TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2017 Số 478

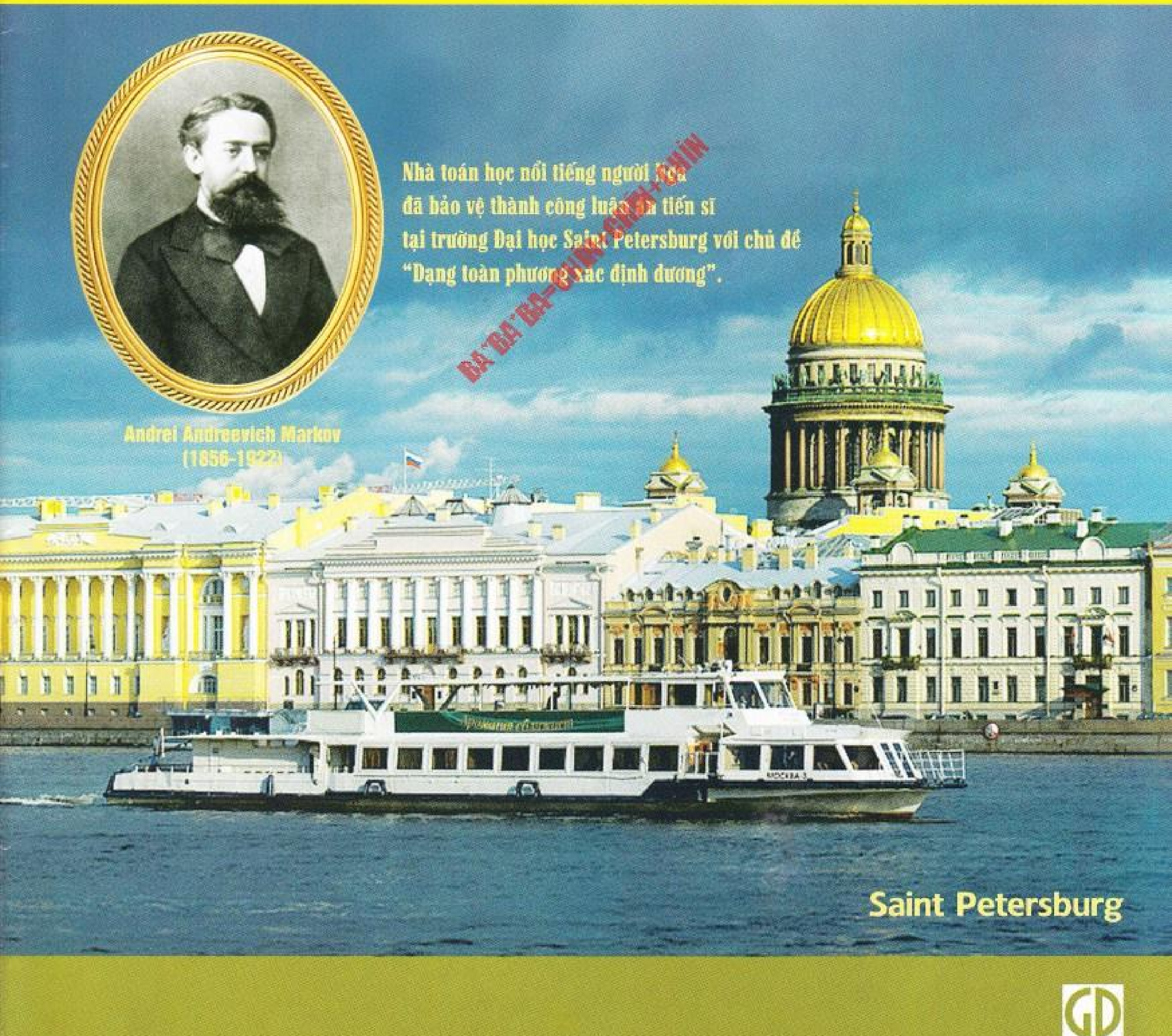
TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

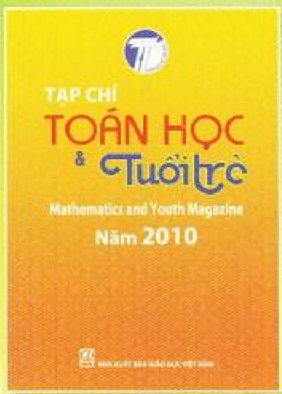


TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

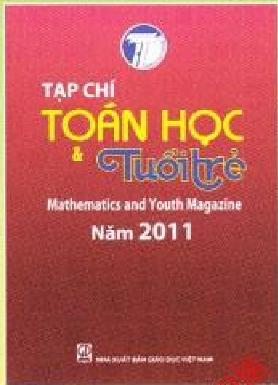
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

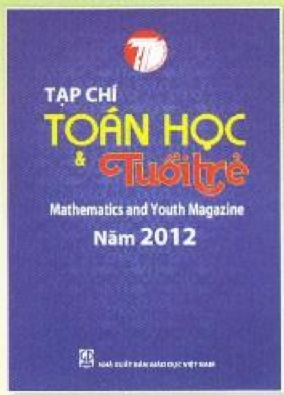
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



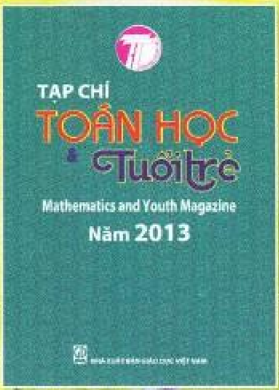
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



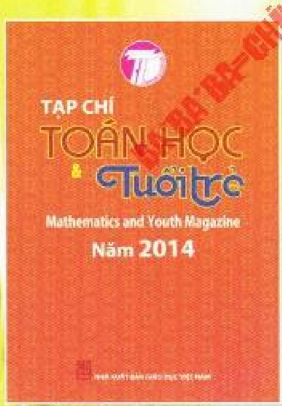
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



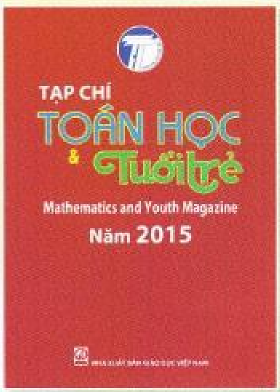
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



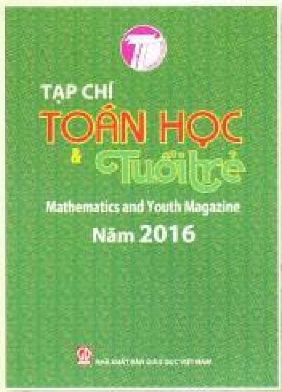
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Bạn đọc có thể đặt mua các cuốn Đóng tập này tại các cơ sở BƯU ĐIỆN trên toàn quốc hoặc đặt mua tại Tòa soạn.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- ĐT Biên tập: (04) 35121607
- ĐT/Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com
- Website: www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ƯỚC CHUNG, ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT TRONG TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Q. Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

Với 4 bài toán cơ bản ta có 4 dạng toán về ƯC, ƯCLN của các số tự nhiên.

DẠNG 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM ƯC, ƯCLN

Bài toán 1.1. *Cho phép chia có dư $a = bq + r$. Chứng minh: $(a,b) = (b,r)$ (kí hiệu (a,b) là ƯCLN (a,b)).*

Lời giải. Gọi $d \in \text{ƯC}(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bq+r \vdots d \\ bq \vdots d \end{cases} \Rightarrow r \vdots d.$

Từ $r \vdots d, b \vdots d,$ nên $d \in \text{ƯC}(b,r)$. Do đó mọi $\text{ƯC}(a,b)$ cũng là $\text{ƯC}(b,r)$ (1)

Gọi $d' \in \text{ƯC}(b,r) \Rightarrow \begin{cases} b \vdots d' \\ r \vdots d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bq \vdots d' \\ r \vdots d' \end{cases} \Rightarrow bq + r \vdots d'.$

Do đó $a = bq + r \vdots d', b \vdots d'$. Suy ra $d' \in \text{ƯC}(a,b)$.

Suy ra mọi $\text{ƯC}(b,r)$ cũng là $\text{ƯC}(a,b)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(a,b) = (b,r)$.

Nhận xét. Vận dụng bài toán 1.1 ta có thể giải các bài toán sau

Bài toán 1.2. a) *Tìm (187231, 165148).*

b) *Tìm* $\left(\underbrace{111...1}_{100 \text{ số } 1}, \underbrace{111...1}_{8 \text{ số } 1}\right)$.

Lời giải. a) Áp dụng $(a,b) = (bq + r, b) = (b,r)$ ta có

(187231, 165148) = (165148.1 + 22083, 165148)
= (165148, 22083)
= (22083.7 + 10567, 22083) = (22083, 10567)
= (10567.2 + 949, 10567)
= (10567, 949) = (949.11 + 128, 949) = (949, 128)
= (128.7 + 53, 128)= (128, 53) = (53.2 + 22, 53)
= (53, 22) = (22. 2 + 9, 22) = (22, 9)
= (9.2 + 4, 9) = (9, 4) = (4.2 + 1, 4)= (4, 1) = 1.

b) Có 100 = 8.12 + 4. Đặt a = 111...1 (100 chữ số 1); b = 111...1 (8 chữ số 1). Suy ra

$$(a,b) = \left(\underbrace{111...1}_{100 \text{ số } 1}, \underbrace{111...1}_{8 \text{ số } 1}\right) = \left(\underbrace{111...1}_{8 \text{ số } 1}, 1111\right) = 1111.$$

Suy ra $(a,b) = 1111$.

Bài toán 1.3. a) *Tìm ƯCLN của tất cả các số tự nhiên có 9 chữ số gồm các chữ số từ 1 đến 9.*

b) *Tìm ƯCLN của tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số gồm các chữ số từ 1 đến 6.*

Lời giải. a) Hiệu hai số 123456798 – 123456789 = 9.

Do đó ƯCLN của các số phải tìm thuộc {1; 3; 9}.

Lại có 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 $\vdots$ 9.

Do đó các số đã cho đều chia hết cho 9. Vậy ƯCLN của tất cả các số bằng 9.

b) Hiệu hai số 123465 – 123456 = 9.

Do đó ƯCLN của các số phải tìm thuộc {1; 3; 9}.

Lại có 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 $\vdots$ 3, do đó các số đã cho đều chia hết cho 3. Mặt khác số 123456 $\not\vdots$ 9, vậy ƯCLN của tất cả các số bằng 3.

Bài toán 1.4. *Cho* $a = 2^n + 3^n$; $b = 2^{n+1} + 3^{n+1}$; $c = 2^{n+2} + 3^{n+2}$.

a) *Chứng minh rằng a và b nguyên tố cùng nhau;*

b) *Tìm* $\text{ƯCLN}(a,c)$.

Lời giải. a) Gọi $(a,b) = d$

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots d \\ b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2^{n+1} + 2.3^n \vdots d \\ b = 2^{n+1} + 3.3^n \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow b - 2a = 3^n \vdots d$, mà $a = 2^n + 3^n \vdots d$

$\Rightarrow d \in \text{ƯC}(3^n, 2^n + 3^n) = \text{ƯC}(2^n, 3^n) = 1 \Rightarrow d = 1.$

Vậy a và b nguyên tố cùng nhau.

b) Gọi $(a,c) = k$

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots k \\ c \vdots k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 2^{n+2} + 4.3^n \vdots k \\ c = 2^{n+2} + 9.3^n \vdots k \end{cases} \Rightarrow c - 4a = 5.3^n \vdots k,$

mà $a = 2^n + 3^n$ không chia hết cho 3 với mọi n

$\Rightarrow k$ là ước của $5 \Rightarrow k = 1$ hoặc $k = 5$.

Bài toán 1.5. *Chứng minh trong 6 số tự nhiên liên tiếp khác 0*

a) *không có 2 số nào trong 6 số ấy có ƯC là số lớn hơn hoặc bằng 6;*

b) *có ít nhất 1 số nguyên tố cùng nhau với 5 số còn lại.*

Lời giải. a) Xét 2 trong 6 số tự nhiên liên tiếp có ƯC là m. Gọi 2 số đó là mk_1, mk_2, $(k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*, k_1 > k_2)$.

Ta có $0 < mk_1 - mk_2 = m(k_1 - k_2) \le 5$ (1)

Do $k_1 - k_2 \ge 1$ nên nếu $m \ge 6$ thì $m(k_1 - k_2) \ge 6$ (2)

Khi đó (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Do đó không có 2 số tự nhiên nào trong 6 số mà có ƯC lớn hơn hoặc bằng 6.

b) Từ (1) suy ra 2 trong 6 số tự nhiên liên tiếp đã cho có ƯC là các số nguyên tố: 2, 3 hoặc 5.

Mặt khác trong 6 số tự nhiên liên tiếp có 3 số lẻ, 3 số chẵn.

- Những số chẵn có ƯC là 2.
- Những số có ƯC là 3 nhiều nhất là 2 số trong đó có 1 số chẵn, 1 số lẻ.
- Những số có ƯC là 5 nhiều nhất là 2 số trong đó có 1 số chẵn, 1 số lẻ.

Trong cả ba trường hợp trên có nhiều nhất là 2 số lẻ, mỗi số có ƯC với 1 số khác (ƯC khác 1). Từ đó có ít nhất 1 số nguyên tố cùng nhau với 5 số còn lại.

Bài toán 1.6. *Tổng của 30 số tự nhiên khác 0 nhỏ hơn 1994. Gọi d là ƯCLN của các số đó. Tìm giá trị lớn nhất của d.*

Lời giải. Gọi 30 số tự nhiên là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$ (với $a_i \ne 0$) ; d = ƯCLN($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$)

Suy ra $a_1 = k_1 d,\ a_2 = k_2 d,\ a_3 = k_3 d, \ldots, a_{30} = k_{30} d$.

Do đó $1994 > a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{30}$

$$= d(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{30}).$$

Đặt $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{30} = k$, suy ra $1994 > dk$

Ta có $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{30} = k \ge 30$

$$\Rightarrow 1994 > dk \ge d.30 \Rightarrow d < 1994 : 30.$$

Suy ra $d \le 66$. Vậy d lớn nhất là 66, khi

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{30} = 66.$$

DẠNG 2. VẬN DỤNG ƯCLN ĐỂ TÌM CÁC SỐ

Bài toán 2.1. *Chứng minh nếu* ƯCLN$(a,b) = d$ *thì* $a = da'$, $b = db'$ *với* ƯCLN$(a',b') = 1$.

Lời giải. Giả sử ƯCLN$(a',b') = d' \ne 1$.

Suy ra $a' = d'a_1, b' = d'b_1$.

Suy ra $a = da' = dd'a_1, b = dd'b_1$. Do đó dd' là ƯC(a,b). Mà $dd' > d$ nên d không là ƯCLN(a,b).

Vậy $(a',b') = 1$.

Nhận xét. Vận dụng bài toán 2.1 ta có thể giải các bài toán sau

Bài toán 2.2. *Tìm 2 số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 192 và ƯCLN của chúng là 24.*

Lời giải. Gọi 2 số cần tìm là $a, b, (a, b \in \mathbb{N}^*)$. Ta có $a + b = 192$, ƯCLN$(a,b) = 24$. Từ ƯCLN$(a,b) = 24$ $\Rightarrow a = 24a', b = 24b', (a',b') = 1$.

Từ $a + b = 192 \Rightarrow 24a' + 24b' = 192 \Rightarrow a' + b' = 8$.

Do vai trò a, b như nhau, giả sử $a < b$ (do đó $a' < b'$).

Ta có các trường hợp:

* $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.24 \\ b = 7.24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 168 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3.24 \\ b = 5.24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 72 \\ b = 120 \end{cases}$.

Vậy các cặp số cần tìm là (24; 168), (72; 120).

Bài toán 2.3. *Tìm 2 số tự nhiên biết tích của chúng bằng 13500 và ƯCLN của chúng là 15.*

Lời giải. Gọi 2 số cần tìm là a, b $(a, b \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có $ab = 13500$, ƯCLN$(a,b) = 15$.

Suy ra $a = 15a', b = 15b', (a',b') = 1$.

Từ $ab = 13500$

$\Rightarrow 15a'.15b' = 13500 \Rightarrow a'b' = 60$.

Có $a'b' = 60 = 1.60 = 3.20 = 4.15 = 5.12$.

Do vai trò a, b như nhau, giả sử $a < b$ (do đó $a' < b'$).

Ta có các trường hợp:

* $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.15 \\ b = 60.15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 900 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 3 \\ b' = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3.15 \\ b = 20.15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 45 \\ b = 300 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 4 \\ b' = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4.15 \\ b = 15.15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 60 \\ b = 225 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 5 \\ b' = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5.15 \\ b = 12.15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 75 \\ b = 180 \end{cases}$.

Vậy các cặp số cần tìm là: (15; 900), (45; 300), (60; 225), (75; 180).

Bài toán 2.4. a) *Tìm* ƯCLN $(7n + 3, 8n - 1), n \in \mathbb{N}^*$;

b) *Khi nào hai số đó nguyên tố cùng nhau. Tìm n với* $30 < n < 90$ *để chúng nguyên tố cùng nhau.*

Lời giải. a) Gọi d = ƯCLN$(7n + 3, 8n - 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7n + 3 \vdots d \\ 8n - 1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8.(7n + 3) \vdots d \\ 7.(8n - 1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 56n + 24 \vdots d \\ 56n - 7 \vdots d \end{cases}.$$

Suy ra $31 \vdots d \Rightarrow d \in \{1; 31\}$.

b) Với $d = 31 \Rightarrow \begin{cases} 7n + 3 \vdots 31 \\ 8n - 1 \vdots 31 \end{cases} \Rightarrow 8n - 1 - (7n + 3) \vdots 31$

Suy ra $n - 4 \vdots 31$.

Đặt $n - 4 = 31k \Rightarrow n = 31k + 4$ $(k \in \mathbb{N})$.

Với $n = 31k + 4$ thì $7n + 3 = 7(31k + 4) + 3 \vdots 31$

và $8n-1=8(31k+4)-1\vdots 31$.

Do đó $n=31k+4$ thì $(7n+3,8n-1)=31$.

Vậy $(7n+3,8n-1)=1$ khi $n\neq 31k+4$.

Với $30<n<90$ khi $n\neq 31k+4$ thì $(7n+3,8n-1)=1$.

Suy ra: $30<31k+4<90 \Rightarrow k\in\{1;2\}$.

Vậy $n\neq 35, n\neq 66$ thì $(7n+3,8n-1)=1$.

Bài toán 2.5. *Tìm 5 số khác nhau trong dãy tính: $(**+**+**):**=**$. Biết rằng 5 số trên thoả mãn các điều kiện:*

• Trong ba số hạng trong ngoặc thì có một số là BCNN của 2 số kia.

• Số chia là số nguyên tố và là ƯCLN của 2 số nói trên.

Lời giải. Đặt p là số chia, p là số nguyên tố, $11\le p<100$. Khi đó 3 số trong ngoặc là pmn, pm, pn với $(m,n)=1$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$.

Vì $\text{BCNN}(pm,pn)=p.mn$, $\text{ƯCLN}(pm,pn)=p$.

Do các số khác nhau, suy ra $mn\ge 6$.

Lại có các số đều nhỏ hơn 100, suy ra $pmn<100$.

Suy ra $p.6\le pmn<100 \Rightarrow p<17$.

Từ p là số nguyên tố, $p\ge 11 \Rightarrow p\in\{11;13\}$.

* Trường hợp $p=11$, mà $pmn<100 \Rightarrow 11mn<100$ $\Rightarrow mn<10$.

Mà $mn\ge 6 \Rightarrow 6\le mn<10, (m,n)=1, m,n\neq 1$.

Do đó $mn=6 \Rightarrow m+n=5$. Khi đó

$$(pmn+pm+pn):p=mn+m+n=6+5=11=p.$$

Do đó thương bằng số chia (loại).

* Trường hợp $p=13$, $pmn<100 \Rightarrow 13mn<100$ $\Rightarrow mn<8$, mà $mn\ge 6 \Rightarrow 6\le mn<8 \Rightarrow mn=6$.

Suy ra $mn+m+n=11$. Vậy 5 số phải tìm là:

13. 6 = 78; 13. 3 = 39; 13. 2 = 26; 13 và 11.

DẠNG 3. SỐ LƯỢNG CÁC ƯỚC CỦA CÁC SỐ TỰ NHIÊN

Bài toán 3.1. *Cho số tự nhiên $N=a^xb^yc^z....$ với $a,b,c,...$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau, $x,y,z,...\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh số các ước của N là $(x+1)(y+1)(z+1)....$*

Lời giải. Gọi các ước của N có dạng $A,B,C,...$ trong đó A có $x+1$ cách chọn: $a^0, a^1, a^2,...,a^x$

B có $y+1$ cách chọn: $b^0, b^1, b^2,...,b^y$

C có $z+1$ cách chọn: $c^0, c^1, c^2,...,c^z$

....

Do đó số lượng các ước số của N là

$$(x+1)(y+1)(z+1)....$$

Nhận xét. Vận dụng bài toán 3.1 để giải các bài toán sau:

Bài toán 3.2. *Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có*

a) 9 ước số; *b) 12 ước số.*

Lời giải. a) Gọi số cần tìm là $N=a^xb^yc^z...$ với $a,b,c,...$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau; $x,y,z,...\in\mathbb{N}^*$.

Số các ước của N là $(x+1)(y+1)(z+1)...=9$.

Vì $x+1, y+1, z+1,...$ là các số tự nhiên lớn hơn 1, suy ra $x+1=y+1=3 \Rightarrow x=y=2$.

Do đó $N=a^2b^2$. Để N nhỏ nhất thì a,b phải là các số nguyên tố khác nhau nhỏ nhất.

Suy ra: $N=2^2.3^2=36$.

b) Tương tự phần a) Số $N=a^xb^yc^z....$

Ta có $(x+1)(y+1)(z+1)....=12=3.2.2$.

* Số N là lũy thừa của 3 thừa số nguyên tố,

suy ra $\begin{cases}x+1=3\\y+1=2\\z+1=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$. Khi đó $N=a^2bc$.

Để N nhỏ nhất thì $a=2, b=3, c=5$.

Khi đó $N=2^2.3.5=60$.

* Số N là lũy thừa của 2 thừa số nguyên tố, ta có các trường hợp:

$+\begin{cases}x+1=4\\y+1=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$.

Khi đó $N=a^3b^2$, để N nhỏ nhất thì $a=2, b=3$. Do đó N nhỏ nhất là $2^3.3^2=72$.

$+\begin{cases}x+1=6\\y+1=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$.

Khi đó $N=a^5b$, để N nhỏ nhất thì $a=2, b=3$. Do đó N nhỏ nhất là $2^5.3=96$.

