.

Các trụ cột hợp tác chính là:

- Tự do hóa thương mại và đầu tư.
- Thuận lợi hóa kinh doanh.
- Hợp tác kinh tế - kĩ thuật.

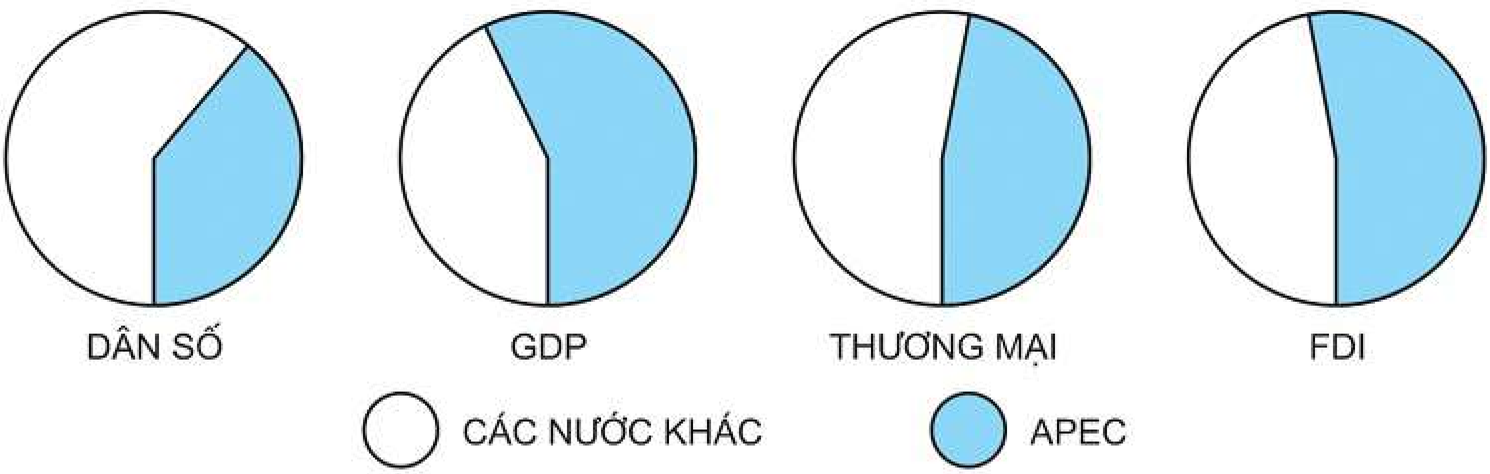
Diễn đàn hoạt động dựa trên tinh thần đồng thuận, tự nguyện và không ràng buộc. APEC không có hiến chương hay điều lệ. Hiện APEC đạt quy mô 2,8 tỉ dân và 44 000 tỉ USD.

APEC chiếm 39% dân số toàn cầu

57% GDP của thế giới

47% GDP thương mại thế giới

53% FDI của thế giới



Diễn đàn tổ chức các kì họp thường niên tại mỗi quốc gia với mục đích tăng cường kết nối, thương mại, đầu tư, tạo việc làm, hướng tới thịnh vượng. Hội nghị các quan chức cấp cao gọi tắt là SOM. Mặc dù thành lập từ 1989 nhưng tới 1993 mới có Hội nghị Lãnh đạo APEC. Trụ sở APEC đặt tại Singapore. Mục tiêu Bogor của APEC là một thỏa thuận quan trọng ra đời 1994. Một cột mốc mới 2001 là Nghị trình phát triển Doha. Trong cuộc họp thượng đỉnh, lãnh đạo các nền kinh tế thường mặc quốc phục của nước chủ nhà. Việt Nam đã đăng cai Hội nghị APEC một lần vào 18, 19.11.2006. Năm nay là lần thứ hai Việt Nam đảm nhận vai trò chủ nhà của APEC với các hoạt động diễn ra tại 10 địa phương và trọng tâm là Hội nghị Thượng đỉnh APEC tại Đà Nẵng.

Đây là hội nghị cấp cao lần thứ 29.

CHỈ NHẮC

Bố hỏi Tí: - Trước khi đi công tác, bố đã dặn con ở nhà không được dạy con vẹt nói những câu linh tinh. Vậy mà con lại dạy nó là sao?

Tí: - Con không dạy đâu ạ. Hàng ngày con chỉ nhắc cho vẹt biết những câu linh tinh mà nó không được nói thôi.

