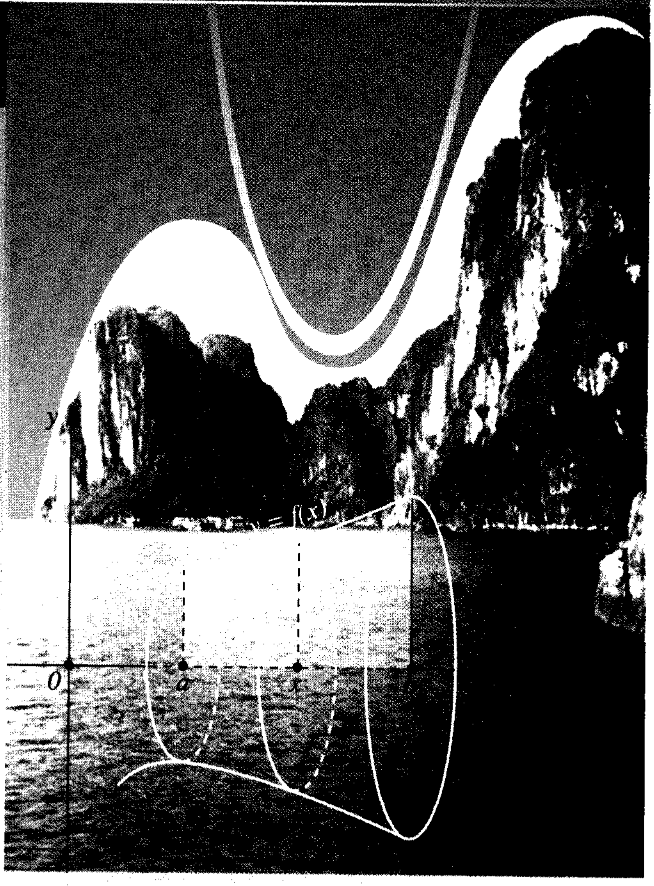
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

GIẢI TÍCH 12

NÂNG CAO

SÁCH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) - NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
TRẦN PHƯƠNG DUNG - NGUYỄN XUÂN LIÊM - ĐẶNG HÙNG THẮNG

GIẢI TÍCH

SÁCH GIÁO VIÊN

12

NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

720-2007/CXB/630-1571/GD Mã số : NG201m8

Phần một

NHỮNG VẤN ĐỀ CHUNG

I – GIỚI THIỆU CHƯƠNG TRÌNH MÔN HỌC

1. Nội dung chương trình

Chương trình *Giải tích 12 nâng cao* nằm trong bộ chương trình Trung học phổ thông (THPT) môn Toán được ban hành theo Quyết định số 16 / 2006/ QĐ - BGDĐT ngày 05 - 5 - 2006 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo. Chương trình được xây dựng và phát triển theo các quan điểm sau :

+ Kế thừa và phát huy truyền thống dạy học môn Toán ở Việt Nam, tiếp cận với trình độ giáo dục toán học phổ thông của các nước phát triển trong khu vực và trên thế giới.

+ Lựa chọn các kiến thức toán học cơ bản, cập nhật, thiết thực, có hệ thống, theo hướng tinh giản, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh, thể hiện tính liên môn và tích hợp các nội dung giáo dục, thể hiện vai trò công cụ của môn Toán.

+ Tăng cường thực hành và vận dụng, thực hiện dạy học toán gắn liền với thực tiễn.

+ Tạo điều kiện đẩy mạnh vận dụng các phương pháp dạy học theo hướng tích cực, chủ động, sáng tạo. Rèn luyện cho học sinh khả năng tự học, phát triển năng lực trí tuệ chung.

Theo chương trình THPT môn Toán, có 90 tiết dành cho Giải tích 12 nâng cao.

2. Những điểm mới trong chương trình

2.1. Về nội dung và thời lượng

So với chương trình, sách giáo khoa chỉnh lí hợp nhất năm 2000 (SGK 2000), tổng số tiết học được quy định trong chương trình này ít hơn 9 tiết, đồng thời có một số thay đổi quan trọng về nội dung như sau :

– Vấn đề đạo hàm và các quy tắc tính đạo hàm đã được đưa vào chương trình *Đại số và Giải tích 11* nên chương trình *Giải tích 12* sẽ được nối tiếp bởi các ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số. So với SGK 2000, nội dung của chương này được giảm nhẹ hơn ở chỗ không xét tính lồi – lõm của đồ thị và chỉ nêu các ví dụ về khảo sát và vẽ đồ thị 4 loại hàm số : $y = ax^4 + bx^2 + c$, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ và $\dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$. Tuy nhiên, chương trình lại nhấn mạnh hơn đến vấn đề tương giao của hai đồ thị, tiếp tuyến của đồ thị và các vấn đề về đồ thị liên quan đến nghiệm của một phương trình.

– Hàm số mũ và hàm số lôgarit vốn là nội dung trong chương trình *Đại số và Giải tích 11* trước đây. Việc đưa nội dung này vào chương trình *Giải tích 12* và đặt ngay sau chương I về khảo sát hàm số ngụ ý rằng có sử dụng đạo hàm trong việc khảo sát các hàm số luỹ thừa, hàm số mũ và hàm số lôgarit. Yêu cầu về giải các phương trình mũ và lôgarit, nhất là giải hệ phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit được giảm nhẹ.

– Vấn đề nguyên hàm và tích phân không có nhiều thay đổi so với trước đây. Tuy nhiên, chương trình đã không đề cập vấn đề bất đẳng thức tích phân ; các yêu cầu về kĩ năng tính nguyên hàm và tích phân được giảm nhẹ trong khi lại nhấn mạnh ý nghĩa và ứng dụng thực tiễn của phép tính tích phân. Mục đích của chương này chỉ là giúp học sinh bước đầu làm quen với phép tính tích phân. Các vấn đề sâu sắc về lí thuyết tích phân cũng như các kĩ thuật tính tích phân, nếu cần, học sinh sẽ được học ở bậc Đại học.

– Số phức là một nội dung không hoàn toàn mới mẻ. Trước Cải cách giáo dục, học sinh cũng đã được học về số phức ở lớp 10 (lớp cuối trong hệ thống giáo dục phổ thông). Trong chương trình thí điểm phân ban năm 1995 - 2000 cũng có đề cập vấn đề số phức. Số phức được đưa vào chương trình với mục đích hoàn thiện hệ thống các tập hợp số cho học sinh phổ thông. Do đó chương trình chỉ yêu cầu học sinh nắm được những điều chủ yếu nhất về số phức như : dạng đại số của số phức, ý nghĩa hình học của chúng, các phép tính về số phức ở dạng đại số, dạng lượng giác của số phức và phép nhân, chia số phức ở dạng lượng giác.

2.2. Về mức độ yêu cầu

Các yêu cầu cụ thể của từng chương, từng mục sẽ được trình bày trong phần hai. Dưới đây là những yêu cầu chung nhất :

– Giảm tính hàn lâm và không yêu cầu quá chặt chẽ về lí thuyết. Tuy nhiên phải đảm bảo tính chính xác, khoa học.

– Coi trọng cả việc cung cấp kiến thức, rèn luyện kĩ năng thực hành lẫn vận dụng kiến thức vào thực tiễn. Chú ý vấn đề tính gần đúng.

2.3. Về phương pháp dạy học

Toán học là khoa học trừu tượng, có nguồn gốc từ thực tiễn và có ứng dụng rộng rãi trong thực tiễn. Việc rèn luyện tư duy lôgic, phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động của người học, hình thành và phát triển năng lực tự học, trau dồi các phẩm chất linh hoạt, độc lập sáng tạo của tư duy là một trong những yêu cầu hàng đầu của dạy học toán ở nhà trường phổ thông. Ngoài ra, giáo viên lưu ý đến các đặc điểm của bộ môn để chọn lựa và vận dụng linh hoạt các phương pháp dạy học Toán. Lưu ý là môn Toán trong nhà trường có nhiều thuận lợi để thực hiện phương pháp phát hiện và giải quyết vấn đề. Tuy nhiên, dù vận dụng phương pháp nào thì cũng phải đảm bảo nguyên tắc : học sinh tự mình tìm hiểu và tiếp thu kiến thức dưới sự tổ chức, hướng dẫn của giáo viên.

Việc sử dụng phương pháp dạy học nào còn phải đi đôi với hình thức tổ chức dạy học nào cho thích hợp. Tuỳ theo mục tiêu, nội dung, đối tượng và điều kiện cụ thể mà có những hình thức tổ chức thích hợp như học trên lớp, trong và ngoài nhà trường ; học cá nhân, học nhóm. Cần tổ chức tốt các giờ thực hành toán để đảm bảo yêu cầu rèn luyện kĩ năng thực hành, vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn, tạo hứng thú cho người học.

Để nâng cao tác dụng tích cực của phương pháp dạy học, cần sử dụng một cách có hiệu quả các thiết bị dạy học trong danh mục đã quy định. Ngoài ra, giáo viên và học sinh có thể làm thêm các đồ dùng dạy học phù hợp với nội dung học tập, tận dụng các ưu thế của công nghệ thông tin trong dạy học toán ở nhà trường.

Ở Trung học, ngoài việc hình thành phương pháp tự học của học sinh còn cần coi trọng việc trang bị hiểu biết về các phương pháp toán học cho học sinh.

2.4. Về kiểm tra đánh giá kết quả học tập của học sinh

Việc đánh giá kết quả học tập của học sinh cần bám sát mục tiêu dạy học môn Toán đối với từng cấp, từng lớp ; đồng thời căn cứ vào chuẩn kiến thức, kĩ năng đã quy định trong chương trình.

Cần kết hợp các hình thức đánh giá khác nhau để đảm bảo độ tin cậy của kết quả. Ngoài việc kiểm tra thường xuyên, định kì (kiểm tra miệng, kiểm tra viết 15 phút, kiểm tra một tiết, kiểm tra cuối học kì), cần sử dụng các hình thức theo dõi và quan sát thường xuyên đối với từng học sinh về ý thức học tập, tính tự giác, sự tiến bộ về nhận thức và tư duy toán học. Việc đổi mới hình thức đánh giá nên theo hướng kết hợp giữa tự luận và trắc nghiệm khách quan, tập trung đánh giá khả năng tư duy, tính sáng tạo, khả năng vận dụng kiến thức toán học để giải quyết các vấn đề cụ thể của cuộc sống.

Cần tạo điều kiện để học sinh tham gia đánh giá kết quả học tập của các học sinh khác trong một nhóm, trong lớp và tự đánh giá bản thân. Thông báo công khai các kết quả đánh giá để có những điều chỉnh cần thiết và kịp thời đối với việc học toán của học sinh và dạy toán của giáo viên.

II – GIỚI THIỆU SÁCH GIÁO KHOA GIẢI TÍCH 12 NÂNG CAO

1. Những yêu cầu của sách giáo khoa

1.1. Ngày 29 - 9 - 2006, Ban chỉ đạo xây dựng chương trình và biên soạn SGK THPT đã có công văn gửi các Tổng chủ biên, Chủ biên và các tác giả, nêu rõ các yêu cầu của việc biên soạn SGK, cụ thể như sau (trích văn bản nói trên) :

– Sách giáo khoa phải được biên soạn theo sát chuẩn kiến thức, kĩ năng và yêu cầu về thái độ của chương trình THPT.

– Đối với các môn Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lí, Ngoại ngữ, SGK biên soạn theo chương trình nâng cao bảo đảm sự thống nhất về cấu trúc, nội dung, mức độ kiến thức, kĩ năng, thuật ngữ với SGK biên soạn theo chương trình chuẩn ; đồng thời thể hiện rõ những nội dung, mức độ kiến thức, kĩ năng của phần nâng cao.

– Kiến thức đưa vào SGK phải đáp ứng các yêu cầu cơ bản, tinh giản, sát với thực tiễn Việt Nam, hiện đại, tiếp cận với trình độ của một số nước tiên tiến trong khu vực và trên thế giới.

– Nội dung SGK phải thể hiện sự cân đối giữa lí thuyết với thực hành, giữa cung cấp kiến thức, kĩ năng với luyện tập, củng cố, ôn tập, kiểm tra, đánh giá.

– Đảm bảo tính liên môn, sao cho các môn học hỗ trợ lẫn nhau, tránh kiến thức trùng lặp, mâu thuẫn. Đảm bảo tính liên thông của môn học giữa các lớp, các cấp học.

– Cấu trúc và nội dung của SGK phải tạo điều kiện để đổi mới phương pháp dạy học, giúp học sinh nâng cao năng lực tự học, tăng cường sử dụng phương tiện, thiết bị dạy học, tăng cường khả năng tự học và liên hệ với thực tế.

– Cấu trúc và nội dung của SGK phải tạo điều kiện để đổi mới kiểm tra đánh giá, đánh giá đúng thực chất học tập của học sinh, giúp học sinh tự kiểm tra quá trình học tập.

– Ngôn ngữ, cách diễn đạt trong SGK cần phải rõ ràng, chuẩn mực, phù hợp với đối tượng học sinh.

1.2. Các tác giả vẫn tiếp tục và phát triển quan điểm biên soạn đã thể hiện trong SGK *Đại số 10 nâng cao* và SGK *Đại số & Giải tích 11 nâng cao*. Đó là :

– ***Sát thực***, tức là sát với thực tiễn giảng dạy và học tập trong các trường THPT trên toàn quốc (nhằm đảm bảo tính khả thi của sách) và sát với thực tiễn đời sống xã hội và thực tiễn khoa học.

– ***Trực quan***, tức là coi trực quan là phương pháp chủ đạo trong việc tiếp cận các khái niệm toán học ; dẫn dắt học sinh nhận thức từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng.

– ***Nhẹ nhàng***, tức là xác định những yêu cầu vừa phải đối với học sinh ; tránh hàn lâm ; cố gắng trình bày vấn đề ngắn gọn, xúc tích, không gây căng thẳng cho người học.

– ***Đổi mới***, tức là đổi mới cách trình bày, nâng cao tính sư phạm của SGK ; góp phần đổi mới phương pháp dạy học và phương pháp đánh giá.

2. Giới thiệu cấu trúc sách giáo khoa Giải tích 12 nâng cao

Sách giáo khoa *Giải tích 12* nâng cao gồm 4 chương với tổng số tiết học là 90 (kể cả thời gian tổng ôn tập, chuẩn bị cho việc thi tốt nghiệp) :

Chương I - Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (23 tiết)

Chương II - Hàm số luỹ thừa, hàm số mũ và hàm số lôgarit (25 tiết)

Chương III - Nguyên hàm, tích phân và ứng dụng (20 tiết)

Chương IV - Số phức (13 tiết)

Ôn tập và kiểm tra cuối năm (3 tiết)

So với SGK thí điểm, các tác giả đã có sự điều chỉnh nhỏ cho phù hợp với nội dung và yêu cầu của bài học.

Trong mỗi chương, sau trang giới thiệu tên chương, hình biểu trưng của chương, tóm lược nội dung và yêu cầu cơ bản của chương là các bài học (§) truyền tải nội dung chi tiết của chương. Cuối cùng là phần câu hỏi và bài tập ôn tập chương.

Mỗi bài học (§) mang một nội dung nhất định, dự kiến được thực hiện trong khoảng từ 1 đến 3 tiết. Cuối mỗi bài học là *Câu hỏi và bài tập* củng cố kiến thức và kĩ năng đặt ra trong đề mục đó. Đôi chỗ còn có *Bài đọc thêm* hay *Em có biết* để mở rộng kiến thức và tăng thêm sự hấp dẫn của sách.

Sau mỗi bài học đều có bài tập nhằm củng cố kiến thức của mục đó. Đây là những bài tập cơ bản, đòi hỏi học sinh phải làm được sau khi học bài lí thuyết. Giáo viên có thể cho học sinh làm các bài tập này ngay tại lớp (nếu có thời gian) hoặc cho học sinh làm ở nhà. Trong các bài tập này, các tác giả đã chú ý đến loại bài tập về tính gần đúng (như tìm nghiệm gần đúng của phương trình, tính gần đúng các biểu thức luỹ thừa và lôgarit, tính gần đúng tích phân), Nếu cần, giáo viên có thể chữa các bài tập này cùng với các bài tập khác trong tiết luyện tập.

Sau một số bài học (tuỳ thuộc vào nội dung), sách giới thiệu một số bài tập luyện tập nhằm củng cố và gắn kết các kiến thức trong các bài học trước đó. Phần lớn các bài luyện tập này đều được dự kiến thực hiện trong 1 đến 2 tiết. Nhiều bài tập trong tiết luyện tập này là những bài tập có tính tổng hợp các kiến thức đã học và có thể có một số ít bài thuộc loại nâng cao. Khi thực hiện, giáo viên nên lựa chọn bài tập để chữa trong giờ học cho phù hợp với khả năng của học sinh, không nhất thiết phải chữa hết tất cả các bài tập trong sách.

Như vậy, giáo viên không nên chờ đến tiết luyện tập mới chữa bài tập cho học sinh. Trái lại, mỗi tiết học đều phải dành thời gian thích hợp cho việc chữa bài tập kết hợp với việc kiểm tra kiến thức của học sinh.

3. Những điểm mới về nội dung

• Các tác giả SGK *Giải tích 12* nâng cao đã cố gắng bám sát nội dung được quy định trong chương trình. Do đó tất cả các điểm mới về nội dung chương trình như đã trình bày ở trên đều được thể hiện trong sách. Dưới đây là một số điểm cụ thể :

– Nội dung của chương I gồm hai phần : phần đầu cung cấp cho học sinh những khái niệm dùng để mô tả một số tính chất của hàm số như tính đơn điệu, cực trị, đường tiệm cận của đồ thị hàm số, phương pháp dùng giới hạn và đạo hàm để nghiên cứu các tính chất đó. Thực chất đây là bước chuẩn bị cho phần thứ hai là khảo sát hàm số. Khác với SGK 2000, chương trình và SGK *Giải tích 12* đã bỏ qua tính lồi – lõm của đồ thị. Tuy nhiên, do có vai trò đặc biệt trong việc vẽ đồ thị, điểm uốn vẫn được SGK đề cập ở mức độ đơn giản.

Để giúp học sinh trình bày lời giải bài khảo sát hàm số được thuận tiện, các tác giả đã đưa ra một sơ đồ khảo sát hàm số cải tiến hơn so với sơ đồ truyền thống. Cụ thể là trong bước thứ hai (khảo sát sự biến thiên), việc tìm các giới hạn đặc biệt của hàm số và tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số được tiến hành trước ; sau đó mới tính đạo hàm, khảo sát chiều biến thiên, cực trị và điểm uốn. Điều đó cho phép bỏ qua việc lập riêng một bảng xét dấu của đạo hàm và học sinh chỉ cần lập duy nhất một bảng biến thiên của hàm số.

Đáng chú ý ở chương này là vấn đề đường tiệm cận. Như đã biết, SGK *Đại số và Giải tích 11* đã phân biệt các giới hạn tại $+\infty$ và tại $-\infty$, cũng như các giới hạn $+\infty$ và $-\infty$. Điều đó dẫn đến những khác biệt ở *Giải tích 12* so với SGK trước đây khi xét tiệm cận.

Chẳng hạn, khi xét tiệm cận ngang, trước đây ta thường chỉ phải tìm một giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, nay ta phải xét cả hai giới hạn : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang nếu chỉ cần một trong hai giới hạn đó là tồn tại và hữu hạn. Cụ thể hơn, giả sử hai giới hạn đó lần lượt là y_1 và y_2 thì khi $y_1 \neq y_2$, đồ thị hàm số sẽ có hai tiệm cận ngang là $y = y_1$ và $y = y_2$; còn khi $y_1 = y_2$ đồ thị có một tiệm cận ngang $y = y_1$.

Điều đó cũng xảy ra tương tự đối với tiệm cận xiên.

Cũng như vậy, khi xét tiệm cận đứng, ta phải xét tất cả các điểm x_0 sao cho một trong các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Giáo viên nên đọc kĩ vấn đề tiệm cận trong phần *Các vấn đề cụ thể* (chương I) của cuốn sách này.

– Tương tự, chương II cũng gồm hai phần. Phần đầu trình bày quá trình mở rộng phép tính luỹ thừa từ số mũ nguyên dương sang số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và số mũ thực ; từ đó dẫn đến khái niệm và các tính chất của lôgarit. Để tăng cường tính thực tiễn, các tác giả đã đưa vào sách một số ứng dụng thực tế của luỹ thừa và lôgarit, trong bài học cũng như trong bài tập. Phần thứ hai khảo sát hàm số mũ, hàm số lôgarit, hàm số luỹ thừa và nghiên cứu các phương pháp giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit. Chú ý rằng chương trình không yêu cầu học sinh xét các phương trình và bất phương trình chứa tham số cũng như các phương trình và bất phương trình chứa ẩn đồng thời ở cơ số và số mũ hay chứa ẩn đồng thời ở cơ số và biểu thức dưới dấu lôgarit như các ví dụ sau :

$$x^{x^2-1} = 1 \qquad (1) \qquad ; \qquad \log_x(x^2 - 1) = 1 \qquad (2)$$

Các phương trình như thế thường có lời giải phức tạp, dễ nhầm lẫn và thậm chí còn gây nhiều tranh cãi. Chẳng hạn, có người vẫn coi $x = -1$ là nghiệm của phương trình (1), trong khi theo quan điểm của các tác giả, phương trình (1) chỉ xác định với $x > 0$, nghĩa là không chấp nhận $x = -1$ là nghiệm.

– Chương III là một chương khó, cho dù mục đích của chương chỉ là giới thiệu cho học sinh hiểu một cách rất sơ lược về nguyên hàm và tích phân. Để phần nào tránh sự áp đặt khi định nghĩa tích phân bằng công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit, đồng thời nhằm giúp học sinh hiểu được xuất xứ của khái niệm này, các tác giả đã xuất phát từ bài toán tính diện tích của một hình phẳng, qua ví dụ cụ thể về tính diện tích của một hình thang cong mà làm xuất hiện công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit. Định nghĩa tích phân bằng công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit tuy đơn giản và phù hợp với học sinh phổ thông, nhưng có một nhược điểm quan trọng là chưa nêu được bản chất của tích phân. Với bài đọc thêm *Tính gần đúng tích phân và khái niệm tổng tích phân*, các tác giả muốn phần nào khắc phục nhược điểm nói trên trong định nghĩa tích phân, nhất là đối với các học sinh khá và giỏi.

– Mục đích chủ yếu của chương IV là hoàn thành việc mở rộng khái niệm số cho học sinh phổ thông. Do đó nội dung của chương này không đi vào quá trình xây dựng tập số phức $\mathbb{C}$. Học sinh chỉ cần nắm được dạng đại số và dạng lượng giác của số phức, biểu diễn số phức trên mặt phẳng phức và các quy tắc tính toán về số phức, qua đó hiểu được phần nào vai trò của tập hợp các số phức $\mathbb{C}$ trong đại số. Các bài tập về ứng dụng của số phức trong chương này chỉ có ý nghĩa minh hoạ và làm cho bài học thêm sinh động, hấp dẫn mà thôi.

– Mặc dù nhiều giáo viên tỏ ra không "mặn mà" với vấn đề tính gần đúng nhưng chúng tôi cho rằng tình trạng đó chỉ là nhất thời. Thực tiễn cuộc sống đòi hỏi tính gần đúng nhiều hơn là tính đúng. Do đó SGK *Giải tích 12 nâng cao* đã kiên trì thực hiện đúng tinh thần chỉ đạo của Bộ về tăng tính thực hành và gắn với thực tiễn, trong đó, một yếu tố quan trọng là chú ý nhiều hơn đến vấn đề tính gần đúng. Ngoài các bài tập đòi hỏi tính gần đúng, *Giải tích 12 nâng cao* còn có các bài đọc thêm về tính gần đúng.

• Trong sách có 6 *bài đọc thêm* nhằm mở rộng kiến thức cho các học sinh khá và giỏi. Trong đó có 2 bài hướng dẫn sử dụng máy tính bỏ túi (lấy hiệu máy CASIO *fx-500MS* làm ví dụ hướng dẫn) để tính căn bậc n, luỹ thừa và lôgarít.

Ngoài ra, trong SGK còn có những bài tập yêu cầu tính gần đúng. Để giải các bài tập này, học sinh có thể sử dụng các loại máy tính bỏ túi thông dụng khác (tức là máy không có các chương trình chuyên dụng) hoặc dùng bảng số. Đối với học sinh ở các vùng khó khăn, chưa có điều kiện trang bị máy tính bỏ túi, vẫn có thể dùng bảng số với 4 chữ số thập phân (bảng Bra-đi-xơ) để tính toán.

• Có 6 bài cung cấp một số tư liệu lịch sử toán hoặc liên hệ thực tiễn đời sống. Các bài này đều đặt dưới một cái tên chung là "*Em có biết ?*".

4. Những điểm mới về phương pháp

Nhìn chung, các tác giả đã cố gắng quán triệt chủ trương : giảm tính lí thuyết kinh viện, tăng tính thực hành, gắn với thực tiễn đời sống và góp phần đổi mới phương pháp dạy học. Điều đó thể hiện như sau :

• Tránh việc áp đặt kiến thức cũng như tránh các phức tạp không cần thiết do suy luận lôgic chặt chẽ. Hầu hết các khái niệm đều được đưa vào theo con đường *từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng*, từ các ví dụ cụ thể đến khái niệm tổng quát ; các phép chứng minh phức tạp được loại bỏ hoặc giảm nhẹ, đôi khi từ hình ảnh trực quan mà rút ra các kết luận cần thiết. Chẳng hạn :

– Tăng cường hình vẽ minh hoạ các tính chất của hàm số, đồng thời có các lưu ý để học sinh tránh các sai lầm mắc phải do trực giác gây ra.

– Sau khi học ứng dụng của đạo hàm để khảo sát hàm số ở chương I, việc dùng đạo hàm để khảo sát hàm số mũ và hàm số lôgarit ở chương II là một việc hiển nhiên. Nhưng với mục đích tăng cường tính trực quan, khi chuyển sang khảo sát hàm số lôgarit, các tác giả đã không nhắc lại hoàn toàn những gì đã làm đối với hàm số mũ. Các tính chất của hàm số lôgarit được nêu tương tự như đối với hàm số mũ để học sinh tự kiểm nghiệm lại thông qua đồ thị.

– Số phức là một nội dung đã có trong chương trình và SGK trước CCGD và phân ban thí điểm năm 1995. Lần này, khái niệm số phức được đưa vào một cách gắn kết hơn với ý nghĩa hình học của nó ; một mặt nhằm tăng cường tính trực quan, một mặt giúp học sinh tìm thấy được một vài ứng dụng của số phức trong hình học.

– Vì lí do sư phạm, các phép chứng minh phức tạp đều được giảm nhẹ. Tuy nhiên, các tác giả đã cố gắng dẫn dắt, phân tích thông qua ví dụ nhằm làm cho học sinh có thể hiểu và chấp nhận được.

• Những phương pháp nghiên cứu như : quan sát, phỏng đoán, kiểm nghiệm, ... là những phương pháp nghiên cứu đặc trưng của các môn khoa học thực nghiệm. Chúng cũng có tác dụng rèn luyện tính nhanh nhạy, óc suy luận lôgic trong toán học. Hơn nữa, các phương pháp này đôi khi vượt trội về sự dễ hiểu, tính thuyết phục và khả năng khắc sâu kiến thức cho học sinh. Do đó, các tác giả cũng đã sử dụng chúng để tiếp cận một số nội dung kiến thức trong sách. Cách làm này cũng hoàn toàn thống nhất với phương pháp đi từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng đã nêu ở trên.

• Các tác giả cũng cố gắng đưa vào sách nhiều ví dụ, bài tập, ... mang tính chất thực tiễn như các ứng dụng của hàm số luỹ thừa, hàm số lôgarit và tích phân.

• Nhiều công trình nghiên cứu về phương pháp dạy học đã chứng tỏ : Kiến thức mà học sinh thu nhận được *từ hoạt động* và củng cố nó *trong hoạt động* của chính mình bao giờ cũng rất tự nhiên, chắc chắn và là cơ sở tốt để hình thành kĩ năng thực hành, vận dụng. Hướng đổi mới về phương pháp dạy học là : *tích cực hoá hoạt động học tập của học sinh, khơi dậy và phát triển khả năng tự học, nhằm hình thành cho học sinh thói quen tư duy tích cực, độc lập, sáng tạo, nâng cao năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề, rèn luyện kĩ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn đời sống, đem lại niềm vui và hứng thú học tập cho học sinh.* Trong SGK này, các tác giả đã cố gắng đưa hoạt động vào các tiết học và khuyến khích giáo viên thực hiện bài giảng theo hướng : giáo viên chỉ là người tổ chức các hoạt động trên lớp, gợi ý, hướng dẫn học sinh tự tìm hiểu, tự khám phá, tự rút ra những kết luận khoa học. Các hoạt động trên lớp ở đây bao gồm : trả lời câu hỏi, bài tập thực hành, bài tập vận dụng, so sánh, nhận xét,... với nhiều mục đích khác nhau. Có hoạt động nhằm đi đến một khái niệm hoặc để rút ra một kết luận quan trọng, có hoạt động nhằm củng cố kiến thức hay hình thành kĩ năng.

Cần nhấn mạnh rằng các hoạt động mà các tác giả nêu trong SGK *chỉ có tính chất gợi ý* mà thôi. Tuỳ theo khả năng của giáo viên, tuỳ theo năng lực của học sinh và tuỳ theo hoàn cảnh cụ thể của lớp học, *giáo viên có thể sáng tạo những hoạt động* tương tự cho phù hợp và hiệu quả hơn. Việc tổ chức các hoạt động trên lớp như thế nào để vừa đảm bảo được nội dung giảng dạy, vừa mang lại hiệu quả giảng dạy cao, vừa không vượt quá thời lượng cho phép, hiện nay vẫn đang là một vấn đề cần được nghiên cứu và đúc kết kinh nghiệm trong thực tiễn giảng dạy.

5. Những điểm mới về hình thức thể hiện

• Như trên đã nói, hoạt động là một trong các điểm mới của SGK, được đưa vào theo định hướng về đổi mới phương pháp dạy học. Trong sách chúng được thể hiện bởi kí hiệu $\boxed{\text{Hn}}$, trong đó **n** là số thứ tự của hoạt động trong mỗi bài (§). Chúng được trình bày xen kẽ ở những thời điểm thích hợp với những mục đích cụ thể giúp cho học sinh chủ động nắm vững bài. Giáo viên cần nghiên cứu kĩ các hoạt động này, xem đó là những gợi ý để vận dụng hoặc sáng tạo những hoạt động khác cho phù hợp.

• Nhằm tăng tính hấp dẫn khi học sinh bắt đầu học một chương mới, đầu mỗi chương, SGK đều có một đoạn ngắn giới thiệu nội dung và các yêu cầu chủ yếu của chương mà học sinh cần đạt được. Việc nêu rõ các yêu cầu sẽ đặt ra cho học sinh và giáo viên những mục đích rõ ràng trong dạy và học.

• Cùng với xu thế hội nhập quốc tế, và tiếp theo SGK *Đại số và Giải tích 11 nâng cao*, SGK *Giải tích 12 nâng cao* cũng thử nghiệm cách trình bày theo thông lệ quốc tế. Hầu hết các chữ dùng để chỉ các biến đều in nghiêng, trừ các số và các hàm số thông dụng. Chẳng hạn, e được viết nghiêng nếu nó là một biến ; trái lại, nó được viết thường (e) nếu nó là giá trị của giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Cách viết cũ	**Cách viết mới**
Hệ toạ độ Oxy	Hệ toạ độ Oxy
Hàm số y = f(x)	Hàm số $y = f(x)$
Hàm số a^x, e^x, log_a x, lnx	Hàm số $a^x, \mathrm{e}^x, \log_a x, \ln x$
Các điểm A, B, C	Các điểm A, B, C
Biểu thức 2ax^2 + 3bx	Biểu thức $2ax^2 + 3bx$
Số phức z = a + bi	Số phức $z = a + bi$

• Nhằm làm nổi bật các từ, các câu, các đoạn cần nhấn mạnh, SGK *Giải tích 12 nâng cao* vẫn sử dụng các phương pháp trình bày truyền thống như in nghiêng, in đậm, đóng khung. Ngoài ra, các nội dung quan trọng của bài học như định nghĩa, định lí, chú ý, nhận xét, ... đều được trình bày lùi vào khoảng 2cm so với các nội dung khác. Chúng là các nội dung chính của bài học mà học sinh cần ghi nhớ.

6. Về kiểm tra đánh giá

Nói chung, việc kiểm tra, đánh giá kết quả học tập của học sinh vẫn tiến hành chủ yếu theo phương pháp truyền thống, nghĩa là kết hợp giữa kiểm tra trên lớp (kiểm tra miệng hoặc viết) với kiểm tra thông qua các bài làm ở nhà của học sinh.

Mặc dù việc kiểm tra – đánh giá bằng phương pháp trắc nghiệm khách quan trong phạm vi toàn quốc vẫn còn đang là vấn đề nghiên cứu, thử nghiệm, nhưng nó vẫn đang là một xu thế cần hướng tới. Để giúp học sinh từng bước làm quen với phương pháp này, một số bài tập trong SGK cũng đã trình bày dưới dạng câu hỏi trắc nghiệm khách quan.

Giáo viên có thể tham khảo các đề kiểm tra được giới thiệu cuối mỗi chương trong sách giáo viên này để thấy rõ mức độ, yêu cầu của chương trình.

7. Dự kiến về các phương tiện dạy học

• Ngoài SGK, SGV, sách bài tập và các sách tham khảo khác, các giáo viên nên tự tạo cho mình một số phương tiện dạy học dễ làm như :

– Vẽ các biểu bảng, phục vụ cho các bài học thuộc các nội dung *Khảo sát hàm số, đạo hàm hàm số mũ và hàm số lôgarit, các công thức tích phân.*

– Vẽ một vài đồ thị của hàm số khi khảo sát các *hàm số mũ và hàm số lôgarit.* Đặc biệt vẽ các đồ thị trên giấy trong suốt để thể hiện phép biến đổi đồ thị.

• Khuyến khích học sinh sử dụng máy tính bỏ túi. Trong SGK có nêu ví dụ về cách sử dụng máy CASIO *fx-500MS* xem như tiêu biểu cho nhiều loại máy khác nhau.

• Đối với các trường có điều kiện, có thể sử dụng các phương tiện cao cấp như đèn chiếu, máy vi tính (với phần mềm thích hợp), ...

III – GIỚI THIỆU CẤU TRÚC SÁCH GIÁO VIÊN 12 NÂNG CAO

Sách giáo viên Giải tích 12 nâng cao được viết theo cấu trúc sau đây :

Sau phần *Những vấn đề chung* là phần *Những vấn đề cụ thể* của từng chương, từng bài ; và cuối cùng là *Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm.*

Trong phần *Những vấn đề cụ thể*, sách giới thiệu các chủ đề sau :

(A) *Mục tiêu của chương* : Giới thiệu các yêu cầu mà học sinh cần đạt được sau khi học xong, bao gồm các yêu cầu về kiến thức và yêu cầu về kĩ năng.

(B) *Cấu tạo chương* : Giới thiệu cấu trúc nội dung của chương và dự kiến về phân phối thời gian dành cho từng bài trong chương.

(C) *Những điều cần lưu ý trong chương* : Giới thiệu những vấn đề cần thiết đối với giáo viên mà trong SGK không có điều kiện trình bày.

(D) *Nội dung chi tiết* : Giới thiệu những vấn đề cụ thể của từng bài. Để tiện cho giáo viên nghiên cứu chuẩn bị bài giảng, mục này được trình bày theo cấu trúc như sau :

(I) Mục tiêu (về kiến thức, kĩ năng, thái độ).

(II) Những điều cần lưu ý.

(III) Gợi ý về dạy học : Trình bày một số gợi ý về phương pháp giảng dạy có thể áp dụng khi giảng dạy, kể cả các gợi ý về phân phối thời gian và về đồ dùng dạy học. Tuy nhiên, các tác giả đã không thể trình bày điều này cho tất cả các bài ; hơn nữa, việc trình bày cũng rất sơ lược, chủ yếu là trình bày một vài ý tưởng mà thôi. Trên cơ sở đó, tác giả mong rằng các giáo viên – những người trực tiếp giảng dạy sẽ dần dần rút kinh nghiệm, phát huy khả năng sáng tạo của chính mình để thực hiện hoặc cải tiến các ý tưởng đó để các giờ dạy có hiệu quả cao hơn. Do đó nội dung của *Gợi ý về dạy học* chủ yếu là việc nêu rõ ý đồ và trả lời các câu hỏi được nêu trong các hoạt động trên lớp học (kí hiệu bởi $\boxed{\textbf{Hn}}$).

(IV) Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập : Bao gồm trả lời các câu hỏi, hướng dẫn giải bài tập hay nêu đáp số cho các bài tập sau mỗi bài học.

(V) Bổ sung kiến thức : Nhằm mở rộng kiến thức (những điều có liên quan đến bài giảng) cho giáo viên đến mức độ hợp lí, phục vụ cho việc dạy học được tốt hơn, đồng thời cũng giúp cho giáo viên có thêm tư liệu để giảng dạy trong các buổi học ngoại khoá hay bồi dưỡng học sinh khá và giỏi.

(E) *Gợi ý ôn tập chương* : Trong mục này, sách trình bày các nội dung sau :

(I) Gợi ý tổ chức ôn tập chương

(II) Kiến thức cần nhớ : Tóm tắt các kiến thức mà mỗi học sinh cần nắm được trong chương (bao gồm cả những kiến thức tuy không được trình bày trong bài học, nhưng có thể dễ thấy và được phép sử dụng để giải toán). Trong mục này chúng tôi không nêu lại các yêu cầu đối với học sinh.

(III) Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập ôn tập chương.

(IV) Gợi ý đề kiểm tra cuối chương : Mỗi chương có hai đề kiểm tra với đáp án và thang điểm cho từng câu. Các đề này chỉ mang tính chất gợi ý, minh hoạ về mức độ yêu cầu. Giáo viên có thể tham khảo rồi tuỳ theo trình độ chung của học sinh trong lớp để ra đề kiểm tra cho thích hợp, tập trung vào các kiến thức và kĩ năng cơ bản ; tránh các đề kiểm tra quá tầm thường hoặc các đề đòi hỏi có những thủ thuật đặc biệt.

Phần hai

NHỮNG VẤN ĐỀ CỤ THỂ

Chương I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Trong chương này, ta ứng dụng đạo hàm và giới hạn để xét một số tính chất quan trọng của hàm số và đồ thị, từ đó khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Mục tiêu của chương này là :

Kiến thức

Giúp học sinh nắm vững

– Quan hệ giữa tính đơn điệu và dấu đạo hàm của hàm số ;

– Khái niệm cực trị và các quy tắc tìm cực trị của hàm số ;

– Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số và cách tìm các giá trị đó ;

– Định nghĩa và cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị ;

– Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Kĩ năng

Giúp học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc xét chiều biến thiên (tức là tính đơn điệu) của hàm số, tìm cực trị của hàm số, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước, viết phương trình các đường tiệm cận của đồ thị và khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm số đơn giản.

B. CẤU TẠO CỦA CHƯƠNG

Chương gồm hai phần, dự kiến được thực hiện trong 23 tiết, phân phối cụ thể như sau :

§1. Tính đơn điệu của hàm số	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
§2. Cực trị của hàm số	2 tiết
§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	1 tiết
Luyện tập	2 tiết
§4. Đồ thị của hàm số và phép tịnh tiến hệ toạ độ	1 tiết
§5. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
§6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm đa thức	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
§7. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm phân thức hữu tỉ	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
§8. Một số bài toán thường gặp về đồ thị	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I	2 tiết
Bài đọc thêm : Tính lồi, lõm và điểm uốn của đường cong	

C. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý TRONG CHƯƠNG

Nội dung của chương này là một số ứng dụng quan trọng của lí thuyết giới hạn và đạo hàm trong chương trình Đại số & Giải tích lớp 11 nâng cao. Trong chương này chúng ta không gặp nhiều khái niệm như trong hai chương giới hạn và đạo hàm đã nêu. Tuy nhiên học sinh cần nắm chắc các khái niệm trong chương và quan trọng hơn là cần rèn luyện để có kĩ năng thành thạo và không mắc nhầm lẫn trong thực hành.

• Trong giảng dạy giáo viên nên hướng dẫn học sinh lập bảng biến thiên của hàm số, giúp các em hiểu ý nghĩa của bảng biến thiên và sử dụng nó để xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Việc lập các bảng biến thiên sẽ giúp các em nắm được vấn đề tốt hơn, giải bài tập nhanh hơn và ít mắc nhầm lẫn trong thực hành.

• Các sách giáo khoa trước đây cũng như sách chỉnh lí hợp nhất Giải tích 12 chỉ xét tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng. Trong sách giáo khoa này, các tác giả đã đề cập đến tính đơn điệu của hàm số không chỉ trên một khoảng mà cả trên một đoạn và trên một nửa khoảng.

• Trong chương này có một số bài tập mà nội dung mang tính thực tế. Chúng giúp cho học sinh thấy những ứng dụng của đạo hàm để giải một số bài toán thực tế. Khi giải một số bài tập thuộc loại này, ta sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số nguyên dương. Phương pháp giải bài toán dựa trên một ý tưởng đơn giản : Nếu trên tập hợp số thực $X \subset \mathbb{R}$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất M (hoặc giá trị nhỏ nhất m) tại điểm $x_0 \in X$, trong đó x_0 là một số nguyên dương thì M (hoặc m) cũng là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp các số nguyên dương thuộc X, tức là trên tập hợp $X \cap \mathbb{N}^*$.

D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh thông hiểu điều kiện (chủ yếu là điều kiện đủ) để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng, một nửa khoảng hoặc một đoạn.

Kĩ năng

Giúp học sinh vận dụng một cách thành thạo định lí về điều kiện đủ của tính đơn điệu để xét chiều biến thiên của hàm số.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Sau định lí về điều kiện đủ để hàm số đơn điệu trên một khoảng trong §1 là chú ý sau :

Khoảng I trong định lí trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nửa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết : Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó. Chẳng hạn :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a ; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a ; b)$ thì hàm số f đồng biến trên đoạn $[a ; b]$.

Đây là một chú ý quan trọng. Ta chỉ giới thiệu một trường hợp. Tuy nhiên, dựa vào đó, học sinh có thể nêu được các khẳng định tương tự cho các trường hợp khác : Điều kiện để hàm số nghịch biến hoặc không đổi trên một đoạn, điều kiện để hàm số đơn điệu hoặc không đổi trên một nửa khoảng.

Một vài ví dụ sau đây cho thấy sự cần thiết và lợi ích của việc xét tính đơn điệu của hàm số không chỉ trên một khoảng mà cả trên một đoạn và trên một nửa khoảng.

Đây là một ví dụ cùng với bài giải của một học sinh.

Ví dụ. Chứng minh rằng hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ là đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số có đạo hàm

$$y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2.$$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy hàm số đồng biến từ $-\infty$ đến 1 trên khoảng $(-\infty ; -1)$, sau đó đồng biến từ 1 đến $+\infty$ trên khoảng $(-1 ; +\infty)$ thành thử hàm số đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Lập luận vừa nêu là không chặt chẽ. Đúng ra phải chứng tỏ hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty ; -1]$ và $[-1 ; +\infty)$ từ đó mới suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tính đồng biến của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ được chứng minh một cách chặt chẽ tương tự như ví dụ 3 trong bài.

Dưới đây là ví dụ và bài giải của một học sinh.

Ví dụ. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

trên các đoạn và nửa khoảng sau đây :

a) $\left[-2 ; -\frac{1}{2}\right]$; b) $\left[-\frac{1}{2} ; 1\right]$; c) $[1 ; 3)$.

Giải

c) Trên nửa khoảng $[1 ; 3)$ không có điểm nào tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm. Vì $f'(2) = 36 > 0$ nên $f'(x) > 0$ trên nửa khoảng $[1 ; 3)$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1 ; 3)$. Vì vậy $\min\limits_{[1;3)} f(x) = f(1) = 4$.

Thực ra trong lời giải trên đây, không cần đến điều kiện $f'(1)$ dương để khẳng định hàm số f đồng biến trên $[1 ; 3)$. Vả lại, lập luận tương tự như thế không ứng dụng được để khẳng định hàm số f đồng biến chẳng hạn, trên $[0 ; 3)$ vì ở đây, $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0 ; 3)$ nhưng $f'(0) = 0$.

2. Có thể phát biểu điều kiện đủ để một hàm số là đơn điệu hoặc không đổi trên một khoảng, một đoạn và nửa khoảng chung trong định lí dưới đây (theo ngôn ngữ Toán cao cấp ở đại học).

Giả sử K là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn, f là một hàm số liên tục trên K và có đạo hàm tại mọi điểm trong của K (tức là điểm thuộc K nhưng không phải là đầu mút của K). Khi đó

a) Nếu $f'(x) > 0$ tại mọi điểm trong của K thì hàm số f đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x) < 0$ tại mọi điểm trong của K thì hàm số f nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm trong của K thì hàm số f lấy giá trị không đổi trên K.

3. Khi xét chiều biến thiên của hàm số, để tránh nặng nề, ta thường chỉ nói tới tính đơn điệu của hàm số trên một khoảng. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp việc xét chiều biến thiên của hàm số trên một đoạn hoặc một nửa khoảng tỏ ra rất tiện dụng trong thực hành. Ta xét ví dụ sau :

Ví dụ. Chứng minh rằng

$$x > \ln(1 + x) \text{ với mọi } x > 0.$$

Giải

Hàm số $f(x) = x - \ln(1 + x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} > 0 \text{ với mọi } x \in (0 ; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên $[0 ; +\infty)$ và ta có

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x > 0.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Khi xét chiều biến thiên của hàm số, không nhất thiết phải ghi các giá trị tương ứng của hàm số.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết ví dụ 2.

Tiết 2. Phần còn lại của bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Giúp học sinh biết vận dụng định lí trong bài để xét chiều biến thiên của hàm số.

Cách giải tương tự như ví dụ 2.

Giải

$$y' = x^2 - 3x + 2 \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2.$$

Chiều biến thiên của hàm số được nêu trong bảng sau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$-2\frac{1}{6}$	↘	$-2\frac{1}{3}$	↗	

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(1 ; 2)$.

H2 *Mục đích :* Giúp học sinh biết vận dụng điều khẳng định nêu trong nhận xét để xét chiều biến thiên của hàm số.

Giải

Ta có

$$y' = 10x^4 + 20x^3 + 10x^2 = 10x^2(x+1)^2.$$

$y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hai điểm $x = -1$ và $x = 0$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1 ; 0)$.

b) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; \dfrac{1}{3}\right)$ và $(1 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3} ; 1\right)$.

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -\sqrt{3})$ và $(\sqrt{3} ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{3} ; 0)$ và $(0 ; \sqrt{3})$.

d) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

e) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-1 ; 0)$ và $(1 ; +\infty)$.

f) Hàm số xác định trên đoạn $[-2 ; 2]$.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	-2		0		2
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2 ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$. (Có thể nói rằng hàm số đồng biến trên đoạn $[-2 ; 0]$ và nghịch biến trên đoạn $[0 ; 2]$).

2. a) $y' = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq -2$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(-2 ; +\infty)$.

b) $y' = \dfrac{-x^2 - 2x - 5}{(x+1)^2} < 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$.

3. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 17 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 + \sin x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

4. $y' = a - 3x^2$.

• Nếu $a < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a = 0$ thì $y' = -3x^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra với $x = 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}} ; \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$. Vậy $a > 0$ không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a \leq 0$.

5. $f'(x) = x^2 + 2ax + 4$.

$\Delta' = a^2 - 4$.

• Nếu $a^2 - 4 < 0$ hay $-2 < a < 2$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a = 2$ thì $f'(x) = (x+2)^2 > 0$ với mọi $x \neq -2$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Tương tự, nếu $a = -2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Nếu $a < -2$ hoặc $a > 2$ thì $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2. Giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1 ; x_2)$. Các giá trị này của a không thoả mãn điều kiện đòi hỏi.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2 \leq a \leq 2$.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là rèn luyện cho học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc xét chiều biến thiên của hàm số và sử dụng nó để chứng minh một vài bất đẳng thức đơn giản.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

6. a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$;

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 5)$ và $(5 ; +\infty)$.

d) Hàm số xác định trên đoạn $[0 ; 2]$.

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \; ; \; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & 1 & & 2 \\
\hline
y' & & + & 0 & - & \\
\hline
y & & \nearrow & 1 & \searrow &
\end{array}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng (0 ; 1) và nghịch biến trên khoảng (1 ; 2). (Có thể nói rằng hàm số đồng biến trên đoạn [0 ; 1] và nghịch biến trên đoạn [1 ; 2]).

e) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$.

f) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và $(-1\ ;\ +\infty)$.

7. $f'(x) = -2(\sin 2x + 1) \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi đoạn $\left[-\frac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải khác. Ta chứng minh hàm số f nghịch biến trên $\mathbb{R}$, tức là

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \qquad (1)$$

Thật vậy, lấy hai số a, b sao cho $a < x_1 < x_2 < b$. Ta có
$f'(x) = -2(\sin 2x + 1) \le 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Dễ thấy $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của khoảng $(a\ ;\ b)$. Do đó hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a\ ;\ b)$. Từ đó ta có bất đẳng thức (1).

8. a) Hàm số $f(x) = x - \sin x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$f'(x) = 1 - \cos x > 0$ với mọi $x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ và ta có

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right), \text{tức là}$$

$$x - \sin x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Hiển nhiên

$$x > \sin x \text{ với mọi } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ vì } \sin x \leq 1.$$

Do đó $x > \sin x$ với mọi $x > 0$.

b) Hàm số $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$ liên tục trên nửa khoảng $[0\,;\,+\infty)$ và có đạo hàm

$$g'(x) = x - \sin x.$$

Theo a), $g'(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Do đó hàm số g đồng biến trên $[0\,;\,+\infty)$ và ta có

$$g(x) > g(0) \text{ với mọi } x > 0,$$

tức là

$$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0 \text{ với mọi } x > 0. \qquad (1)$$

Từ đó suy ra với mọi $x < 0$, ta có

$$\cos(-x) + \frac{(-x)^2}{2} - 1 > 0, \text{ hay}$$

$$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 > 0 \text{ với mọi } x < 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

c) Hàm số $h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$ có đạo hàm

$$h'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Theo b), $h'(x) < 0$ với mọi $x \neq 0$. Do đó hàm số h nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và ta có

$$h(x) < h(0) \text{ với mọi } x > 0,$$

và

$$h(x) > h(0) \text{ với mọi } x < 0.$$

Từ đó ta có hai bất đẳng thức cần chứng minh.

9. Hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$$

vì $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} > 2$ với mọi $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số f đồng biến trên $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ và ta có

$$f(x) > f(0) = 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

10. a) Vào năm 1980, ta có $t = 10$; $f(10) = 18$. Số dân của thị trấn năm 1980 là 18 nghìn người.

$f(25) = 22$. Số dân của thị trấn năm 1995 là 22000 người.

b) $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0$ với mọi $t > 0$.