* Số N là lũy thừa của 1 thừa số nguyên tố $\Rightarrow x+1=12$ $\Leftrightarrow x=11$. Khi đó $N=a^{11}$. Để N nhỏ nhất thì $a=2$ $\Rightarrow N=2^{11}=2048$.

Trong các trường hợp số N nhỏ nhất là 60.

Bài toán 3.3. *Cho số $n=p^xq^y$, trong đó p,q là các số nguyên tố khác nhau, $x,y\in\mathbb{N}^*$. Biết n^2 có 15 ước số. Hỏi n^3 có bao nhiêu ước số.*

Lời giải. Vì $n=p^xq^y \Rightarrow n^2=p^{2x}q^{2y}$ $(x\ge y)$.

Số các ước của n^2 là $15 \Rightarrow (2x+1)(2y+1)=15$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x+1=5\\2y+1=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}.$$

Do đó $n = p^2q \Rightarrow n^3 = p^6q^3$. Khi đó số ước của n^3 là $(6 + 1)(3 + 1) = 28$ (ước số).

Bài toán 3.4. *Cho số nguyên dương n sao cho n^2 có 15 ước số. Hãy tìm xem n^{2017} có bao nhiêu ước số, biết rằng $n = p^x q^y, p, q$ là hai số nguyên tố khác nhau, $x, y \in \mathbb{N}^*$. Với điều kiện trên có tồn tại số $k \in \mathbb{N}^*$ để n^k có 2000 ước không?*

Lời giải. * Từ $n = p^x q^y, p, q$ là hai số nguyên tố khác nhau $\Rightarrow n^2 = p^{2x}q^{2y}$.

Số các ước của n^2 là $(2x+1)(2y+1)$.

Theo đề bài có $(2x+1)(2y+1) = 15 = 5.3$.

Do vai trò x, y như nhau, giả sử $x \ge y$, suy ra

$$\begin{cases} 2x+1=5 \\ 2y+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow n = p^2q.$$

Khi đó $n^{2017} = (p^2q)^{2017} = p^{4034}q^{2017}$.

Suy ra số các ước của n^{2017} là $(4034 + 1)(2017 + 1) = 8\,142\,630$ (ước số).

* Từ $n = p^2q \Rightarrow n^k = p^{2k}q^k$.

Giả sử tồn tại số $k \in \mathbb{N}^*$ để n^k có 2000 ước số.

Khi đó số ước của n^k là $(2k+1)(k+1) = 2000$

$\Leftrightarrow 2k^2 + 3k = 1999 \Leftrightarrow 16k^2 + 24k + 9 = 16001$

$\Leftrightarrow (4k+3)^2 = 16001$.

Vì 16001 không là số chính phương, do đó không tìm được k thoả mãn.

Bài toán 3.5. *Tìm số tự nhiên khác 0 nhỏ hơn 60 có nhiều ước số nhất.*

Lời giải. Gọi N là số tự nhiên nhỏ hơn 60. Tìm xem N có nhiều nhất bao nhiêu ước số. Xét 4 trường hợp:

a) Với N là lũy thừa của một thừa số nguyên tố $\Rightarrow N = a^x < 60, x \in \mathbb{N}^*$.

Chọn a nhỏ nhất để được số mũ lớn nhất $\Rightarrow N = 2^x$.

Ta có $2^5 < 60 < 2^6$. Số 2^5 có 6 ước số.

Do đó N là lũy thừa của một thừa số nguyên tố thì số ước nhiều nhất là 6.

b) Với N là lũy thừa của hai thừa số nguyên tố $\Rightarrow N = a^x b^y < 60$. Chọn a, b nhỏ nhất để được số mũ lớn nhất. Do đó ta xét $N = 2^x 3^y$.

Ta có $2^4.3 < 60 < 2^5.3$. Số $2^4.3$ có $(4 + 1)(1 + 1) = 10$ (ước số)

$2^2.3^2 < 60 < 2^3.3^2$. Số $2^2.3^2$ có $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ (ước số).

$2.3^3 < 60 < 2^2.3^3$. Số 2.3^3 có $(1 + 1)(3 + 1) = 8$ (ước số).

c) Với N là lũy thừa của ba thừa số nguyên tố, có $N = a^x b^y c^z$. Xét $2^x.3^y.5^z$, (chọn a, b, c nhỏ nhất để được số mũ lớn nhất). Có $2.3.5 < 60 < 2^2.3.5$. Số $2.3.5$ có $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$ (ước số).

d) Với N là lũy thừa từ bốn thừa số nguyên tố trở lên: không xảy ra trường hợp này (vì $2.3.5.7 > 60$).

Vậy trong tất cả các trường hợp N nhiều nhất có 10 ước số, trong trường hợp này $N = 2^4.3 = 48$.

DẠNG 4. MỐI LIÊN QUAN GIỮA ƯCLN VÀ BCNN

Bài toán 4.1. *Chứng minh:* $a.b = (a, b).[a, b]$.

Ký hiệu $(a, b) =$ ƯCLN(a, b),

$[a, b] =$ BCNN(a, b).

Lời giải. Gọi $d = (a, b)$

$\Rightarrow a = da', b = db'$ với $(a', b') = 1$.

Suy ra $[a, b] = [da', db'] = d.[a', b'] = da'b'$ (1)

Do đó $\dfrac{ab}{(a,b)} = \dfrac{da'.db'}{d} = da'b'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $[a, b] = \dfrac{ab}{(a,b)} \Rightarrow a.b = (a, b).[a, b]$.

Nhận xét. Vận dụng bài toán 4.1 trên để giải các bài toán sau:

Bài toán 4.2. a) *Tìm* ƯCLN(75 125 232, 175 429 800);
b) *Tìm* BCNN(75 125 232, 175 429 800).

Lời giải. a) (75 125 232, 175 429 800)
= (75 125 232, 75 125 232. 2 + 25 179 336)
= (75 125 232, 25 179 336)
= (25 179 336. 2 + 24 766 560, 25 179 336)
= (24 766 560, 25 179 336)
= (24 766 560, 24 766 560. 1 + 412 776)
= (24 766 560, 412 776)
= (412 776. 60, 412 776) = 412 776.

Vậy ƯCLN(75 125 232, 175 429 800) = 412 776.

b) Áp dụng: $\text{BCNN}(A, B) = \dfrac{A \times B}{\text{ƯCLN}(A, B)}$.

BCNN(75125232, 175429800)

$= \dfrac{75125232 \times 175429800}{412776} = 31\,928\,223\,600.$

Nhận xét. Nếu không dựa vào kết quả bài 4.1 thì việc tìm BCNN của hai số đã cho là khá khó khăn.

Bài toán 4.3. *Cho ba số*

$A = 118932;\ B = 157993;\ C = 38743.$

a) *Tìm ước chung lớn nhất của* A, B, C;

b) *Tìm bội chung nhỏ nhất* A, B, C.

Lời giải. a) $D = \text{ƯCLN}(A,B) = 583$.

$\text{ƯCLN}(A,B,C) = \text{ƯCLN}(D,C) = 53$.

b) $E = \text{BCNN}(A,B) = \dfrac{A \times B}{\text{ƯCLN}(A,B)} = 32\,230\,572$.

$\text{BCNN}(A,B,C) = \text{BCNN}(E,C) = \dfrac{E \times C}{\text{ƯCLN}(E,C)}$

$= \dfrac{32\,230\,572.\,38743}{53} = 23\,560\,548\,132$.

Bài toán 4.4. *Cho* $a = 123456789$, $b = 987654321$. *Chứng minh*: a) $(a,b) = 9$;

b) $[a,b]$ *chia cho 11 dư 4.*

Lời giải. a) Ta có $b - 8a = 9 \Rightarrow b = 8a + 9$.

Do đó $(a,b) = (a, 8a+9) = (a,9)$.

Mà a chia hết cho 9, suy ra $(a,9) = 9$.

Vậy $(a,b) = 9$.

b) Ta có $ab = [a,b].(a,b) \Rightarrow ab = [a,b].9$.

Có $\dfrac{a}{9} = 13717421$. Suy ra $[a,b] = \dfrac{ab}{9} = 13717421.b$.

Có $13717421 = 11k + 3$, $b = 987654321 = 11q + 5$, $(k, q \in \mathbb{N})$. Suy ra $13717421.b = (11k+3)(11q+5)$ $= 11t + 4, (t \in \mathbb{N})$. Do đó $[a,b]$ chia cho 11 dư 4.

Bài toán 4.5. *a) Tìm 2 số tự nhiên* a, b *biết* $ab = 51840$ *và* $[a,b] = 2160$;

b) Tìm 2 số tự nhiên a, b *biết* $[a,b] - (a,b) = 18$;

c) Tìm 2 số tự nhiên a, b *biết* $(a,b) = 10$ *và* $[a,b] = 900$.

Lời giải. a) Từ $[a,b].(a,b) = a.b$

$\Rightarrow 2160.(a,b) = 51840 \Rightarrow (a,b) = 24$.

Suy ra $a = 24a', b = 24b'$, với $(a',b') = 1$, $a' < b'$.

Từ $ab = 51840 \Rightarrow 24a'.24b' = 51840$

$\Rightarrow a'b' = 90 = 1.90 = 2.45 = 5.18 = 9.10$.

Ta có các trường hợp:

* $\begin{cases} a' = 1 \\ b' = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.24 \\ b = 90.24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 2160 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 2 \\ b' = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2.24 \\ b = 45.24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 48 \\ b = 1080 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 5 \\ b' = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5.24 \\ b = 18.24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 120 \\ b = 432 \end{cases}$.

* $\begin{cases} a' = 9 \\ b' = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9.24 \\ b = 10.24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 216 \\ b = 240 \end{cases}$.

Vậy các cặp (a,b) là (24; 2160), (48; 1080), (120; 432), (216; 240).

b) Gọi $d = (a,b) \Rightarrow a = da', b = db', (a',b') = 1$.

Suy ra $[a,b] = [da', db'] = d.[a',b'] = da'b'$.

Từ đề bài có $da'b' - d = 18 \Rightarrow d(a'b' - 1) = 18$.

Suy ra d là ước của 18 và $a'b' = 1 + \dfrac{18}{d}$, $(a' \geq b')$.

Ta lập bảng:

d	$a'b'$	a'	b'	a	b
1	19	19	1	19	1
2	10	10	1	20	2
		5	2	10	4
3	7	7	1	21	3
6	4	4	1	24	6
9	3	3	1	27	9
18	2	2	1	36	18

Vậy có 7 cặp (a,b) là (19; 1), (20; 2), (10; 4), (21; 3), (24; 6), (27; 9), (36; 18).

c) Giả sử $a \leq b$. Từ $(a,b) = 10$, suy ra

$a = 10a', b = 10b'$ với $(a',b') = 1$.

Khi đó $ab = 10a'.10b' = 100a'b'$.

Áp dụng: $ab = [a,b].(a,b)$, suy ra

$100a'b' = 900.10 \Rightarrow a'b' = 90$, với $(a',b') = 1$.

Ta có bảng:

a'	b'	a	b
1	90	10	900
2	45	20	450
5	18	50	180
9	10	90	100

Vậy có 4 cặp (a,b) là (10; 900), (20; 450), (50; 180), (90; 100).

Nhận xét. Khi giải bài toán trên ta đã sử dụng thêm kết quả của bài toán 2.1.

Bài toán 4.6. *Tìm 2 số tự nhiên có ƯCLN bằng 12. Biết rằng hai số ấy, ƯCLN, BCNN là 4 số khác nhau và đều có 2 chữ số.*

Lời giải. Gọi 2 số cần tìm là a, b $(12 \leq a < b)$.

Ta có $(a,b) = 12 \Rightarrow a = 12a', b = 12b'$ với $(a',b') = 1$.

Áp dụng: $ab = [a,b].(a,b)$ ta có:

$12a'.12b' = [a,b].12 \Rightarrow [a,b] = 12a'b'$.

Ta có $12 \leq a < b$, suy ra $1 \leq a' < b'$.

Vì $[a,b] < 100 \Rightarrow 12a'b' < 100 \Rightarrow a'b' \leq 8$.

Nếu $a' \geq 3 \Rightarrow b' \geq 4 \Rightarrow a'b' \geq 12$ (vô lí).

(Xem tiếp trang 9)

KỲ THI TOÁN HÀ NỘI MỞ RỘNG NĂM 2017

LẦN THỨ 14

NGUYỄN VĂN MẬU
NGUYỄN MINH TUẤN
(Hội Toán học Hà Nội)

Kỳ thi Toán học Hà Nội mở rộng (HOMC) lần thứ 14 năm nay được tổ chức tại Trường THPT Chu Văn An trong 2 ngày 4 và 5/3/2017 với sự tham gia của 843 học sinh đến từ các trường THPT chuyên, các trường THCS của 30 tỉnh, thành phố trên cả nước, trong đó có 11 tỉnh, thành phía Nam.

HOMC được Sở GD&ĐT Hà Nội và Hội Toán học Hà Nội đồng tổ chức từ năm 2004 dành cho học sinh ở hai lứa tuổi Senior (lớp 10 cấp THPT) và Junior (lớp 8 cấp THCS). Đề thi và bài làm của học sinh được trình bày hoàn toàn bằng tiếng Anh. Nếu như mọi năm kỳ thi được tổ chức tại 3 hội đồng thi là **Hà Nội**, **Đăk Lăk** và **Đồng Tháp** thì năm nay được tổ chức tại một điểm duy nhất là Thủ đô **Hà Nội**.

Cuộc thi HOMC nhằm giúp các trường THCS và THPT nâng cao chất lượng, tiếp cận tiếng Anh chuyên ngành và chủ động hội nhập quốc tế về giảng dạy Toán học trong các trường phổ thông; động viên lòng say mê học toán của học sinh, sự nhiệt tình giảng dạy của bộ môn Toán của các thầy, cô giáo; đồng thời phát hiện học sinh năng khiếu về môn học để đào tạo bồi dưỡng, thực hiện mục tiêu đào tạo nhân tài cho đất nước.

Kỳ thi HOMC có phổ kiến thức tương đối rộng, đòi hỏi học sinh có kỹ năng cơ bản và kỹ năng áp dụng các kiến thức nâng cao. Đề thi cũng đưa ra những ý tưởng Toán học thú vị như cắt tứ giác bất kỳ thành 9 tam giác cân, về phủ hình, về phép đếm và so sánh. Đề bài sẽ được ra theo nguyên tắc đơn giản, dễ hiểu, dễ nhớ nhưng không dễ làm. Bài nào được viết bằng Tiếng Việt sẽ bị 0 điểm.

Kết quả, có 580 học sinh đoạt giải và được tuyên dương tại lễ tổng kết của kỳ thi, 24 giải Nhất thuộc lứa tuổi Junior (lớp 8), 20 giải Nhất thuộc lứa tuổi Senior (lớp 10).

Ở bài báo này, chúng tôi làm rõ thêm lời giải của các câu hỏi 1, 2, 3, 4, 5 dành cho bạn đọc tham khảo.

HANOI OPEN MATHEMATICAL COMPETITION 2017

JUNIOR SECTION

Question 1. Suppose x_1, x_2, x_3 are the roots of polynomial $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$.
The sum $|x_1| + |x_2| + |x_3|$ is
(A): 4 (B): 6 (C): 8 (D): 14 (E): None of the above.

Question 2. How many pairs of positive integers (x, y) are there, those satisfy the identity

$$2^x - y^2 = 1?$$

(A): 1 (B): 2 (C): 3 (D): 4 (E): None of the above.

Question 3. Suppose $n^2 + 4n + 25$ is a perfect square. How many such non-negative integers n's are there?
(A): 1 (B): 2 (C): 4 (D): 6 (E): None of the above.

Question 4. Put

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + 5^{13} + \ldots + 505^{2013} + 506^{2017}.$$

The last digit of S is
(A): 1 (B): 3 (C): 5 (D): 7 (E): None of the above.

Question 5. Let a; b; c be two-digit, three-digit, and four-digit numbers, respectively. Assume that the sum of all digits of number $a + b$; and the sum of all digits of $b + c$ are all equal to 2. The largest value of $a + b + c$ is
(A): 1099 (B): 2099 (C): 1199 (D): 2199 (E): None of the above.

Question 6. Find all triples of positive integers (m, p, q) such that $2^m p^2 + 27 = q^3$ and p is a prime.

Question 7. Determine two last digits of number $Q = 2^{2017} + 2017^2$.

Question 8. Determine all real solutions x; y; z of the following system of equations

$$\begin{cases} x^3-3x &= 4-y \\ 2y^3-6y &= 6-z \\ 3z^3-9z &= 8-x. \end{cases}$$

Question 9. Prove that the equilateral triangle of area 1 can be covered by five arbitrary equilateral triangles having the total area 2.

Question 10. Find all non-negative integers a; b; c such that the roots of equations:

$$x^2-2ax+b=0;$$
$$x^2-2bx+c=0;$$
$$x^2-2cx+a=0$$

are non-negative integers.

Question 11. Let S denote a square of the side-length 7, and let eight squares of the side-length 3 be given. Show that S can be covered by those eight small squares.

Question 12. Does there exist a sequence of 2017 consecutive integers which contains exactly 17 primes?

Question 13. Let a; b; c be the side-lengths of triangle ABC with $a+b+c=12$. Determine the smallest value of

$$M=\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}.$$

Question 14. Given trapezoid $ABCD$ with bases $AB \parallel CD$ ($AB < CD$). Let O be the intersection of AC and BD. Two straight lines from D and C are perpendicular to AC and BD intersect at E, i.e. $CE \perp BD$ and $DE \perp AC$. By analogy, $AF \perp BD$ and $BF \perp AC$. Are three points E; O; F located on the same line?

Question 15. Show that an arbitrary quadrilateral can be divided into nine isosceles triangles.

1.2. Junior Section's Answers and solutions:

Question 1. $x_1=-1, x_2=3, x_3=4$.

Answer. The choice is (C).

Question 2. $(y-1)(y+1)=2(2^{x-1}-1)$.

Answer. The choice is (A).

Question 3. $m^2-(n+2)^2=21.1=7.3$

Answer. The choice is (B).

Question 4. $a^{4n+1}-a=a(a^{4n}-1)\vdots 10$.

Answer. The choice is (E).

Question 5. $a+b+c=10199$.

Answer. The choice is (E).

Question 6

Solution. By the assumption it follows that q is odd. We have $2^m p^2=(q-3)(q^2+3q+9)$.

Remark that q^2+3q+9 is always odd.

There are two cases:

Case 1. $q=2^m p+3$. We have

$$q^3=(2^m p+3)^3>2^m p^2+27,$$

which is impossible.

Case 2. $q=2^m+3$. We have

$$q^3=2^{3m}+9\times 2^{2m}+27\times 2^m+27=2^m p^2+27,$$

which implies $p^2=2^{2m}+9\times 2^m+27$.

If $m\ge 3$, then $2^{2m}+9\times 2^m+27\equiv 3 \pmod 8$, but $p^2\equiv 1 \pmod 8$. We deduce $m\le 3$.

By simple computation we find

$$m=1, p=7, q=5.$$

Question 7

Solution. We have

$$2^{2017}=2^7\times\left(2^{10}\right)^{201}=128\times 1024^{201}$$
$$\equiv 128\times(-1)^{201}=-128\equiv 22 \pmod{25};$$

$2017^2\equiv 14 \pmod{25}$.

It follows $P\equiv 11 \pmod{25}$, by which two last digits of P are in the set $\{11, 36, 61, 86\}$. In other side, $P\equiv 1 \pmod 4$. This implis $P\equiv 61 \pmod{100}$. Thus, the number 61 subjects to the question.

Question 8

Solution. From $x^3+y=3x+4$ it follows

$$x^3-2-3x=2-y.$$

Then $(x-2)(x+1)^2=2-y$ (1)

By $2y^3-4-6y=2-z$, we have

$$2(y-2)(y+1)^2=2-z \quad (2)$$

Similarly, by $3z^3-3-3-9z=2-x$ we have

$$3(z-2)(z+1)^2=(2-x) \qquad (3)$$

Combining (1)-(2)-(3) we obtain

$$(x-2)(y-2)(z-2)\left((x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2+\frac{1}{6}\right)=0.$$

Hence, $(x-2)(y-2)(z-2)=0$. Comparing this with (1), (2) and (3), we find the unique solution $x=y=z=2$.

Question 9

Solution.

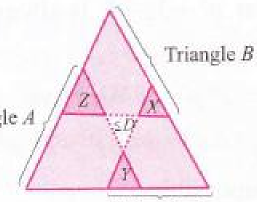


Figure 1

Let S denote the triangle of area 1. It is clearly that if $a\ge b$ then triangle of area a can cover triangle of area b. It suffices to consider the case when the areas of five small triangles are all smaller than 1. Let $1\ge A\ge B\ge C\ge D\ge E$ stand for the areas. We will prove that the sum of side-lengths of B and C is not smaller than the side-length of triangle of area 1. Indeed suppose $\sqrt{B}+\sqrt{C}<\sqrt{1}=1$. It follows

$2=A+B+C+D+E<1+B+C+2\sqrt{BC}$

$=1+(\sqrt{B}+\sqrt{C})^2<2,$ which is impossible. We cover S by A; B; C as Figure 1. We see that A; B; C will have common parts, mutually. Suppose $X=B\cap C$; $Y=A\cap C$; $Z=A\cap B$.

It follows $X+Y\le C;Y+Z\le A;Z+X\le B.$

We deduce A; B; C cover a part of area:

$$A+B+C-X-Y-Z$$

$$\ge A+B+C-\frac{1}{2}[(X+Y)+(Y+Z)+(Z+X)]$$

$$\ge\frac{1}{2}(A+B+C)=1-\frac{D+E}{2}\ge 1-D.$$

Thus, D can cover the remained part of S.

Question 10.

Solution. We see that a^2-b,b^2-c,c^2-a are perfect squares. Namely,

$$a^2-b=p^2;b^2-c=q^2;c^2-a=r^2.$$

There are two cases:

Case 1. $b=0$. We derive that $b=c=0$.

Thus $(a;\ b;\ c)=(0;\ 0;\ 0)$ is unique solution.

Case 2. $a,b,c\neq 0$. We have

$$a^2-b\le(a-1)^2=a^2-2a+1.$$

This implies $b\ge 2a-1$.

Similarly, we can prove that $c\ge 2b-1$ and $a\ge 2c-1$. Combining three above inequalities we deduce $a+b+c\le 3$. By simple computation we obtain $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Question 11

Solution.

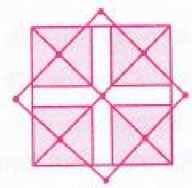


Figure 2

Figure 2 is a solution.

Question 12.