Bố: - Trời!!!

LO

Tí hỏi Tèo: - Lúc nãy trong giờ kiểm tra tớ thấy cậu có vẻ rất lo lắng. Không làm được bài nên cậu sợ à?

Tèo: - Không! Tớ đâu có lo vì không làm được bài. Tớ lo vì thấy hai đứa hai bên làm ra hai kết quả khác nhau.

TỪ HÀNG XÓM

Thầy giáo hỏi Tí:

- Em có biết chúng ta nhập khẩu những gì từ Ấn Độ không?
- Không ạ.
- Thế một số loại gia vị mẹ em vẫn dùng nấu ăn thì từ đâu mà có?
- Dạ, từ nhà mấy bác hàng xóm ạ.

NGUYỄN THỊ DIỆU NGA

(Số 80 đường Xuân 68, TP. Huế, Thừa Thiên - Huế)

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ ĐƯỢC TỔ CHỨC THẾ NÀO?

BÍNH NAM HÀ

1. Các mục đích của Olympic Toán học Quốc tế (viết tắt là IMO):

Phát hiện, khích lệ và thử thách các học sinh phổ thông có năng khiếu Toán học ở tất cả các nước;

Vun đắp mối quan hệ bè bạn giữa những người làm toán của tất cả các nước;

Tạo cơ hội cho sự trao đổi thông tin về chương trình và thực tiễn giảng dạy trong nhà trường phổ thông trên toàn thế giới.

2. Việc tham dự IMO được thực hiện theo lời mời. Mỗi nước được mời một đoàn gồm Trưởng đoàn, Phó Trưởng đoàn và tối đa sáu thí sinh.

Các thí sinh phải là những người chưa được vào học trường đại học hoặc các trường thuộc bậc học tương đương. Thí sinh không quá 19 tuổi tính từ ngày thi thứ hai.

Nước chủ nhà của kì thi đài thọ toàn bộ chi phí về ăn, ở, sinh hoạt cho các học sinh dự thi, các Trưởng đoàn và các Phó Trưởng đoàn trong suốt thời gian chính thức của kì thi. Các nước có đoàn, Trưởng đoàn hay Phó Trưởng đoàn lưu trú tại nước chủ nhà trong các ngày nằm ngoài thời gian chính thức của kì thi phải tự chịu toàn bộ chi phí của mình trong những ngày đó.

Các quan sát viên và người thân trong gia đình có thể đi cùng Trưởng đoàn hay Phó Trưởng đoàn, nhưng phải tự lo mọi khoản chi phí của mình. Nếu cần thiết, nước chủ nhà có thể hạn chế số lượng các quan sát viên, người thân này.

Mỗi nước được mời và có ý định tham dự IMO cần gửi giấy chính thức chấp thuận tham dự tới Ban tổ chức kì thi vào ngày được ấn định.

Mỗi nước tham dự kì thi cần gửi Ban tổ chức các thông tin theo yêu cầu, đúng thời gian quy định.

3. Mỗi nước tham dự kì thi được đề xuất các bài toán, cùng lời giải, để nước chủ nhà xem xét, tuyển chọn. Các bài toán và lời giải cần được diễn đạt bằng một trong các thứ tiếng: tiếng Anh, tiếng Pháp, tiếng Đức, tiếng Nga hoặc tiếng Tây Ban Nha.

Ban tổ chức kì thi không được phân phát các bài toán đã được tuyển chọn cho các học sinh dự thi.

4. Việc làm bài thi được tiến hành trong hai ngày. Thời gian làm bài thi của mỗi ngày là 4 giờ 30 phút, đề thi của mỗi ngày gồm ba bài toán, mỗi bài toán được đánh giá 7 điểm.

Đề thi sẽ được chuyển tới từng thí sinh và được diễn đạt bằng ngôn ngữ của nước có thí sinh đó, do Trưởng đoàn của nước đó dịch và phải thông qua Ban Đề thi để tránh có những gợi ý thêm.

Các thí sinh làm bài độc lập và trình bày lời giải bằng ngôn ngữ của nước mình. Việc làm bài của các thí sinh phải được ngừng vào cùng một thời điểm, ngoại trừ các tình huống đặc biệt; các tình huống này phải được báo về Hội đồng thi (Jury) một cách nhanh nhất có thể.