Hàm số đồng biến trên $[0 ; +\infty)$.

c) • Tốc độ tăng dân số vào năm 1990 là

$$f'(20) = \frac{120}{25^2} = 0,192.$$

• Tốc độ tăng dân số vào năm 2008 là

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0,065.$$

• $\frac{120}{(t+5)^2} = 0,125 \Leftrightarrow t + 5 = \sqrt{\frac{120}{0,125}} \approx 31 \Rightarrow t \approx 26.$

Vào năm 1996 tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh hiểu rõ

– Định nghĩa cực đại và cực tiểu của hàm số.

– Điều kiện cần và đủ để hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu, từ đó hiểu được hai quy tắc 1 và 2 để tìm cực trị của hàm số.

Kĩ năng

Rèn luyện cho học sinh vận dụng thành thạo hai quy tắc 1 và 2 để tìm cực trị của hàm số.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khi giới thiệu định nghĩa cực trị của hàm số, cần lưu ý cho học sinh rằng điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp $\mathcal{D}$. Nói một cách khác, điều kiện cần để $x_0 \in \mathcal{D}$ là một điểm cực trị của hàm số f là $\mathcal{D}$ chứa một lân cận của điểm x_0 (tức là một khoảng chứa điểm x_0).

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên $[0 ; +\infty)$.

Ta có $f(x) > f(0)$ với mọi $x > 0$ nhưng $x = 0$ không phải là một điểm cực tiểu của hàm số vì tập hợp $[0 ; +\infty)$ không chứa bất kì một lân cận nào của điểm 0.

2. Trong định lí 2 không thể bỏ qua giả thiết "hàm số f liên tục tại điểm x_0". Ví dụ sau đây cho ta thấy điều đó.

Ví dụ. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ với } x \leq 0 \\ x \text{ với } x > 0, \end{cases}$$

xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên các khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$;

$$f'(x) = -1 \text{ với mọi } x < 0 \text{ và } f'(x) = 1 \text{ với mọi } x > 0.$$

Tuy nhiên điểm $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số f. Không thể áp dụng định lí 2 cho trường hợp này vì hàm số f không liên tục tại điểm $x = 0$.

3. Ta biết rằng điều kiện cần để hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 là hàm số có đạo hàm triệt tiêu tại x_0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0. Trong bước 2 của quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số, có nêu :

Tìm các điểm x_i $(i = 1, 2, ...)$ tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Tuy nhiên, theo định lí 2, nếu hàm số f liên tục tại điểm x_0, có đạo hàm trên các khoảng $(a ; x_0)$, $(x_0 ; b)$ và nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số f. Vì vậy, trong thực hành, muốn chứng tỏ x_0 là một điểm cực trị của hàm số, ta chỉ cần xét dấu của $f'(x)$ trên hai khoảng $(a ; x_0)$ và $(x_0 ; b)$ mà không cần xét xem tại điểm x_0 hàm số f có hay không có đạo hàm.

Chẳng hạn, khi giải ví dụ 2 : "Áp dụng quy tắc 1 tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$", không cần chứng minh rằng hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Một ví dụ khác :

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x) = \sqrt{|x|}(x - 3).$$

Giải

Dễ thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}(x-3) \text{ với } x < 0 \\ \sqrt{x}(x-3) \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Với $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{3-x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} > 0.$

Với $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x-3}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; Giá trị cực đại là $f(0) = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$; Giá trị cực tiểu là $f(1) = -2$.

Có thể chứng minh được rằng hàm số f không có đạo hàm tại điểm $x = 0$. Tuy nhiên không cần phải trình bày điều này trong bài giải.

4. Trong Giải tích 12, sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000, một điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị được nêu trong định lí 2, trang 58 :

"Dấu hiệu II

ĐỊNH LÍ 2. *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm liên tục đến cấp hai tại* x_0 *và* $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ *thì* x_0 *là một điểm cực trị của hàm số. Hơn nữa,*

1) *Nếu* $f''(x_0) > 0$ *thì* x_0 *là điểm cực tiểu,*

2) *Nếu* $f''(x_0) < 0$ *thì* x_0 *là điểm cực đại.*"

Giả thiết "hàm số f có đạo hàm cấp hai liên tục tại điểm x_0" là không cần thiết. Chú ý rằng trong định lí 3 của bài này (§2, Giải tích 12 nâng cao) không có giả thiết đó. Định lí 3 sẽ được chứng minh trong phần V. Bổ sung kiến thức trong bài này.

Có thể dùng $y_{CĐ}$, y_{CT} để chỉ giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến về phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết định lí 2.

Tiết 2. Phần còn lại của bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Giải tương tự như ví dụ 1.

Giải

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} \text{ với mọi } x \neq 0 \text{ ; } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-7	↘	‖	↘	1	↗	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$, giá trị cực đại của hàm số là $f(-2) = -7$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$, giá trị cực tiểu của hàm số là $f(2) = 1$.

H2 Mục đích của hoạt động này là giúp học sinh vận dụng quy tắc 2 để tìm cực trị của hàm số.

Giải

Ta có

$$f'(x) = 4\cos 2x \text{ ; } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$f''(x) = -8\sin 2x$;

$$f''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 \text{ với } k = 2n \\ 8 \text{ với } k = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy hàm số f đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$;

$f\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) = 2\sin 2\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) - 3 = -1$ và đạt cực tiểu tại các điểm

$x = \dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = -5,\ n \in \mathbb{Z}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

11. a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -3$; $f(-3) = -1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$; $f(-1) = -\dfrac{7}{3}$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$, $f(-1) = -2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$; $f(1) = 2$.

d) Hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) \text{ với } x < 0 \\ x(x+2) \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Với $x < 0$, $f'(x) = -2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Với $x > 0$, $f'(x) = 2x + 2 > 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; $f(-1) = 1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; $f(0) = 0$.

e) $f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\frac{2}{15}$	$\searrow$	2	$\searrow$	$1\frac{13}{15}$	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; $f(-1) = 2\frac{2}{15}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1\frac{13}{15}$.

f) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $f(0) = -3$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; $f(2) = 1$.

12. a) Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$.

$y' = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ với mọi $x \in (-2 ; 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2}$; $y(-\sqrt{2}) = -2$ và đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2}$; $y(\sqrt{2}) = 2$.

b) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $y(0) = 2\sqrt{2}$.

c) Áp dụng quy tắc 2.

$y' = 1 - 2\cos 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$y'' = 4\sin 2x.$

• $y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0.$

Do đó hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$y\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\frac{\pi}{6} + k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

• $y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} > 0.$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$y\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

d) Áp dụng quy tắc 2.

$y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x(1 + 2\cos x)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \text{ hoặc } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$y'' = 2\cos x + 4\cos 2x.$

• $y''(k\pi) = 2\cos k\pi + 4\cos 2k\pi = 2\cos k\pi + 4 > 0$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Do đó hàm số đã cho đạt cực tiểu tại các điểm $x = k\pi$;

$$y(k\pi) = 3 - 2\cos k\pi - \cos 2k\pi = 2 - 2\cos k\pi.$$

• $y''\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 4\cos\frac{4\pi}{3} = 6\cos\frac{2\pi}{3} = -3 < 0$. Do đó hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$y\left(\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\right)=3-2\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}=4\frac{1}{2}.$$

13. $f(0)=0 \Rightarrow d=0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ nên $f'(0)=0$.

Từ đó ta có $c=0$.

$f(1)=1 \Rightarrow a+b=1$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ nên $f'(1)=0$.

Từ đó ta có $3a+2b=0$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0, \end{cases}$$

ta được $a=-2$; $b=3$.

Kiểm tra lại : $f(x)=-2x^3+3x^2$.

$f'(x)=-6x^2+6x,\ f''(x)=-12x+6$;

$f''(0)=6>0$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

$f''(1)=-6<0$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$.

Đáp số : $a=-2, b=3, c=0, d=0$.

14. $a=3, b=0, c=-4$.

15. Ta viết hàm số dưới dạng

$$y=x-m^2+\frac{1}{x-m}\ ;$$

$$y'=1-\frac{1}{(x-m)^2}=\frac{x^2-2mx+m^2-1}{(x-m)^2},\ x\neq m.$$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0 \Leftrightarrow x=m-1$ hoặc $x=m+1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	$-m^2+m-2$	↘	‖	↘	$-m^2+m+2$	↗	

Với mọi giá trị của m, hàm số đạt cực đại tại điểm $x = m - 1$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = m + 1$.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Chứng minh định lí 3. Ta sẽ chỉ ra rằng định lí 3 là một hệ quả của định lí 2. Thật vậy, giả sử hàm số f thoả mãn các giả thiết của định lí 3, tức là hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$. Khi đó, theo định nghĩa đạo hàm cấp hai, ta có

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0.$$

Do đó, tồn tại một số $h > 0$ sao cho $[x_0 - h\ ;\ x_0 + h] \subset (a\ ;\ b)$ và

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \qquad (1)$$

với mọi $x \in (x_0 - h\ ;\ x_0 + h) \setminus \{x_0\}$.

Vì $x - x_0 < 0$ với mọi $x \in (x_0 - h\ ;\ x_0)$ nên từ (1) suy ra

$$f'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in (x_0 - h\ ;\ x_0)$$

Vì $x - x_0 > 0$ với mọi $x \in (x_0\ ;\ x_0 + h)$ nên từ (1) suy ra

$$f'(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (x_0\ ;\ x_0 + h).$$

Như vậy, $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x tăng, qua điểm x_0. Do đó, theo định lí 2, hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

Chứng minh tương tự : Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ mối quan hệ vừa nêu giữa hai định lí 2 và 3 suy ra rằng quy tắc 1 mạnh hơn quy tắc 2. Ví dụ sau cho thấy trong một số trường hợp có thể áp dụng được quy tắc 1 nhưng không áp dụng được quy tắc 2.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^4$.

Ta có $f'(x) = 4x^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$f''(x) = 12x^2\ ;\ f''(0) = 0.$$

Ta không áp dụng được quy tắc 2 và trở lại quy tắc 1 : Vì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x tăng, qua điểm 0 nên hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. (Hiển nhiên từ định nghĩa cực trị của hàm số, có thể thấy ngay rằng $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = x^4$).

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh hiểu rõ định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực và biết ứng dụng đạo hàm để tìm các giá trị đó.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Có kĩ năng thành thạo trong việc dùng bảng biến thiên của một hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

– Giải một số bài toán liên quan tới việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Sau định nghĩa, đã nhắc lại điều sau đây :

Muốn chứng tỏ số M (hoặc m) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$, cần chứng tỏ

a) $f(x) \leq M$ (hoặc $f(x) \geq m$) với mọi $x \in \mathcal{D}$;

b) Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

Điều kiện b) là quan trọng, không được bỏ qua. Một số học sinh đã không chú ý đến nó, do đó đã mắc sai lầm.

Ta hãy xét bài tập 16 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Có học sinh lập luận như sau :

Vì $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Vì $\sin^4 x \leq 1$ và $\cos^4 x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$f(x) \leq 1 + 1 = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 2$.

Các kết luận đó là sai. Tại sao ? Thật ra, ta có $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{2}$ và $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$.

Học sinh đó mắc sai lầm vì đã không để ý đến điều kiện b).

2. Hàm số có thể không đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trên một tập hợp số thực cho trước.

Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ trên nửa khoảng (0 ; 1]. Vì $f(x) \geq f(1) = 1$ với mọi $x \in (0\,;\,1]$ nên $\min\limits_{x\in(0;1]} f(x) = 1$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ nên hàm số lấy các giá trị lớn tuỳ trên (0 ; 1]. Do đó hàm không đạt giá trị lớn nhất trên (0 ; 1].

Với hàm số $g(x) = 2x$, ta có

$$0 < g(x) < 2 \text{ với mọi } x \in (0\,;\,1).$$

Tuy nhiên hàm số không đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên khoảng (0 ; 1).

3. Sau khi giải các bài tập 17a), b), d), e), có thể nêu nhận xét :

Nếu f là một hàm số liên tục trên đoạn [a ; b] thì f đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất tại một điểm cực trị hoặc tại một trong hai đầu mút a, b.

Do đó trong trường hợp này, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên đoạn $[a\,;\,b]$ theo quy tắc đã nêu trong bài.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

Mục đích của hoạt động **H1** là giúp học sinh lập bảng biến thiên của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó trên một tập hợp số thực cho trước.

$\boxed{\text{H1}}$ Giải tương tự như ví dụ 2.

Giải

Ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$						$-$	0	$+$	
$f(x)$						↘	3	↗	

Từ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{x\in(1;+\infty)} f(x) = f(2) = 3.$

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(1\ ;+\infty)$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

16. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$f(x) \le 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1$. Vậy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$

$f(x) \ge \frac{1}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}.$

17. a) $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$				$-$	0	$+$			
$f(x)$			-5	↘	-6	↗	10		

$\min\limits_{x\in[-2\,;\,3]} f(x) = f(-1) = -6$; $\max\limits_{x\in[-2\,;\,3]} f(x) = f(3) = 10.$

b) $\min\limits_{x\in[-4\,;\,0]} f(x) = f(-4) = f(-1) = -5\frac{1}{3}$;

$\max\limits_{x\in[-4\,;\,0]} f(x) = f(-3) = f(0) = -4.$

c) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$					‖	↘	2	↗	

$\min\limits_{x\in(0\,;\,+\infty)} f(x) = f(1) = 2.$ Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0\,;\,+\infty)$.

d) $\min\limits_{x\in[2\,;\,4]} f(x) = f(4) = -4$; $\max\limits_{x\in[2\,;\,4]} f(x) = f(2) = 4.$

e) $\min\limits_{x\in[0\,;\,1]} f(x) = f(0) = 2$; $\max\limits_{x\in[0\,;\,1]} f(x) = f(1) = 3\frac{2}{3}.$

f) $\max\limits_{x\in(0\,;\,2]} f(x) = f(2) = 1\frac{1}{2}.$ Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $(0\,;\,2]$.

18. a) Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$,

$$y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1\,;\,1]$. Đó cũng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 4t + 2\ ;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

$$\min_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\ ;\ \max_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f(1) = 3.$$

Do đó

$$\min_{x\in\mathbb{R}} y = -\frac{3}{2}\ ;\ \max_{x\in\mathbb{R}} y = 3.$$

$(y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2},\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\ ; y = 3 \Leftrightarrow \sin x = 1,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1)$.

b) Ta có $y = 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4$,

$$y = -\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 5.$$

Đặt $t = \sin 2x$, $-1 \le t \le 1$;

$$y = f(t) = -t^2 - \frac{t}{2} + 5.$$

$f'(t) = -2t - \frac{1}{2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$.

Bảng biến thiên :

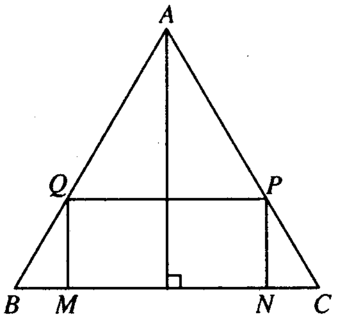
t	-1		$-\frac{1}{4}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$4\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$5\frac{1}{16}$	$\searrow$	$3\frac{1}{2}$

$$\min_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f(1) = 3\frac{1}{2}\ ;\ \max_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5\frac{1}{16}.$$

Do đó

$$\min_{x\in\mathbf{R}} y = 3\frac{1}{2}\ ;\ \max_{x\in\mathbf{R}} y = 5\frac{1}{16}.$$

19. Đặt $BM = x$ $\left(0 < x < \dfrac{a}{2}\right)$, ta được $MN = a - 2x$; $QM = x\sqrt{3}$. Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là



Hình 1.1

$S(x) = MN.QM = (a - 2x)x\sqrt{3}$;

$S(x) = \sqrt{3}(ax - 2x^2)$.

Bài toán quy về :

Tìm giá trị lớn nhất của $S(x)$ trên khoảng $\left(0\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có $S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x)$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$.

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	$\searrow$	

Vậy $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = \dfrac{a}{4}$ và giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật là $\displaystyle\max_{x\in\left(0\,;\,\frac{a}{2}\right)} S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$

20. Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}.$$

Xét hàm số

$$f(x) = 480x - 20x^2 \text{ trên khoảng } (0 ; +\infty).$$

(Biến số n lấy các giá trị nguyên dương được thay bằng biến số x lấy các giá trị trên khoảng $(0 ; +\infty)$).

$$f'(x) = 480 - 40x \; ; \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12.$$

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$	

Trên khoảng $(0 ; +\infty)$, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 12$. Từ đó suy ra rằng trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $n = 12$.

Vậy muốn thu hoạch được nhiều nhất sau một vụ thì trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ phải thả 12 con cá.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Các bài tập của tiết luyện tập này nhằm rèn luyện cho học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc tìm cực trị cũng như tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

21. a) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$; $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\dfrac{3}{2}$; $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 6\dfrac{3}{4}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; $f(0) = \sqrt{5}$.

d) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty)$.

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ với } x < -1 \text{ hoặc } x > 1.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	//////	1	$\nearrow$	

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty\ ;\ -1]$ và đồng biến trên $[1\ ;\ +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

22. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m = 0 & (1) \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Phương trình (1) không có nghiệm $x = 1$ khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Hàm số f có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là

$$\begin{cases} \Delta' = m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

23. $G(x) = 0{,}75x^2 - 0{,}025x^3$, $x > 0$.

$G'(x) = 1{,}5x - 0{,}075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 20$.

x	$-\infty$		0		20		$+\infty$
$G'(x)$	//////	$-$	0	$+$	0	$-$	
$G(x)$	//////			$\nearrow$	100	$\searrow$	

$$\max_{x>0} G(x) = G(20) = 100.$$

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20mg. Khi đó, độ giảm huyết áp là 100.

24. Gọi $M(x\ ;\ x^2)$ là một điểm bất kì của parabol $(\mathscr{P})$.

Ta có

$$AM^2 = (x+3)^2 + x^4 = x^4 + x^2 + 6x + 9.$$

Khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $z = AM^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$z = x^4 + x^2 + 6x + 9\ ;$

$z' = 4x^3 + 2x + 6 = (x+1)(4x^2 - 4x + 6)\ ;$

$z' = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	
z		$\searrow$	5	$\nearrow$	

z đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -1$; $z(-1) = 5$. Do đó khoảng cách AM đạt giá trị nhỏ nhất khi M ở vị trí của điểm $M_0(-1\ ;\ 1)$; $AM_0 = \sqrt{5}$.

25. Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ (km/h). Thời gian cá bơi để vượt khoảng cách 300km là

$$t = \frac{300}{v-6} \text{ (giờ)}.$$

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là

$$E(v) = cv^3 . \frac{300}{v-6} = 300c . \frac{v^3}{v-6} \text{ (jun)}, v > 6.$$

$$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2}\ ;$$

$E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$; $v = 0$ (loại do $v > 6$).

x	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

Để ít tiêu hao năng lượng nhất, cá phải bơi với vận tốc (khi nước đứng yên) là 9 (km/h).

26. Số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là

$$f(t) = 45t^2 - t^3, \ t \text{ nguyên và thuộc } [0\,;25].$$

Để xét tốc độ truyền bệnh người ta xem hàm số f là xác định trên đoạn $[0\,;25]$.

a) $f'(t) = 90t - 3t^2 = 3t(30 - t)$.

Tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ năm là

$f'(5) = 375$ (người / ngày).

b) $f''(t) = 90 - 6t$; $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

t	0		15		$+\infty$
$f''(t)$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$\nearrow$	675	$\searrow$	

Tốc độ truyền bệnh là lớn nhất vào ngày thứ 15. Tốc độ đó là

$f'(15) = 675$ (người / ngày).

c) $f'(t) > 600 \Leftrightarrow 90t - 3t^2 > 600$

$\Leftrightarrow t^2 - 30t + 200 < 0$

$\Leftrightarrow 10 < t < 20.$

Từ ngày thứ 11 đến ngày thứ 19, tốc độ truyền bệnh là lớn hơn 600 người mỗi ngày.

d) $f'(t) = 3t(30 - t) > 0$ với mọi $t \in (0\,;25)$.

Hàm số f đồng biến trên $[0\,;25]$.

27. a) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{3 - 2x}} < 0$ với mọi $x \in \left(-\infty\,;1\dfrac{1}{2}\right)$. Hàm số f nghịch biến trên đoạn $[-3\,;1]$. Do đó

$\max\limits_{x\in[-3;1]} f(x) = f(-3) = 3$ và $\min\limits_{x\in[-3;1]} f(x) = f(1) = 1$.

b) Hàm số f xác định và liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ với mọi $x \in (-2 ; 2)$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$; $f(-2) = -2$; $f(2) = 2$.

So sánh các giá trị trên, ta được

$\max\limits_{x \in [-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}$ và $\min\limits_{x \in [-2;2]} f(x) = -2$.

c) $\max\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 3$ và $\min\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 2\dfrac{3}{4}$.

d) $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Với $-\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, $f'(x) = 0$ tại các điểm $-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{5\pi}{6}$.

Ta có $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $f(\pi) = \pi$.

So sánh năm giá trị trên, ta được

$\max\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\min\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

28. Hình vuông có cạnh dài 10 cm.

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu được phép tịnh tiến hệ toạ độ theo một vectơ cho trước, lập các công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến và viết phương trình của đường cong đối với hệ toạ độ mới.

– Xác định tâm đối xứng của đồ thị một số hàm số đơn giản.

Kĩ năng

Rèn luyện cho học sinh các kĩ năng :

– Viết các công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo một vectơ cho trước.

– Viết phương trình của đường cong đối với hệ toạ độ mới.

– Áp dụng phép tịnh tiến hệ toạ độ, tìm tâm đối xứng của đồ thị hàm đa thức bậc ba và đồ thị của các hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ và $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Phép tịnh tiến hệ toạ độ đã được trình bày trong Đại số 10 nâng cao và trong một số bài tập lượng giác trong Đại số và Giải tích 11 nâng cao.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

Gợi ý về các hoạt động trên lớp

$\boxed{\text{H}}$ *Mục đích :* Giúp học sinh viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo một vectơ cho trước và viết phương trình của parabol đối với hệ toạ độ mới.

$\boxed{H}$ được giải tương tự như ví dụ trong bài.

Giải

a) Điểm $I(1\,;-2)$ là đỉnh của parabol $(\mathscr{P})$.

b) Công thức chuyển hệ toạ độ theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2. \end{cases}$$

Phương trình của parabol $(\mathscr{P})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y - 2 = 2(X+1)^2 - 4(X+1) \text{ hay } Y = 2X^2.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

29. a) $I\left(\dfrac{3}{4}\,;-\dfrac{1}{8}\right)$; $\begin{cases} x = X + \dfrac{3}{4} \\ y = Y - \dfrac{1}{8} \end{cases}$; $Y = 2X^2$.

b) $I\left(1\,;-\dfrac{7}{2}\right)$; $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - \dfrac{7}{2} \end{cases}$; $Y = \dfrac{1}{2}X^2$.

c) $I\left(\dfrac{1}{8}\,;\dfrac{1}{16}\right)$; $\begin{cases} x = X + \dfrac{1}{8} \\ y = Y + \dfrac{1}{16} \end{cases}$; $Y = -4X^2$.

d) $I\,(0\,;-5)$; $\begin{cases} x = X \\ y = Y - 5 \end{cases}$; $Y = 2X^2$.

30. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Toạ độ của điểm I là $(1\,;-1)$.

b) Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1. \end{cases}$$

Phương trình của đường cong ($\mathscr{C}$) đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 1$$
$$= X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - 3X^2 - 6X - 3 + 1$$

hay $Y = X^3 - 3X$.

Vì đây là một hàm số lẻ nên đồ thị ($\mathscr{C}$) của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng.

c) Dễ thấy phương trình tiếp tuyến của đường cong ($\mathscr{C}$) tại điểm I là $y = -3x + 2$. Đặt $g(x) = -3x + 2$, ta có

$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2)$$
$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3.$$

Vì $f(x) - g(x)$ âm với $x < 1$ và dương với $x > 1$, nên trên khoảng $(-\infty; 1)$, ($\mathscr{C}$) nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của ($\mathscr{C}$) và trên khoảng $(1; +\infty)$, ($\mathscr{C}$) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

31. $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 2; \end{cases}$ $\quad Y = -\dfrac{1}{X}$.

32. a) $I(1; 1)$; b) $I(-1; 3)$.

33. $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + ax_0 + b; \end{cases}$ $\quad Y = aX + \dfrac{c}{X}$.

Hướng dẫn. Viết công thức của hàm số đã cho dưới dạng

$$y = a(x - x_0) + ax_0 + b + \frac{c}{x - x_0}.$$

§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh nắm vững định nghĩa và cách tìm các đường tiệm cận đứng, ngang và xiên của đồ thị hàm số.

Kĩ năng

Rèn luyện cho học sinh có kĩ năng thành thạo trong việc tìm các đường tiệm cận của đồ thị.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Điều kiện cần để đồ thị của một hàm số có tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên là hàm số đó xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ a)$ hoặc trên khoảng $(b\ ;\ +\infty)$.

Tiệm cận ngang là một trường hợp đặc biệt của tiệm cận xiên. Nếu đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$) thì nó không có tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$) và ngược lại.

2. Khi tìm tiệm cận đứng, ta thường xét các đường thẳng $x = x_0$, trong đó x_0 là điểm mà tại đó hàm số không xác định. Nếu tồn tại một khoảng I chứa điểm x_0 sao cho f xác định trên $I \setminus \{x_0\}$ thì phải xét hai giới hạn

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ và } \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

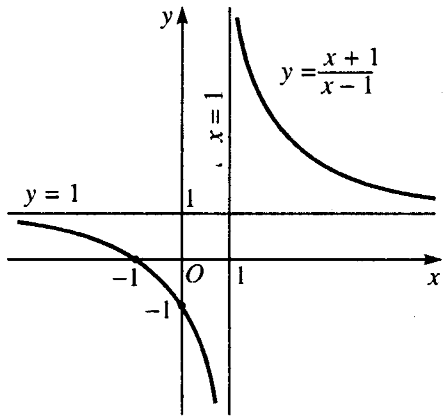
Nếu cả hai đều là giới hạn vô cực thì cả hai nhánh của đồ thị ở bên phải và bên trái của đường thẳng $x = x_0$ đều nhận nó làm tiệm cận đứng.

Ta xét các ví dụ đơn giản sau đây :

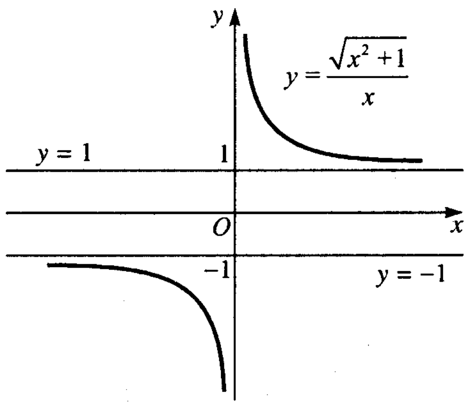
Ví dụ

Các hình 1.2, 1.3, 1.4, theo thứ tự, là đồ thị của các hàm số

a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.



Hình 1.2



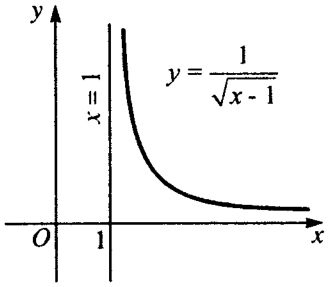
Hình 1.3

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ gồm hai nhánh nằm về hai bên của đường thẳng $x = 1$ (h.1.2). Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của cả hai nhánh vì $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$.

Tương tự, đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của cả hai nhánh của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (h.1.3) vì $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$.

3. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có thể nhận đường thẳng $y = y_0$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$ hoặc khi $x \to -\infty$ hoặc khi đồng thời xảy ra cả hai trường hợp $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$) vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$, và nhận đường thẳng $y = -1$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to -\infty$) vì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1$ (h.1.3).



Hình 1.4

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$) vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$ (h.1.4).

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$) vì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$ (h.1.2).

Ta cũng có những nhận xét tương tự đối với các đường tiệm cận xiên. Các nhận xét này không những giúp học sinh hiểu tốt hơn về các đường tiệm cận mà còn giúp các em phác hoạ được hình dạng của đồ thị một số hàm số.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dự kiến được thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy của từng tiết như sau :

Tiết 1. Từ đầu đến hết hoạt động $\boxed{\text{H1}}$.

Tiết 2. Phần còn lại (sau tiết 1) của bài.

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Để tận dụng thời gian giảng dạy trên lớp nên vẽ trước các hình trong bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\text{H1}}$ *Mục đích :* Giúp học sinh áp dụng định nghĩa để tìm các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. $\boxed{\text{H1}}$ được giải tương tự như ví dụ 1.

Đồ thị của hàm số đã cho nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$ làm tiệm cận đứng, và nhận đường thẳng $y = 3$ làm tiệm cận ngang.

$\boxed{\text{H2}}$ *Mục đích :* Giúp học sinh áp dụng định nghĩa để tìm tiệm cận xiên của đồ thị.

Giải

Vì $y - (2x + 1) = \dfrac{1}{x - 2} \to 0$ khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$ nên đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

$\boxed{\text{H3}}$ Mục đích của hoạt động $\boxed{\text{H3}}$ là giúp học sinh áp dụng các công thức trong chú ý vừa nêu để viết phương trình tiệm cận xiên của đồ thị. $\boxed{\text{H3}}$ được giải tương tự như ví dụ 4.

Giải

Ta có

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x(x - 2)} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2} - 2x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x - 2} = 1.$$

Ta cũng có $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = 2$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} (y - 2x) = 1$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$ và khi $x \to -\infty$).

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

34. a) Tiệm cận đứng : $x = -\frac{2}{3}$; tiệm cận ngang : $y = \frac{1}{3}$.

b) Tiệm cận đứng : $x = -3$; tiệm cận ngang : $y = -2$.

c) Tiệm cận đứng : $x = 3$; tiệm cận xiên : $y = x + 2$.

d) Tiệm cận đứng : $x = -\frac{1}{2}$.

Tiệm cận xiên có dạng $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{x(2x + 1)} = \frac{1}{2} ;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(y - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{2x + 1} - \frac{x}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-7x + 8}{2(2x + 1)} = -\frac{7}{4}.$$

Đường thẳng $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

e) Hai tiệm cận đứng : $x = 1$ và $x = -1$; tiệm cận ngang : $y = 0$.

f) Tiệm cận đứng : $x = -1$; tiệm cận ngang : $y = 0$.

35. a) Tiệm cận đứng : $x = 0$; tiệm cận xiên : $y = x - 3$.

b) Hai tiệm cận đứng : $x = 0$ và $x = 2$; tiệm cận xiên : $y = x + 2$.

c) Hai tiệm cận đứng $x = -1$ và $x = 1$; tiệm cận xiên $y = x$.

d) Hai tiệm cận đứng : $x = -1$ và $x = \frac{3}{5}$; tiệm cận ngang : $y = -\frac{1}{5}$.

36. a) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty)$.

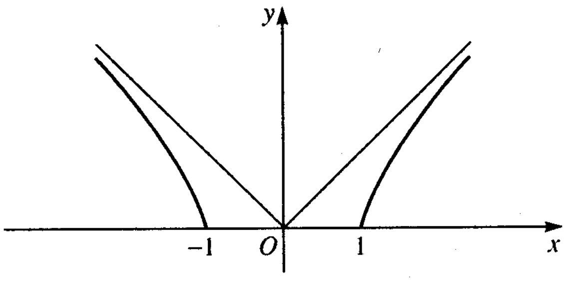
• Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$)

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (h.1.5) (khi $x \to +\infty$).



Hình 1.5

• Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to -\infty$)

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x}\right) = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.5).

b) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ +\infty)$.

Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to +\infty$)

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right) = 3\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - 3x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = 3x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$) (h.1.6).

• Tìm tiệm cận xiên (khi $x \to -\infty$)

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

$$= 2 + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)$$

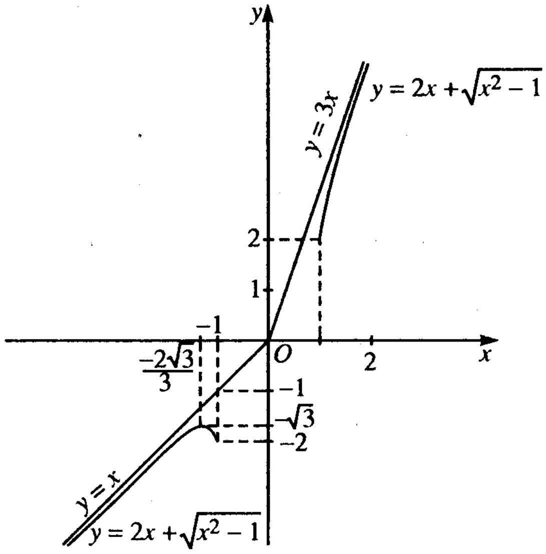
$$= 2 - 1 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y - x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.6).



Hình 1.6

Đồ thị của hàm số đã cho gồm hai nhánh. Nhánh phải của đồ thị nhận đường thẳng $y = 3x$ làm tiệm cận xiên, nhánh trái nhận đường thẳng $y = x$ làm tiệm cận xiên (h.1.6).

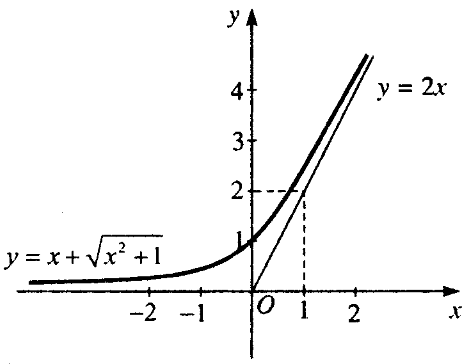
c) $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = 2,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y - 2x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$



Hình 1.7

Đường thẳng $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0.$$

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.7).

d) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Đường thẳng $y = x + \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

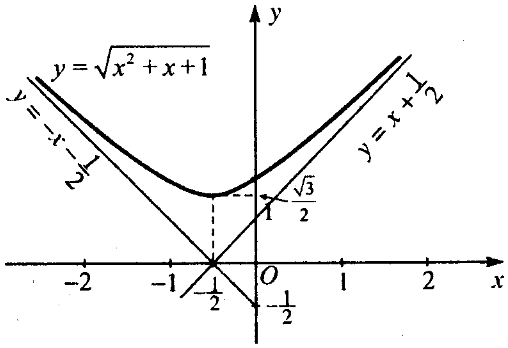
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y+x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}.$$



Hình 1.8

Đường thẳng $y = -x - \frac{1}{2}$ là một tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$) (h.1.8).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về tính duy nhất của tiệm cận xiên

Các công thức tính các hệ số a và b của tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$) trong chú ý của bài cho thấy đường tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$), nếu có, là duy nhất. Tuy nhiên, điều khẳng định này được suy ra ngay từ định nghĩa của tiệm cận.

Thật vậy, giả sử hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = cx + d$ đều là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \to +\infty$). Khi đó, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax - b] = 0 \text{ và } \lim_{x\to+\infty}[f(x) - cx - d] = 0.$$

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - cx - d - (f(x) - ax - b)] = 0,$$

hay $\lim\limits_{x\to+\infty}[(a - c)x + (b - d)] = 0.$

Từ đó suy ra $a - c = 0$ và $b - d = 0$, hay $a = c$ và $b = d$. Hiển nhiên, điều khẳng định này cũng đúng trong trường hợp $x \to -\infty$.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Bài luyện tập này nhằm củng cố các kiến thức trong hai bài §4, §5 và rèn luyện thêm cho học sinh các kĩ năng :

– Tìm các đường tiệm cận của đồ thị.

– Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo một vectơ cho trước và viết phương trình của đường cong đối với hệ toạ độ mới.

– Tìm tâm đối xứng của đồ thị một vài hàm số đơn giản.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

37. a) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty)$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=2\ ;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0\,.$$

Tiệm cận xiên : $y=2x$ (khi $x\to+\infty$).

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0.$$

Tiệm cận ngang : $y=0$ (khi $x\to-\infty$).

b) Hàm số xác định trên tập hợp $(-\infty\,;1]\cup[3\,;+\infty)$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=1\ ;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=-2.$$

Tiệm cận xiên : $y=x-2$ (khi $x\to+\infty$).

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=-1\ ;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y+x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}+x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x + 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x + 3}{-x\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Tiệm cận xiên : $y = -x + 2$ (khi $x \to -\infty$).

Đồ thị của hàm số đã cho có hai nhánh. Nhánh phải nhận đường thẳng $y = x - 2$ làm tiệm cận xiên, nhánh trái nhận đường thẳng $y = -x + 2$ làm tiệm cận xiên.

c) Hai tiệm cận xiên : $y = x$ khi ($x \to +\infty$) và $y = -x$ (khi $x \to -\infty$).

d) Hai tiệm cận đứng : $x = 1$ và $x = -1$; tiệm cận ngang : $y = 1$ (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

38. a) Tiệm cận đứng : $x = 3$; tiệm cận xiên : $y = x + 1$.

b) $I(3 ; 4)$; $\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 4. \end{cases}$

c) Phương trình của đường cong $(\mathscr{C})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y + 4 = \frac{(X + 3)^2 - 2(X + 3) + 2}{X}$$

$$= \frac{X^2 + 4X + 5}{X} = X + 4 + \frac{5}{X},$$

hay $$Y = X + \frac{5}{X}.$$

Đây là một hàm số lẻ. Do đó đồ thị $(\mathscr{C})$ nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng.

39. a) Ta viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = x - 1 - \frac{2}{x + 2}.$$

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Về sơ đồ khảo sát hàm số, khác với sách chỉnh lí hợp nhất, trong Giải tích 12 nâng cao, việc tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực của hàm số được thực hiện ngay từ đầu khi khảo sát sự biến thiên của hàm số. Nhờ đó, sau khi xét dấu đạo hàm, có thể lập ngay được bảng biến thiên của hàm số.

Học sinh dễ dàng đọc được một số tính chất của hàm số như tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, ... trên bảng biến thiên đó.

2. Về điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba và hàm số trùng phương

a) Điểm $U(x_0\,; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U xuyên qua đồ thị.

b) Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai trên khoảng J chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì $(x_0\,; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

c) Đồ thị của hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ luôn có một điểm uốn. Đó là điểm $U(x_0\,; f(x_0))$, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. Điểm U là tâm đối xứng của đồ thị.

d) Đồ thị của hàm số trùng phương $f(x) = ax^4 + bx^2 + c,\ a \neq 0$ có hai điểm uốn hoặc không có điểm uốn tuỳ thuộc vào số nghiệm của phương trình

$$f''(x) = 0.$$

• Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm x_0,\ x_0 > 0$, thì đồ thị có hai điểm uốn $U_1(x_0; f(x_0))$ và $U_2(-x_0; f(x_0))$ đối xứng nhau qua trục tung.

• Nếu phương trình có một nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì đồ thị không có điểm uốn.

3. Sau khi cho học sinh giải các bài tập 40, 41, 42, nếu có điều kiện, GV có thể giới thiệu các dạng đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tuỳ theo dấu của a và số nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Để xét dấu y', ta giải phương trình $y' = 0$.

$$\Delta' = b^2 - 3ac.$$

1^o. $\Delta' > 0$. Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$y(x_1)$	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				$y(x_2)$		

Đồ thị có dạng của hình 1.9a).

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↗	$y(x_2)$	↘	
			$y(x_1)$				$-\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.9b).

2^o. $\Delta' = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm kép

$$x_0 = -\frac{b}{3a} \text{ và } y' = 3a(x - x_0)^2.$$

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y				↗	$+\infty$
		↗	$y(x_0)$		
	$-\infty$				

Đồ thị có dạng của hình 1.9c). Vì $y'(x_0) = 0$ nên tiếp tuyến tại điểm $(x_0 ; y_0)$ của đồ thị song song với trục hoành.

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

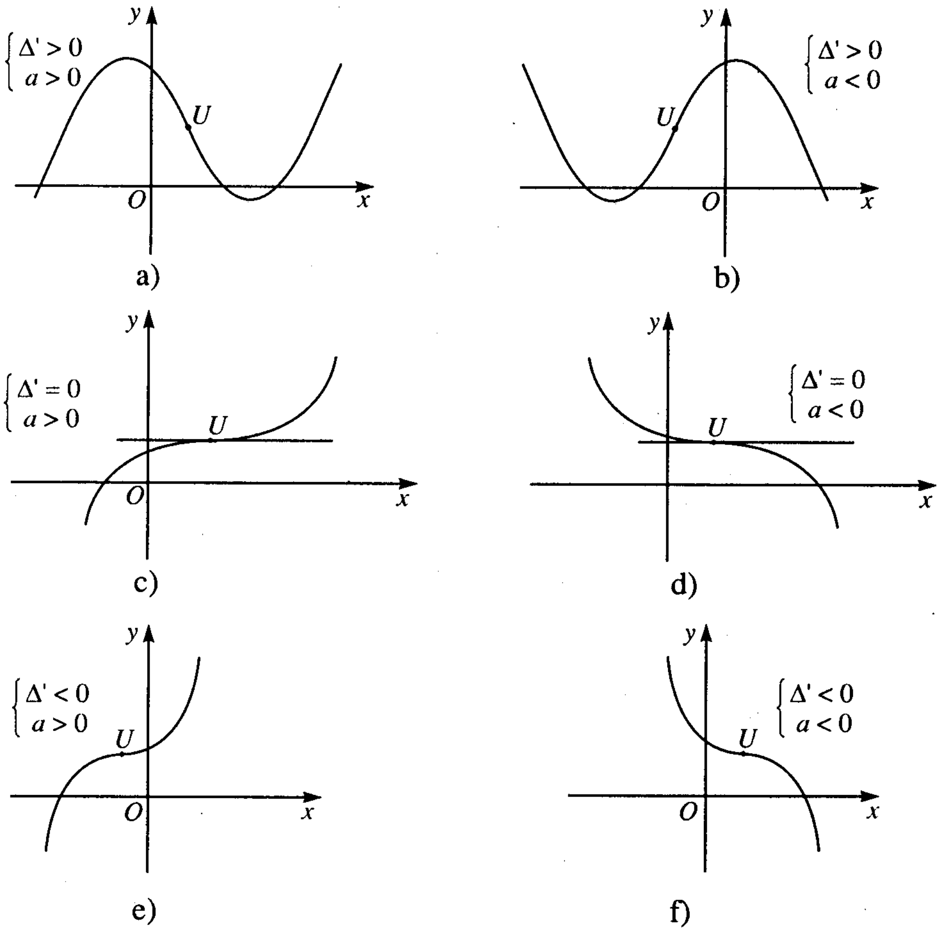
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘			
			$y(x_0)$	↘	
					$-\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.9d).

3^o. $\Delta' < 0$.

• Nếu $a > 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Đồ thị có dạng của hình 1.9e).

• Nếu $a < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Đồ thị có dạng của hình 1.9f).



Hình 1.9

Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 6ax + 2b$.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

Điểm $U(x_0\ ;\ y(x_0))$ là điểm uốn của đồ thị. Dễ dàng chứng minh được rằng điểm uốn U là tâm đối xứng của đồ thị.

4. Sau khi giải các bài tập 43, 44, nếu có điều kiện, GV có thể giới thiệu các dạng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

$$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$

1°. $ab < 0$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		0		$\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	↗	c	↘	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$

$y'' = 2(6ax^2 + b)$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm x_0$, với $x_0 = \sqrt{-\dfrac{b}{6a}}$. Đồ thị của hàm số có hai điểm uốn $(-x_0\ ;\ y_0)$ và $(x_0\ ;\ y_0)$, $y_0 = y(-x_0) = y(x_0)$. Đồ thị có dạng của hình 1.10a).

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		0		$\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	↘	c	↗	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$

Đồ thị có hai điểm uốn $(-x_0\,;\,y_0)$ và $(x_0\,;\,y_0)$ với $x_0 = \sqrt{-\dfrac{b}{6a}}$, $y_0 = y(-x_0) = y(x_0)$. Đồ thị có dạng của hình 1.10b).

2°. $ab > 0$ hoặc $b = 0$. Khi đó phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$. Dễ dàng thấy rằng đồ thị không có điểm uốn.

• Nếu $a > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

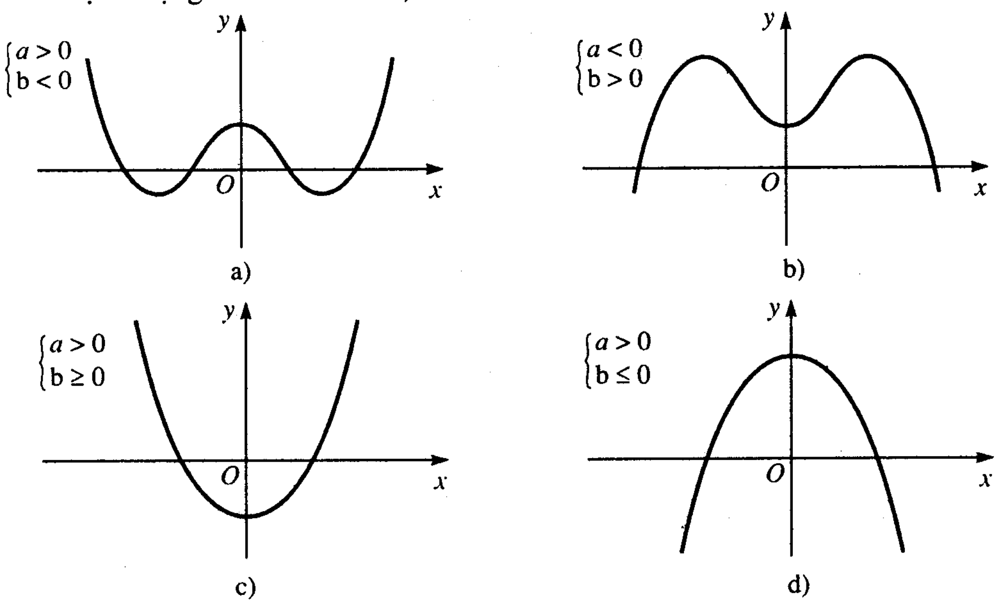
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	c	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.10c).

• Nếu $a < 0$ thì ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$+\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.10d).



Hình 1.10

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

*** Dự kiến phân phối thời gian**

Bài này thực hiện trong 2 tiết, với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1. Hai ví dụ 1 và 2.

Tiết 2. Hai ví dụ 3 và 4.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

40. a) GV tự làm.

b) $U(-1\,;\,-2)$ là điểm uốn của đồ thị của hàm số đã cho.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn là $y = -3x - 5$.

c) GV tự làm.

41. a) GV tự làm.

b) • Nếu $m < -1$ hoặc $m > 3$ thì phương trình có 1 nghiệm.

• Nếu $m = -1$ hoặc $m = 3$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $-1 < m < 3$ thì phương trình có 3 nghiệm.

42. GV tự làm.

43. b) • Nếu $m < -2$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $m = -2$ thì phương trình có 3 nghiệm.

• Nếu $-2 < m < -1$ thì phương trình có 4 nghiệm.

• Nếu $m = -1$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $m > -1$ thì phương trình vô nghiệm.

c) Đồ thị có hai điểm uốn : $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,-\dfrac{13}{9}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,;\,-\dfrac{13}{9}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn đó là

$$y = -\frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3} \text{ và } y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x - \frac{7}{3}.$$

44. GV tự làm.

V. BỔ SUNG KIẾN THỨC

QUAN HỆ GIỮA DẤU ĐẠO HÀM CẤP HAI CỦA MỘT HÀM SỐ VÀ ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐÓ

Điều kiện để một điểm của đồ thị là điểm uốn của nó được giới thiệu trong hai định lí sau đây. Chú ý rằng khẳng định nêu trong " Điểm uốn của đồ thị " sau ví dụ 1 là hệ quả của định lí 2.

Định lí 1. *Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai tại điểm* x_0 *và* $U(x_0\,; f(x_0))$ *là một điểm uốn của đường cong* $y = f(x)$ *thì* $f''(x_0) = 0$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $U(x_0\,; f(x_0))$ là một điểm uốn của đường cong $y = f(x)$ và $f''(x_0) \neq 0$, chẳng hạn $f''(x_0) > 0$. Khi đó hàm số f có đạo hàm cấp một f' trên một khoảng $(a\,;b)$ chứa điểm x_0. Xét hàm số

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),\ x \in (a\,;b).$$

($y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ là phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm U). Vì U là điểm uốn của đường cong nên với $h > 0$ đủ nhỏ, $(x_0 - h\,; x_0 + h) \subset (a\,;b)$ và $\varphi(x)$ có dấu khác nhau trên hai khoảng $(x_0 - h\,; x_0)$ và $(x_0\,; x_0 + h)$. Vì vậy $x = x_0$ không phải là một điểm cực trị của hàm số φ. Mặt khác, ta có $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Do đó $\varphi'(x_0) = 0$. Ngoài ra, $\varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0$. Theo định lí 3 trong §2, từ đó suy ra x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số φ. Ta đi đến mâu thuẫn. Vậy $f''(x_0) = 0$.

Định lí 2. *Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một liên tục trên khoảng* $(a\,;b)$ *chứa điểm* x_0 *và có đạo hàm cấp hai trên các khoảng* $(a\,;x_0)$ *và* $(x_0\,;b)$. *Nếu* $f''(x)$ *đổi dấu khi x qua điểm* x_0 *thì* $U(x_0\,; f(x_0))$ *là một điểm uốn của đồ thị hàm số* $y = f(x)$.

Chứng minh. Giả sử $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a\,;x_0)$ và $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0\,;b)$. Ta sẽ chỉ ra rằng trên khoảng $(a\,;x_0)$ đường cong $y = f(x)$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm U của đường cong và trên khoảng $(x_0\,;b)$ đường cong nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Thật vậy, phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm U là $y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Theo công thức Taylo, với mỗi $x \in (a ; b) \setminus \{x_0\}$, tồn tại một điểm c giữa x_0 và x sao cho

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2.$$

Do đó

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x - x_0)^2. \qquad (1)$$

+ Với mọi $x \in (a ; x_0)$, ta có $x < c < x_0$, do đó $f''(c) < 0$ và từ (1) suy ra $f(x) - g(x) < 0$. Vậy trên khoảng $(a ; x_0)$, đường cong $y = f(x)$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm U của đường cong.

+ Với mọi $x \in (x_0 ; b)$, ta có $x < c < b$; do đó $f''(c) > 0$ và từ (1) suy ra $f(x) - g(x) > 0$. Vậy trên khoảng $(x_0 ; b)$ đường cong nằm phía trên tiếp tuyến tại điểm U của đường cong.

Theo định nghĩa của điểm uốn, $U(x_0 ; f(x_0))$ là một điểm uốn của đường cong $y = f(x)$.

Trường hợp $f''(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 được chứng minh tương tự.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là rèn luyện thêm cho học sinh kĩ năng khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm đa thức thuộc hai dạng đã được giới thiệu trong bài và giúp các em giải một vài bài tập đơn giản liên quan đến đồ thị.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

45. b) Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 1 = -m - 1.$$

Số nghiệm của phương trình trên bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ và đường thẳng $y = -m - 1$.

- Nếu $-m - 1 < -3$ hoặc $-m - 1 > 1$, tức là $m > 2$ hoặc $m < -2$ thì phương trình có 1 nghiệm.
- Nếu $-m - 1 = -3$ hoặc $-m - 1 = 1$, tức là $m = 2$ hoặc $m = -2$ thì phương trình có 2 nghiệm.
- Nếu $-3 < -m - 1 < 1$ tức là $-2 < m < 2$ thì phương trình có 3 nghiệm.