Solution. It is easy to see that there are more than 17 primes in the sequence of numbers 1; 2; 3; 4; ... ; 2017. Precisely, there are 306 primes in that sequence. Remark that if the sequence k + 1; k + 2; ... ; k + 2017 was changed by the sequence k; k + 1; ... ; k + 2016; then the numbers of primes in the latter and former sequences are either equal, more or less by 1. In what follows, we say the such change *a shift back with* 1 *step*. First moment, we consider the sequence of 2017 consecutive integers: 2018! + 2; 2018! + 3; ... ; 2018! + 2018 which contain no prime. After 2018! + 1 times shifts back, we obtain the sequence 1; 2; 3; 4; ... ; 2017.

The last sequence has 306 primes, while the first sequence has no prime. Reminding the above remark we conclude that there is a moment in which the sequence contains exactly 17 primes.

Question 13

Solution. Put

$$x=\frac{b+c-a}{2},y=\frac{c+a-b}{2},z=\frac{a+b-c}{2}.$$

Then $x,y,z>0$ and $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}=6,$

$a=y+z,b=z+x,c=x+y.$

We have $M=\frac{y+z}{2x}+\frac{4(z+x)}{2y}+\frac{9(x+y)}{2z}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{4x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{9x}{z}}+2\sqrt{\frac{4z}{y}.\frac{9y}{z}}\right)=11.$$

The equality occurs in the above if and only if

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}\\ \frac{z}{x}=\frac{9x}{z}\\ \frac{4z}{y}=\frac{9y}{z}\end{cases},\text{ or }\begin{cases}y=2x\\ z=3x\\ 2z=3y\end{cases}.$$

Since $x+y+z=6$ we receive $x=1,\ \ y=2,\ \ z=3$.

Thus $\min S=11$ if and only if $(a,b,c)=(5,4,3)$.

Question 14

Solution. Since E is the orthocenter of triangle ODC; and F is the orthocenter of triangle OAB we see that OE is perpendicular to CD, and OF is perpendicular to AB. As AB is parallel to CD, we conclude that E; O; F are straightly lined.

Question 15. *Solution.* Figures 3 *a, b, c*, and 4, 5 shows some solution.

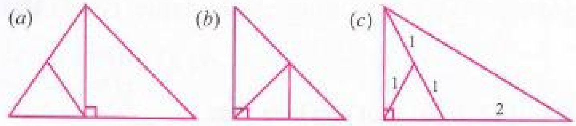
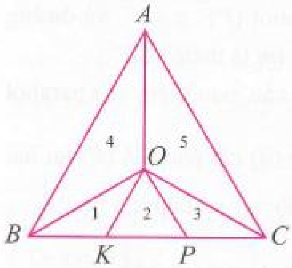
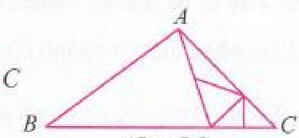


Figure 3



$AB=BC=AC$

Figure 4



$AB<BC$

Figure 5

MỘT SỐ BÀI TOÁN ... (Tiếp theo trang 5)

Do đó $a'=2$, khi đó $2b'\leq 8, b'>2\Rightarrow 2<b'\leq 4$.

• Nếu $b'=4$ thì $(a',b')=2$ (loại vì $(a',b')=1$)

• Nếu $b'=3$, khi đó $a=12.2=24, b=12.3=36$.

Vậy cặp $(a,b)=(24;36)$.

Nhận xét. Khi giải bài toán trên sử dụng kết hợp kết quả của bài toán 2.1 và bài toán 4.1.

Bài toán 4.7. *Đến năm 1984 tuổi của một thầy giáo và năm sinh của ông ta có tỉ số giữa BCNN và ƯCLN là 63. Tính xem thầy giáo sinh năm nào.*

Lời giải. Ta có năm thầy giáo sinh là $\overline{19xy}$ hoặc $\overline{18xy}$ $(0\leq x,y\leq 9)$. Đặt $a=\overline{19xy}$ (hoặc $a=\overline{18xy}$) và giả sử tuổi của thầy giáo là b (năm), $a>b$.

Ta có $a+b=1984$ và $\frac{[a,b]}{(a,b)}=63$.

Đặt $d=(a,b)\Rightarrow a=a_1d, b=b_1d$ với $(a_1,b_1)=1$.

Từ $a+b=1984\Rightarrow da_1+db_1=1984\Rightarrow d(a_1+b_1)=1984$.

Từ $\frac{[a,b]}{(a,b)}=63\Rightarrow\frac{[da_1,db_1]}{d}=63$

$\Rightarrow\frac{d.[a_1,b_1]}{d}=63\Rightarrow[a_1,b_1]=63$.

Do $(a_1,b_1)=1$, nên $a_1b_1=63$, $a_1>b_1$.

Ta có các trường hợp xảy ra:

* $a_1=9, b_1=7$, mà $d(a_1+b_1)=1984\Rightarrow d(9+7)=1984$

Suy ra $d=124, a=9.124=1116$ (loại).

* $a_1=21, b_1=3$, mà $d(a_1+b_1)=1984$

$\Rightarrow d(21+3)=1984\Rightarrow d=\frac{248}{3}$ (loại).

* $a_1=63, b_1=1$, mà $d(a_1+b_1)=1984$

$\Rightarrow d.(63+1)=1984.$

Suy ra $d=31, a=63.31=1953, b=31.1=31$.

Vậy thầy giáo sinh năm 1953 và đến năm 1984 thầy giáo 31 tuổi.

BÀI TẬP

1. Tìm các số tự nhiên n để các số sau nguyên tố cùng nhau

a) $4n+3$ và $2n+3$; b) $7n+13$ và $2n+4$;

c) $9n+24$ và $3n+4$; d) $18n+3$ và $21n+7$.

2. Cho $a=11994; b=153923; c=129935$.

Tìm ƯCLN(a,b,c) và BCNN(a,b,c).

3. Tổng của 4 số tự nhiên bằng 402. ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

4. Tổng của 5 số tự nhiên bằng 352. Khi đó ƯCLN của chúng có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

5. Chứng minh số 1994! – 1 có mọi ước nguyên tố lớn hơn 1994.

6. Tìm $x\in\mathbb{N}$ biết rằng trong ba số 36, 45, x bất cứ số nào cũng là ước của tích 2 số kia.

7. Số N có dạng $p^xq^yr^z$ (p,q,r là các số nguyên tố; x,y,z là các số nguyên dương) và $pq-r=3$; $pr-q=9$. Biết các số $\frac{N}{p};\frac{N}{q};\frac{N}{r}$ tương ứng có số ước ít hơn số ước số của N là 20; 12 và 15. Tìm N?

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN HƯNG YÊN
NĂM HỌC 2016 - 2017

VÒNG 1

(Dành cho tất cả các thí sinh)
(Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 *(1 điểm)*. Rút gọn biểu thức
$$A=\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

Câu 2 *(2 điểm)*. Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=mx-m+2$ (m là tham số).

a) Với $m=2$. Tìm tọa độ các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d).

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ đều lớn hơn $\frac{1}{2}$.

Câu 3 *(2 điểm)*. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2=y+1 \\ y^2=x+1 \end{cases}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3}=4x^2+5x-1$.

Câu 4 *(1 điểm)*. Hai người thợ cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 4 giờ. Nếu mỗi người làm riêng, để hoàn thành công việc thì thời gian người thứ nhất ít hơn thời gian người thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người phải làm trong bao lâu để hoàn thành công việc.

Câu 5 *(3 điểm)*. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d cố định, khoảng cách từ O đến đường thẳng d là $2R$. Điểm M thuộc đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm).

a) Chứng minh các điểm O, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của đoạn OM với (O). Chứng minh D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM.

c) Điểm M di động trên đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6 *(1 điểm)*. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $abc\ge 1$. Chứng minh:
$$\frac{1}{a^5+b^2+c^2}+\frac{1}{b^5+c^2+a^2}+\frac{1}{c^5+a^2+b^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 *(2 điểm)*. a) Đặt $a=\sqrt{2}, b=\sqrt[3]{2}$. Chứng minh:
$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1.$$

b) Cho $x=\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}+2$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^3-6x^2+21x+2016$.

Câu 2 *(2 điểm)*. a) Trong mặt phẳng toạ độ xOy cho ba đường thẳng (d_1): $y=-3x+3$;

(d_2): $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ và (d_3): $y=-ax+a^3-a^2-\frac{1}{3}$.

Tìm a để ba đường thẳng đó đồng quy.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x,y,z) của phương trình $xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2016$ thoả mãn $x\ge y\ge z\ge 8$.

Câu 3 *(2 điểm)*. a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3=-y^3 \end{cases}.$$

b) Giải phương trình
$$\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+2}\right)\left(1+\sqrt{4x^2+14x+10}\right)=3.$$

Câu 4 *(2 điểm)*. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=1\,\text{cm}$, $\widehat{ABC}=60^0$. Tính thể tích của hình tạo được khi cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh BC.

Câu 5 *(2,5 điểm)*. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung gần B của hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại C và D. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD, lần lượt cắt (O_1) và (O_2) tại M và N. Các đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Gọi P là giao điểm của BC với MN, Q là giao điểm của BD với MN. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD.

b) $\frac{BD}{BQ}+\frac{BC}{BP}=\frac{MN}{PQ}$. c) Tam giác EPQ là tam giác cân.

Câu 6 *(2 điểm)*. Trong hình vuông cạnh $10\,\text{cm}$, người ta đặt ngẫu nhiên 8 đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng có độ dài $2\,\text{cm}$. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm nằm trên 2 đoạn thẳng khác nhau trong 8 đoạn thẳng đó mà khoảng cách của chúng không vượt quá $\frac{14}{3}\,\text{cm}$.

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT chuyên Hưng Yên, TP. Hưng Yên) ***giới thiệu***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 477, tháng 3 năm 2017)

VÒNG 1

Câu 1. a) *Đáp số*: $x=2$

b) Ta có $\Delta' = m^2 - m - 2$. PT có nghiệm duy nhất khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2)=0$.

Từ đó tìm được $m=-1$ và $m=2$.

Câu 2. a) Ta có $A=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x-1}.\left(\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2$

$=\dfrac{-4\sqrt{x}}{x-1}.\dfrac{(1-x)^2}{4x}=\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$. Vậy $A=\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$.

b) Ta có $\dfrac{A}{\sqrt{x}}>3 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}>3 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}-3>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-4x}{x}>0 \Leftrightarrow 1-4x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$.

Vậy $0<x<\dfrac{1}{4}$.

Câu 3. a) Với $m=2$ hệ trở thành $\begin{cases}3x-2y=-1\\x+2y=5\end{cases}$.

Hệ có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

b) Từ PT thứ hai của hệ có $x=5-my$, thế vào PT đầu ta được $y=\dfrac{5m+6}{m^2+m+2}$.

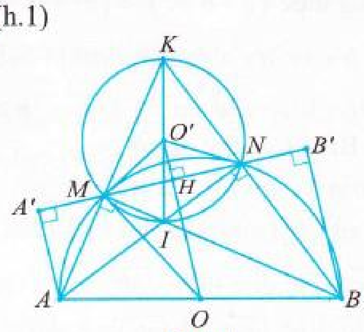
Từ đó $x=\dfrac{10-m}{m^2+m+2} \Rightarrow 5x+y=\dfrac{56}{m^2+m+2}$.

Ta có $m^2+m+2=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\ge\dfrac{7}{4},\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Suy ra $5x+y\le 32$. Đẳng thức xảy ra khi $m=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy với $m=-\dfrac{1}{2}$ thì $5x+y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 32.

Câu 4. (h.1)



Hình 1

a) Ta có $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $\widehat{KMI}=\widehat{KNI}=90^0$.

Vậy bốn điểm K, M, I, N cùng nằm trên đường tròn (C) đường kính KI.

b) Gọi A', B', H lần lượt là hình chiếu của A, B, O trên MN. Khi đó H là trung điểm MN và OH là đường trung bình của hình thang vuông $AA'B'B$.

Ta có $OH=\dfrac{1}{2}(AA'+BB')=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Suy ra

$MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=\dfrac{R}{2}$. Vậy $MN=R$.

Do $MN=R$ nên ΔOMN đều, suy ra

$$\widehat{AKB}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}-\text{sđ}\overset{\frown}{MN}\right)=60^0.$$

Gọi O' là trung điểm của IK thì O' là tâm của đường tròn (C), suy ra $\widehat{MO'N}=2\widehat{MKN}=120^0$.

Từ đó $O'M=\dfrac{MH}{\sin 60^0}=\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Vậy bán kính của đường tròn (C) bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

c) Vì $\widehat{AKB}=60^0$ nên điểm K nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn $AB=2R$. Suy ra diện tích của ΔKAB lớn nhất khi ΔKAB đều. Khi đó M, N là các điểm chia nửa đường tròn (O) thành 3 cung bằng nhau. Diện tích tam giác đều KAB lúc đó là

$$S_{KAB}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=R^2\sqrt{3}.$$

Câu 5. Ta chứng minh $P\ge 2$ (1). Thật vậy:

$P\ge 2 \Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\ge x^2+y^2+z^2+xyz$

$\Leftrightarrow 2xy+2yz+2xz\ge xyz$. Từ giả thiết suy ra $0\le x,y,z\le 2$, do đó $2xy+2yz+2xz\ge 2xy\ge xyz$.

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow (x;y;z)=(2;0;0)$ và các hoán vị.

Do đó min$P$ = 2. Ta chứng minh $P \le 3$. Thật vậy, theo giả thiết ta có: $(2-x)(2-y)(2-z)$

$=8-xyz-4P+2(xy+yz+zx)$

$=4-4P+(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$

$=4-4P+P^2$

Áp dụng BĐT Cauchy ta được

$$(2-x)(2-y)(2-z)\le\left(\frac{6-(x+y+z)}{3}\right)^3=\left(\frac{6-P}{3}\right)^3.$$

Do đó $\left(\frac{6-P}{3}\right)^3 \ge P^2-4P+4 \Leftrightarrow P^3+9P^2-108\le 0$

$\Leftrightarrow (P-3)(P^2+12P+36)\le 0 \Leftrightarrow P\le 3.$

Vậy $P\le 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Do đó max$P$ = 3.

VÒNG 2

Câu 1. a) Với $m=-2$, PT đã cho trở thành:

$$x^4+3x^3+2x^2+9x+9=0.$$

Ta thấy ngay $x\ne 0$, chia hai vế của PT cho x^2 ta được: $x^2+\frac{9}{x^2}+3\left(x+\frac{3}{x}\right)+2=0.$

Đặt $t=x+\frac{3}{x}$, ta được PT:

$$t^2+3t-4=0\Leftrightarrow t=1;t=-4.$$

PT đã cho có hai nghiệm là $x=-1;x=-3$.

b) Trong trường hợp tổng quát ta có PT:

$$t^2+3t-6-m=0 \quad (1)$$

$$t=x+\frac{3}{x}\Leftrightarrow x^2-tx+3=0 \quad (2)$$

Từ đó suy ra điều kiện để (2) có nghiệm dương là $t\ge 2\sqrt{3}$. Vậy PT đã cho có ít nhất một nghiệm dương $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\ge 2\sqrt{3}$. Xét PT (1) có $\Delta=4m+33\ge 0\Leftrightarrow m\ge -\frac{33}{4}$.

Khi đó $t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{4m+33}}{2}$. Do đó (1) có nghiệm $t\ge 2\sqrt{3}$ khi:

$$\frac{-3+\sqrt{4m+33}}{2}\ge 2\sqrt{3}\Leftrightarrow m\ge 6\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Vậy $m\ge 6\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Câu 2. a) ĐKXĐ: $x\ge\frac{3}{4}$. PT đã cho tương đương với: $\left(x-\sqrt{4x-3}\right)\left(3x-\sqrt{4x-3}\right)=0.$

Với $\sqrt{4x-3}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4x-3=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1;x=3.$

Với $\sqrt{4x-3}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\9x^2-4x+3=0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Kết hợp điều kiện suy ra PT có nghiệm là $x=1;x=3$.

b) Ta có $x^2=y^2\left(x+y^4+2y^2\right)$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2.x-y^4\left(y^2+2\right)=0 \quad (1)$$

Coi (1) là PT bậc hai ẩn x, ta có

$$\Delta=y^4\left(4y^2+9\right)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=y^2\sqrt{4y^2+9}.$$

(1) có nghiệm nguyên nên $4y^2+9$ là số chính phương, đặt $4y^2+9=k^2$ $(k\in\mathbb{N})$.

Khi đó $(k-2y)(k+2y)=9$. Xét các trường hợp và chú ý $k\in\mathbb{N}$ ta được các bộ

$$(k;y)\in\{(5;2);(5;-2);(3;0)\}.$$

Với $y=\pm 2$ ta được: $x^2-4x-96=0$

$\Leftrightarrow x=12;x=-8$. Với $y=0$ ta được: $x=0$.

Vậy các nghiệm cần tìm là

$(x,y)\in\{(0;0);(12;2);(12;-2);(-8;2);(-8;-2)\}$.

Câu 3. BĐT cần chứng minh tương đương với:

$4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3(a^3+b^3+c^3)\ge(a+b+c)^3$

$\Leftrightarrow (a^3+b^3+c^3)+4(a^2b+b^2c+c^2a$

$+ab^2+bc^2+ca^2)\ge(a+b+c)^3$ (1)

Ta có đẳng thức $(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)$

$+3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)+6abc$. Vậy

(1) $\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b\ge 6abc.$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có

$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$

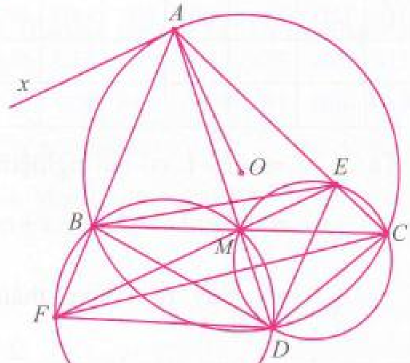
$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$\ge 2a^2\sqrt{bc}+2b^2\sqrt{ca}+2c^2\sqrt{ab}$

$=2\left(a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}\right)\ge 6abc.$

Vậy BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Câu 4. (h.2)



Hình 2

a) Do các tứ giác $MECD$, $MBFD$ nội tiếp nên $\widehat{DEC}=\widehat{DMC}=\widehat{DFB}$ (1). Tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{DCE}=\widehat{DCA}=\widehat{DBF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta BDF \backsim \Delta CDE$ (g.g).

Từ $\Delta BDF \backsim \Delta CDE \Rightarrow \widehat{EDC}=\widehat{BDF}$. Mà $\widehat{EMC}=\widehat{EDC}$ và $\widehat{BMF}=\widehat{BDF}$ nên $\widehat{EMC}=\widehat{BMF}$. Vậy E, M, F thẳng hàng.

b) Từ hai tứ giác $MECD, MBFD$ nội tiếp nên $AB.AF=AM.AD=AE.AC$, suy ra tứ giác $BECF$ nội tiếp. Do đó $\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$. Vẽ tiếp tuyến Ax của (O) thì $\widehat{ACB}=\widehat{BAx}$. Do đó $\widehat{BAx}=\widehat{AFE}$, suy ra $Ax // EF$. Vậy $OA \perp EF$.

c) Ta có $\Delta BDF \backsim \Delta CDE$ nên $\dfrac{S_{BDF}}{S_{CDE}}=\dfrac{BF^2}{CE^2}$.

Ta có $1=\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{S_{DAB}}{S_{DAC}}=\dfrac{S_{DAB}}{S_{BDF}}.\dfrac{S_{BDF}}{S_{CDE}}.\dfrac{S_{CDE}}{S_{DAC}}$

$$=\frac{AB}{BF}.\frac{BF^2}{CE^2}.\frac{CE}{AC}=\frac{AB.BF}{CE.AC}.$$

Từ đó $\dfrac{BF}{CE}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{NF}{NE}\Rightarrow\dfrac{EN}{EC}=\dfrac{FN}{FB}$ (3)

Theo tính chất phân giác

$$\frac{PN}{PC}=\frac{EN}{EC} \text{ và } \frac{QN}{QB}=\frac{FN}{FB} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{PN}{PC}=\dfrac{QN}{QB}\Rightarrow PQ // BC$.

Câu 5. a) Giả sử $A=\{1;2;3;...;93\}$ là tập hợp *cân đối*, khi đó mỗi tập A_i $\left(i=\overline{1,31}\right)$ có dạng $\{x_i;y_i;x_i+y_i\}$, như vậy tổng ba phần tử trong A_i là số chẵn. Do đó tổng các phần tử của tập A là số chẵn. Mặt khác tổng các phần tử trong A bằng: $1+2+3+...+93=\dfrac{93.94}{2}=93.47$ (là số lẻ). Mâu thuẫn này chỉ ra A là tập không *cân đối*.

b) *Nhận xét*: Nếu tập $S_n=\{1;2;3;...;n\}$, với n chia hết cho 3 là tập hợp *cân đối* thì tập $S_{4n}=\{1;2;3;...;4n\}$ và $S_{4n+3}=\{1;2;3;...;4n+3\}$ cũng là tập hợp *cân đối*.

Chứng minh. Từ tập S_{4n} ta chọn ra các tập con gồm ba phần tử sau: $\{1;2n+n;2n+n+1\}$; $\{3;2n+n-1;2n+n+2\}$; $\{5;2n+n-2;2n+n+3\}$;...; $\{2n-1;2n+1;4n\}$. Rõ ràng các tập con này đều thỏa mãn có một phần tử bằng tổng hai phần tử còn lại. Còn lại các số sau trong tập S_{4n} là $2,4,6,...,2n$. Tuy nhiên vì tập S_n *cân đối* nên tập $\{2;4;6;...;2n\}$ cũng *cân đối*.

Vậy S_{4n} là tập *cân đối*.

Tương tự từ tập S_{4n+3} ta chọn ra các tập con gồm ba phần tử sau: $\{1;2n+n+2;2n+n+3\}$; $\{3;2n+n+1;2n+n+4\}$;...;$\{2n+1;2n+2;4n+3\}$.

Và còn lại các số là $2,4,6,...,2n$, suy ra S_{4n+3} là tập *cân đối*.

Trở lại bài toán. Ta có $831=4.207+3$; $207=4.51+3$; $51=4.12+3$; $12=4.3$.

Chú ý là tập $\{1;2;3\}$ là *cân đối* nên theo nhận xét trên ta xây dựng được các tập hợp *cân đối* theo quy trình sau: $\{1;2;3\}\rightarrow\{1;2;...;12\}\rightarrow$ $\rightarrow\{1;2;...;51\}\rightarrow\{1;2;...;207\}\rightarrow\{1;2;...;831\}$.

Do đó tập $A=\{1;2;3;...;831\}$ là tập hợp *cân đối* (đpcm).