Các dụng cụ được phép mang vào phòng thi chỉ gồm bút viết và dụng cụ vẽ hình. Nói riêng, không được phép mang vào phòng thi sách, vở, giấy các loại, các bảng, biểu, máy tính bỏ túi và máy tính cá nhân.

Các lời giải của mỗi thí sinh sẽ được đánh giá trước hết bởi Trưởng đoàn và Phó Trưởng đoàn của đoàn có thí sinh đó.

Ngoại trừ các trường hợp có tranh cãi và được các Trưởng đoàn chuyển đến Hội đồng thi xem xét, kết quả chấm cuối cùng được quyết định bởi các giám khảo do Ban tổ chức kì thi chỉ định. Điểm chấm của mỗi bài toán thi của mỗi thí sinh, đã được Trưởng đoàn của thí sinh đó và các giám khảo thống nhất, sẽ được ghi lại và kí xác nhận bởi Trưởng đoàn và một trong các giám khảo chấm bài toán thi đó.

Với mỗi bài toán thi, việc chấm lời giải của thí sinh nước chủ nhà phải do Trưởng đoàn của nước đề nghị bài toán thi đó thực hiện.

Số lượng giải Nhất, giải Nhì, giải Ba được tính xấp xỉ theo tỉ số 1 : 2 : 3 và được quyết định bởi các Trưởng đoàn khi xét điểm số của các thí sinh. Tổng số giải Nhất, Nhì, Ba khoảng bằng một nửa tổng số thí sinh dự thi.

Các lời giải được Hội đồng thi đánh giá là độc đáo có thể được trao các giải thưởng đặc biệt.

Thí sinh không đạt giải nào trong số các giải Nhất, Nhì, Ba sẽ được nhận Bằng khen, nếu thí sinh đó đạt điểm tối đa (7) ở ít nhất một bài toán thi.

Mỗi thí sinh đều được nhận một giấy chứng nhận đã tham dự kì thi.

5. Hội đồng thi gồm tất cả các Trưởng đoàn; Chủ tịch; Phó Chủ tịch Hội đồng thi do Ban tổ chức kì thi chỉ định. Trưởng đoàn có thể được thay thế bởi Phó Trưởng đoàn của đoàn đó. Các quan sát viên có thể tham dự các cuộc họp của Hội đồng thi, nhưng không được phép phát biểu hoặc biểu quyết. Các Phó Trưởng đoàn được phép tham dự các cuộc họp của Hội đồng thi được tổ chức sau các ngày thi, nhưng không được quyền phát biểu hay biểu quyết.

Chủ tịch và mỗi Trưởng đoàn có một lá phiếu. Các đề xuất sẽ được thông qua bởi đa số phiếu biểu quyết. Trong trường hợp hai bên có số phiếu bằng nhau, Chủ tịch sẽ có lá phiếu quyết định.

Hội đồng thi có thể thành lập các tiểu ban để xem xét các vấn đề riêng biệt.

Về nguyên tắc, ngôn ngữ được dùng trong các cuộc họp của Hội đồng thi là tiếng Anh. Khi có yêu cầu, và nói riêng, trước mỗi lần biểu quyết, các đề xuất sẽ được dịch sang tiếng Pháp, tiếng Đức, tiếng Nga và các thứ tiếng khác mà nước chủ nhà cho rằng cần thiết.

Với các bài toán đã được chọn làm bài toán thi, trước hết Hội đồng thi phải phê duyệt phương án diễn đạt bằng tiếng Anh các bài toán đó. Phương án diễn đạt cuối cùng bằng tiếng Anh, tiếng Pháp, tiếng Đức, tiếng Nga và tiếng Tây Ban Nha của đề thi phải được phê chuẩn bởi Hội đồng thi.

Hội đồng thi có trách nhiệm:

Xác nhận tư cách của tất cả các thí sinh theo các điều kiện dự thi đã được quy định;

Tuyển chọn các bài toán thi từ các bài toán đã được Ban Tuyển chọn các bài toán sơ tuyển;

Phê duyệt các bản dịch sang tất cả các thứ tiếng theo yêu cầu của các bài toán được chọn làm bài toán thi.

Xem xét các câu hỏi được các thí sinh viết ra và trình lên trong nửa giờ đầu tiên của mỗi ngày thi, quyết định các phương án trả lời các câu hỏi đó.