46. a) Hoành độ giao điểm của đường cong đã cho và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$(x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1, tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ -m + 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m < -1, \quad 2 < m < 3, \quad m > 3.$$

b) GV tự làm.

47. a) GV tự làm.

b) Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(x_0 \, ; \, y_0)$ khi và chỉ khi

$$y_0 = x_0^4 - (m + 1)x_0^2 + m$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - x_0^2)m + x_0^4 - x_0^2 - y_0 = 0. \qquad (2)$$

Đồ thị đi qua điểm $(x_0 \, ; \, y_0)$ với mọi giá trị của m khi và chỉ khi phương trình (2) nghiệm đúng với mọi m, tức là

$$\begin{cases} 1 - x_0^2 = 0 \\ x_0^4 - x_0^2 - y_0 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có hai nghiệm $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0. \end{cases}$

Vậy với mọi giá trị của m, đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua hai điểm cố định $(-1\ ;\ 0)$ và $(1\ ;\ 0)$.

48. a) $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

• Nếu $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -\sqrt{m}$ hoặc $x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$2m - m^2$	$\nearrow$	$2m$	$\searrow$	$2m - m^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có ba điểm cực trị.

Dễ dàng thấy rằng nếu $m \le 0$ thì hàm số chỉ có một cực tiểu.

Vậy hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

b) Đồ thị có hai điểm uốn : $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ ;\ \dfrac{31}{36}\right)$ và $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ ;\ \dfrac{31}{36}\right)$. Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn là

$$y = \frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12} \text{ và } y = -\frac{4}{3\sqrt{6}}x + \frac{13}{12}.$$

§7. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh biết các bước khảo sát các hàm phân thức hữu tỉ thuộc hai dạng nêu trong bài và cách vẽ đồ thị của các hàm số đó.

Kĩ năng

Giúp học sinh thành thạo các kĩ năng :

– Thực hiện các bước khảo sát hàm số.

– Vẽ nhanh và đúng đồ thị.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Sau khi giải các bài tập 49, 50, nếu có điều kiện, giáo viên có thể nêu các dạng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ và tử không chia hết cho mẫu).

Hàm số xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Tiệm cận đứng : $x = -\dfrac{d}{c}$; tiệm cận ngang : $y = \dfrac{a}{c}$.

Dễ dàng chứng minh được rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

1^{o}. Nếu $ad - bc > 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c} ; +\infty\right)$.

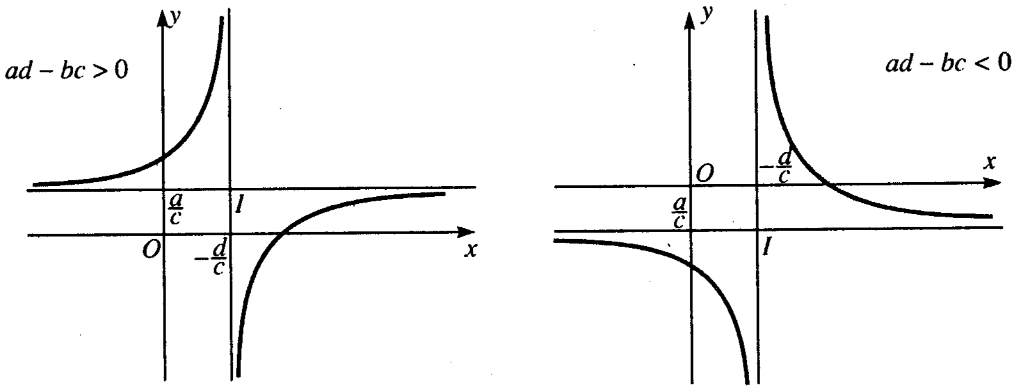
x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\dfrac{a}{c}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{a}{c}$

Đồ thị có dạng của hình 1.11a).

2^{o}. Nếu $ad - bc < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c} ; +\infty\right)$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	$\dfrac{a}{c}$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$\dfrac{a}{c}$

Đồ thị có dạng của hình 1.11b).



a) b)

Hình 1.11

Chú ý. Nếu $ad - bc = 0$ thì đồ thị là đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$ trừ điểm có hoành độ $x = -\dfrac{d}{c}$.

2. Sau khi giải các bài tập 51, 52, nếu có điều kiện, giáo viên có thể giới thiệu các dạng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ($a \neq 0$, $a' \neq 0$ và tử không chia hết cho mẫu).

   Hàm số xác định trên tập hợp $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b'}{a'}\right\}$.

   Có thể viết hàm số dưới dạng

$$y = px + q + \frac{r}{a'x + b'},\ r \neq 0.$$

Tiệm cận đứng : $x = -\dfrac{b'}{a'}$; tiệm cận xiên : $y = px + q$.

Dễ dàng chứng minh được rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

$$y' = \frac{aa'x^2 + 2ab'x + bb' - ca'}{(a'x + b')^2} \ ;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow aa'x^2 + 2ab'x + bb' - ca' = 0 \ ; \qquad (3)$$

$$\Delta' = a^2b'^2 - aa'(bb' - ca').$$

1°. Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. (Để ý rằng $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b'}{a'}$).

• Nếu $aa' > 0$ thì ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		x_1		$-\dfrac{b'}{a'}$		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y(x_1)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$y(x_2)$	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số có dạng của hình 1.12a).

• Nếu $aa' < 0$ thì sự biến thiên của hàm số được cho trong bảng sau

x	$-\infty$		x_1		$-\dfrac{b'}{a'}$		x_2		$+\infty$
y'		−	0	+	‖	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	$y(x_1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$y(x_2)$	↘	$-\infty$

Đồ thị của hàm số có dạng của hình 1.12b).

2^o. $\Delta' < 0$. Khi đó :

• Nếu $aa' > 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{b'}{a'}$. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{b'}{a'}\right)$ và $\left(-\dfrac{b'}{a'} ; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x			$-\dfrac{b'}{a'}$		$+\infty$
y'	$+$		‖	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

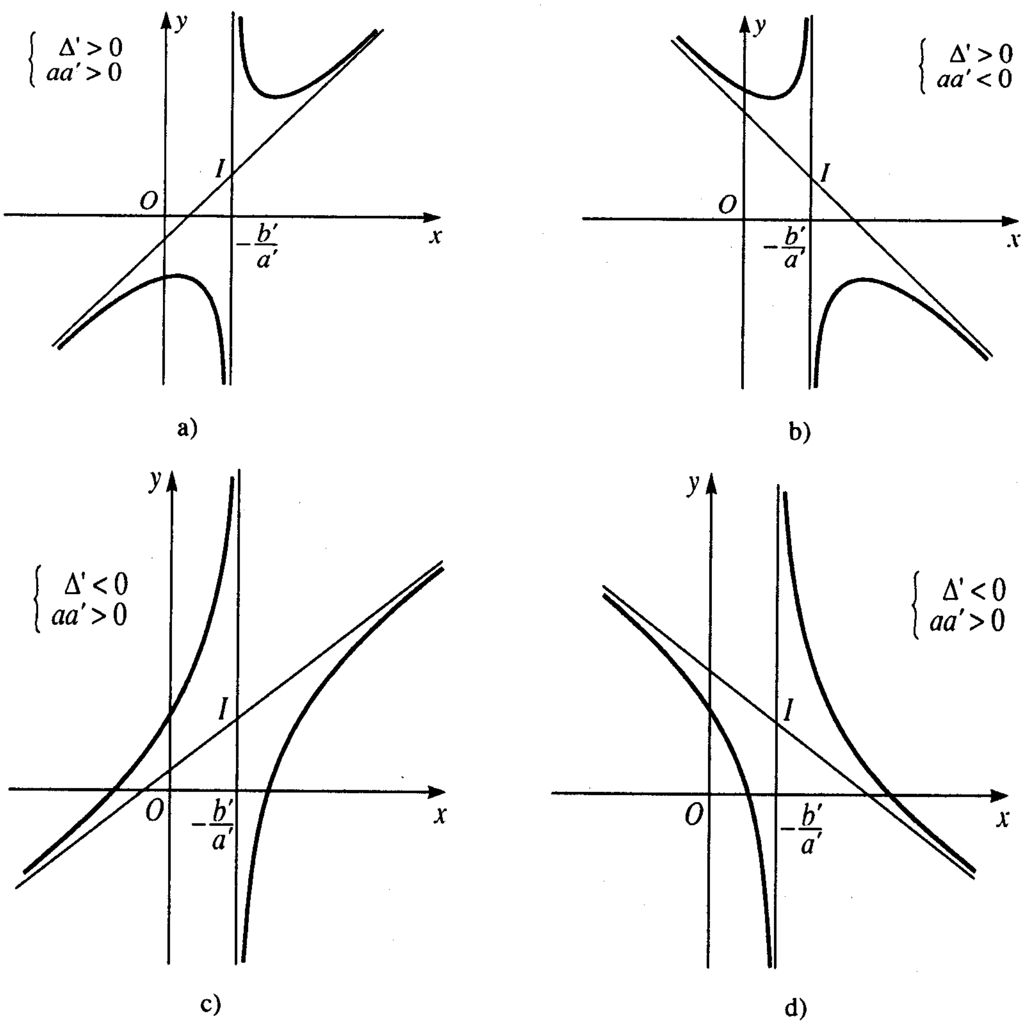
Đồ thị có dạng của hình 1.12c).

• Nếu $aa' < 0$ thì $y' < 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{b'}{a'}$. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty ; -\dfrac{b'}{a'}\right)$ và $\left(-\dfrac{b'}{a'} ; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{b'}{a'}$		$+\infty$
y'	$-$		‖	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị có dạng của hình 1.12d).



Hình 1.12

Chú ý. Nếu $\Delta' = 0$ thì tử chia hết cho mẫu,

$$y = \frac{a}{a'}x + \frac{a'b - ab'}{a'^2} \text{ với mọi } x \neq -\frac{b'}{a'}.$$

Đồ thị của hàm số là một đường thẳng bỏ đi một điểm.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1 : Từ đầu đến hết hoạt động **H1**.

Tiết 2 : Phần còn lại của bài.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Hoạt động này nhằm giúp học sinh củng cố các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Giải tương tự như ví dụ 1.

H2 Hoạt động này nhằm giúp học sinh củng cố các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$. Giải tương tự như ví dụ 3.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Các bài tập 49, 50, GV tự làm.

51. c) • Nếu $m < -1$ hoặc $m > 7$ thì phương trình có 2 nghiệm.

• Nếu $m = 7$ hoặc $m = -1$ thì phương trình có 1 nghiệm.

• Nếu $-1 < m < 7$ thì phương trình vô nghiệm.

52. GV tự làm.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Tiết luyện tập này nhằm rèn luyện thêm cho học sinh các kĩ năng

– Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm phân thức hữu tỉ thuộc hai dạng đã được giới thiệu trong bài.

– Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

• Tại một điểm thuộc đồ thị ;

• Có hệ số góc cho trước ;

• Đi qua một điểm cho trước không thuộc đồ thị.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

53. a) GV tự làm.

b) $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$;

c) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$.

54. a) GV tự làm.

b) Đồ thị của hàm số $y = -1 + \frac{1}{x+1}$ là hình đối xứng của $(\mathcal{H})$ qua trục hoành.

55. a) GV tự làm.

b) $y = 3(x - 2)$.

56. a) GV tự làm.

b) Giữ nguyên phần của đồ thị $(\mathscr{C})$ nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh biết :

– Cách xác định giao điểm của hai đường cong (đồ thị của hàm số).

– Khái niệm "hai đường cong tiếp xúc" và cách tìm tiếp điểm của chúng.

Kĩ năng

Giúp học sinh thành thạo các kĩ năng :

– Đưa việc xác định toạ độ giao điểm của hai đường cong về việc giải phương trình và ngược lại.

– Chứng minh hoặc tìm điều kiện để hai đường cong cho trước tiếp xúc với nhau, xác định toạ độ của tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung tại tiếp điểm của hai đường cong đó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Trong ví dụ 3, ta đã nêu một điều kiện để đường thẳng là tiếp tuyến của parabol. Có thể cho học sinh sử dụng kết quả này khi giải bài tập.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này thực hiện trong 2 tiết với nội dung giảng dạy từng tiết như sau :

Tiết 1 : Từ đầu đến ví dụ 2.

Tiết 2 : Phần còn lại của bài, từ hoạt động **H2**.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Hoạt động này nhằm giúp học sinh đưa việc tìm số giao điểm của hai đường cong về việc tìm số nghiệm của một phương trình.

Giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình

$$\frac{-x^2 + 2x}{x - 1} = x - m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x = (x - m)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - (m + 3)x + m = 0. \qquad (2)$$

((1) và (2) tương đương vì $x = 1$ không phải là nghiệm của (2)).

Vì $\Delta = (m + 3)^2 - 8m = m^2 - 2m + 9 > 0$ với mọi m, nên phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy với mọi giá trị của m đường thẳng cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt.

H2 Hoạt động này nhằm giúp học sinh chứng minh được sự tiếp xúc của hai đường cong cho trước, tìm tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung tại tiếp điểm của chúng. Giải tương tự như ví dụ 2.

Giải

Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - x = x^2 - 1 \\ (x^3 - x)' = (x^2 - 1)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = x^2 - 1 \\ 3x^2 - 1 = 2x. \end{cases}$$

Hệ có một nghiệm $x = 1$. Vậy hai đường cong đã cho tiếp xúc với nhau tại điểm $M(1 ; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm M là :

$$y = y'(1)(x - 1) \text{ hay } y = 2(x - 1).$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

57. a) GV tự làm.

b) Hoành độ giao điểm của hai đường cong $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ là nghiệm của phương trình

$$2x^3 + 3x^2 + 1 = 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}.$$

Hai giao điểm : $A(0 ; 1)$ và $B\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

c) $f'(x) = 6x^2 + 6x$; $g'(x) = 4x$.

$f'(0) = 0$; $g'(0) = 0$. Đường thẳng $y = 1$ là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{P})$ tại điểm A.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm B là

$$y = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \text{ hay } y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}.$$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$. Phương trình tiếp tuyến của parabol $(\mathscr{P})$ tại điểm B là

$$y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \text{ hay } y = -2x + \frac{1}{2}.$$

d) $f(x) - g(x) = 2x^3 + x^2 = x^2(2x + 1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Trên khoảng $\left(-\infty ; -\frac{1}{2}\right)$, $(\mathscr{C})$ nằm phía dưới $(\mathscr{P})$.

Trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$ và $(0 ; +\infty)$, $(\mathscr{C})$ nằm phía trên $(\mathscr{P})$.

58. a) GV tự làm.

b) Phương trình của đường thẳng (d_m) là

$$y = m(x + 2) + 2 \text{ hay } y = mx + 2m + 2.$$

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình

$$mx + 2m + 2 = \frac{2x - 1}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (mx + 2m + 2)(x + 1) = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0. \qquad (1)$$

• Đường thẳng (d_m) cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 12.$$

• Hai nhánh của đường cong đã cho nằm về hai bên của đường tiệm cận đứng $x = -1$ của đồ thị. Đường thẳng (d_m) cắt đường cong đã cho tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < -1 < x_2$.

Đặt $x = t - 1$; phương trình (1) trở thành

$m(t-1)^2 + 3m(t-1) + 2m + 3 = 0,$

hay $mt^2 + mt + 3 = 0.$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm và -1 nằm trong khoảng hai nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu, tức là $m < 0$.

59. Dễ dàng thấy rằng điểm $A\ (-1\ ;\ 2)$ là điểm chung của ba đường cong đã cho. Ngoài ra, ta có

$f'(x) = -2x + 3\ ;\ g'(x) = 3x^2 - 2x\ ;\ h'(x) = 2x + 7.$

$f'(-1) = g'(-1) = h'(-1) = 5.$

Ba đường cong có tiếp tuyến chung tại điểm A.

60. Hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3x}{x+2} \\ \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x\right)' = \left(\dfrac{3x}{x+2}\right)' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{3x}{x+2} & (1) \\ x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{(x+2)^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{3}{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -5.$$

$x = -5$ không thoả mãn (2).

Hệ phương trình (I) có một nghiệm duy nhất $x = 0$. Vậy hai đường cong tiếp xúc với nhau tại gốc toạ độ O ; $y'(0) = \dfrac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm gốc là $y = \dfrac{3}{2}x$.

61. Hoành độ tiếp điểm của hai parabol là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha = -\dfrac{g}{2v_0^2}x^2 + \dfrac{v_0^2}{2g} \\ -\dfrac{g}{v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x + \tan\alpha = -\dfrac{g}{v_0^2}x. \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình thứ hai của hệ là $x = \dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}$.

Dễ thấy đó cũng là nghiệm của phương trình thứ nhất của hệ. Vậy với mọi $\alpha \in \left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hai parabol luôn tiếp xúc với nhau. Hoành độ tiếp điểm là $x = \dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}$. Tung độ của tiếp điểm là

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{g\tan\alpha}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{\tan^2\alpha}\right).$$

Điểm $\left(\dfrac{v_0^2}{g\tan\alpha}\,;\dfrac{v_0^2}{2g}(1-\cot^2\alpha)\right)$ là tiếp điểm của hai parabol với mọi $\alpha \in \left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là rèn luyện thêm cho học sinh kĩ năng khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm phân thức hữu tỉ thuộc hai dạng trong bài và giúp các em giải một vài bài toán liên quan đến đồ thị và hàm số.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

62. GV tự làm.

63. a) GV tự làm.

b) Với mọi giá trị của m, đường thẳng $y = m(x + 1) - 1$ luôn đi qua điểm $A(-1 ; -1)$. Vì toạ độ của điểm A thoả mãn phương trình $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$ của đường cong $(\mathcal{H})$ nên A thuộc $(\mathcal{H})$.

c) Hoành độ giao điểm của đường thẳng đã cho và đường cong $(\mathcal{H})$ là nghiệm của phương trình

$$m(x+1) - 1 = \frac{x+2}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad m(x+1)(2x+1) - (2x+1) = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(2mx + m - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f(x) = 2mx + m - 3 = 0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Hai nhánh của $(\mathcal{H})$ nằm về hai bên của tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$ của nó. Điểm A thuộc nhánh trái của $(\mathcal{H})$ vì $x_A = -1 < -\dfrac{1}{2}$. Đường thẳng đã cho cắt $(\mathcal{H})$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $x < -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq -1$, tức là $m \neq 0$ và

$$\begin{cases} x = \dfrac{3-m}{2m} < -\dfrac{1}{2} \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2m} < 0 \\ -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3 \text{ hoặc } -3 < m < 0.$$

64. a) $a = -2$; $b = -3$.

b) GV tự làm.

65. a) GV tự làm.

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong đã cho là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = m - x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x + 1 = (m - x)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0. \qquad (2)$$

(Ba phương trình trên tương đương vì $x = 1$ không phải là nghiệm của hai phương trình sau).

Đường thẳng cắt đường cong đã cho tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\Delta = (m + 2)^2 - 12(m + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 - 8m - 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m < 4 - 2\sqrt{6} \text{ hoặc } m > 4 + 2\sqrt{6}. \qquad (3)$$

c) Hoành độ các giao điểm A và B là các nghiệm của phương trình (2). Do đó hoành độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m + 2}{6}. \qquad (4)$$

Vì điểm M nằm trên đường thẳng $y = m - x$ nên

$$y_M = m - x_M. \qquad (5)$$

Ta khử m để tìm hệ thức giữa x_M và y_M. Từ (4), ta có $m = 6x_M - 2$. Thay vào (5), ta được

$$y_M = 6x_M - 2 - x_M = 5x_M - 2.$$

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng $y = 5x - 2$.

Chú ý rằng m chỉ lấy các giá trị thoả mãn điều kiện (3).

$$m < 4 - 2\sqrt{6} \Rightarrow 6x - 2 < 4 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$m > 4 + 2\sqrt{6} \Rightarrow 6x - 2 > 4 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow x > 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB là phần của đường thẳng

$$y = 5x - 2 \text{ với } x < 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ hoặc } x > 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

66. Dễ thấy điểm M thuộc hypebol. Điểm M thuộc parabol khi và chỉ khi

$$2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} + b = 2 \Leftrightarrow a + 2b = 3.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với hypebol tại điểm M là

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4.$$

Ta tìm hệ số góc của tiếp tuyến với parabol tại điểm M

$$y' = 4x + a\ ;\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = a + 2.$$

Parabol tiếp xúc với hypebol tại điểm M khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ a + 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow a = -6\ ;\ b = \frac{9}{2}.$$

67. 1^o. a) Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là

$T(x) = C(x) + 0,4x,$

$T(x) = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000.$

b) $M(x) = 0,0001x + \dfrac{10000}{x} + 0,2$ với $x = 1, 2, \ldots$. (6)

Ta xét hàm số $y = M(x)$ trên khoảng $(0\ ;+\infty)$ (trong đó $M(x)$ được xác định bởi công thức (6) với mọi $x > 0$) và tìm $x > 0$, tại đó hàm số M đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0\ ;+\infty)$.

$$M'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2}\ ;\ M'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000.$$

Bảng biến thiên

x	0		10000		$+\infty$
$M'(x)$		$-$	0	$+$	
$M(x)$		$\searrow$	$2,2$	$\nearrow$	

Ta có

$$\min_{x>0} M(x) = M(10000) = 2,2.$$

Từ đó suy ra

$$\min_{x\in\mathbb{N}^*} M(x) = M(10000) = 2,2.$$

Vậy chi phí trung bình cho x cuốn tạp chí là thấp nhất khi $x = 10000$ (cuốn). Chi phí cho mỗi cuốn khi đó là

2,2 vạn đồng = 22000đ.

2^o. a) Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí (x nguyên dương) là

$2x + 9000$ (vạn đồng).

Số tiền lãi khi bán x cuốn là

$$L(x) = 2x + 9000 - T(x),$$

$$L(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000.$$

b) Có lãi khi $L(x) > 0$, tức là

$$-0,0001x^2 + 1,8x - 1000 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0,9-\sqrt{0,71}}{0,0001} < x < \frac{0,9+\sqrt{0,71}}{0,0001}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9000 - \sqrt{71000000} < x < 9000 + \sqrt{71000000}.$$

Vì x lấy giá trị nguyên dương và

$$9000 - \sqrt{71000000} > 573,85 \text{ và } 9000 + \sqrt{71000000} < 17426,15$$

nên

$$573 < x < 17427.$$

c) Ta xét hàm số

$$L(x) = -0,0001x^2 + 1,8x - 1000$$

trên khoảng $(0 ; +\infty)$ và tìm $x > 0$ để tại đó hàm số L đạt giá trị lớn nhất trên $(0 ; +\infty)$.

$$L'(x) = -0,0002x + 1,8.$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9000.$$

x	0		9000		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	7100	$\searrow$	

Ta có $\max\limits_{x \in (0\,;\,+\infty)} L(x) = L(9000) = 7100.$

Do đó

$$\max_{x \in \mathbb{N}^*} L(x) = L(9000) = 7100.$$

Vậy muốn được lãi nhiều nhất thì phải in 9000 cuốn.

Khi đó tiền lãi thu được là

7100 vạn đồng = 71 000 000 đ (71 triệu đồng).

E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (3 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

Thời gian dành cho ôn tập chương là 2 tiết, trong đó có 1 tiết kiểm tra. Như vậy toàn bộ lí thuyết và bài tập của chương được ôn trong 1 tiết. Giáo viên nên cho các câu hỏi và bài tập ít nhất là trước một tuần để học sinh có thời gian chuẩn bị. Trên lớp giáo viên cho học sinh chữa một số bài tập trong các bài tập đã cho. Sau đây là một số câu hỏi lí thuyết có tính chất gợi ý.

1. Định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến trên một khoảng, trên một đoạn và trên một nửa khoảng.

2. Nêu điều kiện cần để hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên một khoảng.

3. Nêu điều kiện đủ để hàm số đồng biến, nghịch biến hoặc lấy giá trị không đổi trên một khoảng, một đoạn, trên nửa khoảng $[a\,;\,b)$.

4. Định nghĩa điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số.

5. Nêu điều kiện cần để hàm số đạt cực trị.

6. Nêu hai điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị :

a) Sử dụng đạo hàm cấp một (từ đó có quy tắc 1).

b) Sử dụng đạo hàm cấp hai (từ đó có quy tắc 2).

7. Định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp số thực cho trước.

8. a) Định nghĩa các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) Viết các công thức tính các hệ số a, b của tiệm cận xiên $y = ax + b$.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính đơn điệu của hàm số

ĐỊNH NGHĨA. *Giả sử K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Hàm số f xác định trên K gọi là*

• Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

• Nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

**** Điều kiện cần để hàm số đơn điệu***

Giả sử hàm số có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó :

a) Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.

b) Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

**** Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu***

1^o. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên I.

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên I.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên I.

2^o. Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a\ ;\ b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a\ ;\ b)$.

a) Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a\ ;\ b)$.

b) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a\ ;\ b)$.

3^o. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.

Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I.

2. Cực trị của hàm số

ĐỊNH NGHĨA. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp số thực $\mathcal{D}$ và $x_0 \in \mathcal{D}$.

x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a\ ;\ b)$ sao cho $x_0 \in (a\ ;\ b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f và điểm $(x_0\ ;\ f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Điểm cực tiểu của hàm số và của đồ thị hàm số được định nghĩa tương tự.

**** Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị***

Nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Hàm số f có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó nó không có đạo hàm.

**** Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị***

1^o. Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a\ ;\ x_0)$ và $(x_0\ ;\ b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0 theo chiều tăng thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0 theo chiều tăng thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

2^o. Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a\ ;\ b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0. Khi đó :

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

ĐỊNH NGHĨA. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{D}$ sao cho

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}$$

thì số $M = f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f trên $\mathcal{D}$, kí hiệu là $M = \max\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số được định nghĩa tương tự.

4. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

• Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thoả mãn :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

• Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

• Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

• Đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

5. Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $\qquad y = ax^4 + bx^2 + c$;

$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$; $\qquad y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

Xem §6, §7 trong Giải tích 12 nâng cao.

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

68. a) Hàm số $f(x) = \tan x - x$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Từ đó

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right), \text{ tức là}$$

$$\tan x - x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Hàm số $f(x) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0$ với mọi $x \in \left(0 ; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (suy ra từ a)).

Do đó, hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$ và ta có

$$f(x) > f(0) = 0 \text{ với mọi } x \in \left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

69. GV tự làm.

70. Thể tích hình trụ là

$$V = \pi r^2 h,$$

r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{V}{\pi r^2},$$

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Ta tìm $r > 0$ sao cho tại đó S đạt giá trị nhỏ nhất.

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}\ ;\ S' = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Bảng biến thiên

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Khi đó

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

71. Gọi x, y là độ dài hai cạnh còn lại của tam giác.

Ta có

$$x + y = 16 - 6 = 10,\ x > 0, y > 0.$$

Diện tích tam giác là

$$S = \sqrt{p(p-6)(p-x)(p-y)}$$

$$= \sqrt{8.2(8-x)(8-y)}$$

$$= 4\sqrt{(8-x)(8-y)}.$$

Thay $y = 10 - x$, ta được

$$S = 4\sqrt{(8-x)(x-2)},$$

$$S = 4\sqrt{-x^2 + 10x - 16} \text{ với } 0 < x < 10.$$

S đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0 ; 10)$ khi và chỉ khi hàm số

$$f(x) = -x^2 + 10x - 16$$

đạt giá trị lớn nhất trên khoảng này.

$$f'(x) = -2x + 10 \ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	0		5		10
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	9	↘	

Tam giác có diện tích lớn nhất khi $x = 5$ (cm) và $y = 5$ (cm) ;

$$\max_{x\in(0;10)} f(x) = f(5) = 9.$$

Khi đó diện tích tam giác là

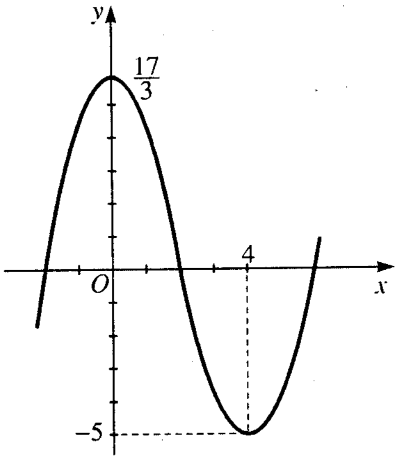
$$S = 4\sqrt{9} = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

72. a) Hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x^2 - 4x \ ;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4.$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{3}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị



b) Ta có $f(-2) = -\frac{8}{3} - 8 + \frac{17}{3} < 0$ và $f(0) = \frac{17}{3} > 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $[-2 ; 0]$. Vì $f(-2)f(0) < 0$ nên, theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $\alpha \in (-2 ; 0)$ sao cho $f(\alpha) = 0$. Số α là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Vì hàm số f đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất α thuộc khoảng này.

Tương tự, hàm số f liên tục trên đoạn $[0 ; 4]$.

Vì $f(0) = \frac{17}{3} > 0$ và $f(4) = -5 < 0$ nên tồn tại một số thực $\beta \in (0 ; 4)$ sao cho $f(\beta) = 0$. Vì hàm số f nghịch biến trên khoảng $(0 ; 4)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất β thuộc khoảng này.

Cũng như vậy, phương trình có nghiệm duy nhất γ thuộc khoảng $(4 ; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Chú ý. Có thể thấy ngay điều khẳng định này trên đồ thị của hàm số. Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{3}$ cắt trục hoành tại ba điểm.

73. a) $f'(x) = 3x^2 + p$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + p = 0$. (1)

Hàm số f có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là $p < 0$. Khi đó, hai nghiệm của phương trình (1) là

$$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ và } x = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

với $M = \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = q - \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$,

$$m = \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = q + \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

b) Nếu $Mm < 0$ thì $M > 0$ và $m < 0$. Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm α, β, γ với $\alpha < -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $-\sqrt{-\frac{p}{3}} < \beta < \sqrt{-\frac{p}{3}}$ và $\gamma > \sqrt{-\frac{p}{3}}$.

c) Nếu $Mm > 0$ thì hai số M và m cùng dấu.

- Nếu $M < 0$ và $m < 0$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất (lớn hơn $\sqrt{-\frac{p}{3}}$).
- Nếu $M > 0$ và $m > 0$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất (nhỏ hơn $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$).

Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} p < 0 \\ Mm = q^2 - \frac{4}{9}p^2\left(-\frac{p}{3}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

74. a) GV tự làm.

b) $U(0\ ;\ 1)$ là điểm uốn của đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số đã cho.

Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại U là

$$y = -3x + 1.$$

c) Phương trình của đường thẳng (d_m) là $y = mx + 1$. Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và đường cong $(\mathscr{C})$ là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + 1 = mx + 1$$

$$x^3 - (m + 3)x = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m + 3. \end{array}\right.$$

Đường thẳng (d_m) cắt đường cong $(\mathscr{C})$ tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, tức là

$$m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3.$$

75. a) GV tự làm.

b) Hoành độ giao điểm của đường cong đã cho và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$x^4 - (m + 1)x^2 + m = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = m. \end{array}\right.$$

Vậy phải có $m > 0$ và $m \neq 1$. Khi đó, phương trình (2) có 4 nghiệm

$$x = -1, x = 1,\ x = -\sqrt{m},\ x = \sqrt{m}.$$

Đường cong đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm tạo thành ba đoạn thẳng bằng nhau khi và chỉ khi

$$\sqrt{m} = 3 \quad \text{hoặc} \quad \sqrt{m} = \frac{1}{3},$$

tức là $m = 9$ hoặc $m = \dfrac{1}{9}$.

76. GV tự làm.

77. a) GV tự làm.

b) Gọi $M(x_0\,;\,y_0)$ là một điểm bất kì của mặt phẳng toạ độ. Đường cong $(\mathcal{H}_m)$ đi qua điểm M khi và chỉ khi m là nghiệm của phương trình

$$\frac{x_0 - 4m}{2(mx_0 - 1)} = y_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx_0 - 1 \neq 0 \\ 2y_0(mx_0 - 1) = x_0 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx_0 \neq 1 & (3) \\ (2x_0y_0 + 4)m - x_0 - 2y_0 = 0. & (4) \end{cases}$$

Mọi đường cong $(\mathcal{H}_m)$ với $m \neq \pm\frac{1}{2}$ đều đi qua điểm $M(x_0\,;\,y_0)$ khi và chỉ khi hệ phương trình trên nghiệm đúng với mọi $m \neq \pm\frac{1}{2}$.

Phương trình (4) nghiệm đúng với mọi m khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_0y_0 + 4 = 0 \\ x_0 + 2y_0 = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình trên có hai nghiệm

$$(x_0\,;y_0) = (-2\,;\,1) \text{ và } (x_0\,;y_0) = (2\,;\,-1).$$

Ta kiểm tra điều kiện (3).

- Với $x_0 = -2$, ta có $m \neq -\frac{1}{2}$.
- Với $x_0 = 2$, ta có $m \neq \frac{1}{2}$.

Vậy mọi đường cong $(\mathcal{H}_m)$ với $m \neq \pm\frac{1}{2}$ đều đi qua hai điểm cố định $A(-2\,;\,1)$ và $B(2\,;\,-1)$.

78. a) GV tự làm

b) Hoành độ giao điểm của parabol $(\mathcal{P})$ và hypebol $(\mathcal{H})$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - x + 1)(x + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Giao điểm của $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{H})$ là điểm $A(0 ; 1)$. Dễ dàng thấy rằng $(\mathscr{P})$ và $(\mathscr{H})$ tiếp xúc với nhau tại điểm A.

c) Đặt $f(x) = x^2 - x + 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

$$f(x) - g(x) = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}.$$

Ta lập bảng xét dấu của $f(x) - g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Trên các khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(0 ; +\infty)$, parabol $(\mathscr{P})$ nằm phía trên hypebol $(\mathscr{H})$.

Trên khoảng $(-1 ; 0)$, parabol $(\mathscr{P})$ nằm phía dưới hypebol $(\mathscr{H})$.

79. a) GV tự làm.

b) Dễ thấy đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng và đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đường cong $(\mathscr{C})$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathscr{C})$ tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ là

$$y = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0}.$$

Thay $x = 0$ vào phương trình trên, ta được tung độ của điểm A :

$$y_A = \left(1 - \frac{1}{x_0^2}\right)(-x_0) + x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0}.$$

Hoành độ của điểm B là nghiệm của phương trình

$$\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)(x-x_0)+x_0+\frac{1}{x_0}=x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{x_0^2}+\frac{2}{x_0}=0 \Leftrightarrow x=2x_0.$$

$$x_B=2x_0.$$

Ta có

$$x_M=x_0=\frac{0+2x_0}{2}=\frac{x_A+x_B}{2}.$$

Vì ba điểm A, M, B thẳng hàng nên từ đó suy ra rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Diện tích tam giác OAB là

$$S=\frac{1}{2}|y_A||x_B|=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0}\right||2x_0|=2 \text{ với mọi } x_0\neq 0.$$

80. (B) ; **81.** (C) ; **82.** (D) ; **83.**(D) ; **84.** (A) ; **85.**(C) ; **86.**(B) ; **87**(A) ; **88.**(C) ; **89.** (D) ; **90.**(B) ; **91.** (C) ; **92.**(A) ; **93.** (D) ; **94.**(B) ; **95.** (C) ; **96.** (B) ; **97.** (D) ; **98.** (A) ; **99.** (C) ; **100.** (D).

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3 điểm)

Với mỗi câu hỏi dưới đây, trong các phương án đã cho, chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng bằng cách đánh dấu × vào ô trống ứng với nó trong phần trả lời (chẳng hạn, nếu chọn phương án C cho câu 2 thì đánh dấu × vào ô trống nằm ở dòng "Câu 2" và cột "C"). Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm.

Câu 1. Hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-x^4+\frac{x^3}{3}-1$

(A) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$;

(B) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$;

(C) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(D) Đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1\ ;\ +\infty)$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 11$

(A) Đạt cực đại tại điểm $x = 1$;

(B) Đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$;

(C) Đạt cực đại tại điểm $x = 0$;

(D) Đạt cực tiểu tại điểm $x = -4$.

Câu 3. Parabol $y = x^2 + x$ tiếp xúc với

(A) Parabol $y = 2x^2 + 1$;

(B) Đường thẳng $y = 2x - 1$;

(C) Đường cong $y = x^3$;

(D) Đường cong $y = x^3 + 1$.

Phần trả lời của học sinh

Phương án	(A)	(B)	(C)	(D)
Câu 1				
Câu 2				
Câu 3				

PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 4 (5 điểm).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2.$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng $y = m(x-2) - 4$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong $(\mathscr{C})$.

Câu 5 (*2 điểm*).

Tìm các tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Đáp án

Câu 1. (C)

Câu 2. (B)

Câu 3. (D)

Câu 4. a) 1^o. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

2^o. Sự biến thiên của hàm số :

• Giới hạn của hàm số tại vô cực

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

• Bảng biến thiên

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$;

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0 ; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -4$.

• Điểm uốn

Đạo hàm cấp hai của hàm số là $y'' = 6x - 6$.

Vì $y'' = 0$ tại điểm $x = 1$ và y'' đổi dấu khi x qua điểm $x = 1$ nên $U(1\ ;\ -2)$ là điểm uốn của đồ thị.

3^o. Đồ thị : GV tự vẽ.

b) Với mọi giá trị của m, đường thẳng đã cho luôn đi qua điểm cố định $A(2\ ;\ -4)$.

Vì toạ độ của điểm A thoả mãn phương trình $y = x^3 - 3x^2$ nên A thuộc $(\mathscr{C})$.

Câu 5. Ta có

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x + 1}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \to +\infty$).

Vì

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x + 1}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2},$$

nên đường thẳng $y = -x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

ĐỀ SỐ 2

PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3 điểm)

Với mỗi câu hỏi dưới đây, trong các phương án đã cho, chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng bằng cách đánh dấu × vào ô trống ứng với nó trong phần trả lời (Chẳng hạn, nếu chọn phương án C cho câu 2 thì đánh dấu × vào ô trống nằm ở dòng "Câu 2" và cột "C"). Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm.

Câu 1. Hàm số $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$

(A) Đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(B) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$;

(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$;

(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$

(A) Đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$;

(B) Đạt cực đại tại điểm $x = 2$;

(C) Đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$;

(D) Không có cực đại, cực tiểu.

Câu 3. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ nhận

(A) Đường thẳng $y = x$ làm tiệm cận xiên ;

(B) Đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang ;

(C) Đường thẳng $y = x + 1$ làm tiệm cận xiên ;

(D) Đường thẳng $y = x - 1$ làm tiệm cận xiên.

Phần trả lời của học sinh

Phương án	(A)	(B)	(C)	(D)
Câu 1				
Câu 2				
Câu 3				

PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 4 (*5 điểm*).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số

$$y = x + \frac{4}{x}.$$

b) Tìm m sao cho đường thẳng $y = m(x - 2) + 4$ cắt đường cong $(\mathscr{C})$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó.

Câu 5 (2 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = -2\sin^2 x + 2\sin x - 1.$$

Đáp án

Câu 1. (A)

Câu 2. (C)

Câu 3. (D)

Câu 4. a) 1°. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2°. Sự biến thiên của hàm số

• Giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và các đường tiệm cận.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to0^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số đã cho (khi $x \to 0^-$ và $x \to 0^+$).

Vì

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 \text{ và } \lim_{x\to-\infty}(y-x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x} = 0$$

nên đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$).

• Bảng biến thiên

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \pm 2$.

x		-2		0		2		$+\infty$
y'	+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(2 ; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2 ; 0)$ và $(0 ; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = -4$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = 4$.

3^o. Đồ thị : GV tự vẽ.

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng đã cho và đường cong $(\mathscr{C})$ là nghiệm của phương trình

$$m(x-2) + 4 = x + \frac{4}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad mx(x-2) + 4x = x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-2)x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Hai nhánh của $(\mathscr{C})$ nằm về hai bên của đường tiệm cận đứng $x = 0$. Đường thẳng đã cho cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của nó khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu, tức là

$$m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Câu 5.

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$, ta được

$$y = f(t) = -2t^2 + 2t - 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên đoạn $[-1 ; 1]$.
Ta có

$f'(t) = -4t + 2$;

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$; $f(-1) = -5$; $f(1) = -1$.

So sánh các giá trị đó, ta được

$$\max_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \text{ và } \min_{t\in[-1\,;\,1]} f(t) = f(-1) = -5.$$

Do đó

$$\max_{x\in\mathbf{R}} y = -\frac{1}{2} \text{ và } \min_{x\in\mathbf{R}} y = -5.$$

($y = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$; $y = -5 \Leftrightarrow \sin x = -1$; $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$; $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$).

Chương II

HÀM SỐ LUỸ THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về hàm số mũ và hàm số lôgarit. Đây là nội dung khá quen thuộc trong chương trình Toán ở trường THPT. Điều khác biệt là nội dung của nó bao gồm cả việc xây dựng các công thức đạo hàm và ứng dụng để khảo sát hai hàm số này. Trong khi đó các yêu cầu về kĩ năng giải các phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit được giảm nhẹ đáng kể.

Mục tiêu của chương này là :

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên, hữu tỉ và thực ; khái niệm lôgarit, các hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số luỹ thừa.

– Nắm vững các phép tính về luỹ thừa và lôgarit, các công thức tính đạo hàm, các tính chất và đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số luỹ thừa.

– Nắm vững các phương pháp giải phương trình mũ, phương trình lôgarit được nêu trong bài học, nắm được cách giải các hệ phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biến đổi và tính toán thành thạo các biểu thức luỹ thừa và lôgarit.

– Nhận biết và vẽ phác được đồ thị của hàm số mũ, hàm số lôgarit tuỳ theo cơ số, đồ thị của hàm số luỹ thừa tuỳ theo số mũ.

– Biết vận dụng các tính chất của hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số luỹ thừa để giải những bài toán đơn giản.

– Giải thành thạo phương trình mũ và lôgarit không quá phức tạp ;

– Giải được một số hệ phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

B. CẤU TẠO CỦA CHƯƠNG

Nội dung của chương này gồm 9 bài (§), dự kiến thực hiện trong 25 tiết, phân phối như sau :

§1. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ	(2 tiết)
Luyện tập	(1 tiết)
§2. Luỹ thừa với số mũ thực	(1 tiết)
Luyện tập	(1 tiết)
§3. Lôgarit	(3 tiết)
Luyện tập	(2 tiết)
§4. Số e và lôgarit tự nhiên	(1 tiết)
§5. Hàm số mũ và hàm số lôgarit	(3 tiết)
§6. Hàm số luỹ thừa	(1 tiết)
Luyện tập	(2 tiết)
§7. Phương trình mũ và phương trình lôgarit	(2 tiết)
§8. Hệ phương trình mũ và lôgarit	(1 tiết)
Luyện tập	(2 tiết)
§9. Sơ lược về bất phương trình mũ và lôgarit	(1 tiết)
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II	(2 tiết)

Ngoài ra trong chương có :

Các *bài đọc thêm* :

Tính gần đúng căn bậc *n* của một số thập phân bằng máy tính bỏ túi ;

Sử dụng máy tính bỏ túi để tính luỹ thừa và lôgarit ;

Sự tăng trưởng (hay suy giảm) mũ.

Các bài *em có biết* :

Về lịch sử phát minh lôgarit và bảng lôgarit.

Lôgarit trong một số đơn vị đo lường.

Ước tính dân số Việt Nam.

C. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý TRONG CHƯƠNG

1) Luỹ thừa với số mũ thực là một khái niệm khó trong chương trình Toán phổ thông. Để định nghĩa chính xác số a^{α} với a là một số dương và α là số vô tỉ tuỳ ý, người ta phải thực hiện các bước sau :

– Gọi (α_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim \alpha_n = \alpha$. Khi đó $\left(a^{\alpha_n}\right)$ là một dãy số xác định và có giới hạn (hữu hạn), tức là tồn tại $\lim\left(a^{\alpha_n}\right)$.

– Giới hạn $\lim a^{\alpha_n}$ không phụ thuộc vào việc chọn dãy số (α_n), nghĩa là : Nếu (β_n) là một dãy số hữu tỉ tuỳ ý, thoả mãn $\lim \beta_n = \alpha$ thì $\lim a^{\beta_n} = \lim a^{\alpha_n}$.

Tuy nhiên trong khuôn khổ chương trình Toán phổ thông, không thể và cũng không nên trình bày cặn kẽ các vấn đề đó. Vì thế, các tác giả chỉ trình bày những nét cơ bản nhằm giúp học sinh hiểu được một cách đại thể về khái niệm này. Từ đó, tính chất và các phép tính về luỹ thừa với số mũ thực tuỳ ý cũng chỉ có thể giới thiệu sơ lược, phần lớn là thừa nhận. Yêu cầu chủ yếu đối với học sinh là nắm vững các tính chất và vận dụng tốt các quy tắc tính toán về luỹ thừa. Điều đó sẽ là cơ sở rất tốt cho học sinh hiểu khái niệm và nắm vững các tính chất của lôgarit cũng như hình thành các kĩ năng thực hiện các phép tính về lôgarit.

2) Trong chương này, các tác giả đã cố gắng đưa vào khá nhiều vấn đề có tính thực tiễn. Đó là điểm khác biệt khá lớn so với các SGK trước đây. Chẳng hạn, công thức *lãi kép*, vấn đề tăng dân số và nhiều vấn đề khác trong Vật lí, Hoá học, Sinh học, ... có liên quan đến luỹ thừa và lôgarit. Điều đó là cần thiết và rất có ích, nhưng cũng nảy sinh những khó khăn nhất định trong giảng dạy. Các ví dụ và bài tập có nội dung thực tiễn thường dài dòng về diễn đạt và phức tạp về tính toán, nhất là thường phải tính gần đúng. Các tác giả đã cố gắng đơn giản hoá rất nhiều, song khó tránh khỏi các bài tập đòi hỏi học sinh mất khá nhiều thời gian khi phải tính toán với những số có nhiều chữ số trước và sau dấu phẩy mà không có máy tính bỏ túi. Tuy nhiên, khó khăn đó có thể được khắc phục trong các giờ lên lớp bằng cách sử dụng đồ dùng dạy học. Các giáo viên cần chú ý đặc điểm này để chuẩn bị đồ dùng dạy học cho phù hợp.

3) Vấn đề phương trình, hệ phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit có yêu cầu nhẹ nhàng hơn nhiều so với trước đây, mặc dù nội dung cơ bản có vẻ như không khác mấy. Điều đó thể hiện cụ thể như sau :

– Không xét các phương trình và bất phương trình chứa tham số. Điều này sẽ làm cho yêu cầu về kĩ năng giải bài tập của học sinh được giảm nhẹ rất nhiều. Bởi vì khi giải các phương trình hay bất phương trình mũ và lôgarit chứa tham số, học sinh thường phải xét các điều kiện cho cơ số, dẫn đến sự biện luận khá phức tạp.

– Không xét các phương trình và bất phương trình mũ mà ẩn số có mặt đồng thời ở cả cơ số lẫn số mũ. Điều này nhằm tránh các trường hợp còn có các ý kiến chưa thống nhất về nghiệm của phương trình. Chẳng hạn, đối với phương trình $x^{x^2+1} = 1$, có người vẫn chấp nhận $x = -1$ là một nghiệm, trong khi theo quan điểm của các tác giả thì điều kiện xác định của phương trình là $x > 0$, do đó giá trị $x = -1$ không phải là nghiệm.

– Không xét các phương trình và bất phương trình lôgarit mà ẩn số có mặt đồng thời ở cả cơ số lẫn trong biểu thức lấy lôgarit. Trong một số ví dụ và bài tập, các tác giả có đưa vào một số bài toán về phương trình, trong đó có chứa ẩn nằm trong cơ số của lôgarit, chẳng hạn như $\log_x 2$. Tuy nhiên đó chỉ là cách viết khác đi của $\dfrac{1}{\log_2 x}$ (với $0 < x \neq 1$) nên không gây ra điều gì quá phức tạp cho học sinh).

– Chỉ yêu cầu học sinh nắm được các phương pháp và giải được các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình có các dạng nêu trong bài học. Không xét các phương trình và bất phương trình đòi hỏi biến đổi các biểu thức luỹ thừa và lôgarit quá phức tạp.

D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu được sự mở rộng định nghĩa luỹ thừa của một số từ số mũ nguyên dương đến số mũ nguyên và số mũ hữu tỉ thông qua căn số.

– Hiểu rõ các định nghĩa và nhớ các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ và các tính chất của căn số.

Kĩ năng

Giúp học sinh biết vận dụng định nghĩa và tính chất của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ để thực hiện các phép tính.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm luỹ thừa với số mũ nguyên âm được định nghĩa dựa trên định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên dương. Định nghĩa này là tự nhiên, phù hợp với các công thức đã biết, đặc biệt là công thức :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (} m, n \text{ nguyên dương, } m > n).$$

Vì vậy cần nhắc lại cho học sinh định nghĩa và các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

2. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ cần phải được định nghĩa sao cho nó có tất cả các tính chất như của luỹ thừa với số mũ nguyên. Khi đó, nói riêng, luỹ thừa bậc n của số $a^{\frac{m}{n}}$ cần phải bằng a^m ; thật vậy, nếu tính chất $(a^p)^q = a^{pq}$ được thoả mãn thì $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}.n} = a^m$. Điều đó có nghĩa là $a^{\frac{m}{n}}$ cần phải bằng căn bậc n của số a^m $\left(\text{tức là } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\right)$.

3. Cần nhấn mạnh điều kiện về cơ số của luỹ thừa với số mũ 0, số mũ nguyên âm và số mũ không nguyên. Các điều kiện này đã được đề cập ngay ở trong các định nghĩa luỹ thừa. Có thể giải thích cho học sinh (nếu là lớp khá) tại sao lại có những điều kiện ấy. Chẳng hạn, về luỹ thừa a^r với số mũ hữu tỉ r : Để định nghĩa a^r không phụ thuộc vào phân số $\frac{m}{n}$ biểu diễn số hữu tỉ r và luỹ thừa a^r có đầy đủ các tính chất như của luỹ thừa với số mũ nguyên, thì phải có điều kiện $a > 0$. Giả sử $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ cũng được định nghĩa đối với cả $a < 0$. Khi đó có thể xảy ra những mâu thuẫn, chẳng hạn, một mặt

$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$; mặt khác, do $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ nên $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2.$

Hơn nữa, tính chất $(a^r)^s = a^{rs}$ không thoả mãn ; chẳng hạn $\left((-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

còn $(-1)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = (-1)^1 = -1$. Bởi vậy, cần phải có điều kiện cơ số dương cho luỹ thừa với số mũ không nguyên.

4. Đặc biệt lưu ý đến cơ số 10 (cơ số trong hệ đếm thập phân). Giới thiệu vài ứng dụng đơn giản của luỹ thừa với số mũ nguyên của cơ số 10.

5. Tuy SGK không nêu lại những tính chất của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ thành bảng công thức, song trong quá trình giảng dạy, mỗi khi có cơ hội, cần cho học sinh nhắc lại những tính chất này bằng cách chuyển từ tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên sang. Dựa vào tính chất của căn thức, ta có thể chứng minh được các tính chất đó.

III – GỢI Ý DẠY HỌC

*** Dự kiến phân phối thời gian :** 2 tiết.

– Luỹ thừa với số mũ nguyên : 1 tiết.