TRẦN MẠNH CƯỜNG

(GV THCS Kim Xá, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc) ***giới thiệu***

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

1C	2C	3C	4D	5B	6A	7C	8D	9A	10B	11D	12D	13A	14B	15C	16D	17C
18B	19C	20D	21A	22B	23A	24D	25A	26B	27C	28D	29A	30B	31C	32A	33D	34A
35D	36B	37A	38C	39D	40B	41A	42D	43D	44C	45B	46D	47C	48B	49A	50D	

Câu 1. Hàm số có 3 điểm tới hạn là $x=0, x=1$ và $x=-2$ nhưng y' chỉ đổi dấu khi x qua điểm 0 và -2 còn không đổi dấu khi x qua điểm $x=1$. Do đó $x=1$ không là cực trị, hai điểm còn lại mới là cực trị. Chọn C.

Câu 2. TCĐ: $x=-\frac{3}{2}$, TCN: $y=-2$. Hình chữ nhật giới hạn bởi hai đường tiệm cận này có diện tích là 3. Chọn C.

Câu 3. Đồ thị có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$. Đường thẳng (d) nối hai điểm cực trị có phương trình là

$$y=\frac{(mx^2-2x+m-1)'}{(2x+1)'}=\frac{2mx-2}{2}=mx-1.$$

$(d)\perp(d')$: $y=x \Leftrightarrow m=-1$. Chọn C.

Câu 6. Đường thẳng $y=6x+m$ là tiếp tuyến của $y=x^3+3x-1 \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3+3x-1=6x+m \\ (x^3+3x-1)'=(6x+m)' \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,m)=(1,-3) \\ (x,m)=(-1,1) \end{array}\right.$$

Vậy $m=-3$ hoặc $m=1$. Chọn A.

Câu 7. Hàm số $y=x^3-3x+1-m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu $\Leftrightarrow$ đồ thị $y=x^3-3x+1-m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT $x^3-3x+1=m$ có ba nghiệm phân biệt. Lập BBT của $f(x)=x^3-3x+1$ ta thấy: với $-1<m<3$ thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn. Chọn C.

Câu 8. TXĐ: $[-1,1]$; $f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}=x \\ -1<x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<1 \\ 1-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}<x<1,\ f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lập BBT của hàm f ta thấy rằng tập giá trị của f là $[-1,\sqrt{2}]$. Chọn D.

Câu 9. Ta có $y'=3x^2-1$ có hai nghiệm phân biệt và $x^3-x+m=\frac{1}{3}x(3x^2-1)-\frac{2}{3}x+m$, tức $y=\frac{1}{3}x\cdot y'-\frac{2}{3}x+m$. Suy ra đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-\frac{2}{3}x+m$. Đường thẳng này đi qua điểm $M(3,-1)$ khi và chỉ khi $m=1$. Chọn A.

Câu 10. Đặt $|\sin x-\cos x|=t, (0\le t\le\sqrt{2})$. Khi đó $t^2=1-\sin 2x$, phương trình đã cho trở thành $-t^2+t+1=m$. Lập BBT của hàm số $f(t)=-t^2+t+1$ trên đoạn $[0,\sqrt{2}]$ ta tìm được tập giá trị của hàm f là $\left[\sqrt{2}-1,\frac{5}{6}\right]$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{2}-1\le m\le\frac{5}{6}$. Chọn B.

Câu 11. $y=\frac{3x+7}{2x-1} \Rightarrow 2y=\frac{6x+14}{2x-1}=3+\frac{17}{2x-1}$.

Do $2y\in\mathbb{Z}$ nên $2x-1$ phải là ước của 17. Ta có các trường hợp sau:

- $2x-1=-17 \Leftrightarrow x=-8 \Rightarrow y=1$.
- $2x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=-7$.
- $2x-1=1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=10$.
- $2x-1=17 \Leftrightarrow x=9 \Rightarrow y=2$.

Đồ thị hàm số có 4 điểm có tọa độ nguyên là: $(-8,1), (0,-7), (1,10)$, $(9,2)$. Chọn D.

Câu 12. $\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+\cdots+\frac{1}{\log_n n!}$

$=\log_{n!}2+\log_{n!}3+\cdots+\log_{n!}n$

$=\log_{n!}(2\cdot 3\cdots n)=\log_{n!}(n!)=1$. Chọn D.

Câu 14. BPT $\Leftrightarrow$ $0<2x^2-11x+15\le 10$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-11x+15>0 \\ 2x^2-11x+5\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{5}{2} \text{ hoặc } x>3 \\ \frac{1}{2}\le x\le 5 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \cup (3,5]$. Các nghiệm nguyên của bất phương trình là: $1, 2, 4, 5$. Chọn B.

Câu 15. BPT tương đương với

$$\begin{cases} \log_3 x < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3^3 \\ x > (\frac{1}{2})^3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 27.$$ Chọn C.

Câu 16. Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm. Xét $x \neq 1$, khi đó chia cả hai vế của PT cho $\log_2 x \log_4 x \log_6 x$ được: $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_6 x} = 1$

$\Leftrightarrow \log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 6 = 1 \Leftrightarrow \log_x 48 = 1 \Leftrightarrow x = 48$. Tập nghiệm của PT đã cho là: $\{1, 48\}$. Chọn D.

Câu 17. Đặt $\log_9 x = \log_{12} y = \log_{16}(x+y) = a$, thế thì $x = 9^a, y = 12^a, x+y = 16^a$.

Từ đó suy ra $9^a + 12^a = 16^a$. Chia hai vế cho 16^a ta được: $\left(\frac{3}{4}\right)^{2a} + \left(\frac{3}{4}\right)^a = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Vậy $\frac{x}{y} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2a} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Chọn C.

Câu 19. Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$

$\Leftrightarrow \log_2(\log_8 x) = \log_2(\sqrt[3]{\log_2 x})$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2 x = \sqrt[3]{\log_2 x} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 27$. Chọn C.

Câu 20. $2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x} = 2^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 2$. Đặt $2^{\sin^2 x} = u$ thì $2^{\cos^2 x} = \frac{2}{u}$. Do $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $1 \le u \le 2$. Bài toán quy về tìm GTLN, GTNN của hàm $g(u) = u + \frac{2}{u}$ trên đoạn $[1,2]$. Ta có

$g'(u) = 1 - \frac{2}{u^2} = \frac{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}{u^2} = 0 \Leftrightarrow u = \sqrt{2}$.

$g(1) = g(2) = 3, g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min\limits_{1 \le u \le 2} g(u) = 2\sqrt{2}$,

$\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max\limits_{1 \le u \le 2} g(u) = 3$. Chọn D.

Câu 24. $\int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) \mathrm{d}x$

$= (x - \ln(1+e^x))\Big|_n^{n+1} = \left(1 + \ln\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}\right)$

$= \left(1 + \ln\frac{1+\frac{1}{e^n}}{e+\frac{1}{e^n}}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+e^x} \mathrm{d}x = 1 + \ln\frac{1}{e} = 0$.

Chọn D.

Câu 25. Sử dụng công thức

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = \beta'(x) \cdot f(\beta(x)) - \alpha'(x) \cdot f(\alpha(x))$$

ta có $G'(x) = \left(\int_0^{x^2} \cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right)' = 2x\cos\sqrt{x^2} = 2x\cos|x|$.

Chọn A.

Câu 28. $S = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x = \frac{5}{6}$. Chọn D.

Câu 30. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$.

$\Rightarrow (a + bz + cz^2)(a + bz^2 + cz)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)z + (ab + bc + ca)z^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + (ab + bc + ca)(z + z^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$. Chọn B.

Câu 32. Đặt $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Khi đó

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2} - i\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2})} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$= \frac{1}{2}(1 + i\cot\frac{\varphi}{2})$. Vậy $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$. Chọn A.

Câu 33. Giả sử $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \Rightarrow$

$P(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + \cdots + a_n(\overline{z})^n = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z^n}$

$= \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \overline{P(z)}$.

Do đó nếu $P(z) = 0$ thì $P(\overline{z}) = 0$. Chọn D.

Câu 34. Chú ý rằng $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Ta có

$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = |z_1 z_2 z_3| \cdot \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}|$

$= |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |z_1 + z_2 + z_3|$. Chọn A.

Câu 35. Ta có: $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3$

$= (z_1 + z_2 + z_3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1)$.

(Xem tiếp trang 31)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/478 (Lớp 6). Tìm tất cả các số chính phương có bốn chữ số khi viết theo thứ tự ngược lại ta cũng được số chính phương (số chính phương là bình phương của số tự nhiên).

MAI VĂN NĂM
(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Bài T2/478 (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD}=2\widehat{ADC}$ và $\widehat{CAD}=2\widehat{ADB}$. Chứng minh rằng tam giác CBD cân tại D.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bài T3/478. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $(10^{3^n}-1)\,\vdots\,3^{n+2}$.

TRẦN QUANG CHUNG
(Lớp ĐTYS 12 - Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội)

Bài T4/478. Cho hình thang $ABCD$ ($AB\,//\,CD$) có $AB < CD$. P, Q lần lượt thuộc các đường chéo AC và BD sao cho PQ không song song với AB. Tia QP cắt BC tại M, tia PQ cắt AD tại N, gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử $MP=PQ=QN$. Chứng minh rằng $\dfrac{OP}{OA}+\dfrac{OQ}{OB}=1$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam)

Bài T5/478. Cho ba số thực dương a; b; c sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=\sqrt{abc}.\left(\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\right).$$

NGUYỄN MINH SANG
(GV THCS Lâm Thao, H. Lâm Thao, Phú Thọ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/478. Giải biện luận phương trình theo tham số m: $f(f(x))=x$, với $f(x)=x^2+2x+m$.

ĐÀO THỊ PHƯƠNG LIÊN
(GV THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T7/478. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Xét biểu thức:

$$F(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a).$$

Chứng minh rằng $F(a,b,c)$

$$\le\min\left\{F(a+b,b+c,c+a),4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\right\}.$$

NGUYỄN VĂN HUYỆN
(SV ĐH Giao thông Vận tải, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/478. Cho ABC là tam giác nhọn. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{r}{2R}\le\frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}.$$

CAO MINH QUANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)

Bài T9/478. Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn $0<a\neq 1$ và phương trình $a^x-\dfrac{1}{a^x}=2\cos(bx)$ có 2017 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình:

$$a^x+\frac{1}{a^x}=2\cos(bx)+4$$

có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

VŨ SỸ MINH
(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/478. Trong một đất nước các thành phố được nối với nhau bằng các con đường. Độ dài của mỗi con đường nhỏ hơn 100 km, và từ thành phố này có thể đi tới thành phố khác theo các con đường với chiều dài tổng cộng nhỏ hơn 100 km. Khi một trong các con đường phải cấm đi lại để sửa chữa thì ta vẫn có thể đi lại được từ thành phố này tới thành phố khác trên các con đường còn lại. Chứng minh rằng khi đó có thể chọn các con đường này sao cho độ dài tổng cộng nhỏ hơn 300 km.

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/478. Chứng minh rằng: BCNN(1,2,...,2n) chia hết cho C_{2n}^{n} với mọi số nguyên dương n.

NGUYỄN TUẤN NGỌC

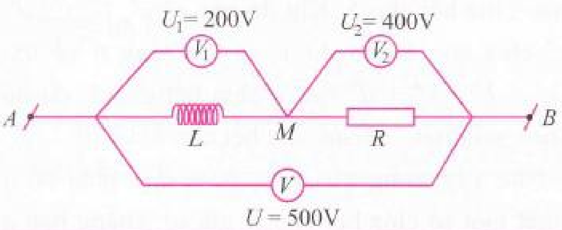
(GV THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang)

Bài T12/478. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B trên AM. Lấy điểm Q trên tia đối của tia AM sao cho $AQ = 4MH$. AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

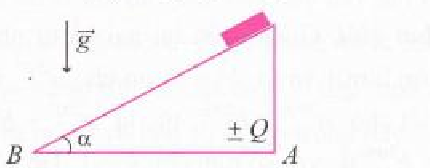
Bài L1/478. Cho mạch điện như hình vẽ:



Các vôn kế là lý tưởng. Hãy chứng tỏ rằng cuộn dây không thuần cảm và xác định hệ số công suất của mạch điện.

NGUYỄN HIỆP *(Hà Nội)*

Bài L2/478. Một vật nhỏ tích điện dương trượt từ đỉnh mặt phẳng nghiêng có độ cao h và góc nghiêng α so với phương ngang. Tại điểm A người ta đặt cố định điện tích $+Q$. Vận tốc của vật khi đến B là v_0. Xác định vận tốc của vật khi đến B nếu đặt tại A điện tích $-Q$. Biết hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là k và vật không nẩy khỏi mặt phẳng nghiêng.



NGUYỄN NHẬT MINH *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/478 (For 6th grade). Find all the 4-digit perfect squares such that when we reverse their digits we also get perfect squares.

Problem T2/478 (For 7th grade). Given an isosceles triangle ABC with the vertex angle A. On the half plane determined by BC which does not contain A choose a point D such that $\widehat{BAD} = 2\widehat{ADC}$ and $\widehat{CAD} = 2\widehat{ADB}$. Prove that CBD is an isosceles triangle with the vertex angle D.

Problem T3/478. Prove that $(10^{3^n} - 1) \vdots 3^{n+2}$ for any natural number n.

Problem T4/478. Given a trapezoid $ABCD$ (AB // CD) with $AB < CD$. Let P and Q respectively be on the diagonals AC and BD such that PQ is not parallel to AB. The ray QP intersects BC at M and the ray PQ intersects AD at N. Let O be the intersect of AC and BD. Suppose furthermore that $MP = PQ = QN$. Prove that $\dfrac{OP}{OA} + \dfrac{OQ}{OB} = 1$.

Problem T5/478. Let a, b, and c be positive numbers such that $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Find the maximum value of the expression

$$P = \sqrt{abc}.\left(\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\right).$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/478. Solve the equation $f(f(x)) = x$ in terms of the parameter m where

$$f(x) = x^2 + 2x + m.$$

Problem T7/478. Suppose that a, b, and c are the lengths of three sides of a triangle. Let

$$F(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a).$$

Prove that $F(a,b,c)$

$$\le \min\left\{F(a+b, b+c, c+a), 4a^2b^2c^2 F\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\right\}.$$

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/474. *Chứng minh rằng không tồn tại hai số tự nhiên a và b lớn hơn 1 và nguyên tố cùng nhau sao cho* $a^{2007}+b^{2007}$ *chia hết cho* $a^{2006}+b^{2006}$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số tự nhiên a và b lớn hơn 1 và $(a, b) = 1$ sao cho $a^{2007} + b^{2007}$ chia hết cho $a^{2006} + b^{2006}$, tức là $a^{2007} + b^{2007} = (a^{2006} + b^{2006})k$ với số nguyên $k > 1$. Do có thể đổi vị trí a và b cho nhau trong đẳng thức trên nên ta giả sử được $a > b$. Từ đẳng thức trên có

$$a^{2007} - k.a^{2006} = k.b^{2006} - b^{2007}$$

$$\Rightarrow a^{2006}(a-k) = b^{2006}(k-b) \qquad (1)$$

Nếu $a \le k$ thì $k \le b$, suy ra $a \le b$, trái với điều giả sử. Nếu $a > k$ thì $k > b$ (2)

Do $(a, b) = 1$ thì $(a^{2006}, b^{2006}) = 1$ nên từ đẳng thức (1) suy ra a^{2006} là ước của $k - b > 0$, do đó $k - b \ge a^{2006} \Rightarrow k > a^{2006} \Rightarrow k > a$, trái với (2). Vậy không tồn tại hai số tự nhiên a và b lớn hơn 1 và $(a, b) = 1$ sao cho $a^{2007} + b^{2007}$ chia hết cho $a^{2006} + b^{2006}$. ❒

➤ ***Nhận xét.*** *Cách giải khác*: Giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $a^{2007} + b^{2007} \vdots a^{2006} + b^{2006}$. Từ $a^{2007} + b^{2007} = a^{2007} + a.b^{2006} + b^{2007} - a.b^{2006} = a(a^{2006} + b^{2006}) + b^{2006}(b-a)$ suy ra $b^{2006}(b-a) = (a^{2006} + b^{2006})k$ mà $(b^{2006}, a^{2006} + b^{2006}) = 1$, suy ra $b - a$ chia hết cho $a^{2006} + b^{2006}$, dẫn đến mâu thuẫn. Các bạn sau có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Bùi Anh Tuấn, Ngô Văn Thọ, Nguyễn Công Thành*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 6A, THCS Thái Thịnh, Q. Đống Đa; *Bùi Minh An*, 6A1, Trường Hanoi Academy; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 6A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn.

VIỆT HẢI

Bài T2/474. *Tìm các số nguyên tố a, b, c, d, e sao cho* $a^4+b^4+c^4+d^4+e^4 = abcde$.

Lời giải. Trước hết ta có hai nhận xét sau đây với mọi số tự nhiên n:

1) n^4 chia hết cho 5 khi và chỉ khi n chia hết cho 5 (hiển nhiên);

2) Nếu n không chia hết cho 5 thì n^4 chia cho 5 dư 1 (vì số dư của n^4 chia cho 5 chính bằng số dư của 1^4, 2^4, 3^4, 4^4 chia cho 5, các số dư này đều bằng 1).

- Giả sử trong các số a, b, c, d, e không có số nào chia hết cho 5. Khi đó các số a^4, b^4, c^4, d^4, e^4 chia cho 5 đều dư 1, suy ra tổng ở vế trái $(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4)$ chia hết cho 5, do đó theo giả thiết, $abcde$ chia hết cho 5, vô lí!

- Như vậy trong các số a, b, c, d, e phải có ít nhất một số chia hết cho 5, giả sử, chẳng hạn a chia hết cho 5. Vì a là số nguyên tố nên $a = 5$. Khi đó ta có $5^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 5bcde$, suy ra $(b^4 + c^4 + d^4 + e^4)$ chia hết cho 5. Vì bốn số b^4, c^4, d^4, e^4 chia cho 5 chỉ cho số dư là 0 hoặc 1 nên chúng đồng thời chia hết cho 5, do đó b, c, d, e cũng đồng thời chia hết cho 5, suy ra $b = c = d = e = 5$. Thử lại ta có $5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 = 5.\ 5^4 = 5^5 = 5.\ 5.\ 5.\ 5.\ 5$ (đúng). Vậy các số nguyên tố cần tìm là $a = b = c = d = e = 5$. ❒

➤***Nhận xét.*** Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hải, Vũ Minh Khải, Đặng Thái Tuấn, Nguyễn Công Hùng, Nguyễn Mạnh Bình, Trần Anh Tú, Đặng Quốc Thắng*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Trịnh Đức Tuấn*, 6A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** *Phan Kim Anh, Cao Văn Trường, Trương Tuấn Anh, Nguyễn Xuân Hưng, Đặng Việt Cường*, 7C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Lê Tuấn Kiệt*, 7A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/474. *Cho* $f(x) = a^{2016}x^2 + bx + a^{2016}c - 1$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. *Giả sử phương trình* $f(x) = -2$ *có* *hai nghiệm nguyên dương. Chứng minh rằng $A=\dfrac{f^2(1)+f^2(-1)}{2}$ là một hợp số.*

Lời giải. Phương trình $f(x)=-2$ tương đương với $a^{2016}x^2+bx+a^{2016}c+1=0$ (1)

Giả sử phương trình có hai nghiệm nguyên dương là $x_1,\ x_2$.

Theo định lý Viète, có $x_1x_2=c+\dfrac{1}{a^{2016}}\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^{2016}=1\Rightarrow f(x)=x^2+bx+c-1.$

Do đó: $f(1)=b+c;\ f(-1)=-b+c.$

Phương trình (1) trở thành $x^2+bx+c+1=0,$

suy ra $\begin{cases}x_1+x_2=-b\\ x_1x_2=c+1\end{cases}.$

Ta có: $A=\dfrac{f^2(1)+f^2(-1)}{2}=\dfrac{(b+c)^2+(-b+c)^2}{2}$

$=b^2+c^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2$

$=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1\Rightarrow A=(x_1^2+1)(x_2^2+1).$

Vì $x_1,\ x_2$ là các số nguyên dương nên $A=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$ là tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1.

Vậy $A=\dfrac{f^2(1)+f^2(-1)}{2}$ là một hợp số. □

➤***Nhận xét.*** Đây là bài toán không khó. Lời giải chủ yếu sử dụng định lý Viète với phương trình bậc hai. Tuy nhiên, có ít bạn tham gia gửi bài giải. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C, *Nguyễn Hà Anh*, 8A1, THCS Archimedes Academy, *Bùi An Duy*, 8B, Hà Nội-Amsterdam, Cầu Giấy; **Phú Thọ**: *Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Thu Hiền*, 9A3, THCS Lâm Thao.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T4/474. *Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp, D là tiếp điểm của (I) và BC. Đường thẳng qua D vuông góc với AI theo thứ tự cắt IB, IC tại P, Q. Chứng minh rằng B, C, P, Q cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc AD.*

Lời giải. **Bổ đề 1.** Nếu đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC theo thứ tự tiếp xúc với CA, AB tại E, F và K là giao điểm của BI và EF thì $\widehat{BKC}=90°$.

Bổ đề 2. Cho hai đường thẳng Δ, Δ' và các bộ ba đường thẳng đôi một song song a, b, c và a', b', c'. Các đường thẳng a, b, c thứ tự cắt Δ tại A, B, C. Các đường thẳng a', b', c' thứ tự cắt Δ' tại A', B', C'. Các đường thẳng a, b, c thứ tự cắt a', b', c' tại X, Y, Z. Nếu $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ thì X, Y, Z thẳng hàng.

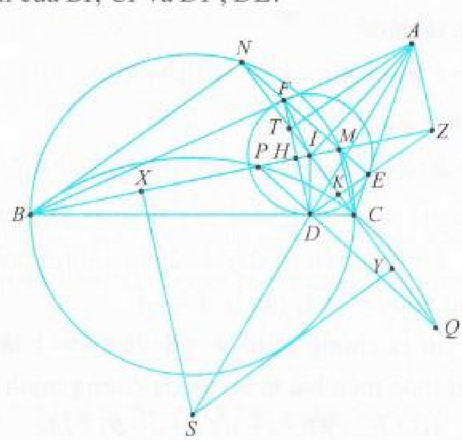
Bạn đọc tự chứng minh hai kết quả trên.

Trở lại bài toán. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BI, CI và EF.

Theo Bổ đề 1, $\widehat{BMC}=90°=\widehat{BNC}$, suy ra B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Kết hợp với $PQ\ //\ EF\equiv MN\Rightarrow B, C, P, Q$ cùng thuộc một đường tròn (1)

Gọi S là tâm đường tròn $(BCPQ)$. X, Y thứ tự là hình chiếu của S trên BI, CI; Z, T thứ tự là hình chiếu của A trên BI, CI; H, K theo thứ tự là giao điểm của BI, CI và DF, DE.