Sau các ngày thi:

Xem xét các tranh luận liên quan tới việc cho điểm bài thi có thể nảy sinh trong quá trình chấm thi, và quyết định điểm số thỏa đáng dành cho bài thi;

Phê chuẩn kết quả của tất cả các thí sinh;

Quyết định các giải Nhất, Nhì, Ba;

Quyết định các giải đặc biệt được đề nghị;

Tiếp nhận báo cáo của Ban tư vấn các kì IMO (IMOAB);

Xem xét các vấn đề nảy sinh liên quan đến tương lai của các kì IMO.

Hỏi: Anh Phó ơi! Có phải tạp chí Toán Tuổi thơ phát hành theo các tháng trong năm học không ạ?

Nhóm yêu Toán Tuổi thơ
(Trường Thực hành Sư phạm, TP. Trà Vinh, Trà Vinh)

Đáp:

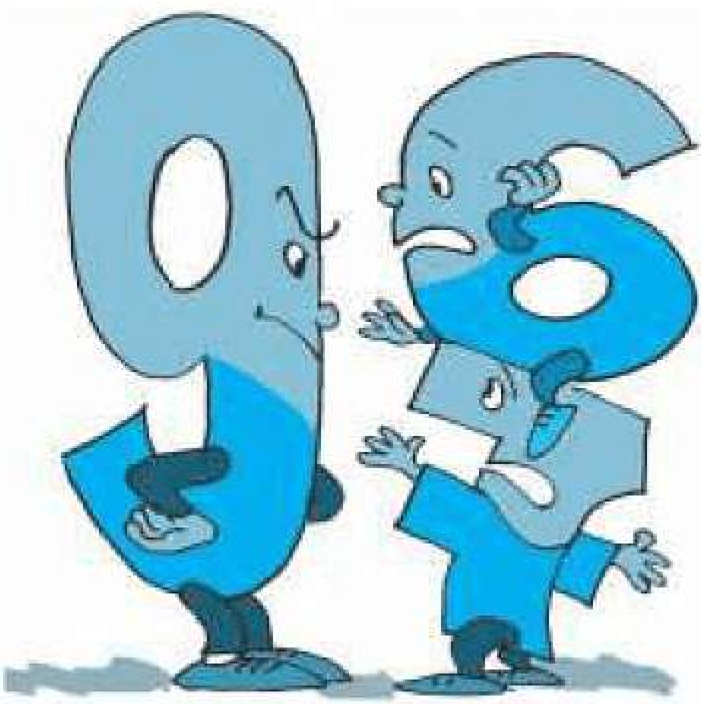
Báo ra thành 9 số
Từ tháng 9 đầu tiên
Đến tháng 5 cuối cùng
Nhưng có 6 số đơn
Còn có 3 số gộp
Tính ra theo dung lượng
Mười hai tháng bình thường

Hỏi: Anh Phó ơi! Em đang học lớp 8 thì em có được làm các bài giải toán qua thư dành cho lớp 6 và 7 và gửi về tòa soạn không ạ?

Một bạn quên ghi tên

Đáp:

Em được làm lớp 9
Tức là được thử tài
Lớp 6, 7 thì thôi
Dành cho bạn lớp dưới
Bài nếu mà cứ gửi
Thì chỉ để ôn thôi
Điểm sẽ không được tính



Hỏi: Anh Phó ơi! Em muốn đặt mua tất cả các số tạp chí trong năm học thì làm thế nào ạ?

ĐỖ THU HÀ
(7B, THCS Thành Công, Q. Đống Đa, Hà Nội)

Đáp:

Biện pháp dễ dàng nhất
Ra bưu điện gần nhà
Tiền đóng rồi nhẩn nha
Báo gửi về từng số
Bảo cho bạn nữa nhé
Đỡ mất công tìm mua

ANH PHÓ

PHIẾU
ĐĂNG KÍ THAM DỰ CUỘC THI GTQT NĂM HỌC 2017-2018

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(176+177). Tìm số có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $\overline{abc} = \dfrac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2}$, biết rằng a, b, c là các chữ số khác nhau và khác 0.