– Căn bậc n và luỹ thừa với số mũ hữu tỉ : 1 tiết.

*** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Ôn lại định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Giải

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

$\left(-\sqrt{3}\right)^5 = \left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right).\left(-\sqrt{3}\right) = -9\sqrt{3}.$

$0^4 = 0.0.0.0 = 0.$

H2 *Mục đích :* Dùng định nghĩa luỹ thừa với số mũ nguyên âm và tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương để kiểm tra một quy tắc tính toán. Từ đó học sinh biết cách kiểm tra các quy tắc còn lại (nếu muốn).

Giải

– Khi $n = 0$, công thức hiển nhiên đúng.

– Với $m > 0$, $n < 0$ và $m > |n|$ thì

$$a^m . a^n = a^m . \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}.$$

Lưu ý rằng, m và $-n$ là những số nguyên dương, từ $m > |n|$ ta còn có $m - (-n)$ cũng là một số nguyên dương.

H3 *Mục đích :* Áp dụng tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên để kiểm tra bất đẳng thức.

Giải

Ta có $0 < 0{,}99 < 1$ nên $(0{,}99)^2 < 1^2 = 1$, do đó $(0{,}99)^2.99 < 99$.

Ta có $0 < 0{,}99 < 1$ nên $(0{,}99)^{-1} > 1^{-1} = 1$, do đó $(0{,}99)^{-1}. 99 > 99$.

Cũng có thể biến đổi

$$(0{,}99)^{-1}.99 = \frac{99}{0{,}99} = 100 > 99.$$

H4 *Mục đích :* Chứng minh một số tính chất của căn bậc n xuất phát từ định nghĩa và dựa vào tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Giải

a) Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$. Khi đó ta có $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, vô lí.

Giả sử $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Khi đó, do n là một số tự nhiên lẻ, nên theo hệ quả 2 ta có $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n > \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$, vô lí.

Vậy $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ với n là số nguyên lẻ.

b) Chứng minh bằng phản chứng, tương tự như câu a).

Lưu ý rằng, với $a > 0$, $b > 0$, ta có $\sqrt[n]{a} > 0$ và $\sqrt[n]{b} > 0$ với mọi số nguyên dương n.

• Để có đủ thời gian dạy căn bậc n và số mũ hữu tỉ trong một tiết có thể tiến hành bài giảng như sau :

– Giới thiệu định nghĩa căn bậc n.

– Nêu ví dụ để minh hoạ và khắc sâu hai khẳng định sau định nghĩa căn bậc n. Hai khẳng định này được chứng minh trong phần bổ sung kiến thức.

– Đối với các tính chất của căn, có thể để lại tất cả các chứng minh mà chỉ nêu ví dụ minh hoạ (kể cả $\boxed{\textbf{H4}}$). Tuy nhiên, đối với những lớp HS khá giỏi, có thể cho HS chứng minh một vài tính chất của căn ; chẳng hạn, có thể chứng minh tính chất 4) như sau : Theo định nghĩa của căn và quy tắc tính luỹ thừa với số mũ nguyên dương, ta có

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n} = \left[\sqrt[n]{a}\right]^{n} = a,\ \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a.$$

Vậy $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}$, từ đó suy ra $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

– Giới thiệu định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ, nhấn mạnh điều kiện về cơ số. Nêu một số ví dụ tính toán có áp dụng các tính chất của luỹ thừa này.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Sai ; d) Sai.

2. Điều kiện C.

3. $7^{-1}.14 = \dfrac{14}{7} = 2$; $\dfrac{4}{3^{-2}} = 4.3^2 = 36$;

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}\ ;\quad \frac{(-18)^2.5}{15^2.3} = \frac{18^2.5}{5^2.3^3} = \frac{2^2.5.3^4}{5^2.3^3} = \frac{2^2.3}{5} = \frac{12}{5}.$$

4. a) $81^{-0,75} + \left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} = \left((3)^4\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)^{-\frac{3}{5}}$

$$=(3)^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{27}+5-8=\frac{1}{27}-3=-\frac{80}{27}.$$

b) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}-(-2)^{-2}.64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}}+(9^0)^2$

$$=\left(10^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}.\left(2^6\right)^{\frac{2}{3}}-\left(2^3\right)^{-\frac{4}{3}}+1$$

$$=10-2^2-2^{-4}+1=7-\frac{1}{16}=\frac{111}{16}.$$

c) $27^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}\bullet-25^{0{,}5}$

$$=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}+\left(2^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}-\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}=3^2+2^3-5=12.$$

d) $(-0{,}5)^{-4}-625^{0{,}25}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}+19(-3)^{-3}$

$$=\left((-2)^{-1}\right)^{-4}-\left(5^4\right)^{\frac{1}{4}}-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{19}{-27}$$

$$=2^4-5-\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}-\frac{19}{27}=11-\frac{8}{27}-\frac{19}{27}=10.$$

5. a) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\dfrac{a^3b^2}{a^2b}=ab.$

b) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(a+1)}$

$$=(1+a)-(1-a)=2a.$$

6. a) Ta có $\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8$; $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=3^2=9$.

Với $a < 0 < b$ và n là một số tự nhiên lẻ, ta có $a^n < 0$ và $b^n > 0$, do đó $a^n < b^n$.

Với $a = 0$ hoặc $b = 0$ và n là một số tự nhiên lẻ, ta vẫn có $a^n < b^n$.

Với $a < b < 0$, tức là $-a > -b > 0$ và n là một số tự nhiên lẻ, ta có

$$(-a)^n > (-b)^n \text{ hay } -a^n > -b^n \text{ suy ra } a^n < b^n.$$

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là nhằm rèn luyện kĩ năng tính toán với luỹ thừa nguyên và luỹ thừa hữu tỉ, đặc biệt là tính toán với các biểu thức có chứa căn thức.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

8. a) $$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$$

$$=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{b}.$$

b) $$\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$$

$$=2\sqrt[3]{ab}.$$

c) $$\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2:\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=1.$$

d) $$\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}.a^{\frac{1}{4}}+1=\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a}+1)}\cdot\frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)}.\sqrt[4]{a}+1$$

$$=\sqrt{a}-1+1=\sqrt{a}.$$

9. Theo tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên dương, ta có

$$\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Do đó theo định nghĩa căn bậc n của một số, ta có

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.$$

10. a) *Cách 1.* Ta có

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{16-12} = 4.$$

Hơn nữa, vì $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} > 0$ nên $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

Cách 2. Ta có $4 \pm 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \pm 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} \pm 1\right)^2$

nên $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right) = 2$.

b) *Cách 1.* Đặt $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Ta cần chứng minh $x = 3$.

Ta có $x^3 = \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3$

$$= 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.x$$

$$= 18 + 3\sqrt[3]{81-80}.x = 18+3x. \text{ Do đó}$$

$$x^3 - 3x - 18 = 0. \ (*)$$

Để ý rằng $x^3 - 3x - 18 = (x-3)\left(x^2+3x+6\right)$ nên từ phương trình (*) suy ra $x = 3$.

Cách 2. Ta có $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 1$, nên $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$ nếu $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ và $\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 1 = 0$, tức là

$$\begin{cases} \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & (1) \\ \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} & (2) \end{cases}$$

Ta chứng minh đẳng thức (1). Ta có

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{72+32\sqrt{5}}{8} = 9+4\sqrt{5} = 9+\sqrt{80}.$$ Từ đó suy ra (1).

Đẳng thức (2) được chứng minh tương tự. Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

11. a) Ta có : $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} = 3^{-\frac{5}{12}}$ và

$$\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3^{-1}\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt[3]{3^{-1}3^{-\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{-\frac{5}{12}}.$$

Vậy $\left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$.

b) Ta có : $3^{600} = \left(3^3\right)^{200} = 27^{200}$ và

$$5^{400} = \left(5^2\right)^{200} = 25^{200}.$$

Vậy $3^{600} > 5^{400}$.

c) Ta có : $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = 2^{\frac{5}{7}}$;

$$\sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}} = 2^{\frac{5}{7}}.$$

Vậy $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2}.2^{\frac{3}{14}}$.

d) Ta có : $7^{30} = \left(7^3\right)^{10} = 343^{10}$;

$$4^{40} = \left(4^4\right)^{10} = 256^{10}.$$

Vậy $7^{30} > 4^{40}$.

§2. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu được cách định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ thông qua giới hạn, thấy được sự mở rộng tự nhiên của định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ sang định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ.

– Nhớ các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biết vận dụng các tính chất của luỹ thừa để tính toán.

– Vận dụng được công thức lãi kép để giải một số bài tập thực tiễn.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ a^{α} được định nghĩa là giới hạn của dãy số $\left(a^{r_n}\right)$, trong đó (r_n) là một dãy số hữu tỉ hội tụ về α. Để định nghĩa được như vậy, ta cần chứng minh hai khẳng định sau :

– Dãy $\left(a^{r_n}\right)$ hội tụ ;

– Nếu (s_n) là một dãy số hữu tỉ bất kì cũng hội tụ về α thì

$$\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{s_n}.$$

Việc chứng minh hai khẳng định trên không quá phức tạp, sẽ được trình bày trong phần bổ sung kiến thức. Tuy nhiên đối với học sinh phổ thông, không đủ cơ sở để chứng minh hai khẳng định đó. Vì vậy chỉ cần cho học sinh nắm được sơ lược ý tưởng xây dựng khái niệm này. Yêu cầu chủ yếu của tiết này là cho học sinh tính toán bằng cách áp dụng các tính chất của luỹ thừa và tính gần đúng bằng máy tính.

2. Trong SGK không trình bày chứng minh các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực (xem phần bổ sung kiến thức). Đối với học sinh phổ thông, chỉ cần cho học sinh nhớ và áp dụng được các tính chất của phép toán của luỹ thừa để tính toán.

   Lưu ý rằng các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực tương tự như các tính chất của luỹ thừa với số mũ nguyên. Chẳng hạn, ta đã có $a^m.a^n = a^{m+n}$ với m, n là những số nguyên thì bây giờ cũng có $a^x.a^y = a^{x+y}$ với x, y là những số thực.

3. Trước đây, HS đã quá quen rằng luỹ thừa với số mũ nguyên dương không có đòi hỏi gì về cơ số. Giờ đây, đối với từng loại số mũ, có những đòi hỏi khác nhau về cơ số. Do đó giáo viên cần có những tổng kết, lưu ý đặc biệt về cơ số để học sinh không mắc phải sai lầm khi vận dụng.

4. Công thức lãi kép có liên quan chặt chẽ với khái niệm luỹ thừa, được sử dụng rộng rãi không những trong lĩnh vực tiền tệ mà còn được sử dụng trong các lĩnh vực khác của tự nhiên và xã hội.

III – GỢI Ý DẠY HỌC

* ***Dự kiến phân phối thời gian :*** 1 tiết lí thuyết.

* ***Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Áp dụng tính chất của luỹ thừa với số mũ thực để tính toán.

Giải

$$\left(2^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3}.2^{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 2^{\frac{3\sqrt{5}-3}{1+\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 2^{\frac{9\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\left(\sqrt{5}+1\right)}} = 2^{\frac{9}{2}} = 16\sqrt{2}.$$

H2 *Mục đích :* Cho HS hiểu và vận dụng công thức lãi kép.

Giải

Sau 5 năm mới rút lãi thì người đầu tư thu được một số tiền là

$$100.(1+0,13)^5 - 100 \approx 84,244 \text{ (triệu đồng).}$$

• Để có đủ thời gian giảng dạy bài này trong 1 tiết, có thể tiến hành như sau :

– Đối với mục 1, giáo viên giới thiệu nhanh khái niệm luỹ thừa với số mũ vô tỉ và tính chất của luỹ thừa với số mũ thực. Cho học sinh nắm được khái niệm qua ví dụ 1 và áp dụng các tính chất qua ví dụ 2 và $\boxed{\textbf{H1}}$.

– Đối với mục 2, giáo viên cho học sinh đọc trước nội dung phần này ở nhà. Trên lớp giáo viên có thể bắt đầu bằng ví dụ 3 vì công thức lãi kép (1), học sinh đã được làm quen ở lớp 11 (chương Dãy số).

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

12. Điều kiện B.

13. Điều kiện C.

14. Điều kiện $0 < a < 1$.

15. $\left(0,5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 0,5^{\sqrt{16}} = 0,5^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}.$

$2^{2-3\sqrt{5}}.8^{\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}}.2^{3\sqrt{5}} = 2^{2-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}} = 2^2 = 4.$

$3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 9^{\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}} : 3^{2\sqrt[3]{2}} = 3^{1+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}} = 3^1 = 3.$

16. $\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3}.a^{4-\sqrt{5}}} = \dfrac{a^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}{a^{\sqrt{5}-3+4-\sqrt{5}}} = \dfrac{a^2}{a^1} = a.$

$a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}}\left(a^{-1}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}}.a^{1-\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a.$

17. Sau 5 năm người gửi thu được một số tiền (cả vốn lẫn lãi) là

$$15(1 + 0,0756)^5 \approx 21,59 \text{ (triệu đồng)}.$$

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về định nghĩa và tính chất của luỹ thừa với số mũ thực

1) Sau khi định nghĩa và chứng minh các tính chất của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của một số dương $a \neq 1$, ta đã định nghĩa a^{α} với α vô tỉ như sau (ở đây

chỉ trình bày cho trường hợp $a > 1$ vì khi $0 < a < 1$ có thể đưa về trường hợp $a > 1$ bằng cách xét $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\alpha}}$) :

• Lấy dãy số hữu tỉ tăng (r_n) sao cho $\lim r_n = \alpha$ rồi xét dãy luỹ thừa $\left(a^{r_n}\right)$ thì ta thấy

– Dãy $\left(a^{r_n}\right)$ là một dãy tăng ;

– Dãy $\left(a^{r_n}\right)$ bị chặn trên (chẳng hạn bởi a^M, M là một số hữu tỉ tuỳ ý lớn hơn α).

Do dãy $\left(a^{r_n}\right)$ tăng và bị chặn trên trong $\mathbb{R}$, (mà $\mathbb{R}$ là một trường sắp thứ tự đầy) nên dãy đó có giới hạn là một số thực nào đó.

• Nếu xét một dãy số hữu tỉ tăng (r'_n) sao cho $\lim r'_n = \alpha$ thì có thể chứng minh được $\lim a^{r'_n} = \lim a^{r_n}$.

Vậy ta có thể định nghĩa $a^{\alpha} = \lim a^{r_n}$ trong đó (r_n) là một dãy số hữu tỉ tăng sao cho $\lim r_n = \alpha$.

2) Từ định nghĩa đó, khi α là số vô tỉ, có thể chứng minh được rằng

– Với các số hữu tỉ r, s sao cho $r < \alpha < s$ thì $a^r < a^{\alpha} < a^s$;

– Với dãy số hữu tỉ tuỳ ý (r_n) sao cho $\lim r_n = \alpha$ thì tồn tại giới hạn $\lim a^{r_n}$ và $\lim a^{r_n} = a^{\alpha}$.

3) Như thế, ta đã xây dựng được hàm số liên tục : $x \mapsto a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và dễ dàng chứng minh được rằng các tính chất quen thuộc của luỹ thừa với số mũ hữu tỉ vẫn còn đúng cho luỹ thừa với số mũ thực tuỳ ý. Chẳng hạn, để chứng minh $a^{x+y} = a^x.a^y$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta lấy các dãy số hữu tỉ (r_n), (s_n) sao cho $\lim r_n = x$, $\lim s_n = y$, khi đó rõ ràng dãy $(r_n + s_n)$ là dãy số hữu tỉ thoả mãn $\lim(r_n + s_n) = x + y$ và ta có

$$a^{x+y} = \lim a^{r_n+s_n} = \lim a^{r_n}.\lim a^{s_n} = a^x.a^y.$$

Chú ý : Có thể nói rằng cách định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỉ của số dương $a \neq 1$ đã trình bày là nhằm xây dựng một hàm số liên tục $x \mapsto a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ mà với x hữu tỉ thì được luỹ thừa với số mũ hữu tỉ đã biết. Người ta nói vắn tắt điều đó là thác triển liên tục hàm số $x \mapsto a^x$ từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{R}$.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là rèn luyện cho HS kĩ năng :

- Sử dụng tính chất của luỹ thừa để tính toán với các biểu thức có chứa luỹ thừa.
- Giải một số bài toán thực tế liên quan đến công thức lãi kép.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

18. a) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}} = \left(x^2.x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(x^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}.$

b) $\sqrt[5]{\frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}} = \left(\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{15}}.$

c) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}} = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$

d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} : a^{\frac{11}{16}} = \left(a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}.a^{\frac{1}{16}}\right) : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{15}{16}} : a^{\frac{11}{16}} = a^{\frac{1}{4}}.$

19. a) $a^{-2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1} = a^{-2\sqrt{2}}\left(a^{\sqrt{2}+1}\right)^{\sqrt{2}+1} = a^{-2\sqrt{2}}a^{3+2\sqrt{2}} = a^3.$

b) $\left(\dfrac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}.\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}=\dfrac{a^{3+\sqrt{3}}}{b^{2}}.\dfrac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}}=a^{2}.$

c) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^{2}}+1=\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}+\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^{2}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^{2}}$

$$=\frac{2a^{2\sqrt{2}}-2a^{\sqrt{2}}b^{\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^{2}}=\frac{2a^{\sqrt{2}}\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)}{\left(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}\right)^{2}}=\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}}}.$$

d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^{2}-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}=\sqrt{x^{2\pi}+y^{2\pi}+2x^{\pi}y^{\pi}-4x^{\pi}y^{\pi}}$

$$=\sqrt{x^{2\pi}+y^{2\pi}-2x^{\pi}y^{\pi}}=\sqrt{\left(x^{\pi}-y^{\pi}\right)^{2}}=\left|x^{\pi}-y^{\pi}\right|.$$

20. a) $\frac{1}{2}\left(a^{\alpha}+a^{-\alpha}\right)=1\Leftrightarrow a^{\alpha}+a^{-\alpha}-2=0$

$$\Leftrightarrow\left(a^{\frac{\alpha}{2}}-a^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^{2}=0\quad\Leftrightarrow a^{\frac{\alpha}{2}}=a^{-\frac{\alpha}{2}}.(*)$$

– Nếu $a\neq 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow \alpha=0.$

– Nếu $a=1$ thì (*) $\Leftrightarrow$ α là số thực tuỳ ý.

b) $3^{|\alpha|}<27\Leftrightarrow 3^{|\alpha|}<3^{3}\Leftrightarrow|\alpha|<3\Leftrightarrow -3<\alpha<3.$

21. a) Điều kiện $x\geq 0$.

Đặt $t=\sqrt[4]{x}$ $(t\geq 0)$, ta được phương trình $t^{2}+t=2.$

Ta có $t^{2}+t=2\Leftrightarrow t^{2}+t-2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-2\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Do đó $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

b) Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt[4]{x}$ $(t \geq 0)$, ta được phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Ta có $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2. \end{array}\right.$ Do đó

$$\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = 1 \\ \sqrt[4]{x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 16. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$; $x = 16$.

22. a) $x^4 < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$.

b) $x^{11} \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[11]{7}$.

c) $x^{10} > 2 \Leftrightarrow |x| > \sqrt[10]{2} \Leftrightarrow x < -\sqrt[10]{2}$ hoặc $x > \sqrt[10]{2}$.

d) $x^3 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{5}$.

§3. LÔGARIT (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu định nghĩa lôgarit theo cơ số dương khác 1 dựa vào khái niệm luỹ thừa của chính cơ số đó.

– Thấy được các phép toán nâng lên luỹ thừa và lấy lôgarit theo cùng một cơ số là hai phép toán ngược của nhau.

– Hiểu rõ các tính chất và công thức đổi cơ số của lôgarit.

– Thấy được một vài ứng dụng của lôgarit thập phân trong tính toán.

Kĩ năng

Giúp học sinh vận dụng được định nghĩa, các tính chất và công thức đổi cơ số của lôgarit để giải các bài tập.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Những lưu ý về luỹ thừa trong SGK trước khi định nghĩa lôgarit nhằm khẳng định rằng định nghĩa này là hợp lí, tức là khi cho trước số dương a khác 1 và số dương b thì luôn tồn tại duy nhất $\log_a b$.
2. Để giúp học sinh dễ nhớ và vận dụng tốt các tính chất của lôgarit, SGK đã chia các tính chất của lôgarit thành ba nhóm :

   – Nhóm 1 gồm các tính chất đơn giản, trực tiếp suy ra từ định nghĩa lôgarit.

   – Nhóm 2 gồm những tính chất dùng để so sánh hai lôgarit.

   – Nhóm 3 gồm những tính chất được coi như những quy tắc tính lôgarit.
3. Công thức đổi cơ số của lôgarit cũng là một tính chất của lôgarit, song được tách riêng nhằm nhấn mạnh giá trị ứng dụng nó trong tính toán.
4. Khác với phép chứng minh các tính chất của luỹ thừa với số mũ thực, phép chứng minh các tính chất của lôgarit rất đơn giản, phù hợp với sự tiếp thu của học sinh. Vì vậy, giáo viên nên gợi ý để học sinh tự chứng minh các tính chất của lôgarit.
5. Cần quan tâm đến ứng dụng của lôgarit thập phân trong tính toán.

III – GỢI Ý DẠY HỌC

** **Dự kiến phân phối thời gian :*** 3 tiết.

– Tiết 1, dạy định nghĩa và các nhóm tính chất 1 và 2 (hết ví dụ 3).

– Tiết 2, dạy nhóm tính chất 3 và công thức đổi cơ số của lôgarit.

– Tiết 3, dạy lôgarit thập phân và ứng dụng.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\text{H1}}$ *Mục đích :* Áp dụng tính chất đơn giản của lôgarit để tính được giá trị của các biểu thức lôgarit và các biểu thức luỹ thừa.

Giải

a) $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$; $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log_{10} 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$.

b) $9^{\log_3 12} = (3^2)^{\log_3 12} = 3^{2\log_3 12} = (3^{\log_3 12})^2 = 12^2 = 144$;

$0,125^{\log_{0,5} 1} = 0,125^0 = 1$.

H2 *Mục đích :* Củng cố khái niệm lôgarit .

Giải

$\log_3(1-x) = 2 \Leftrightarrow 1 - x = 3^2 \Leftrightarrow x = 1 - 3^2 \Leftrightarrow x = -8$.

Lưu ý : Điều kiện để $1 - x$ dương đã được thể hiện trong $1 - x = 3^2$.

H3 *Mục đích :* Vận dụng tính chất của luỹ thừa và định nghĩa lôgarit để chứng minh tính chất của lôgarit.

Giải

Vì $0 < a < 1$ nên theo những lưu ý của mục 1 và định nghĩa lôgarit ta có

$$\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a b} < a^{\log_a c} \Leftrightarrow b < c.$$

H4 *Mục đích :* Lưu ý HS cần phải chú ý đến điều kiện xác định của các biểu thức lôgarit khi vận dụng các tính chất của lôgarit.

Giải

Khẳng định đó là sai vì với mọi x thuộc $(-\infty ; -1)$, biểu thức ở vế trái có nghĩa còn các biểu thức ở vế phải không có nghĩa.

H5 *Mục đích :* Vận dụng các quy tắc tính lôgarit.

Giải

$$\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_5 12 + \log_5 50$$

$$= \frac{1}{2}\log_5 3 - \frac{1}{2}\log_5 4 - \frac{1}{2}\log_5 3 + 2\log_5 5 + \log_5 2$$

$$= -\log_5 2 + 2 + \log_5 2 = 2.$$

H6 *Mục đích :* Vận dụng công thức đổi cơ số và định nghĩa của lôgarit.

Giải

Ta có $\log_3 x + \log_9 x = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x = \frac{3}{2}\log_3 x$. Do đó

$$\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

H7 *Mục đích :* Rèn luyện kĩ năng giải toán tổng hợp, đặc biệt kĩ năng sử dụng phương pháp "lôgarit hoá".

Giải

Cách 1. Số các chữ số của 2^{1000} là :

$$\left[\log 2^{1000}\right] + 1 = [1000\log 2] + 1 = 301 + 1 = 302.$$

Cách 2. Ta có $0,301 < \log 2 < 0,302$ nên suy ra

$$301 < \log 2^{1000} < 302. \qquad (1)$$

Theo tính chất của luỹ thừa, từ (1) suy ra

$$10^{301} < 2^{1000} < 10^{302}. \qquad (2)$$

Vì 10^n là số nhỏ nhất có $n + 1$ chữ số nên từ (2) suy ra 2^{1000} là một số có 302 chữ số khi viết trong hệ thập phân.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

23. Khẳng định d).

24. Khẳng định đúng : b) ; khẳng định sai : a), c), d).

25. a) $\log_a x + \log_a y$, điều kiện : $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$.

b) $\log_a \frac{x}{y}$; điều kiện : $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$.

c) $\alpha \log_a x$; điều kiện : $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

d) b ; điều kiện : $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

26. a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$.

27. $\log_3 3 = 1;\ \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4;\ \ \log_3 1 = 0\,;\ \ \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2;$

$$\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3};\ \ \log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}.$$

28. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3;\ \ \log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1\ ;$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 3;\ \ \log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2.$$

29. $3^{\log_3 18} = 18\ ;\ \ 3^{5\log_3 2} = 3^{\log_3 2^5} = 2^5 = 32\ ;$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{-3}\right)^{\log_2 5} = 2^{(-3)\log_2 5} = 2^{\log_2 5^{-3}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}\ ;$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 2^5} = 2^5 = 32.$$

30. a) $\log_5 x = 4 \Leftrightarrow x = 5^4 = 625.$

b) $\log_2 (5 - x) = 3 \Leftrightarrow 5 - x = 2^3 \Leftrightarrow x = -3\ ;$

c) $\log_3 (x + 2) = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 3^3 \Leftrightarrow x = 25\ ;$

d) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x) = -1 \Leftrightarrow 0,5 + x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = 6 - 0,5 = 5,5.$

31. $\log_7 25 = \dfrac{\log 25}{\log 7} \approx 1,65.$

$$\log_5 8 = \frac{\log 8}{\log 5} \approx 1,29.$$

$$\log_9 0,75 = \frac{\log 0,75}{\log 9} \approx -0,13.$$

$$\log_{0,75} 1,13 = \frac{\log 1,13}{\log 0,75} \approx -0,42.$$

LUYỆN TẬP (2 tiết)

Mục đích của hai tiết luyện tập này là rèn luyện cho HS kĩ năng :

- Sử dụng định nghĩa lôgarit để giải các bài toán về sự tồn tại lôgarit và tìm cơ số của lôgarit.
- Sử dụng các tính chất của lôgarit để tính toán với các biểu thức chứa lôgarit.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

32. a) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8\left(\frac{12}{15}.20\right)$

$$= \log_8 4^2 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}.$$

b) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21} = \log_7\left(\frac{6}{14.21}\right) = \log_7 7^{-2} = -2.$

c) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9} = \frac{\log_5 3}{2\log_5 3} = \frac{1}{2}.$

d) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 8^{\log_2 3} = 6^{\log_6 5^2} + 10^{\log_{10} 5} - 2^{\log_2 3^3}$

$$= 5^2 + 5 - 3^3 = 3.$$

33. a) Ta có $\log_3 4 > 1$ và $\log_4 \frac{1}{3} < 0$, suy ra $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$.

b) Ta có $\log_6 1{,}1 > 0$ nên $3^{\log_6 1{,}1} > 3^0 = 1$ (vì $3 > 1$) và $\log_6 0{,}99 < 0$ nên $7^{\log_6 0{,}99} < 7^0 = 1$ (vì $7 > 1$). Từ đó ta suy ra $3^{\log_6 1{,}1} > 1 > 7^{\log_6 0{,}99}$.

34. a) $\log 2 + \log 3 = \log 6 > \log 5$.

b) $\log 12 - \log 5 = \log\frac{12}{5} = \log 2{,}4 < \log 7$.

c) $3\log 2 + \log 3 = \log(2^3 . 3) = \log 24 < \log 25 = 2\log 5$.

d) $1 + 2\log 3 = \log 10 + \log 3^2 = \log(10.9) = \log 90 > \log 27$;

(hoặc $\log 27 = 3\log 3 = 2\log 3 + \log 3 < 2\log 3 + \log 10 = 2\log 3 + 1$).

35. a) $\log_a x = \log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right) = 3 + 2\log_a b + \dfrac{1}{2}\log_a c$

$$= 3 + 2.3 + \frac{1}{2}(-2) = 8.$$

b) $\log_a x = \log_a\left(\dfrac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^3}\right) = 4 + \dfrac{1}{3}\log_a b - 3\log_a c = 4 + \dfrac{1}{3}.3 - 3.(-2) = 11.$

36. a) $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$

$$= \log_3 a^4 + \log_3 b^7 = \log_3\left(a^4b^7\right) \Rightarrow x = a^4b^7.$$

b) $\log_5 x = 2\log_5 a - 3\log_5 b = \log_5\dfrac{a^2}{b^3} \Rightarrow x = \dfrac{a^2}{b^3}.$

37. a) $\log_{\sqrt{3}} 50 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 50 = 2\log_3 50 = 2\log_3 10 + 2\log_3 5$

$$= 2\log_3 10 + 2\log_3\frac{15}{3} = 2\log_3 10 + 2(\log_3 15 - 1)$$

$$= 2\beta + 2(\alpha - 1) = 2\alpha + 2\beta - 2.$$

b) $\log_4 1250 = \dfrac{1}{2}\log_2\left(5^4.2\right) = 2\log_2 5 + \dfrac{1}{2} = 2\alpha + \dfrac{1}{2}.$

38. a) $\log\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2}\log 4 + 4\log\sqrt{2} = -\log 8 + \log 2 + \log 4 = -\log 8 + \log 8 = 0.$

b) $\log\dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{2}\log 36 + \dfrac{3}{2}\log\dfrac{9}{2} = \log\left(\dfrac{4}{9}.6.\sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^3}\right) = \log\left(\dfrac{4}{9}.6.\dfrac{3^3}{2}.\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$

$$= \log\left(\frac{4}{9}.3^4.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \log(18\sqrt{2}).$$

c) $\log 72 - 2\log\dfrac{27}{256} + \log\sqrt{108} = \log(2^3.3^2) - \log\dfrac{3^6}{2^{16}} + \log\sqrt{2^2.3^3}$

$$= \log\left(2^3.3^2.\frac{2^{16}}{3^6}.2.3^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \log\left(2^{20}.3^{-\frac{5}{2}}\right) = 20\log 2 - \frac{5}{2}\log 3.$$

d) $\log\frac{1}{8} - \log 0{,}375 + 2\log\sqrt{0{,}5625}$

$= \log 2^{-3} - \log(0{,}5^3.3) + 2\log\sqrt{0{,}5^4.3^2}$

$= \log 2^{-3} - \log 2^{-3} - \log 3 + 2\log 2^{-2} + 2\log 3$

$= \log 2^{-4} + \log 3 = \log\frac{3}{16}.$

39. a) $\log_x 27 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3.$

b) $\log_x \frac{1}{7} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \frac{1}{7} = 7^{-1} \Leftrightarrow x = 7.$

c) $\log_x \sqrt{5} = -4 \Leftrightarrow x^{-4} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{5}\right)^{-\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{8}}.$

40. $M_{31} = 2^{31} - 1$ và số các chữ số của M_{31} khi viết trong hệ thập phân bằng số các chữ số của 2^{31} nên số các chữ số của M_{31} là

$$[31.\log 2] + 1 = [9{,}3] + 1 = 10.$$

Tương tự, số các chữ số của $M_{127} = 2^{127} - 1$ khi viết trong hệ thập phân là

$$[127.\log 2] + 1 = 38 + 1 = 39.$$

Số các chữ số của $M_{1398269}$ khi viết trong hệ thập phân là

$$[198269.\log 2] + 1 = 420921.$$

41. Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi sẽ có sau n quý là

$$S = 15(1 + 0{,}0165)^n = 15.1{,}0165^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Từ đó $\log S = \log 15 + n\log 1{,}0165$, hay

$$n = \frac{\log S - \log 15}{\log 1{,}0165}.$$

Để có được số tiền 20 triệu đồng thì phải sau một thời gian là

$$n = \frac{\log 20 - \log 15}{\log 1{,}0165} \approx 17{,}58 \text{ (quý)}.$$

Vậy sau khoảng 4 năm 6 tháng (4 năm 2 quý), người gửi sẽ có ít nhất 20 triệu đồng từ số vốn 15 triệu đồng ban đầu (vì hết quý thứ hai, người gửi mới được nhận lãi của quý đó).

§4. SỐ e VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Thấy được sự xuất hiện một cách tự nhiên của số e.

– Hiểu được lôgarit tự nhiên có đầy đủ các tính chất của lôgarit với cơ số lớn hơn 1.

Kĩ năng

Giúp học sinh vận dụng được định nghĩa, tính chất của lôgarit tự nhiên và phương pháp "lôgarit hoá" để tính toán và giải quyết một số bài toán thực tế.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trong các SGK trước đây, số e được đưa vào từ lớp 11, trong phần *Giới hạn của dãy số* như một minh hoạ cho định lí Vai-ơ-strat (Weierstrass) : "một dãy số tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) thì có giới hạn". Số e là giới hạn của dãy số tăng và bị chặn trên $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Trong chương trình và SGK lần này, do không đưa vào định lí Vai-ơ-strat về dãy số nên đã chuyển việc giới thiệu số e sang lớp 12 và thừa nhận sự tồn tại của giới hạn trên.
2. Cố gắng giới thiệu cho học sinh thấy nguồn gốc thực tế của số e để tránh sự áp đặt khi đưa ra định nghĩa số e.
3. Vì lôgarit tự nhiên được sử dụng rộng rãi cả trong lí thuyết và thực hành nên cần cho HS thấy ý nghĩa của vấn đề và rèn luyện kĩ năng tính toán.
4. Khi giải quyết các bài toán có sử dụng phương pháp "lôgarit hoá", cần hướng dẫn học sinh chọn cơ số một cách thích hợp (chẳng hạn, với các bài toán liên quan đến công thức lãi kép liên tục, nên lôgarit hoá theo cơ số e).

III – GỢI Ý DẠY HỌC

*** Dự kiến phân phối thời gian :** 1 tiết lí thuyết.

*** *Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 Gọi S_m là số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sau 2 năm theo định kì m.

Với $m = 1$, ta có

$$S_1 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{1}\right)^{2.1} \approx 116,64 \quad \text{(triệu đồng).}$$

Với $m = 2$, ta có

$$S_2 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{2}\right)^{2.2} \approx 116,986 \quad \text{(triệu đồng).}$$

Với $m = 4$, ta có

$$S_4 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{4}\right)^{2.4} \approx 117,166 \quad \text{(triệu đồng).}$$

Với $m = 12$, ta có

$$S_{12} = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{12}\right)^{2.12} \approx 117,289 \quad \text{(triệu đồng).}$$

Với $m = 52$, ta có

$$S_{52} = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{52}\right)^{2.52} \approx 117,337 \quad \text{(triệu đồng).}$$

Với $m = 365$, ta có

$$S_{365} = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{Nm} = 100\left(1+\frac{0,08}{365}\right)^{2.365} \approx 117,349 \quad \text{(triệu đồng).}$$

H2 *Mục đích :* Vận dụng công thức đổi cơ số và tính chất của lôgarit để so sánh hai lôgarit của cùng một số theo hai cơ số khác nhau và vận dụng tính chất của lôgarit để tính toán.

Giải

a) Với $0 < x < 1$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} > \ln x$ vì $\ln 10 > 1$ và $\ln x < 0$;

Với $x > 1$, $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} < \ln x$ vì $\ln 10 > 1$ và $\ln x > 0$.

b) $\log e^{2\ln\sqrt{10}} - \ln 10^{\log e^{-3}} = \log e^{\ln(\sqrt{10})^2} - \ln 10^{\log e^{-3}}$

$$= \log 10 - \ln e^{-3} = 1 + 3 = 4.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

42. Sai từ $\ln(2e) = \ln e + \ln e$.

43. Cho $a = \ln 2$, $b = \ln 5$. Khi đó :

$\ln 500 = \ln(2^2.5^3) = 2\ln 2 + 3\ln 5 = 2a + 3b$;

$\ln\dfrac{16}{25} = \ln(2^4.5^{-2}) = 4\ln 2 - 2\ln 5 = 4a - 2b$;

$\ln 6{,}25 = \ln(5^2.0{,}5^2) = 2\ln 5 + 2\ln 0{,}5 = 2\ln 5 - 2\ln 2 = 2b - 2a$;

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + ... + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100} = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ... + \ln 99 - \ln 100$$

$$= -\ln 100$$

$$= -\ln(2^2.5^2) = -2\ln 2 - 2\ln 5 = -2a - 2b.$$

44. Ta có $\dfrac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1) - \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2} - 1)$

$$= \frac{7}{16}\ln(1 + \sqrt{2})^2 - 2\ln(\sqrt{2} + 1)^2 - \frac{25}{16}\ln(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$= -\frac{25}{16}\ln(1 + \sqrt{2})^2 - \frac{25}{16}\ln(\sqrt{2} - 1)^2 = -\frac{25}{16}\ln[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)]^2$$

$$= -\frac{25}{16}\ln 1^2 = 0.$$

45. Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loài vi khuẩn này. Từ giả thiết $300 = 100.e^{5r}$ suy ra

$$r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5} \approx 0{,}2197,$$

tức là tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là 21,97% mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có

$$100.e^{10.0,2197} \approx 900 \text{ (con)}.$$

Từ 100 con, để có 200 con thì thời gian cần thiết là

$$t \approx \frac{\ln 200 - \ln 100}{0,2197} = \frac{\ln 2}{0,2197} \approx 3,15 \text{ (giờ)} = 3 \text{ giờ } 9 \text{ phút}.$$

46. Trước tiên, ta tìm tỉ lệ phân huỷ hàng năm của Pu^{239}.

Pu^{239} có chu kì bán huỷ là 24360 năm, do đó ta có

$$5 = 10.e^{r.24360}.$$

Suy ra

$$r = \frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} \approx -2,84543.10^{-5} \approx -0,000028.$$

Vậy sự phân huỷ của Pu^{239} được tính theo công thức

$$S = A.e^{-0,000028t}$$

trong đó S và A tính bằng gam, t tính bằng năm.

Theo bài ra, ta có

$$1 = 10.e^{-0,000028t}.$$

Suy ra

$$t = \frac{-\ln 10}{-0,000028} \approx 82235 \text{ (năm)}.$$

Vậy sau khoảng 82235 năm thì 10 gam chất Pu^{239} sẽ phân huỷ còn 1 gam.

§5. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu, ghi nhớ được các tính chất và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

– Hiểu và nhớ các công thức tính đạo hàm của hai hàm số nói trên.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biết vận dụng các công thức để tính đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit.

– Biết lập bảng biến thiên và vẽ được đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit với cơ số cho trước.

– Biết được cơ số của một hàm số mũ hoặc hàm số lôgarit là lớn hơn hay nhỏ hơn 1 khi biết sự biến thiên hoặc đồ thị của nó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Theo chương trình, hàm số mũ và hàm số lôgarit được đưa vào ngay sau chương ứng dụng của đạo hàm. Điều đó đã cho phép dùng đạo hàm trong việc khảo sát hai hàm số này. Bởi vậy, so với SGK 2000, nội dung của bài này có nhiều thay đổi đáng kể.

1. Về công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Trước khi học các công thức tính đạo hàm, học sinh cần nắm được hai vấn đề : (i) Tính liên tục của hàm số mũ, hàm số lôgarit, và (ii) các giới hạn :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \text{ và } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad \text{(a)}$$

– Về vấn đề (i) : Chương trình và thời lượng không cho phép chứng minh nên SGK đã thừa nhận tính liên tục của hai hàm số này. Giáo viên cần nhắc lại rằng điều thừa nhận ấy cũng có nghĩa là thừa nhận các giới hạn

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \text{ với mọi } x_0 \in (-\infty\,;+\infty) \text{ và}$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \text{ với mọi } x_0 \in (0\,;+\infty).$$

– Về vấn đề (ii) : Việc chứng minh các giới hạn (a) xuất phát từ định nghĩa số e đã được đưa ra trong bài học trước. Cụ thể là

$$e = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \qquad \text{(b1)}$$

(sự tồn tại của giới hạn này được thừa nhận do học sinh không được học định lí Weierstrass). Do đó SGK cũng thừa nhận giới hạn

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \mathrm{e} \qquad \text{(b2)}$$

để suy ra các giới hạn (a).

Tại sao lại phải đưa thêm giới hạn (b2) ? Bởi vì muốn chứng minh $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, ta đã dùng phép đổi biến : đặt $x = \frac{1}{t}$. Bằng cách đó, từ (b1) ta chỉ suy ra được giới hạn bên phải $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, còn giới hạn bên trái $\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ thì được suy ra từ (b2). Quá trình suy luận này tuy không quá khó nhưng không thích hợp với yêu cầu của chương trình. Đó là lí do tại sao SGK chỉ viết đơn giản : "Từ đó, bằng cách đổi biến (đặt $x = \frac{1}{t}$), ta được $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$". Điều này là phù hợp với tư tưởng chủ đạo là không đi sâu vào vấn đề giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Việc phát biểu và chứng minh các giới hạn (a) chủ yếu nhằm giúp học sinh làm quen với cách tìm các giới hạn có liên quan đến hàm số mũ và hàm số lôgarit, từ đó dễ tiếp thu phép chứng minh các công thức tính đạo hàm. Vì vậy, đối với các lớp mà năng lực tiếp thu bài của học sinh còn yếu, giáo viên không cần thiết phải mất nhiều thời gian rèn luyện kĩ năng tìm các giới hạn như thế. Điều quan trọng là học sinh phải ghi nhớ và vận dụng tốt các công thức tính đạo hàm của hai hàm số này. Kĩ năng này còn rất cần cho chương tiếp theo, khi học sinh phải tính nguyên hàm và tích phân.

2. Về khảo sát hàm số mũ và hàm số lôgarit.

Mục đích chủ yếu của bài học là làm cho học sinh nắm vững các tính chất và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit. Do đó các bước khảo sát hàm số mà học sinh đã học ở chương 1 chỉ được thực hiện khi khảo sát hàm số mũ trong trường hợp cơ số $a > 1$. Còn khi khảo sát hàm số lôgarit, các tính chất của hàm số được giới thiệu trước. Sau đó, học sinh tự kiểm chứng các tính chất ấy bằng đồ thị.

Khi khảo sát hai hàm số này, SGK đã thừa nhận một số giới hạn vô cực và giới hạn tại vô cực của hàm số, cụ thể là :

– Đối với hàm số mũ :

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \ \text{(với } a > 1) \qquad (1a)$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \ \text{(với } a > 1) \qquad (1b)$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \ \text{(với } 0 < a < 1) \qquad (2a)$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \ \text{(với } 0 < a < 1) \qquad (2b)$$

– Đối với hàm số lôgarit :

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \ \text{(với } a > 1) \qquad (3a)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \ \text{(với } a > 1) \qquad (3b)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \ \text{(với } 0 < a < 1) \qquad (4a)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \ \text{(với } 0 < a < 1) \qquad (4b)$$

Thực ra, với kiến thức trong phạm vi SGK, chỉ cần thừa nhận các giới hạn (1a) và (3a) là có thể suy ra tất cả các giới hạn còn lại, (xem phần *Bổ sung kiến thức*). Tuy nhiên do khuôn khổ của chương trình, SGK không thể trình bày các chứng minh đó.

Tóm lại, trọng tâm của bài học này gồm hai vấn đề : một là các công thức tính đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit, hai là các tính chất của hai hàm số này và sự thể hiện của các tính chất ấy qua đồ thị.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Giáo viên nên chuẩn bị trước các hình vẽ minh hoạ trên bảng phụ hoặc trên máy tính (nếu có điều kiện).

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

47. a) Khi nhiệt độ của nước là $t = 100^{o}C$ thì $P = 760$. Do đó ta có phương trình

(ẩn a) $760 = a.10^{\frac{-2258,624}{373}}$.

Từ đó ta có $a \approx 863\ 188\ 841,4$.

b) $\approx 52,5$ mmHg.

48. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2 - e^{3x+2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2(1-e^{3x})}{x} = -3e^2.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x} = -3e^2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}\left(e^{-3x}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-3e^{5x})\left(\dfrac{e^{-3x}-1}{-3x}\right)$

$= (-3)\ .\ 1 = -3.$

Cách khác :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{5x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x} - \frac{e^{5x}-1}{x}\right) = 2 - 5 = -3.$$

49. a) $y' = (2x-1)e^{2x}$.

b) $y' = 2x\sqrt{e^{4x}+1} + \dfrac{2x^2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}} = \dfrac{2x\left[(x+1)e^{4x}+1\right]}{\sqrt{e^{4x}+1}}$.

c) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$.

d) $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$.

50. a) Đồng biến vì cơ số $\dfrac{\pi}{3} > 1$.

b) Nghịch biến vì cơ số $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < \dfrac{3}{1,4+1,7} < 1$.

51. Giáo viên tự vẽ và hướng dẫn học sinh vẽ bằng cách xác định toạ độ một số điểm.

52. Ta có bảng sau

STT	Loại âm thanh	$\frac{I}{I_0}$	Độ lớn (L)
1	Ngưỡng nghe	1	0 dB
2	Nhạc êm dịu	4000	36 dB
3	Nhạc mạnh phát ra từ loa	$6{,}8\times10^{8}$	88 dB
4	Tiếng máy bay phản lực	$2{,}3\times10^{12}$	124 dB
5	Ngưỡng đau tai	10^{13}	130 dB

53. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=3.\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}=3.$

b) Dễ thấy $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$ nên

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to0}x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=0\,.\,1=0.$$

54. a) $y'=3\ln^2x+\dfrac{2(3x-2)\ln x}{x}.$

b) $y'=\dfrac{x\ln x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x}.$

c) $y'=\ln\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x+1}.$

d) $y'=\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}.$

55. a) Nghịch biến vì cơ số $\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1.$

b) Đồng biến vì cơ số $a=\dfrac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}>1.$

56. Giáo viên tự vẽ hình (chú ý liên hệ với đồ thị hàm số mũ cùng cơ số).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Như trên đã khẳng định, từ giới hạn (1a) và (3a) ta có thể chứng minh các giới hạn còn lại (xem trong mục *Những điều cần lưu ý*). Sau đây là một số chứng minh cụ thể.

Chứng minh từ (1a) suy ra (1b) :

Nếu đặt $t = -x$ thì $x \to -\infty$ khi và chỉ khi $t \to +\infty$, và $\lim\limits_{t\to+\infty} a^t = +\infty$ (theo 1a).

Do đó

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to+\infty} a^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} = 0.$$

Chứng minh (1a) suy ra (2a) :

Do $0 < a < 1$ nên $\dfrac{1}{a} > 1$. Từ đó, nếu đặt $t = -x$ thì $x \to -\infty$ khi và chỉ khi $t \to +\infty$,

và $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^t = +\infty$ (theo 1a). Do đó

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{t\to+\infty} a^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^t = +\infty.$$

Chứng minh (1a) suy ra (2b), từ (3a) suy ra (3b), (4a) và (4b) hoàn toàn tương tự.

Chú ý

Sử dụng định nghĩa sau đây, chúng ta có thể chứng minh (1a) và (3a) :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$. Khi đó

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0, \exists M > 0 : (\forall x > M,\ f(x) > N).$

Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ với $a > 1$ (1a) :

Xét hàm số $y = a^x$ $(a > 1)$ trên khoảng $(-\infty\ ;\ +\infty)$. Với số $N > 0$ tuỳ ý cho trước, ta đặt $M = \log_a N$. Khi đó, với mọi $x > M$, ta có $x > \log_a N$. Từ đó, do $a > 1$ nên $a^x > N$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ (3a) :

Xét hàm số $y = \log_a x$ $(a > 1)$ trên khoảng $(0 ; +\infty)$. Với số $N > 0$ tuỳ ý cho trước, ta đặt $M = a^N$. Khi đó, với mọi $x > M$, ta có $x > a^N$. Từ đó, do $a > 1$ nên $\log_a x > N$. Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$.

§6. HÀM SỐ LUỸ THỪA (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh

– Hiểu khái niệm hàm số luỹ thừa và ghi nhớ công thức tính đạo hàm của nó trong mỗi trường hợp.

– Nhớ hình dạng đồ thị của hàm số luỹ thừa trên khoảng $(0 ; +\infty)$.

Kĩ năng

Giúp học sinh

– Biết vận dụng các công thức để tính đạo hàm của hàm số luỹ thừa và hàm số căn.

– Vẽ phác được đồ thị của một hàm số luỹ thừa đã cho. Từ đó nêu được tính chất của hàm số đó.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Cũng như các SGK trước đây, hàm số luỹ thừa được giới thiệu rất sơ lược ; chỉ khác là đưa sau bài hàm số mũ và hàm số lôgarit. Sở dĩ có sự khác biệt đó là do phép chứng minh công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa có sử dụng đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit.
2. Định nghĩa luỹ thừa đã dẫn đến sự khác nhau về tập xác định của hàm số luỹ thừa, tuỳ thuộc vào số mũ của nó được xét trên tập số nguyên dương, số nguyên âm hay tập số thực. Để tránh sự rắc rối ấy, khi khảo sát hàm số luỹ thừa một cách tổng quát, chúng ta chỉ xét chúng trên nửa khoảng $(0 ; +\infty)$.

Trong trường hợp số mũ nguyên, học sinh đã được học một vài hàm số tiêu biểu như $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$; khi số mũ chẵn thì chúng là những hàm số chẵn, khi số mũ lẻ thì chúng là những hàm số lẻ. Vì vậy, nếu đã biết đồ thị của những hàm số này trên khoảng $(0 ; +\infty)$ thì ta có thể suy ra đồ thị của chúng trên khoảng $(-\infty ; 0)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị đã có hoặc qua trục tung (đối với hàm số chẵn), hoặc qua gốc toạ độ (đối với hàm số lẻ).

3. Một trọng tâm của bài này là các công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa. Một cách đầy đủ, công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa phải được phát biểu như sau :

$y = x$	$y' = 1$ (với mọi x)
$y = x^n$ (n nguyên, $n > 1$)	$y' = nx^{n-1}$ (với mọi x)
$y = x^n$ (n nguyên, $n \leq 0$)	$y' = nx^{n-1}$ (với mọi $x \neq 0$)
$y = x^\alpha$ (α thực)	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$ (với mọi $x > 0$)

Hai trường hợp đầu học sinh đã được học ở lớp 11. Do đó để đơn giản, SGK chỉ nêu công thức đối với hàm số luỹ thừa ở dạng tổng quát nhất, tức là đối với hàm số $y = x^\alpha$ với α là số thực tuỳ ý. Tất nhiên công thức này vẫn đúng nếu α là số nguyên, mặc dù khi đó, hàm số không chỉ có đạo hàm tại những điểm $x > 0$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học***

Giáo viên nên chuẩn bị trước các hình vẽ minh hoạ trên bảng phụ hoặc trên máy tính (nếu có điều kiện).

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Cho học sinh tự chứng minh công thức đạo hàm của hàm số luỹ thừa trong trường hợp số mũ âm (học sinh đã học công thức này với $n = 0$ và $n = 1$).