Theo Bổ đề 1, $T\in DF$, $Z\in DE$. Kết hợp với $IB\perp DF$; $IC\perp DE$, suy ra tứ giác $HKZT$ nội tiếp. Do đó $\widehat{BZD}=\widehat{HZK}=\widehat{KTH}=\widehat{QTD}$.

Từ (1) suy ra $\widehat{ZBD}=\widehat{PBC}=\widehat{CQP}=\widehat{TQD}$. Vậy $\Delta BDZ\backsim\Delta QDT$. Từ đó, chú ý rằng H, K thứ tự là hình chiếu của D trên BZ, CT và X, Y thứ tự là trung điểm của BH, QK, suy ra $\dfrac{\overline{XZ}}{\overline{XH}} = \dfrac{\overline{YT}}{\overline{YK}}$.

Kết hợp với $XS \,//\, ZA \,//\, HD$ và $SY \,//\, TA \,//\, DK$, theo Bổ đề 2, suy ra S, A, D thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. ❐

➤***Nhận xét.*** Không có bạn nào tham gia giải bài toán này.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/474. *Tìm tất cả các số thực k sao cho với mọi a, b, c không âm ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$[a+k(b-c)][b+k(c-a)][c+k(a-b)] \le abc.$$

Lời giải. Trước hết ta thấy ngay $k = 0$ là một giá trị thỏa mãn bài toán. Xét hai trường hợp:

· *Trường hợp* $k > 0$: Chọn $c = 0$ ta có:

$(a+kb)(b-ka)k(a-b) \le 0$ với mọi $a, b \ge 0$.

Suy ra: $(b-ka)(a-b) \le 0$ với mọi $a, b \ge 0$.

Chọn $a = 2$, $b = k + 1$, ta được: $(1-k)^2 \le 0 \Rightarrow k = 1$.

· *Trường hợp* $k < 0$: Đặt $k' = -k$, ta có:

$[a-k'(b-c)][b-k'(c-a)][c-k'(a-b)] \le abc$

với mọi $a,b,c \ge 0$. Đổi vị trí của b và c cho nhau, ta được:

$$[a-k'(c-b)][c-k'(b-a)][b-k'(a-c)] \le abc$$

với mọi $a,b,c \ge 0$, hay

$$[a+k'(b-c)][b+k'(c-a)][c+k'(a-b)] \le abc$$

với mọi $a,b,c \ge 0$. Như vậy ta quay lại trường hợp $k > 0$ ở trên (ở đây k' đóng vai trò của k), và thu được $k' = 1$, tức là $k = -1$.

Bây giờ ta chứng minh $k = 1$ và $k = -1$ là các giá trị thỏa mãn bài toán, tức là chứng minh

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$$

với mọi $a,b,c \ge 0$.

Vì a, b, c có vai trò bình đẳng nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó vì $a+b-c \ge 0$, $c+a-b \ge 0$ nên nếu $b+c-a \le 0$ thì

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le 0 \le abc;$$

Còn nếu $b+c-a \ge 0$ thì ta có:

$$(a-b)(a-c) \ge 0 \Rightarrow bc \ge a(b+c-a) \ge 0$$

$$\Rightarrow abc \ge a^2(b+c-a) \ge [a^2-(b-c)^2](b+c-a)$$
$$= (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Kết luận: Các giá trị k thỏa mãn bài toán là:

$$k = 0,\ k = -1,\ k = 1. \ ❐$$

➤***Nhận xét.*** Bài toán là khá khó đối với HS ở THCS, nên đã không có bạn nào tham gia giải bài này.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/474. *Với x là số thực thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:*

$$f = \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{x^2-8x+32} + \sqrt{x^2-6x+25} + \sqrt{x^2-4x+20} + \sqrt{x^2-10x+26}.$$

Lời giải. Biến đổi biểu thức f thành dạng

$$f = \sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{(x-4)^2+4^2} + \sqrt{(x-3)^2+4^2} + \sqrt{(2-x)^2+4^2} + \sqrt{(5-x)^2+1}.$$

Cách 1. Với hai bộ số (a, b) và (c, d) luôn có

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \qquad (1)$$

đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$ (hay $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ với $bd \ne 0$). Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$\ge a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ge ac+bd \qquad (2)$$

· Nếu $ac + bd < 0$ thì BĐT (2) luôn đúng.

· Với $ac + bd \ge 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$$
$$\Leftrightarrow (ad-bc)^2 \ge 0 \text{ luôn đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$ (hay $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ với $bd \ne 0$). Vậy BĐT (1) được chứng minh.

Trở về bài toán T6/474. Áp dụng BĐT (1) ta có

$$f = \left(\sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{(5-x)^2+1}\right)$$
$$+\left(\sqrt{(x-4)+4^2} + \sqrt{(2-x)^2+4^2}\right) + \sqrt{(x-3)^2+4^2}$$
$$\ge \sqrt{(x-1+5-x)^2+(1+1)^2}$$
$$+\sqrt{(x-4+2-x)^2+(4+4)^2} + \sqrt{(x-3)^2+4^2}$$
$$\ge 2\sqrt{5} + 2\sqrt{17} + 4 = 2(\sqrt{5}+\sqrt{17}+2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chi khi

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{5-x}{1} \\ x-3=0 \\ \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{2-x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=3. \text{ Vậy } \min f = 2(\sqrt{5}+\sqrt{17}+2).$$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức vectơ $|\vec{a}|+|\vec{b}| \geq |\vec{a}+\vec{b}|$, đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Trên hệ trục Oxy, lấy $\vec{u}=(x-1;1)$; $\vec{v}=(5-x;1)$; $\vec{m}=(x-4;4)$; $\vec{n}=(2-x;4)$. Khi đó

$$\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(5-x)^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+4^2}+\sqrt{(2-x)^2+4^2}$$

$$=|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{m}|+|\vec{n}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|+|\vec{m}+\vec{n}|$$

$$=\sqrt{4^2+2^2}+\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{5}+2\sqrt{17}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng và $\vec{m},\vec{n}$ cùng hướng, tức là

$$\begin{cases} x-1=5-x \\ \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{2-x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=3. \text{ Mặt khác } (x-3)^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+4^2} \geq 4$. Vì vậy $f \geq 2(\sqrt{5}+\sqrt{17}+2)$.

➤***Nhận xét.*** Ngoài hai cách giải trên, ta còn có thể sử dụng phương pháp hình học và phương pháp khảo sát hàm số để tìm kết quả. Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải theo hai cách trên, nhưng nhiều bạn công nhận không chứng minh BĐT (1). Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** *Đào Quang Huân*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, *Chu Minh Huy*, 12 Toán1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Phạm Trần Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên Đại học Vinh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Phương Linh*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên-Huế:** *Nguyễn Ngọc Thanh*, 11T1, *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Lê Đức Minh*, *Mai Quốc Khánh*, 10T1, *Phan Gia Anh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bến Tre:** *Phan Thanh Đại Dương*, 10T, THPT chuyên Bến Tre, *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân; **Quảng Nam:** *Phạm Thị Hồng Mỹ*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Quốc Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long; **Tây Ninh:** *Lê Hiền Khải*, 11T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T7/474. *Phương trình* $\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x$ *có bao nhiêu nghiệm ?*

Lời giải. ĐK: $x>0$.

Để cho gọn ta kí hiệu $a=\dfrac{5\pi}{2}$ và ta xét các hàm số $f(x)=\log_a x, g(x)=\cos x$. Ta có nhận xét:

• Trên khoảng $0<x\leq\pi$, $f(x)$ là hàm số liên tục đồng biến, $g(x)$ là hàm số liên tục nghịch biến, $f(1)=0<g(1), f(\pi)>0>g(\pi)=-1$. Do đó tồn tại duy nhất $x_1\in(0,\pi]$ mà $f(x_1)=g(x_1)$.

• Trên khoảng $\pi<x\leq\dfrac{3\pi}{2}, f(x)>0\geq g(x)$. Do đó trên khoảng này phương trình $f(x)=g(x)$ không có nghiệm.

• Trên khoảng $\dfrac{3\pi}{2}<x\leq 6$, đặt $h(x)=f(x)-g(x)$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}+\sin x<0$ nếu $\dfrac{3\pi}{2}<x<6$

$\Rightarrow h(x)$, với $\dfrac{3\pi}{2}<x\leq 6$, là hàm số nghịch biến.

Mặt khác $h(5).h(6)<0$ nên theo tích chất của hàm số liên tục ta suy ra phương trình $h(x)=0$ có duy nhất nghiệm $x_2\in\left(\dfrac{3\pi}{2};6\right]$.

• Trên khoảng $6<x\leq 2\pi, \log_a x\leq\log_a 2\pi<\cos 6<\cos x$. Do đó phương trình $f(x)=g(x)$ không có nghiệm $x\in(6,2\pi]$.

• Trên khoảng $2\pi<x\leq\dfrac{5\pi}{2}, f(x)$ là hàm số đồng biến, $g(x)$ là hàm số nghịch biến, $f(2\pi)=\log_{\frac{5\pi}{2}} 2\pi<1=g(2\pi)$, $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)>0=g\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

Do đó phương trình $f(x)=g(x)$ có một nghiệm duy nhất $x_3 \in \left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

• Trên khoảng $\frac{5\pi}{2} < x < +\infty, f(x) > 1 \geq g(x)$.

Như vậy phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng 3 nghiệm phân biệt. ❒

➤***Nhận xét.*** Đây là bài toán về ứng dụng của hàm số liên tục trong tính số nghiệm của phương trình. Bài toán đòi hỏi tính toán khá chi tiết. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Thừa Thiên Huế:** *Trương Xuân Như Ngọc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Bình Định:** *Nguyễn Công Khải*, 10T, THPT Tây Sơn.

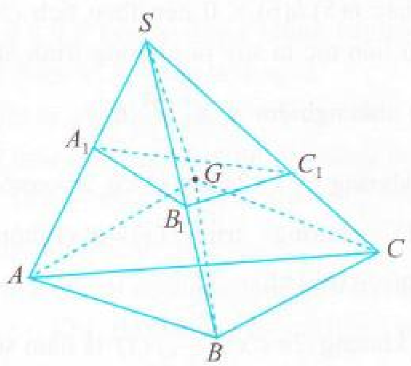
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/474. *Cho tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Một mặt phẳng (P) thay đổi đi qua trọng tâm của tứ diện cắt các cạnh SA, SB, SC của tứ diện lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng $\frac{1}{SA_1^2}+\frac{1}{SB_1^2}+\frac{1}{SC_1^2}\geq\frac{4}{R^2}$, với R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.*

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tứ diện $SABC$. Khi đó từ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$, suy ra

$$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA_1}.\overrightarrow{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}.\overrightarrow{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}.\overrightarrow{SC_1}\right).$$



Do bốn điểm A, B, C và G đồng phẳng, nên

$$\frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=4$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$16=\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)^2$$

$$\leq (SA^2+SB^2+SC^2)\left(\frac{1}{SA_1^2}+\frac{1}{SB_1^2}+\frac{1}{SC_1^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{SA_1^2}+\frac{1}{SB_1^2}+\frac{1}{SC_1^2}\geq\frac{16}{SA^2+SB^2+SC^2}.$$

Lại có $R^2=\frac{SA^2+SB^2+SC^2}{4}$ (kết quả quen thuộc), do đó $\frac{1}{SA_1^2}+\frac{1}{SB_1^2}+\frac{1}{SC_1^2}\geq\frac{4}{R^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$SA.SA_1=SB.SB_1=SC.SC_1;\ \frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=4.$$

$$SA^2+SB^2+SC^2=4R^2$$

$$\Leftrightarrow SA_1=\frac{R^2}{SA};SB_1=\frac{R^2}{SB};SC_1=\frac{R^2}{SC}.$$ ❒

➤***Nhận xét.*** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Nghệ An:** *Nguyễn Hữu Thắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 12A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Minh Tuệ, Trương Ngọc Long*, 11 Toán 1, *Trương Xuân Như Ngọc, Dương Đông Thư*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Lê Trí Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/474. *Tìm phần nguyên của biểu thức*

$$T=\frac{2}{1}\frac{4}{3}\frac{6}{5}\frac{8}{7}\cdots\frac{2016}{2015} \quad (1)$$

Lời giải. Viết lại biểu thức (1) dưới dạng $T=\prod_{k=0}^{1007}\frac{2k+2}{2k+1}$. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{2k+2}{2k+1}<\sqrt[4]{\frac{k+1}{k}.\frac{2k+3}{2k+1}}$ (2)

Thật vậy, (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2 < \sqrt{\frac{k+1}{k}.\frac{2k+3}{2k+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2k+2}{2k+1} < \frac{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{2k+2}\sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{k(k+1)}}{2k+1} < \frac{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{2k+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}} < \sqrt{\frac{(2k+2)^2-1}{(2k+2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{1}{(2k+1)^2}} < \sqrt{1-\frac{1}{(2k+2)^2}}$$

$\Leftrightarrow (2k+1)^2 < (2k+2)^2$, BĐT đúng.

Tương tự, ta cũng có bất đẳng thức

$$\frac{2k+2}{2k+1}\frac{2k}{2k-1} > \sqrt{\frac{k+1}{k}.\frac{2k+1}{2k-1}} \quad (3)$$

Thật vậy, (3) $\Leftrightarrow \frac{2k+2}{2k+1} > \sqrt{\frac{k+1}{k}}.\frac{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}{2k}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{(2k+1)^2} > 1-\frac{1}{(2k)^2}$, BĐT đúng.

Tiếp theo sử dụng (2) ta thu được

$$T=\prod_{k=0}^{1007}\frac{2k+2}{2k+1} < \frac{2}{1}\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{1008}{1007}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\ldots\times\frac{2017}{2015}}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt[4]{\frac{1008\times 2017}{2\times 5}} < 57 \quad (4)$$

Tiếp theo sử dụng (3) ta thu được

$$\frac{8}{7}\frac{6}{5}\frac{10}{9}\frac{8}{7}\ldots\frac{2014}{2013} > \sqrt{\frac{4}{3}\frac{5}{4}\ldots\frac{1008}{1007}\times\frac{7}{5}\frac{9}{7}\ldots\frac{2015}{2013}}.$$

Suy ra $\frac{5}{6}\frac{2015}{2016}\left(\frac{6}{5}\frac{8}{7}\ldots\frac{2016}{2015}\right)^2 > \sqrt{\frac{1008\times 2015}{3\times 5}}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\frac{8}{7}\ldots\frac{2016}{2015}\right)^2 > \sqrt{\frac{1008\times 2015}{3\times 5}}\frac{6}{5}\frac{2016}{2015}.$$

Suy ra $\frac{6}{5}\frac{8}{7}\ldots\frac{2016}{2015} > 21$ và $T > \frac{2}{1}\frac{4}{3}\times 21 = 56$ (5)

Từ (4) và (5) có $56 < T < 57$ nên $[T] = 56$. ❒

➤***Nhận xét.*** Ngoài cách giải trên, bạn *Phạm Lý Nhật Duy*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam**, nhận xét rằng có thể áp dụng công thức tính $I(n)=\int_0^\pi \sin^n x dx$ cũng cho lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/474. *Một số nguyên dương được gọi là "số HV 2015" nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2015 chữ số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Xét $(a_n), n=1,2,3,...$ là dãy tăng nghiêm ngặt các số nguyên dương sao cho dãy $\left(\frac{a_n}{n}\right), n=1,2,3,...$ bị chặn. Chứng minh rằng dãy số $(a_n), n=1,2,3,...$ chứa vô hạn số HV 2015.*

Lời giải. Dễ thấy rằng chỉ cần chứng minh dãy $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ có ít nhất một số HV 2015 là đủ. Khi đó ta xét dãy con của dãy này khi cắt bỏ số HV 2015 và các số đứng trước nó ra khỏi dãy, thì suy ra sự tồn tại của số HV tiếp theo … và tương tự ta có vô hạn số HV ở trong dãy.

Để chứng minh điều này, ta sử dụng hai bổ đề sau:

Bổ đề 1: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$

Chứng minh: $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\right) > 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$$

tăng vô cùng.

Bổ đề 2: Nếu trong hệ đếm cơ số m ($m\in\mathbb{N}$, $m>1$), dãy số $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ tăng và không chứa chữ số $m-1$ thì tổng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ bị chặn khi n tiến tới vô cùng.

Chứng minh: Số các số không chứa chữ số $m-1$ trong hệ đếm cơ số m và có đúng k chữ số là $(m-2)(m-1)^{k-1}$ do chữ số đầu tiên của nó khác 0 và $m-1$, còn các chữ số còn lại phải khác $m-1$. Mỗi số có k chữ số này không nhỏ hơn m^{k-1} và do đó tổng nghịch đảo của chúng nhỏ hơn $(m-1)\dfrac{1-\left(1-\frac{m-1}{m}\right)^n}{1-\frac{m-1}{m}}$ là một dãy số có giới hạn $m(m-1)$. Từ đó suy ra tổng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ bị chặn khi n tiến tới vô cùng.

Từ giả thiết bài toán là dãy $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ bị chặn, tồn tại M là hằng số sao cho $\frac{a_n}{n} \le M$.

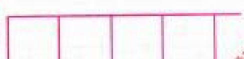
Khi đó ta có $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ nên theo Bổ đề 1, tổng $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ không bị chặn khi n tiến tới vô cùng.

Từ Bổ đề 2 suy ra khi sử dụng hệ đếm $m = 10^{2015}$ ta có ít nhất một số a_i có chứa số gồm 2015 chữ số 9. ❒

➤***Nhận xét.*** Không có bạn nào gửi lời giải bài toán này.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/474. *Cho n ô vuông 1×1 sắp xếp thành hình chữ nhật 1× n. Mỗi ô được điền bởi số 0 hoặc số 1. Một cách điền gọi là "thỏa mãn" nếu như ba ô liên tiếp nhau bất kì đều không chứa ba số giống nhau. Với mỗi $n \ge 3$, gọi a_n là số cách điền "thỏa mãn". Tính a_n.*



Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**). Số cách điền 0, 1 vào n ô vuông tạo nên một dãy nhị phân độ dài n sao cho không có 3 bít liên tiếp bất kì giống nhau.

Xét dãy nhị phân "thỏa mãn" có độ dài $n + 2$.

1) Nếu hai bít cuối cùng của dãy giống nhau thì khi bỏ hai bít này ta được dãy nhị phân "thỏa mãn" có độ dài n với bít cuối cùng của dãy này khác hai bít đã bỏ đi. Ngược lại với mỗi dãy nhị phân "thỏa mãn" có độ dài n ta thêm vào hai bít giống nhau và khác bít cuối cùng thì ta được một bít nhị phân "thỏa mãn" có độ dài $n + 2$.

2) Nếu hai bít cuối cùng của dãy khác nhau thì khi bỏ đi bít cuối cùng, ta được một dãy nhị phân "thỏa mãn" có độ dài $n + 1$. Ngược lại với dãy nhị phân "thỏa mãn" có độ dài $n + 1$ ta thêm vào sau dãy đó 1 bít và bít đó khác bít cuối cùng của dãy trên thì ta được một bít nhị phân "thỏa mãn" có độ dài $n + 2$.

Từ đó ta có hệ thức $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Dễ thấy $a_3 = 6, a_4 = 10$. Từ đó ta tìm được

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right]. \ ❒$$

➤***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Thừa Thiên Huế:** *Trương Ngọc Long*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Lâm Đồng:** *Chu Văn Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Nghệ An:** *Nguyễn Hữu Thắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 12T1, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/474. *Cho tam giác ABC, chứng minh rằng*

$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) \ge \sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}.$$

Lời giải. Đặt $2\sin\frac{A}{2} = x; 2\sin\frac{B}{2} = y; 2\sin\frac{C}{2} = z.$

Dễ thấy $x, y, z > 0;\ x^2 + y^2 + z^2 + xyz$

$$= 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2} + \frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{2}\right) = 4.$$

BĐT cần chứng minh tương đương với

$$x+y+z \ge \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \ge \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)$$

$$\ge x+y+z+2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4-xyz+2(yz+zx+xy)$$

$$\ge x+y+z+2\left(\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[1-(x+y+z)+(yz+zx+xy)-xyz\right]$$

$$+\left(1-2\sqrt{yz}+yz\right)+\left(1-2\sqrt{zx}+zx\right)+\left(1-2\sqrt{xy}+xy\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1-y)(1-z)+\left(1-\sqrt{yz}\right)^2$$

$$+\left(1-\sqrt{zx}\right)^2+\left(1-\sqrt{xy}\right)^2 \ge 0 \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $z=\max\{x,y,z\}$.

Dễ thấy $\frac{C}{2}=\max\left\{\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right\}$. Do đó $\frac{C}{2}\ge\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow z\ge 1$. Kết hợp với $\sin\frac{C}{2}<1 \Rightarrow 1\le z<2$.

Vậy $(1-x)(1-y)(1-z)+\left(1-\sqrt{yz}\right)^2$

$$+\left(1-\sqrt{zx}\right)^2+\left(1-\sqrt{xy}\right)^2$$

$$=(1-x-y+xy)(1-z)+\left(1-\sqrt{yz}\right)^2$$

$$+\left(1-\sqrt{zx}\right)^2+\left(1-\sqrt{xy}\right)^2$$

$$\ge\left(1-2\sqrt{xy}+xy\right)(1-z)+\left(1-\sqrt{yz}\right)^2$$

$$+\left(1-\sqrt{zx}\right)^2+\left(1-\sqrt{xy}\right)^2$$

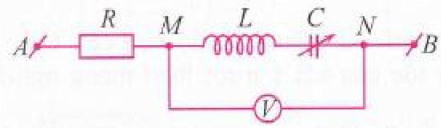
$$\ge\left(1-\sqrt{xy}\right)^2(1-z)+\left(1-\sqrt{xy}\right)^2$$

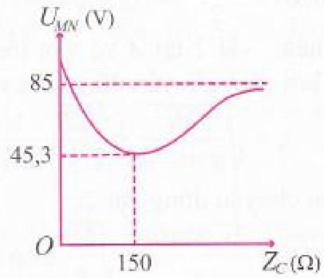
$=\left(1-\sqrt{xy}\right)^2(2-z)\ge 0$. Do đó (*) đúng. BĐT ở đề bài được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. ❐

➤***Nhận xét.*** Chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán này nhưng cả hai đều giải sai.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/474. *Cho đoạn mạch AB như hình a. $u_{AB}=U_0\cos100\pi t$ (V). Điện trở thuần $R=70\ \Omega$, cuộn dây có độ tự cảm L và điện trở thuần r. Tụ điện có điện dung C thay đổi từ $0 \div \infty$. Điện áp U_{MN} phụ thuộc vào dung kháng Z_C như đồ thị hình b. Tính giá trị của L, r.*

a) 

b) 

Lời giải. $U_{MN}=IZ_{MN}=\dfrac{U_{AB}\sqrt{r^2+(Z_L-Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}}$

$$=\frac{U_{AB}}{\sqrt{\dfrac{R^2+2rR}{r^2+(Z_L-Z_C)^2}+1}} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $U_{MN\min}$ khi $Z_L=Z_C$, kết hợp với đồ thị hình b (đề bài):

$\Rightarrow Z_L=Z_C=150\ (\Omega) \Rightarrow L=\dfrac{1,5}{\pi}$ (H).