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 2(176+177). Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} < 60^o$. Giả sử M là điểm nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{MAC} = \widehat{MBA} = \widehat{MCB}$. Chứng minh rằng $MB < MC$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

(Số 3/29E, đường Đà Nẵng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THCS

Bài 3(176+177). Cho 2017 số $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2017}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 + 9a_3 + ... + 2017^2 a_{2017} = 1 \\ 4a_1 + 9a_2 + 16a_3 + ... + 2018^2 a_{2017} = 12 \\ 9a_1 + 16a_2 + 25a_3 + ... + 2019^2 a_{2017} = 123. \end{cases}$$

Tính $M = 16a_1 + 25a_2 + 36a_3 + ... + 2020a_{2017}$.

PHÙNG VĂN LONG

(GV. THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài 4(176+177). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{4+bc} + \frac{b+c}{4+ca} + \frac{c+a}{4+ab} \ge \frac{3}{2}.$$

MAI VĂN NĂM

(GV. THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Bài 5(176+177). Cho một phong sôcôla kích thước 6×6 ô vuông. Tính xem phong sôcôla đó có thể bẻ thành tối đa bao nhiêu thanh có kích thước 1×4 ô vuông.

VŨ ĐÌNH HÒA

(GV. Đại học Sư phạm Hà Nội)

PHIẾU ĐĂNG KÍ THAM DỰ CUỘC THI GTQT NĂM HỌC 2017-2018

Bài 6(176+177). Cho đường tròn (O) và dây BC không là đường kính. Xét A là điểm nằm trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ và $AB \ne AC$. Trên đường trung trực của AC lấy điểm E sao cho $AE \perp AB$. Trên đường trung trực của AB lấy điểm F sao cho $AF \perp AC$. Tiếp tuyến tại O của đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF cắt đường trung trực của OA tại T. Chứng minh rằng T luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi A di chuyển trên trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ và $AB \ne AC$.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV. THPT chuyên KHTN, Hà Nội)

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Nam Vũ Thành

1(176+177). Find a 3-digit number $\overline{abc}$ such that $\overline{abc} = \dfrac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2}$, where *a*, *b*, and *c* are distinct non-zero digits.

2(176+177). Let *ABC* be an isosceles triangle with the vertex at *A* and $\angle A < 60^o$. Let *M* be a point inside the triangle such that $\angle MAC = \angle MBA = \angle MCB$. Prove that $MB < MC$.

3(176+177). Given 2017 numbers $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2017}$ such that

$$\begin{cases} a_1 + 4a_2 + 9a_3 + ... + 2017^2 a_{2017} = 1 \\ 4a_1 + 9a_2 + 16a_3 + ... + 2018^2 a_{2017} = 12 \\ 9a_1 + 16a_2 + 25a_3 + ... + 2019^2 a_{2017} = 123. \end{cases}$$

Determine the value of $M = 16a_1 + 25a_2 + 36a_3 + ... + 2020a_{2017}$.

4(176+177). Let *a*, *b*, and *c* be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Prove that

$$\frac{a+b}{4+bc} + \frac{b+c}{4+ca} + \frac{c+a}{4+ab} \ge \frac{3}{2}.$$

5(176+177). A chocolate bar has the shape of 6×6 small squares. From this chocolate bar, how many pieces in the shape of 1×4 squares can be obtained, at the maximum?

6(176+177). Given a circle (*O*) and a chord *BC* which is not a diameter. Consider a point *A* on the major arc $\overset{\frown}{BC}$ such that $AB \ne AC$. Let *E* be a point on the perpendicular bisector of *AC* such that $AE \perp AB$. Let *F* be a point on the perpendicular bisector of *AB* such that $AF \perp AC$. The tangent at *O* of the circumcircle of the triangle *OEF* intersects the perpendicular bisector of *OA* at *T*. Prove that *T* always lies on a fixed straight line when A moves along the major arc $\overset{\frown}{BC}$ and $AB \ne AC$.

TỪ TỰ NHIÊN ĐẾN NHÂN TẠO

Một mạch ADN trong cơ thể được phóng to? Không, đó chính là một vẻ đẹp nhân tạo, một vẻ đẹp của khoa học chứng minh sức sáng tạo của con người. Có thể bạn chưa hiểu lắm về ADN, nhưng vẻ đẹp của tạo hóa tạo nên trong ADN đã hiển hiện rạng rỡ trước mắt bạn bằng kim loại và chất dẻo. Nhân tạo và đẹp như tự nhiên. Bạn có thể viết gì về vẻ đẹp của chiếc cầu này?

VŨ HÀNH THIỆN

Ảnh: VKT

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.

Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.

Mã số: 8BTT176M17. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2017.