Giải

Khi $n = 0$ hay $n = 1$, ta đã biết công thức đúng với mọi $x \neq 0$. Khi $n < 0$, ta có $-n$ là số nguyên dương. Do đó :

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{\left(x^{-n}\right)'}{\left(x^{-n}\right)^2} = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1} \text{ (với mọi } x \neq 0).$$

H2 *Mục đích :* Giúp học sinh ghi nhớ công thức tính đạo hàm của hàm căn.

Giải

$$\left(\sqrt[4]{e^{2x}+1}\right)' = \frac{(e^{2x}+1)'}{4\sqrt[4]{(e^{2x}+1)^3}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt[4]{(e^{2x}+1)^3}}.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

57. Giả sử (C_1) và (C_2) theo thứ tự là đồ thị của hàm số $y = x^{\alpha}$ và $y = x^{\beta}$ (α và β là -2 hoặc $-\frac{1}{2}$). Trên đồ thị, ta thấy trên khoảng $(1\ ;+\infty)$, đường cong (C_2) nằm trên đường cong (C_1), nghĩa là khi $x > 1$ ta có bất đẳng thức $x^{\beta} > x^{\alpha}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $\beta > \alpha$. Vậy $\beta = -\frac{1}{2}$ và $\alpha = -2$.

Vậy đường (C_1) là đồ thị của hàm số $y = x^{-2}$, (C_2) là đồ thị hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

58. a) $y' = 2\pi(2x+1)^{\pi-1}$.

b) $y' = \dfrac{(\ln^3 5x)'}{5\sqrt[5]{(\ln^3 5x)^4}} = \dfrac{3\ln^2 5x}{5x\sqrt[5]{\ln^{12} 5x}} = \dfrac{3}{5x\sqrt[5]{\ln^2 5x}}$.

c) Để cho gọn, ta đặt $u = \dfrac{1+x^3}{1-x^3}$. Khi đó, $y' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ và $u' = \dfrac{6x^2}{(1-x^3)^2}$.

Do đó

$$y' = \frac{u'\sqrt[3]{u}}{3u} = \frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

d) $y' = \left[\left(\frac{x}{b}\right)^a\right]'\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a\left[\left(\frac{a}{x}\right)^b\right]'$

$$= \frac{a}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^b + \left(\frac{x}{b}\right)^a b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^a\left(\frac{a}{x}\right)^b\frac{a-b}{x}.$$

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Tiết luyện tập này nhằm củng cố, bổ sung và phần nào đó nâng cao kiến thức của hai bài học (§5 và §6). Tuỳ theo năng lực của học sinh, giáo viên có thể không cần chữa hết các bài tập, nhưng không nên bỏ qua các bài tập 60, 61 và 62. Nếu học sinh còn chưa hiểu được cách giải nhiều bài tập trong số các bài từ 48 đến 58 thì trong tiết này giáo viên nên dành thời gian để giải quyết vì đó là các bài tập rất cơ bản.

Đối với bài tập 60, nếu cần, giáo viên có thể gợi ý cho học sinh về cách chứng minh hai đồ thị đối xứng nhau qua trục tung hoặc qua trục hoành.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

59. a) $y' = \dfrac{\cot x}{\ln 3}$; $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}91$.

b) $y' = \dfrac{2^x(x\ln 2 - 2)}{x^3}$; $y'(1) \approx -2{,}61$.

60. a) Gọi (G_1) và (G_2) lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, $M(x_0\ ;\ y_0)$ là một điểm bất kì. Khi đó điểm đối xứng với M qua trục tung là $M'(-x_0\ ;\ y_0)$. Ta có :

$$M \in (G_1) \Leftrightarrow y_0 = a^{x_0} \Leftrightarrow y_0 = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0} \Leftrightarrow M' \in (G_2).$$

Điều đó chứng tỏ (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

b) Chứng minh tương tự câu a) với chú ý rằng điểm đối xứng với $M(x_0 ; y_0)$ qua trục hoành là điểm $M''(x_0 ; -y_0)$.

61. a) $\log_{0,5}x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ (ứng với phần đồ thị (h.2.3) ở phía trên trục hoành).

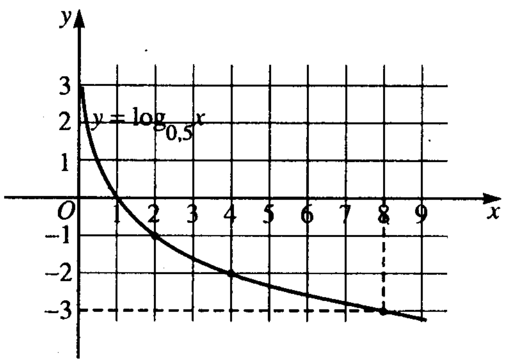
b) $-3 \leq \log_{0,5}x < -1 \Leftrightarrow 2 < x \leq 8$ (ứng với những điểm trên đồ thị (h.2.3) có tung độ thuộc nửa khoảng $[-3 ; -1)$).

62. a) $\left(\sqrt{3}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$,

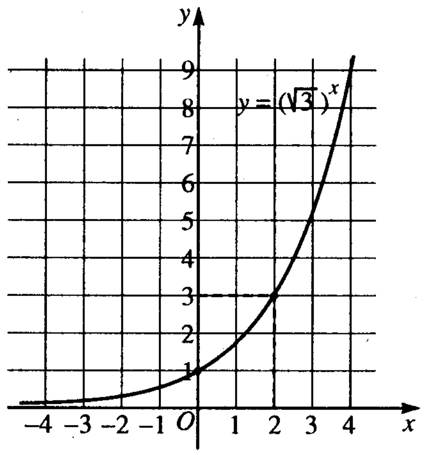
(ứng với những điểm trên đồ thị (h.2.4) có tung độ không lớn hơn 1).

b) $\left(\sqrt{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x > 2$,

(ứng với những điểm trên đồ thị (h.2.4) có tung độ lớn hơn 3).



Hình 2.3



Hình 2.4

§7. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Học sinh cần :

– Nắm vững cách giải các phương trình mũ và phương trình lôgarit cơ bản.

– Hiểu rõ được các phương pháp thường dùng để giải phương trình mũ và phương trình lôgarit.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Vận dụng thành thạo các phương pháp giải phương trình mũ và phương trình lôgarit vào bài tập.

– Biết sử dụng các phép biến đổi đơn giản về luỹ thừa và lôgarit vào việc giải phương trình.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Đây là lần đầu tiên học sinh được làm quen với phương trình mũ và phương trình lôgarit. Khi giải các phương trình này cần lưu ý học sinh một số điểm sau :

– Luôn luôn chú ý đến ĐKXĐ của phương trình, nhất là phương trình lôgarit. Đôi khi có thể sử dụng ngay các điều kiện ấy trong biến đổi phương trình.

– Muốn có kĩ năng giải phương trình mũ và lôgarit, học sinh phải có kĩ năng biến đổi các biểu thức mũ và lôgarit.

Phần lớn các sai lầm mà học sinh thường hay mắc phải trong chương này là do chưa chú ý đúng mức đến ĐKXĐ của phương trình hoặc do biến đổi phương trình sai.

2. Trong SGK Đại số và Giải tích 11, khi nói về phương trình lượng giác, các tác giả đã đi vào cách giải các dạng phương trình thường gặp. Nhưng đối với phương trình mũ và lôgarit ở SGK Giải tích 12, các tác giả đã không làm như vậy mà chỉ nêu các phương pháp giải thường dùng. (Tất nhiên có thể phân loại theo các dạng phương trình, chẳng hạn, phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số mũ hay lôgarit (ví dụ 6) ; phương trình thuần nhất bậc hai đối với hai hàm số mũ, ... Song cách phân loại như vậy không thật thích hợp đối với các phương trình mũ và lôgarit).

3. Yêu cầu chủ yếu của bài này là yêu cầu về kĩ năng. Do đó, giáo viên cần dành nhiều thời gian cho học sinh làm bài tập luyện tập ngay tại lớp.

4. ***Một số sai lầm mà học sinh thường mắc phải khi giải phương trình mũ và lôgarit***

Như đã nói, học sinh thường mắc các sai lầm do không chú ý đến ĐKXĐ của phương trình và do biến đổi sai các biểu thức mũ và lôgarit. Sau đây là một vài ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3)$.

Lời giải sai

$\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0.$

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 5$ (!)

Sai lầm của lời giải trên là quên ĐKXĐ của phương trình.

Lời giải đúng

ĐKXĐ của phương trình đã cho là $x^2 - 6x + 7 > 0$ và $x - 3 > 0$. Do đó ta có thể viết :

$$\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 7 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 7 = x - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 > 0 \\ x = 2 \text{ hoặc } x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\log_3^2 x^3 - 20\log_3 \sqrt{x} + 3 = 0$.

Lời giải sai

ĐKXĐ của phương trình là $x > 0$. Với điều kiện đó ta có :

$\log_3^2 x^3 - 20\log_3 \sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\log_3^2 x - 10\log_3 x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 3 \\ \log_3 x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 27 \\ x = \sqrt[3]{3}. \end{array}\right.$$

Sai lầm của lời giải trên là biến đổi lôgarit $\log_3^2 x^3 = 3\log_3^2 x$. Thực ra, ta phải có :

$$\log_3^2 x^3 = \left(\log_3 x^3\right)^2 = (3\log_3 x)^2 = 9\log_3^2 x.$$

Lời giải đúng

$\log_3^2 x^3 - 20\log_3\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow 9\log_3^2 x - 10\log_3 x + 3 = 0.$

Trong phương trình cuối, đặt $y = \log_3 x$, ta có phương trình $9y^2 - 10y + 3 = 0$.

Dễ thấy phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Xen kẽ các tiết học có thể chữa bài tập hoặc kiểm tra bài cũ.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về đồ dùng dạy học :***

– Giáo viên chuẩn bị trước bảng công thức nghiệm của phương trình mũ và phương trình lôgarit cơ bản, có thể treo trong suốt tiết học và chỉ cất đi khi nào học sinh đã nhớ được công thức.

– Để đỡ mất thời gian trên lớp, đối với các bài tập có nội dung thực tiễn, giáo viên nên :

+ Ghi trước đề trên bảng phụ để không mất thời gian đọc lại đề trong giờ dạy.

+ Chuẩn bị kĩ lời giải, lưu lại các kết quả trung gian và đáp số để trên lớp, dễ dàng kiểm tra các kết quả tính toán của học sinh (nếu lớp học không có máy tính thì dùng bảng số).

Trường hợp bất đắc dĩ, nếu còn quá ít thời gian thì giáo viên có thể đọc ngay kết quả đã tính sẵn mà không phải chờ kết quả tính toán của học sinh.

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Tiết 1 dạy đến hết các phương trình cơ bản và phương pháp đưa về cùng cơ số ;

Tiết 2 dạy phần còn lại.

Đối với các lớp mà học sinh tiếp thu chậm, giáo viên có thể sử dụng một phần của 2 tiết luyện tập để hoàn tất bài học này.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Củng cố công thức nghiệm của phương trình mũ.

Trả lời : a) $x = 3$; b) $x = \ln 5$.

H2 *Mục đích :* Củng cố công thức tính nghiệm của phương trình lôgarit.

Trả lời : a) $x = 5$; b) $x = 10^{-4}$. Tổng quát : $\log_a x = \log_a p \Leftrightarrow x = p$ (với $p > 0$).

H3 *Mục đích :* Nhắc nhở sai lầm dễ mắc phải khi biến đổi để giải phương trình lôgarit.

Trả lời : Sai, vì đẳng thức $\log_4 x^2 = \log_2 x$ chỉ xảy ra khi $x > 0$. Còn khi $x < 0$ thì $\log_4 x^2 = \log_2(-x)$. Do đó lời giải đã nêu thiếu nghiệm $x = -5$.

H4 *Giải.* Đặt $y = 2^{x-3}$, phương trình đã cho có dạng $4y + 2y + y = 448$. Từ đó $y = 64$ và nghiệm của phương trình đã cho là $x = 9$.

H5 *Giải.* Đặt $y = \log_2 x$, ta có phương trình $\frac{6}{1+y} + \frac{4}{2y} = 3$.

Phương trình này có hai nghiệm $y = 2$ và $y = -\frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 4$ và $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

H6 *Giải*

Ta có :

$$2^x . 5^x = 0{,}2 . (10^{x-1})^5 \Leftrightarrow 10^x = 2 . 10^{-1} . 10^{5(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \log 2 - 1 + 5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x = 6 - \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\log 2.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

63. a) $x = -\frac{1}{2}$. *Gợi ý :* $2 - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$.

b) $x \in \{0 ; 3\}$.

c) $x = 1$.

d) $\log_3(3^x + 8) = 2 + x \Leftrightarrow 3^x + 8 = 3^{2+x} \Leftrightarrow 3^x + 8 = 9 . 3^x$

$$\Leftrightarrow 8 . 3^x = 8 \Leftrightarrow x = 0.$$

64. a) $\log_2[x(x-1)] = 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

b) ĐKXĐ là $x > 1$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình trong câu a). Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$ (loại $x = -1$).

65. a) $k = 53$; $a \approx 1,096$. *Gợi ý :* Theo giả thiết ta có khi $d = 0$ thì $F = 53$ và khi $d = 12$ thì $F = 160$;

b) $d = \dfrac{1}{\log a}\log\dfrac{F}{k} \approx 25,119 \times \log F - 43,312$;

Chú ý : Do phần c) yêu cầu tính chính xác đến hàng phần trăm nên trong công thức trên, các giá trị $\dfrac{1}{\log a}$ và $\dfrac{\log k}{\log a}$ đã được tính chính xác đến hàng phần nghìn.

c)

F	53	60	80	100	120	140	160
d	0	1,35	4,49	6,93	8,91	10,60	12

66. a) $x = 2$. *Gợi ý :* viết phương trình dưới dạng

$2.10^x = 2.10^2$.

b) $x = 6$. *Gợi ý :* $0,125 = (0,5)^3 = 2^{-3}$ và $4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$.

67. a) $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

b) $x = 9$.

68. a) $S = \{2 ; \log_3 2 - 1\}$. *Gợi ý :* Đặt $y = 3^x$.

b) $x = 0$. *Gợi ý* : Chia hai vế cho 2^{3x} rồi đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.

69. a) $S = \{10 ; \sqrt[9]{10}\}$. *Gợi ý :* $\log^2 x^3 = (3\log x)^2 = 9\log^2 x$.

b) $S = \left\{2 ; \dfrac{1}{16}\right\}$. *Gợi ý :* Đưa về lôgarit cơ số 2 rồi đặt $\log_2 x = y$.

c) $S = \{3^{-3} ; 3^{-0,8}\}$. *Gợi ý* : đặt $\log_3 x = y$.

70. a) $x = \log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4)$.

b) $x = 3^{-1}$.

c) $S = \{2\ ; -(1 + \log_3 2)\}$.

d) $S = \left\{5^{-1}\ ; \sqrt[6]{5}\right\}$. *Gợi ý :* Với điều kiện $0 < x \neq 1$, lôgarit hoá hai vế theo cơ số x.

71. a) $x = 1$. *Gợi ý :* Hàm số $y = 2^x$ đồng biến, hàm số $y = 3 - x$ nghịch biến.

b) $x = 2$. *Gợi ý :* Hàm số $y = \log_2 x$ đồng biến, hàm số $y = 3 - x$ nghịch biến.

§8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Giúp học sinh biết cách giải một số dạng hệ phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Việc giải hệ phương trình mũ và lôgarit về cơ bản cũng giống như giải các hệ phương trình đại số mà học sinh đã học. Nếu học sinh đã có kĩ năng biến đổi các biểu thức mũ và lôgarit thành thạo thì việc giải các hệ phương trình này cũng không có gì trở ngại.

2. Bài này chỉ nêu hai ví dụ đơn giản. Một ví dụ vận dụng phương pháp đổi biến số, một ví dụ sử dụng phương pháp thế. Đó là những phương pháp thường dùng khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit. Nếu còn thời gian, giáo viên nên cho học sinh làm bài tập ngay tại lớp.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\text{H1}}$ *Trả lời :* (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \log_2 3 \\ y = \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 - \log_3 2 \\ y = \log_3 2. \end{cases}$

Vậy hệ (1) có hai nghiệm : $(0\ ; 1)$ và $(\log_2 3 - \log_3 2\ ; \log_3 2)$.

H2 *Giải :* ĐKXĐ của hệ phương trình là $x > 0$ và $y > 0$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 0 \\ \log^2 x + \log^2 y = 2. \end{cases}$$

Đặt $u = \log x$ và $v = \log y$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 0 \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$. Dễ thấy hệ phương trình này có hai nghiệm là $(u ; v) = (1 ; -1)$ và $(u ; v) = (-1 ; 1)$.

Từ đó suy ra các nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x ; y) = (10 ; 10^{-1})$ và $(x ; y) = (10^{-1} ; 10)$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

72. a) $S = \{(2;18) ; (18;2)\}$. *Gợi ý :* Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ như sau :

$\log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \Leftrightarrow \log_4 xy = \log_4 36 \Leftrightarrow xy = 36$ (với $x > 0$ và $y > 0$).

b) $(x ; y) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. *Gợi ý : Cách 1.* Rút y từ phương trình đầu, thế vào phương trình thứ hai thì được $4^{-2x} + 4^{-2(1-x)} = 0{,}5$. Sau đó đặt $t = 4^{2x}$. *Cách 2.* Viết phương trình đầu thành $4^{x+y} = 4$ hay $4^x . 4^y = 4$. Sau đó đặt $u = 4^x$, $v = 4^y$.

73. a) $(x ; y) = (-2 ; 7)$. *Gợi ý :* Tính y từ phượng trình thứ hai rồi thế vào phương trình đầu.

b) $(x ; y) = \left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. *Gợi ý :* ĐKXĐ của phương trình là $x \pm y > 0$. Khi đó

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x + y) + \log_2(x - y) = 1 \\ \log_2(x + y) - \dfrac{\log_2(x - y)}{\log_2 3} = 1. \end{cases}$$

Tiếp theo, đặt $u = \log_2(x + y)$ và $v = \log_2(x - y)$.

LUYỆN TẬP (2 tiết)

Mục đích chủ yếu của hai tiết luyện tập này là củng cố và nâng cao kĩ năng của học sinh về việc giải các phương trình, hệ phương trình mũ và lôgarit. Yêu cầu học sinh nắm vững các phương pháp giải đã học và vận dụng linh hoạt vào các bài tập cụ thể. Nếu cần, giáo viên có thể sưu tầm thêm các bài tập ngoài SGK, nhưng cần tránh

– Các phương trình và hệ phương trình có chứa tham số ;

– Các phương trình mũ chứa ẩn cả trong cơ số ;

– Các phương trình lôgarit chứa ẩn cả trong cơ số lẫn biểu thức dưới dấu lôgarit ;

– Các bài tập đòi hỏi biến đổi mũ và lôgarit quá phức tạp.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

74. a) $x = -1$. *Gợi ý* : Với điều kiện $x < 1$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $(3-x)(1-x) = 2^3$.

b) $x = 0$. *Gợi ý* : Với điều kiện $x < 3$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $9 - 2^x = 2^{3-x}$.

c) $7^{\log x} - 5^{\log x + 1} = 3.5^{\log x - 1} - 13.7^{\log x - 1}$

$\Leftrightarrow 7^{\log x} + 13.7^{\log x - 1} = 3.5^{\log x - 1} + 5^{\log x + 1}$

$\Leftrightarrow 20.\,7^{\log x - 1} = 28.\,5^{\log x - 1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{7}{5}\right)^{\log x - 1} = \dfrac{7}{5}$

$\Leftrightarrow \log x - 1 = 1 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100.$

d) $x = 0$.

75. a) $S = \{\log_3 28 ; \log_3 82 - 4\}$.

Gợi ý : $\log_3(3^x - 1).\log_3(3^{x+1} - 3) = \log_3(3^x - 1).[1 + \log_3(3^x - 1)]$.

b) $S = \left\{\dfrac{5}{4} ; 3\right\}$. *Gợi ý* : ĐKXĐ : $0 < x - 1 \neq 1$.

Đặt $y = \log_2(x-1)$ với chú ý rằng $\log_{x-1}4 = \dfrac{2}{\log_2(x-1)}$.

c) $S = \{-2^{25} ; -1\}$. *Gợi ý* : Do điều kiện $x < 0$, ta có $\sqrt{x^2} = -x$.

Đặt $y = \log_2(-x)$.

d) Ta có $\sqrt{x} = \sqrt{4^{\log_4 x}} = 2^{\log_4 x}$. Do đó

$$3^{\frac{1}{2}+\log_4 x} + 3^{\log_4 x-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)3^{\log_4 x} = 2^{\log_4 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_4 x} \Leftrightarrow \log_4 x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 4^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}}.$$

76. a) $x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{3}{2}$. *Gợi ý* : Đặt $y = -\frac{1}{x}$ rồi chia hai vế cho 4^y, ta có :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2y} - \left(\frac{3}{2}\right)^{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow y = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó, phương trình đã cho tương đương với

$$-\frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ hay } \frac{1}{x} = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}.$$

b) $x = e^{-2}$. *Gợi ý* : ĐKXĐ là $x > 0$. Do đó $\ln x^2 = 2\ln x$ và ta có thể viết lại phương trình đã cho thành $4.2^{2\ln x} - 6^{\ln x} - 18.3^{2\ln x} = 0$. Phương trình này có thể giải bằng cách chia hai vế cho $2^{2\ln x}$ hoặc chia hai vế cho $3^{2\ln x}$.

c) $S = \{2 ; 16\}$. *Gợi ý* : Đặt $y = \sqrt{\log_2 x}$ với điều kiện $y \geq 0$.

d) $S = \{2^{-7} ; 2\}$. *Gợi ý* : ĐKXĐ là $x > 0$. Với điều kiện đó ta có :

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 = \left(-2 - \log_2 x\right)^2 = (2 + \log_2 x)^2.$$

$$\log_2 \frac{x^2}{8} = \log_2 x^2 - \log_2 8 = 2\log_2 x - 3.$$

77. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. *Gợi ý :* Đặt $t = 4^{1+\cos 2x}$.

78. a) $x = -1$.

b) $x = 2$. *Gợi ý :* Do $0 < \sin\frac{\pi}{5} < 1$ và $0 < \cos\frac{\pi}{5} < 1$ nên :

– Nếu $x > 2$ thì $\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^x < \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$ và $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^x < \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$;

– Nếu $x < 2$ thì $\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^x > \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$ và $\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^x > \left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$.

79. a) $(x ; y) = (-2 ; 0)$.

b) $(x ; y) = (2 ; 5)$. *Gợi ý :* ĐKXĐ là $x > 0$ và $y > 0$. Khi đó, $\log_5 7.\log_7 y = \log_5 y$ và $\log_2 5.\log_5 y = \log_2 y$ nên ta có thể biến đổi tương đương hệ đã cho thành :

$$\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 1 + \log_5 2\\ 3 + \log_2 y = \log_2 5 + 3\log_2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_5 xy = \log_5 10\\ \log_2 8y = \log_2 5x^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy = 10\\ 8y = 5x^3.\end{cases}$$

§9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Giúp học sinh biết cách giải một số dạng bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trong khuôn khổ của chương trình, bài học này chỉ cung cấp cho học sinh những phương pháp chủ yếu để giải bất phương trình mũ và lôgarit thông qua một số ví dụ cụ thể.
2. Bài này yêu cầu học sinh nắm được :

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

80. a) $x < 0,5$.

b) $x > -\frac{3}{4}$.

81. a) $\frac{1}{3} < x < 2$.

b) $\frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$.

c) $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) \geq -1 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 5x + 6 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ hoặc } x > 3 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$ hoặc $3 < x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1 ; 2) \cup (3 ; 4]$.

d) $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$. *Gợi ý :* Đưa về $0 < \frac{1-2x}{x} \leq 1$.

82. a) $0,5 \leq x \leq 4$. *Gợi ý :* Đặt $y = \log_{0,5}x$.

b) $(0 ; 1)$. *Gợi ý :* Đặt $y = 2^x$.

83. a) $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3) \Leftrightarrow 0 < x^2 + x - 2 < x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ x^2 - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ hoặc } x > 1 \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\sqrt{5} ; -2\right) \cup \left(1 ; \sqrt{5}\right)$.

b) Với điều kiện $2 - x > 0$ và $x^2 - 6x + 5 > 0$, ta có :

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) + 2\log_3(2 - x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) \geq -\log_3(2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 5) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq (2 - x)^2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 > 0 \\ 2 - x > 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ hoặc } x > 5 \\ x < 2 \\ x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

1) Công thức giải phương trình lôgarit :

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ hoặc } g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

2) Công thức giải bất phương trình mũ :

Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

3) Công thức giải bất phương trình lôgarit :

Nếu $a > 1$ thì $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$.

Nếu có điều kiện, GV cũng có thể giới thiệu cho HS sử dụng các công thức này.

E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

• Khi ôn tập chương, giáo viên có thể lồng việc ôn tập các tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit vào việc giải các phương trình, hệ phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit. Cần nhấn mạnh một số điểm sau đây :

– Khi xét các luỹ thừa với số mũ là nguyên, hữu tỉ hay số thực, ta phải chú ý đến điều kiện thích hợp của cơ số.

– Khi vẽ đồ thị hàm số mũ hay hàm số lôgarit, phải thể hiện được chiều biến thiên của hàm số, giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ, tiệm cận của đồ thị, ...

– Khi xét hàm số $y = \log_a x$, cần chú ý điều kiện của cơ số là $0 < a \neq 1$ và tập xác định là $(0 ; +\infty)$. Điều này càng cần được chú ý mỗi khi biến đổi các biểu thức lôgarit (chẳng hạn, để giải phương trình hay bất phương trình mũ và lôgarit).

– Khi giải các bất phương trình mũ và lôgarit, bên cạnh vấn đề tập xác định, còn phải chú ý đến cơ số (lớn hơn 1 hay bé hơn 1). Có thể nêu một vài nhận xét về các dạng và cách giải phương trình mũ và lôgarit thường gặp.

• Về lí thuyết, giáo viên nên yêu cầu học sinh tổng kết những kiến thức đã học trong chương rồi cho học sinh tự kiểm tra lẫn nhau (có thể theo nhóm). Tuy nhiên việc này nên cho học sinh làm ở nhà, dành thời gian trên lớp cho việc chữa bài tập.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các định nghĩa :

1) Luỹ thừa với số mũ 0 và nguyên âm :

$$a^0 = 1 \text{ và } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (với } a \neq 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

2) Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ :

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (với } a > 0 \text{ và } r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+^*\text{)}.$$

3) Luỹ thừa với số mũ thực :

$a^{\alpha} = \lim\left(a^{r_n}\right)$ (với $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ và $\lim r_n = \alpha$).

4) Căn bậc n :

- Khi n lẻ, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$.

- Khi n chẵn, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$ (với $a \geq 0$).

5) Lôgarit cơ số a : $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$ $(0 < a \neq 1$ và $b > 0)$.

2. Các tính chất và công thức

1) Luỹ thừa

Với các số $a > 0$, $b > 0$, α và β tuỳ ý, ta có :

$a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$; $\quad a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$; $\quad (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$;

$(a.b)^{\alpha} = a^{\alpha}.\, b^{\beta}$; $\quad (a : b)^{\alpha} = a^{\alpha} : b^{\beta}$.

2) Lôgarit

Với giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa, ta có :

$\log_a 1 = 0$ và $\log_a a = 1$;

$\log_a a^b = b$ và $a^{\log_a b} = b$;

$\log_a(b.\, c) = \log_a b + \log_a c$;

$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, nói riêng $\log_a\left(\dfrac{1}{c}\right) = -\log_a c$.

$\log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a b$ (với số α tuỳ ý), nói riêng $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$, tức là $\log_a b.\, \log_b x = \log_a x$.

Nói riêng, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, tức là $\log_a b.\, \log_b a = 1$.

+ $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$.

3) Hàm số mũ

• Liên tục trên tập xác định $\mathbb{R}$, nhận mọi giá trị thuộc $(0\,;+\infty)$.

• Giới hạn tại vô cực :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } a>1 \\ 0 \text{ nếu } 0<a<1 \end{cases} ; \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ nếu } a>1 \\ +\infty \text{ nếu } 0<a<1. \end{cases}$$

• Đạo hàm : $(a^x)' = a^x \ln a$; $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$;

$(a^u)' = a^u u' \ln a$; $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u u'$ với $u = u(x)$.

• Chiều biến thiên : Đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

• Đồ thị luôn cắt trục tung tại điểm $(0\,;1)$, nằm ở phía trên trục hoành và nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

4) Hàm số lôgarit $y = \log_a x$

• Liên tục trên tập xác định $(0\,;+\infty)$, nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{R}$.

• Giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực :

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty \text{ nếu } a>1 \\ -\infty \text{ nếu } 0<a<1 \end{cases} ; \quad \lim_{x\to0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ nếu } a>1 \\ +\infty \text{ nếu } 0<a<1. \end{cases}$$

• Đạo hàm : $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$;

$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $\left(\ln|u|\right)' = \dfrac{u'}{u}$ với $u = u(x)$.

• Sự biến thiên : Đồng biến trên $(0\,;+\infty)$ nếu $a > 1$, nghịch biến trên $(0\,;+\infty)$ nếu $0 < a < 1$.

• Đồ thị luôn cắt trục hoành tại điểm $(1\,;0)$, nằm ở bên phải trục tung và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

5) Hàm số luỹ thừa $y = x^\alpha$

- Liên tục trên tập xác định của nó.
- Đạo hàm : $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$;

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(x > 0)$;

$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ với $u = u(x)$.

Chú ý : Các công thức trên có thể được áp dụng tại mọi điểm mà mỗi biểu thức trong đó đều có nghĩa.

- Đồng biến trên $(0 ; +\infty)$ khi $\alpha > 0$; nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.

6) Phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit

$a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$ (với $m > 0$) ;

$\log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m$;

$a^x < m \Leftrightarrow x < \log_a m$ (với $m > 0$ và $a > 1$) ;

$a^x < m \Leftrightarrow x > \log_a m$ (với $m > 0$ và $0 < a < 1$) ;

$\log_a x < m \Leftrightarrow 0 < x < a^m$ (với $a > 1$) ;

$\log_a x < m \Leftrightarrow x > a^m$ (với $0 < a < 1$).

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

84. a) $p < q$; b) $p > q$;
c) $p > q$; d) $p < q$.

85. *Gợi ý* : $1 + \frac{1}{4}\left(2^x - 2^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2^x + 2^{-x}\right)^2$.

86. a) $A = 2^{10} = 1024$. *Gợi ý* : $2\log_3 4 + 4\log_{81} 2 = \log_9 4^4 + \log_9 2^2 = \log_9 2^{10}$.

b) $B = \dfrac{173}{60}$. *Gợi ý* : $\dfrac{a^2.\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} = a^{2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{173}{60}}$.

c) $C = -n$. *Gợi ý* : $\underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\ldots\sqrt[5]{5}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 5^{\left(\frac{1}{5}\right)^n}$.

87. Chú ý rằng hai vế của bất đẳng thức đều dương. Ta có :

$$\log_2 3 > \log_3 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 2} > \log_3 4 \Leftrightarrow \log_3 2.\log_3 4 < 1.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì :

$$\sqrt{\log_3 2.\log_3 4} < \frac{1}{2}\left(\log_3 2 + \log_3 4\right) = \frac{1}{2}\log_3(2.4) < \frac{1}{2}\log_3 9 = 1.$$

88. Theo giả thiết ta có : $a^2 = (c-b)(c+b)$. Từ đó suy ra

$$\log_a(c-b) + \log_a(c+b) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a} = 2$$

$$\Rightarrow \log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a.$$

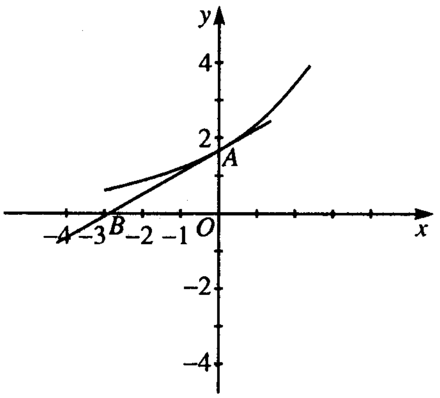
89. $y' = -\dfrac{1}{x+1}$. Từ đó suy ra $xy' + 1 = -\dfrac{x}{x+1} + 1 = \dfrac{1}{x+1} = e^y$.

90. Toạ độ của A là $\left(0\,;\dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

Vậy $OA = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x$, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (G) tại A (h.2.5) là

$$y'(0) = \frac{1}{2} = \tan\widehat{OBA}.$$



Hình 2.5

Trong tam giác OAB, ta có $\dfrac{OA}{OB} = \tan\widehat{OBA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OB = 2OA = \dfrac{2}{\ln 2}$.

Do đó diện tích của tam giác OAB là $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{\ln^2 2} \approx 2{,}081$.

91. a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$; c) $a > 1$; d) $0 < a < 1$.

92. Theo đầu bài ta có $p(t) = 65$. Vậy ta có phương trình

$$65 = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} \Leftrightarrow t = 5750.\frac{\ln 0,65}{\ln 0,5} \approx 3574.$$

Trả lời : Tuổi của công trình kiến trúc đó là khoảng 3574 năm.

93. a) $x = 10$.

b) $x = -2$.

c) $x = 1{,}5$.

d) $x \in \{-1{,}5 ; -1\}$.

94. a) $x \in \left\{\frac{1}{16} ; 2\right\}$.

b) $x = 1$.

c) $x = 13$.

d) ĐKXĐ của phương trình là $x > 2$. Khi đó ta biến đổi phương trình thành

$$\frac{1}{6}\log_2(x-2) + \frac{1}{6}\log_2(3x-5) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_2(x-2)(3x-5) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-5) = 4 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}.$$

Tuy nhiên chỉ có $x = 3$ là thoả mãn ĐKXĐ.

95. $x = 1$. *Gợi ý* : Viết phương trình đã cho thành $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ và chú ý rằng vế trái là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

96. a) $(x ; y) = (6 ; 2)$. *Gợi ý* : Quy về giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ xy = 12 \end{cases} (x > y > 0).$$

b) $(x ; y) = (512 ; 1)$. *Gợi ý* : Đặt $u = \log_2 x$ và $v = 3^y$ $(v > 0)$.

97. a) Đặt $\log_4 x = y$, ta có bất phương trình $\dfrac{1-y}{1+2y} \leq \dfrac{1}{2}$.

Các nghiệm của bất phương trình này là $y < -\dfrac{1}{2}$ và $y \geq \dfrac{1}{4}$. Do đó

$$\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x < -\dfrac{1}{2} \\ \log_4 x \geq \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ x \geq \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

b) $S = (-\infty\ ;\ 0] \cup [\log_6 5\ ;\ 1)$. *Gợi ý :* Đặt $6^x = y$, ta có

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6y - y^2\right) \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6y - y^2 > 0 \\ 6y - y^2 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \leq 1 \\ 5 \leq y < 6. \end{array}\right.$$

c) $S = (4\ ;\ +\infty)$.

98. (C) ; **99.** (D) ; **100.** (B) ; **101.** (B) ; **102.** (C) ; **103.** (C) ; **104.** (D) ; **105.** (C) ;

106. (D) Gợi ý : $y' = -2\sin 2x e^{\cos 2x}$, $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

107. (A) ; **108.** (B) *Gợi ý :* Từ đồ thị ta có : Nếu $x > 0$ thì $a^x > c^x > b^x$.

109. (C) *Gợi ý :* Từ đồ thị ta có : $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$.

Mặt khác, khi $x > 1$ thì $\log_a x > \log_b x > 0 \Rightarrow \log_x a < \log_x b \Rightarrow a < b$.

110. (B).

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút).

ĐỀ SỐ 1

PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3 điểm)

Với mỗi câu hỏi dưới đây, trong các phương án đã cho, chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng bằng cách đánh dấu × vào ô trống ứng với nó trong phần trả lời (chẳng hạn, nếu chọn phương án C cho câu 2 thì đánh dấu × vào ô trống nằm ở dòng "Câu 2" và cột "C"). Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm.

Câu 1. Cho hai số $a = 2^{\frac{1}{10}} + 3^{\frac{1}{10}} - 2$ và $b = \log_2\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$. Khi đó

(A) a > 0 và b > 0 ; (B) a > 0 và b < 0 ;

(C) a < 0 và b < 0 ; (D) a < 0 và b > 0.

Câu 2. Nếu $\log_6 2 = m$ và $\log_6 5 = n$ thì

(A) $\log_3 5 = \dfrac{n}{m}$; (B) $\log_3 5 = \dfrac{n}{m-1}$;

(C) $\log_3 5 = \dfrac{n}{1+m}$; (D) $\log_3 5 = \dfrac{n}{1-m}$.

Câu 3. Biết rằng $a^{\log_{0,5} 7} > 1$ và $\log_b \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} > 0$. Khi đó

(A) a > 1 và b > 1 ; (B) a > 1 và 0 < b < 1 ;

(C) 0 < a < 1 và b > 1 ; (D) 0 < a < 1 và 0 < b < 1.

Phần trả lời của học sinh

Phương án	(A)	(B)	(C)	(D)
Câu 1				
Câu 2				
Câu 3				

PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 4 (2 điểm). Cho bốn số a, b, c, d dương và khác 1. Biết rằng ba số a, b và c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng

$$\frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \frac{\log_a d}{\log_c d}.$$

Câu 5 (2 điểm). Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = e^{2x+1}\sin 2x$; b) $y = \ln\sqrt{x^2+1}$.

Câu 6 (3 điểm). Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$;

b) $\begin{cases} 2\log_3 y = \log_2 x + 1 \\ \log_2 y = (\log_2 x - 1)\log_2 3. \end{cases}$

Đáp án

Câu 1. (B) ; **Câu 2.** (D) ; **Câu 3.** (C).

Câu 4. Ta có $\log_a d - \log_b d = \dfrac{1}{\log_d a} - \dfrac{1}{\log_d b} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{b}{a}\right)}{(\log_d a)(\log_d b)}$.

Tương tự : $\log_b d - \log_c d = \dfrac{1}{\log_d b} - \dfrac{1}{\log_d c} = \dfrac{\log_d\left(\dfrac{c}{b}\right)}{(\log_d b)(\log_d c)}$.

Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a}$, suy ra $\log_d\left(\dfrac{c}{b}\right) = \log_d\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Do đó $\dfrac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} = \dfrac{\log_d c}{\log_d a} = \dfrac{\log_a d}{\log_c d}$.

Câu 5. a) $y' = e^{2x+1}(\sin 2x)' + (e^{2x+1})'\sin 2x = 2e^{2x+1}(\sin 2x + \cos 2x)$.

b) $y' = \dfrac{(\sqrt{x^2+1})'}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Câu 6. a) Đặt $y = 3^x$ (y > 0), ta có phương trình $9y^2 - 30y + 9 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là y = 3 và $y = \dfrac{1}{3}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm 1$.

b) Phương trình thứ hai có thể viết thành $\dfrac{\log_2 y}{\log_2 3} = \log_2 x - 1$, hay $\log_3 y = \log_2 x - 1$. Do đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2\log_3 y = \log_2 x + 1 \\ \log_3 y = \log_2 x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_3 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 9. \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 2

PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3 điểm)

Với mỗi câu dưới đây, trong các phương án đã cho, chỉ có một phương án đúng. Hãy lựa chọn phương án đúng bằng cách đánh dấu × vào ô trống ứng với nó trong phần trả lời. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm.

Câu 1. Nếu $p = 7^{\log_2 3}$ và $q = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\sqrt{2}-1} 12}$ thì

(A) $p > 1$ và $q > 1$; (B) $p > 1$ và $q < 1$;

(C) $p < 1$ và $q > 1$; (D) $p < 1$ và $q < 1$.

Câu 2. Nếu $\log 2 = m$ và $\ln 2 = n$ thì

(A) $\ln 20 = \frac{n}{m} + 1$; (B) $\ln 20 = \frac{m+1}{n}$;

(C) $\ln 20 = \frac{n}{m} + m$; (D) $\ln 20 = \frac{m}{n} + m$.

Câu 3. Hai số a và b dương, khác 1 và thoả mãn :

– Đồ thị hàm số $y = a^x$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$.

– Đồ thị hàm số $y = \log_b x$ nằm ở phía dưới trục hoành khi $x > 1$.

Khi đó :

(A) $a > 1$ và $b > 1$; (B) $a > 1$ và $0 < b < 1$;

(C) $0 < a < 1$ và $b > 1$; (D) $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

Phần trả lời của học sinh

Phương án	(A)	(B)	(C)	(D)
Câu 1				
Câu 2				
Câu 3				

PHẦN TỰ LUẬN (7 điểm)

Câu 4 *(2 điểm)*. Cho biểu thức

$$A = \sqrt[5]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}}.$$

a) Rút gọn biểu thức $\log A$.

b) Biểu diễn A dưới dạng luỹ thừa của $\frac{2}{3}$ với số mũ hữu tỉ.

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho hàm số

$$f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}).$$

Tính $f'(\ln 2)$.

Câu 6 *(3 điểm)*. Giải các phương trình và bất phương trình

a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log x} < 5.2^{-\log x} - 4.$

Đáp án

Câu 1. (A) ; **Câu 2.** (C) ; **Câu 3.** (D).

Câu 4. a) $\log A = \frac{1}{5}\left[\log\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{6}\log\frac{2}{3}.$

b) $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}.$

Câu 5. $f'(x) = \dfrac{\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)'}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}}$. Mặt khác :

$$\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)' = e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^x\left(\sqrt{1 + e^{2x}} + e^x\right)}{\sqrt{1 + e^{2x}}}.$$

Do đó

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \text{ ; suy ra } f'(\ln 2) = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 6. a) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \dfrac{11}{2}$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = \frac{11}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{6}\log_2 x = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3.$$

b) Đặt $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log x}$ ta được bất phương trình $y^2 - 5y + 4 < 0$ hay $1 < y < 4$.

Vậy bất phương trình đã cho tương đương với $1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log x} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$.

Từ đó có $-2 < \log x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{100} < x < 1.$

Chương III

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Chương này cung cấp cho học sinh những kiến thức mở đầu về phép tính tích phân. Mục tiêu của chương là :

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Nắm vững khái niệm nguyên hàm.

– Nhớ bảng các nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

– Nhớ và hiểu được các tính chất cơ bản của nguyên hàm.

– Nhớ định nghĩa tích phân.

– Nắm vững phương pháp tính tích phân nhờ đổi biến số và tích phân từng phần.

– Bước đầu thấy được ý nghĩa thực tiễn và một số ứng dụng của tích phân trong hình học.

Kĩ năng

– Biết vận dụng các tính chất cơ bản của nguyên hàm, cách đổi biến số và cách tìm nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm của một số hàm số không quá phức tạp.

– Biết vận dụng các tính chất cơ bản của tích phân, phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân một số hàm số không quá phức tạp.

– Biết ứng dụng tích phân trong một số bài toán tính diện tích các hình phẳng và tính thể tích các vật thể.

B. CẤU TẠO CỦA CHƯƠNG

Nội dung của chương được dự kiến thực hiện trong 20 tiết, phân phối cụ thể như sau :

§1. Nguyên hàm	2 tiết
§2. Một số phương pháp tìm nguyên hàm	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
§3. Tích phân	3 tiết
§4. Một số phương pháp tính tích phân	2 tiết
Luyện tập	2 tiết
§5. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng	2 tiết
§6. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể	2 tiết
Luyện tập	2 tiết
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III	2 tiết

Ngoài ra trong chương có :

Bài đọc thêm : Tính gần đúng tích phân và khái niệm tổng tích phân

Các bài Em có biết :

Nguồn gốc kí hiệu nguyên hàm và tích phân ;

Ai là người phát minh ra phép tính tích phân ;

Vài nét về cuộc đời và sự nghiệp của Niu-tơn và Lai-bơ-nit.

C. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý TRONG CHƯƠNG

1. Bài toán tìm nguyên hàm của hàm số là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm nhưng khó hơn nhiều. Tuy nhiên những bài tập lắt léo về tìm nguyên hàm là không cần thiết và mang ít ý nghĩa, nhất là trong bối cảnh hiện nay, máy tính được phổ biến khá rộng rãi. Trong SGK chỉ có những bài toán cơ bản về tìm nguyên hàm, các bài tập khó, có tính chất mẹo mực đều bị loại bỏ. Giáo viên không nên yêu cầu học sinh giải các bài toán tìm nguyên hàm phức tạp, phải sử dụng những mẹo mực, tiểu xảo.

2. Sự ra đời của phép tính tích phân xuất phát từ việc tìm giới hạn của các tổng tích phân. Về lịch sử, tích phân (xác định) được định nghĩa là giới hạn của tổng tích phân. Công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit là một định lí cho thấy mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm và được coi là định lí cơ bản của phép tính tích phân. Tuy nhiên vì lí do sư phạm nên trong SGK trình bày theo một

trình tự "ngược" so với lịch sử hình thành của phép tính tích phân. Tích phân được định nghĩa thông qua nguyên hàm nhờ công thức Niu-tơn – Lai-bơ-nit.

3. Sự hạn chế của việc né tránh tổng tích phân làm học sinh sẽ không thấy được bản chất đích thực của phép tính tích phân, từ đó phải thừa nhận hàng loạt những ứng dụng của tích phân như tính diện tích, thể tích, quãng đường đi được của một vật.

4. Để phần nào khắc phục điều này, SGK có đưa bài đọc thêm : "Tính gần đúng tích phân và khái niệm tổng tích phân". Tổng tích phân chưa phải là tổng Ri-man như định nghĩa tích phân trong các giáo trình ở trường đại học, vì tổng này chỉ là tổng Ri-man ứng với phân hoạch đều và với các điểm chọn là đầu mút trái. Do chúng ta chỉ xét các hàm số liên tục nên giới hạn của dãy tổng tích phân chính là tích phân của hàm số. Thông qua bài đọc thêm này học sinh một lần nữa lại thấy được tầm quan trọng của khái niệm giới hạn và vấn đề tính gần đúng.

D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. NGUYÊN HÀM (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu được định nghĩa của nguyên hàm, các tính chất cơ bản của nguyên hàm ;

– Nhớ được nguyên hàm của một số hàm số thường gặp.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

Vận dụng được các tính chất cơ bản của nguyên hàm, để từ nguyên hàm của một số hàm số thường gặp có thể tìm được nguyên hàm của các hàm số khác phức tạp hơn.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Trước đây, trong SGK hợp nhất năm 2000 và trong sách thí điểm, kí hiệu $\int f(x)dx$ dùng để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của hàm số f.

Trong lần viết SGK mới này, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ còn dùng để chỉ một nguyên hàm bất kì của hàm số f, tức là là một hàm số thông thường chứ không phải là một tập hợp nữa.

Nói cách khác, ta không phân biệt hai hàm số chỉ khác nhau một hằng số, coi hai hàm số sai khác nhau một hằng số chỉ là một hàm số. Khi đó nguyên hàm của f là duy nhất (sai khác một hằng số) và được kí hiệu bởi $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Do vậy nếu F là một nguyên hàm của f thì $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ với C là hằng số.

Cách hiểu kí hiệu như vậy có những ưu điểm sau :

1) Viết $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ là hoàn toàn chính xác.

2) Chứng minh được dễ dàng công thức trong định lí 2 §1, công thức lấy nguyên hàm từng phần.

3) Ở §3 Tích phân, ta dùng kí hiệu rất trực quan và tiện lợi là :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b.$$

Kí hiệu này cho học sinh thấy mối liên hệ giữa kí hiệu tích phân của f từ a đến b với kí hiệu nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$. Do đó nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$ còn được gọi là tích phân bất định của f.

Sử dụng kí hiệu này, từ công thức đổi biến số và công thức lấy nguyên hàm từng phần ta nhận được ngay các công thức tương ứng trong tích phân.

Định lí 2 có thể diễn đạt bằng lời như sau : *Để tìm một nguyên hàm của $f + g$ ta lấy một nguyên hàm của f cộng với một nguyên hàm của g. Để tìm một nguyên hàm của kf ta lấy k nhân với một nguyên hàm của f.*

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

* ***Gợi ý phân phối thời gian :*** Bài này gồm 2 tiết.

Tiết đầu giới thiệu khái niệm nguyên hàm. Tiết còn lại giới thiệu nguyên hàm của một số hàm số thường gặp ; hai tính chất cơ bản của nguyên hàm và cách vận dụng hai tính chất đó để tìm nguyên hàm của các hàm số phức tạp hơn.

* ***Đồ dùng dạy học :*** Giáo viên chuẩn bị bảng các nguyên hàm của một số hàm số thường gặp và treo trong giờ học.

* ***Gợi ý về hoạt động trên lớp***

Bài toán mở đầu có mục đích cho học sinh thấy sự cần thiết của khái niệm nguyên hàm.

H1 $f(x) = 4\sin 2x$.

H2 *Mục đích :* Cho học sinh tập vận dụng bảng một số nguyên hàm thường gặp để tìm nguyên hàm.

Giải

a) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

b) $\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

H3 *Mục đích :* Cho học sinh tập vận dụng định lí 2 và bảng một số nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm các hàm số khác.

Giải

a) $\int (x^3 + 2x^2 - 4)dx = \int x^3 dx + \int 2x^2 dx - \int 4dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - 4x + C.$

b) Viết $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Suy ra $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

1. a) $x^3 + \frac{x^2}{4} + C$; b) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$;

c) $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$; d) $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$; e) $\frac{10^{2x}}{2\ln 10} + C$.

2. a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; b) $2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$;

c) $2x - \sin 2x + C$; d) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C$.

3. Khẳng định đúng là (C).

4. Đúng vì $-\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của f.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

Hiểu hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm : Phương pháp đổi biến số và phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Kĩ năng

Vận dụng được hai phương pháp này để giải các bài toán tìm nguyên hàm tương đối đơn giản tương tự với các ví dụ trong SGK.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Nói chung, không có một quy tắc chung để biết, khi nào dùng phương pháp đổi biến, khi nào dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần. Thậm chí nếu phải dùng phương pháp đổi biến số thì cũng không có quy tắc chung để xác định nên đổi biến số như thế nào. Trong phạm vi chương trình phổ thông, ta chỉ xét những bài toán tìm nguyên hàm đơn giản, trong đó biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$ trong trường hợp này ta đổi biến $u = u(x)$. Nếu phương pháp đổi biến số phức tạp hơn thì giáo viên phải chỉ ra cho học sinh cách đổi biến số.

2. Học sinh nên nhớ công thức (2) trong SGK khi thực hành giải toán.

   Vậy là trong đẳng thức $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ khi thay biến số độc lập x bởi hàm số u thì đẳng thức vẫn còn đúng.

3. Về công thức lấy nguyên hàm từng phần

   Có nhiều cách chọn $u(x)$ và $v'(x)$ sao cho $f(x) = u(x)v'(x)$ nhưng ta phải khéo chọn $u(x)$ và $v'(x)$ để :

   v' là hàm mà ta dễ tìm được nguyên hàm v ;

Việc tìm nguyên hàm của vu' đơn giản hơn so với việc tìm nguyên hàm của f. Đó chính là nghệ thuật sử dụng phương pháp tìm nguyên hàm từng phần.

4. Vài gợi ý về tìm nguyên hàm từng phần

Nếu phải tìm nguyên hàm của $f(x) = x^n e^{kx}$; $f(x) = x^n \sin(ax + b)$ hay $f(x) = x^n \cos(ax + b)$ ta chọn $u(x) = x^n$ và $v'(x)$ là nhân tử còn lại.