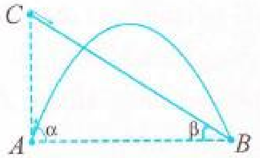
Từ đồ thị suy ra $U_{MN\min}=45,3$ (V), thay vào (1) được $45,3=\dfrac{U_{AB}}{\dfrac{R+r}{r}}$ (2). Từ (1) ta thấy khi $Z_C\to\infty \Rightarrow U_{MN}=U_{AB}$ suy ra $U_{AB}=85$ (V).

Thay U_{AB} và R vào (2) $\Rightarrow r\approx 80\ \Omega$. ❐

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng bạn *Lê Minh Duy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên** đã có lời giải đúng đề ra kì này.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/474. *Hai vật đồng thời xuất phát ở A và C, vật ở A được ném xiên góc α, vật ở C bắt đầu trượt xuống không vận tốc đầu trên mặt phẳng nghiêng góc β. Bỏ qua mọi ma sát, xác định cặp góc (α, β) để 2 vật đến B cùng lúc và cùng tốc độ?*



Lời giải. Kí hiệu h là độ cao của C so với A. Vận tốc của vật 1 trượt theo máng nghiêng khi tới B: $m_1gh = \frac{m_1v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$, đây cũng là vận tốc ném vật 2 tại A và vận tốc khi nó bay đến B. Thời gian chuyển động của vật 1:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\beta}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\beta}.$$

Thời gian chuyển động vật 2:

$$t_2 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}2\sin\alpha.$$

Vì hai vật gặp nhau tại C cùng một lúc nên:

$$t_1 = t_2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{2h}{g}}2\sin\alpha \qquad (1)$$

Quãng đường chuyển động theo phương ngang của vật 2: $s = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = h\cot g\beta$

$$\Leftrightarrow 2h\sin 2\alpha = h\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta} \qquad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{2\sin\alpha}$, thay vào (2), ta có:

$$4\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\alpha}}\,2\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^4\alpha - 12\sin^2\alpha - 1 = 0$$

Nghiệm phương trình trên: $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$.

Suy ra $\sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{13}}}$. Hay $\begin{cases}\alpha \approx 65,3^0 \\ \beta \approx 33,4^0\end{cases}$. □

➤***Nhận xét.*** Chỉ có bạn *Nguyễn Văn Dũng*, 11A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Nội** cho lời giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS ... (Tiếp theo trang 17)

Problem T8/478. Given an acute triangle ABC. Let a, b, and c respectively be the lengths of BC, CA, and AB. Let R and r respectively be the circumradius and the inradius of ABC. Prove that $\frac{r}{2R} \le \frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}$.

Problem T9/478. Suppose that a and b are real numbers such that $0 < a \ne 1$ and that the equation $a^x - \frac{1}{a^x} = 2\cos(bx)$ has exactly 2017 real roots and they are all different real numbers. How many distinct real roots does the equation

$$a^x + \frac{1}{a^x} = 2\cos(bx) + 4$$

have?

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/478. In a country, the length of any direct road between two cities (if any) is smaller than 100 km and we can travel from a city to any other one by roads which have total length is smaller than 100 km. When a road is closed under construction, we still can travel from one city to another by other roads. Prove that we can choose a route which has the total length is smaller than 300 km.

Problem T11/478. Prove that $GCD(1, 2, ..., 2n)$ is divisible by C_{2n}^n for any positive integer n.

Problem T12/478. Given a triangle ABC with $AB < AC$. Let M be the midpoint of BC. Let H be the perpendicular projection of B on AM. Suppose that Q is the point of the opposite ray of AM such that $AQ = 4MH$. Assume that AC intersects BQ at D. Prove that the circumcenter of ADQ lies on the circumcircle of DBC.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

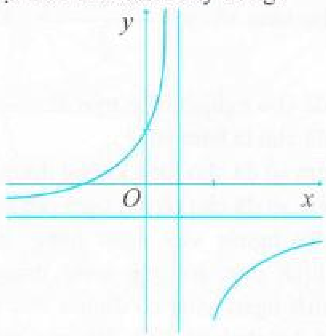
ĐỀ SỐ 8

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Hàm số $y=x^4-2x^3+2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0, b>0, c<0, d>0$.

B. $a>0, b<0, c<0, d>0$.

C. $a<0, b<0, c<0, d>0$.

D. $a<0, b<0, c>0, d<0$.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=x^2(x^2-3)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=2x$ tại bao nhiêu điểm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

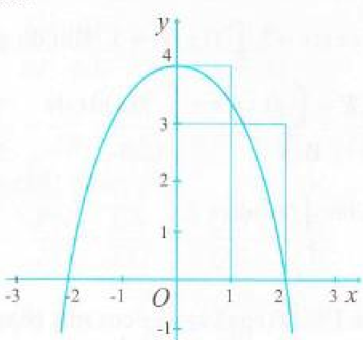
A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận ngang.

Câu 5. Đường cong trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=4-\dfrac{x^4}{4}$. **B.** $y=4-x^2$.

C. $y=4-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}$. **D.** $y=4-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^4}{16}$.

Câu 6. Giả sử tồn tại hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt là

A. $(-2;0]\cup\{1\}$. **B** $(-2;0)\cup\{1\}$.

C. $(-2;0]$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là

A. 0. **B.** $\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $\varnothing$. **D.** ±1.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3+(2m-1)x^2+(1+m)x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có 2 điểm cực trị đồng thời hoành độ điểm cực đại không nhỏ hơn -1 là

A. $\left(-\infty;\dfrac{-1}{4}\right]\cup\{2\}$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{-1}{4}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;\dfrac{-1}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{-1}{4}\right)\cup\{2\}$.

Câu 9. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+m^2}{x+1}$ đạt cực đại tại $x=1$ là

A. $\{\varnothing\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{2;-2\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 10. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\dfrac{\left||x|-2\right|}{|x|+1}=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

A. $[0;2)$. **B.** $[1;2)$. **C.** $[1;2]\cup\{0\}$. **D.** $[1;2)\cup\{0\}$.

Câu 11. Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25$ km, $BC = 20$ km và M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C. Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là 15 km/h, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là 30 km/h. Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{41}}{4}$. **C.** $\frac{4+\sqrt{29}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 12. Hàm số $y = \left(4 - x^2\right)^{\frac{1}{5}}$ có tập xác định là

A. $(-2;2)$. **B.** $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

C. $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Câu 13. Phương trình $x(\ln x - 1) = 0$ có số nghiệm là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** e.

Câu 14. Giá trị của m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là

A. $m = 3$ **B.** $m = 4$. **C.** $m = \frac{9}{2}$. **D.** $m = \frac{3}{2}$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số

$$f(x) = \sqrt{7 - 2^x - 6.2^{-x}} + \sqrt{x - \frac{2x^2 - 6x}{x - 4}}.$$

A. $\varnothing$. **B.** $\{0\}$. **C.** $[2;\log_2 6]$. **D.** $[2;\log_2 6] \cup \{0\}$.

Câu 16. Nếu $a = \log_2 3$ và $b = \log_2 5$ thì

A. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{6}b$.

B. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b$.

C. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b$.

D. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$.

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \le \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x} \text{ là}$$

A. $\left[-1;\frac{-\sqrt{2}}{2}\right]$. **B.** $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

C. $(-1;0)$. **D.** $\left[-1;\frac{-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$ là

A. $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\cos^4 x} - \frac{1}{3}\sin x\sqrt[3]{\cos^{-2} x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$.

B. $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3}\sin^2 x\sqrt[3]{\cos^{-2} x}}{\sqrt[6]{\cos x}} - 1$.

C. $f'(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3}\sin^2 x\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$.

D. $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt[3]{\cos^2 x} - 1\right)^2\left(2\sqrt[3]{\cos^2 x} + 1\right)}{3\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{3^x}$. Khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

C. Giá trị hàm số đã cho luôn không dương.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang.

Câu 20. Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8%/ tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình trả nợ là bao nhiêu?

A. 38400000 đồng. **B.** 10451777 đồng.

C. 76800000 đồng. **D.** 39200000 đồng.

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = \left(\log_a b^2\right)^2 + 6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2$$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn $\sqrt{b} > a > 1$ là

A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $y = \cos^2 x \sin x$ là

A. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **B.** $-\cos^3 x + C$

C. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **D.** $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Câu 23. Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7; \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$ là

A. 10 **B.** 4 **C.** 3 **D.** –4.

Câu 24. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x)\sin x\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 25. Thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x; y=0; x=0; x=1$ quanh trục hoành Ox có giá trị bằng

A. $\frac{8\pi}{15}$. B. $\frac{7\pi}{8}$. C. $\frac{15\pi}{8}$. D. $\frac{8\pi}{7}$.

Câu 26. Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền $D=[a,b]$ có đồ thị là một đường cong C. Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x=a, x=b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\frac{2x^2-\ln x}{4}$ và các đường thẳng $x=1, x=e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2-1}{8}\pi$. B. $\frac{4e^4-9}{64}\pi$.

C. $\frac{4e^4+16e^2+7}{16}\pi$. D. $\frac{4e^4-9}{16}\pi$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

A. $\varnothing$. B. $\{\pm 1\}$. C. $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1\right\}$. D. $\left\{\pm\frac{1}{2}; \pm 1\right\}$.

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^2\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ bằng $\frac{a\sqrt{b}-\ln(1+\sqrt{b})}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

A. 11. B. 12 C. 13 D. 14

Câu 29. Cho số phức $z=2-3i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là

A. $(2,3)$. B. $(-2,-3)$. C. $(2,-3)$. D. $(-2,3)$.

Câu 30. Số phức nghịch đảo của số phức $z=1+3i$ là

A. $\frac{1}{10}(1+3i)$. B. $\frac{1}{10}(1-3i)$.

C. $1-3i$. D. $\frac{1}{\sqrt{10}}(1+3i)$.

Câu 31. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-8z+5=0$. Giá trị biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ là

A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\sqrt{5}$.

Câu 32. Xét số phức z thỏa mãn

$$2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}.$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2$. B. $|z|>2$. C. $|z|<\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$.

Câu 33. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=5$ trên mặt phẳng tọa độ là một

A. Đường thẳng. B. Đường tròn.

C. Elip. D. Hypebol.

Câu 34. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. 5.

Câu 35. Khối đa diện đều loại $\{p;q\}$ là khối đa diện có

A. p cạnh mỗi mặt, q mặt mỗi đỉnh.

B. p mặt mỗi đỉnh, q cạnh mỗi mặt.

C. p mặt, q cạnh. D. p cạnh, q mặt.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) là $2a$ và thể tích bằng a^3. Nếu ABC là tam giác vuông cân thì độ dài cạnh huyền của nó là

A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác BCD'. Thể tích V của khối chóp $G.ABC'$ là

A. $V=\frac{1}{3}$. B. $V=\frac{1}{6}$. C. $V=\frac{1}{12}$. D. $V=\frac{1}{18}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{2}$, $AC=a\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn thẳng BC. Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ASC) bằng 60°. Thể tích của khối tứ diện $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$.

Câu 39. Cho hình trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng 80π. Thể tích của khối trụ là

A. 160π B. 164π C. 64π D. 144π

Câu 40. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho là

A. $\pi\left(h^2+\dfrac{4a^2}{3}\right)$. B. $V=\dfrac{\pi a^2 h}{3}$.

C. $\dfrac{\pi}{3}\left(h^2+\dfrac{4a^2}{3}\right)\sqrt{\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}}$. D. $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\left(\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{a^2}{3}\right)^3}$.

Câu 41. Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R là

A. $\dfrac{1}{3}\pi R^3$. B. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. C. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$. D. $\dfrac{32}{81}\pi R^3$.

Câu 42. Cho tam giác đều ABC cạnh 1 và hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ABC (M thuộc AB, N thuộc AC, P, Q thuộc BC). Gọi S là phần mặt phẳng chứa các điểm thuộc tam giác ABC nhưng không chứa các điểm thuộc hình vuông $MNPQ$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục là đường thẳng qua A vuông góc với BC là

A. $\dfrac{810-467\sqrt{3}}{24}\pi$. B. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{96}\pi$.

C. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{96}$. D. $\dfrac{54-31\sqrt{3}}{12}\pi$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ có bán kính R là

A. $R=\sqrt{5}$. B. $R=25$. C. $R=2$. D. $R=5$.

Câu 44. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0,1,0), B(2,3,1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là

A. $4x+3y-2z-3=0$.

B. $4x-3y-2z+3=0$.

C. $x-2y-3z-11=0$.

D. $x+2y-3z+7=0$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;-2;2); B(-3;-2;0)$ và $(P): x+3y-z+2=0$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng trung trực của AB là

A. $(1;-1;0)$ B. $(2;3;-2)$ C. $(1;-2;0)$ D. $(3;-2;-3)$

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1,-1,5)$ và $B(0,0,1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với Oy có phương trình là

A. $4x+y-z+1=0$. B. $2x+z-5=0$.

C. $4x-z+1=0$. D. $y+4z-1=0$.

Câu 47. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và điểm $M(2,5,3)$. Mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất là

A. $x-4y-z+1=0$. B. $x+4y+z-3=0$.

C. $x-4y+z-3=0$. D. $x+4y-z+1=0$.

Câu 48. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2); B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+6=0$. Nếu M thay đổi thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của MA^2+MB^2 là

A. 60. B. 50. C. $\dfrac{200}{3}$. D. $\dfrac{2968}{25}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2,3,1), B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ và $D(1,-2,2)$. Các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện $ABCD$ chia không gian $Oxyz$ thành số phần là

A. 9. B. 12. C. 15. D. 16.

Câu 50. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2,3,-4)$; $B(4,6,-9)$. Gọi C, D là các điểm thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $CD=\sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó tọa độ trung điểm của CD là

A. $\left(\dfrac{79}{35};\dfrac{64}{35};\dfrac{102}{35}\right)$. B. $\left(\dfrac{181}{5},\dfrac{-104}{5},\dfrac{-42}{5}\right)$.

C. $\left(\dfrac{101}{28},\dfrac{13}{14},\dfrac{69}{28}\right)$. D. $(2,2,3)$.

TRẦN QUỐC LUẬT

(GV THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh)

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN ĐỀ SỐ 7

(Tiếp theo trang 15)

Từ $z_1+z_2+z_3=0$ suy ra $z_1^3+z_2^3+z_3^3=3z_1z_2z_3$.

Do đó $|z_1^3+z_2^3+z_3^3|=|3z_1z_2z_3|=3|z_1||z_2||z_3|=3$.

Mặt khác $|z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|=|z_1|^3+|z_2|^3+|z_3|^3=3$.

Vậy $|z_1^3+z_2^3+z_3^3|=|z_1^3|+|z_2^3|+|z_3^3|$. Chọn D.

Câu 37. Gọi x,y,z là ba kích thước của khối hộp chữ nhật. Ta có

$$\begin{cases} y^2+z^2=a^2 \\ z^2+x^2=b^2 \\ x^2+y^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}} \\ y=\sqrt{\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}} \\ z=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}} \end{cases}.$$

Do đó thể tích khối hộp là

$$V=xyz=\sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}}.$$

Chọn A.

Câu 38. Gọi P là một điểm bất kì bên trong khối đa diện. Kí hiệu V_i, d_i $(i=1,2,\dots,n)$ tương ứng là thể tích của khối chóp có đỉnh là P, đáy là một mặt của đa diện và chiều cao của khối chóp ấy. Khi đó ta có

$$V=V_1+V_2+\dots+V_n=\frac{1}{3}S(d_1+d_2+\dots+d_n).$$

Từ đây suy ra $d_1+d_2+\dots+d_n=\dfrac{3V}{S}$. Chọn C.

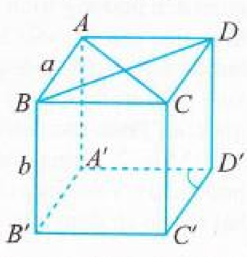
Câu 39. Tam giác ABC đều nên $AC=a$. Đường chéo nhỏ của hình hộp là $AC'=\sqrt{a^2+b^2}$, đường chéo lớn của đáy là

$$BD=\sqrt{a^2+a^2-2a^2\cos 120^\circ}=a\sqrt{3}.$$

Theo đề bài thì $BD=AC' \Leftrightarrow b=a\sqrt{2}$. Vậy thể tích của khối hộp là $V=AA'\cdot S_{ABCD}$

$=AA'\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

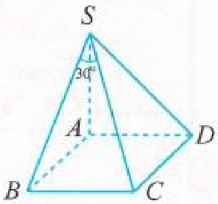
Chọn D.



Câu 40. Dễ dàng tính được diện tích đáy $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao của khối chóp là $h=\sqrt{\dfrac{3b^2-a^2}{3}}$. Do đó thể tích của khối chóp là

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}.$$ Chọn B.

Câu 43. Dễ thấy $CB\perp(SAB)$ nên góc giữa SC và (SAB) chính là góc giữa SB và SC và bằng $\widehat{CSB}=30^\circ$. Ta có



$$SC=\frac{BC}{\sin\widehat{CSB}}=\frac{a}{\sin 30^\circ}=2a.$$

$$SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{4a^2-2a^2}=a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp là

$$V=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$ Chọn D.

Câu 46. $A\in(Oxz)\Rightarrow A(a,0,b)$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}=(a+2,-3,b-1)$, $\overrightarrow{MN}=(7,3,-3)$. Do M,N,A thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{MA}=k\cdot\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases} a+2=7k, \\ -3=3k, \\ b-1=-3k, \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k=-1, \\ a=-9, \\ b=4. \end{cases}$$

Vậy $A(-9,0,4)$ và $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Nghĩa là A chia đoạn MN theo tỉ số $\dfrac{1}{2}$. Chọn D.

Câu 49. Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB. Thế thì (β) có phương trình là

$$3x+y-7=0.$$

Đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu chính là giao tuyến của (α) và (β). Một vectơ chỉ phương của d là $u=[\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta]=(-1,3,-2)$. Vậy phương trình của d là $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. Chọn A.

Câu 50. Dễ dàng kiểm tra được rằng d_1 và d_2 là hai đường thẳng chéo nhau. Lấy $A(2,1,0)\in d_1$, $B(2,3,0)\in d_2$. Trung điểm của AB là $I(2,2,0)$. Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm thì (α) đi qua I và nhận $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-1,-5,-2)$ làm một vectơ pháp tuyến. Vậy

$$(\alpha):\quad x+5y+2z-12=0.$$ Chọn D.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

PHƯƠNG PHÁP
GIẢI TOÁN

BƯỚC NHẢY VIÈTE

HÀ TUẤN DŨNG
(*Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2*)

Phương trình nghiệm nguyên hay còn gọi là phương trình Diophant là chủ đề thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Bài viết giới thiệu phương pháp: Bước nhảy Viète - một trong những phương pháp thường được sử dụng để giải quyết các bài toán liên quan đến phương trình Diophant.

1. MỞ ĐẦU

Năm 1879, *Andrei Andreevich Markov* (1856-1922) - nhà toán học nổi tiếng người Nga đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ tại trường Đại học Saint Petersburg với chủ đề "*Dạng toàn phương xác định dương*". Luận án tiến sĩ của Markov đã giải quyết được một số vấn đề khó trong "*Lý thuyết số*" và mở ra một hướng nghiên cứu trong toán học, đó là "*Lý thuyết xấp xỉ Diophant*". Phương trình Markov - một phương trình Diophant bậc hai đặc biệt đóng vai trò chủ đạo trong các nghiên cứu của Markov về các dạng toàn phương, là phương trình có dạng

$$x^2+y^2+z^2=3xyz.$$

Ta thấy rằng phương trình Markov có một nghiệm hiển nhiên $(1,1,1)$. Đặt

$$S=\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{Z}^+ \mid x^2+y^2+z^2=3xyz\}$$

là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Markov thì $S\neq\varnothing$. Do vai trò của x,y,z trong phương trình là như nhau, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $x\le y\le z$.

Với mỗi cặp $(x,y,z)\in S$; $(x',y',z')\in S$ ta định nghĩa $(x,y,z)>(x',y',z')$ nếu $x+y+z>x'+y'+z'$. Markov đã dùng ý tưởng "thông minh" sau đây để chứng minh có vô hạn bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn phương trình trên. Với mỗi nghiệm $(x_n,y_n,z_n)\in S$ ta xây dựng bộ nghiệm mới như sau: Ta coi x_n là ẩn và các biến còn lại là các tham số thì rõ ràng phương trình bậc hai

$$x^2-3y_nz_nx+y_n^2+z_n^2=0$$

có một nghiệm là x_n, nên nó có nghiệm thứ hai là x'. Theo định lí Viète, ta có

$$x_n+x'=3y_nz_n \text{ và } x_nx'=y_n^2+z_n^2 \quad (1)$$

Từ đây ta được x' là một số nguyên dương, kết hợp với giả thiết $x_n\le y_n\le z_n$ và (1) ta được

$$x'=\frac{y_n^2+z_n^2}{x_n}\ge\frac{2x_n^2}{x_n}=2x_n>x_n.$$

Đặt $(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})=(x',y_n,z_n)$ thì $(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ là một nghiệm của phương trình Markov. Cách xây dựng này cho ta một dãy vô hạn các nghiệm của phương trình Markov vì các nghiệm tiếp theo lớn hơn các nghiệm trước theo định nghĩa thứ tự ở trên. Do đó phương trình Markov có vô số nghiệm. Ta thấy ý tưởng của Markov trong chứng minh trên là coi một biến là nghiệm của tam thức bậc hai khi cố định các nghiệm còn lại để từ đó xây dựng nghiệm mới từ một nghiệm đã biết bằng các hệ thức Viète. Cụ thể ta xét phương trình Diophant là phương trình bậc hai đối với một biến nào đó, chẳng hạn $x_1^2+G(x_2,x_3,...,x_n)=0$ là phương trình bậc 2 ẩn x_1. Nếu phương trình này có nghiệm $(x_1,x_2,...,x_n)=(a_1,a_2,...,a_n)$ thì rõ ràng là a_1 là nghiệm của phương trình $X^2+G(a_2,a_3,...,a_n)=0$.

Phương trình trên phải còn một nghiệm nữa là a_1'. Kết hợp với định lí Viète và dữ kiện của đầu bài ta sẽ "xây dựng" bộ $(a_1',a_2,...,a_n)$ là nghiệm của phương trình trên. Ý tưởng đó chính là nội dung của phương pháp "*Bước nhảy Viète*", một phương pháp thường được sử dụng trong các bài toán số học liên quan đến phương trình Diophant.

Mục tiêu của bài viết này là giới thiệu phương pháp bước nhảy Viète thông qua một số bài toán số học xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Phần còn lại của bài viết được bố cục như sau: Mục 2 chúng tôi giới thiệu về phương pháp bước nhảy Viète qua các bài tập cụ thể, Mục 3 là các bài tập có sử dụng phương pháp bước nhảy Viète.

2. BƯỚC NHẢY VIÈTE QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài toán đầu tiên sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi: *"Nếu tổng các bình phương S ba số nguyên dương chia hết cho tích P của chúng thì khi đó $S:P$ bằng bao nhiêu?"*.

Bài toán 1. *Hãy tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2+y^2+z^2=kxyz$ có nghiệm nguyên dương (nghĩa là mỗi nghiệm gồm ba số nguyên dương x,y,z).*

Lời giải. Với $x,y,z\in\mathbb{Z}^+$, ta viết phương trình đã cho dưới dạng $x^2-kxyz+y^2+z^2=0$ (1)

Giả sử k là số nguyên dương sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên dương. Cố định k và xét tập hợp

$$S=\left\{(x,y,z);x,y,z\in\mathbb{Z}^+ \middle|\ x^2-kxyz+y^2+z^2=0\right\}.$$

Theo điều giả sử ở trên thì $S\neq\varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại $(x_0,y_0,z_0)\in S$ sao cho $x_0+y_0+z_0$ là nhỏ nhất. Ta thấy rằng, nếu $(x_0,y_0,z_0)\in S$ thì $(y_0,z_0,x_0)\in S,(z_0,x_0,y_0)\in S,$ không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $x_0\geq y_0\geq z_0$. Phương trình

$$f(x)=x^2-xky_0z_0+y_0^2+z_0^2=0$$

hiển nhiên có một nghiệm x_0. Gọi nghiệm còn lại là x_1, theo định lí Viète, ta có

$$x_0+x_1=ky_0z_0\ ;\ x_0x_1=y_0^2+z_0^2.$$

Từ đây, ta được x_1 không âm, do đó $(x_1,y_0,z_0)\in S,$ theo cách xác định của bộ (x_0,y_0,z_0) thì ta thu được $x_1+y_0+z_0\geq x_0+y_0+z_0$ hay $x_1\geq x_0$.

Do đó, ta có $x_1\geq x_0\geq y_0\geq z_0$ (2)

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai và từ (2) ta được: $0\leq f(y_0)\leq y_0^2-ky_0^2z_0+2y_0^2=y_0^2(3-kz_0)$. Suy ra $kz_0\leq 3\Rightarrow k\leq kz_0\leq 3$ mà $k\in\mathbb{Z}^+$ nên $k\in\{1,2,3\}$.

Nếu $k=1$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x=y=z=3$.

Nếu $k=2$, thì từ $kz_0\leq 3$ ta được $z_0=1$ khi đó ta có $(x_0-y_0)^2+1=0$, mâu thuẫn.

Nếu $k=3$, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương $x=y=z=1$.

Vậy với $k\in\{1,3\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên dương.

Nhận xét 1. *Trong bài toán này, ta đã "ngầm" thiết lập một quan hệ thứ tự từ điển trên S*

$$(x,y,z)>(x',y',z')\ \Leftrightarrow x+y+z>x'+y'+z'.$$

Sau đó, dựa vào nguyên lý sắp thứ tự tốt "Một tập hợp khác rỗng bất kì của các số tự nhiên bao giờ cũng có phần tử bé nhất" để chỉ ra (x_0,y_0,z_0) là nghiệm nhỏ nhất theo quan hệ thứ tự nói trên. Nhờ phương pháp bước nhảy Viète ta đã xây dựng được nghiệm (x_1,y_0,z_0) từ nghiệm (x_0,y_0,z_0) để từ đó thiết lập được quan hệ "$x_1\geq x_0\geq y_0\geq z_0$".

Từ đó, với định lý dấu của tam thức bậc hai ta tìm được các giá trị k thỏa mãn điều kiện bài toán. Bằng cách làm tương tự ta có thể giải quyết được bài toán trong Kỳ thi học sinh giỏi Quốc Gia môn toán lớp 12 (VMO) năm 2002: Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình $x+y+u+v=n\sqrt{xyuv}$ có nghiệm nguyên dương x,y,u,v.

Bài toán 2. (*Đề thi Olympic Toán học Quốc tế - IMO, 2003*). *Hãy tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) sao cho $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ là một số nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử tồn tại cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn điều kiện bài toán. Đặt $k=\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ thì k là số nguyên dương. Cố định k và xét tập hợp

$$S=\left\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+ \middle|\ a^2-2akb^2+k(b^3-1)=0\right\}.$$

Theo điều giả sử ở trên thì $S\neq\varnothing$. Do $k\in\mathbb{Z}^+$ nên với $(a,b)\in S$ ta có $2ab^2-b^3+1>0$ suy ra

$$b^2(2a-b)>-1 \text{ hay } b^2(2a-b)\geq 0.$$

Do đó $2a=b$ hoặc $2a>b.$ Nếu $2a>b$ kết hợp với $k\geq 1$, ta được: $a^2\geq 2ab^2-b^3+1>b^2(2a-b)\geq b^2$.

Từ đó suy ra nếu $(a,b)\in S$ thì $2a=b$ hoặc $a>b$. Gọi (a_0,b_0) là một phần tử bất kì thuộc S. Xét phương trình $T^2-2Tkb_0^2+k(b_0^3-1)=0$ là phương trình bậc hai ẩn T có một nghiệm là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo công thức Viète ta có:

$$a_0+a_1=2kb_0^2\ ;\ a_0a_1=k(b_0^3-1) \qquad (1)$$

Từ đây, ta có $a_1\in\mathbb{Z}$ và $a_1\geq 0$. Nếu $a_1=0$, thì từ (1) ta có: $b_0=1$ và $a_0=2k$, ta được $(2k,1)$ là một cặp số thỏa mãn điều kiện bài toán. Nếu $a_1\in\mathbb{Z}^+$ thì $(a_1,b_0)\in S$. Không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_1\geq a_0$. Chú ý rằng, theo nhận xét ở trên thì $2a_0=b_0$ hoặc $a_0>b_0$. Nếu $a_0>b_0$ thì ta có ngay $a_1\geq a_0>b_0$, kết hợp với (1) ta thu được

$$kb_0^2\leq a_1=\frac{k(b_0^3-1)}{a_0}\leq\frac{k(b_0^3-1)}{b_0}<kb_0^2.$$

Điều này mâu thuẫn. Với $2a_0=b_0$ thì ta được $(k,2k)$ là một cặp số thỏa mãn điều kiện bài toán. Từ hệ thức $a_0a_1=k\left(b_0^3-1\right)$ ta thu được $(8k^3-1,2k)$ là một cặp số cần tìm. Vậy các cặp số (a,b) thỏa mãn điều kiện bài toán là $(2k,1)$, $(k,2k)$ và $(8k^3-1,2k)$ với k là số nguyên không âm.

Nhận xét 2. *Bài toán cho chúng ta thấy được ứng dụng của phương phương pháp bước nhảy Viète trong việc tìm* *nghiệm của phương trình Diophant. Mấu chốt của bài toán là phải phát hiện ra mối quan hệ: Nếu $(a,b)\in S$ thì $2a=b$ hoặc $a>b$.*

Phương trình $a^2-2akb^2+k\left(b^3-1\right)=0$ là phương trình Diophant bậc 3 đối với ẩn b nhưng là phương trình bậc hai đối với ẩn a nên ta vẫn áp dụng được phương pháp bước nhảy Viète để xác định được nghiệm của bài toán. Chú ý rằng khi tìm được nghiệm $(a_0,b_0)=(2k,k)$ thì ta phải tìm a_1 vì (a_1,b_0) cũng là nghiệm, nếu không sẽ dẫn đến việc làm mất nghiệm $(8k^3-1,2k)$ của bài toán.

Bài toán 3 (*IMO 2007*). *Cho trước a, b là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu số $4ab-1$ là ước số của $(4a^2-1)^2$ thì $a=b$.*

Lời giải. Theo giả thiết thì $4ab-1\,|\,(4a^2-1)^2$ nên ta có $4ab-1$ là ước của

$$b^2(4a^2-1)^2-(4ab-1)(4a^3b-2ab+a^2)=(a-b)^2.$$

Đặt: $k=\dfrac{(a-b)^2}{4ab-1}$ thì $k\in\mathbb{Z}^+$. Cố định k và xét tập hợp:

$$S=\left\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+;a\neq b\,\middle|\,a^2-2ab(2k+1)+b^2+k=0\right\}.$$

Giả sử $S\neq\varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại cặp số $(a_0,b_0)\in S$ sao cho $a_0\neq b_0$ và a_0+b_0 nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0,b_0)\in S$ thì $(b_0,a_0)\in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0>b_0$. Phương trình $T^2-2Tb_0(2k+1)+b_0^2+k=0$. có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viète ta có:

$$a_0+a_1=2b_0(2k+1)\ ;\ a_0a_1=b_0^2+k \qquad (1)$$

Từ đây, ta được a_1 là số nguyên không âm, do đó $(a_1,b_0)\in S$, theo cách xác định $\left(a_0,b_0\right)$ thì

$$a_1+b_0\geq a_0+b_0 \Leftrightarrow a_1\geq a_0.$$

Kết hợp với (1) ta được

$$a_0=\frac{b_0^2+k}{a_1}\leq\frac{b_0^2+k}{a_0} \Leftrightarrow k\geq a_0^2-b_0^2.$$

Do đó, ta có: $\dfrac{(a_0-b_0)^2}{4a_0b_0-1}=k\geq a_0^2-b_0^2$

$$=(a_0-b_0)(a_0+b_0).$$

Mà $a_0>b_0$ nên $a_0-b_0\geq 1$, vì vậy

$$a_0-b_0\geq(a_0+b_0)(4a_0b_0-1)>a_0+b_0,$$

mâu thuẫn. Như vậy, điều giả sử là sai hay $S=\varnothing$. Từ đó, ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét 3. *Với cách phát biểu của bài toán thì ta không thể áp dụng phương pháp bước nhảy Viète vì khi đó phương trình cần xét sẽ là một phương trình bậc bốn ẩn a. Để có thể áp dụng được, ta đã biến đổi điều kiện ban đầu của bài toán trở thành số $4ab-1$ là ước số của $(a-b)^2$. Sau đó, sử dụng phản chứng kết hợp với phương pháp bước nhảy Viète và nguyên lý sắp thứ tự tốt ta được điều phải chứng minh.*

Bài toán 4. *Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của k để phương trình $a^2+b^2-kab-k=0$ có nghiệm nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương (a,b). Cố định k và xét tập hợp

$$S=\left\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+\,\middle|\,a^2+b^2-kab-k=0\right\}.$$

Theo điều giả sử trên thì $S\neq\varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại $\left(a_0,b_0\right)$ sao cho a_0+b_0 là nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0,b_0)\in S$ thì $(b_0,a_0)\in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0\geq b_0$. Phương trình: $T^2-kTb_0+b_0^2-k=0$ có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viète ta có:

$$a_0+a_1=kb_0\ ;\ a_0a_1=b_0^2-k. \qquad (1)$$

Từ (1) ta có a_1 là số nguyên. Ta sẽ chứng minh $a_1\geq 0$. Thật vậy, nếu $a_1<0$ thì

$$0=a_1^2-ka_1b_0+b_0^2-k>a_1^2+k+b_0^2-k=a_1^2+b_0^2,$$

mâu thuẫn. Do đó $a_1\geq 0$. Nếu $a_1>0$ thì $(a_1,b_0)\in S$, theo cách xác định (a_0,b_0) thì $a_1+b_0\geq a_0+b_0$ hay $a_1\geq a_0$. Từ đó ta có:

$$b_0^2>b_0^2-k=a_0a_1\geq a_0^2 \Leftrightarrow b_0>a_0,\ \text{mâu thuẫn.}$$

Vì vậy $a_1=0$, khi đó $k=b_0^2$, hay k là một số chính phương. Đảo lại với $k=m^2$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương là (m,m^3). Vậy k là số chính phương thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương.

Nhận xét 4. *Bài toán trên là cách phát biểu khác của bài toán số 6 trong Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế năm 1988 (đó là bài toán khó nhất trong kỳ thi và chỉ có mười một thí sinh có lời giải hoàn chỉnh).*

Đây cũng là một trong những ví dụ "nổi tiếng nhất" trong việc sử dụng phương pháp bước nhảy Viète. Qua ví dụ này ta thấy rằng nguyên lý sắp thứ tự tốt thường "song hành" với phương pháp bước nhảy Viète trong các bài toán về biện luận phương trình Diophant bậc hai.

Bài toán 5. *Cho a,b là các số nguyên dương với $ab\neq 1$. Giả sử rằng $ab-1$ chia hết a^2+b^2. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}=5$.*

Lời giải. Đặt $k=\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ thì k là số nguyên dương.

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$k=\frac{a^2+b^2}{ab-1}\ge\frac{2ab}{ab-1}=2+\frac{2}{ab-1}>2$$

hay $k\ge 3$. Nếu $a=b$ thì ta được $k=2+\dfrac{2}{a^2-1}<3$, mâu thuẫn. Ta sẽ chứng minh $k=5$. Thật vậy, cố định k và xét tập hợp

$$S=\left\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+\,\middle|\,k=\frac{a^2+b^2}{ab-1}\right\}.$$

Theo giả thiết thì $S\neq\varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt tồn tại (a_0,b_0) sao cho a_0+b_0 là nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0,b_0)\in S$ thì $(b_0,a_0)\in S$ kết hợp với nhận xét ở trên không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0>b_0$. Phương trình

$$\frac{T^2+b_0^2}{Tb_0-1}=k\Leftrightarrow T^2-kTb_0+b_0^2+k=0$$

có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viète ta có:

$$a_0+a_1=kb_0\ ;\ a_0a_1=b_0^2+k.$$

Từ đây, ta được $a_1\in\mathbb{Z}^+$, do đó $(a_1,b_0)\in S$, theo cách xác định (a_0,b_0) thì $a_1+b_0\ge a_0+b_0$ hay $a_1\ge a_0$. Vì $a_0>b_0$ nên $a_0\ge b_0+1$, từ đó ta thu được: $b_0^2+k-kb_0=a_0.a_1-a_0-a_1$

$$=(a_0-1)(a_1-1)-1\ge b_0^2-1.$$

Do đó $k(b_0-1)\le 1$. Nếu $b_0\neq 1$ theo chứng minh trên thì $k(b_0-1)\ge 3>1$, vì vậy ta phải có $b_0=1$.

Khi đó: $a_0+a_1=k$ và $a_0a_1=k+1$, suy ra

$$a_0a_1-a_0-a_1-1=0\Leftrightarrow(a_0-1)(a_1-1)=2$$

mà $a_1\ge a_0$ nên $a_0=2$, $a_1=3$, từ đây ta được

$$k=a_0+a_1=5.$$

Như vậy, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 5. *Phương pháp làm bài toán này tương tự với bài toán 4, đó là bước nhảy Viète kết hợp với nguyên lý sắp thứ tự tốt. Từ chứng minh bài toán, ta thu được $(a,b)=(2,1)$ là cặp số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán theo nghĩa tổng của $a+b$ là nhỏ nhất. Một câu hỏi "tự nhiên" được đặt ra khi đã làm xong bài toán 4 và 5 là liệu có bao nhiêu cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn điều kiện bài toán và chúng được "mô tả" như thế nào. Bài toán tiếp theo là bài toán số 5 trong Kỳ thi chọn đội tuyển Quốc gia dự thi OlympicToán học Quốc tế (VN TST) năm 1992 sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi trên.*

Bài toán 6 (*VNTST* 1992). *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x,y) của phương trình*

$$x^2-5xy+y^2+5=0 \qquad (1)$$

Lời giải. *Đầu tiên, chúng ta chứng minh bổ đề*

Bổ đề. Xét hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ được xác định như sau: $u_0=1,u_1=2,u_{n+2}=5u_{n+1}-u_n,\forall n=0,1,...;$

$$v_0=1,v_1=3,v_{n+2}=5v_{n+1}-v_n,\forall n=0,1,....$$

Khi đó, với mọi $n\in\mathbb{N}$ các cặp số (u_n,u_{n+1}) và (v_n,v_{n+1}) là nghiệm nguyên dương của (1). Ta sẽ chứng minh mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp toán học

Mệnh đề. *Với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì (u_n,u_{n+1}) là nghiệm của phương trình* (1).

Với $n=0$, ta có: $u_1^2+u_0^2-5u_0u_1=-5$. Do đó (u_0,u_1) là một nghiệm của phương trình (1). Như vậy, mệnh đề đúng với $n=0$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k>0$, tức là

$$u_k^2+u_{k+1}^2-5u_ku_{k+1}+5=0.$$

Khi đó $u_{k+1}^2+u_{k+2}^2-5u_{k+1}u_{k+2}=u_{k+2}(u_{k+2}-5u_{k+1})+u_{k+1}^2$

$$=u_{k+1}^2+u_k^2-5u_ku_{k+1}.$$

Từ giả thiết quy nạp, ta được:

$$u_{k+1}^2+u_{k+2}^2-5u_{k+1}u_{k+2}+5=0.$$

Do đó (u_{k+1},u_{k+2}) cũng là nghiệm của phương trình (1). Theo nguyên lý quy nạp toán học thì mệnh đề đúng với mọi $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh tương tự, ta cũng thu được với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì (v_n,v_{n+1}) là nghiệm của phương trình (1). Từ công thức xác định số hạng tổng quát của hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ ta được các số hạng của hai dãy đều là các số nguyên dương. Do đó, các cặp số (u_n,u_{n+1}) và cặp số (v_n,v_{n+1}) là nghiệm nguyên dương của phương trình (1). Như vậy, bổ đề được chứng minh.

Bây giờ quay trở lại bài toán, xét tập hợp

$$S=\left\{(a,b);a,b\in\mathbb{Z}^+\,\middle|\,a^2-5ab+b^2+5=0\right\}.$$

Với $(a,b)\in S$ nếu $a=b$ thì ta có

$$3a^2-5=0\Rightarrow a^2=\frac{5}{3},$$

mâu thuẫn. Do đó $a\neq b$. Ta thấy rằng nếu $(a,b)\in S$ thì $(b,a)\in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử với mọi $(a,b)\in S$ thì $a<b$. Với (a,b) là một phần tử bất kì thuộc *S*. Xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_0=b,\ a_1=a,a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n,\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Ta có: $b(5a-b)=a^2+5>0 \Rightarrow 5a>b$.

Từ công thức xác định số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$ ta được $a_n \in \mathbb{Z}^+$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Ta có $(a_0, a_1)=(a,b) \in S$, giả sử $(a_k, a_{k+1}) \in S$ với mọi $k \geq 1$, khi đó: $a_{k+1}^2+a_{k+2}^2-5a_{k+1}a_{k+2}$
$$=a_{k+2}(a_{k+2}-5a_{k+1})+a_{k+1}^2$$
$$=a_{k+1}^2+a_k^2-5a_k a_{k+1}.$$

Từ đây ta được $(a_{k+1}, a_{k+2}) \in S$, theo nguyên lý quy nạp toán học thì $(a_n, a_{n+1}) \in S, \forall n \in \mathbb{N}$.

Nếu $a=1$ thì từ (1) ta được:
$$b^2-5b+6=0 \Leftrightarrow b \in \{2,3\}.$$

Nếu $b=2$ ta có $(a,b)=(u_0,u_1)$. Nếu $b=3$ thì $(a,b)=(v_0,v_1)$. Ta xét trường hợp $a>1$, khi đó $(4a-b)(a-b)=3a^2-5>0$, mà $a<b$ nên $4a<b$, mà $a_0>a_1$ nên từ đây ta được $a_n>a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy với $a>1$ thì dãy $\{a_n\}$ là một dãy giảm ngặt, nên phải tồn tại một chỉ số k sao cho $a_0>a_1>...>a_{k+1}=1$. Do (a_k, a_{k+1}) là một nghiệm của phương trình (1) nên ta có $a_k \in \{2,3\}$.

Với $a_k=2$ thì ta có $a_{k+1}=u_0$, $a_k=u_1$, khi đó $a_{k-1}=5a_k-a_{k+1}=u_2$, từ đó ta được $a_i=u_{k+1-i}$. Tương tự với $a_k=3$ thì (a,b) là các số hạng liên tiếp của dãy $\{v_n\}$. Như vậy, các bộ (u_n, u_{n+1}) và (v_n, v_{n+1}) (với mọi $n \in \mathbb{N}$) là tập tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

Nhận xét 6. *Ta thiết lập quan hệ thứ tự trong S như sau nếu $(x,y) \in S$, $(x',y') \in S$ thì: $(x,y)>(x',y') \Leftrightarrow x>x'$ và $y>y'$. Từ một nghiệm bất kì của phương trình (1) bằng phương pháp bước nhảy Viète ta thiết lập được nghiệm mới nhỏ hơn nghiệm (a,b) theo quan hệ thứ tự nói trên. Từ nghiệm vừa mới thu được này ta lại xây dựng nghiệm mới nhỏ hơn, cứ tiếp tục quá trình như vậy đến khi không thể xây dựng được nữa. Khi đó, ta thu được nghiệm nhỏ nhất. Dãy $\{a_n\}$ đã mô tả các nghiệm của phương trình (1) được xây dựng từ quá trình trên và được xây dựng dựa vào các tính chất: a,b là hai số hạng đầu tiên của dãy; (a_i, a_{i+1}) là một nghiệm của phương trình (1). Để xác định được công thức truy hồi của dãy $\{a_n\}$ ta đã sử dụng phương pháp bước nhảy Viète. Xét phương trình $T^2-5Ta_{n+1}+a_{n+1}^2+5=0$ có một nghiệm là a_n, gọi nghiệm còn lại là a_{n+2} thì theo hệ thức Viète ta có: $a_n+a_{n+2}=5a_{n+1}$ và $a_n a_{n+2}=a_{n+1}^2+5$.* (2) *Từ đây, ta có a_{n+2} là số nguyên dương, do đó (a_n, a_{n+2}) cũng là một nghiệm của phương trình, và từ (2) ta được $a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$. Sau khi thu được nghiệm nhỏ nhất, ta xây dựng các nghiệm của phương trình từ nghiệm nhỏ nhất đó thông qua hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$.*

Bài toán 7 (*VMO - 2012*). *Xét các số tự nhiên lẻ a,b, mà a là ước số của b^2+2 và b là ước số của a^2+2. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên $\{v_n\}$ được xác định bởi*
$$v_0=v_1=1,\ v_n=4v_{n-1}-v_{n-2},\ \forall n \geq 2.$$

Lời giải. Đặt $d=(a,b)$, khi đó ta có $d \mid a$, $d \mid b$ mà $b \mid a^2+2$ nên $d \mid a^2+2-a^2$ hay $d \mid 2$. Vì a, b là các số tự nhiên lẻ nên d là số tự nhiên lẻ, do đó $d=1$. Ta có $a \mid a^2+b^2+2$, $b \mid a^2+b^2+2$, mà $(a,b)=1$ nên a^2+b^2+2 chia hết cho ab. Ngược lại, nếu $ab \mid a^2+b^2+2$ thì ta cũng có $a \mid b^2+2$ và $b \mid a^2+2$. Ta thấy giả thiết của đề bài tương đương với việc tồn tại số nguyên dương k sao cho: $a^2+b^2+2=kab \Leftrightarrow a^2-kab+b^2+2=0$.