5. Công thức lấy nguyên hàm từng phần

Công thức $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$ (1)

có nội dung như sau :

Để tìm một nguyên hàm của hàm số $y = u(x)v'(x)$ ta lấy $u(x)v(x)$ trừ đi một nguyên hàm của hàm số $y = u'(x)v(x)$.

Không được viết công thức (1) dưới dạng

$$\int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x), \qquad (2)$$

(nhận được bằng chuyển vế hình thức).

Thật vậy, (2) được phát biểu là : Tổng của mỗi nguyên hàm F của uv' và mỗi nguyên hàm G của $u'v$ bằng uv.

Song điều này không đúng.

Thật vậy $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) = (u(x)v(x))'$ do đó $F(x) + G(x) = u(x)v(x) + C$ với C là hằng số.

Thành thử (1) có dạng tương đương là

$$\int u(x)v'(x)\,dx + \int v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x) + C. \qquad (3)$$

6. Nếu áp dụng công thức lấy nguyên hàm từng phần để tìm nguyên hàm của f ta đi đến

$$\int f(x)\,dx = G(x) - \int f(x)\,dx \qquad (4)$$

thì từ (4) suy ra

$$\int f(x)\,dx = \frac{G(x)}{2} + C. \qquad (5)$$

Thật vậy nếu F là một nguyên hàm của f thì theo (3) ta có

$F(x) = G(x) - (F(x) + C)$ với C là hằng số nào đó. Suy ra $F(x) = \dfrac{G(x)}{2} - \dfrac{C}{2}$.

Vậy $y = \dfrac{G(x)}{2}$ là một nguyên hàm của f. Do đó ta có (5).

7. Đôi khi sử dụng những phương pháp khác nhau, ta đi đến các kết quả về hình thức có vẻ khác nhau nhưng thực chất chúng là một.

Ví dụ. Tìm nguyên hàm của $y = \sin x\cos x$.

Cách 1. (Đổi biến)

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \sin x\,d(\sin x) = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Cách 2. (Tìm nguyên hàm từng phần)

Chọn $u(x) = \cos x$ do đó $v'(x) = \sin x$.

Vậy $v(x) = -\cos x$; $u'(x) = -\sin x$. Từ đó ta có

$$\int \sin x\cos x\,dx = -\cos^2 x - \int \sin x\cos x\,dx.$$

Theo (5) ta được đáp số là $-\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$.

Cách 3. (dùng biến đổi lượng giác) Ta có $\sin x\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$.

Suy ra kết quả là $-\dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

Ba đáp số này đều đúng cả, vì chúng sai khác nhau một hằng số. Thật vậy

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C_1\right) - \left(-\frac{\cos^2 x}{2} + C_2\right) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} + C = \frac{1}{2} + C.$$

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2} + C_1\right) - \left(-\frac{\cos 2x}{4} + C_2\right) = \frac{2\sin^2 x + (1 - 2\sin^2 x)}{4} + C = \frac{1}{4} + C.$$

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

*** *Dự kiến phân phối thời gian :*** Bài này gồm 2 tiết.

- Tiết đầu dành cho phương pháp đổi biến số.

- Tiết sau dành cho phương pháp tìm nguyên hàm từng phần.

• Gợi ý về hoạt động trên lớp

Các hoạt động trong bài này có chung mục đích là hình thành kĩ năng tìm nguyên hàm bằng các phương pháp đã học.

H1 *Giải.* Ta có

$$2x(x^2+1)^3 = (x^2+1)^3(x^2+1)'.$$

Đặt $u = u(x) = x^2+1$ ta có

$$\int 2x(x^2+1)^3\,dx = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C.$$

H2 *Giải.* Đặt $u = 1 + x^2$. Khi đó $xe^{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^u\,du$. Từ đó cho ta kết quả là $\frac{1}{2}e^{1+x^2} + C$.

H3 *Giải.* Chọn $u(x) = \frac{x}{3}$; $v'(x) = e^{2x}$. Khi đó $u'(x) = \frac{1}{3}$, $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho ta

$$\int \frac{x}{3}e^{2x}\,dx = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{12}e^{2x} + C.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

5. a) Đổi biến $u = 1 - x^3$. Ta có $\frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx = \frac{-3du}{\sqrt{u}}$.

Kết quả là $-6(1-x^3)^{\frac{1}{2}} + C$.

b) Đổi biến $u = 5x + 4$. Kết quả : $\frac{2}{5}\sqrt{5x+4} + C$.

c) Đổi biến $u = 1 - x^2$. Ta có $x\sqrt[4]{1-x^2}\,dx = -\frac{u^{\frac{1}{4}}\,du}{2}$.

Kết quả là $-\frac{2}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{4}}+C.$

d) Đổi biến $u = 1+\sqrt{x}$. Ta có $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx = \frac{2du}{u^2}.$

Kết quả là : $-\frac{2}{1+\sqrt{x}}+C.$

6. a) Đặt $u = x$, $v' = \sin\frac{x}{2}$. Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho ta kết quả là $-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}+C$.

b) Đặt $u = x^2$, $v' = \cos x$. Ta có $\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$.

Tính $\int x\sin x\,dx$ bằng công thức lấy nguyên hàm từng phần đặt $u = x$, $v'(x) = \sin x \Rightarrow du = dx$, $v = -\cos x$ cho ta

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Thay vào ta được kết quả

$$x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

c) Đặt $u = x$, $v' = e^x$.

Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho kết quả $xe^x - e^x + C$.

d) Đặt $u = \ln(2x)$, $v' = x^3$ ta được kết quả là $\frac{x^4\ln(2x)}{4}-\frac{x^4}{16}+C$.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập này là : Củng cố và nâng cao kĩ năng tìm nguyên hàm bằng cách sử dụng các tính chất cơ bản của nguyên hàm và áp dụng phương pháp đổi biến số hay phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

7. a) Đổi biến $u = 7-3x^2$. Khi đó $3x\sqrt{7-3x^2}\,dx = -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$.

Kết quả $-\frac{1}{3}(7-3x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

b) Đổi biến $u = 3x + 4$. Ta được kết quả $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$.

c) Đổi biến $u = 3x + 2$. Ta được kết quả $\frac{1}{3}\tan(3x+2)+C$.

d) Đổi biến $u = \sin\frac{x}{3}$. Khi đó $\sin^5\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx = 3u^5\,du$.

Từ đó ta được kết quả $\frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{x}{3}\right)+C$.

8. a) Đổi biến $u = \frac{x^3}{18}-1$. Khi đó $x^2\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^5 dx = 6u^5\,du$.

Từ đó ta được kết quả $\left(\frac{x^3}{18}-1\right)^6+C$.

b) Đổi biến $u = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Khi đó $\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx = -u\,du$.

Từ đó ta được kết quả $-\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{2}+C$.

c) Đặt $u = x^3$, $v' = e^x$. Ta có $\int x^3e^x\,dx = e^xx^3 - 3\int x^2e^x\,dx$.

Tương tự việc tính $\int x^2e^x\,dx$ lại đưa về tính $\int xe^x\,dx$ mà ta đã biết ở bài 6c).

Cuối cùng ta được kết quả là $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$.

d) Đổi biến $u = \sqrt{3x-9}$. Ta có $du = \frac{3\,dx}{2u}$ hay $dx = \frac{2u\,du}{3}$.

Vậy $e^{\sqrt{3x-9}}\,dx = \frac{2}{3}ue^u\,du$. Theo công thức đổi biến và bài 6c) ta được

$$\int\frac{2}{3}ue^u\,du = \frac{2}{3}(ue^u-e^u)+C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3x-9}\,e^{\sqrt{3x-9}}-e^{\sqrt{3x-9}}\right)+C.$$

9. a) Đặt $u = x^2$, $v' = \cos 2x$. Khi đó $u' = 2x$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$. Vậy

$$\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x\,dx.$$

Lại dùng công thức lấy nguyên hàm từng phần ta có

$$\int x \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Thay vào ta được kết quả là

$$\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

b) Đặt $u = \ln x$, $v' = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Công thức lấy nguyên hàm từng phần cho ta

$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

c) Đặt $u = \sin x$ ta được kết quả là $\frac{\sin^5 x}{5} + C$.

d) Đặt u = x^2 ta được kết quả là $\frac{\sin x^2}{2} + C$.

§3. TÍCH PHÂN (3 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Biết định nghĩa tích phân ;

– Hiểu được hai ứng dụng quan trọng trong hình học và cơ học của tích phân là tính diện tích hình thang cong và quãng đường đi được của một vật.

– Hiểu và nhớ được các tính chất cơ bản của tích phân.

Kĩ năng

– Biết tính.tích phân bằng định nghĩa.

– Biết áp dụng các tính chất cơ bản của tích phân để tính tích phân.

– Giải các bài toán tính diện tích hình thang cong và tìm quãng đường đi được của vật bằng tích phân.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Về mặt lịch sử, sự ra đời của phép tính tích phân xuất phát từ việc tìm giới hạn của các tổng tích phân. (Tích phân có nghĩa là : Tích hợp các phần nhỏ). Tuy nhiên vì lí do sư phạm trong SGK tích phân được định nghĩa thông qua nguyên hàm coi như là một công thức tính toán. Thành thử việc học sinh nắm được định nghĩa này khá dễ dàng.

2. Tuy nhiên cách định nghĩa này có những hạn chế sau :

– HS không thấy được bản chất của kí hiệu tích phân, không thấy được lí do tại sao tích phân lại có ứng dụng rộng rãi như vậy. Do đó học sinh chỉ biết tính tích phân theo công thức một cách máy móc và sẽ không biết áp dụng tích phân vào các tình huống thực tiễn.

– GV khó giải thích cho học sinh nguồn gốc của kí hiệu $\int$.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Bài này dạy trong 3 tiết.

Tiết 1 : Bài toán tính diện tích hình thang cong và tính quãng đường đi của vật.

Tiết 2, 3 : Định nghĩa tích phân, các tính chất cơ bản của tích phân trong đó khoảng 1,5 tiết dành cho các tính chất cơ bản của tích phân.

**** Gợi ý về hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Giúp HS hiểu rõ thêm về bài toán 1.

$F(x) = \dfrac{x^5}{5}$. Do đó $S = F(2) - F(1) = \dfrac{31}{5}$.

H2 *Mục đích :* Chứng minh tính "hợp lệ" của định nghĩa tích phân.

$G(x) = F(x) + C$. Do đó

$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$.

H3 *Mục đích :* Giúp HS bước đầu hiểu ý nghĩa cơ học của tích phân.

Kết luận suy ra từ định nghĩa và ý nghĩa cơ học của đạo hàm.

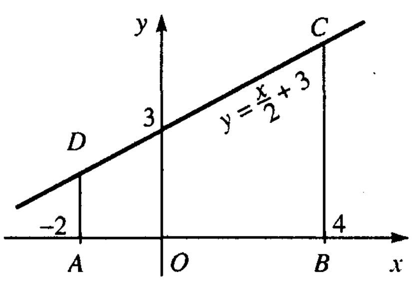
Mục đích của các hoạt động **H4** và **H5** là giúp HS khắc sâu thêm khái niệm và tính chất của tích phân.

H4 Chứng minh dễ dàng bằng cách áp dụng trực tiếp định nghĩa.

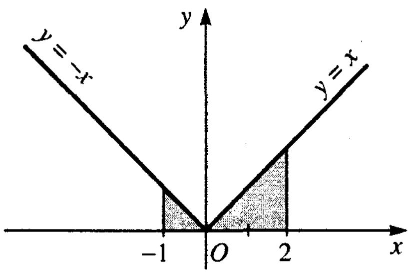
H5 Ta có $\int_0^b (2x - 4)\,dx = (x^2 - 4x)\Big|_0^b = b^2 - 4b = 0$. Giải ra ta được $b = 0$ và $b = 4$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

10. a) Tích phân đó bằng diện tích hình thang *ABCD* với cạnh nghiêng là đường thẳng $y = \frac{x}{2} + 3$ (h.3.1). Diện tích đó là $(2 + 5)\frac{6}{2} = 21$.



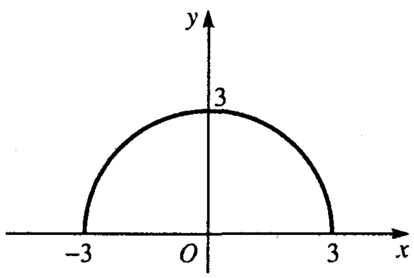
Hình 3.1



Hình 3.2

b) Từ hình 3.2 ta thấy hình *A* gồm hai tam giác. Do đó tích phân bằng diện tích của *A* và là $2 + 0{,}5 = 2{,}5$.

c) Tích phân bằng diện tích nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ (h.3.3). Đây là đường tròn tâm là gốc toạ độ bán kính là 3. Do đó diện tích nửa đường tròn là $9\frac{\pi}{2} = 4{,}5\pi$.



Hình 3.3

11. a) $\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = 4 + 6 = 10$;

b) $3.(-4) = -12$;

c) $6 - 8 = -2$;

d) $4.6 - 8 = 16$.

12. $\int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^0 f(x)\,dx + \int_0^4 f(x)\,dx = -3 + 7 = 4.$

13. a) $\int_a^b f(x)\,dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Do đó $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$. Ta có $h(x) \geq 0$ trên $[a ; b]$. Theo a) ta có

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq 0. \qquad (1)$$

Mặt khác $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

14. a) Quãng đường $S = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2\sin 2t)\,dt = \frac{3\pi}{4} - 1.$

b) Gọi t_0 là thời điểm vật dừng lại. Ta có $v(t_0) = 0$. Suy ra $t_0 = 16$.

Vậy $S = \int_0^{16} (160 - 10t)\,dt = 1280\,(m)$.

15. Gọi $v(t)$ là vận tốc của vật. Ta có $v'(t) = a(t) = 3t + t^2$.

Suy ra $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$. Vì $v(0) = 10$ nên suy ra $C = 10$.

Vậy $v(t) = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + 10$. Thành thử quãng đường vật đi được là

$$S = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \frac{4300}{3} \text{ (m)}.$$

16. Gọi $v(t)$ là vận tốc của viên đạn. Ta có $v'(t) = a(t) = -9{,}8$.

Suy ra $v(t) = -9{,}8t + C$. Vì $v(0) = 25$ nên suy ra $C = 25$. Vậy $v(t) = -9{,}8t + 25$.

Gọi T là thời điểm viên đạn đạt độ cao lớn nhất. Tại đó viên đạn có vận tốc bằng 0. Vậy $v(T) = 0$. Suy ra $T = \dfrac{25}{9{,}8} \approx 2{,}55$ (giây).

Quãng đường viên đạn đi được cho tới thời điểm $T = 2{,}55$ (giây) là

$$S = \int_0^T (-9{,}8t + 25)\,dt = -9{,}8\,\frac{T^2}{2} + 25T \approx 31{,}89 \text{(m)}.$$

Vậy quãng đường viên đạn đi được cho đến khi rơi xuống đất là $2S \approx 63{,}78$(m).

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

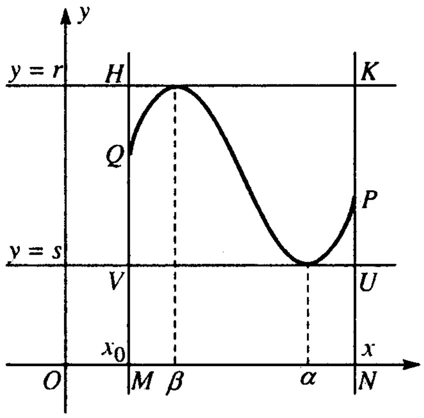
1. *Chứng minh định lí 1*

Kí hiệu $S(x)$ (với $x \in K = [a\ ;\ b]$, $x > a$) là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số f, trục hoành và hai đường thẳng đi qua các điểm a và x trên trục hoành và vuông góc với trục hoành. Như vậy ta có một hàm số S xác định trên khoảng $J = \{x > a\ ;\ x \in K\}$ với $S(a) = 0$. Diện tích S của hình thang cong nói trong định lí chính là $S(b)$. Ta phải chứng minh

$S(b) = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm tuỳ ý của f.

Trước hết ta chứng minh S là một nguyên hàm của f trên J.

Thật vậy, giả sử $x_0 \in J$ là một điểm tuỳ ý cố định. Xét điểm $x > x_0$. Khi đó $S(x) - S(x_0)$ là diện tích hình thang cong $MNPQ$.



Hình 3.4

Gọi r, s tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số f trên đoạn $[x_0 ; x]$. Giả sử $s = f(\alpha)$ và $r = f(\beta)$. Dựng hình chữ nhật $MNUV$ với một cạnh MN, cạnh kia có độ dài s. Dựng hình chữ nhật $MNKH$ với một cạnh MN, cạnh kia có độ dài r (h.3.4).

Vì toàn bộ cạnh cong PQ nằm giữa hai đường thẳng $y = s$ và $y = r$ nên ta có

$$S_{MNUV} < S_{MNPQ} < S_{MNKH}$$

hay $$s(x - x_0) < S(x) - S(x_0) < r(x - x_0)$$

hay $$f(\alpha) < \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} < f(\beta). \qquad (1)$$

Khi x dần tới x_0 thì α và β cũng dần tới x_0.

Vì f liên tục tại x_0 nên suy ra

$$\lim_{x \to x_0} f(\alpha) = \lim_{x \to x_0} f(\beta) = f(x_0). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\lim_{x \to x_0} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Tương tự với $x < x_0$, ta cũng có $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$.

Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ hay $S'(x_0) = f(x_0)$.

Vì x_0 tuỳ ý nên $S'(x) = f(x)$ với mọi $x \in J$.

Vì F là nguyên hàm của f trên J nên tồn tại hằng số C để $F(x) = S(x) + C$.

Suy ra $F(a) = S(a) + C = C$ (do $S(a) = 0$). Vậy $F(b) = S(b) + F(a)$ hay $S(b) = F(b) - F(a)$. Định lí được chứng minh.

2. *Khái niệm diện tích hình thang cong*

Trong SGK và trên đây ta có sử dụng khái niệm diện tích hình thang cong mà không nêu ra một định nghĩa chính xác khái niệm đó (có lẽ, đối với học sinh, không nên đi quá sâu vào vấn đề này). Có thể trình bày sơ lược điều đó như sau :

Giả sử ta đã biết diện tích $s(P)$ của một hình (miền) đa giác P trong mặt phẳng với các tính chất quen thuộc.

Một hình phẳng $\mathcal{H}$ gọi là đo được theo nghĩa Jordan (viết tắt là J - đo được) nếu cận trên của diện tích các đa giác $P \subset \mathcal{H}$ bằng cận dưới của diện tích các đa giác $Q \supset \mathcal{H}$; khi đó, cận trên (và cận dưới) ấy được gọi là diện tích của $\mathcal{H}$ (theo nghĩa Jordan).

Có thể chứng minh được rằng nếu $f : \underset{x \mapsto f(x)}{[a;b] \to \mathbb{R}}$ là hàm số liên tục, lấy giá trị không âm thì hình thang cong $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\right\}$ là J - đo được và diện tích của nó (theo nghĩa Jordan) là diện tích hình thang cong đã nói trong SGK. (Ý tưởng chứng minh gần với chứng minh định lí 1 ở trên).

Chú ý : Dễ thấy hình thang cong $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le g(x)\right\}$,

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \end{cases}$ là hình không J - đo được.

3. ***Tổng tích phân trên và tổng tích phân dưới***

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b thuộc K $(a < b)$. Với mỗi số nguyên dương n, ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con bằng nhau bởi các điểm chia

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_n = b\ (k = 0, 1, \dots, n).$$

Gọi m_k và M_k là giá trị bé nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f trên $[x_k, x_{k+1}]$. Kí hiệu

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k),$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k).$$

U_n và L_n được gọi là tổng tích phân trên và tổng tích phân dưới cấp n của hàm số f trên $[a ; b]$.

Người ta đã chứng minh được rằng

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu và nhớ được các công thức (1) và (2) trong SGK đó là cơ sở của hai phương pháp tính tích phân ;

– Biết hai phương pháp cơ bản để tính tích phân : Phương pháp đổi biến số và phương pháp tính tích phân từng phần.

Kĩ năng

Vận dụng được hai phương pháp này để giải các bài toán tính tích phân, với mức độ khó tương tự với các ví dụ trong SGK.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Ta có hai cách tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số.

Cách 1 : Áp dụng công thức (1) từ trái sang phải.

Cách 2 : Áp dụng công thức (1) từ phải sang trái.

Đối với việc tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số, ta chỉ trình bày một cách (do không giới thiệu khái niệm hàm ngược). Cách này tương ứng với cách 1 của tính tích phân.

2. Trong công thức đổi biến số, giáo viên nhắc lại cho học sinh rằng, giá trị của tích phân không phụ thuộc vào kí hiệu ta dùng làm biến số lấy tích phân.

3. Bản chất của phương pháp tích phân từng phần như sau :

Giả sử ta cần tính $\int_a^b f(x)\,dx$. *Ta chọn* $u(x)$ *và* $v'(x)$ *sao cho* $f(x) = u(x)v'(x)$. *Khi đó theo công thức tích phân từng phần, việc tính* $\int_a^b f(x)\,dx$ *quy về tính* $\int_a^b v(x)u'(x)\,dx$.

Có nhiều cách chọn $u(x)$ và $v'(x)$ sao cho $f(x) = u(x)v'(x)$. Tương tự như phương pháp tìm nguyên hàm từng phần ta phải khéo chọn $u(x)$ *và* $v'(x)$.

4. Các ví dụ và bài tập trong bài này đều rất đơn giản. Giáo viên không nên khai thác các mẹo mực, tiểu xảo trong vấn đề tính tích phân.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

*** *Dự kiến phân phối thời gian :*** Bài này chia làm 2 tiết.

Tiết đầu dành cho phương pháp đổi biến số.

Tiết thứ hai dành cho phương pháp tích phân từng phần.

*** *Gợi ý về hoạt động trên lớp :***

H1 *Giải*

Ta có $\sqrt{2x+3} = \frac{1}{2}\sqrt{2x+3}.(2x+3)'$.

Đặt $u = 2x + 3$ ta có $u(1) = 5$, $u(3) = 9$. Từ đó

$$I = \frac{1}{2}\int_5^9 \sqrt{u}\,du = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{2}{3}\right)\left. u^{\frac{3}{2}}\right|_5^9 = \frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5}).$$

H2 *Giải*. Đặt $x = \sin t$. Ta có $0 = \sin 0$ và $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$.

Vì $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = dt$ với $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$.

H3 *Giải.* Đặt $u = x$, $v' = \sin x$, suy ra $u' = 1$ và $v = -\cos x$. Ta có

$$I = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0 + 1 = 1.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

Kí hiệu I là tích phân cần tính trong các bài tập từ bài 17 đến bài 25

17. a) Đổi biến $u = x + 1$. Khi đó $I = \int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$;

b) Đổi biến $u = \tan x$. Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

Khi đó $\int_0^1 u\,du = \frac{1}{2}$;

c) Đặt $u = 1 + t^4$. Khi đó $I = \int_1^2 \frac{u^3\,du}{4} = \frac{15}{16}$;

d) Đặt $u = 4 + x^2$. Khi đó $I = \int_4^5 \frac{5du}{2u^2} = \frac{1}{8}$;

e) Đặt $u = 1 + x^2$. Khi đó $I = \int_1^4 \frac{2du}{\frac{1}{u^2}} = 4.$

f) Đặt $u = 1 - \cos 3x$. Khi đó $I = \int_0^1 \frac{u\,du}{3} = \frac{1}{6}.$

18. a) Đặt $u = \ln x$, $v' = x^5$ suy ra $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^6}{6}$.

Khi đó $I = \left(\frac{x^6 \ln x}{6}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5\,dx}{6} = \frac{32}{3}\ln 2 - \frac{7}{4}.$

b) Đặt $u = x + 1,\ v' = e^x$ suy ra $u' = 1,\ v = e^x$.

Khi đó $I = \left((x+1)e^x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \,dx = e.$

c) Đặt $u = \cos x,\ v' = e^x$ suy ra $u' = -\sin x,\ v = e^x$.

Khi đó $I = \left(\cos x.e^x\right)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx = -1 - e^\pi + J.$ Đặt $u = \sin x,\ v' = e^x$;

Khi đó $J = \left(\sin x.e^x\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx = -I.$ Vậy $I = -1 - e^\pi - I.$

Suy ra $I = -\dfrac{1+e^\pi}{2}.$

d) Đặt $u = x$, $v' = \cos x$. $I = \left(x\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \dfrac{\pi}{2} - 1.$

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Dạng vi phân và công thức đổi biến số của tích phân

1. Biểu thức $f(x)dx$ dưới dấu nguyên hàm thường được coi là một dạng vi phân bậc một.

Cụ thể : Giả sử J là một khoảng, đoạn hay nửa khoảng (tức là một tập con liên thông) trong $\mathbb{R}$, $f : \underset{x \mapsto f(x)}{J \to \mathbb{R}}$ là một hàm số trên J thì biểu thức $\omega = f(x)dx$ (dx là vi phân của biến số độc lập x) gọi là một *dạng vi phân bậc một trên J.*

Sau đây ta chỉ xét các dạng vi phân $f(x)dx$ với f là hàm số liên tục.

Với các phép toán cộng hai dạng vi phân và nhân một dạng vi phân với một số định nghĩa một cách tự nhiên, tập các dạng vi phân bậc một trên J làm thành một $\mathbb{R}$ - không gian vectơ, kí hiệu là $\Omega^1(J)$.

Ví dụ : Nếu $F : \underset{x \mapsto F(x)}{J \to \mathbb{R}}$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên J thì vi phân $d(F(x)) = F'(x)dx$ là một phần tử của $\Omega^1(J)$.

Khi đó nói "F là một nguyên hàm của f" (mà ta đã giả sử luôn luôn tồn tại F) tương đương với nói rằng "dạng vi phân $f(x)\mathrm{d}x \in \Omega^1(J)$ chính là $\mathrm{d}(F(x))$."

2. Cho $\varphi : \underset{t \mapsto x=\varphi(t)}{K \to J}$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên tập liên thông $K \subset \mathbb{R}$. Xét ánh xạ tuyến tính φ^* xác định bởi

$$\varphi^* : \Omega^1(J) \to \Omega^1(K)$$
$$\omega = f(x)\mathrm{d}x \mapsto \varphi^*\omega = f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Với $\omega = f(x)\mathrm{d}x \in \Omega^1(J)$, với $a, b \in J$, ta định nghĩa

$$\int_a^b \omega = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(b) - F(a)$$

thì công thức đổi biến số của tích phân (xác định) còn có thể được diễn tả thành :

với $\omega \in \Omega^1(J)$, với $\varphi : \underset{t \mapsto x=\varphi(t)}{K \to J}$ có đạo hàm liên tục thì với mọi $\alpha, \beta \in K$, ta có

$$\int_\alpha^\beta \varphi^*\omega = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \omega. \qquad (*)$$

Có thể chứng minh (*) nhờ vi phân của hàm hợp.

Thật vậy, viết $\omega = f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\big(F(x)\big)$ thì $\varphi^*\omega = \varphi^*\big(\mathrm{d}\big(F(x)\big)\big) = \mathrm{d}\big(\mathrm{F}\big(\varphi(\mathrm{t})\big)\big)$

nên vế trái của (*) là $\int_\alpha^\beta \varphi^*\omega = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\big(F\big(\varphi(\mathrm{t})\big)\big) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$ còn vế phải của (*) là $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \omega = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \mathrm{d}\big(\mathrm{F}(x)\big) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$.

LUYỆN TẬP (2 tiết)

Mục tiêu của hai tiết luyện tập này là rèn luyện kĩ năng tính tích phân bằng các phương pháp được học.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

19. a) Đổi biến. Đặt $u = t^5 + 2t$. Khi đó $I = \int_0^3 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{3}$.

b) Đặt $u = x$, $v' = \dfrac{\sin 2x}{2}$. Khi đó $I = \left(-\dfrac{x\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 2x}{4}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{8}$.

20. a) Đổi biến. Đặt $u = 5 - 4\cos t$. Khi đó $I = \int_1^9 \dfrac{5}{4}u^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}u = 9^{\frac{5}{4}} - 1$.

b) Đổi biến. Đặt $u = \sqrt{x^2+1}$. Khi đó $I = \int_1^2 (u^2 - 1)\mathrm{d}u = \dfrac{4}{3}$.

21. (B) Đổi biến. Đặt $u = 2x$. Khi đó $I = \int_2^6 \dfrac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = F(6) - F(2)$.

22. a) Đổi biến. Đặt $u = 1 - x$. Khi đó $I = -\int_1^0 f(1-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(1-u)\,\mathrm{d}u$.

b) $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Ta lại có $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = -\int_1^0 f(-u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(-x)\mathrm{d}x$.

Do đó $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x$.

23. Đổi biến $u = -x$.

a) Nếu f là hàm lẻ thì $f(x) = -f(-x)$.

Do đó $I = -\int_1^0 f(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = -3$.

b) Nếu f là hàm chẵn thì $f(x) = f(-x)$. Do đó $I = -\int_1^0 f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 3$.

24. a) Đổi biến $u = x^3$. Khi đó $I = \int_1^8 \frac{e^u du}{3} = \frac{e^8 - e}{3}$.

b) Đổi biến $u = \ln x$. Khi đó $I = \int_0^{\ln 3} u^2 du = \frac{(\ln 3)^3}{3}$.

c) Đổi biến $u = 1 + x^2$. Khi đó $I = \int_1^4 \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} du = \frac{7}{3}$.

d) Đổi biến $u = 3x^3$. Khi đó $I = \int_0^3 \frac{1}{9}e^u du = \frac{e^3 - 1}{9}$.

e) Đổi biến $u = 1 + \sin x$. Khi đó $I = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln 2$.

25. a) Tích phân từng phần. Đặt $u = x$, $v' = \cos 2x \Rightarrow u' = 1$, $v = \frac{\sin 2x}{2}$.

Khi đó $I = \left(x\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

b) Đổi biến $u = \ln(2 - x)$ ta có $I = \int_0^{\ln 2} u du = \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

c) Tích phân từng phần. Đặt $u = x^2$, $v' = \cos x \Rightarrow u' = 2x$, $v = \sin x$.

Ta có $I = \left(x^2 \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$.

Bằng tích phân từng phần $u = x$, $v = \cos x$ ta tính được $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = 2$.

Vậy $I = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

d) Đổi biến $u = x^3 + 1$. Khi đó $I = \frac{1}{3}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1)$.

e) Đặt $u = \ln x$, $v' = x^2$. Ta có $I = \left(\frac{1}{3}x^3\ln x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2dx}{3} = \frac{2e^3+1}{9}$.

§5 ; §6. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG (2 tiết) VÀ THỂ TÍCH VẬT THỂ (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

– Hiểu các công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số và hai đường thẳng vuông góc với trục hoành.

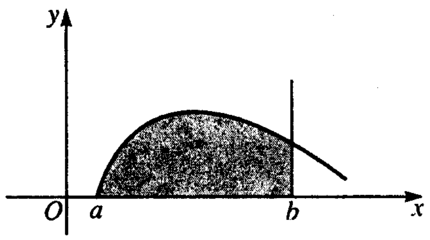
– Hiểu công thức tính thể tích vật thể, thể tích khối tròn xoay.

Kĩ năng

Ghi nhớ và vận dụng được các công thức nêu trong bài vào việc giải các bài toán cụ thể.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

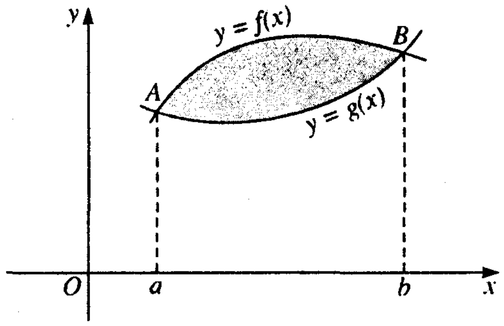
1. Cho hàm số $y = f(x)$ không âm. Giả sử đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $x = a$. Hình giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và đường thẳng $x = b$ ($a < b$) gọi là tam giác cong (h.3.5). Tam giác cong cũng được xem là một trường hợp riêng của hình thang cong (đáy nhỏ bằng 0) do đó diện tích cũng được tính bởi công thức $S = \int_a^b f(x)\,dx$.



Hình 3.5

2. Cho hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị cắt nhau tại hai điểm A, B. Giả sử a, b tương ứng là hoành độ các giao điểm A và B ($a < b$) (h.3.6). Khi đó diện tích hình phẳng H giới hạn bởi hai đồ thị ấy bằng

$$S(H) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x.$$



Hình 3.6

Để khử dấu giá trị tuyệt đối, ta giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên $[a ; b]$. Giả sử phương trình có các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với $a = x_0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq x_{n+1} = b$. Khi đó $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên mỗi đoạn $[x_i ; x_{i+1}]$. Trên mỗi đoạn đó, ta có

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x \right|. \text{ Vậy } S(H) = \sum_{i=0}^{n} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - g(x)] \mathrm{d}x \right|.$$

Khi giải các bài toán tính diện tích và thể tích nếu không yêu cầu thì học sinh không nhất thiết phải vẽ hình, nhưng giáo viên nên khuyến khích học sinh vẽ hình nếu có thể.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

* ***Dự kiến phân bố thời gian :*** Bài §5 và §6 chia làm 4 tiết.

Hai tiết đầu dành cho tính diện tích hình phẳng.

Hai tiết còn lại cho tính thể tích vật thể và khối tròn xoay.

* ***Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\text{H1}}$ *Giải.* Ta có $f(x) > 0$ trên $[0 ; 2]$ và $f(x) < 0$ trên $[2 ; 3]$. Vậy

$$S = \int_0^2 (4 - x^2) \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 4) \mathrm{d}x = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

$\boxed{\text{H2}}$ *Giải.* Trong đoạn $[-2 ; 2]$ đồ thị hàm số $y = x + 2$ nằm trên parabol $y = x^2 + x - 2$ do đó

$$S = \int_{-2}^{2} (x + 2 - x^2 - x + 2) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \mathrm{d}x = \frac{32}{3}.$$

$\boxed{\text{H}}$ $V = \pi\int_1^2 x^4\,dx = \dfrac{31\pi}{5}$.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

26. $S = \int_0^{\frac{7\pi}{6}} (\sin x + 1)\,dx = \dfrac{7\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

27. a) $S = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Giao điểm của hai đồ thị có hoành độ là $x = 0$ và $x = 1$. Trong đoạn $[0\,;\,1]$ đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$. Vậy ta có

$$S = \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx = \frac{1}{12}.$$

c) Trong miền $x \geq 0$ giao điểm của hai đồ thị có hoành độ là $x = 0$ và $x = 2$. Trong đoạn $[0\,;\,2]$ đồ thị hàm số $y = 2x^2$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Vậy ta có

$$S = \int_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)\,dx = \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx = \frac{64}{15}.$$

28. a) (Hình 3.7) $S = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4 + x^2 + 2x)\,dx = \dfrac{11}{3}$;

b) $S = \int_{-2}^{1} (-x^2 - 2x - x^2 + 4)\,dx = 9$.

c) $S = \int_{-2}^{4} \left|x^3 - 4x\right| dx = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx - \int_0^2 (x^3 - 4x)dx + \int_2^4 (x^3 - 4x)dx = 44$.

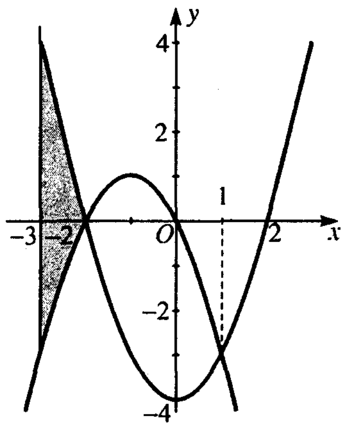
29. $V = \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)\,dx = \dfrac{16}{3}$.

30. $V = \int_0^{\pi} \frac{(2\sqrt{\sin x})^2\sqrt{3}}{4} dx = 2\sqrt{3}$.

31. $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \frac{7\pi}{6}$.

32. $V = \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 3\pi$.

33. $V = \pi \int_{-1}^1 5y^4 dy = 2\pi$.



Hình 3.7

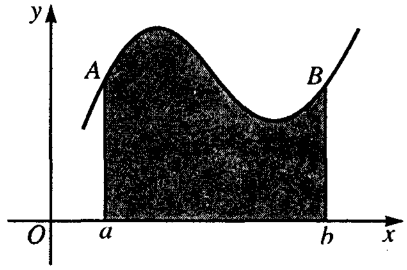
V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Ứng dụng tích phân để tính độ dài đường cong

Giả sử ta muốn tính độ dài đường cong có phương trình $y = f(x)$ từ điểm A tới điểm B. Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ. *Cho hàm số f có đạo hàm f' liên tục trên đoạn [a ; b]. Khi đó độ dài đường cong y = f(x) từ điểm A đến điểm B là*

$T = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ *trong đó a, b (a < b) tương ứng là hoành độ các điểm A và B* (hình 3.8).



Hình 3.8

Chứng minh

Giả sử a, b tương ứng là hoành độ của A và B ($a < b$). Chia đoạn $[a ; b]$ thành n phần bởi các điểm chia

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, ..., x_k = a + k\frac{b-a}{n}, ..., x_n = b.$$

Giả sử A_k là điểm trên đường cong có hoành độ x_k, tung độ $f(x_k)$ ($A_0 = A, A_n = B$).

Độ dài cạnh A_kA_{k+1} là $\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}$ do đó độ dài đường gấp khúc $A_0A_1...A_n$ là $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}$

Gọi T là độ dài cung AB, độ dài cung AB bằng giới hạn của dãy T_n.

$$T = \lim T_n$$

Theo định lí La-grăng, ta có $f(x_{k+1})-f(x_k) = f'(c_k)(x_{k+1}-x_k)$, trong đó c_k là một điểm thuộc khoảng $(x_k\,;\,x_{k+1})$.

Vậy $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,(x_{k+1}-x_k)$.

Đặt $H(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ Ta có $T_n = \sum_{k=1}^{n-1}H(c_k)(x_{k+1}-x_k)$. Gọi U_n, L_n là các tổng tích phân trên và tổng tích phân dưới cấp n của $H(x)$ đối với phân hoạch đoạn $[a\,;\,b]$ thành n đoạn bằng nhau. Ta có

$$m_k \le H(c_k) \le M_k \text{ do đó } L_n \le T_n \le U_n.$$

Mặt khác $\lim U_n = \lim L_n = \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x$ (xem phần bổ sung kiến thức của §4) nên

$$T = \lim T_n = \int_a^b H(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ví dụ. Tính độ dài đường cong $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$ từ điểm A có hoành độ $a = 0$ đến điểm B có hoành độ $b = 1$.

Giải

Ta có $f'(x) = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (f'(x))^2 = 8x$. Từ đó thay vào công thức ta được

$$T = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,\mathrm{d}x.$$

Đổi biến $u = 1 + 8x$ ta có $du = 8dx$. Khi $x = 0$ thì $u = 1$; khi $x = 1$ thì $u = 9$

$$T = \frac{1}{8}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{8}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{13}{6}.$$

LUYỆN TẬP (2 tiết)

Tiết này có mục đích rèn luyện và nâng cao kĩ năng giải các bài toán tính diện tích hình phẳng và thể tích các vật thể

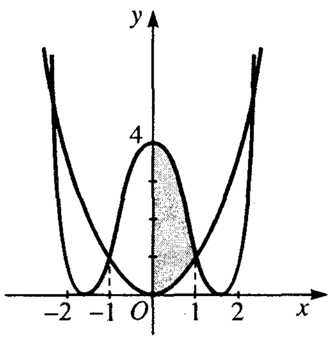
Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

34. a) Diện tích hình thang $(2+1)\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Diện tích tam giác cong là hình phẳng giới hạn bởi $y = 0$, $x = 2$, $y = \frac{x^2}{4}$ do đó $\int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{2}{3}$. Từ đó diện tích cần tìm là $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$.

b) (h.3.9) Tìm giao điểm của hai đồ thị :

$x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm 2$.

$$S = \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx = \frac{38}{15}.$$



Hình 3.9

c) (h.3.10) $S = \int_{-2}^0 (x^2 + 4x + 4)\,dx + \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

35. a) Giao điểm của hai đồ thị có hoành độ là $x = 1$ và $x = -2$.

Diện tích phải tìm là

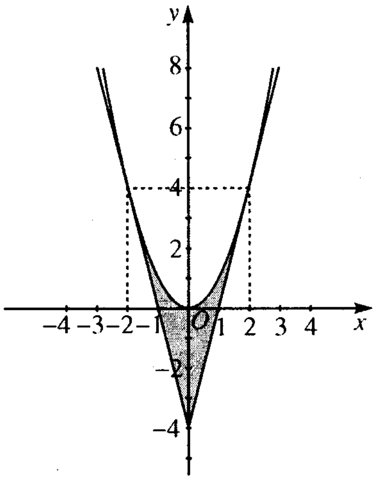
$$S = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)\,dx = 4\frac{1}{2}.$$

b) (h.3.11)

Diện tích cần tìm

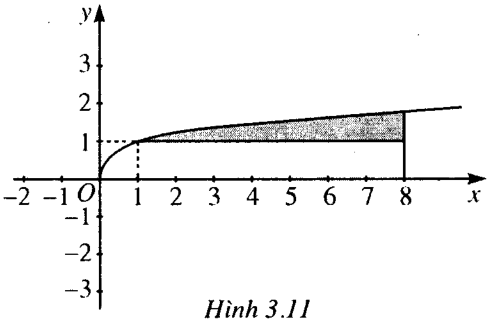
$$S = \int_{1}^{8}(x^{\frac{1}{3}} - 1)\,dx = \frac{17}{4}.$$

c) $S = \int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx + 2 = \frac{22}{3}.$



Hình 3.10

36. $V = \int_{0}^{\pi} 4\sin x\,dx = 8.$



Hình 3.11

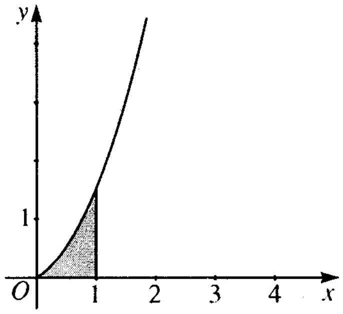
37. $V = \frac{32\pi}{5}$

38. $V = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx = \frac{\pi(\pi + 2)}{8}.$

39. (h.3.12)

$$V = \pi\int_{0}^{1}x^2 e^x\,dx = \pi(e - 2).$$

40. $V = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin 2y\,dy = 2\pi.$



Hình 3.12

E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (2 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

• Với hai tiết, giáo viên dành tiết đầu để ôn tập kiến thức trong chương và dành tiết thứ hai để trả lời câu hỏi và chữa bài tập ôn tập chương III.

• Để chuẩn bị tốt cho giờ ôn tập, giáo viên nên hướng dẫn học sinh soạn một đề cương ôn tập, trong đó nêu các kiến thức cần nhớ đồng thời giao cho học sinh làm một số bài tập ở phần : Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III.

• Trong giờ ôn tập giáo viên thu đề cương ôn tập của học sinh, dành 15 phút nêu câu hỏi kiểm tra kiến thức lí thuyết. Phần thời gian còn lại (30 phút) để chữa bài tập.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nguyên hàm

• Cho hàm số f liên tục trên khoảng K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

• Nếu hàm số f có một nguyên hàm thì nó cũng có vô số nguyên hàm. Tuy nhiên các nguyên hàm của hàm số f chỉ sai khác nhau một hằng số.

• Để tìm tất cả các nguyên hàm của f ta chỉ cần tìm một nguyên hàm F của f.

• Mỗi nguyên hàm của f đều được kí hiệu là $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Vậy

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

• Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ còn được dùng để chỉ họ tất cả các nguyên hàm của f. Do đó, nếu F là một nguyên hàm nào đó của f thì

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ \ (C \in \mathbb{R}).$$

• $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

• $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$, với mỗi số thực $k \neq 0$.

• Công thức nguyên hàm từng phần

$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

• Công thức đổi biến : Nếu $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ thì

$\int f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f[u(x)]\mathrm{d}u(x) = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F[u(x)] + C$.

2. Tích phân và ứng dụng

• Tích phân của hàm f (liên tục trên K chứa a, b) từ a đến b kí hiệu là $\int_a^b f(x)\,dx$ và được tính bởi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f.

• Công thức đổi biến số $\int_a^b f[u(x)]u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$

• Công thức tích phân từng phần $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$ và $y = d$ $(c < d)$ là

$$S = \int_c^d |g(y) - h(y)|\,dy.$$

• Giả sử $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x. Khi đó thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại các điểm a và b là

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

• Xét hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ không âm trên đoạn $[a ; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Quay hình đó quanh trục hoành ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

• Cho đường cong $x = g(y)$, trong đó g là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[c ; d]$. Xét hình giới hạn bởi đường cong $x = g(y)$, đường thẳng $y = c$, $y = d$ và $x = 0$. Quay hình đó xung quanh trục tung ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy.$$

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

41. a) $x^2 + \frac{2}{x} + C$;

b) $4x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$;

c) Đổi biến $u = x^{\frac{3}{2}} + 1$ dẫn tới

$$\frac{2}{3}\int \sin u\,du = -\frac{2}{3}\cos u + C = -\frac{2}{3}\cos(x^{\frac{3}{2}} + 1) + C.$$

d) Đổi biến $u = \cos(2x + 1)$ dẫn tới $-\int\frac{du}{2u^2} = \frac{1}{2u} + C = \frac{1}{2\cos(2x+1)} + C.$

42. a) Đổi biến $u = \frac{1}{x} - 1$ dẫn tới $-\int \cos u\,du = -\sin u + C = -\sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + C.$

b) Đổi biến $u = x^4 + 1$ dẫn tới $\int\frac{u^3\,du}{4} = \frac{u^4}{16} + C = \frac{(x^4+1)^4}{16} + C.$

c) Lấy nguyên hàm từng phần với $u = \frac{x}{3}$, $v' = e^{2x} \Rightarrow u' = \frac{1}{3}$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$ dẫn tới

$$\int\frac{x.e^{2x}}{3}dx = \frac{x.e^{2x}}{6} - \int\frac{e^{2x}}{6}dx = \frac{x.e^{2x}}{6} - \frac{e^{2x}}{12} + C.$$

d) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$. *Gợi ý :*

Lấy nguyên hàm từng phần với $u = x^2$, $v' = e^x \Rightarrow u' = 2x$, $v = e^x$ dẫn tới $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$. Tính $\int xe^x\,dx$ bằng nguyên hàm từng phần với $u = x$, $v' = e^x$ ta được $\int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x\,dx = x.e^x - e^x + C$.

43. a) $-e^{-x}(x + 1) + C$.

Gợi ý :

Lấy nguyên hàm từng phần với $u = x$, $v' = e^{-x}$.

b) Đổi biến $u = \ln x$ dẫn tới $\int u\,du = \dfrac{u^2}{2} + C = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C$.

44. Đổi biến $u = 3x^2 - 1$ dẫn tới $f(x) = \int 2u^3\,du = \dfrac{u^4}{2} + C = \dfrac{(3x^2 - 1)^4}{2} + C$.

Vì $3 = f(1) = 8 + C$ nên $C = -5$. Vậy $f(x) = \dfrac{(3x^2 - 1)^4}{2} - 5$.

45. Xét hàm số $I(x) = \int\limits_0^x (t - t^2).dt$. $(x > 0)$

Ta có $I'(x) = x - x^2$

Bằng cách lập bảng biến thiên của $I(x)$ trên $(0\,;+\infty)$ ta dễ thấy $I(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$.

46. a) $(-2).(-1) = 2$; b) $5 + 4 = 9$;

c) $2.5 - 3.4 = -2$; d) $-1 - 5 = -6$.

47. Giả sử m và M tương ứng là giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số f trên $[a\,;b]$.

Ta có $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a\,;b]$.

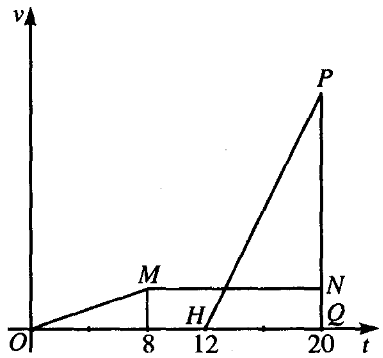
Do đó theo bài tập 13 :

$$\int\limits_a^b m\,dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b M\,dx \Rightarrow m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Vì f là hàm liên tục nên tồn tại $c \in [a\,;b]$ để $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

48. Vật dừng lại tại thời điểm $t = 5$. Quãng đường vật đi được là $\int_0^5 t(5-t)\,dt = \frac{125}{6}$ m.

49. Thời điểm A và B gặp nhau là 20 giây kể từ lúc A xuất phát. Đồ thị vận tốc của A là đường gấp khúc OMN (h.3.13). Quãng đường A đã đi được là diện tích hình thang $OMNQ$. Diện tích của nó là $(20+12)\frac{6}{2} = 96$ do đó lúc gặp B, A đi được 96m. Đồ thị vận tốc của B là đường thẳng HP. Vì B xuất phát cùng vị trí với A nên quãng đường B đã đi được là 96m. Mặt khác, quãng đường B đã đi được bằng diện tích hình tam giác HPQ với $HQ = 8$ và PQ chính là vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A. Suy ra $96 = \frac{8PQ}{2} = 4PQ$ nên $PQ = 24$. Vậy vận tốc của B tại thời điểm nó đuổi kịp A là 24m/s.



Hình 3.13

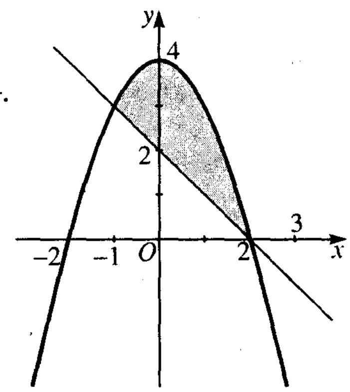
50. a) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$. *Hướng dẫn :* Tích phân từng phần với $u = x^2$, $v'(x) = \sin 2x$ suy ra $u' = 2x$, $v = -\frac{\cos 2x}{2}$.

b) Đổi biến $u = 2x^2 + 1$ ta có $I = \int_3^9 \frac{u\,du}{4} = 9$.

c) Đổi biến $u = x^2 - 2x$ ta có $I = \int_0^3 \frac{e^u\,du}{2} = \frac{e^3 - 1}{2}$.

51. a) (h.3.14)

$$S = \int_{-1}^{2} (4 - x^2 + x - 2)\,dx = \frac{9}{2}.$$



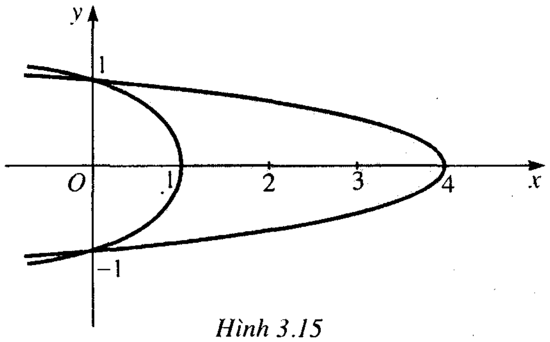
Hình 3.14

b) (h.3.15)

Ta có diện tích phần nằm trong góc phần tư thứ nhất là

$$\int_0^4 \left(\frac{4-x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{4}} dx = \frac{8}{3} - \frac{4}{5} = \frac{28}{15}.$$

Suy ra diện tích cần tìm là $2.\frac{28}{15} = \frac{56}{15}$.



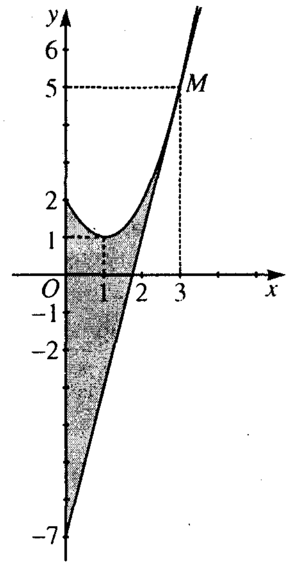
Hình 3.15

52. a) (h.3.16)

Tiếp tuyến có phương trình $y = 4x - 7$. Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có

$$S = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2 - 4x + 7)\,dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = 9.$$

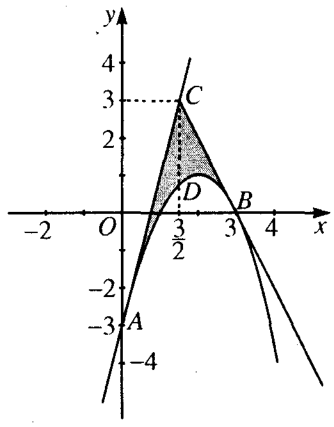


Hình 3.16

b) Tiếp tuyến tại $A(0\ ;\ -3)$ là $y = 4x - 3$. Tiếp tuyến tại $B(3\ ;\ 0)$ là $y = -2x + 6$.

Giao điểm của hai tiếp tuyến là $C\left(\frac{3}{2}\ ;\ 3\right)$. Kí hiệu A_1 và A_2 là tam giác cong ACD và BCD (h.3.17). Ta có

$$S(A_1) = \int_0^{\frac{3}{2}} (4x - 3 + x^2 - 4x + 3)\,dx = \frac{9}{8}.$$



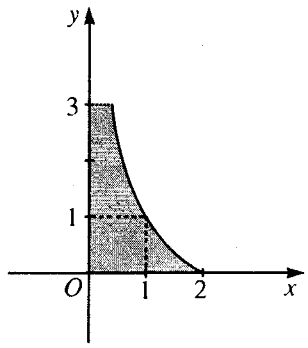
Hình 3.17

$$S(A_2) = \int_{\frac{3}{2}}^{3}(-2x + 6 + x^2 - 4x + 3)\,dx = \int_{\frac{3}{2}}^{3}(x-3)^2\,dx = \frac{9}{8}.\ \text{Vậy } S = \frac{9}{4}.$$

53. $V = \int_0^2 \pi \frac{5x^4}{8}\,dx = 4\pi.$

54. $V = \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 3\pi.$

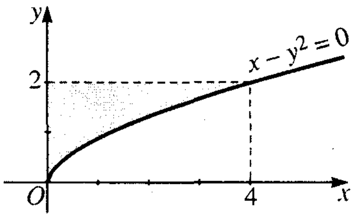
55. $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \pi.$



Hình 3.18

56. (h.3.18) Đường cong có phương trình $x = \dfrac{2}{y+1}$.

Vậy $V = \pi\int_0^3 \dfrac{4}{(y+1)^2}\,dy = 3\pi.$



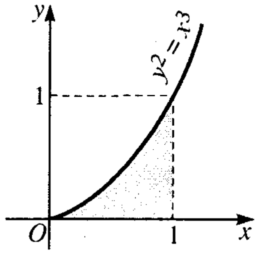
Hình 3.19

57. (h.3.19)

a) $V = 16\pi - \pi\int_0^4 x\,dx = 8\pi.$

b) $V = \pi\int_0^2 y^4\,dy = \dfrac{32}{5}\pi.$

58. $\pi\int_1^2 xe^x\,dx = \pi e^2.$



Hình 3.20

59. (h.3.20)

a) Ta có $y = \sqrt{x^3}$ $(y \geq 0)$. Vậy $V = \pi\int_0^1 x^3\,dx = \dfrac{\pi}{4}.$

b) Ta có $x = \sqrt[3]{y^2}$. Vậy $V = \pi - \pi\int_0^1 y^{\frac{4}{3}}\,dy = \dfrac{4\pi}{7}.$

60. (B)

$$\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^5 = \ln 3.$$

61. (B)

$$\int_0^2 2e^{2x}dx = e^{2x}\Big|_0^2 = e^4 - 1.$$

62. (D) Ta có $\int_{-1}^{0} x^2(x+1)^3 dx = \int_{-1}^{0} x^2(x^3+3x^2+3x+1)dx$

$$= \int_{-1}^{0}(x^5+3x^4+3x^3+x^2)dx = \frac{1}{60}.$$

63. (A)

$$S = \int_0^2 (4x - x^3)dx = 4.$$

64. (B)

$$S = \int_0^1 (8x - x)dx + \int_1^{2\sqrt{2}} (8x - x^3)dx = \frac{63}{4} = 15,75.$$

65. (A)

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \frac{4}{3}.$$

66. (A)

$$V = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{y}\right)^2 dy + \int_4^6 \pi(6-y)^2 dy = 8\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}.$$

67. (C)

$$V = \pi\int_{-\frac{b}{a}}^{0}(-bx)^2 dx - \pi\int_{-\frac{b}{a}}^{0}\left(ax^2\right)^2 dx = \pi\int_{-\frac{b}{a}}^{0}(b^2x^2 - a^2x^4)dx = \frac{2\pi b^5}{15a^3}.$$

Vì $\dfrac{b^5}{a^3}$ là hằng số với mọi giá trị của a, b do đó phải chọn (C).

Khi đó $V = \dfrac{4\pi}{15}$.

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3 hãy chọn chỉ một kết quả đúng trong các kết quả đã cho

Câu 1 *(1 điểm)*. Nguyên hàm của hàm số $y = x\cos x$ là

(A) $-\dfrac{x^2\sin x}{2} + C$; (B) $\dfrac{x^2\cos x}{2} + C$;

(C) $-x\cos x + \sin x + C$; (D) $x\sin x + \cos x + C$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Nếu $\int\limits_{-2}^{0}(4 - e^{-\frac{x}{2}})dx = K - 2e$ thì giá trị của K là

(A) 10; (B) 11; (C) 9; (D) 12,5.

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho hàm số $y = f(x) = x(x-1)(x-2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ là

(A) $\int\limits_0^2 f(x)dx$; (B) $\int\limits_0^1 f(x)dx - \int\limits_1^2 f(x)dx$;

(C) $\left|\int\limits_0^2 f(x)dx\right|$; (D) $\left|\int\limits_0^1 f(x)dx\right|$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(3 điểm)*. Tính tích phân $\int\limits_0^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Câu 5 *(4 điểm)*. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 - 2x$ trên đoạn $[-1; 2]$ và trục hoành.

Đáp án

Câu 1. Bằng cách tính đạo hàm cho ta kết quả đúng là (D).

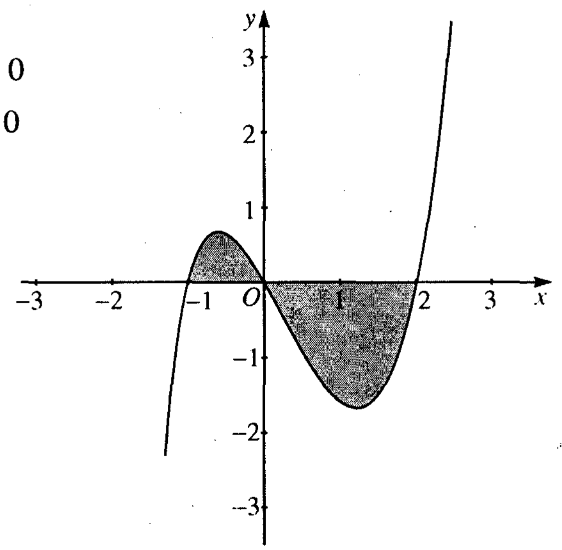
Câu 2. (A)

Câu 3. (B)

Câu 4. Đặt $x = 2\sin t$ ta dẫn đến $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)\,dt = \pi$.

Câu 5. (h.3.21). Ta có $x^3 - x^2 - 2x \geq 0$ trên $[-1\,;\,0]$ và $x^3 - x^2 - 2x \leq 0$ trên $[0\,;\,2]$. Vậy

$$S = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)\,dx + \int_0^2(x^2 + 2x - x^3)\,dx = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}.$$



Hình 3.21

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi câu 1, 2, 3 hãy chọn chỉ một kết quả đúng trong các kết quả đã cho

Câu 1 *(1 điểm)*. Nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ là

(A) $\sqrt{x^2 + x + C}$; (B) $\sqrt{x^2 + x} + C$;

(C) $\dfrac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C$; (D) $\dfrac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Tập hợp các giá trị của b sao cho $\int_0^b(2x - 4)\,dx = 5$ là

(A) $\{5\}$; (B) $\{5\,;\,-1\}$; (C) $\{4\}$; (D) $\{4\,;\,-1\}$.

Câu 3 *(1 điểm)*. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình đó quanh trục hoành được cho bởi công thức :

(A) $\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx$;   (B) $\pi^2\int_0^1 e^{2x}\,dx$;

(C) $\pi\left(\int_0^1 e^x\,dx\right)^2$;   (D) $\left(\pi\int_0^1 e^x\,dx\right)^2$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(3 điểm)*. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$.

Câu 5 *(4 điểm)*. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = x$.

Đáp án

Câu 1. (C)

Câu 2. (B)

Câu 3. (A)

Câu 4. Tích phân từng phần ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,d(\sin x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)$$

$$= \int_0^1 (1-u^2)\,du = \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Câu 5. Ta có

$$S = \int_{-2}^{2}\left|x^3 - 4x\right|dx = \int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx + \int_0^2(4x - x^3)\,dx = 4 + 4 = 8.$$

Chương IV

SỐ PHỨC

A. MỤC TIÊU CỦA CHƯƠNG

Chương này là một chương mới được đưa vào giảng dạy ở bậc trung học phổ thông (so với chương trình CCGD 1986). Nó kết thúc việc giới thiệu hệ thống các tập hợp số cho học sinh : số tự nhiên, số nguyên, số thập phân, số hữu tỉ, số thực, số phức.

Mục tiêu của chương này là :

Kiến thức

Giúp học sinh hiểu được :

– Dạng đại số, biểu diễn hình học số phức, phép tính cộng, trừ, nhân, chia số phức dưới dạng đại số, môđun của số phức, số phức liên hợp, căn bậc hai của số phức.

– Dạng lượng giác, acgumen của số phức, phép nhân, chia hai số phức dưới dạng lượng giác, công thức Moa-vrơ.

Kĩ năng

Giúp học sinh thành thạo các kĩ năng :

– Biểu diễn hình học số phức ;

– Thực hiện các phép cộng, trừ, nhân, chia số phức dưới dạng đại số, phép nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác ;

– Biết chuyển đổi được dạng đại số của số phức sang dạng lượng giác ;

– Biết cách tìm căn bậc hai của số phức dưới dạng đại số và dạng lượng giác và áp dụng để giải phương trình bậc hai ;

– Ứng dụng được công thức Moa-vrơ vào một số tính toán lượng giác.

B. CẤU TẠO CỦA CHƯƠNG

Nội dung của chương gồm ba bài (§), dự kiến giảng dạy trong 13 tiết, phân phối cụ thể như sau :

§1. Số phức	4 tiết
Luyện tập	1 tiết
§2. Căn bậc hai của số phức và phương trình bậc hai	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
§3. Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng	2 tiết
Luyện tập	1 tiết
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương IV	2 tiết

Trong chương này có một bài *em có biết* về "Vài nét lịch sử phát triển số phức" sau §2 và *bài đọc thêm* về "Căn bậc *n* của số phức" sau §3.

C. NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý TRONG CHƯƠNG

• Vì lí do sư phạm, SGK trình bày cách xây dựng tập hợp số phức không thực chặt chẽ về mặt toán học. Mục tiêu chính là làm học sinh thấy được nhu cầu mở rộng tập hợp số thực thành tập hợp số phức và tính toán thành thạo với số phức.

• Trong giảng dạy số phức, cần để ý đến biểu diễn hình học của số phức, đến ý nghĩa hình học của các khái niệm liên quan đến các phép toán về số phức. Điều đó giúp học sinh hiểu rõ ràng hơn về tập hợp số phức và nắm chắc chắn các khái niệm liên quan.

D. NỘI DUNG CHI TIẾT

§1. SỐ PHỨC (1 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu được nhu cầu mở rộng tập hợp số thực thành tập hợp số phức ;

– Hiểu cách xây dựng phép toán cộng và nhân số phức từ phép toán cộng và nhân các biểu thức dạng $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$;

– Hiểu được định nghĩa số phức liên hợp và hai tính chất cơ bản liên quan đến khái niệm này (số phức liên hợp của tổng, tích và môđun của số phức) ;

– Hiểu được định nghĩa số phức nghịch đảo và phép chia cho số phức khác 0.

– Thấy được các tính chất của các phép toán cộng và nhân số phức, tương tự các tính chất của phép toán cộng và nhân số thực và đó là cơ sở để thực hiện các phép toán đại số trên tập hợp số phức.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Biết cách biểu diễn số phức bởi điểm và bởi vectơ trong mặt phẳng phức ;

– Thực hiện thành thạo phép cộng, trừ, nhân, chia hai số phức.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm số phức

• Mở đầu §1, sách có mấy dòng nêu lên sự cần thiết phải xét các số phức và giới thiệu qua khái niệm số phức. Giáo viên nên giới thiệu phần này một cách nhẹ nhàng.

• Sách không dùng kí hiệu $i = \sqrt{-1}$ (để tránh gây hiểu nhầm) và chưa dùng từ "dạng đại số của số phức" (để đến khi học "dạng lượng giác của số phức" mới đưa vào).

• Sách không đưa kí hiệu Rez, Imz để chỉ phần thực và phần ảo của số phức z để đỡ nặng nề.

• Một số SGK gọi số ảo là số phức không thực, gọi số thuần ảo là số phức dạng bi với $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; trong SGK này, mọi số phức có phần thực bằng 0 đều được coi là số ảo để cho gọn gàng và tiện lợi.

2. Biểu diễn hình học số phức

• Nên nói qua việc biểu diễn tập hợp số thực trên trục số khi nói đến biểu diễn số phức trên mặt phẳng toạ độ. Việc biểu diễn hình học số phức giúp học sinh hình dung một cách trực quan khái niệm số phức đã được định nghĩa một cách hình thức (không thực chặt chẽ toán học) bởi "biểu thức" $a + bi$.

• Khi biểu diễn hình học số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) bởi điểm M có toạ độ (a ; b) trong mặt phẳng toạ độ Oxy, sách có đưa kí hiệu $M(z)$, hoặc đôi khi dùng ngay cả chữ z để chỉ điểm $M(z)$ cho thuận tiện (nếu không gây hiểu nhầm).

• Nên nhắc nhở học sinh rằng tập hợp số thực được biểu diễn bởi tập hợp các điểm của trục thực Ox, còn mỗi điểm trên trục ảo Oy biểu diễn số ảo bi ($b \in \mathbb{R}$), trong đó có điểm biểu diễn đơn vị ảo.

3. Phép cộng và phép trừ số phức

• SGK có trình bày chi tiết các tính chất của phép cộng số phức (giao hoán, kết hợp v.v...), nhưng khi dạy, giáo viên không nên dừng lại ở đây lâu, thậm chí có thể chỉ nói qua, để học sinh tự đọc vì học sinh có thể đã quá quen với các tính chất đó của phép cộng số thực, cộng các biểu thức $a + bi$.

• SGK có nói đến biểu diễn số phức bởi vectơ trong mặt phẳng để nói rằng phép cộng số phức được diễn tả đầy đủ bởi phép cộng vectơ (nói như ở Đại học : nhóm cộng số phức đẳng cấu với nhóm cộng các vectơ trong mặt phẳng).

4. Phép nhân số phức

• Để tránh đưa ngay định nghĩa phép nhân hai số phức một cách áp đặt (và có vẻ không "tự nhiên"), sách đã đề nghị trước hết hãy thực hiện phép nhân một cách hình thức biểu thức $a + bi$ với biểu thức $a' + b'i$ và thay i^2 bằng -1.

• Ý nghĩa hình học của phép nhân số phức sẽ được đề cập đến khi nói về dạng lượng giác của số phức (tuy nhiên cũng đã được giới thiệu phần nào ở bài tập đố vui 16 : hai tam giác có các đỉnh theo thứ tự biểu diễn các số 0, 1, z và 0, z', zz' là hai tam giác đồng dạng (z không thực, $z' \neq 0$).

• Đến đây có thể nói với học sinh rằng, do phép cộng và phép nhân số phức có các tính chất tương tự phép cộng và phép nhân các số thực nên ta vẫn vận dụng được các "quy tắc" tính toán quen thuộc, chẳng hạn vẫn có hằng đẳng thức $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$ với $z, w \in \mathbb{C}$. v.v...

5. Số phức liên hợp

• Các tính chất $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ được suy ra dễ dàng từ định nghĩa và được đề cập đến trong bài tập 6 (hai đẳng thức này muốn nói theo ngôn ngữ ở đại học rằng $z \mapsto \overline{z}$ là một tự đẳng cấu của trường số phức).

• Cần nhấn mạnh ý nghĩa hình học của môđun các số phức.

• Các khái niệm số phức liên hợp và môđun của số phức giúp trình bày dễ dàng phép chia số phức.

6. Phép chia số phức

• Có thể trình bày trực tiếp phép chia hai số phức không thông qua khái niệm số phức nghịch đảo, nhưng cách dùng số phức nghịch đảo như trong sách có lẽ dễ dàng hơn và thống nhất với cách trình bày phép toán trừ là phép cộng với số đối.

• Chú ý rằng với số phức $z \neq 0$, số $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ là số phức duy nhất thoả mãn điều kiện $z.z^{-1} = 1$, nhưng để đơn giản, sách đã không trình bày tính duy nhất này, (mà điều này là cần thiết để khẳng định rằng phép chia (cho số khác 0) là phép toán ngược của phép nhân).

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian dạy***

Mục	1, 2, 3a, 3b :	1 tiết
	3c, 3d, 4a :	1 tiết
	4b, 5a :	1 tiết
	5b, 6 :	1 tiết

Tuy nhiên, không nên quá cứng nhắc trong việc phân chia mục dạy như thế. Cái chính là làm cho học sinh nắm được khái niệm số phức, tính toán trên số phức, biểu diễn hình học số phức. Không nên đi sâu vào phân tích từng tính chất của các phép toán.

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\textbf{H1}}$ *Mục đích :* Làm cho học sinh hiểu rõ hơn rằng, số 0 vừa được xem là số thực (phần ảo bằng 0), vừa được xem là số ảo (phần thực bằng 0). Ngoài ra, về sau tính chất $z = a + bi = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ kéo theo $a = 0$, $b = 0$ được sử dụng thường xuyên.

Trả lời : $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$.

H2 *Trả lời* : M biểu diễn z, M' biểu diễn $-z$ thì M, M' đối xứng qua gốc toạ độ. Điều đó suy ra từ : nếu $z = a + bi$ thì M có toạ độ là $(a ; b)$ và M' có toạ độ $(-a ; -b)$ do $-z = -a - bi$ và rõ ràng hai điểm có toạ độ $(a ; b)$ và $(-a ; -b)$ đối xứng qua gốc toạ độ.

(Nếu muốn, giáo viên cũng có thể nói thêm cho học sinh giỏi chẳng hạn rằng : vậy phép biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm M biểu diễn số phức z thành điểm M' biểu diễn số $z' = -z$ là phép đối xứng qua tâm O (gốc toạ độ)).

H3 *Mục đích* : Nêu lên được mối liên quan giữa phép toán nhân số thực với số phức và nhân số thực với vectơ để học sinh thấy được mối liên quan giữa những điều đã được học. Điều này còn phục vụ ngay cho ví dụ 5 nêu tiếp sau đó.

Trả lời : vectơ $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz. Điều đó suy ra từ : nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $kz = ka + kbi$, còn toạ độ của $\vec{u}$ là $(a ; b)$ và toạ độ của $k\vec{u}$ là $(ka ; kb)$.

(Với học sinh giỏi có thể nói thêm : phép biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm M biểu diễn số phức z thành điểm M' biểu diễn số phức $z' = kz$ (k là số thực khác 0 cho trước) là phép vị tự tâm O (gốc toạ độ) với hệ số vị tự k).

(Nói theo ngôn ngữ của Toán cao cấp thì mối liên quan giữa cộng trừ số phức với cộng trừ vectơ đã được trình bày cùng với tính chất vừa nêu lên trong **H3** nói rằng $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbb{C}$ đẳng cấu không gian các vectơ trong mặt phẳng).

H4 *Mục đích* : Cho học sinh thực hành tính z^2 theo quy tắc vừa học và ôn lại cho học sinh về phần thực phần ảo của số phức, về trục thực, trục ảo.

Trả lời : Tập hợp các điểm trên trục thực và các điểm trên trục ảo. Điều đó suy ra từ : $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số thực khi và chỉ khi $xy = 0$ tức $x = 0$ hoặc $y = 0$.

H5 *Mục đích* : Làm học sinh thấy rõ hơn ý nghĩa việc mở rộng $\mathbb{R}$ thành $\mathbb{C}$ và làm cho học sinh quen với cách phân tích thành nhân tử này (không thể thực hiện được trong $\mathbb{R}$), cũng như chuẩn bị cho học sinh việc tính căn bậc hai của số thực âm.

Trả lời : $z^2 + 4 = z^2 - 4i^2 = (z + 2i)(z - 2i)$.

(Với học sinh giỏi, có thể nói thêm : tổng quát, nếu a là số thực thì $z^2 + a^2 = z^2 - (ai)^2 = (z + ai)(z - ai)$) ; "thủ thuật" cần nhắc nhở ở đây là viết a^2 thành $-(ai)^2$.

H6 *Mục đích :* đề cập đến một tính chất thường được dùng.

Chứng minh

Cách 1 : z biểu diễn bởi điểm M thì z là số thực khi và chỉ khi M nằm trên trục thực, tức là khi và chỉ khi điểm M' đối xứng của M qua trục thực phải trùng với M. Nhưng M' biểu diễn số phức $\bar{z}$ nên suy ra z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$.

Cách 2 : $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $\bar{z} = a - bi$ nên $z - \bar{z} = 2bi$; từ đó z là số thực khi và chỉ khi $b = 0$ cũng tức là khi và chỉ khi $2bi = z - \bar{z} = 0$; đẳng thức cuối này có nghĩa là $z = \bar{z}$.

H7 *Mục đích :* Chuẩn bị cho định nghĩa môđun của số phức.

Chứng minh : $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

H8 *Mục đích :* Chứng minh một tính chất về việc lấy số phức liên hợp.

Chứng minh : Dùng tính toán trực tiếp ($z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ hoặc dùng biểu diễn hình học (phép đối xứng qua trục Ox bảo tồn khoảng cách giữa các điểm).

H9 *Mục đích :* Dẫn đến định nghĩa số phức nghịch đảo của $z \neq 0$.

Chứng minh : $z.z^{-1} = z\left(\dfrac{1}{a^2 + b^2}\bar{z}\right) = \dfrac{1}{a^2 + b^2}z.\bar{z} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$.

H10 *Mục đích :* Làm cho học sinh quen với giải phương trình bậc nhất.

Giải

$$(1 + 2i)z = 3z - i \Leftrightarrow (1 + 2i - 3)z = -i$$

$$\Leftrightarrow (-2 + 2i)z = -i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{-2 + 2i} = \frac{-i(-1 - i)}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i.$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

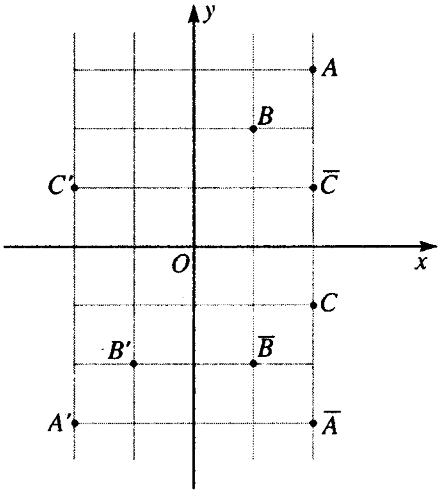
1. (h.4.1) a) điểm A $(2 + 3i)$, B $(1 + 2i)$, C $(2 - i)$.

b) Các số phức liên hợp của $2 + 3i$, $1 + 2i$, $2 - i$ được biểu diễn bởi :

$\overline{A}$ $(2 - 3i)$, $\overline{B}$ $(1 - 2i)$, $\overline{C}$ $(2 + i)$.

c) Các số đối của $2 + 3i$, $1 + 2i$, $2 - i$ được biểu diễn bởi

A' $(-2 - 3i)$, B' $(-1 - 2i)$, $C'(-2 + i)$.



Hình 4.1

2. a) $i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = -1 - i$ có phần thực bằng -1, phần ảo bằng -1 ;

b) $(\sqrt{2} + 3i)^2 = 2 + 6\sqrt{2}i + 9i^2 = -7 + 6\sqrt{2}i$ có phần thực bằng -7, phần ảo bằng $6\sqrt{2}$;

c) $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - (3i)^2 = 13$ có phần thực bằng 13, phần ảo bằng 0 ;

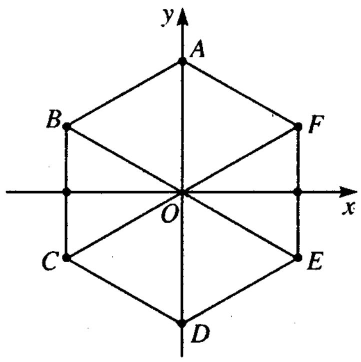
d) $i(2 - i)(3 + i) = (2i - i^2)(3 + i) = (1 + 2i)(3 + i) = 3 - 2 + 7i = 1 + 7i$ có phần thực bằng 1, phần ảo bằng 7.

3. Xem hình 4.2. Điểm A biểu diễn số i.

Dễ thấy rằng F có toạ độ $\left(\cos\frac{\pi}{6}; \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nên F biểu diễn số phức $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

E đối xứng với F qua Ox nên E biểu diễn số phức $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

B đối xứng với E qua O nên B biểu diễn số $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.



Hình 4.2

C đối xứng với F qua O nên C biểu diễn số $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

D đối xứng với A qua O nên D biểu diễn số $-i$.

4. $\frac{1}{2-3i}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$

$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{2}{1-\sqrt{3}i}=\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1+3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

$\frac{3-2i}{i}=\frac{-i(3-2i)}{1}=-2-3i.$

$\frac{3-4i}{4-i}=\frac{(3-4i)(4+i)}{17}=\frac{16-13i}{17}=\frac{16}{17}-\frac{13}{17}i.$

5. $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì $|z|=1$ nên :

$\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{z}$;

$z^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$z^{-3}=\bar{z}\,\bar{z}^{-2}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=1$;

$1+z+z^2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0.$

6. a) $z=a+bi$ $(a, b\in\mathbb{R})$ thì $\bar{z}=a-bi$ nên phần thực của z là $a=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$,

phần ảo của z là $b=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

b) z là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng $0 \Leftrightarrow z+\bar{z}=0$ tức là $z=-\bar{z}$.

c) $z=a+bi$, $z'=a'+b'i$ $(a, b, a', b'\in\mathbb{R})$ thì

$$\overline{z+z'} = \overline{(a+a')+(b+b')i} = a+a'-(b+b')i$$

$$= a - bi + a' - b'i = \bar{z} + \bar{z}',$$

$$\overline{z.z'} = \overline{(aa'-bb')+(ab'+ba')i} = (aa'-bb')-(ab'+ba')i$$

$$= (a-bi)(a'-b'i) = \bar{z}\bar{z}'.$$

$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{z'.\bar{z}}{z.\bar{z}}\right)} = \frac{1}{z.\bar{z}}\overline{z'.\bar{z}} = \frac{1}{z.\bar{z}}\bar{z}'.z = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}.$$

7. Vì $i^4 = 1$ nên với mọi số m nguyên dương, ta có $(i^4)^m = 1^m = 1$ tức là $i^{4m} = 1$. Từ đó $i^{4m+1} = i^{4m}.i = i$, $i^{4m+2} = i^{4m+1}.i = i^2 = -1$, $i^{4m+3} = i^{4m+2}.i = -i$.

8. a) $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\vec{u}$ biểu diễn z thì $\vec{u}$ có toạ độ $(a\ ;\ b)$ và $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy $|\vec{u}| = |\bar{z}|$.

Nếu A_1, A_2 theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2 thì vectơ $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ biểu diễn $z_2 - z_1$ nên $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = |z_2 - z_1|$.

b) $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ thì $|z|^2 = a^2 + b^2$, $|z'|^2 = a'^2 + b'^2$ còn $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$ nên

$$|z.z'|^2 = (aa'-bb')^2 + (ab'+ba')^2$$

$$= (aa')^2 + (bb')^2 - 2(aa')(bb') + (ab')^2 + (ba')^2 + 2(ab')(ba')$$

$$= (aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (ba')^2$$

$$= (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = |z|^2|z'|^2,$$

từ đó $|z.z'| = |z||z'|$.

Khi $z \neq 0$, ta có $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \left|\dfrac{z'\bar{z}}{|z|^2}\right| = \dfrac{1}{|z|^2}|z'\bar{z}| = \dfrac{1}{|z|^2}|z'||\bar{z}| = \dfrac{1}{|z|^2}|z'||z| = \dfrac{|z'|}{|z|}.$

c) $\vec{u}$ biểu diễn z, $\vec{u}'$ biểu diễn z' thì $\vec{u}+\vec{u}'$ biểu diễn $z + z'$ và $|z + z'| = |\vec{u} + \vec{u}'|$.

Khi $z.z' \neq 0$ thì

$$|\vec{u} + \vec{u}'|^2 = (\vec{u} + \vec{u}')^2 = \vec{u}^2 + \vec{u}'^2 + 2|\vec{u}|.|\vec{u}'|\cos(\vec{u}, \vec{u}')$$

$$\leq |\vec{u}|^2 + |\vec{u}'|^2 + 2|\vec{u}||\vec{u}'| = (|\vec{u}| + |\vec{u}'|)^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

Từ đó $|z + z'| = |\vec{u} + \vec{u}'| \leq |z| + |z'|$.

Còn khi $z.z' = 0$ thì rõ ràng $|z + z'| = |z| + |z'|$.

9. a) *Cách 1 :* Gọi I là điểm biểu diễn số i, M là điểm biểu diễn số z ta có $|z - i| = |\overrightarrow{IM}|$. Vậy $|z - i| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = 1$. Do đó quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính bằng 1.

Cách 2 : Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $z - i = x + (y - 1)i$ nên $|z - i| = 1$ $\Leftrightarrow |z - i|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$: đây là phương trình đường tròn tâm $(0 ; 1)$, bán kính 1.

b) *Cách 1 :* Gọi M là điểm biểu diễn số z, I là điểm biểu diễn số i, J là điểm biểu diễn số $-i$ thì $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = \dfrac{|\overrightarrow{IM}|}{|\overrightarrow{JM}|}$, vậy $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{JM}|$ $(M \neq J)$

$\Leftrightarrow M$ nằm trên đường trung trực của $IJ \Leftrightarrow M$ thuộc trục thực Ox.

Cách 2 : Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ta có $\left|\dfrac{z - i}{z + i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = |z + i|$ (rõ ràng $z \neq -i$) $\Leftrightarrow$ $|x + (y - 1)i| = |x + (y + 1)i|$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + (y - 1)^2 =$ $x^2 + (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z$ là số thực.

c) *Cách 1 :* Để ý rằng $|z - 3 + 4i| = |\overline{z - 3 + 4i}| = |z - 3 - 4i|$ nên nếu gọi A là điểm biểu diễn số $3 + 4i$, M là điểm biểu diễn số z thì $|\bar{z} - 3 + 4i| = |\overrightarrow{AM}|$.

Vậy $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{AM}| \Leftrightarrow M$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Cách 2 : Viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ta có $|z| = |\overline{z} - 3 + 4i|$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = |(x-3) + (4-y)i|^2 = (x-3)^2 + (4-y)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y = 25.$

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Về xây dựng trường số phức

Sau đây, nhắc lại ba cách xây dựng trường số phức thường được nói đến ở bậc đại học.

1. Coi tập hợp $\mathbb{C}$ là tập hợp $\mathbb{R}^2$ các cặp số thực (tức là mỗi số phức là cặp số thực (a, b) và hiển nhiên coi hai số phức $(a, b), (a', b')$ bằng nhau nếu $a = a'$, $b = b'$).

Định nghĩa phép toán cộng và nhân số phức bởi

$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$,

$(a, b).(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

Chứng minh được rằng $\mathbb{C}$ với hai phép toán đó làm thành một trường.

Đơn cấu trường $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$a \mapsto (a, 0)$$

cho phép đồng nhất $\mathbb{R}$ với ảnh của nó trong $\mathbb{C}$.

Đặt $i = (0, 1)$ thì viết được $(a, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1) = a + bi$ (ở vế phải là phép cộng, nhân nói trên của các số phức).

Cách xây dựng đó là chặt chẽ, sáng sủa, nhưng trừu tượng (nhất là đối với học sinh THPT) và phép nhân được định nghĩa một cách khá áp đặt.

2. Coi $\mathbb{C}$ là tập hợp các ma trận cấp hai dạng $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (a, b là số thực) với phép toán cộng, nhân các ma trận cấp hai.

Dễ thấy rằng đó là một vành giao hoán, có đơn vị và mọi ma trận khác 0 thuộc tập hợp $\mathbb{C}$ đều có ma trận nghịch đảo trong $\mathbb{C}$, tức là $\mathbb{C}$ là một trường.

Đồng nhất số thực $a \in \mathbb{R}$ với ma trận $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ trong $\mathbb{C}$ và coi i là ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ thì viết được $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a + bi.$

Chú ý : Khi $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ khác không, coi nó là ma trận của một biến đổi tuyến tính của $\mathbb{R}^2$ thì đó là ma trận của một phép đồng dạng bảo tồn hướng, giữ bất động gốc O của $\mathbb{R}^2$ (hợp thành của một phép quay gốc O (góc quay là một acgumen của số phức đang xét) với phép vị tự tâm O, hệ số vị tự $\sqrt{a^2 + b^2}$ (môđun của số phức đó)).

Cách xây dựng này chặt chẽ, sáng sủa, phép cộng, phép nhân được định nghĩa một cách tự nhiên nhưng phải dựa vào các hiểu biết về ma trận (tuy chỉ cấp hai).

3. Nhìn theo quan điểm mở rộng trường, có thể coi $\mathbb{C}$ là vành thương $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ của vành đa thức một ẩn X (trên trường số thực) chia cho iđêan sinh bởi đa thức $X^2 + 1$. Dễ thấy rằng nó còn là một trường (do đa thức $X^2 + 1$ bất khả quy).

Đây là một cách xây dựng đẹp đẽ về mặt lí thuyết nhưng khá "cao cấp".

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập nhằm rèn luyện cho HS kĩ năng thực hiện các phép tính với số phức.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

10. Do $(1 + z + z^2 + ... + z^9)(z - 1)$

$$= z + z^2 + z^3 + ... + z^{10} - (1 + z + z^2 + ... + z^9) = z^{10} - 1$$

nên khi $z \neq 1$, chia cả hai vế cho $z - 1$ ta được đẳng thức cần chứng minh.

11. $\overline{z^2 + \overline{z}^2} = \overline{z}^2 + z^2 = z^2 + \overline{z}^2$ nên $z^2 + \overline{z}^2$ là số thực.

$\overline{\left(\dfrac{z - \overline{z}}{z^3 + \overline{z}^3}\right)} = \dfrac{\overline{z} - z}{\overline{z}^3 + z^3} = -\dfrac{z - \overline{z}}{z^3 + \overline{z}^3}$ nên $\dfrac{z - \overline{z}}{z^3 + \overline{z}^3}$ là số ảo.

$\overline{\left(\dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z\overline{z}}\right)} = \dfrac{\overline{z}^2 - z^2}{1 + z\overline{z}} = -\dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z\overline{z}}$ nên $\dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z\overline{z}}$ là số ảo.

12. a) Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Do đó z^2 là số thực âm khi và chỉ khi $xy = 0$, $x^2 - y^2 < 0$ tức là khi và chỉ khi $x = 0, y \neq 0$. Vậy tập hợp các điểm cần tìm là trục Oy trừ điểm O.

b) Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ là số ảo khi và chỉ khi $x^2 - y^2 = 0$ tức là $y = x$ hoặc $y = -x$. Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hai đường phân giác $y = \pm x$ của các góc toạ độ.

c) *Cách 1 :* Nếu $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì $z^2 = \overline{z}^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow xy = 0$. Vậy tập hợp các điểm cần tìm là các trục toạ độ.

Cách 2 : $z^2 = \overline{z}^2 \Leftrightarrow z^2 - \overline{z}^2 = 0 \Leftrightarrow (z + \overline{z})(z - \overline{z}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z + \overline{z} = 0 \text{ (trục ảo)} \\ z - \overline{z} = 0 \text{ (trục thực).} \end{array}\right.$$

d) $\dfrac{1}{z - i}$ là số ảo $\Leftrightarrow z - i$ là số ảo $(z \neq i) \Leftrightarrow z$ là số ảo $(z \neq i)$.

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là trục ảo trừ điểm I biểu diễn số i.

13. a) $z = \dfrac{-2 + i}{i} = 1 + 2i.$

b) $(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1}{1 + 3i} = \frac{-1 + 3i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

c) $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2 + i)z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{2 + i} = \dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}i.$

d) $(iz - 1)(z + 3i)(\overline{z} - 2 + 3i) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} iz - 1 = 0 \text{ tức là } z = -i, \\ z + 3i = 0 \text{ tức là } z = -3i, \\ \overline{z} - 2 + 3i = 0 \text{ tức là } z - 2 - 3i = 0 \text{ hay } z = 2 + 3i. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đang xét có ba nghiệm là $-i$, $-3i$ và $2 + 3i$.

e) $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z + 2i)(z - 2i) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ hoặc $z = 2i$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $2i$ và $-2i$.

14. a) Ta có

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{x + (y+1)i}{x + (y-1)i} = \frac{[x + (y+1)i][x - (y-1)i]}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}i.$$

Vậy phần thực là $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$, phần ảo là $\dfrac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$.

b) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thì với $z \neq i$, $\dfrac{z+i}{z-i}$ là số thực dương khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 > 0, \end{cases}$

tức là khi và chỉ khi $z = yi$, y là số thực, $|y| > 1$. Gọi I, J là các điểm theo thứ tự biểu diễn các số i, $-i$ thì tập hợp cần tìm là các điểm thuộc trục ảo nằm ngoài đoạn thẳng JI.

(Về hình học : gọi M là điểm biểu diễn số phức z thì $\dfrac{z+i}{z-i}$ bằng số $k > 0$ có nghĩa là $\overrightarrow{MJ} = k\overrightarrow{MI}$ với $k > 0$. Từ đó dễ thấy M thuộc đường thẳng JI và nằm ngoài đoạn thẳng JI).

15. a) Trong mặt phẳng phức gốc O, G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Vậy G biểu diễn số phức $\dfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ theo thứ tự biểu diễn z_1, z_2, z_3.

b) Ba điểm A, B, C thuộc một đường tròn tâm tại gốc toạ độ O nên tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi trọng tâm G của nó trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp, tức là $G \equiv 0$ hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

16. Do z không phải là số thực nên các điểm O, A, B theo thứ tự biểu diễn các số 0, 1, z là các đỉnh của một tam giác. Với $z' \neq 0$, xét các điểm A', B' theo thứ tự biểu diễn các số z', zz' thì ta có

$\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{|z'|}{1} = |z'|$, $\dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{|zz'|}{|z|} = |z'|$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{|zz' - z'|}{|z-1|} = |z'|$, vậy tam giác $OA'B'$ đồng dạng với tam giác OAB (tỉ số đồng dạng bằng $|z'|$).

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu định nghĩa căn bậc hai của số phức ;

– Biết cách đưa việc tìm căn bậc hai của số phức về việc giải một hệ hai phương trình hai ẩn thực ;

– Biết cách giải một phương trình bậc hai.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Tính được căn bậc hai của số phức ;

– Giải được phương trình bậc hai với hệ số phức.

II – NHỮNG ĐIỂM CẦN LƯU Ý

1. Không nên dùng kí hiệu $\sqrt{\ }$ để chỉ căn bậc hai của số phức vì có hai căn bậc hai của số phức $w \neq 0$ và không có ưu tiên nào chọn một trong chúng (để ý rằng trong khi $\mathbb{R}$ là một trường sắp thứ tự thì $\mathbb{C}$ không phải là một trường sắp thứ tự). Nếu dùng kí hiệu đó học sinh dễ nhầm lẫn khi áp dụng máy móc các quy tắc tính căn bậc hai của số thực cho căn bậc hai của số phức (xem bài tập đố vui 22). Do đó cần nhấn mạnh định nghĩa z là một căn bậc hai của w có nghĩa là $z^2 = w$.

2. Sách không đưa ra công thức căn bậc hai tổng quát của số phức $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) vì không muốn đòi hỏi học sinh phải nhớ công thức này (hơi phức tạp). (Vả lại về sau, khi đã có dạng lượng giác của số phức thì việc tìm căn bậc hai trở nên không có khó khăn gì (xem bài tập 26, ứng dụng thứ hai của công thức Moa-vrơ ở cuối chương và bài đọc thêm về căn bậc n của số phức)). Chỉ cần hướng dẫn học sinh biết cách đưa việc tìm căn bậc hai của $w = a + bi$ (a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) về việc giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases}$; mỗi nghiệm $(x\,;y)$ của nó cho một căn bậc hai $x + yi$. Thông qua hai ví dụ, sách giới thiệu phương pháp giải đơn giản hệ phương trình này là sử dụng "phép thế", thay $y = \dfrac{b}{2x}$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất của hệ để được một phương trình trùng phương đối với x (mà hệ số của x^4 trái dấu với hệ số tự do).

3. Việc tìm căn bậc hai của số thực là dễ nhưng ở đây SGK muốn chứng minh rằng chỉ có hai căn bậc hai đó trong $\mathbb{C}$.

4. Mục đích của mục 1 tóm lại là chứng minh rằng số phức $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau khác 0 và nói cách tìm chúng.

5. Về mục 2, phương trình bậc hai (với hệ số phức), sách đưa ngay công thức nghiệm. Nếu cần, giáo viên có thể nhắc lại rằng khi $A \neq 0$ ta luôn viết được $Az^2 + Bz + C = A\left[\left(z + \dfrac{B}{2A}\right)^2 - \dfrac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right]$, và từ đó có công thức nghiệm.

6. Sau khi chứng minh rằng phương trình bậc hai (với hệ số phức) luôn có nghiệm, ta có thể nói tiếp một cách tự nhiên đến định lí cơ bản của đại số (coi như một cách kết thúc việc giới thiệu các hệ thống số ở bậc Trung học).

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

**** Dự kiến phân phối thời gian***

Mục 1 :	1 tiết
Mục 2 :	1 tiết
Luyện tập :	1 tiết

**** Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

H1 *Mục đích :* Ôn lại định nghĩa căn bậc hai và sử dụng nội dung phần ghi nhớ.

Trả lời : z_1z_2 là một căn bậc hai của w_1w_2 vì $(z_1z_2)^2 = z_1^2z_2^2 = w_1w_2$. Từ đó các căn bậc hai của w_1w_2 là $\pm z_1z_2$.

H2 *Mục đích :* Hai cách chứng minh (một cách sử dụng công thức nghiệm, một cách dùng tính chất của số phức liên hợp) đều giúp ôn tập.

Trả lời

• *Cách 1 :* Theo công thức nghiệm của phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A \neq 0)$,

a) Khi biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$ thì các nghiệm đều là số thực nên nếu z_0 là một nghiệm thì $\overline{z_0} = z_0$ cũng là một nghiệm ;

b) Khi biệt thức $\Delta < 0$ thì hai nghiệm có dạng

$$-\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A}i \text{ và } -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2A}i,$$

là hai số phức liên hợp nên nếu z_0 là một nghiệm thì $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm.

• *Cách 2 :* Nếu z_0 là một nghiệm tức là

$$Az_0^2 + Bz_0 + C = 0,$$

thì ta có

$$\overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = \overline{0} = 0.$$

Nhưng do A, B, C là số thực nên $\overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = A\overline{z_0^2} + B\overline{z_0} + C$, vậy $A\overline{z_0^2} + B\overline{z_0} + C = 0$ tức là $\overline{z_0}$ cũng là một nghiệm của phương trình đang xét.

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

17. • Để tìm các căn bậc hai của $-i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ đó có hai nghiệm là $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vậy $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$; $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

Chú ý : Nếu đã biết một căn bậc hai của i là $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ (xem ví dụ 2 trong SGK) thì do đã biết một căn bậc hai của -1 là i nên theo kết quả của **H1**, các căn bậc hai của $-i$ là $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)i = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

• Để tìm các căn bậc hai của $4i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ đó có hai nghiệm là $(\sqrt{2} ; \sqrt{2}), (-\sqrt{2} ; -\sqrt{2})$ nên $z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$, $z_2 = -\sqrt{2}(1 + i)$.

Chú ý : Đã biết một căn bậc hai của i là $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ thì theo **H1**, các căn bậc hai của $4i$ là $\pm 2.\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \pm\sqrt{2}(1 + i)$.

• Dễ thấy $-4 = (2i)^2$ nên các căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$.

• Để tìm căn bậc hai của $1 + 4\sqrt{3}i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Hệ đó tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - \dfrac{12}{x^2} = 1 \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x}. \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(2; \sqrt{3})$, $(-2; -\sqrt{3})$, từ đó

$$z_1 = 2 + \sqrt{3}i,\ z_2 = -2 - \sqrt{3}i.$$

18. z là một căn bậc hai của w thì $z^2 = w$ nên suy ra $\left|z^2\right| = |z|^2 = |w|$, từ đó

$|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{|w|}$.

19. a) $z^2 = z + 1 \Leftrightarrow \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$. Vậy $z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = -4$. Vậy $z = -1 \pm 2i$.

c) $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$ có biệt thức

$$\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = 2i = (1 + i)^2$$

nên phương trình có hai nghiệm là

$$\frac{1}{2}\left[-1 + 3i + (1 + i)\right] = 2i \text{ và } \frac{1}{2}\left[-1 + 3i - (1 + i)\right] = -1 + i.$$

20. a) Công thức nghiệm của phương trình bậc hai $\dfrac{-B \pm \delta}{2A}$ $(\delta^2 = B^2 - 4AC)$

chứng tỏ $z_1 + z_2 = -\dfrac{B}{A}$, $z_1 z_2 = \dfrac{C}{A}$ tức là công thức Vi-ét vẫn còn đúng.

b) Theo công thức nghiệm của phương trình bậc hai, dễ thấy hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $z_1 + z_2 = \alpha$, $z_1 z_2 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cho trước) phải là hai nghiệm của phương trình bậc hai (đối với z) $z^2 - \alpha z + \beta = 0$. Vậy hai số cần tìm là các nghiệm của phương trình $z^2 - (4 - i)z + 5(1 - i) = 0$. Biệt thức

$\Delta = (4 - i)^2 - 20(1 - i) = -5 + 12i$. Để tìm căn bậc hai của Δ ta cần giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$

Dễ thấy hệ đó có hai nghiệm là (2 ; 3) và (–2 ; –3) nên các căn bậc hai cần tìm bằng $\pm(2 + 3i)$. Vậy hai nghiệm của phương trình bậc hai đang xét là $\frac{1}{2}\left[4 - i \pm (2 + 3i)\right]$ tức là $3 + i$ và $1 - 2i$.

c) Nếu phương trình $z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức liên hợp, $z_2 = \overline{z_1}$, thì theo công thức Vi-ét, $B = -(z_1 + z_2) = -(z_1 + \overline{z_1})$ là số thực, $C = z_1z_2 = z_1\overline{z_1}$ là số thực.

Điều ngược lại không đúng vì nếu B, C thực thì khi $\Delta = B^2 - 4C > 0$ hai nghiệm là hai số thực phân biệt, chúng không phải là liên hợp với nhau. (Khi $\Delta \leq 0$ thì phương trình mới có hai nghiệm là hai số phức liên hợp).

21. a) $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i$ nên nó có hai nghiệm là $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ (xem bài tập 17).

$z^2 - 2iz - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - i)^2 = 0$ nên nó có nghiệm kép là $z_3 = i$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là z_1, z_2, z_3.

b) Hai số z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + Bz + 3i = 0$ khi và chỉ khi ta có : $z_1 + z_2 = -B$, $z_1z_2 = 3i$ (xem bài tập 20). Từ đó $z_1^2 + z_2^2 = 8$ có nghĩa là $(z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = B^2 - 6i = 8$ tức là $B^2 = 8 + 6i = (3 + i)^2$, vậy $B = \pm(3 + i)$.

22. Lập luận a) là đúng.

Lập luận b) sai ở chỗ : nếu z_1 là một căn bậc hai của w_1, z_2 là một căn bậc hai của w_2 thì z_1z_2 là một trong hai căn bậc hai của w_1w_2 ; vậy ở đây $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$ chỉ là một căn bậc hai của $(-1)(-1) = 1$ (để ý rằng có hai căn bậc hai của 1 là 1 và –1), các kí hiệu $\sqrt{(-1)(-1)}$ và $\sqrt{1}$ chưa xác định.

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

Công thức tính căn bậc hai của số phức $w = a + bi$

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có nghĩa là $z^2 = w$ tức là $(x + yi)^2 = a + bi$. Vậy để tìm căn bậc hai của w cho trước, cần giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Rõ ràng hệ đó tương đương với :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 4x^2y^2 = b^2 \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = b^2 \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ xy \text{ cùng dấu với } b \end{cases}$$

(nói xy cùng dấu với b có nghĩa là $xyb \geq 0$).

Vậy các căn bậc hai cần tìm của $w = a + bi$ là :

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\, i\right) \text{ khi } b \geq 0$$

$$\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\, i\right) \text{ khi } b < 0.$$

Trường hợp riêng (suy ra được từ các công thức đó) :

Khi $b = 0$, $a \geq 0$, hai căn bậc hai cần tìm là $\pm\sqrt{a}$.

Khi $b = 0$, $a < 0$, hai căn bậc hai cần tìm là $\pm\sqrt{-a}\, i$.

Chú ý : Để tìm căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$, thông qua hai ví dụ bằng số, SGK giới thiệu cách giải đơn giản hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases}$$

bằng cách thay $y = \dfrac{b}{2x}$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất để đến được phương trình trùng phương đối với x là

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0.$$

Từ đó, rõ ràng $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ và suy ra

$$y^2 = x^2 - a = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Để ý đến xy cùng dấu với b, ta cũng đi đến được công thức tổng quát về căn bậc hai nêu trên. Tuy nhiên SGK chỉ dừng lại ở khẳng định có đúng hai căn bậc hai của $w \neq 0$ là hai số phức đối nhau (mà không trình bày chứng minh đầy đủ).

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập nhằm rèn luyện cho HS kĩ năng tính được căn bậc hai của số phức và giải phương trình bậc 2 với hệ số phức.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

23. Phương trình $z + \dfrac{1}{z} = k$ tương đương với $z^2 - kz + 1 = 0$ nên có hai nghiệm là $z = \dfrac{k \pm \delta}{2}$ trong đó δ là một căn bậc hai của $k^2 - 4$.

a) Khi $k = 1$ thì $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

b) Khi $k = \sqrt{2}$ thì $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

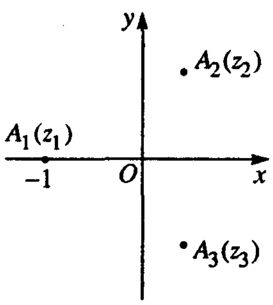
c) Khi $k = 2i$ thì $z = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)i$.

24. a) $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$.

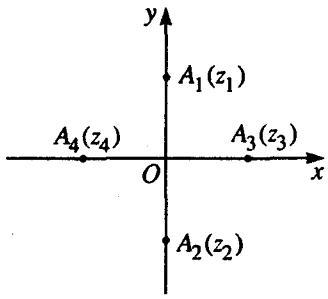
Nghiệm của $z + 1 = 0$ là $z_1 = -1$.

Phương trình $z^2 - z + 1 = 0$ tương đương với $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$ nên có hai nghiệm là $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy $z^3 + 1 = 0$ có ba nghiệm z_1, z_2, z_3 (xem hình 4.3).



Hình 4.3



Hình 4.4

b) $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1)$.

Nghiệm của $z^2 + 1 = 0$ là $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Nghiệm của $z^2 - 1 = 0$ là $z_3 = 1$, $z_4 = -1$.

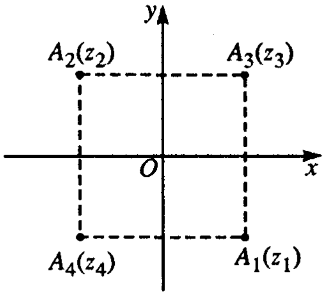
Vậy $z^4 - 1 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 (xem hình 4.4).

c) $z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i)$.

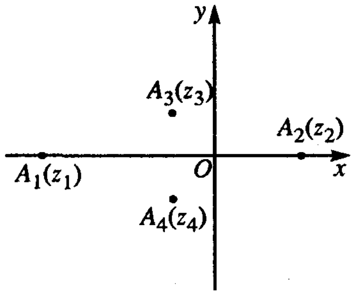
Nghiệm của $z^2 + 2i = 0$ là các căn bậc hai của $-2i$, đó là $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i$.

Nghiệm của $z^2 - 2i = 0$ là các căn bậc hai của $2i$, đó là $z_3 = 1 + i$, $z_4 = -1 - i$.

Vậy $z^4 + 4 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 (xem hình 4.5).



Hình 4.5



Hình 4.6

d) $8z^4 + 8z^3 = z + 1 \Leftrightarrow (z + 1)(8z^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (z + 1)(2z - 1)(4z^2 + 2z + 1) = 0$.

Nghiệm của $z + 1 = 0$ là $z_1 = -1$.

Nghiệm của $2z - 1 = 0$ là $z_2 = \frac{1}{2}$.

Nghiệm của $4z^2 + 2z + 1 = 0$ hay $\left(2z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ là $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ và $z_4 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 (xem hình 4.6).

25. a) $1 + i$ là một nghiệm của $z^2 + bz + c = 0$ $(b, c \in \mathbb{R})$ khi và chỉ khi $(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = 0$ tức là $b + c + (2 + b)i = 0$.

Vậy $b + c = 0$ và $2 + b = 0$; suy ra $b = -2$, $c = 2$.

b) $1 + i$ là một nghiệm của $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ khi và chỉ khi

$(1 + i)^3 + a(1 + i)^2 + b(1 + i) + c = 0$ tức là $(b + c - 2) + (2 + 2a + b)i = 0$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} b + c - 2 = 0 & (1) \\ 2a + b + 2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Ta có 2 là một nghiệm của $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ khi và chỉ khi $8 + 4a + 2b + c = 0$. (3)

(2) và (3) cho $c = -4$. Khi đó (1) cho $b = 6$ và từ đó (2) cho $a = -4$.

Vậy $a = -4$, $b = 6$, $c = -4$.

26. a) Với mọi số thực φ, ta có

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + (2\sin\varphi\cos\varphi)i = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$

Vậy các căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ là $\pm(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Còn theo cách giải trong bài học, để tìm các căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$, ta cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \cos 2\varphi \\ 2xy = \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Rõ ràng các cặp $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(-\cos\varphi, -\sin\varphi)$ là nghiệm của hệ, tức là $\pm(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là hai căn bậc hai của $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$; ta đã biết rằng chỉ có hai căn như thế nên đó là tất cả các căn bậc hai cần tìm.

b) Viết $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ thì theo câu a), $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ có hai căn bậc hai là

$$\pm\left(\cos\left(\frac{-\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right) = \pm\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Rõ ràng

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Vậy hai căn bậc hai cần tìm là $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}})$.

Còn theo bài học, việc tìm các căn bậc hai của $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ đưa về việc giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Hệ đó tương đương với

$$\begin{cases} 8x^4 - 4\sqrt{2}x^2 - 1 = 0 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4x} \end{cases}$$

nên có các nghiệm là $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$.

Vậy ta lại được hai căn bậc hai đã viết ở trên.

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG (2 tiết)

I – MỤC TIÊU

Kiến thức

Giúp học sinh :

– Hiểu rõ khái niệm acgumen của số phức ;

– Hiểu rõ dạng lượng giác của số phức ;

– Biết công thức nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác ;

– Biết công thức Moa-vrơ và ứng dụng vào lượng giác.

Kĩ năng

Giúp học sinh :

– Biết tìm acgumen của số phức ;

– Biết đổi từ dạng đại số sang dạng lượng giác của số phức ;

– Tính toán thành thạo phép nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác ;

– Sử dụng được công thức Moa-vrơ.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khi giảng dạy, giáo viên cần để ý nét nổi bật của bài này là ý nghĩa hình học của phép nhân (chia) các số phức được thể hiện rõ ràng nhờ dạng lượng giác của chúng. Dưới dạng lượng giác, để nhân (chia) hai số phức ta lấy tích (thương) các môđun và tổng (hiệu) các acgumen của chúng.

   Nhiều ứng dụng hình học, đại số, lượng giác của các số phức nhờ đến dạng lượng giác của chúng, trong đó công thức đáng chú ý là công thức Moa-vrơ.

2. Về nguyên tắc, việc đổi từ dạng đại số $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ sang dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ không gặp khó khăn gì lớn. Khi biết biểu diễn hình học số phức z bởi điểm M trong mặt phẳng phức thì $r = |z|$ là khoảng cách OM, φ là số đo một góc lượng giác (Ox, OM) (tính đa trị của acgumen của z do tồn tại vô số góc lượng giác cùng tia đầu tia cuối đã được học sinh làm quen ở lớp 10, lớp 11). (Máy tính bỏ túi thường có cả phím thực hiện riêng phép chuyển đổi này, đó cũng là chuyển đổi từ toạ độ vuông góc $(a\,;\,b)$ sang toạ độ cực $(r\,;\,\varphi)$ của điểm M trong mặt phẳng).

   Tuy nhiên học sinh thường quên đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$, đôi khi nhầm cả dấu +, – trước chữ $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ và có khi đổi chỗ hai chữ $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Giáo viên nên nhắc nhở học sinh những điều này qua những ví dụ, câu hỏi, bài tập.

3. SGK đã nêu một ứng dụng của công thức Moa-vrơ vào lượng giác là tính $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ theo các luỹ thừa của $\cos\varphi$ và $\sin\varphi$, có đề cập đến căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác. Căn bậc n của số phức chỉ được giới thiệu trong bài đọc thêm.

III – GỢI Ý VỀ DẠY HỌC

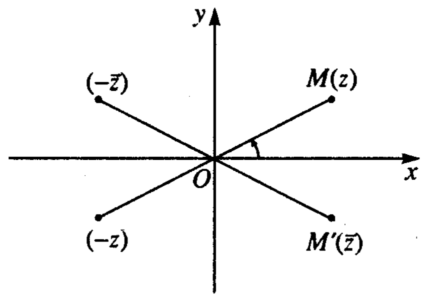
• ***Dự kiến phân phối thời gian***

Mục 1 : 1 tiết

Mục 2 và mục 3 : 1 tiết

Luyện tập : 1 tiết

Ôn tập chương : 2 tiết.



Hình 4.7

• ***Gợi ý về các hoạt động trên lớp***

$\boxed{\text{H1}}$ *Mục đích :* Dùng biểu diễn hình học của số phức để tìm acgumen của nó.

Trả lời : z biểu diễn bởi $\overrightarrow{OM}$ thì $-z$ biểu diễn bởi $-\overrightarrow{OM}$ nên có acgumen là $\varphi + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; $\bar{z}$ biểu diễn bởi M' đối xứng với M qua Ox nên có acgumen là $-\varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $-\bar{z}$ biểu diễn bởi $-\overrightarrow{OM'}$ nên có acgumen $-\varphi + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, còn $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z\bar{z}}\bar{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$ có cùng acgumen với $\bar{z}$ tức là $-\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. (h.4.7).

$\boxed{\text{H2}}$ *Mục đích :* Để chuẩn bị cho chứng minh định lí ngay sau đó.

Trả lời : Dễ thấy $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. (xem bài tập 8) hoặc viết

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi) \text{ thì được}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

Trong $\boxed{\text{H1}}$ đã nói $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$ có cùng acgumen với $\bar{z}$ là $-\varphi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vậy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

IV – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

27. a) $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$;

$-z = r(\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi))$;

$\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{\bar{z}z}z = \dfrac{1}{|z|^2}z = \dfrac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

$kz = kr(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ khi $k > 0$,

$kz = -kr(\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi))$ khi $k < 0$.

b) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$-z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$kz = 2k\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ nếu $k > 0$,

$kz = -2k\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ nếu $k < 0$.

28. a) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$,

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Từ đó suy ra :

$(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$,

$\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$.

b) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$,

$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Từ đó suy ra

$2i(\sqrt{3} - i) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(cũng có thể tính $2i(\sqrt{3} - i) = 2(1 + i\sqrt{3}) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$).

c) $\dfrac{1}{2+2i} = \dfrac{\sqrt{2}}{4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right].$

d) $\sin\varphi + i\cos\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right).$

29. $(1+i)^{19} = (C_{19}^0 + C_{19}^2 i^2 + C_{19}^4 i^4 + ... + C_{19}^{16} i^{16} + C_{19}^{18} i^{18}) +$

$+ (C_{19}^1 i + C_{19}^3 i^3 + ... + C_{19}^{19} i^{19}),$

phần thực ở vế phải là $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18}$.

Mặt khác, $(1+i)^{19} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{19}$

$= (\sqrt{2})^{19}\left(\cos\dfrac{19\pi}{4} + i\sin\dfrac{19\pi}{4}\right)$

$= (\sqrt{2})^{19}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^9 + 2^9 i.$

Vậy $C_{19}^0 - C_{19}^2 + C_{19}^4 - ... + C_{19}^{16} - C_{19}^{18} = -2^9 = -512.$

Cách khác : Để ý rằng $(1+i)^2 = 2i$, ta có

$(1+i)^{19} = (2i)^9(1+i)$

$= 2^9 i(1+i)$

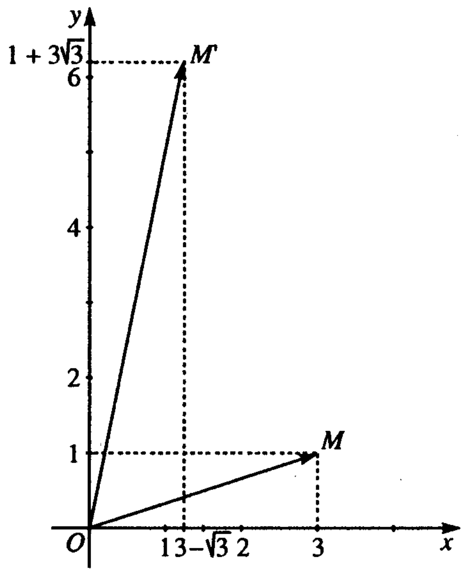
$= 2^9(-1+i).$

Từ đó suy ra số cần tìm là -2^9.

30. a) $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{\left[3 - \sqrt{3} + \left(1 + 3\sqrt{3}\right)i\right](3-i)}{10}$

$= 1 + \sqrt{3}i.$

b) Xét tia Ox thì ta có (hình 4.8)



Hình 4.8

sđ $(OM, OM') =$ sđ $(Ox, OM') -$ sđ $(Ox, OM) = \varphi' - \varphi =$ acgumen $\frac{z'}{z}$ (sai khác $k2\pi$) (trong đó φ và φ' theo thứ tự là acgumen của z và z'). Từ đó do

$\frac{z'}{z} = 1 + \sqrt{3}i$ có acgumen là $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, nên góc lượng giác

(OM, OM') có số đo $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

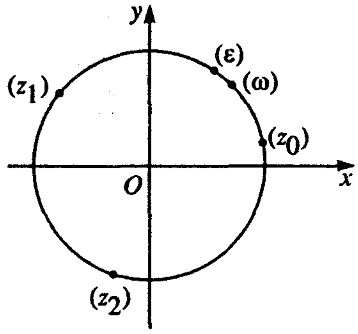
31. a) Ta có $\omega = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$,

$z_0^3 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^3 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \omega$,

$z_1^3 = (z_0\varepsilon)^3 = z_0^3\varepsilon^3 = z_0^3 = \omega$ (dễ thấy $\varepsilon^3 = 1$),

$z_2^3 = (z_0\varepsilon^2)^3 = z_0^3\varepsilon^6 = z_0^3 = \omega$.

b) Xem hình 4.9 (để ý rằng một acgumen của $z_0\varepsilon$ là $\frac{3\pi}{4}$, một acgumen của $z_0\varepsilon^2$ là $-\frac{7\pi}{12}$).



Hình 4.9

V – BỔ SUNG KIẾN THỨC

A – Dạng mũ của số phức và công thức Ơ-le

1. Để diễn tả ngắn gọn và sử dụng thuận lợi công thức nhân hai số phức dưới dạng lượng giác, người ta còn dùng dạng mũ của số phức như sau (được trình bày trong nhiều SGK nước ngoài).

Với số phức z có môđun bằng 1, ta viết $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ và đặt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Khi đó, rõ ràng ta có

$$e^{i\varphi}e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$$

và công thức Moa-vrơ trở thành

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \text{ (với mọi số nguyên } n).$$

Với số phức z có môđun $|z| = r > 0$, có acgumen φ, viết

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} ;$$

dạng đó gọi là dạng mũ của số phức $z \neq 0$. Công thức nhân hai số phức trở thành

$$(re^{i\varphi})(r'e^{i\varphi'}) = rr'e^{i(\varphi+\varphi')}.$$

2. Dễ thấy

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} ;$$

các công thức này gọi là công thức Ơ-le.

Sử dụng các công thức này cùng với các tính chất của dạng mũ nói trên, có thể dễ dàng giải được một số bài toán lượng giác, chẳng hạn :

a) Công thức hạ bậc : Ví dụ, ta có

$$\begin{aligned}\sin^3\varphi &= \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^3\\ &= -\frac{1}{8i}[e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi} - 3e^{i\varphi}e^{-i\varphi}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})]\\ &= -\frac{1}{4}(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) = \frac{1}{4}(-\sin 3\varphi + 3\sin\varphi).\end{aligned}$$

b) Công thức biến đổi tích thành tổng : Ví dụ, ta có

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\right).\left(\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{2} + \frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2}\right]\\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].\end{aligned}$$

c) Công thức biến đổi tổng thành tích : Ví dụ, ta có

$$\begin{aligned}e^{i\alpha} + e^{i\beta} &= e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\\ &= e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

3. Trong các giáo trình hàm biến phức ở bậc Đại học đã xây dựng hàm số biến số phức

$$z = a + ib \mapsto e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

Đó là một hàm nguyên, đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết hàm biến phức.

B – Số phức với hình học phẳng

Về hình học, số phức giúp khảo sát sâu sắc nhiều điều trong mặt phẳng. Ngay ở bậc Trung học phổ thông, dùng số phức cũng có thể diễn tả một số vấn đề của hình học sơ cấp trong mặt phẳng, đặc biệt về các phép dời hình, phép đồng dạng trong mặt phẳng (một số SGK nước ngoài có trình bày những điều này).

Dễ thấy biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm M tuỳ ý biểu diễn số phức z thành điểm M' biểu diễn số phức z' sao cho :

1) $z' = z + \beta$ (β là số phức cho trước) là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biểu diễn số phức β.

2) $z' - z_0 = \alpha(z - z_0)$ (α là số phức cho trước, $|\alpha| = 1$, z_0 là số phức cho trước) là phép quay tâm A (biểu diễn số phức z_0) với góc quay là một acgumen của α. Điều đó suy ra từ : $|\overrightarrow{AM'}| = |z' - z_0| = |\alpha||z - z_0| = |z - z_0| = |\overrightarrow{AM}|$ và khi $M \neq A$, một góc lượng giác tia đầu AM, tia cuối AM' có số đo là một acgumen của $\dfrac{z' - z_0}{z - z_0} = \alpha$.

Từ đó suy ra phép biến đổi xác định bởi $z' = \alpha z + \beta$ ($|\alpha| = 1$, β là số phức tuỳ ý cho trước) là một phép tịnh tiến khi $\alpha = 1$ và một phép quay khi $\alpha \neq 1$ (vì khi $\alpha \neq 1$ thì $z' = \alpha z + \beta$ có thể được viết thành $z' - z_0 = \alpha(z - z_0)$ với $z_0 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$).

3) $z' - z_0 = k(z - z_0)$ (k thực khác 0, z_0 là số phức cho trước) là phép vị tự tâm A (biểu diễn z_0) với hệ số vị tự k.

Từ đó suy ra phép biến đổi xác định bởi $z' = \alpha z + \beta$ (α, β là số phức cho trước, $\alpha \neq 0$) là một phép tịnh tiến khi $\alpha = 1$, còn khi $\alpha \neq 1$, nó là hợp thành của một phép quay (với góc quay là một acgumen của α) với một phép vị tự cùng tâm (với hệ số vị tự là $|\alpha|$), tức là một phép đồng dạng trong mặt phẳng.

LUYỆN TẬP (1 tiết)

Mục đích của tiết luyện tập là nhằm rèn luyện cho HS kĩ năng tìm acgumen của số phức ; viết số phức dưới dạng lượng giác ; thực hiện phép tính nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác.

Gợi ý trả lời câu hỏi và bài tập

32. $\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$

$$= \cos^4\varphi + 4(\cos^3\varphi)(i\sin\varphi) + 6(\cos^2\varphi)(i^2)\sin^2\varphi + 4(\cos\varphi)(i^3\sin^3\varphi) + i^4\sin^4\varphi$$

$$= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi + (4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi)i.$$

Từ đó $\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$,

$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$.

33. • $(\sqrt{3} - i)^6 = \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^6$

$$= 2^6[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] = -2^6.$$

• $\frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ nên

$$\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = \frac{1}{2^{1002}}\left(\cos\frac{2004\pi}{4} + i\sin\frac{2004\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{1002}}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\frac{1}{2^{1002}}.$$

(*Chú ý* : do $(1+i)^2 = 2i$, cũng dễ thấy $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = \frac{(2i)^{1002}}{2^{2004}} = -\frac{1}{2^{1002}}$).

• Ta có $\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \frac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{1+12} = \frac{-13+13i\sqrt{3}}{13} = -1+i\sqrt{3}$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Từ đó,

$\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21} = 2^{21}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{21}$.

34. $\omega = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, nên với số n nguyên dương, ta có $\omega^n = \cos\frac{4n\pi}{3} + i\sin\frac{4n\pi}{3}$. Số này là số thực khi và chỉ khi $\sin\frac{4n\pi}{3} = 0$; điều này xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4n}{3}$ là số nguyên, tức là khi và chỉ khi n là một bội nguyên dương của 3.

Số ω^m (m nguyên dương) là số ảo khi và chỉ khi $\cos\frac{4m\pi}{3} = 0$ tức là khi và chỉ khi có số nguyên k để $\frac{4m}{3} = \frac{1}{2} + k$. Khi đó $8m - 6k = 3$, vế trái chia hết cho 2, vế phải không chia hết cho 2. Vậy không có số nguyên dương m để ω^m là số ảo.

35. a) Một acgumen của iz là $\frac{5\pi}{4}$ thì một acgumen của $z = \frac{iz}{i}$ là $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Vậy $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Từ đó dạng lượng giác của các căn bậc hai của z là $\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$ và $\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$.

b) Gọi φ là một acgumen của z thì $-\varphi$ là một acgumen của $\bar{z}$. Do một acgumen của $1+i$ là $\frac{\pi}{4}$ nên một acgumen của $\frac{\bar{z}}{1+i}$ là $-\varphi - \frac{\pi}{4}$. Vậy theo giả thiết, $-\varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), từ đó $\varphi = \frac{\pi}{2} + l2\pi$ ($l \in \mathbb{Z}$). Suy ra

$z = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó dạng lượng giác của các căn bậc hai của z là

$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ và $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

36. a) $1 - i\tan\frac{\pi}{5} = 1 - i\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right].$$

b) $\tan\frac{5\pi}{8} + i = \frac{-1}{\cos\frac{5\pi}{8}}\left(-\sin\frac{5\pi}{8} - i\cos\frac{5\pi}{8}\right)$ (để ý rằng $\cos\frac{5\pi}{8} < 0$)

$$= \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

c) $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}\right].$$

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$, thì $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$ là dạng lượng giác cần tìm.

Khi $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$, thì $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi$

$= \left(-2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ là dạng lượng giác cần tìm.

Còn khi $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ thì $1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = 0 = 0(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ tuỳ ý).

E. GỢI Ý ÔN TẬP CHƯƠNG (2 tiết)

I – GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CHƯƠNG

• Một tiết dành cho ôn tập kiến thức, một tiết để tiến hành kiểm tra.

• Để chuẩn bị cho tiết ôn tập, nên đòi hỏi học sinh tự làm đề cương ôn tập và làm một số bài tập ở phần Câu hỏi và bài tập ôn chương IV. Đến tiết ôn tập, cần dành thì giờ thích đáng cho kiểm tra kiến thức lí thuyết, nhắc nhở học sinh tránh những sai lầm thường gặp.

II – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các khái niệm

• Tập hợp số phức : $\mathbb{C}$

• Dạng đại số của số phức : $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, i là *đơn vị ảo*, $i^2 = -1$),

a là *phần thực*, b là *phần ảo* của z.

z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 ; z là *số ảo* $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0.

• Hai số phức bằng nhau : $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$)

$$z = z' \Leftrightarrow a = a', b = b'.$$

• Biểu diễn hình học :

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm M trong mặt phẳng phức (kí hiệu là $M(z)$) $\Leftrightarrow$ M là điểm có toạ độ $(a ; b)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

Số thực được biểu diễn bởi điểm thuộc Ox (trục thực), số ảo được biểu diễn bởi điểm thuộc Oy (trục ảo).

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}$ trong mặt phẳng phức $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ là vectơ có toạ độ $(a ; b)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

• Cộng, trừ số phức : $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$)

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i,$$
$$z - z' = (a - a') + (b - b')i.$$

Nếu z biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}$, z' biểu diễn bởi vectơ $\vec{u'}$ thì $z + z'$ biểu diễn bởi vectơ $\vec{u} + \vec{u'}$, $z - z'$ biểu diễn bởi vectơ $\vec{u} - \vec{u'}$.

Nếu $-z' = -a' - b'i$ là *số đối* của $z' = a' + b'i$ thì $z - z' = z + (-z')$.

• Nhân hai số phức : $z = a + bi$

$$z' = a' + b'i \ (a, b, a', b' \in \mathbb{R}).$$

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$$

Nếu k là số thực thì $kz = k(a + bi) = ka + (kb)i$; nếu z biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}$ thì kz biểu diễn bởi vectơ $k\vec{u}$.

• Số phức liên hợp : $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ và $\overline{z} = a - bi$ là hai số phức liên hợp.

$\overline{\overline{z}} = z$;

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

$\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$;

z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$;

z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

• Môđun của số phức :

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Nếu z biểu diễn bởi điểm M thì $|z|$ là khoảng cách từ M đến gốc toạ độ O.

$|z| \geq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ và $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

$|zz'| = |z||z'|$. (Chú ý : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$).

• Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo z^{-1} của số phức $z \neq 0$ là $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$. Thương của z' cho $z \neq 0$ là số phức

$$\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

Chú ý : $\dfrac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = zw \; (z \neq 0)$;

$\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

$\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

2. Căn bậc hai của số phức và phương trình bậc hai

Căn bậc hai của số phức w là số phức z sao cho $z^2 = w$. Số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

$w = 0$ có đúng một căn bậc hai là $z = 0$;

$w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau khác 0.

Đặc biệt, nếu $a \in \mathbb{R}$ thì :

$w = a > 0$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$;

$w = a < 0$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\,i, -\sqrt{-a}\,i$.

• Giải phương trình bậc hai

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

$(A, B, C$ là ba số phức cho trước, $A \neq 0)$:

Biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$.

Khi $\Delta \neq 0$, gọi δ là một căn bậc hai của Δ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\frac{-B + \delta}{2A}, \; \frac{-B - \delta}{2A}.$$

Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm duy nhất (nghiệm kép) là $-\dfrac{B}{2A}$.

3. Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng

Dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$ là

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $\varphi \in \mathbb{R}$; trong đó

$r = |z|$, φ là một acgumen của z (số đo một góc lượng giác với tia đầu Ox, tia cuối OM, trong đó M là điểm biểu diễn z) ; acgumen của z xác định sai khác $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r > 0$) là dạng lượng giác của $a + bi \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$.

• Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác

Nếu $\quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

$\qquad z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

thì $\quad zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$

và khi $z \neq 0$, $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r}[\cos(\varphi' - \varphi) + i\sin(\varphi' - \varphi)]$.

• Công thức Moa-vrơ :

$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ với $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

• Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác :

Các căn bậc hai của $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r > 0$) là

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right).$$

III – GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI, BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

37. a) $(2 - 3i)^3 = 2^3 - 3.2.3i(2 - 3i) - (3i)^3$

$\qquad = 8 - 18i(2 - 3i) + 27i = -46 - 9i$

vậy phần thực là –46, phần ảo là –9.

b) $\dfrac{3+2i}{1-i} = \dfrac{(3+2i)(1+i)}{2} = \dfrac{1+5i}{2}$,

$\dfrac{1-i}{3-2i} = \dfrac{(1-i)(3+2i)}{13} = \dfrac{5-i}{13}$,

nên $\dfrac{3+2i}{1-i} + \dfrac{1-i}{3-2i} = \dfrac{23+63i}{26}$.

Vậy phần thực là $\dfrac{23}{26}$, phần ảo là $\dfrac{63}{26}$.

c) $(x+iy)^2 - 2(x+iy) + 5 = x^2 - y^2 - 2x + 5 + 2y(x-1)i$, vậy phần thực là $x^2 - y^2 - 2x + 5$, phần ảo là $2y(x-1)$. Số phức đó là số thực khi và chỉ khi hoặc $y = 0$, hoặc $x = 1$.

38. $|z| = |w| = 1$ thì $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$, $\bar{w} = \dfrac{1}{w}$

nên $\overline{\left(\dfrac{z+w}{1+zw}\right)} = \dfrac{\bar{z}+\bar{w}}{1+\bar{z}\bar{w}} = \dfrac{\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}}{1+\dfrac{1}{z}.\dfrac{1}{w}} = \dfrac{z+w}{1+zw}$, từ đó $\dfrac{z+w}{1+zw}$ là số thực.

39. a) Đặt $z + 3 - i = w$ thì được phương trình $w^2 - 6w + 13 = 0$. Biệt thức Δ ở đây là $36 - 52 = -16$ nên $w = \dfrac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$. (*Chú ý :* Thực ra, cũng có thể dùng biệt thức rút gọn !).

Vậy $z + 3 - i = 3 \pm 2i$ hay $z - i = \pm 2i$ tức là $z = 3i$ và $z = -i$ là các nghiệm cần tìm.

b) Đặt $\dfrac{iz+3}{z-2i} = w$ thì được phương trình $w^2 - 3w - 4 = 0$. Biệt thức Δ ở đây là $9 + 16 = 25$ nên $w = -1$ hoặc $w = 4$.

• Với $w = -1$, ta có $\dfrac{iz+3}{z-2i} = -1$, từ đó $(i+1)z = -3 + 2i$ nên

$$z = \frac{-3+2i}{1+i} = \frac{(-3+2i)(1-i)}{2} = \frac{-1+5i}{2}.$$

• Với $w = 4$, ta có $\dfrac{iz+3}{z-2i} = 4$, từ đó $(4-i)z = 3 + 8i$ nên

$$z = \frac{3+8i}{4-i} = \frac{4+35i}{17}.$$

Vậy $\dfrac{-1+5i}{2}$ và $\dfrac{4+35i}{17}$ là các nghiệm cần tìm.

c) $(z^2+1)^2 + (z+3)^2 = (z^2+1)^2 - [i(z+3)]^2$

$= (z^2+1+i(z+3))(z^2+1-i(z+3)) = 0$ khi và chỉ khi

hoặc $z^2 + 1 + i(z+3) = 0$ (1)

hoặc $z^2 + 1 - i(z+3) = 0.$ (2)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$; nó có biệt thức $\Delta = -5 - 12i = (2-3i)^2$ nên nó có hai nghiệm là $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = -1 + i$.

Phương trình (2) là phương trình bậc hai $z^2 - iz + 1 - 3i = 0$; nó có biệt thức $\Delta = -5 + 12i = (2+3i)^2$ nên nó có hai nghiệm là $z_3 = 1 + 2i$ và $z_4 = -1 - i$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là z_1, z_2, z_3, z_4 viết ở trên.

40. a) $z_1 = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$,

$z_2 = 2(-1-i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$,

$z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{3\pi}{4}\right)$

$= \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}.$

b) Mặt khác,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-2-2i} = \dfrac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(-2+2i)}{8} = \dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$, nên so sánh với kết quả câu a), suy ra $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

41. a) $z^2 = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$$= 4\sqrt{12} + 2i(6-2) = 8\sqrt{3} + 8i = 16\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

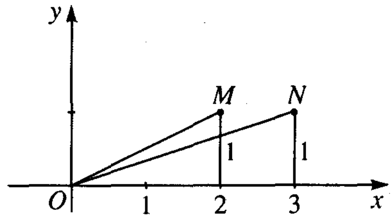
b) Theo kết quả bài tập 26 hoặc theo ứng dụng 2 của công thức Moa-vrơ, để ý rằng phần thực và phần ảo của z đều dương, suy ra

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

42. a) Biểu diễn hình học $2+i$, $3+i$ theo thứ tự bởi M, N trong mặt phẳng phức (h.4.10).

Ta có $\tan(Ox, OM) = \dfrac{1}{2} = \tan a$;

$\tan(Ox, ON) = \dfrac{1}{3} = \tan b.$



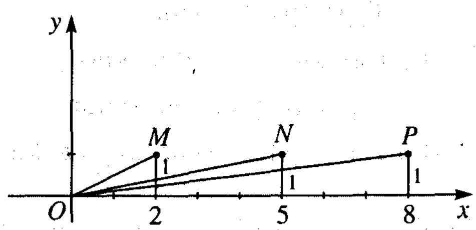
Hình 4.10

Do a, b gồm giữa 0 và $\dfrac{\pi}{2}$ còn M, N nằm trong góc phần tư thứ nhất của hệ toạ độ Oxy nên suy ra : một acgumen của $2+i$ bằng a, một acgumen của $3+i$ bằng b.

Mặt khác $(2+i)(3+i) = 5+5i$ có một acgumen bằng $\dfrac{\pi}{4}$ mà acgumen của tích các số phức bằng tổng các acgumen của các số phức đó (sai khác $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), nên từ $a, b \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, suy ra $a + b = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Biểu diễn hình học $2+i$, $5+i$, $8+i$ theo thứ tự bởi M, N, P trong mặt phẳng phức (h.4.11).

Lập luận tương tự như ở câu a) suy ra một acgumen của $2+i$ bằng a, một acgumen của $5+i$ bằng b, một acgumen của $8+i$ bằng c (từ các giả thiết $\tan a = \dfrac{1}{2}$, $\tan b = \dfrac{1}{5}$, $\tan c = \dfrac{1}{8}$ và $a, b, c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$).



Hình 4.11

Mặt khác $(2 + i)(5 + i)(8 + i) = 65(1 + i)$ có một acgumen bằng $\frac{\pi}{4}$ nên suy ra

$a + b + c = \frac{\pi}{4}$.

43. (C) ; **44.** (A) ; **45.** (A) ; **46.** (B) ; **47.** (B) ; **48.** (A) ;
49. (B) ; **50.** (C) ; **51.** (A) ; **52.** (B) ; **53.** (B) ;
54. (B) *Gợi ý :* Để ý rằng có thể viết

$$-\sin\varphi - i\cos\varphi = -i(\cos\varphi - i\sin\varphi) = -i\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right].$$

IV – GỢI Ý ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG IV

(Thời gian làm bài mỗi đề là 45 phút)

ĐỀ SỐ 1

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Chọn câu trả lời đúng bằng cách khoanh tròn mỗi chữ cái A, B, C, D trong mỗi câu sau.

Câu 1 *(1 điểm).* Số phức z thay đổi sao cho $|z| = 1$ thì giá trị bé nhất m và giá trị lớn nhất M của $|z - i|$ là :

(A) $m = 0, M = 1$;

(B) $m = 0, M = 2$;

(C) $m = 0, M = \sqrt{2}$;

(D) $m = 1, M = 2$.

Câu 2 *(1 điểm).* Khi số phức z thay đổi tuỳ ý thì tập hợp các số $2z + 2\bar{z}$ là :

(A) Tập hợp các số thực dương ;

(B) Tập hợp các số thực không âm ;

(C) Tập hợp tất cả các số thực ;

(D) Tập hợp tất cả các số phức không phải là số ảo.

Câu 3 *(1 điểm).* Một acgumen của số phức $z \neq 0$ là φ thì một acgumen của $\frac{1}{z^2}$ là :

(A) $-\varphi^2$; (B) $-\varphi^2 + \frac{\pi}{2}$; (C) $2\varphi + \pi$; (D) -2φ.

Câu 4 *(2 điểm)*. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ thoả mãn điều kiện $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1$.

Câu 5 *(2 điểm)*. Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^8.$$

Câu 6 *(3 điểm)*. Xét phương trình bậc hai (đối với ẩn z)

$$z^2 + 2bz + c = 0,$$

trong đó b, c là hai số thực cho trước, $c \neq 0$. Gọi A, B là hai điểm của mặt phẳng phức biểu diễn hai nghiệm của phương trình đó. Tìm điều kiện về b và c để tam giác OAB là tam giác vuông.

Đáp án

Câu 1. (B)

Câu 2. (C)

Câu 3. (D)

Câu 4. $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x = 0.$

Tập hợp cần tìm là trục ảo.

(Cũng dễ thấy $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1$ khi và chỉ khi điểm M biểu diễn z cách đều hai điểm biểu diễn -1 và 1. Điều đó tương đương với $M \in Oy$).

Câu 5. $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

nên $(\sqrt{3} + i)^8 = 2^8\left(\cos\dfrac{8\pi}{6} + i\sin\dfrac{8\pi}{6}\right)$

$$= -2^8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -2^8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Vậy phần thực là $-2^7 = -128$, phần ảo là $-128\sqrt{3}$.

Câu 6. Hai nghiệm không thể đều là số thực vì O, A, B không thẳng hàng ; từ đó suy ra chúng là hai số phức liên hợp không thực (vì phương trình có mọi hệ số là số thực). Vậy tam giác OAB là tam giác vuông thì nó phải vuông cân đỉnh O, trung điểm của AB thuộc Ox. Điều này xảy ra khi và chỉ khi bình phương phần thực của một nghiệm bằng bình phương phần ảo của nghiệm đó (và khác 0). Vậy điều kiện cần tìm là $b^2 = c - b^2 > 0$ tức là $c = 2b^2 > 0$.

ĐỀ SỐ 2

A – PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Chọn câu trả lời đúng bằng cách khoanh tròn vào chữ cái A, B, C, D cho mỗi câu sau :

Câu 1 *(1 điểm).* Khi số phức $z \neq 0$ thay đổi tuỳ ý thì tập hợp các số $z^2 + 1$ là :

(A) Tập hợp các số thực lớn hơn 1 ;

(B) Tập hợp tất cả các số phức ;

(C) Tập hợp các số phức khác 1 ;

(D) Tập hợp các số phức khác 0 và $-i$.

Câu 2 *(1 điểm).* Một acgumen của số phức $z \neq 0$ là φ thì một acgumen của $\dfrac{\bar{z}}{1+i}$ là :

(A) $\varphi + \dfrac{\pi}{2}$; (B) $\varphi - \pi$; (C) $-\varphi + \dfrac{\pi}{4}$; (D) $-\varphi - \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 3 *(1 điểm).* Với mọi số phức z, ta có $|z+1|^2$ bằng

(A) $|z|^2 + 2|z| + 1$

(B) $z\bar{z} + 1$

(C) $z + \bar{z} + 1$

(D) $z\bar{z} + z + \bar{z} + 1$.

B – PHẦN TỰ LUẬN

Câu 4 *(2 điểm).* Chứng minh rằng khi số phức $z \neq 0$ thay đổi tuỳ ý thì tập hợp các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số phức $\dfrac{z}{\bar{z}}$ là đường tròn đơn vị (tâm O, bán kính bằng 1).

Câu 5 *(2 điểm)*. Cho các số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $(r,\ \varphi \in \mathbb{R},\ r > 0)$ và $\alpha = \sqrt{3} - i$. Hãy viết dạng lượng giác của căn bậc hai của $\dfrac{\alpha}{\overline{z}}$.

Câu 6 *(3 điểm)*. Với mỗi số thực k sao cho $-2 \le k \le 2$, xét các nghiệm của phương trình (với ẩn z)

$$z^2 + kz + 1 = 0.$$

Chứng minh rằng tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các nghiệm đó khi k thay đổi là đường tròn đơn vị (tâm O, bán kính bằng 1).

Đáp án

Câu 1. (C)

Câu 2. (D)

Câu 3. (D)

Câu 4. Do $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right| = 1$ nên mọi điểm đang xét thuộc đường tròn đơn vị. Ngược lại, xét điểm tuỳ ý thuộc đường tròn đơn vị ; nó biểu diễn số phức $w = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$. Viết $z = r(\cos t + i\sin t)$ $(t \in \mathbb{R},\ r > 0)$ thì $\dfrac{z}{\overline{z}} = \cos 2t + i\sin 2t$; chỉ cần chọn $t = \dfrac{\varphi}{2}$, $r > 0$ tuỳ ý thì $\dfrac{z}{\overline{z}} = w$.

Câu 5. $\alpha = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

nên $\dfrac{\alpha^3}{\overline{z}} = \dfrac{2^3}{r}\left(\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Từ đó các căn bậc hai của $\dfrac{\alpha^3}{\overline{z}}$ là $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

và $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\left(\cos\left(\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Câu 6. Nghiệm có dạng $\dfrac{-k \pm \sqrt{4-k^2}i}{2}$, nó có phần thực $x = -\dfrac{k}{2}$, phần ảo $y = \pm\dfrac{\sqrt{4-k^2}}{2}$, từ đó $x^2 + y^2 = 1$. Vậy do $-2 \le k \le 2$, dễ thấy tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn đơn vị.

GỢI Ý ÔN TẬP CUỐI NĂM

I - GỢI Ý TỔ CHỨC ÔN TẬP CUỐI NĂM

Trong SGK đã có 38 bài tập ôn tập cuối năm (trong đó có 15 bài tập trắc nghiệm khách quan). Đó là các bài tập được chọn lọc phù hợp với yêu cầu của chương trình, bao quát được các kiến thức và kĩ năng cần thiết và không quá khó. Giáo viên nên yêu cầu HS làm hết các bài tập này ở nhà.

Với thời gian quy định, chắc chắn không thể chữa hết được các bài tập trong sách. Do đó giáo viên cần nắm được năng lực và mức độ hiểu bài của học sinh để lựa chọn những bài tập cần chữa trong giờ ôn tập cho thích hợp. Với mỗi bài tập, giáo viên nên kết hợp nhắc lại những kiến thức quan trọng được sử dụng để giải bài tập ấy. Đó chính là một phương pháp ôn tập tích cực, hiệu quả và mất ít thời gian nhất.

II - GỢI Ý TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = e^x - 1 > 0$ với mọi $x > 0$.

b) Do $f(x)$ đồng biến trên $[0\,;+\infty)$ nên với mọi $x > 0$, ta có $f(x) = e^x - x - 1 > f(0) = 0$. Từ đó suy ra $e^x > x + 1$ với mọi $x > 0$.

2. a) $f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-30	$\nearrow$	$+\infty$

b) Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x) \leq -3 < 0$ với mọi $x < 2$. Điều đó chứng tỏ phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(-\infty ; 2)$. Trong nửa khoảng $[2 ; +\infty)$, hàm số $f(x)$ liên tục, đồng biến và $f(2).f(4) = (-30).22 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất.

c) $f(3,5).f(3,6) < 0$.

3. *Gợi ý :* Gọi x_0 là hoành độ của điểm M tuỳ ý thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình $y = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$. Khẳng định cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau :

$$\forall x \in (0 ; +\infty), \left[\frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0\right] - \ln x \geq 0. \qquad (*)$$

Để chứng minh (*), ta viết vế trái của (*) thành $\dfrac{x}{x_0} - 1 - \ln\dfrac{x}{x_0}$ rồi xét hàm số $g(t) = t - \ln t$ với $t > 0$.

4. 5 máy. *Gợi ý :* Nếu sử dụng x máy in (x nguyên, $1 \leq x \leq 8$) thì tổng chi phí để in 50 000 tờ quảng cáo là

$$f(x) = \frac{50000}{3600x}(6x + 10).10 + 50x \text{ (nghìn đồng).}$$

Số lãi sẽ nhiều nhất nếu chi phí ít nhất. Do đó cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1 ; 8]$ (tất nhiên coi hàm số này xác định với mọi $x \in \mathbb{R}^*$ và chọn kết quả thích hợp với điều kiện của bài toán).

5. Kết quả $\max\limits_{x \in [0;1]} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\min\limits_{x \in [0;1]} f(x) = \dfrac{2}{5}$.

Gợi ý : Chứng minh rằng

$$\max_{x \in [0;1]}(-x^2 + x + 6) = \frac{25}{4} \text{ và } \min_{x \in [0;1]}(-x^2 + x + 6) = 6.$$

6. a) $P(a) + P(b) = 1$. *Gợi ý :* Chú ý rằng $4^a.4^b = 4^{a+b} = 4$.

b) $A > B$.

7. a) *Gợi ý :* Từ đẳng thức đã cho suy ra $(a+b)^2 = 9ab$, hay $\dfrac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$.

b) $\dfrac{31 - 20\sqrt{3}}{3}$.

8. a) $(\cos x.e^{2\tan x})' = e^{2\tan x}\left(\dfrac{2}{\cos x} - \sin x\right)$; $[\log_2(\sin x)]' = \dfrac{\cot x}{\ln 2}$.

b) Giáo viên tự giải.

9. Giáo viên tự giải.

10. a) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Gợi ý : Đặt $y = 81^{\cos^2 x}$ thì có phương trình $\dfrac{81}{y} + y = 30$.

b) $S = \left\{\dfrac{1}{16}\,;\,2\right\}$.

Gợi ý : Đặt $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ thì được phương trình $y^2 - 3y + 5 = 9$.

c) $x = 10^{-2}$. *Gợi ý :* Viết phương trình đã cho thành :

$$4(2^{\log x})^2 - 2^{\log x}.3^{\log x} - 18(3^{\log x})^2 = 0.$$

Sau đó chia cả hai vế cho $(3^{\log x})^2$ thì được phương trình bậc hai đối với $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log x}$.

d) $S = \left\{\left(2\,;\,\dfrac{1}{6}\right)\right\}$.

Gợi ý : Từ phương trình thứ nhất ta có $2^{x-3y} = 2^{\frac{3}{2}}$, tức là $x - 3y = \dfrac{3}{2}$.

Phương trình thứ hai có thể được biến đổi thành $\log_3(xy) = -1$, tức là $xy = \dfrac{1}{3}$.

11. a) $D = (2\,;\,3)$. *Gợi ý :* Điều kiện xác định của hàm số là $\log(x^2 - 5x + 16) < 1$, tức là $0 < x^2 - 5x + 16 < 10$.

b) $D = \left(-2\,;\,\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\,;\,3\right)$.

Gợi ý : x phải thoả mãn điều kiện sau :

$$\begin{cases} \log_{0,5}(-x^2 + x + 6) \geq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \end{cases}, \text{ tức là } \begin{cases} 0 < -x^2 + x + 6 \leq 1 \\ x(x+2) \neq 0. \end{cases}$$

12. a) $\dfrac{(1+x^4)^4}{16} + C.$

b) $\dfrac{-3\cos x - \cos 3x}{6} + C$. *Gợi ý :* $\cos x \sin 2x = \dfrac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$.

c) $\ln|\cos x| + x\tan x + C$. *Gợi ý :* Sử dụng công thức lấy nguyên hàm từng phần bằng cách đặt $u = x$ và $v' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

13. $f(x) = 4x - 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 9.$

Gợi ý : $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $8\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)$, thoả mãn $f(0) = 8$.

14. a) $\dfrac{\pi}{4}$. *Gợi ý :* Đổi biến $x = \tan t$.

b) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$. *Gợi ý :* Biến đổi tích phân đã cho như sau :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int_0^1 \frac{4dx}{(2x+1)^2 + 3}.$$

Tiếp theo, đặt $u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, ta được $I = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1}$. Ta trở về bài toán tương tự bài 14a).

c) e – 2. *Gợi ý :* Sử dụng công thức tích phân từng phần 2 lần liên tiếp.

15. a) $S = \int_{-1}^{1} \left|-x^2 - (2 - 3x^2)\right| dx = \frac{8}{3}$.

b) $S = \int_{-4}^{5} \left|\left(\frac{y^2 - 4}{4}\right) - \left(\frac{y + 16}{4}\right)\right| dy = \frac{243}{8}$.

16. a) $V = \pi \int_{0}^{1} (e^x)^2\, dx = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

b) $V = \pi \int_{1}^{2} (y - 1)\, dy = \frac{\pi}{2}$.

17. $z_1^2 = (1 + i)^2 = 2i$;

$z_1 z_2 = (1 + i)(1 - 2i) = 3 - i$;

$2z_1 - z_2 = 2(1 + i) - (1 - 2i) = 1 + 4i$;

$z_1 \overline{z_2} = (1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i$;

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1 - 2i}{1 - i} = \frac{(1 - 2i)(1 + i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$.

18. a) $4\sqrt{3}i$;   b) $2(3 + i^2) = 4$;

c) $2i.8 = 16i$;   d) $\frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)^2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.

19. a) Khi $|z| = 1$ (tức $z\bar{z} = 1$) và $z \neq 1$ ta có :

$$\frac{z + 1}{z - 1} + \overline{\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)} = \frac{z + 1}{z - 1} + \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} - 1} = \frac{z + 1}{z - 1} + \frac{\frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{z + 1}{z - 1} + \frac{z + 1}{1 - z} = 0$$

nên $\frac{z + 1}{z - 1}$ là số ảo, nó có phần thực bằng 0.

b) Nếu $\frac{z + 1}{z - 1}$ là số ảo thì $\frac{z + 1}{z - 1} = -\frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} - 1}$; bằng cách nhân chéo ta được

$z\bar{z} - 1 = 0$, vậy $|z| = 1$.

(*Cách khác* : viết $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ rồi tính $\frac{z+1}{z-1}$).

20. Đặt $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ thì suy ra $z = \frac{z' - 2}{1 + i\sqrt{3}}$.

Vậy $|z - 1| \le 2$ có nghĩa là $\left|\frac{z' - 2}{1 + i\sqrt{3}} - 1\right| \le 2$ tức là

$\left|z' - 2 - (1 + i\sqrt{3})\right| \le 2\left|1 + i\sqrt{3}\right|$.

Vậy $\left|z' - (3 + i\sqrt{3})\right| \le 4$: tập hợp các điểm M là tập hợp các điểm thuộc hình tròn (kể cả biên) có tâm A biểu diễn số $3 + i\sqrt{3}$, có bán kính bằng 4.

21. • Để tìm căn bậc hai của $-8 + 6i$, cần giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6. \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này có hai nghiệm là (1 ; 3) và (–1 ; –3) nên hai căn bậc hai cần tìm là $\pm(1 + 3i)$.

• Để tìm căn bậc hai của $3 + 4i$, cần giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4. \end{cases}$

Dễ thấy hệ này có hai nghiệm là (2 ; 1), (–2 ; –1) nên hai căn bậc hai cần tìm là $\pm(2 + i)$ (xem ví dụ 3, mục 2, §2).

• Để tìm căn bậc hai của $1 - 2\sqrt{2}i$ cần giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -2\sqrt{2}. \end{cases}$

Dễ thấy hệ này có hai nghiệm là $(\sqrt{2}\ ; -1)$, $(-\sqrt{2}\ ; 1)$ nên hai căn bậc hai cần tìm là $\pm(\sqrt{2} - i)$.

22. a) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$ có biệt thức là $3^2 - 4(3 + i) = -3 - 4i = (-1 + 2i)^2$ nên hai nghiệm của nó là

$$\frac{3 + (-1 + 2i)}{2} = 1 + i \text{ và } \frac{3 - (-1 + 2i)}{2} = 2 - i.$$

b) $z^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)z + i\sin\varphi\cos\varphi = 0$ có biệt thức là

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 - 4i\sin\varphi\cos\varphi = (\cos\varphi - i\sin\varphi)^2$ nên hai nghiệm của nó là

$$\frac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi + (\cos\varphi - i\sin\varphi)) = \cos\varphi\ ;$$

$$\frac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi - (\cos\varphi - i\sin\varphi)) = i\sin\varphi.$$

(*Chú ý :* có thể dùng công thức Vi-ét, xem bài tập 21).

23. a) $\dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, do đó $\left(\dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6 = -2^6 = -64.$

b) $$\frac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i\sqrt{3})^{11}} = \frac{2^5\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^5}{2^{11}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{11}}$$

$$= \frac{1}{2^6}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{64}.$$

24. (A) ; **25.** (C) ; **26.** (B) ; **27.** (B) ; **28.** (C) ; **29.** (D) ; **30.** (C) ;
31. (B) ; **32.** (B) ; **33.** (A) ; **34.** (D) ; **35.** (C) ; **36.** (A) ;

37. (C) *Gợi ý :* Để ý rằng $i^{2005} = i$ và $\dfrac{z^3 - z}{z - 1} = z^2 + z.$

38. (B).

MỤC LỤC