Xét tập hợp:
$$S=\{(a,b); a,b \in \mathbb{Z}^+; a,b \,⋮\, 2 \,|\, a^2-akb+b^2+2=0\}.$$

Theo giả thiết thì $S \neq \varnothing$, khi đó theo nguyên lý sắp thứ tự tốt, tồn tại cặp số $(a_0,b_0) \in S$ sao cho a_0+b_0 nhỏ nhất. Ta thấy rằng nếu $(a_0,b_0) \in S$ thì $(b_0,a_0) \in S$, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a_0 \geq b_0$. Phương trình $T^2-Tkb_0+b_0^2+2=0$ có một nghiệm hiển nhiên là a_0. Gọi nghiệm còn lại là a_1, theo định lí Viète ta có:
$$a_0+a_1=kb_0\ ;\ a_0a_1=b_0^2+2 \qquad (1)$$

Từ đây, ta được a_1 là số nguyên không âm, do đó $(a_1,b_0) \in S$, theo cách xác định (a_0,b_0) thì $a_1+b_0 \geq a_0+b_0$ hay $a_1 \geq a_0$. Từ (1) ta có
$$a_0=\frac{b_0^2+2}{a_1} \leq \frac{b_0^2+2}{a_0}$$
suy ra $a_0^2-b_0^2 \leq 2$ hay $(a_0-b_0)(a_0+b_0) \leq 2$ (2)

Nếu $a_0 \neq b_0$ thì ta có $a_0-b_0 \geq 1$, từ (2) ta được $a_0+b_0 \leq 2$ suy ra $a_0=b_0=1$, mâu thuẫn. Do đó $a_0=b_0$, từ (1) ta thu được $a_0a_1=a_0^2+2$ hay $a_0(a_1-a_0)=2$, mà a_0 là số lẻ nên $a_0=1$ và $a_1=2+a_0=3$. Khi đó $k=4$, như vậy nếu a,b là các số tự nhiên thỏa mãn điều kiện đề bài thì
$$a^2+b^2-4ab+2=0 \qquad (3)$$

Từ công thức xác định của dãy $\{v_n\}$, ta được mọi số hạng của dãy đều là số tự nhiên lẻ. Ta thấy $(v_0,v_1)=(1,1) \in S$, giả sử $(v_k, v_{k+1}) \in S$ với mọi

$k \geq 1$, khi đó ta có: $v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2 - 4v_{k+1}v_{k+2}$

$$= -v_k.v_{k+2} + v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 + v_k^2 - 4v_kv_{k+1}.$$

Mà theo giả thiết thì $(v_k, v_{k+1}) \in S$ nên

$$v_{k+1}^2 + v_{k+2}^2 - 4v_{k+1}v_{k+2} + 2 = 0.$$

Do đó theo nguyên lý quy nạp toán học thì $(v_n, v_{n+1}) \in S$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với (a,b) là một phần tử bất kì thuộc S, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a < b$ xét dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau:

$$a_0 = b, a_1 = a, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Từ (3) ta có: $b(4a - b) = a^2 + 2 > 0 \Rightarrow 4a > b$.

Từ công thức xác định số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$ ta được $a_n \in \mathbb{Z}^+$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và mọi số hạng của dãy đều là số lẻ. Chứng minh tương tự như đối với dãy số $\{v_n\}$ ta được $(a_n, a_{n+1}) \in S$ mọi $n \in \mathbb{N}$.

Nếu $a = 1$ thì từ (3) ta được $b^2 - 4b + 3 = 0$ hay $b \in \{1, 3\}$. Xét với $b = 1$ khi đó $(a,b) = (v_0, v_1)$. Xét với $b = 3$ thì $(a,b) = (v_1, v_2)$. Ta xét trường hợp $a > 1$, khi đó $(3a - b)(a - b) = 2a^2 - 2 > 0$ mà $a < b$ nên $3a < b$, do $a_0 > a_1$ nên từ đây ta được $a_n > a_{n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy, với $a > 1$ thì dãy $\{a_n\}$ là một dãy giảm ngặt, nên tồn tại k nào đó sao cho

$$a_0 > a_1 > ... > a_{k-1} = 1.$$

Do (a_{k-2}, a_{k-1}) là nghiệm của phương trình (3) nên ta có $a_{k-2} \in \{1, 3\}$ mà ta lại có $a_{k-2} > a_{k-1}$ nên $a_{k-2} = 3$, suy ra $a_k = 4a_{k-1} - a_{k-2} = 1$. Khi đó, ta có $a_k = v_0$, $a_{k-1} = v_1$ và $a_{k-2} = 3 = v_3$. Từ đó, ta được $v_i = a_{k-i}$ với mọi $i \in \mathbb{N}$, theo chứng minh ở trên thì $(v_n, v_{n+1}) \in S$. Từ đây ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét 7. *Về mặt ý tưởng thì bài toán trên là sự kết hợp khéo léo của hai bài toán 5 và 6. Bài toán có thể phát biểu như sau: Tìm tất cả các nghiệm tự nhiên của phương trình*

$$a^2 + b^2 - abc + 2 = 0$$

trong đó a, b là các số tự nhiên lẻ.

Dưới đây là một bài tương tự

(Olympic Toán Canada 1998). *Cho m là một số nguyên dương. Dãy số $\{u_n\}_{n\geq 0}$ được xác định như sau*

$$u_0 = 0, u_1 = m \text{ và } u_{n+1} = m^2u_n - u_{n-1},$$

với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng, các cặp số (a,b) với $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \geq b$, là nghiệm của phương trình $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ khi và chỉ khi $(a,b) = (u_n, u_{n+1})$ với mọi số tự nhiên n.

3. MỘT SỐ BÀI TẬP DÀNH CHO ĐỘC GIẢ

1. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 + y^2 + x + y = kxy$ có nghiệm nguyên dương.

(*Olympic* 30-4 *lớp* 10 *năm* 2014)

2. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - Nxyzt - N = 0$ trong đó N là số nguyên dương cho trước.

a) Chứng tỏ rằng, có vô số giá trị nguyên dương N để phương trình trên có nghiệm nguyên dương (nghĩa là mỗi nghiệm gồm bốn số nguyên dương x, y, z, t).

b) Cho $N = 4^k(8m + 7)$ với k, m là các số nguyên không âm. Chứng minh rằng, khi đó phương trình trên không có nghiệm nguyên dương. (*VNTST* 1994)

3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình sau có nghiệm nguyên dương $x^2 + y^2 = n(x+1)(y+1)$.

4. Cho m, n là hai số lẻ với $m > n > 1$ thỏa mãn

$$m^2 - n^2 + 1 \mid n^2 - 1.$$

Chứng minh rằng, $m^2 - n^2 + 1$ là số chính phương.

(*Olympic Taiwan* 1998)

5. Chứng minh rằng tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ là $(x,y) = (F_{2k-1}, F_{2k+1})$ với F_n là số Fibonacci.

6. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình: $x^2 - (k^2 - 4)y^2 + 24 = 0$ có nghiệm nguyên dương.

(*Đề thi trường Đông phía Bắc* 2015)

7. Tìm tất cả các cặp số (a,b) mà $ab \mid a^2 + b^2 + 3$.

(*Olympic Turkey* 1994)

8. Giả sử a, b là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$b + 1 \mid a^2 + 1, \ a + 1 \mid b^2 + 1.$$

Chứng minh rằng a, b đều là các số lẻ.

9. Chứng minh rằng với mỗi số thực N thì phương trình $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$ có nghiệm (a_1, a_2, a_3, a_4) với a_1, a_2, a_3, a_4 là các số nguyên lớn hơn N. (*Putnam* 1998)

10. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn

$$\frac{ab(5a^2 + 5b^2 - 2)}{5ab - 1} \in \mathbb{Z}.$$

Chứng minh rằng $a = b$.

11. Cho a, b, k là các số nguyên dương thỏa mãn

$$k = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab + 1}.$$

Chứng minh rằng k là một số chính phương.

12. Chứng minh rằng phương trình $(x + y + z)^2 = 7xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

13. Cho số nguyên dương x, y, A thỏa mãn hệ thức

$$A = \frac{x^2 + y^2 + 30}{xy}.$$

Chứng minh rằng A là lũy thừa bậc 5 của một số nguyên.

14. Cho phương trình $(x + y + z)^2 = nxyz$, với n là số tự nhiên khác 0. Tìm n để phương trình có nghiệm nguyên dương.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

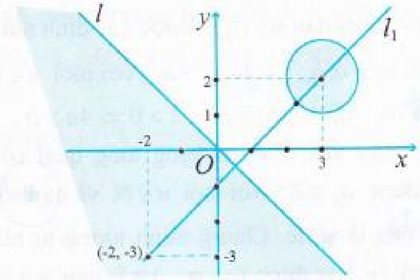
BÀI SỐ 19

Problem. *Find the loci of the complex numbers w and z which satisfy* $|w+2+3i|\le|w-3-2i|$ *and* $|z-3-2i|\le 1$. *For such w and z, find the minimum value of* $|z-w|$.

Solution. We will identify the complex number $a+bi$ with the point (a,b). By definition, $|w+2+3i|$ is the distance from w to $w_1=-2-3i$ and $|w-3-2i|$ is the distance from w to $w_2=3+2i$. Therefore, the locus of w such that $|w+2+3i|\le|w-3-2i|$ is the half-plane which contains w_1 and is determined by the perpendicular bisector l of w_1 and w_2. Similarly, $|z-3-2i|$ is the distance from z to $w_2=3+2i$. Thus, the locus of z such that $|z-3-2i|\le 1$ is the closed disk with center at $w_2=3+2i$ and with radius 1.

It is easy to see that the line which goes through w_1 and w_2, say l_1, is perpendicular to l and intersects l at $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Hence $|z-w|$ obtains its minimum value when $w=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ and z is the lower intersection between l_1 and the circle $|z-3-2i|=1$. And its minimum value is

$$\sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}-1=\frac{5}{2}\sqrt{2}-1\,.$$



TỪ VỰNG

identify : đồng nhất
locus (loci) : quỹ tích (loci là dạng số nhiều của locus)
distance : khoảng cách
half-plane : nửa mặt phẳng
perpendicular bisector : đường trung trực
closed disk : đĩa tròn, kể cả biên

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

BÀI DỊCH SỐ 16

Bài toán. *Có bao nhiêu cách sắp xếp các số 1, 2, 3, 4 và 5 để được một số có 5 chữ số chia hết cho 12?*

Lời giải. Một số chia hết cho 12 khi và chỉ khi nó chia hết cho cả 3 và 4. Số gồm 5 chữ số 1, 2, 3, 4 và 5 luôn chia hết cho 3 vì 1+2+3+4+5 chia hết cho 3. Mặt khác, số $\overline{abcde}$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi $\overline{de}$ chia hết cho 4. Do đó ta có cách chọn $\overline{de}$ là 12, 24, 32 hoặc 52.

Với mỗi cách chọn, có 3! = 6 cách điền vào 3 vị trí đầu tiên.

Từ đó có $4\times 6=24$ cách sắp xếp các số 1, 2, 3, 4 và 5 để được một số có 5 chữ số mà số đó chia hết cho 12.

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Hà Nội:** *Nguyễn Hương Giang*, 10A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Ngọc Thanh*, 11T1, *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Phan Tam Li Na, Huỳnh Đinh Ngọc Trác*, 10/1, *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Định:** *Nguyễn Như Hiếu, Lê Phạm Thủy Tiên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Quy Nhơn; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: TÌM GIỚI HẠN

(Đề đăng trên TH&TT số 474, tháng 12 năm 2016)

Phân tích. Lời giải trên đã giải sai ở chổ, khi x dần về $-\infty$, biểu thức $2x + 1 < 0$, do đó khi đưa vào trong căn bậc hai phải đổi dấu, mà trong lời giải đã không làm việc này.

Lời giải đúng

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+1)\sqrt{\frac{2x+3}{x^3+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{(2x+1)^2(2x+3)}{x^3+x+1}}\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}$$

$$=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}.$$

Nhận xét. Các bài gửi về Tòa soạn đều phát hiện ra sai lầm, nhưng một vài bạn đưa ra phân tích sai lầm chưa chặt chẽ. Trừ một bạn thì tất cả đều đưa ra lời giải đúng. Các bạn được khen trong số này là:

Hưng Yên: *Triệu Quốc Tùng*, *Cao Thành Trung*, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; *Chu Minh Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 11A, THPT Nam Sách, H. Nam Sách. **Hà Nam:** *Lê Phương Nam*, 11 Toán, THPT chuyên Biên Hòa. **Thừa Thiên Huế:** *Võ Xuân Đức Thắng*, *Nguyễn Ngọc Thanh*, 11T1, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bình Định:** *Nguyễn Công Khải*, 10 Toán, THPT Tây Sơn, H. Tây Sơn. **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 12 chuyên toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển. **Long An:** *Lê Trí Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An.

KIHIVI

CHỌN ĐÁP ÁN NÀO ?

Có 4 bạn cùng vần *T*: *Thích*, *Toán*, *Tuổi*, *Trẻ* sinh hoạt nhóm giải quyết bài toán dạng trắc nghiệm sau đây:

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}$ *là*

A. 4 **B.** $4\frac{1}{3}$ **C.** $4\frac{2}{3}$

D. 5 **E.** Một kết quả khác

Một bạn đề xuất đáp án **B** với lời giải như sau:

$$S=x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\ge x+y+2\sqrt{\frac{1}{xy}}\quad\text{(BĐT Cauchy)}$$

$$=x+y+\frac{2}{\sqrt{xy}}\ge x+y+\frac{4}{x+y}.\quad\text{(BĐT Cauchy)}$$

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{4}{t}$ với $t=x+y\ge 3$. Ta có:

$$f'(t)=1-\frac{4}{t^2}=\frac{t^2-4}{t^2}>0 \text{ với } \forall t\ge 3$$

$\Rightarrow$ hàm $f(t)$ đồng biến trên $[3;+\infty)$

$\Rightarrow \min\limits_{[3;+\infty)} f(t)=f(3)=3+\frac{4}{3}=4\frac{1}{3} \Rightarrow$ chọn đáp án **B**.

Các bạn có đồng ý với lời giải trên không, nếu không thì bạn làm thế nào ?

NGUYỄN HỮU DỰ

(Xóm 3, Quỳnh Liên, TX. Hoàng Mai, Nghệ An)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 478 (4.2017)

Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Vũ Hữu Chín – Một số bài toán về ước chung, ước chung lớn nhất trong tập hợp số tự nhiên.

6 *Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Minh Tuấn*
Kỳ thi Toán Hà Nội mở rộng năm 2017 lần thứ 14 (Junior Section).

10 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Hưng Yên, năm học 2016 – 2017.

11 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 môn Toán THPT chuyên Vĩnh Phúc, năm học 2016 – 2017.

14 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 7.

16 **Đề ra kỳ này**
Problems in This Issue
T1/478, ..., T12/478, L1/478, L2/478.

18 **Giải bài kỳ trước**
Solutions to Previous Problems

27 **Thử sức trước kỳ thi** - Đề số 8.

32 **Phương pháp giải toán**
Hà Tuấn Dũng – Bước nhảy Viète.

38 **Tiếng Anh qua các bài toán** - *Bài số* 19.
Bài dịch số 16 - Tiếng Anh qua các bài toán.

39 **Sai lầm ở đâu?**
Giải đáp: Tìm giới hạn.
Nguyễn Hữu Dự – Chọn đáp án nào?

Ảnh bìa 1. Nhà Toán học Nga A. A. Markov (1856 - 1922).

Biên tập: LÊ MAI - NGUYỄN HIỆP
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Thiết kế, chế bản: MAI ANH

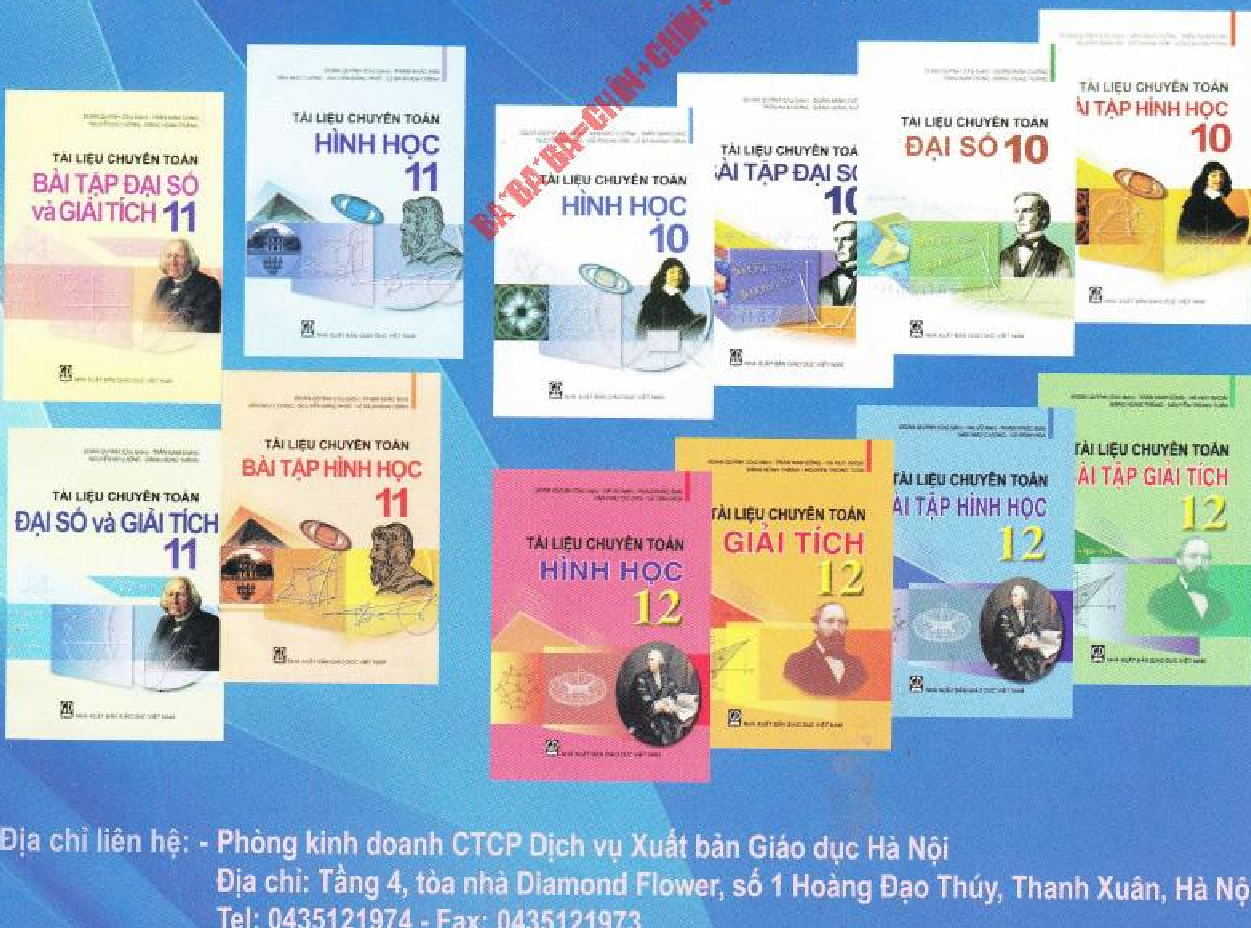
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Giới thiệu bộ sách

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN THPT

Bộ sách "***Tài liệu chuyên Toán***" lớp 10, 11, 12 có tất cả 12 cuốn, mỗi lớp có 4 cuốn gồm 2 cuốn lí thuyết (Đại số - Giải tích và Hình học) và 2 cuốn bài tập. Nội dung trong mỗi cuốn đều bám sát chương trình cho học sinh các trường THPT chuyên mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành. Ở mỗi cuốn lí thuyết giới thiệu các chuyên đề bắt buộc của chương trình chuyên được trình bày khá sâu và chặt chẽ, có khá nhiều các ví dụ, bài tập là những bài thi của khối chuyên Toán, thi học sinh giỏi Toán Quốc gia, thi Toán Quốc tế. Trong mỗi cuốn bài tập, ngoài hướng dẫn giải khá đầy đủ các bài tập trong cuốn lí thuyết, còn có một số bài tập bổ sung để học sinh tham khảo. Các tác giả của bộ sách là các thầy giáo có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, đều đã hoặc đang trực tiếp giảng dạy tại các trường THPT chuyên, khối chuyên Toán, các trường Đại học, Viện nghiên cứu, . . . trên khắp cả nước, như : GS. *Đoàn Quỳnh*, GS.TS. *Văn Như Cương*, PGS. TS. *Nguyễn Đăng Phất*, PGS.TSKH *Vũ Đình Hòa*, GS.TSKH *Hà Huy Khoái*, TS. *Nguyễn Minh Hà*, GS.TSKH *Đặng Hùng Thắng*, PGS.TS. *Nguyễn Vũ Lương*, ThS. *Đỗ Thanh Sơn*, TS. *Trần Nam Dũng*, TS. *Lê Bá Khánh Trình*, ThS. *Nguyễn Trọng Tuấn*,...

Hi vọng rằng bộ sách sẽ đáp ứng được phần lớn yêu cầu học tập của học sinh, việc giảng dạy của giáo viên ở các trường THPT chuyên; cũng như nhu cầu đọc của những người yêu thích Toán.



Địa chỉ liên hệ: - Phòng kinh doanh CTCP Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội
Địa chỉ: Tầng 4, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel: 0435121974 - Fax: 0435121973
- Các cửa hàng Sách Giáo dục của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam trên cả nước

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT-Fax Phát hành, Trị sự: (04)35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT4M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2017

Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng