TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2017
Số 483

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Apollonius

Nhà toán học
Hi Lạp cổ đại

MỘT VÀI KỶ NIỆM VỚI THẦY PHAN ĐỨC CHÍNH

Đặng Hùng Thắng

Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

Nghe tin thầy đã quy tiên, tôi bồi hồi nhớ lại một vài kỷ niệm với thầy.

1) Tháng 7 năm 1974 giữa lúc chiến tranh đang khốc liệt, lần đầu tiên Việt Nam cử một đoàn học sinh gồm 5 em do thầy *Lê Hải Châu* làm Trưởng đoàn và thầy *Phan Đức Chính* làm Phó trưởng đoàn tham dự kỳ thi IMO tại Đông Đức. Đội tuyển Việt Nam lập chiến công đầu vẻ vang dành được 1 Huy chương Vàng (HCV), 1 Huy chương Bạc (HCB) và 2 Huy chương Đồng (HCĐ). Thành tích này của ta làm các đội bạn ngạc nhiên và đem về tin vui làm nức lòng cả nước.

Khoa Toán ĐHTH Hà Nội có tổ chức một buổi cho sinh viên nghe thầy *Chính* nói chuyện về kỳ thi IMO. Thời điểm đó tôi đang là một sinh viên năm thứ ba. Sau buổi nói chuyện của thầy *Chính*, niềm hứng thú với Toán sơ cấp vốn đã ngủ quên trong tôi mấy năm nay bỗng thức dậy. Tôi quan tâm tới Bài toán số 6, một trong hai bài toán khó nhất của kỳ thi. Tôi đã tìm được một cách giải khác ngắn gọn hơn và từ đó tổng quát hóa bài toán số 6. Tôi rất muốn khoe kết quả đó với thầy *Chính* nhưng chưa biết làm thế nào tiếp cận với thầy vì thầy *Chính* không dạy bọn sinh viên chúng tôi. Bỗng tôi nhớ ra cô bạn gái học cùng lớp *Phan Thu Hương*, là em ruột của thầy . Tôi bèn nhờ *Hương* nói giúp cho tôi xin gặp thầy *Chính*. Vào một buổi tối theo lịch hẹn mà *Hương* thông báo, tôi đến nhà thầy *Chính* ở số 10 phố Đỗ Hạnh. Tôi ngồi chờ một lúc ở phòng khách thì thấy thầy *Chính* từ trên gác đi xuống. Tôi đưa thầy xem bài viết của mình. Thầy bảo tôi *"Anh cứ để đây để tôi xem. Nếu được thì tôi sẽ cho đăng trên Báo Toán học và Tuổi trẻ"*. Vài tháng sau tôi rất vui mừng

PGS.TS **Phan Đức Chính** (1936 – 2017)

khi thấy bài viết của mình xuất hiện trên Báo Toán học và Tuổi trẻ với nhan đề *"Mở rộng bài toán số 6"*. Đây là công trình Toán học đầu tiên trong đời của tôi được công bố.

2) Tháng 3 năm 1976 theo lời mời của GS. *Tạ Quang Bửu*, Bộ trưởng Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Giáo sư *L. Schwartz*, nhà toán học Pháp nổi tiếng, người được giải thưởng Fields năm 1950 đã sang thăm Việt Nam. Trong vòng một tháng, tại Trường ĐHBK Hà Nội, GS. *L. Schwartz* đã trình bày bài giảng về Độ đo Radon, Xác suất trụ, Hình học không gian Banach và các ứng dụng. Tôi khi đó vừa bảo vệ xong luận án tốt nghiệp, khi biết tin đã háo hức đến nghe. Người phiên dịch là thầy *Phan Đức Chính*. Có thể nói chuyến thăm và giảng bài tại Việt Nam của GS. *L. Schwartz* đã có ảnh hưởng rất lớn với tôi, định ra hướng nghiên cứu sau này của tôi. Tôi ghi lòng tạc dạ và mãi mãi không quên GS. *L. Schwartz*. GS. *L. Schwartz* nay cũng đã qua đời. Trong cuốn Hồi ký của mình , ông viết *"Người Việt Nam không quên tôi, Việt Nam ghi dấu ấn trong cuộc đời tôi"*. Rõ ràng nếu không có sự phiên dịch trôi chảy, chính xác của thầy *Chính* tôi đã không thể ghi chép, tiếp thu và hiểu được bài giảng của GS. *L. Schwartz*. Chỉ có người thông thạo tiếng Pháp và nắm vững các kiến thức về Xác suất, Độ đo và Giải tích hàm mới có thể dịch nhuần nhuyễn như vậy. Tôi thấy mình chịu ơn thầy *Phan Đức Chính* rất nhiều trong việc này.

3) Tháng 7 năm 1994 lần đầu tiên thầy *Chính* được Bộ Giáo dục và Đào tạo cử làm Trưởng đoàn tại kỳ thi IMO tại Hồng Kông . Tôi cũng lần đầu được cử làm Phó Trưởng đoàn. Thế là tôi có dịp ở cùng với thầy trong khách sạn và làm việc với thầy trong suốt kỳ thi. Thầy kể cho tôi rằng mình đã may mắn "lọt lưới" khi được đi nghiên cứu sinh ở Liên Xô vì thầy không thuộc thành phần công nông, ông cụ thân sinh ra thầy là công chức cũ (thời Pháp). Năm đó đánh dấu thời khắc oanh liệt nhất của A0 (Chuyên Toán ĐHTH Hà Nội): Trong 6 thành viên trong đội tuyển thi có 5 em là học sinh A0. Đoàn Việt Nam dành được 1 HCV và 5 HCB, em *Đào Hải Long* (A0) dành được HCV với điểm số 41/42. Năm sau, tại IMO ở Canada, em *Long* lại dành được HCV với điểm số 40/42.

Vài dòng hồi ức này như một nén hương tưởng nhớ tới thầy *Phan Đức Chính*. Xin được gửi lời chia buồn sâu sắc tới toàn thể gia quyến của thầy. Cầu mong cho thầy được yên nghỉ thanh thản ở cõi vĩnh hằng.

SƠ LƯỢC TIỂU SỬ

PGS.TS. NGND. *Phan Đức Chính* sinh ngày 15/9/1936, mất ngày 26/8/2017. Ông nguyên là giảng viên cao cấp Khoa Toán-Cơ-Tin học Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội. Giảng dạy tại Khoa từ năm 1956. Nhận học vị Tiến sỹ tại Đại học Lô-mô-nô-xốp (Nga) năm 1965. Được phong học hàm Phó giáo sư năm 1979. Ông đã nhiều năm làm Trưởng, Phó đoàn học sinh Việt Nam đi thi Olympic Toán học Quốc tế, là tác giả của nhiều cuốn sách Toán sơ cấp và cao cấp trong đó có cuốn sách viết bằng tiếng Nga. Ông còn là Phó Chủ tịch Hội đồng Bộ môn Toán Trung học của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Ông thường xuyên tham gia cộng tác với Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và là Phó Tổng biên tập Tạp chí giai đoạn 1983-1984. Ông đã có nhiều đề toán và bài viết đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Ông đã được Đảng và Nhà nước tặng thưởng *Huân chương Lao động hạng Ba* năm 1999, *Huân chương Lao động hạng Nhì* năm 2002 và nhiều danh hiệu cao quý khác.

SỬ DỤNG BIỂU THỨC LIÊN HỢP ĐỂ GIẢI TOÁN

PHẠM TRUNG KIÊN
(GV THCS Hồ Tùng Mậu, Ân Thi, Hưng Yên)

Trong khi giải các bài toán có chứa dấu căn nếu ta biết khéo léo phân tích bài toán để sử dụng nhân với biểu thức liên hợp một cách hợp lí, sáng tạo thì ta sẽ tìm được lời giải bài toán rất ngắn gọn, độc đáo và thú vị. Bài viết này xin trình bày một số thí dụ về sử dụng biểu thức liên hợp trong giải toán.

I. Sử dụng biểu thức liên hợp để tính giá trị của biểu thức

Thí dụ 1. *Tính giá trị của biểu thức:*

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}.$$

Lời giải. Ta có

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{1}+\ldots+\frac{\sqrt{2018}-\sqrt{2017}}{1}$$

$$=\sqrt{2018}-1.$$

Thí dụ 2. *Tính giá trị của biểu thức:*

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (*)$$

Thật vậy, với mỗi k nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{\left[(k+1)\sqrt{k}\right]^2-\left[k\sqrt{k+1}\right]^2}$$

$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Áp dụng đẳng thức (*) lần lượt với k bằng 1, 2, 3, 4, ..., 2024 ta được:

$$P=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}.$$

Thí dụ 3. *Cho các số thực x, y thỏa mãn*

$$\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$Q=x^{2017}+y^{2017}+2018(x+y)+1.$$

Lời giải. Vì $\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)=2018$

suy ra

$$\left(\sqrt{2018+x^2}-x\right)\left(x+\sqrt{2018+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2018+y^2}\right)$$
$$=2018\left(\sqrt{2018+x^2}-x\right)$$

$$\Rightarrow y+\sqrt{2018+y^2}=\sqrt{2018+x^2}-x \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$x+\sqrt{2018+x^2}=\sqrt{2018+y^2}-y \quad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2), ta được: $x+y=0$

$$\Rightarrow x=-y \Rightarrow x^{2017}=-y^{2017} \Rightarrow x^{2017}+y^{2017}=0.$$

Vậy $Q=1$.

II. Sử dụng biểu thức liên hợp để giải phương trình

Thí dụ 4. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{2018x-1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{3x+2}+\sqrt{2017x+4} \quad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x\ge\frac{3}{4}$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{2018x-1}-\sqrt{2017x+4}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-5}{\sqrt{2018x-1}+\sqrt{2017x+4}}+\frac{x-5}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-5)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2018x-1}+\sqrt{2017x+4}}+\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}\right)}_{A}=0$$

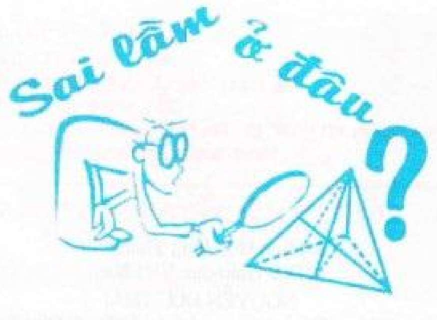
$\Leftrightarrow x-5=0$ (do $A>0$ với mọi $x\ge\frac{3}{4}$)

$\Leftrightarrow x=5$ (thoả mãn ĐK).

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=5$.

Thí dụ 5. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{3x^2-7x+5}-\sqrt{x^2+2}=\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-x+4} \quad (1)$$



GIẢI ĐÁP: BÀI TOÁN CỰC TRỊ !

(Đề đăng trên TH&TT số 479, tháng 5 năm 2017)

1. *Phân tích sai lầm.*

• Dễ thấy rằng nếu $A(1;1;0), B(1;1;2)$ thì

$$HA + HB = 1 + 3 \geq 2 = AB.$$

Do đó với $A(1;1;0), B(1;1;2)$ thì đẳng thức ở (1) không xảy ra. Bạn Toàn khẳng định "đẳng thức ở (1) xảy ra khi ba điểm H, A, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ cùng phương" là không đúng. Đẳng thức ở (1) xảy ra khi điểm H thuộc đoạn AB, nghĩa là hai vectơ $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ cùng phương, ngược hướng. Từ đặc điểm tọa độ của $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ ta thấy nếu hai vectơ này cùng phương thì $\overrightarrow{HB} = 3\overrightarrow{HA}$, tức là khi $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ cùng phương, cùng hướng. Vậy chứng tỏ đẳng thức ở (1) không xảy ra.

• Hơn nữa A, B là những điểm thay đổi lần lượt trên Δ_1, Δ_2 nên độ dài đoạn AB không phải là hằng số. Vì thế nếu đẳng thức ở (1) xảy ra thì cũng không kết luận được rằng khi đó $HA + HB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. *Lời giải đúng. Cách* 1.

Gọi $A(1+a;1+2a;0) \in \Delta_1$, $B(-3-2b;-1-b;2) \in \Delta_2$.

Lúc này $HA + HB = \sqrt{5a^2+1} + \sqrt{5(b+2)^2+9} \geq 4$ (2).

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi $a = 0$, $b = -2$. Suy ra $A(1;1;0), B(1;1;2)$. Vậy $HA + HB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi $A(1;1;0), B(1;1;2)$.

***Cách* 2.** Gọi $H_1(1+a;1+2a;0) \in \Delta_1$ và $H_2(-3-2b;-1-b;2) \in \Delta_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Δ_1, Δ_2. Ta có $\overrightarrow{u_1}(1;2;0)$ là VTCP của Δ_1, $\overrightarrow{u_2}(-2;-1;0)$ là VTCP của Δ_2.

Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{HH_1}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{HH_2}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4a = 0 \\ -2(-4-2b) - 1(-2-b) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Suy ra $H_1(1;1;0)$, $H_2(1;1;2)$. Vậy với mọi $A \in \Delta_1$, $B \in \Delta_2$ ta có: $HA + HB \geq HH_1 + HH_2 = 4$.

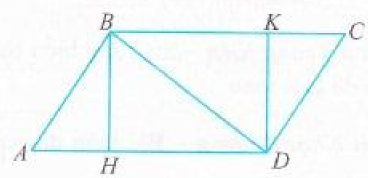
Đẳng thức xảy ra khi A, B tương ứng trùng với H_1, H_2. Vậy với $A(1;1;0), B(1;1;2)$ thì $HA + HB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Nguyễn Trung Kiên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** là phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

THÊM DẤU HIỆU:
NHẬN BIẾT HÌNH BÌNH HÀNH !

Bài toán. *Cho tứ giác ABCD có $AB = CD$ và $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.*



Lời giải. Hạ $BH \perp AD$ tại H, $DK \perp BC$ tại K. Vì $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ nên H, K hoặc tương ứng thuộc các đoạn AD, BC hoặc tương ứng thuộc tia đối của AD, CB.

Ta có $\Delta ABH = \Delta CDK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra $DK = BH$ và $CK = AH$.

Suy ra $\Delta BHD = \Delta DKB$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông). Do đó $BK = DH$. Từ đó suy ra $BC = AD$.

Vậy tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$ và $AD = BC$ nên nó là hình bình hành. ❒

Như vậy, ta đã chứng minh được dấu hiệu nhận biết mới cho hình bình hành: "*Tứ giác có một cặp cạnh đối bằng nhau và một cặp góc đối bằng nhau là hình bình hành*".

Theo các bạn, lời giải trên đúng hay sai ? Tại sao?

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}-\frac{1}{3}\right)-3\left(\frac{1}{\sqrt{22-3x}+5}-\frac{1}{9}\right)-(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\left(2-\sqrt{x+2}\right)}{3\left(\sqrt{x+2}+1\right)}-\frac{4-\sqrt{22-3x}}{3\left(\sqrt{22-3x}+5\right)}-(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(x-2)}{3\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-\frac{x-2}{\left(\sqrt{22-3x}+5\right)\left(\sqrt{22-3x}+4\right)}-(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{-4}{3\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-\frac{1}{\left(\sqrt{22-3x}+5\right)\left(\sqrt{22-3x}+4\right)}-1\right]=0$$

$\Leftrightarrow x-2=0$ (do $\dfrac{-4}{3\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-\dfrac{1}{\left(\sqrt{22-3x}+5\right)\left(\sqrt{22-3x}+4\right)}-1<0$)

$\Leftrightarrow x=2$ (thoả mãn ĐK).

Vậy PT (1) có tập nghiệm là $S=\{-1;2\}$.

Thí dụ 11. *Giải phương trình:* $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{2x+x^2}{1+x^2}$ (1)

Lời giải. ĐK: $0<x\le 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (1+x^2)\sqrt{1-x}=(2x+x^2)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{1-x}-2x\sqrt{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\frac{1-x-4x^3}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(1-2x)}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\frac{(1-2x)(2x^2+x+1)}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)\underbrace{\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}+\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{1-x}+2x\sqrt{x}}\right)}_{A}=0$$

$\Leftrightarrow 1-2x=0$ (do $A>0$, với mọi $0<x\le 1$)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

III. Sử dụng biểu thức liên hợp để giải hệ phương trình

Thí dụ 12. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}-y\sqrt{y}=\sqrt{y-2}-x\sqrt{x} & (1)\\ 3x^2-xy-7x+y^2+y-9=0 & (2)\end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Lời giải. ĐK: $x\ge 2;\ y\ge 2$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{y-2}\right)+\left(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+x+\sqrt{xy}+y\right)}_{A}=0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y}=0$ (do $A>0$, với mọi $x\ge 2;\ y\ge 2$)

$\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào PT (2) ta được: $3x^2-6x-9=0$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \text{(loại)}\\ x=3 & \text{(thoả mãn } x\ge 2)\end{array}\right.$$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$.

Thí dụ 13. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 & (1)\\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 & (2)\end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Lời giải. ĐK: $-\dfrac{3}{2}\le x;y\le 4$.

Trừ theo vế PT (1) cho PT (2), ta được:

$$\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2y+3}\right)+\left(\sqrt{4-y}-\sqrt{4-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-y)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\frac{x-y}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-y}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-y}}\right)}_{A}=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0$ (do $A>0$, với mọi x, y thoả mãn ĐK)

$\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào PT (1), ta được: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=4$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{12+5x-2x^2}=9-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 9\\ 4(12+5x-2x^2)=81-18x+x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 9\\ 9x^2-38x+33=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 9\\ (x-3)(9x-11)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{11}{9} \end{array}\right. \text{ (thoả mãn ĐK)}$$

Vậy hệ PT (I) có hai nghiệm $(x; y)$ là:

$$(3; 3) \text{ và } \left(\frac{11}{9}; \frac{11}{9}\right).$$

Thí dụ 14. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=5 & (1) \\ \sqrt{y+3}+\sqrt{x-2}=5 & (2) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 2;\ y \geq 2$.

Trừ theo vế các PT (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}}=\frac{5}{\sqrt{y+3}+\sqrt{y-2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{y+3}+\sqrt{y-2}$$

- Nếu $x>y\geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{y+3}+\sqrt{y-2}$

- Nếu $y>x\geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}<\sqrt{y+3}+\sqrt{y-2}$

Do đó $x=y$. Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=5-\sqrt{x-2}$$

$\Rightarrow \sqrt{x-2}=2 \Leftrightarrow x=6$ (thoả mãn ĐK).

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất

$$(x; y)=(6; 6).$$

Thí dụ 15. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2 & (1) \\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 & (2) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq 2; y \geq 2$.

Trừ theo vế PT (1) cho PT (2) ta được:

$$\left(\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}\right)+\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{y-2}\right)+(x^2-y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\frac{x-y}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+(x-y)(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\underbrace{\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+x+y\right)}_{A}=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0$ (do $A>0,\ \forall x, y \geq 2$)

$\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào PT (1) ta được: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+91}-10\right)-\left(\sqrt{x-2}-1\right)-(x^2-9)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}-(x-3)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-(x+3)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\underbrace{\left[(x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}-1\right)-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right]}_{A}=0$$

$\Leftrightarrow x-3=0$ (do $A<0,\ \forall x \geq 2$)

$\Leftrightarrow x=3$ (thoả mãn ĐK).

Vậy HPT (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)=(3; 3)$.

Thí dụ 16. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x^2+4y^2+\dfrac{16xy}{x+2y}=16 & (1) \\ \sqrt{x^2+16}+\dfrac{5}{2}.\sqrt{x+2y}=2x+\sqrt{x^2+7} & (2) \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Lời giải. ĐK: $x+2y>0$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x+2y)\left[(x+2y)^2-4xy\right]+16xy=16(x+2y)$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)\left[(x+2y)^2-16\right]-4xy(x+2y-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y-4)\left[x^2+4y^2+4(x+2y)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x+2y-4=0$$

(vì $x+2y>0$ nên $x^2+4y^2+4(x+2y)>0$).

Thay $x+2y=4$ vào PT (2) ta được:

$$\sqrt{x^2+16}+5=2x+\sqrt{x^2+7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}=2x-5 \quad (3)$$

Ta có, với mọi x thì $\sqrt{x^2+16}>\sqrt{x^2+7}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}>0 \Rightarrow 2x-5>0 \Rightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Khi đó: $(3) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}-5=2x-6+\sqrt{x^2+7}-4$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16}+5}=2(x-3)+\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}-\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-2=0 \quad (4) \end{array}\right.$$

- Với $x=3$ thay vào $2x+3y=4$ ta có $y=-\dfrac{2}{3}$.

Suy ra hệ PT (I) có một nghiệm $(x; y) = \left(3; -\dfrac{2}{3}\right)$

- Giải PT (4): Vì $x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow x + 3 > 0$; với mọi x ta có

$$\sqrt{x^2+16}+5 > \sqrt{x^2+7}+4 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5} < \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5} - \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4} - 2 < 0.$$

Suy ra PT (4) vô nghiệm. Vậy hệ PT (I) có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(3; -\dfrac{2}{3}\right)$.

IV. Sử dụng biểu thức liên hợp để giải bất phương trình

Thí dụ 17. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{2017x-2} - \sqrt{2018x-5} \le x - 3 \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x \ge \dfrac{5}{2018}$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3-x}{\sqrt{2017x-2}+\sqrt{2018x-5}} \le x - 3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2017x-2}+\sqrt{2018x-5}}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$$

Vậy nghiệm của BPT (1) là $x \ge 3$.

Thí dụ 18. *Giải bất phương trình:*

$$\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2} < x + 21 \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $\begin{cases} 9+2x \ge 0 \\ 3-\sqrt{9+2x} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{9}{2} \\ x \ne 0 \end{cases}$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\left(3+\sqrt{9+2x}\right)^2}{2} < x + 21$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9+2x} < 4 \Leftrightarrow 0 \le 9 + 2x < 16 \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le x \le \frac{7}{2}.$$

Kết hợp với ĐK ta có BPT (1) có tập nghiệm là

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{9}{2} \le x \le \frac{7}{2}; x \ne 0 \right\}.$$

Thí dụ 19. *Giải bất phương trình:*

$$2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \le \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (1)$$

Lời giải. ĐK: $x > -4$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1\right) + x^2 - 3 \le \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1\right) + x^2 - 3 \le \frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+4} - 1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + 1} + x^2 - 3 \le \frac{4-(x^2+1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)}+x+4} + x^2 - 3 + \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\underbrace{\left[\frac{2}{\sqrt{(x+4)\left(x^2+x+1\right)}+x+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+2\right)} + 1\right]}_{A} \le 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 \le 0$ (do $A > 0, \forall x > -4$)

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy BPT (1) có nghiệm là $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

V. Sử dụng biểu thức liên hợp để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Thí dụ 20. *Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện* $\sqrt{x-1} - y\sqrt{y} = \sqrt{y-1} - x\sqrt{x}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $S = x^2 + 3xy - 2y^2 - 8y + 5$.

Lời giải. ĐK: $x \ge 1; y \ge 1$.

- Nếu $x = y = 1 \Rightarrow S = -1$
- Xét $x \ge 1; y \ge 1$ và $x \ne 1$ hoặc $y \ne 1$. Ta có

$$\sqrt{x-1} - y\sqrt{y} = \sqrt{y-1} - x\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1}\right) + \left(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} + \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} + \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+\sqrt{xy}+y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\underbrace{\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} + x + \sqrt{xy} + y\right)}_{A} = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$ (do $A > 0, \forall x, y \ge 1$ và $x \ne 1$ hoặc $y \ne 1$)

$\Leftrightarrow x = y$.

Khi đó, ta có $S = 2x^2 - 8x + 5 = 2(x-2)^2 - 3 \ge -3$.

$S = -3$ khi $x = y = 2$. Vậy $\min S = -3$ khi $x = y = 2$.

Thí dụ 21. *Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện* $\sqrt{x+2}-y^3=\sqrt{y+2}-x^3$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:* $P=x^2-2xy+4x-y^2+2017$.

Lời giải. ĐK: $x\ge -2; y\ge -2$.

• Nếu $x=y=-2\Rightarrow P=2001$.

• Xét $x\ge -2; y\ge -2$ và $x\ne -2$ hoặc $y\ne -2$.

Ta có: $\sqrt{x+2}-y^3=\sqrt{y+2}-x^3$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y+2}\right)+\left(x^3-y^3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}}+x^2+xy+y^2\right)}_{A}=0$$

$\Leftrightarrow x-y=0$

(do $A>0$, $\forall x\ge -2; y\ge -2$ và $x\ne -2$ hoặc $y\ne -2$)

$\Leftrightarrow x=y$. Khi đó, ta có

$P=-2x^2+4x+2017=2019-2(x-1)^2\le 2019$.

$P=2019$ khi $x=y=1$.

Vậy $\max P=2019$ khi $x=y=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{1+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{17}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2009}}+\frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2013}}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}>\frac{9}{4}.$$

HD: Đặt

$$P=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}},$$

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}.$$

Ta có $P>P_1$ suy ra $2P>P+P_1$. Lại có

$$P+P_1=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\dots+\frac{\sqrt{101}-\sqrt{99}}{2}=\frac{\sqrt{101}-\sqrt{1}}{2}>\frac{9}{2}$$

Suy ra $P>\frac{9}{4}$. Vậy

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}>\frac{9}{4}.$$

Bài 3. Cho $\left(x+\sqrt{2011+x^2}\right)\left(y+\sqrt{2011+y^2}\right)=2011$.

Tính giá trị biểu thức $T=x^{2011}+y^{2011}$.

(*Trích đề thi HSG Toán lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm học* 2010 - 2011)

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{4x-1}+\sqrt{34x-3}=\sqrt{33x+2}+\sqrt{3x+4}$

b) $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

c) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$

d) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

e) $\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+7x+2}+4\right)=4x-2$

f) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}+x^2+3x-9=0$

g) $\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$

h) $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\sqrt{x+3}+\sqrt{10-y}=5\\ \sqrt{y+3}+\sqrt{10-x}=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=3\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=3\end{cases}$

c) $\begin{cases}2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{y-1}+y^2\\ 2\sqrt{y^2+5}=2\sqrt{x-1}+x^2\end{cases}$

d) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{3-y}=\sqrt{3}\\ \sqrt{y}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3}\end{cases}$

e) $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16\\ \sqrt{x^2+12}+\dfrac{5}{2}.\sqrt{x+y}=3x+\sqrt{x^2+5}\end{cases}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x-2}-\sqrt{3x-5}\le 2x-3$

b) $9\left(x+1\right)^2\le\left(3x+7\right)\left(1-\sqrt{3x+4}\right)^2$

c) $\sqrt{x^2+2x+92}\ge x^2+2x+\sqrt{x-1}+1$

Bài 7. Cho các số thực *x*, *y* thỏa mãn $\sqrt{x+5}-y^3=\sqrt{y+5}-x^3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=4x^2-3xy+y^2+x+y+1.$$

Bài 8. Cho các số thực *x*, *y* thỏa mãn $\sqrt{2013x+1}-(y+1)\sqrt{y+1}=\sqrt{2013y+1}-(x+1)\sqrt{x+1}$.

Tìm GTLN của biểu thức

$$Q=x^2-3xy+y^2-3x+7y+10.$$

BÀI TOÁN ĐẢO CỦA TRỰC TÂM TAM GIÁC

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi - Cam Nghĩa - Cam Ranh - Khánh Hoà)

Xét ΔABC nhọn, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Khi đó ta có các tính chất sau:

1) $AF.AB = AE.AC = AH.AD$;
$BF.BA = BD.BC = BH.BE$;
$CD.CB = CE.CA = CH.CF$.

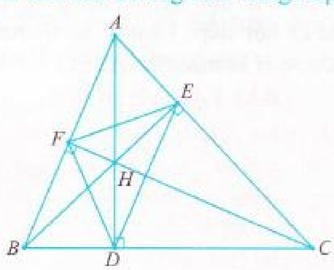
2) $DB.DC = DH.DA$; $EC.EA = EH.EB$;
$FA.FB = FH.FC$.

3) $\widehat{ADF} = \widehat{ABE} = \widehat{ACF} = \widehat{ADE}$;
$\widehat{BED} = \widehat{BCF} = \widehat{BAD} = \widehat{BEF}$; $\widehat{CFE} = \widehat{CAD} = \widehat{CBE} = \widehat{CFD}$.

4) H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

5) $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.

6) A, B, C là tâm các đường tròn bàng tiếp ΔDEF.



Hình 1

Các tính chất trên quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

Một vấn đề đặt ra là khi xét ΔABC nhọn có AD, BE, CF đồng quy tại H (D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB và không trùng với các đỉnh ΔABC) thì với điều kiện nào từ các tính chất trên, H sẽ là trực tâm của ΔABC?

Ta có được các dấu hiệu của trực tâm tam giác sau đây.

1. a) *Nếu $AF.AB = AE.AC$ và BE hoặc CF là đường cao thì H là trực tâm ΔABC.*

b) *Nếu $AF.AB = AH.AD$ và AD hoặc CF là đường cao thì H là trực tâm ΔABC.*

Thật vậy (xem h.1) a) Từ $AF.AB = AE.AC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \Delta AEB \backsim \Delta AFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFC}.$$

Do đó nếu một trong hai đường BE và CF là đường cao thì đường còn lại cũng là đường cao nên H là trực tâm ΔABC.

b) Tương tự $\widehat{ADB} = \widehat{AFH}$. Do đó nếu một trong hai đường AD và CF là đường cao thì đường còn lại cũng là đường cao nên H là trực tâm ΔABC.

2. *Nếu $DB.DC = DH.DA$ và $AD \perp BC$ thì H là trực tâm ΔABC.*

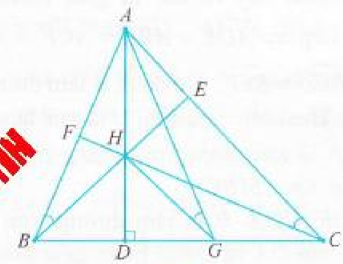
Thật vậy (xem h.2) từ $DB.DC = DH.DA$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DH} \Rightarrow \Delta DAB \backsim \Delta DCH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DCH} \Rightarrow \widehat{DCH} + \widehat{DBA} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 90^0$$

$\Rightarrow CF \perp AB$, tức là CF là đường cao thứ hai nên H là trực tâm ΔABC.

3. *Nếu $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ và $AD \perp BC$ thì H là trực tâm ΔABC ($AB \neq AC$).*



Hình 2

Thật vậy, gọi G là điểm đối xứng của B qua D thì $\widehat{AGH} = \widehat{ABH} = \widehat{ACH} \Rightarrow$ tứ giác $AHGC$ nội tiếp

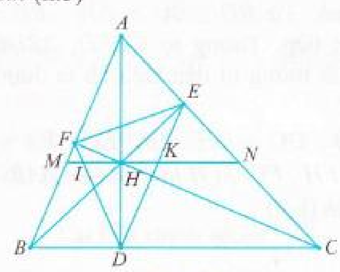
$$\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{HGD} = \widehat{HBD}$$

$$\Rightarrow \widehat{HAE} + \widehat{AHE} = \widehat{HBD} + \widehat{BHD} = 90^0 \Rightarrow BE \perp AC,$$

tức là BE là đường cao thứ hai nên H là trực tâm ΔABC.

4. *Nếu H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh (h.3)



Hình 3

Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC, DF, DE lần lượt tại M, N, I, K. Theo định lí Thales

$$\frac{HI}{CD} = \frac{FH}{FC} = \frac{MH}{BC} \Rightarrow HI = \frac{CD.MH}{BC}. \quad (1)$$

$$\frac{HK}{BD} = \frac{EH}{EB} = \frac{HN}{BC} \Rightarrow HK = \frac{BD.HN}{BC}. \quad (2)$$

Mà $\dfrac{MH}{BD}=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{HN}{DC}\Rightarrow MH\,.\,DC=BD\,.\,HN$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $HI=HK$, mà $\widehat{HDI}=\widehat{HDK}$ nên $DH\perp IK\Rightarrow AD\perp BC$. Tương tự, $BE\perp AC$.

Vậy H là trực tâm ΔABC.

5. a) *Nếu $HA\,.\,HD=HB\,.\,HE$ và AD hoặc BE là đường cao thì H là trực tâm ΔABC.*

b) *Nếu $HA\,.\,HD=HB\,.\,HE=HC\,.\,HF$ thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh (h.3)

a) Từ $HA\,.\,HD=HB\,.\,HE\Rightarrow\dfrac{HA}{HB}=\dfrac{HE}{HD}$

$\Rightarrow\Delta HEA\backsim\Delta HDB$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{HEA}=\widehat{HDB}$.

Do đó nếu một trong hai đường AD và BE là đường cao thì đường còn lại cũng là đường cao nên H là trực tâm ΔABC.

b) Từ giả thiết suy ra các tứ giác $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ nội tiếp $\Rightarrow\widehat{ADE}=\widehat{ABE}=\widehat{ACF}=\widehat{ADF}$.

Tương tự $\widehat{BED}=\widehat{BEF}$. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF. Theo dấu hiệu 4 thì H là trực tâm ΔABC.

6. *Nếu A, B là tâm đường tròn bàng tiếp của ΔDEF thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh. Vì A, B là tâm đường tròn bàng tiếp của ΔDEF nên DA và DB là phân giác trong và phân giác ngoài của $\widehat{EDF}$. Suy ra $AD\perp BD$. Tương tự có $BE\perp CE$. Vậy H là trực tâm ΔABC.

7. *Nếu $AF\,.\,AB=AE\,.\,AC$; $BF\,.\,BA=BD\,.\,BC$; $CD\,.\,CB=CE\,.\,CA$ thì H là trực tâm ΔABC.*

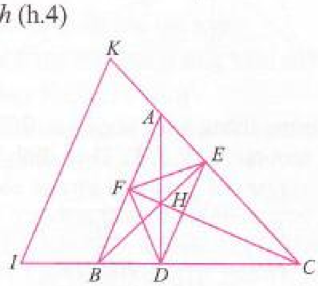
Chứng minh. Từ giả thiết suy ra các tứ giác $BCEF$, $CAFD$, $ABDE$ nội tiếp. Chứng minh tương tự dấu hiệu 5b ta được H là trực tâm ΔABC.

8. *Nếu $AF\,.\,AB=AH\,.\,AD$; $BD\,.\,BC=BH\,.\,BE$; $CE\,.\,CA=CH\,.\,CF$ thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh. Từ $BD\,.\,BC=BH\,.\,BE\Rightarrow$ tứ giác $DHEC$ nội tiếp. Tương tự $CAFD$, $ABDE$ nội tiếp. Chứng minh tương tự dấu hiệu 5b ta được H là trực tâm ΔABC.

9. *Nếu $DB\,.\,DC=DH\,.\,DA$; $EC\,.\,EA=EH\,.\,EB$; $FA\,.\,FB=FH\,.\,FC$ thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh (h.4)



Hình 4

Gọi I là điểm đối xứng của C qua D, K là điểm đối xứng của C qua E. Ta có $DH\,.\,DA=DB\,.\,DC=DB\,.\,DI$ $\Rightarrow$ tứ giác $AHBI$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $BHAK$ nội tiếp. Do đó A, B, H, I, K cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow\widehat{ABD}=\widehat{IKC}$, mà $\widehat{IKC}=\widehat{DEC}$ ($DE\,//\,IK$) nên $\widehat{ABD}=\widehat{DEC}\Rightarrow$ tứ giác $ABDE$ nội tiếp.

Tương tự các tứ giác $BCEF$, $CAFD$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự dấu hiệu 5b ta được H là trực tâm ΔABC.

10. *Nếu $\widehat{ABE}=\widehat{ADF}$; $\widehat{BCF}=\widehat{BEF}$; $\widehat{CAD}=\widehat{CFD}$ (hoặc $\widehat{ABE}=\widehat{ACF}$; $\widehat{BCF}=\widehat{BAD}$; $\widehat{CAD}=\widehat{CBE}$) thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra các tứ giác $ABDE$, $BCEF$, $CAFD$ nội tiếp. Chứng minh tương tự dấu hiệu 5b có H là trực tâm ΔABC.

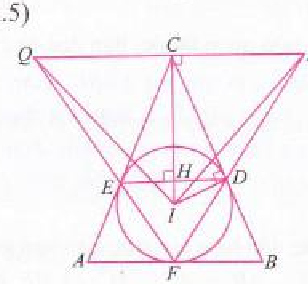
11. *Nếu $\widehat{ADF}=\widehat{ABE}$; $\widehat{BED}=\widehat{BCF}$; $\widehat{CFE}=\widehat{CAD}$ thì H là trực tâm ΔABC.*

Chứng minh. Từ giả thiết có các tứ giác $BDHF$, $AFHE$ nội tiếp $\Rightarrow CD\,.\,CB=CH\,.\,CF=CE\,.\,CA$ $\Rightarrow$ tứ giác $ABDE$ nội tiếp. Tương tự các tứ giác $BCEF$, $CAFD$ nội tiếp. Chứng minh tương tự dấu hiệu 5b ta được H là trực tâm ΔABC.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài toán 1. *Cho ΔABC. Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng vuông góc với CI tại C cắt FD, FE lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm H của CI và DE là trực tâm của ΔIPQ.*

Lời giải (h.5)



Hình 5

Vì $DE\,//\,PQ$ và CA tiếp xúc với đường tròn (I) nên

$$\widehat{DPC}=\widehat{FDE}=\widehat{FEA}=\widehat{QEC}<90^0.$$

Tương tự $\widehat{EQC}=\widehat{PDC}<90^0$.

Do đó $\Delta CDP\backsim\Delta CQE$ (g.g) $\Rightarrow CD\,.\,CE=CP\,.\,CQ$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔCDI vuông tại I, ta có $CH\,.\,CI=CD^2=CD\,.\,CE=CP\,.\,CQ$.

Kết hợp $CI\perp PQ$ và $\widehat{IPC}<\widehat{DPC}<90^0$, $\widehat{IQC}<\widehat{EQC}<90^0$, nên theo dấu hiệu 2 thì H là trực tâm ΔIPQ.

(*Xem tiếp trang 11*)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2017-2018

VÒNG 1

Câu 1. 1) Ta có

$$P=\frac{a^4-a^2-2ab-b^2}{\left(a-\sqrt{a+b}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left[\frac{\left(a^2+a\right)(a+b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{b}{a-b}\right]$$

$$=\frac{a^4-(a+b)^2}{\left(a-\sqrt{a+b}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left[\frac{\left(a^2+a\right)(a+b)}{(a+b)(a-b)}+\frac{b}{a-b}\right]$$

$$=\frac{\left(a^2+a+b\right)\left(a^2-a-b\right)}{a^2-a-b}:\frac{a^2+a+b}{a-b}=a-b.$$

2) Ta có $\begin{cases}a-b=1\\a^3-b^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=7\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\a^2+ab+b^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=1\\ab=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}.$

Câu 2. Ta có $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2)(xy+1)=2(x^2+1)(y^2+1)$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2)xy=x^2+y^2+2x^2y^2$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)xy=x^2+y^2-2xy$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(1-xy)=0.$

Vì $x\neq y$ nên $1-xy=0\Leftrightarrow xy=1$. Suy ra $S=2$.

Câu 3. 1) Khi $a=-\frac{1}{2}$ thì (d): $y=x+2$. PT hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2=x+2\Leftrightarrow x_1=-1$; $x_2=2\Rightarrow y_1=1$ và $y_2=4$. Các giao điểm là $A(-1;1)$ và $B(2;4)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2=-2ax-4a\Leftrightarrow x^2+2ax+4a=0\qquad(1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta'>0\Leftrightarrow a^2-4a>0$

$$\Leftrightarrow a>4 \text{ hoặc } a<0\qquad(2)$$

Theo Định lí Viète, $x_1+x_2=-2a$; $x_1.x_2=4a$.

Khi đó $|x_1|+|x_2|=3\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2|x_1.x_2|=9$

$\Leftrightarrow 4a^2-8a+8|a|=9.$

• Nếu $a>4$ ta có $4a^2=9$

$\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$ (loại) hoặc $a=-\frac{3}{2}$ (loại).

• Nếu $a<0$ thì $4a^2-16a-9=0$

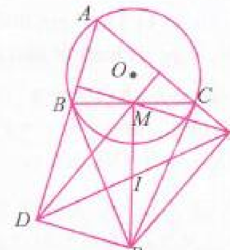
$\Leftrightarrow a=\frac{9}{2}$ (loại) hoặc $a=-\frac{1}{2}$ (thoả mãn).

Câu 4. Thời gian anh *Nam* đi hết quãng đường BC là nghiệm của phương trình $-8t+a=0\Leftrightarrow t=\frac{a}{8}$.

Theo giả thiết ta có $-4\left(\frac{a}{8}\right)^2+a.\frac{a}{8}=16\Leftrightarrow a=16$ (km/h).

Vậy quãng đường AB dài $\frac{3}{2}.16=24$ (km).

Câu 5. (h.1)



Hình 1

1) Vì $PB=PC$ nên $PM\perp BC$.

Mặt khác $PD\perp AB$ và $PE\perp AC$ nên các tứ giác $BMPD$, $CMPE$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{PEM}=\widehat{PCM}$; $\widehat{PDM}=\widehat{PBM}$,

mà $\widehat{PCM}=\widehat{PBM}$, suy ra $\widehat{PEM}=\widehat{PDM}$.

2) Ta có $\widehat{BAC}=\widehat{BCP}=\widehat{PEM}$, mà $\widehat{AEM}+\widehat{PEM}=90^\circ\Rightarrow\widehat{BAC}+\widehat{AEM}=90^\circ$

$\Rightarrow EM\perp AB\Rightarrow EM\,//\,PD$. Tương tự $DM\,//\,PE$.

Suy ra tứ giác $DMEP$ là hình bình hành, nên DE đi qua trung điểm I của PM cố định.

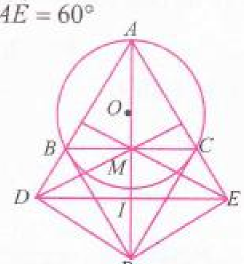
3) (h.2) Do $AM\perp BC$, $OM\perp BC$, $PM\perp BC$ nên A, O, M, P thẳng hàng.

$\Delta PDA=\Delta PEA\Rightarrow AD=AE$, $\widehat{DAE}=60^\circ$

$\Rightarrow\Delta DAE$ đều $\Rightarrow AM=\frac{3}{2}R$

$\Rightarrow AI=\frac{3}{2}AM=\frac{9}{4}R$

$\Rightarrow DE=\frac{3\sqrt{3}}{2}R.$



Suy ra $S_{DAE}=\frac{1}{2}AI.DE=\frac{27\sqrt{3}}{16}R^2$. *Hình 2*

Câu 6. Dễ thấy

$$9+10k-k(20-k)=(k-1)(k-9)\leq 0$$

với $k=\overline{1,9}$, nên $k(20-k)\geq 9+10k$, $k=\overline{1,9}$.

Suy ra $1.19x_1+2.18x_2+...+9.11x_9\geq$
$9(x_1+x_2+...+x_9)+10(x_1+2x_2+...+9x_9)=$
$9.10+10.18=270.$

Đẳng thức xảy ra khi $x_2=x_3=...=x_8=0$, $x_1=9$, $x_9=1$.

VÒNG 2

Câu 1. Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có

$$\left(a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)+\left(c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+\left(d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\left(a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)+\left(b^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)+\left(c^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)+\left(d^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{d}\right)$$

≥ 12.

Từ đó suy ra trong bốn số đã cho có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu 2. Ta có $(x^2+2x)^2+4(x+1)^2=(x^2+2x+2)^2$; $x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2=(x^2+x+1)^2$. Suy ra,

PT $\Leftrightarrow (x^2+2x+2)-(x^2+x+1)=2017 \Leftrightarrow x=2016$.

Câu 3. 1) Theo giả thiết $a^2=b^3$, suy ra a^2 chia hết cho b^2. Vậy a chia hết cho b.

Viết $a=xb$ thì $b=x^2$ và $a=x^3$ trong đó x là số nguyên dương. Tương tự $c=y^4$ và $d=y^3$ với y nguyên dương. Do $a-d=98$ nên $(x-y)(x^2+xy+y^2)=98=2.7^2$.

Vì $x-y<x^2+xy+y^2$ và x, y cùng tính chẵn lẻ nên $x-y=2$ và $x^2+xy+y^2=49$. Từ đó tính được $x=5$, $y=3$. Suy ra $a=125$, $b=25$, $c=81$, $d=27$.

2) Đặt $a=x-\sqrt{2}$, $b=x-\dfrac{1}{x}$, $c=x+\dfrac{1}{x}$, $d=x^2+2\sqrt{2}$.

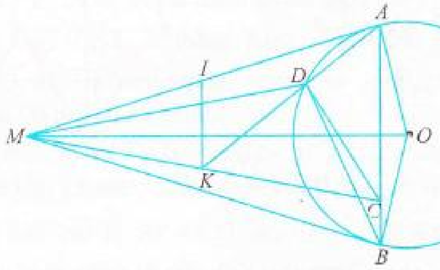
Ta có b và c không thể cùng nguyên. Vì nếu trái lại thì $b+c=2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$, suy ra $a,d\notin\mathbb{Z}$ (trái giả thiết). Vậy trong 2 số b và c có nhiều nhất 1 số nguyên, nên $a,d\in\mathbb{Z}$. Ta có $x=a+\sqrt{2}$, và

$$d=a^2+2a\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=a^2+2+(2a+2)\sqrt{2}\in\mathbb{Z}.$$

Từ đó phải có $a=-1\Rightarrow x=\sqrt{2}-1$. Khi đó

$$b=-2,\ d=3,\ c=2\sqrt{2}.$$

Câu 4. (h.3)



Hình 3

1) Ta có $AB\perp OM$ và IK là đường trung bình của ΔMAC, suy ra $IK\perp MO$.

Vậy $KO^2-KM^2=IO^2-IM^2=IO^2-IA^2=R^2$.

2) Ta có $KD.KA=KO^2-R^2=KM^2$.

Suy ra $\Delta KMD \backsim \Delta KAM$ (c.g.c). Từ đó

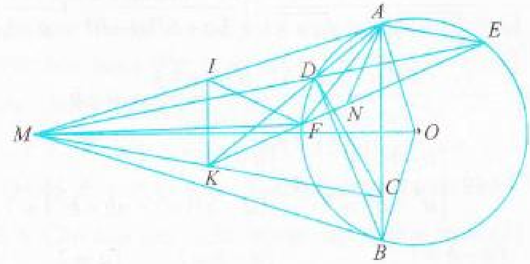
$$\widehat{KMD}=\widehat{KAM}=\widehat{DBA}.$$

Vậy tứ giác $BCDM$ nội tiếp.

3) Ta có $\widehat{AED}=\widehat{ABD}=\widehat{DMC}$. Vậy $AE \parallel MC$.

Suy ra $\widehat{CKF}=\widehat{AEF}=\widehat{MAF}$, nên tứ giác $MAFK$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{AKE}=\widehat{FMA}$, mà $\widehat{FAM}=\widehat{AEK}$.

Vậy $\Delta AEK \backsim \Delta FAM$.



Hình 4

Mặt khác N, I tương ứng là trung điểm EK, AM.

Suy ra $\Delta AEN \backsim \Delta FAI$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{ANE}=\widehat{AIF}$. Vậy tứ giác $ANFI$ nội tiếp.

Câu 5. Gọi các số ở đỉnh lần lượt là $x_A, \ldots, x_K$. Đặt $x=x_A+x_B+x_C$; $y=x_D+x_E+x_F$; $z=x_G+x_H+x_K$.

Suy ra $x+y+z=1+2+\ldots+9=45$. Xét tổng các số trên 6 cạnh AB, BC, CA, DE, EF, FD ta có

$$2x+3y+z=6\times 18=108.$$

Xét tổng các số trên 3 cạnh AB, BC, CA ta có

$$2x+y=3\times 18=54.$$

Vậy ta có hệ $\begin{cases}2x+3y+z=108\\2x+y=54\\x+y+z=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15\\y=24\\z=6\end{cases}$.

Từ $y=24\Leftrightarrow x_D+x_E+x_F=24=7+8+9$.

Suy ra $(x_D\,;x_E\,;x_F)$ là hoán vị của $(7\,;8\,;9)$.

Xét $x_D=9$:

- Nếu $x_E=8$ thì $x_F=7\Rightarrow$ dễ xác định (duy nhất) các số còn lại.
- Nếu $x_E=7$ thì $x_F=8\Rightarrow$ dễ xác định (duy nhất) các số còn lại.

Vậy nếu $x_D=9$ thì có hai cách viết phân biệt.

Do đó có 6 cách viết phân biệt.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) ***Giới thiệu.***

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2017 – 2018

(*Thời gian làm bài*: 150 *phút*)

Câu 1. (*2 điểm*)

a) Cho các số thực a, b, c sao cho $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 29$ và $abc = 11$. Tính $a^5 + b^5 + c^5$.

b) Cho biểu thức $A = (m + n)^2 + 3m + n$ với m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A là một số chính phương thì $n^3 + 1$ chia hết cho m.

Câu 2. (*2 điểm*)

a) Giải phương trình: $2(x + 2)\sqrt{3x-1} = 3x^2 - 7x - 3$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}-\dfrac{10}{x}=-1 \\ 20y^2-xy-y=1 \end{cases}$

Câu 3. (*1,5 điểm*)

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Trên các cạnh BC, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AN = AB = BM$. Các đường thẳng AM và BN cắt nhau tại K. Gọi H là hình chiếu của K trên AB. Chứng minh rằng:

a) Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KH.

b) Các đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH tiếp xúc với nhau.

Câu 4. (*1,5 điểm*)

Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{16\sqrt{xy}}{x+y} + \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

Câu 5. (*2 điểm*)

Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ tù. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, CA, BC lần lượt tại L, H, J.

a) Các tia BO, CO cắt LH lần lượt tại M, N. Chứng minh 4 điểm B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với AJ; d cắt AJ và đường trung trực của cạnh BC lần lượt tại D và F. Chứng minh 4 điểm B, D, F, C cùng thuộc một đường tròn.

Câu 6. (*1 điểm*)

Trên một đường tròn có 9 điểm phân biệt, các điểm này được nối với nhau bởi các đoạn thẳng màu xanh hoặc màu đỏ. Biết rằng mỗi tam giác tạo bởi 3 trong 9 điểm chứa ít nhất một cạnh màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 4 điểm sao cho 6 đoạn thẳng nối chúng đều có màu đỏ.

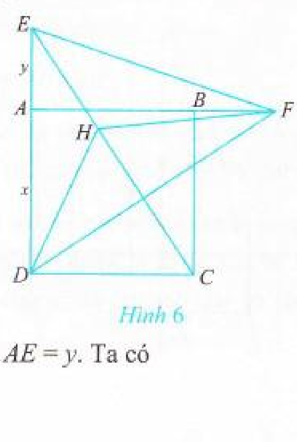
NGUYỄN ĐỨC TẤN – NGUYỄN ANH HOÀNG
(*TP. Hồ Chí Minh*) ***Giới thiệu***

BÀI TOÁN ĐẢO...

(*Tiếp theo trang 8*)

Bài toán 2. *Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E (E ≠ A). Trên tia đối của tia BA lấy điểm F sao cho BF = AE. Lấy điểm H trên đoạn EC và trong ΔDEF sao cho* $\widehat{FDH} - \widehat{DFH} = \widehat{CEF} - \widehat{CED}$. *Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔDEF.*

Lời giải (h.6)



Hình 6

Đặt $AD = x$, $AE = y$. Ta có

$$DE^2 + CF^2 = (AD + AE)^2 + BC^2 + BF^2 = (x+y)^2 + x^2 + y^2;$$

$$EF^2 + CD^2 = AF^2 + AE^2 + CD^2 = (x+y)^2 + x^2 + y^2.$$

Do đó $DE^2 + CF^2 = EF^2 + CD^2 \Rightarrow CE \perp DF$ (1)

Mặt khác từ $\widehat{FDH} - \widehat{DFH} = \widehat{CEF} - \widehat{CED}$

$$\Rightarrow \left(90^0 - \widehat{CHD}\right) - \left(90^0 - \widehat{CHF}\right) = \widehat{CEF} - \widehat{CED}$$

$$\Rightarrow \widehat{CHF} - \widehat{CEF} = \widehat{CHD} - \widehat{CED} \Rightarrow \widehat{HFE} = \widehat{HDE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm ΔDEF (theo dấu hiệu 3).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

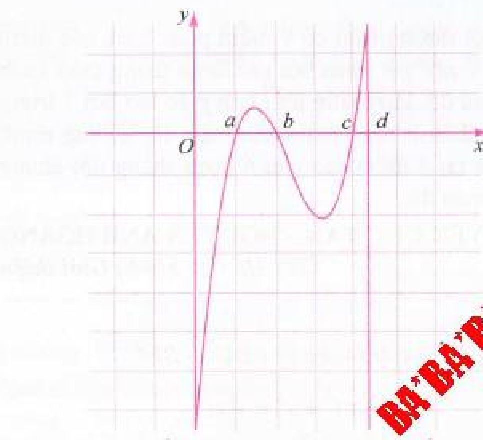
Cho ΔABC có $AB = 13$cm, $BC = 21$cm, $CA = 20$cm. Trên đường cao AD lấy điểm H sao cho $AH = \dfrac{16}{3}$ cm. Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC.

KHAI THÁC MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f'(x)$

NGUYỄN VĂN CƯỜNG (*GV THPT Mỹ Đức A – Hà Nội*)

Trong kỳ thi quốc gia năm 2017, một số câu vận dụng cao có đề cập đến các tính chất của hàm số $y = f(x)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Để giúp học sinh có kiến thức và kỹ năng khi giải các dạng toán này, bài viết sau trình bày một số cách tiếp cận để giải quyết bài toán liên quan đến đồ thị hàm số $y = f'(x)$.

Thí dụ 1. *(Thi thử của trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hoá) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $0 < a < b < c < d$ và hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.*



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0;d]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $M + m = f(0) + f(c)$.

B. $M + m = f(d) + f(c)$.

C. $M + m = f(b) + f(a)$.

D. $M + m = f(0) + f(a)$

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	0		a		b		c		d
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$f(d)$

Từ bảng biến thiên ta có

$$M \in \{f(0), f(b), f(d)\}\ ;\ m \in \{f(a), f(c)\}$$

Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên các đoạn

$$[0;a], [a;b], [b;c]\ [c;d]$$

Lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, các đường thẳng $x = 0, x = a, y = 0$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, các đường thẳng $x = a, x = b, y = 0$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, các đường thẳng $x = b, x = c, y = 0$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, các đường thẳng $x = c, x = d, y = 0$

Từ $S_1 > S_2 \Rightarrow -\int_0^a f'(x)dx > \int_a^b f'(x)dx$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(a) > f(b) - f(a) \Rightarrow f(0) > f(b)\quad (1)$$

$$S_1 > S_4 \Rightarrow -\int_0^a f'(x)dx > \int_c^d f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow f(0) - f(a) > f(d) - f(c)$$

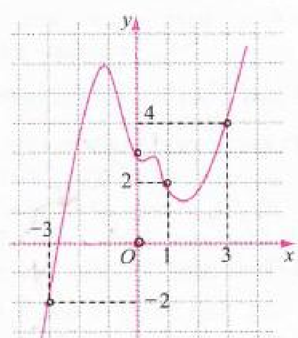
$$\Rightarrow f(0) > f(d) + f(a) - f(c)\quad (2)$$

$$S_3 > S_2 \Rightarrow -\int_b^c f'(x)dx > \int_a^b f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(c) > f(b) - f(a) \Rightarrow f(a) > f(c)\quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $M = f(0); m = f(c)$.

Thí dụ 2. *(Đề THPT QG, năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.*



Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(3)>g(-3)>g(1)$ *B.* $g(-3)>g(3)>g(1)$

C. $g(1)>g(-3)>g(3)$ *D.* $g(1)>g(3)>g(-3)$

***Lời giải. Cách** 1.* Ta có

$$g'(x)=2f'(x)-2(x+1)=2\left[f'(x)-(x+1)\right].$$

Vẽ đường thẳng $y=x+1$, cắt đồ thị tại ba điểm

$$(-3;-2);(1;2);(3;4).$$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$ và các đồ thị: $x=-3, x=1, y=x+1$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$ và các đồ thị: $x=1, x=3, y=x+1$.

$$S_1>S_2 \Leftrightarrow \int_{-3}^{-1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx>\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int_{-3}^{-1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx>2\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]dx$$

$$\Leftrightarrow \left[2f(x)-(x+1)^2\right]\Big|_{-3}^{1}>-\left[2f(x)-(x+1)^2\right]\Big|_{1}^{3}$$

$$\Leftrightarrow g(1)-g(-3)>g(1)-g(3)\Leftrightarrow g(3)>g(-3) \quad (1)$$

Lại có $S_2=-\left[2f(x)-(x+1)^2\right]\Big|_{1}^{3}=g(1)-g(3)>0$

$\Leftrightarrow g(1)>g(3)$ (2)

Từ (1) và (2) ta chọn đáp án D.

***Cách** 2.* Theo hình vẽ (mỗi ô vuông có diện tích bằng 1) ta có: $\int_1^3 f'(x)dx<6=\int_1^3(x+1)dx$

$$\Rightarrow 2\int_1^3(x+1-f'(x))dx=-2\int_1^3(f'(x)-(x+1))dx>0$$

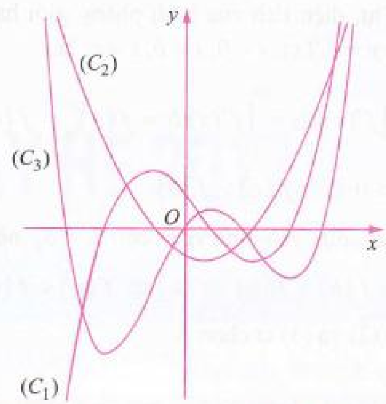
$\Leftrightarrow g(1)>g(3)$

Theo hình vẽ ta có $\int_{-3}^{3}f'(x)dx>6=\int_1^3(x+1)dx$

$$\Rightarrow 2\int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx>0\Leftrightarrow g(3)>g(-3)$$

Vậy $g(1)>g(3)>g(-3)$. Ta chọn đáp án D.

Thí dụ 3. *(Thi thử của trường THPT Chu Văn An, Hà Nội, năm 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=f'(x)$ và $y=f''(x)$ lần lượt là các đường cong nào trong hình vẽ sau?*



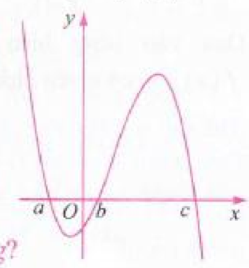
A. $(C_3),(C_1),(C_2)$. *B.* $(C_1),(C_2),(C_3)$.

C. $(C_3),(C_2),(C_1)$. *D.* $(C_1),(C_3),(C_2)$.

Lời giải. Do hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$, nên nếu điểm $M(x_0;f(x_0))$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số thì hình chiếu của điểm M trên Ox trùng với giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với Ox. Từ hình vẽ ta thấy hình chiếu các điểm cực trị của (C_3) trên Ox trùng với giao điểm của (C_1) và Ox.

Tương tự, hình chiếu các điểm cực trị của (C_1) trên Ox trùng với giao điểm của (C_2) và Ox. Từ đó (C_3) là đồ thị hàm số $y=f(x)$, (C_1) là đồ thị hàm số $y=f'(x)$, (C_2) là đồ thị hàm số $y=f''(x)$.

Thí dụ 4. *(Thi thử của trường THPT chuyên Thái Bình) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ.*



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b)$. *B.* $f(c)>f(a)>f(b)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)$. *D.* $f(b)>f(a)>f(c)$.

Lời giải. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên các đoạn $[a;b]$ và $[b;c]$, lại có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$. Do đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f'(x), y=0, x=a, x=b$ là:

$$S_1=\int_a^b\left|f'(x)\right|dx=-\int_a^b f'(x)dx=-f(x)\Big|_a^b=f(a)-f(b).$$

Vì $S_1>0$ nên $f(a)>f(b)$ (1)

Tương tự, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x), y=0, x=b, x=c$ là:

$$S_2=\int_b^c\left|f'(x)\right|dx=\int_b^c f'(x)dx=f(x)\Big|_b^c=f(c)-f(b)$$

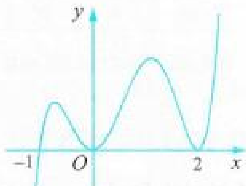
Vì $S_2>0$ nên $f(c)>f(b)$ (2)

Mặt khác, dựa vào hình vẽ ta có: $S_1<S_2$ nên

$f(a)-f(b)<f(c)-f(b)\Leftrightarrow f(a)<f(c)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta chọn A.

Thí dụ 5. *(Thi thử của Sở GD&ĐT Long An, năm 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K.*



Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên khoảng K. Phương trình $f(x)=m$ (với $m\in\mathbb{R}$) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm trên khoảng K?

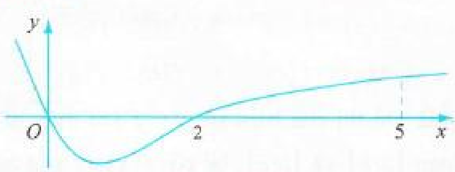
A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$-\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
y		↘	$f(-1)$	↗					

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=m$ có nhiều nhất 2 nghiệm. Chọn B.

Thí dụ 6. *(Thi thử của trường THPT chuyên, ĐH Vinh, lần 4 năm 2017) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ.*



Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là:

A. $f(0), f(5)$. **B.** $f(2), f(0)$.

C. $f(1), f(5)$. **D.** $f(2), f(5)$.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
y'	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗			$f(5)$

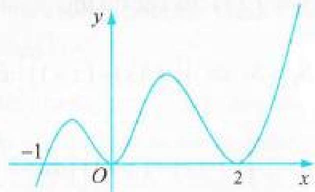
Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min f(x)=f(2)$ và $f(3)>f(2)$ (do hàm số đồng biến trên khoảng (2; 5)) (1)

Ta có: $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$

$\Leftrightarrow f(0)-f(5)=f(2)-f(3)<0\Rightarrow f(5)>f(0)$ (2)

Từ (1) và (2) ta chọn D.

Thí dụ 7. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $f'(x)$ trên khoảng K.*

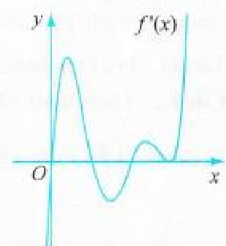


Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải. Phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-1$, $x=0$, $x=-2$, nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu (từ âm sang dương) khi đi qua $x=-1$ nên hàm số $f(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị là $x=-1$ (là điểm cực tiểu của hàm số). Chọn B.

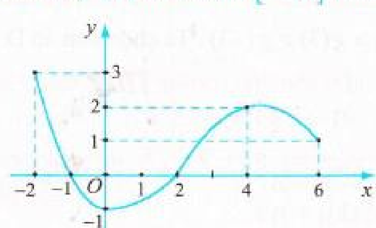
Thí dụ 8. *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?*



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải. Phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu ba lần nên hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị. Chọn C.

Thí dụ 9. *(Thi thử của trường THPT chuyên Đại học Vinh, Nghệ An lần 3 năm 2017) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ.*



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-2)$ **B.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(2)$

C. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6)$ **D.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-1)$

Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	-2		-1		2		4		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(6)$

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6)$ hoặc $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-1)$. Ta có $\int\limits_{-1}^{2}\left|f'(x)\right|dx = \int\limits_{2}^{-1} f'(x)\,dx$

$= f(-1) - f(2) = S_1 \Rightarrow f(-1) = S_1 + f(2)$.

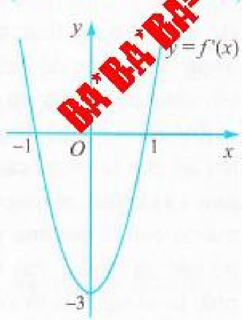
$\int\limits_{2}^{6}\left|f'(x)\right|dx = \int\limits_{2}^{6} f'(x)\,dx = f(6) - f(2) = S_2$

$\Rightarrow f(6) = S_2 + f(2)$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) > f(-1)$. Chọn C.

Thí dụ 10. *(Thi thử của Sở GD&ĐT Hà Nội, tháng 3-2017) Cho hàm số*

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ *có đồ thị* (C). *Biết rằng đồ thị* (C) *tiếp xúc với đường thẳng* $y = 4$ *tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số* $y = f'(x)$ *cho bởi hình vẽ. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị* (C) *và trục hoành.*



A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{27}{4}$. **C.** $S = \frac{21}{4}$. **D.** $S = \frac{5}{4}$.

Lời giải. Từ đồ thị của $y = f'(x)$ qua các điểm $(-1;0),(1;0),(0;-3)$ suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int\left(3x^2 - 3\right)dx = x^3 - 3x + C.$$

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Vậy $f(-1) = 4$ nên có ngay $C = 2$.

Vậy phương trình đường cong (C) là $y = x^3 - 3x + 2$.

Xét phương trình: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\int_{-2}^{1}\left(x^3 - 3x + 2\right)dx = \frac{27}{4}.$$

Thí dụ 11. *(Thi thử của Sở GD&ĐT Hà Nội, tháng 3-2017) Cho hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$, *có đạo hàm* $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^3$. *Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?*

A. Có 3 điểm cực trị. *B. Không có cực trị.*

C. Có 2 điểm cực trị. *D. Chỉ có 1 điểm cực trị.*

Lời giải. Ta có bảng biến thiên của hàm số

$$f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^3.$$

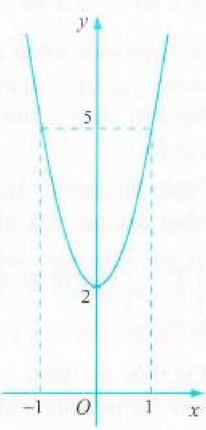
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu hai lần nên hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị. Chọn C.

Thí dụ 12. *Cho hàm số*

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ *có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số* $y = f'(x)$ *cho bởi hình vẽ. Giá trị* $f(3) - f(1)$ *là:*

*A.*24 *B.*26 *C.*28 *D.*30



Lời giải. Nhận xét rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên ta có

$f'(x) = 3ax^2 + c$,

$f'(1) = f'(-1) \Rightarrow b = 0$.

Do đồ thị hàm $f'(x)$ qua $(0;2)$ và $(1;5)$ nên ta có

$$\begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x)\,dx = \int\left(3x^2 + 2\right)dx = x^3 + 2x + m$$

Lại có (C) qua gốc tọa độ nên $m = 0$.

Vậy $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow f(3) - f(1) = 30$. Chọn D.

(Xem tiếp trang 34)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ĐỊNH LÝ JULIA ROBINSON VỀ CÔNG THỨC SỐ NGUYÊN TỐ

HOÀNG ĐỨC TÂN (*Hà Nội*)

NHẬP ĐỀ

Số nguyên tố nằm rải rác trong số các số tự nhiên, do đó không có gì đáng ngạc nhiên là trong nhiều thế kỷ các nhà toán học đã cố gắng hết sức để có được một "*công thức cho số nguyên tố*". Người ta có thể phát hiện các công thức như vậy bằng nhiều cách khác nhau. Vì vậy, điều quan trọng là phải xác định những gì mà ta thực sự mong muốn.

Rõ ràng, công thức đơn giản nhất cho số nguyên tố có dạng $p = p_n$, trong đó p_n là ký hiệu số nguyên tố thứ n. Tuy nhiên công thức này không đạt yêu cầu bởi việc tính toán vế phải của nó là vô cùng khó khăn (ví dụ số p_{2017}). Nhưng chúng ta muốn có được một công thức tương tự được mô tả bằng phương pháp tính toán đơn giản nhất ở vế phải (tuy nhiên, như sẽ trình bày dưới đây, tính đơn giản của tính toán không phải là một khái niệm rõ ràng).

Năm 1947 *W. H. Mills* đã chứng minh rằng *tồn tại một hằng số A sao cho số* $\left[A^{3^n}\right]$ *là một số nguyên tố đối với mỗi số tự nhiên n*. Gần đây *Sloane* đã tính được giá trị ít nhất có thể của hằng số *A* của *Mills* bắt đầu bằng 1,3063778838. Đó là một tính toán khá rắc rối.

Nhà toán học *E. M. Wright* cũng đã chứng minh được rằng *tồn tại một số thực* μ *sao cho mỗi số có dạng* $\left[2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{\mu}}}}}\right]$ *đều là số nguyên tố.*

Đa thức mũ của Julia Robinson

Đa thức mũ khác với đa thức thông thường ở chỗ số mũ của nó không nhất thiết phải là các số tự nhiên mà nó có thể là một đa thức tuyến tính của một số biến với hệ số là số tự nhiên, tức là đa thức có dạng $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k + b$, trong đó $a_1, \ldots, a_k, b$ là các số nguyên không âm.

Ví dụ về các đa thức mũ đơn giản đối với biến tự nhiên n: $p = 2^n - 1$ (1)

và $p = 2^n + 1$ (2)

Rõ ràng công thức (1) không phải luôn cho ta các số nguyên tố, ví dụ khi số n là một hợp số, chẳng hạn $n = k.l$ ($k > 1$, $l > 1$) thì p luôn chia hết cho $2^k - 1$ và $2^l - 1$. Ngay cả khi n là một số nguyên tố thì số nhận được từ công thức (1) vẫn có thể là một hợp số, ví dụ: $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$.

Các số nguyên tố nhận được từ công thức (1) được gọi là các số Mersenne.

Từ nay về sau ta luôn giả thiết rằng tất cả các biến mà ta gặp trong bài viết đều nhận các giá trị nguyên dương.

Năm 1952 nhà toán học Mỹ *J. Robinson* đã công bố một kết quả lý thú sau:

Tồn tại đa thức mũ $R(x_0, \ldots, x_k)$ sao cho:

- Mọi giá trị dương của nó với với các giá trị nguyên dương của các biến là số nguyên tố.

- Mọi số nguyên tố bất kỳ đều có thể viết được dưới dạng $R(x_0, \ldots, x_k)$.

Kết quả là ta nhận được một "*Công thức của các số nguyên tố*": $p = R(x_0, \ldots, x_k)$ (3)

Đó là một công thức nổi trội về nhiều mặt. Thứ nhất trong công thức đó chỉ có các số nguyên, vì vậy khác với công công thức của *Mills* và *Wright* công thức của *J. Robinson* có thể được viết ra một cách rõ ràng. Thứ hai nó cho ta tất cả các số nguyên tố. Thứ ba là công thức (3) không những chỉ cho ta các giá trị nguyên tố mà nó còn là phương pháp đơn giản nhất giúp ta loại bỏ các số "thừa" mà mỗi số đó giá trị của R không phải là số nguyên tố với các giá trị nguyên dương của các biến không vượt quá 0. Các điều đó cho thấy ưu điểm của công thức *Robinson* đối với các công thức (1), (2) hay các công thức của *Mills* và *Wright*.

Cách chứng minh của *J. Robinson* là khá sơ cấp. Sau đây là phác thảo các ý tưởng chính của chứng minh đó (còn việc phát biểu và chứng minh một cách chặt chẽ xin bạn đọc tự hoàn thiện). Tất cả các kết quả trung gian được phát biểu dưới dạng 5 Bổ đề, đó là các kết quả mà ta cần phải chứng minh. Như chúng ta sẽ thấy dưới đây từ các Bổ đề đó ta không chỉ suy ra được sự tồn tại của đa thức mũ R mà ta còn có thể thấy được dạng tường minh của nó nữa.

Những nét chính trong chứng minh Định lý của Julia Robinson.

Rõ ràng để chứng minh định lý của *J. Robinson* ta cần phải chỉ ra đa thức mũ R sao cho phương trình (3) là giải được trong các số tự nhiên đối với các biến $x_0,...,x_k$ khi và chỉ khi điều kiện sau là thỏa mãn:

$$p = \text{một số nguyên tố} \quad (4)$$

Đó là một ví dụ về *điều kiện* trên biến p. Ta xét thêm vài ví dụ về các điều kiện trên tập các biến

$$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,x_0,x_1,...,x_k \quad (4')$$

Nếu ta yêu cầu tập các số (4') thỏa mãn hệ phương trình dạng:

$$F_i\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,x_0,x_1,...,x_k\right)=0 \ \ (i=1,2,\dots,s) \quad (4'')$$

hoặc đạt được mô tả bằng lời có dạng sau: "*Tất cả các λ_i là các số nguyên tố*" hoặc "*λ_1 là số nguyên tố, còn $x_0,x_1,...,x_k$ là các số chẵn*",... thì chính là ta đã tách một số phần tử của tập các số (4') ra và đặt điều kiện lên chúng rồi.

Chúng ta sẽ không xác định xem các loại điều kiện nào là cho phép. Các ví dụ về các điều kiện nêu trên là đủ để lí giải cho cách tiếp cận của chúng ta.

Tiếp theo ta sẽ phân biệt giữa các biến mà một số trong chúng được gọi là các *tham số*, cho nên tập các biến được phân chia thành các các *tham số* và các *ẩn số* nằm trong số các điều kiện.

Nếu toàn bộ vế trái của hệ phương trình (4'') là các đa thức mũ đối với $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,x_0,x_1,...,x_k$ và nghiệm của hệ đó là các số nguyên dương thì ta gọi hệ đó là *Diophantine mũ*; nếu các hàm F_i là các đa thức thông thường thì hệ phương trình (4'') được gọi một cách đơn giản là *Diophantine*.

Phương trình (3) là một ví dụ về phương trình Diophantine mũ đối với các biến p và $x_0,x_1,...,x_k$.

Ta sẽ nói rằng hai hệ điều kiện có cùng một số các tham số là tương đương với nhau đối với các tham số ấy nếu tập giá trị của những tham số của một trong hai hệ điều kiện đó có nghiệm sẽ trùng với tập giá trị của những tham số của hệ điều kiện còn lại có nghiệm (cần lưu ý rằng định nghĩa này không nói về mối quan hệ về giá trị của các ẩn số mà đối với chúng ta mục tiêu đó là không quan trọng, sự tương đương theo cách hiểu của chúng ta nói chung các hệ ấy có thể không có các ẩn số chung).

Một ví dụ về điều kiện tương đương đối với tham số λ có thể thực hiện bởi bất đẳng thức $2^n < \lambda < 2^{n+1}$ và đẳng thức $\lambda = (2x_0 + 1).x_1$.

Rõ ràng mỗi một trong các điều kiện đó sẽ có nghiệm khi và chỉ khi tham số λ nằm trong tập các số không phải là lũy thừa nguyên của số 2.

Sử dụng thuật ngữ trên mục đích của ta có thể được phát biểu lại như sau: *Hãy tìm các đa thức mũ $R\left(x_0,...,x_k\right)$ sao cho điều kiện* (3) *tương đương với điều kiện* (4) *đối với tham số p.*

Tuy nhiên yêu cầu để tham số p đứng một mình ở vế trái của đẳng thức (3) như chúng ta thấy là quá hạn chế.

Giả sử ta tìm được một đa thức mũ $Q\left(p,x_1,...,x_k\right)$ sao cho phương trình Diophantine mũ (điều kiện trên $p,x_1,...,x_k$): $Q\left(p,x_1,...,x_k\right)=0$ (5)

là tương đương với điều kiện (4).

Đặt: $R\left(x_0,...,x_k\right)=x_0.\left[1-Q^2\left(x_0,...,x_k\right)\right]$ (6)

Bổ đề 1. *Nếu các đa thức mũ R và Q có mối quan hệ (6) thì các phương trình (3) và (5) là tương đương đối với tham số p.*

Ta chỉ cần tìm một hệ phương trình Diophantine mũ (thay vì tìm phương trình mong muốn)

$$\begin{cases} Q_1\left(p,x_1,...,x_k\right)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_l\left(p,x_1,...,x_k\right)=0 \end{cases} \quad (7)$$

tương đương với điều kiện (4) đối với p.

Bổ đề 2. *Nếu* $Q\left(p,x_1,...,x_k\right)=\sum_{i=1}^{l}Q_i^2\left(p,x_1,...,x_k\right)$ *thì hệ (7) tương đương với phương trình (5).*

Dưới đây ta sẽ cố gắng tìm kiếm một hệ phương trình Diophantine mũ tương đương với điều kiện (4).

Một số nguyên tố là gì ?

Đó là một câu hỏi gây bất ngờ cho người đọc. Bởi vì ai cũng biết rằng số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Tất nhiên là như vậy, nhưng việc sử dụng định nghĩa này không phải là việc dễ dàng mà rất vất vả, bởi ta phải lần lượt tìm các ước số của nó trừ số 1 và chính nó. Vậy sẽ là tốt hơn nếu ta nói rằng số p là số nguyên tố nếu $p > 1$ và p không chia hết cho bất kỳ số nào nhỏ hơn p và lớn hơn 1. Đối với mục đích của chúng ta thì định nghĩa sau đây là phù hợp hơn cả:

Số p là một số nguyên tố nếu $p > 1$ và đối với mọi số q nhỏ hơn p, ƯCLN(q, p) = 1.

Trong định nghĩa đó không hạn chế $q \neq 1$ và quan trọng hơn nó cho phép ta giảm một số lượng lớn các biến điều kiện *ƯCLN*(1, p) = 1, *ƯCLN*(2, p) = 1, …, *ƯCLN*(p – 1, p) = 1 xuống còn duy nhất một điều kiện: *ƯCLN*((p – 1)!, p) = 1.

Do đó chúng ta viết lại hệ điều kiện đầu tiên tương đương với điều kiện (4) đối với tham số p thành:

$$\begin{cases} p = r+1 & (8) \\ s = r! & (9) \\ \text{ƯCLN}(s,p) = 1 & (10) \end{cases}$$

Phương trình đầu tiên trong các điều kiện đó có dạng Diophantine mũ cần tìm (hơn nữa nó là Diophantine), còn phương trình thứ 3 ta có thể làm giảm bớt việc tính toán bằng cách đưa thêm vào hai ẩn số mới:

Bổ đề 3. *Điều kiện (10) tương đương điều kiện*

$$x_1.s + x_2.p = 1 \qquad (11)$$

đối với các tham số p và s.

Do phương trình (11) là Diophantine mũ nên chúng ta chỉ còn phải tìm hệ phương trình Diophantine mũ tương đương với điều kiện (9) đối với tham số r và s.

Tính toán giai thừa như thế nào ?

Điều kiện (9) liên quan đến $r!$, đó là một "*trở ngại*" của chúng ta. Ta nhớ rằng giai thừa xuất hiện trong biểu thức hệ số của nhị thức Newton, với $t \geq r$:

$$C_t^r = \frac{t(t-1)...(t-r+1)}{r!} \text{ tức là } r! = \frac{t(t-1)...(t-r+1)}{C_t^r}.$$

Đa thức nằm ở tử số có cấu trúc khá phức tạp. Ta thử thay nó bằng một đa thức đơn giản hơn, cụ thể là đa thức t^r. Với $t \geq r$ ta có:

$$\frac{t^r}{C_t^r} = \frac{t^r}{t(t-1)...(t-r+1)} \cdot \frac{t(t-1)...(t-r+1)}{C_t^r}$$

$$= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{t-2}\right)...\left(1+\frac{r-1}{t-r+1}\right).r! \qquad (12)$$

Dễ dàng thấy rằng: $r! = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^r}{C_t^r}$ (13)

Tuy nhiên cách viết giai thừa như vậy sẽ không cho ta điều gì cả, bởi vì t trong tương lai sẽ là một tham số trong hệ phương trình cần tìm sẽ nhận các số lớn tùy ý nhưng có giá trị hữu hạn. Nhưng chúng ta sẽ không chuyển qua giới hạn mà ta sẽ sử dụng tính nguyên của $r!$, từ (12) và (13) ta suy ra rằng với r đủ lớn:

$$r! = \left[\frac{t^r}{C_t^r}\right] \qquad (14)$$

Bổ đề 4. *Công thức (14) chỉ đúng với* $t \geq 2.r^{r+2}$.

Bổ đề 4 cho phép ta biến đổi điều kiện (9) thành một hệ tương đương với nó:

$$\begin{cases} t = 2.r^{r+2} & (15) \\ c = C_t^r & (16) \\ t^r = s.c + (x_3 - 1) & (17) \\ (x_3-1) + x_4 = c & (18) \end{cases}$$

đối với các tham số r và s (bạn hãy tự kiểm tra xem!). Ở đây các điều kiện (15), (17) và (18) có dạng yêu cầu và chúng ta chỉ còn phải tìm một hệ phương trình Diophantine mũ tương đương với điều kiện (16) đối với các tham số r, t và c.

Vậy là chúng ta còn phải tìm cách "*thoát khỏi*" hệ số của nhị thức Newton.

Hệ số nhị thức – đó là một hệ số của nhị thức !

Chúng ta chỉ mới sử dụng hệ số của nhị thức thông qua giai thừa, nhưng hệ số nhị thức còn có các định nghĩa khác. Bây giờ ta sử dụng: $(u+1)^t = \sum\limits_{i=0}^{t} C_t^i u^i$ (19)

Công thức này là định nghĩa các hệ số của nhị thức nếu chúng ta xem nó như là một đồng nhất thức đối với u. Cái chúng ta cần là ẩn số nhận chỉ một giá trị duy nhất trong mỗi nghiệm cụ thể của hệ cần tìm. Ta nhận xét rằng: $C_t^i \leq \sum\limits_{i=0}^{t} C_t^i = (1+1)^t = 2^t$ (20)

Vì vậy nếu $u > 2^t$ (21)

thì $C_t^0, ..., C_t^t$ đó là các chữ số ở trong việc viết số $(u+1)^t$ theo vị trí trong hệ đếm cơ số u. Do đó các hệ số của nhị thức được xác định một cách đơn trị theo các điều kiện là đẳng thức (19) và bất đẳng thức (20), (21) đồng thời thỏa mãn với ít nhất là một giá trị của u.

Bổ đề 5. *Điều kiện (16) là tương đương với hệ điều kiện*

$$\begin{cases} u = 2^t + 1 & (22) \\ x_5 = u + 1 & (23) \\ x_5^t = x_6 u^{r+1} + cu^r + x_7 & (24) \\ x_7 + x_8 = u^r & (25) \\ c + x_9 = u & (26) \end{cases}$$

đối với các tham số r, t và c. Trong đó tất cả các điều kiện đều có dạng mà ta cần.

Như vậy chúng ta đã chứng minh được rằng điều kiện (4) là tương đương với hệ bao gồm các phương trình Diophantine mũ (8), (11), (15), (17), (18), (22)-(26) đối với tham số p. Để có thể nhận được đa thức mũ ta mong muốn thì ta cần phải đổi tên các biến r, s, t, c và u thành $x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$, sử dụng Bổ đề 2 kết hợp tất cả các phương trình vào một phương trình đơn và sử dụng Bổ đề 1 để biến đổi phương trình thành dạng mong muốn (3) mà ta cần phải tìm.

(Xem tiếp trang 23)

NHỮNG NHỊP CẦU NỐI TOÁN HỌC VÀ THIÊN VĂN HỌC

LÊ QUỐC HÁN
(*Khoa Toán, Trường Đại học Vinh, Nghệ An*)

1. Apollonius với tác phẩm "*Các thiết diện cônic*" bất hủ

Euclid, Archimedes, Apollonius được xem là ba nhà toán học vĩ đại của thế kỷ III trước công nguyên. Do đó sẽ không công bằng nếu ta biết Apollonius chỉ qua vẻn vẹn một quỹ tích mang tên ông: *Giả sử* A, B *là hai điểm cố định và* k *hằng số cho trước khác* 1. *Khi đó quỹ tích những điểm* M *thỏa mãn điều kiện* $\frac{MA}{MB} = k$ *là đường tròn đường kính* IJ *, trong đó* I *và* J *là các điểm chia trong và chia ngoài* AB *theo tỷ số* k .

Apollonius ít hơn Archimedes khoảng 25 tuổi, sinh ở Perga, miền nam Tiểu Á quãng năm 262 trước công nguyên. Người ta biết rất ít về cuộc đời ông. Chỉ biết rằng khi còn là một thanh niên ông đã đến Alexandria theo học những người kế tục Euclid và ở lại đó một thời gian dài. Về sau ông có đến thăm Pergamum vùng Tiểu Á, tại đó có một Trường Đại học và một thư viện mới được xây dựng theo mẫu ở Alexandria. Ông trở lại Alexandria và qua đời tại đó vào khoảng năm 200 trước công nguyên.

Apollonius được xem là một trong những người bắc nhịp cầu đầu tiên giữa toán học và thiên văn học. Danh tiếng của ông được lưu truyền cùng hậu thế nhờ tác phẩm *Các thiết diện cônic*, một công trình đặc sắc khiến người đương thời phải gọi ông là một "nhà hình học vĩ đại". *Các thiết diện cônic* của Apollonius gồm 8 quyển, có khoảng 400 mệnh đề, là một công trình hoàn chỉnh về các đường này và trội hơn hẳn những công trình trước đó cũng nghiên cứu cùng chủ đề của Menaechmus, Aristaeus và Euclid. Chỉ có 7 quyển đầu trong 8 quyển còn giữ được cho tới ngày nay, bốn quyển đầu bằng tiếng Hy Lạp và ba quyển sau là một bản dịch Ả Rập của thế kỷ XIX. Ba quyển đầu được xây dựng trên cơ sở một công trình trước đó của Euclid nói về lý thuyết sơ cấp tổng quát về cônic, còn các cuốn sau chứa những nghiên cứu sâu hơn.

Trước Apollonius, người Hy lạp đã đạt được các thiết diện cônic từ ba loại hình nón tròn xoay tùy theo góc ở đỉnh của hình nón là nhỏ hơn, bằng hay lớn hơn một góc vuông. Bằng cách cắt ba hình nón đó bởi một mặt phẳng vuông góc với một đường sinh của hình nón, ta sẽ được thiết diện là một hình elip, parabol hay hypepol. Tuy nhiên chỉ một nhánh đường hypepol được quan tâm nghiên cứu. Chính Apollonius là người đầu tiên thu được cả ba loại thiết diện này bằng phương pháp ngày nay rất quen thuộc là từ một hình nón tròn *kép* thẳng hoặc xiên. Ông là người đầu tiên đưa ra các thuật ngữ *elip, parabol* hay *hypepol* cho các thiết diện đó, được mượn từ thuật ngữ của *Trường phái toán học Pythagore* xa xưa khi áp dụng tính các diện tích. Ngày nay ta biết rất rõ rằng, trong hệ trục tọa độ Descartes vuông góc xOy , tập hợp những điểm $P(x_P; y_P)$ là một *elip, parabol* hay *hypepol* thỏa mãn

$$y_P^2 = px_P - \frac{px_P^2}{d}, \quad y_P^2 = px_P \quad \text{hay} \quad y_P^2 = px_P + \frac{px_P^2}{d}.$$

Đại bộ phận nội dung của *hình học các thiết diện cônic* Apollonius đã trình bày tương đương hình học được suy ra từ các phương trình Descartes này. Vì vậy người đời sau cho rằng *Hình học giải tích* là một phát minh của người Hy Lạp, mà nguồn gốc chủ yếu từ tác phẩm *Các thiết diện cônic* của Apollonius.

Quyển II nói về tính chất của các đường tiệm cận và của các hypepol liên hợp, cách dựng các tiếp tuyến. Quyển III bàn về các tính chất điều hòa của các cực điểm và cực tuyến, những định lý nói về tích các secmăng của các dây cung tương giao (chẳng hạn có một định lý mà ngày nay được gọi là *Định lý Newton*: "*Nếu hai dây* AB *và* MN *song song với hai hướng cho trước và cắt nhau tại* O *thì* $\frac{PO.OQ}{MO.ON}$ *là một hằng số độc lập với vị trí điểm* O "). Những tính chất tiêu điểm của các cônic có tâm được đề cập cuối quyển III. Quyển IV trình bày chứng minh mệnh đề đảo của một số mệnh đề trong quyển III. Quyển V là quyển độc đáo và đáng chú ý nhất trong các cuốn hiện có, trong đó các pháp tuyến được xem là các đoạn thẳng cực đại và cực tiểu vẽ từ một điểm đến đường cong. Quyển VI trình bày các định lý và các bài toán dựng hình về các cônic bằng nhau hay đồng dạng. Quyển VII chứa đựng một số định lý nói về các đường kính liên hợp, chẳng hạn định lý nói về tính không đổi của diện tích một hình bình hành tạo bởi các tiếp tuyến của cônic có tâm tại hai đầu của một cặp đường kính liên hợp.

Ngoài tác phẩm *Các thiết diện cônic*, Apollonius còn để lại cho hậu thế 6 công trình sáng giá khác. Đó là *Về thiết diện tỷ lệ* (181 mệnh đề), *Về thiết diện không gian* (124 mệnh đề), *Tiệm cận* (125 mệnh đề), *Các quỹ tích phẳng* (147 mệnh đề), *Tiếp xúc* (124 mệnh đề), *Về thiết diện xác định* (83 mệnh đề). Trong *Tiếp xúc*, Apollonius đề cập đến bài toán dựng một đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước (trong đó các đường tròn cho trước được phép suy biến thành đoạn thẳng hay điểm). Ngày nay nó được gọi là *Bài toán Apollonius*, và đã từng thu hút sự chú ý của nhiều nhà toán học danh tiếng đời sau như Viète, Euler, Newton, Gergonne. Trong *Các quỹ tích phẳng* có hai kết quả quen thuộc đối với học sinh phổ thông:

1) *Nếu A, B là hai điểm cố định và k hằng số cho thì quỹ tích những điểm thỏa mãn điều kiện $\frac{MA}{MB}=k$ là một đường tròn nếu $k\neq 1$ và là một đường thẳng nếu $k=1$.*

2) *Nếu A_i $(i=1,2,...,n)$ là n điểm cố định và λ_i $(i=1,2,...,n)$; a là các hằng số cho trước thì quỹ tích những M thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i MA_i^2=a$ là một đường tròn.*

Ngày nay, đường tròn nói trong 1) được gọi là *Đường tròn Apollonius*.

2. Hypparchus và Claudius Ptolemy, hai nhịp cầu thiết yếu tiếp theo

Cho đến ngày nay, nguồn gốc của *Lượng giác học* vẫn chưa được xác định rõ ràng. Có một số bài toán trong các bản cỏ chỉ Rhid thời Acập cổ đại còn lưu giữ được đề cập đến côtang của góc nhị diện ở đáy một hình chóp, còn trong bản nêm Babylon Plimpton 322 chủ yếu là một bảng các secan. Các nhà thiên văn học Babylon của thế kỷ IV và V trước công nguyên đã thu thập được một khối lượng đáng kể các dữ kiện quan sát, và ngày nay người ta biết được rằng phần lớn các dữ kiện đó đã được chuyển qua tay người Hy Lạp. Chính thiên văn xa xưa đã khai sinh ra *Lượng giác học cầu*.

Hipparchus được xem là nhà thiên văn học xuất sắc nhất thời cổ đại. Ông sống vào khoảng thế kỷ II trước công nguyên. Mặc dầu những quan sát về xuân phân của ông được ghi lại ở Alexandria vào năm 146 trước công nguyên, song những quan sát quan trọng nhất lại được thực hiện ở đài quan sát nổi tiếng của trung tâm thương mại Rhodes. Ông là một nhà quan sát cực kỳ cẩn thận và trong thiên văn, nhiều kỳ tích đã thuộc về ông như việc xác định thời gian của một tháng âm lịch trung bình chỉ sai khác $1''$ so với giá trị hiện nay được chấp thuận, việc tính toán độ nghiêng của hoàng đạo, việc khám phá và đánh giá tiếng động hàng năm của các phân điểm. Ngoài ra ông đã tính toán thị sai của mặt trăng, xác định cận điểm và chuyển động trung bình của mặt trăng và đã ghi vào danh mục được 850 các định tinh.

Tuy nhiên điều chúng ta quan tâm ở đây là những đóng góp của ông vào sự phát triển của *Lượng giác học*. Ông để lại cho hậu thế một tác phẩm gồm 12 quyển bàn về việc xây dựng một *bảng các dây cung*. Một bảng mà sau này Claudius Ptolemy đã làm theo để cho chiều dài của các dây cung trương tất cả các góc ở tâm của một hình tròn cho trước theo khoảng nửa độ một, từ $0,5^0$ đến 180^0. Thực ra bảng này lập được nhờ công thức $\sin\alpha=\frac{AB}{2R}$ trong đó AB là dây trương cung có góc ở tâm bằng α và R là bán kính đường tròn. Chính cách giải thích trong sáng sau này của Claudius Ptolemy đã giúp chúng ta hiểu vì sao Hipparchus lập được *bảng các dây cung* chính xác và chi tiết như vậy.

Một công trình thiên văn học khác có ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển toán học Hy Lạp thế kỷ II trước công nguyên được viết bởi Claudius Ptolemy ở Alexandria vào khoảng 150 sau công nguyên. Tác phẩm này mang tên *Syntaxis mathematica* hay "*Sưu tập toán học*", dựa trên những bài viết của Hipparchus và được ghi nhận là là đầy súc tích và mỹ lệ. Về sau các nhà dịch thuật Árập gọi nó là *Almagest*. Tác phẩm này gồm 13 quyển. Quyển I bên cạnh một số tài liệu mở đầu về thiên văn học là bảng dây cung nói ở trên cùng với một giải thích ngắn việc nó được ra đời từ một mệnh đề mà ngày nay gọi là *Định lý Ptolemy*: "*Trong một tứ giác nội tiếp, tích các đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối diện*". Từ định lý này ông rút ra các hệ quả sau đây:

1) *Nếu a và b (với $a\geq b$) là các dây của một đường tròn có bán kính đơn vị thì $s=\frac{a}{2}\sqrt{4-b^2}+\frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$ ($d=\frac{a}{2}\sqrt{4-b^2}-\frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$) là dây của tổng (hiệu) hai cung đó.*

2) Nếu t là dây của một cung của đường tròn có bán kính đơn vị thì $p=\sqrt{2-\sqrt{4-t^2}}$ là dây của nửa cung đó.

Dựa vào các kết quả này ông xây dựng bảng các dây cung với khoảng cách $0,5^0$.

Quyển II nói về các hiện tượng tùy thuộc vào tính hình cầu của trái đất. Các quyển III, IV, V phát triển hệ thống địa tâm của thiên văn bằng các epicyclic. Trong quyển VI có lời giải bài toán ba điểm trong trắc địa: xác định điểm để từ đó các cặp ba điểm cho trước được nhìn dưới các góc cho trước. Trong quyển VII trình bày lý thuyết các thiên thực và đưa ra giá trị bốn chữ số của π ($\pi=\dfrac{377}{120}$ hay $\pi=3,1416$). Các quyển VII và VIII trình bày danh mục của 1028 các định tinh. Các quyển còn lại nói về các hành tinh. Có thể nói rằng *Almagest* là một công trình mẫu mực về thiên văn học tính đến thời Copernicus và Kepler.

3. G. Galileo (1564 - 1643) - người khai sáng nghiên cứu thiên văn học theo tinh thần hiện đại

Galileo là con trai của một nhà quý tộc Florence đã hết thời, sinh ở Pisa năm 1564. Sau bước đầu là sinh viên trường y ông đã được phép cha mẹ cho theo học về khoa học và toán học là những lĩnh vực ông có nhiều tài năng tự nhiên. Trong khi còn là một sinh viên trường y ở trường đại học Pisa, Galileo đã có một nhận xét nổi tiếng về mặt lịch sử, rằng ngọn đèn treo lớn của nhà thờ đã dao động qua lại theo một chu kỳ độc lập với kích thước của cung dao động. Về sau ông cho biết rằng chu kỳ của một quả lắc cũng độc lập với trọng lượng của quả lắc đó. Lúc 25 tuổi Galileo đã được chỉ định làm giáo sư toán học ở Pisa là do đã có những thử nghiệm về tháp nghiêng cho thấy rằng, trái với những điều Aristotle đã dạy, các vật thể nặng không rơi nhanh hơn các vật thể nhẹ. Ông rút ra một định luật nói rằng khoảng cách một vật rơi tỷ lệ với bình phương của thời gian rơi theo một công thức quen thuộc $s=\dfrac{gt^2}{2}$. Vì có những cuộc luận chiến cục bộ mà Galileo đã từ chối chức vụ giáo sư đại học của mình vào năm 1591 và năm sau đã chấp nhận hàm giáo sư toán học tại Padua, ở đó có bầu không khí hữu nghị hơn để trao đổi các mục tiêu khoa học. Tại đây, trong gần 18 năm, Galileo tiếp tục làm các thí nghiệm và giảng dạy và đã trở nên rất nổi tiếng. Tại Padua, vào khoảng 1607, khi nghe tin một thợ mài Johann Lippershein người Hà Lan Johann Lippershein phát minh ra một kính viễn vọng, Galileo dự kiến làm ra một số dụng cụ tương tự và kỳ diệu thay đã làm ra được một kính viễn vọng khếch đại trên 30 lần. Với kính viễn vọng đó, ông quan sát các vết đen mặt trời, núi non trên mặt trăng, các pha của Sao Kim và các vành của Sao Thổ và bốn vệ tinh của sáng của Sao Mộc. Quan sát các vết đen của mặt trời không hề có khuyết tật và quan sát các vệ tinh của Sao Mộc đã làm vững thêm Lý thuyết Copernic về hệ thống mặt trời. Những khám phá này buộc Giáo hội Vaticăng lên tiếng phản đối và cuối cùng vào năm 1633, một năm sau khi ấn hành cuốn sách ủng hộ lý thuyết nhật tâm của Copernic, Galileo phải trình diện trước Tòa dị giáo và bị bắt phải tuyên bố hủy bỏ các khám phá về khoa học của mình xung quanh đề tài này.

Nhờ có Galileo mà loài người bước sang kỷ nguyên nghiên cứu một khoa học theo tinh thần hiện đại : *kết hợp hài hòa giữa thực nghiệm và lý thuyết*. Galileo cũng là người đầu tiên thấy được hình dáng parabol của đạn đạo và suy đoán các luật moment. Ông đã sáng chế kính hiển vi đầu tiên thuộc loại hiện đại và chiếc coma tỷ lệ đã có một thời rất phổ biến. Điểm đáng chú ý về mặt lịch sử là qua những lời phát biểu của Galileo chứng tỏ ông nắm rất vững khái niệm tương đương giữa các lực lượng vô hạn, một vấn đề cơ bản trong lý thuyết tập hợp thế kỷ XIX của Cantor - một lý thuyết có nhiều ảnh hưởng nhất đối với sự phát triển của toán học hiện đại. Những ý kiến phát biểu này cũng như những quan niệm của Galileo về động lực học có thể tìm thấy trong tác phẩm *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nouve scienze* của ông được ấn hành ở Leyden vào năm 1638.

Galileo qua đời năm 1643 để lại sự tiếc thương của bao người.

4. J. Kepler (1571 - 1630) - Cha đẻ ba Định luật nổi tiếng về chuyển động của hành tinh trong thiên văn học

Johann Kepler sinh ở gần Stugart năm 1571 và học ở Đại học Tubingen với khuynh hứng ban đầu là muốn trở thành một mục sư đạo tin lành trường phái Luther. Vì quá say mê thiên văn học nên ông đã thay đổi mục tiêu, và năm 1594 khi mới vào tuổi hai mươi, ông chấp nhận chức vị giảng viên của Đại học Gratz ở Áo. Năm 1599 ông làm phụ tá cho cho nhà thiên văn học nổi tiếng Tycho Brahe người Đan Mạch. Chẳng bao lâu sau, năm 1601, Tycho Brahe đột ngột qua đời và Kepler đã thừa hưởng cả cương vị lẫn một bộ sưu tập phong phú và rất chính xác các dữ kiện thiên văn về sự chuyển động của các hành tinh do thầy mình để lại. Với tính gan lỳ khác thường, sau nhiều tính toán vất vả, mò mẫm và sai lầm, cuối cùng Kepler đã phát biểu được hai định luật đầu tiên của ông vào năm

1609, và mười năm sau 1619, định luật thứ ba về chuyển động của hành tinh:

I. *Các hành tinh quay xung quanh mặt trời theo các quỹ đạo hình elip mà mặt trời là một tiêu điểm.*

II. *Vector bán kính nối hành tinh với mặt trời sẽ quét các diện tích bằng nhau trong các khoảng thời gian bằng nhau.*

III. *Bình phương thời gian của toàn bộ một lần quay của hành tinh theo quỹ đạo của nó thì bằng lập phương của nửa trục chính của quỹ đạo đó.*

Thật thú vị, 1800 năm sau khi người Hy lạp phát triển *Lý thuyết về các thiết diện cônic* đã có một ứng dụng lớn làm sáng tỏ lý thuyết đó.

Kepler là một người đi tiên phong trong khảo sát phép tính vi tích phân. Để tính được diện tích nói đến trong định luật thứ hai của ông về chuyển động hành tinh, ông đã phải dựa vào một dạng thô sơ của phép tính tích phân. Trong cuốn *Stereometria doliorum vinorum* (*Hình học khối các thùng rượu vang*) của mình, ông cũng đã áp dụng cách lấy tích phân của thô sơ để tìm thể tích của 93 hình khối bằng cách xoay tròn các phần của các thiết diện cônic quanh một trục trong các mặt phẳng của chúng. Trong số các hình khối này có hình xuyến và hai hình khối khác ông gọi là *hình trái táo* và *hình quả chanh* nhận được bằng cách lần lượt cho quay một cung lớn và một cung nhỏ của một vòng tròn quanh dây trương có cung đó làm trục. Kepler quan tâm đến vấn đề này khi nhìn thấy một số phương pháp dùng để tính đo lường rượu trong thời đó quá thô sơ. Rất có thể Cavalieri khi tìm ra một phương pháp tinh vi cho phép tính vi phân gọi là *phương pháp các cái không chia được* đã chịu ảnh hưởng của công trình này của Kepler.

Kepler đã có những đóng góp đáng kể về chủ đề các hình đa diện. Dường như ông là người đầu tiên nhận ra một *đối lăng trụ* (có được từ một một hình lăng trụ bằng cách cho quay đáy trên trong mặt phẳng của nó sao cho các đỉnh của nó tương ứng với các cạnh đáy dưới rồi nối ziczăc các đỉnh hai đáy với nhau). Ông cũng phát hiện ra khối đa diện nội tiếp hình lập phương, hình khối 12 mặt dạng thoi, và khối 24 mặt dạng thoi. Khối đa diện thứ hai trong các khối trên trông giống như một tinh thể granat trong thiên nhiên. Trong số bốn khối đa diện hình sao đều có thể có thì hai do Kepler phát hiện còn hai do Louis Poinsot (1777 - 1859), một người đi trước trong lĩnh vực cơ học hình học, tìm ra vào năm 1809. Các đa diện hình sao Kepler - Poinsot là các mô hình không gian của các đa giác hình sao đều trong mặt phẳng. Kepler còn quan tâm đến bài toán phủ đầy mặt phẳng bằng các đa giác đều (không nhất thiết tất cả phải giống nhau) và phủ đầy không gian bằng các đa diện đều.

Kepler đã giải bài toán xác định loại cônic được xác định bởi một đỉnh cho trước, trục đi qua đỉnh đó và một tiếp tuyến tùy ý cùng tiếp điểm của nó, và ông cũng giới thiệu từ *tiêu điểm* (focus) vào hình học các cônic. Ông đã tính chu vi một elip có các nửa trục là a và b bằng cách dùng công thức $\pi(a+b)$. Ông cũng đề ra cái gọi là *nguyên lý xấp xỉ liên tục* mặc dù thừa nhận rằng ở vô cực trong mặt phẳng tồn tại những điểm lý tưởng nhất định và một đường thẳng lý tưởng có nhiều tính chất hơn của các điểm và đường thẳng thông thường. Vì vậy ông giải thích rằng một đường thẳng có thể xem như đóng tại vô cực, hai đường thẳng song song có thể xem như cắt nhau tại vô cực, và một parabol là một trường hợp tiến tới giới hạn của một elip hay một hypebol trong đó một trong các tiêu điểm đã tiến ra vô tận. Quan điểm này đã được mở rộng vào năm 1822 bởi nhà hình học Pháp Poncelet và là cơ sở của ý tưởng hình thành *Hình học xạ ảnh* sau này.

Công trình của Kepler thường là một sự pha trộn giữa những phỏng đoán huyền bí và đầy tưởng tưởng với một sự cảm nhận thực sự sâu sắc về chân lý khoa học. Ông qua đời vào năm 1630 khi trên đường đi lĩnh số tiền công trả cho công việc dài ngày mà ông đã làm.

5. Newton (1642 - 1727) - nhà thiên văn học đứng trên vai những người khổng lồ

Issac Newton sinh ở Woolsthorpe năm 1642 trùng vào ngày Thiên Chúa giáng sinh. Cha ông vốn là một nông dân và đã mất trước khi ông qua đời. Vì vậy ông sống ở nông thôn với mẹ và mãi đến năm 18 tuổi mới được vào học Trường Ba ngôi tại Cambridge. Tại đây ông đọc *Nguyên lý* của Euclid và thấy mọi vấn đề được trình bày trong đó quá hiển nhiên. Sau đó ông đọc *La géometrie* của Descartes thì thấy có cái gì đó khó hiểu. Ông còn đọc *Clavis* của Oughtred, các công trình của Kepler và Viète, *Arthmetica infinitorum* của Wallis. Từ việc đọc toán học ông chuyển sang tìm tòi nó và lúc 23 tuổi, ông chứng minh thành công công thức nhị thức tổng quát và phát minh ra phép toán vi phân. Ông còn quan tâm đến nhiều vấn đề về vật lý học, quang học và phát minh ra các nguyên lý cơ bản của lý thuyết động lực.

Do những thành kiến của giới khoa học quý tộc Anh, nhiều công trình quan trọng của ông chỉ được công bố nhiều năm kể từ khi tác giả khám phá ra chúng. Đó là một thiệt thòi không những cho bản thân ông mà còn cho nền toán học Anh đương thời. Tuy nhiên ông cũng được đặt vào những vị trí xứng đáng với tài năng và sự cống hiến không biết mệt mỏi của ông.

Năm 1696, ông được chỉ định làm Hiệu trưởng Trường đại học Mint và năm 1699 được phong danh hiệu Master (bậc thầy) của trường đại học ấy. Năm 1703 ông được bầu làm Chủ tịch Hội (Khoa học) Hoàng gia (Anh) và giữ cương vị đó cho tới lúc qua đời. Năm 1705 ông được phong tước hầu và thi hài được mai táng tại nhà thờ Westminaster.

Điều muốn nhấn mạnh ở đây là đúng như Newton đã từng tâm tâm sự: "*Sở dĩ tôi cao hơn Descartes là vì tôi biết đứng trên vai của các người khổng lồ*". Xin nêu hai ví dụ: Galileo đã đặt nền móng cho *bộ môn cơ học các vật thể rơi tự do và động lực học* nói chung, trên nền móng trên đó Newton đã xây dựng hoàn thiện môn khoa học này. Những định luật về chuyển động hành tinh của Kepler là các mốc lịch sử trong thiên văn học và toán học mà Isac Newton đã dựa trên đó để xây dựng *môn cơ học thiên thể hiện đại*.

Sau Newton, nhiều nhà bác học đã bắc thêm những chiếc cầu vĩ đại để nối Thiên văn học và Toán học, mà đỉnh cao là A. Estein (1879 - 1955). Nhưng đó lại là một câu chuyện thú vị sẽ kể trong một dịp khác.

6. Thay cho lời kết

"*Mọi lý thuyết đều là màu xám, chỉ cây đời mãi mãi xanh tươi*" (Gotte). Các nhà toán học Hy Lạp hiểu rất rõ nguyên lý này, do đó ngay từ khi khai sinh ra *Toán học suy lý*, họ luôn tìm cách gắn nó vào thực tiễn, mà *Thiên văn học* là một trong những mảnh đất màu mỡ đầu tiên. Các nhà toán học và thiên văn học sau này đã tiếp tục xuất sắc tinh thần đó cho đến ngày nay.

Thành Vinh, cuối Thu 2016

ĐỊNH LÝ JULIA ROBINSON…

(Tiếp theo trang 18)

Các bước tiếp theo

Rõ ràng công thức (3) không cho ta biết thứ tự của số nguyên tố nhận được từ nó. Phương pháp xây dựng đa thức mũ *R* được mô tả ở trên không cho ta phương pháp trực tiếp đưa vào chỉ số (số thứ tự) của số nguyên tố trong công thức (3). Bằng cách sử dụng các kỹ thuật phức tạp hơn nhiều các tác giả *Martin Davies*, *Hilary Putnam* và *Julia Robinson* năm 1961 đã chứng minh được một định lý rất mạnh, có hệ quả như sau:

Hệ quả. *Tồn tại đa thức mũ $P(x_0,...,x_k,n)$ sao cho với sự cố định giá trị của tham số n và với các giá trị tùy ý của các biến còn lại thì đa thức P sẽ nhận đúng một giá trị dương và giá trị đó chính là số nguyên tố thứ n.*

Năm 1970 *Yu. V. Matijasevic* (nhà toán học Nga) bằng cách sử dụng một kết quả khác của *Julia Robinson* đã xây dựng được phương trình Diophantine $M(a,b,c,z_1,...,z_m)=0$ (27)

mà nó là giải được khi và chỉ khi các tham số *a*, *b* và *c* có mối quan hệ $a=b^c$. Kết quả này cho phép ta bỏ đi trong phát biểu định lý ở trên từ "*mũ*", tức là nó cho phép ta xây dựng được một đa thức mà nó sẽ cho ta các số nguyên tố. Các độc giả quan tâm tới chủ đề này có thể xem bài viết "*Tập Diophantine*" của *Matijasevic* công bố trên Uspekhi Mat. Nauk 27

(1972), no. 5 [English translation in Russian Math. Surveys].

Các bài toán đề nghị

1. Chứng minh rằng trong các cấp số cộng 3, 7, 11,… và 5, 11, 17,… chứa vô số số nguyên tố.
2. Định lý *Wilson* cho rằng nếu *p* là số nguyên tố thì số $(p-1)!+1$ sẽ chia hết cho *p*. Kết quả này sẽ được sử dụng như thế nào để làm giảm đi số các chỉ số trong đa thức mũ *R* cho ta các số nguyên tố?
3. Hãy xây dựng đa thức mũ $S(x_0,...,x_k)$ mà nó sẽ cho ta tập một nửa các số nguyên tố sinh đôi, tức là nếu $S(x_0,...,x_k)>0$ thì cả hai số $S(x_0,...,x_k)-1$ và $S(x_0,...,x_k)+1$ đều là các số nguyên tố và ngược lại nếu $s-1$ và $s=1$ là các số nguyên tố thì $S(x_0,...,x_k)=s$ với các $x_0,...,x_k$ nào đó.
4. Hãy xây dựng đa thức mũ $T(q,x_1,...,x_m)$ sao cho:
   - Nếu *q* là số nguyên tố thì tồn tại các số $x_1,...,x_m$ sao cho $T(q,x_1,...,x_m)>0$.
   - Nếu *q* là số nguyên tố và $T(q,x_1,...,x_m)>0$ thì $T(q,x_1,...,x_m)>0$ là số nguyên tố tiếp sau số *q*.
   - Nếu *q* không phải là số nguyên tố thì ta luôn có $T(q,x_1,...,x_m)\le 0$.

Các hàm mũ đa thức đó sẽ cho "*Công thức của các số nguyên tố tiếp theo*".

Các bạn thân mến ! Bài báo kết thúc ở đây. Tòa soạn hy vọng sẽ nhận được chứng minh đầy đủ, chặt chẽ định lý Robinson từ các bạn yêu toán.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/483 (Lớp 6). Tìm tất cả các chữ số a, b, c sao cho các số $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$ đều là các số nguyên tố.

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T2/483 (Lớp 7). Cho tam giác XYZ vuông tại X ($XY < XZ$), kẻ XU vuông góc với YZ. Gọi P là trung điểm của YU. Lấy điểm K thuộc nửa mặt phẳng bờ YZ không chứa điểm X sao cho KZ vuông góc với XZ và $XY = 2KZ$. Qua Y kẻ đường thẳng d song song với XU, d cắt đường thẳng KP tại V. T là giao điểm của đường thẳng XP và đường thẳng d. Chứng minh rằng

$$\widehat{VTK} = \widehat{XKZ} + \widehat{VXY}.$$

TRẦN ANH TUẤN
(GV THCS Hải Hậu, Lý Nhân, Hà Nam)

Bài T3/483. Có ba người tới mua cừu nhà ông *An*:

Người thứ nhất đòi mua $\frac{1}{a}$ số đàn cừu của ông, người thứ hai đòi mua $\frac{1}{b}$ số đàn cừu của ông, người thứ ba đòi mua $\frac{1}{c}$ số đàn cừu của ông, sao cho thỏa mãn đồng thời 3 yếu tố sau:

1) $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $a < b < c$;

2) Số con cừu mà mỗi người mua được phải là một số nguyên;

3) Sau khi bán xong, ông *An* còn dư lại 1 con cừu.

Hỏi đàn cừu của ông *An* có thể có mấy con? (tìm tất cả các đáp án có thể).

HOÀNG THẾ TỚI
(GV THPT Tản Đà, Thanh Thủy, Phú Thọ, Phú Thọ)

Bài T4/483. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên (O) lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn OB lấy điểm E (E khác O, E khác B). CE cắt lại đường tròn (O) tại D. Qua A kẻ đường thẳng song song với BD, cắt đường thẳng BC tại I. Đường thẳng OI và đường thẳng CE cắt nhau tại F. Chứng minh FA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, TP. Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/483. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$ và $abc \geq -4$. Chứng minh rằng $3(abc+4) \geq 5(ab+bc+ca)$.

NGUYỄN VĂN HUYỆN
(SV ĐH Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/483. Giải và biện luận (theo tham số a) hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x(y^2+a^2) = y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2) = z(z^2+9a^2) \\ 2z(x^2+a^2) = x(x^2+9a^2) \end{cases}.$$

NGUYỄN DUY THÁI SƠN
(GV khoa Toán ĐHSP Đà Nẵng, TP. Đà Nẵng)

Bài T7/483. Giả sử $x = \frac{2013}{2015}$ là một nghiệm của đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Hỏi tổng các hệ số của $f(x)$ có thể bằng 2017 được không?

ĐỖ CAO TRÍ
(Huyện Long Điền, tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T8/483. Cho ba đường tròn $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$, $(O_3;R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại ba điểm A, B, C. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $r \leq \frac{R_1+R_2+R_3}{6\sqrt{3}}$.

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/483. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2-2z^2+2xy+yz+zx \leq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4+y^4}{z^4} + \frac{y^4+z^4}{x^4} + \frac{z^4+x^4}{y^4}.$$

LÊ BÁ VIỆT HÙNG
(Phòng GDTrH, Sở GD&ĐT Phú Thọ)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/483. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{a+b}{c+d}\left(\frac{a+c}{a+d}+\frac{b+d}{b+c}\right)$$

trong đó a, b, c, d là các số thực trong đoạn $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T11/483. Cho $R(t)$ là đa thức có bậc 2017. Chứng minh rằng tồn tại vô số các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P\left((R^{2017}(t)+R(t)+1)^2-2\right)=P^2\left(R^{2017}(t)+R(t)+1\right)-2.$$

Hãy tìm một hệ thức lên hệ giữa các đa thức $P(x)$ đó.

NGUYỄN THÀNH NHÂN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương)

Bài T12/483. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với AB, BC và CA thứ tự tại K, L và M. Đường thẳng t đi qua B khác với AB và BC cắt các đường thẳng MK và ML thứ tự tại R và S. Chứng minh góc $\widehat{RIS}$ nhọn.

LÊ VIẾT ÂN
(Nhà 15, xóm 2, thôn Ngọc Anh, Phú Thượng, Thừa Thiên Huế)

Bài L1/483. Trên mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp dao động đồng pha, phát đồng thời sóng có bước sóng bằng 1,2 cm. Hai điểm C và D thuộc cùng một elip trên mặt chất lỏng nhận A, B là hai tiêu điểm. Biết hiệu số khoảng cách từ hai nguồn tới C và D lần lượt là $AC-BC=4{,}8\,\text{cm}$ và $AD-BD=0{,}4\,\text{cm}$. Coi biên độ sóng do mỗi nguồn gửi đến mỗi điểm trên elip nói trên đều bằng nhau. Tại thời điểm t nào đó, li độ của điểm C là 1,5 mm thì li độ của điểm D là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

Bài L2/483. Đặt điện áp $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$ (V) (trong đó U không đổi, ω có thể thay đổi được) vào hai đầu một đoạn mạch AB gồm điện trở thuần R, cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C, mắc nối tiếp. Cho biết $L = CR^2$. Thay đổi tần số góc của điện áp người ta tìm được hai giá trị là $\omega_1 = 50\pi$ (rad/s) và $\omega_2 = 80\pi$ (rad/s) ứng với hệ số công suất của đoạn mạch có giá trị bằng nhau. Với hai giá trị bằng nhau đó hãy xác định hệ số công suất của đoạn mạch.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/483 (For 6th grade). Find all single digit numbers a, b, and c such that the numbers $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, and $\overline{cba}$ are prime numbers.

Problem T2/483 (For 7th grade). Given a right triangle XYZ with the right angle X ($XY < XZ$). Draw XU perpendicular to YZ. Let P be the midpoint of YU. Choose K on the half plane determined by YZ which does not contain X such that KZ is perpendicular to XZ and $XY = 2KZ$. The line d which passes through Y and is parallel to XU intersects KP at V. Let T be the intersection of XP and d. Prove that $\widehat{VTK}=\widehat{XKZ}+\widehat{VXY}$.

Problem T3/483. There are 3 people wanting to buy sheeps from Mr. An.

The first one wants to buy $\frac{1}{a}$ of the herd, the second one wants to buy $\frac{1}{b}$ of the herd, and the third one wants to buy $\frac{1}{c}$ of the herd and it happens that

1) $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ and $a<b<c$;

2) the numbers of sheeps each person wants to buy are positive integers;

3) after shelling, Mr. An still has exactly one sheep left.

What are the possibile numbers of sheeps Mr. An has?

Problem T4/483. Given a circle (O) with a diameter AB. On (O) choose a point C such that $CA < CB$. On the open line segment OB choose E. CE intersect (O) at D. The line which goes through A and is parallel to BD intersects BC at I. The lines OI and CE meet at F. Prove that FA is a tangent to the circle (O).

Problem T5/483. Given real numbers a, b, c satisfying $a+b+c=3$ and $abc\ge -4$. Prove that $3(abc+4)\ge 5(ab+bc+ca)$.

(Xem tiếp trang 38)

Bài T1/479. *Sắp xếp các số từ 1 đến 20 vào một đường tròn sao cho tổng của hai số liền kề là một số nguyên tố.*

Lời giải. Gọi tổng hai số liền kề tùy ý a, b là $a + b = c$ thì $c < 40$. Theo cách lập Sàng *Eratosthenes* với ít hơn 40 số thì ta chỉ cần chọn số nguyên tố c sao cho c không là bội của các số nguyên tố 2, 3, 5 là đủ, vì $5^2 < 40 < 7^2$. Từ đó suy ra cách chọn a và b như sau:

• Trong hai số a và b phải có một số chẵn và một số lẻ (để tổng $a + b$ không là bội của 2);

• Tổng hai số a và b không có tận cùng là 5 (để tổng $a + b$ không là bội của 5);

• Tổng các chữ số của a và b không là bội 3 (để tổng $a + b$ không là bội của 3).

Có nhiều cách chọn như thế. Chẳng hạn, *Cách* 1 của tác giả ra đề :

9 – 20 – 11 – 18 – 13 – 16 – 15 – 14 – 17 – 12 – 19 – 10 – 1 – 2 – 3 – 8 – 5 – 6 – 7 – 4 – 9.

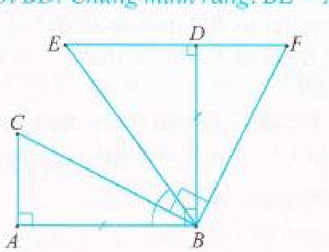
Cách 2 của bạn *Tuấn*:

3 – 20 – 11 – 18 – 19 – 12 – 17 – 14 – 15 – 16 – 13 – 10 – 9 – 8 – 5 – 6 – 7 – 4 – 1 – 2 – 3. ❐

➤***Nhận xét.*** Bạn *Trịnh Đức Tuấn*, 6A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa** có đáp án đúng.

VIỆT HẢI

Bài T2/479. *Cho tam giác ABC vuông tại A,* $\widehat{ABC} < 45^0$. *Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB có chứa điểm C lấy các điểm D và E sao cho: BD = BA và* $\widehat{DBA} = 90^0$; $\widehat{EBC} = \widehat{CBA}$ *và ED vuông góc với BD. Chứng minh rằng: BE = AC + DE.*



Lời giải. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng DE tại F. Chú ý rằng với giả thiết

$\widehat{ABC} < 45^0$ thì $\widehat{ABC} < \widehat{ABE} < \widehat{ABD} = 90^0 < \widehat{ABF}$. Do đó thứ tự các tia BA, BC, BD, BF xác định như trên hình vẽ, D nằm giữa E và F. Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{DBF}$ (cùng phụ với $\widehat{CBD}$).

Suy ra $\Delta ABC = \Delta DBF$ (cạnh góc vuông – góc nhọn).

Từ đó có $AC = DF$ (1) và $\widehat{ACB} = \widehat{DFB}$ (2)

Lại có AC // BD (cùng vuông góc với AB) nên $\widehat{ACB} = \widehat{CBD} = \widehat{CBE} + \widehat{EBD}$. Mà $\widehat{EBC} = \widehat{ABC} = \widehat{DBF}$

nên $\widehat{ACB} = \widehat{DBF} + \widehat{EBD} = \widehat{EBF}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{EFB} = \widehat{EBF}$, tam giác EBF cân tại E. Suy ra $BE = EF = ED + DF = DE + AC$. ❐

➤***Nhận xét.*** Hầu hết các bạn đều kẻ thêm hình phụ nhằm tạo ra một đoạn thẳng có độ dài bằng tổng AC và DE, rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng BE. Tuy nhiên, chỉ duy nhất lời giải của bạn *Đỗ Lê Trung*, 6A4, THCS Quang Trung, **Thanh Hóa** có chú ý đến giả thiết $\widehat{ABC} < 45^0$ để lập luận về vị trí của các tia BA, BC, BD, BF. Nếu bỏ qua giả thiết này, các biến đổi cộng góc, cộng độ dài và kết luận của bài toán có thể không còn đúng.

NGUYỄN THỊ QUỲNH ANH

Bài T3/479. *Cho x và y là hai số thực thỏa mãn điều kiện* $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P = x^4 + y^4 + (x+y)^4$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} P &= x^4 + y^4 + (x+y)^4 \\ &= x^4 + y^4 + (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) \\ &= 2(x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 2x^2y^2) \\ &= 2(x^2 + xy + y^2)^2. \end{aligned}$$

Bây giờ ta tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $Q = x^2 + xy + y^2$ như sau:

Cách 1. Do $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ nên

$$Q = \frac{(x^2 + 2xy + 2y^2) + x^2}{2} = \frac{1 + x^2}{2} \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Lại có $Q = \dfrac{3(x^2 + 2xy + 2y^2) - (x^2 + 4xy + 4y^2)}{2}$

$$= \frac{3 - (x + 2y)^2}{2} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$Q=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=0\\x^2+2xy+2y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2};\,y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\x=-\sqrt{2};\,y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{2}\le Q\le\frac{3}{2}$, suy ra

$$2.\left(\frac{1}{2}\right)^2\le P\le 2.\left(\frac{3}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le P\le\frac{9}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $x=0,\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; giá trị lớn nhất của P là $\frac{9}{2}$ khi $x=\sqrt{2};\,y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x=-\sqrt{2};\,y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

***Cách* 2.** Nếu $y=0$ thì từ giả thiết $x^2+2xy+2y^2=1$ suy ra $x^2=1$, nên $Q=1$.

Nếu $y\ne 0$, đặt $t=\frac{x}{y}$ thì

$$Q=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+2y^2}=\frac{t^2+t+1}{t^2+2t+2}.$$

$$\Leftrightarrow(Q-1)t^2+(2Q-1)t+2Q-1=0\qquad(*)$$

Nếu $Q=1$ thì $t=-1$.

Nếu $Q\ne 1$ thì (*) là phương trình bậc hai (ẩn t) nên để (*) có nghiệm thì $\Delta=(2Q-1)^2-4(Q-1)(2Q-1)\ge 0$

$$\Leftrightarrow(2Q-1)(3-2Q)\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le Q\le\frac{3}{2}.$$

$$Q=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=0;\ Q=\frac{3}{2}\Leftrightarrow t=-2.$$

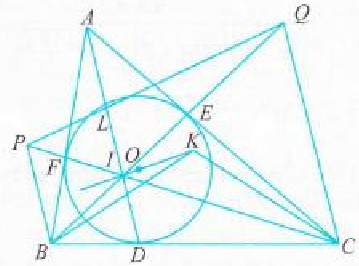
Từ đó ta cũng tìm được giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của P như cách 1. ❐

➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa**: *Phạm Anh Đức, Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh**: *Hoàng Quốc Khánh*, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ; **Vĩnh Long**: *Nguyễn Võ Thuần*, 9A1, THCS Thị trấn Tam Bình; **Phú Yên**: *Đàm Ngọc Hiếu*, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa; **Quảng Ngãi**: *Lê Tuấn Kiệt*, 8C, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/479. *Cho tam giác ABC có AB < AC và ngoại tiếp đường tròn (O). Cạnh BC tiếp xúc đường tròn (O) ở D. Kẻ OI vuông góc với đoạn thẳng AD tại I. Tia IO cắt đường trung trực của đoạn thẳng BC ở K. Chứng minh tứ giác BIKC là tứ giác nội tiếp.*

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) và CA, AB. Dễ thấy A, E, O, I, F cùng thuộc đường tròn đường kính AO, ta có $\widehat{AIF}=\widehat{AEF}=\widehat{AFE}=\widehat{AIE}$.

Suy ra IA là phân giác $\widehat{EIF}$.

Qua B, C kẻ các đường thẳng song song với AD, tương ứng cắt các tia IF, IE tại P, Q. Gọi L là giao điểm của AD và PQ. Ta có

$$\frac{IP}{IQ}=\frac{LP}{LQ}=\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CE}=\frac{BF}{FA}.\frac{EA}{EC}=\frac{BP}{AI}.\frac{AI}{CQ}=\frac{BP}{CQ}.$$

Mà $\widehat{BPI}=\widehat{PIA}=\widehat{AIE}=\widehat{EQC}$,

nên $\Delta IPB\backsim\Delta IQC$ (c.g.c). Suy ra $\frac{IB}{IC}=\frac{BP}{CQ}=\frac{DB}{DC}$.

Do đó $\widehat{BID}=\widehat{CID}$. Suy ra $\widehat{xIB}=\widehat{CIK}$, trong đó tia Ix là tia đối của tia IK.

Gọi K' là giao điểm thứ hai của IO với đường tròn (BIC). Ta có $\widehat{K'BC}=\widehat{K'IC}=\widehat{xIB}=\widehat{K'CB}$.

Suy ra $\widehat{K'BC}=\widehat{K'CB}$ nên K' thuộc trung trực của BC. Do đó $K'\equiv K$. Vậy tứ giác $BIKC$ nội tiếp. ❐

➢***Nhận xét.*** Tất cả các bạn tham gia giải bài toán này đều cho lời giải không tốt.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/479. *Giải phương trình*

$$\frac{\sqrt{x^2+28x+4}}{x+2}+8=\frac{x+4}{\sqrt{x-1}}+2x\qquad(1)$$

Lời giải. ĐK: $x>1$.

***Cách* 1.** Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x-1+5}{\sqrt{x-1}}+2x-\frac{\sqrt{x^2+28x+4}}{x+2}-8=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-1}-2+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)+2\left(x-2\sqrt{x-1}\right)+$$

$$+\left(2-\frac{\sqrt{x^2+28x+4}}{x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt[4]{x-1}-\frac{1}{\sqrt[4]{x-1}}\right)^2+2\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+$$

$$+\frac{3(x-2)^2}{(x+2)\left[2(x+2)+\sqrt{x^2+28x+4}\right]}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}-1=0\\ \sqrt[4]{x-1}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-1}}=0\\ x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn ĐK).}$$

Vậy PT(1) có nghiệm duy nhất $x=2$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\text{VP}(1)\ge \frac{x+4}{\frac{x-1+1}{2}}+2x=\frac{2(x+4)}{x}+2x$$

$$=2+\frac{8}{x}+2x\ge 2+2\sqrt{\frac{8}{x}.2x}=10 \qquad (2)$$

$$\text{VT}(1)=\frac{\sqrt{4(x+2)^2-3(x-2)^2}}{x+2}+8$$

$$\le \frac{\sqrt{4(x+2)^2}}{x+2}+8=10 \qquad (3)$$

Vậy để (1) xảy ra thì dấu đẳng thức trong (2) và (3) cùng xảy ra $\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy PT(1) có nghiệm duy nhất $x=2$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Cách 1 dùng biến đổi tương đương đưa PT về dạng các tổng bình phương để tìm nghiệm. Cách 2 sử dụng BĐT Cauchy đánh giá hai vế, có lời giải tương đối gọn. Các bạn tham gia đều giải bài này theo cách 2. Các bạn có lời giải tốt là: **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** *Phạm Anh Đức*, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Phú*, 9A1, THCS Nghi Hương, Cửa Lò; *Nguyễn Thị Linh Đan*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương. **Vĩnh Long:** *Nguyễn Võ Thuấn*, 9A1, THCS Thị trấn Tam Bình; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Phúc Tăng*, 9A10, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/479. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{3}\le\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}-a-b-c\le 2.$$

Lời giải. Trong tam giác ta có đẳng thức quen thuộc $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$. Như vậy nếu chọn A, B là các góc nhọn thỏa mãn $a=\cot A, b=\cot B$ thì $c=\cot C$ với $C=\pi-(A+B)$.

Ta có:

$$P=\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2}-a-b-c$$

$$=\sqrt{1+\cot^2 A}+\sqrt{1+\cot^2 B}+\sqrt{1+\cot^2 C}-\cot A-\cot B-\cot C$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\cot A-\cot B-\cot C$$

$$=\frac{1+\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}+\frac{1+\tan^2\frac{B}{2}}{2\tan\frac{B}{2}}+\frac{1+\tan^2\frac{C}{2}}{2\tan\frac{C}{2}}-$$

$$-\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{2\tan\frac{A}{2}}-\frac{1-\tan^2\frac{B}{2}}{2\tan\frac{B}{2}}-\frac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{2\tan\frac{C}{2}}$$

$$=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}.$$

Sử dụng đẳng thức quen thuộc

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1.$ Ta có

$$P^2=\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\ge 3\left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right)=3$$

và suy ra $P\ge\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác

$$P^2=\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2$$

$$=\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\le P+2$$

do $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}\le 1$. Chuyển vế, ta có $(P+1)(P-2)\le 0\Rightarrow P\le 2$. Đẳng thức chỉ xảy ra khi trong $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}$ có đúng hai giá trị 1 và một giá trị 0 là điều không đạt tới. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Bài toán này có khá nhiều bạn gửi lời giải và có nhiều lời giải khác nhau. Một số bạn dùng công cụ lượng giác quên biện luận tại sao mình có thể chọn các góc của một tam giác sao cho giá trị lượng giác của nó là *a b, c*.

Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Long An:** *Phan Quý Lộc*, lớp 10T1, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm TP. Vĩnh Long; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10 A1, THPT Lạc Long Quân TP. Bến Tre, *Phan Thanh Đại Dương*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Quảng Trị:** *Võ Thanh Long*, 10T THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống 1; **Huế:** *Lê Cẩm Thanh*

Hà, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Sơn*, 10 A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh ; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/479. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^8 = 21y + 13 \\ \left(x^3+y^3\right)^3\left(x^4+y^4\right)^4 = \dfrac{(x+y)^{25}}{2^{18}} \end{cases}.$$

Lời giải. Phương trình thứ hai trong hệ tương đương với:

$$(x+y)^3\left(\left(x^2-xy+y^2\right)^3\left(x^4+y^4\right)^4 - \frac{(x+y)^{22}}{2^{18}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y=0 & (1) \\ \left(x^2-xy+y^2\right)^3\left(x^4+y^4\right)^4 = \dfrac{(x+y)^{22}}{2^{18}} & (2) \end{array}\right.$$

• TH1. $x+y=0$.

Thay $y=-x$ vào phương trình thứ nhất trong đầu bài, ta được: $x^8+21x-13=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-1\right)\left(x^6-x^5+2x^4-3x^3+5x^2-8x+13\right)=0$$

Ta có:

$$x^6-x^5+2x^4-3x^3+5x^2-8x+13$$
$$= x^4\left(x^2-x+1\right)+x^2\left(x^2-3x+3\right)+2x^2-8x+13>0$$

(vì $x^2-x+1>0;\ x^2-3x+3>0;\ 2x^2-8x+13>0$)

nên phương trình tương đương với

$$x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}.$$

Ta được $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt5}{2};\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right),\left(\dfrac{-1+\sqrt5}{2};\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)$.

• TH2. Xét phương trình (2). Ta có:

$$4\left(x^2-xy+y^2\right)-(x+y)^2 = 3(x-y)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow x^2-xy+y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x^2-xy+y^2\right)^3 \ge \frac{(x+y)^6}{2^6} \quad (3)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}, \text{ ta được}$$

$$x^4+y^4 \ge \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2} \ge \frac{(x+y)^4}{8}$$

$$\Rightarrow \left(x^4+y^4\right)^4 \ge \frac{(x+y)^{16}}{2^{12}} \quad (4)$$

$$\left(x^2-xy+y^2\right)^3\left(x^4+y^4\right)^4 \ge \frac{(x+y)^{22}}{2^{18}} \quad (5)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y$.

Phương trình (2) tương đương với dấu đẳng thức trong (5) xảy ra. Nghĩa là (2) $\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong đầu bài, ta được

$$x^8-21x-13=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x^6+x^5+2x^4+3x^3+5x^2+8x+13\right)=0.$$

Ta có:

$$x^6+x^5+2x^4+3x^3+5x^2+8x+13$$
$$= x^4\left(x^2+x+1\right)+x^2\left(x^2+3x+3\right)+2x^2+8x+13>0$$

(vì $x^2+x+1>0;\ x^2+3x+3>0;\ 2x^2+8x+13>0$)

nên phương trình tương đương với

$$x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt5}{2}.$$

Ta được $(x;y)=\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2};\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2};\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình trong đầu bài có bốn nghiệm là

$$(x;y)=\left(\frac{-1-\sqrt5}{2};\frac{1+\sqrt5}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt5}{2};\frac{1-\sqrt5}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1-\sqrt5}{2};\frac{1-\sqrt5}{2}\right),\left(\frac{1+\sqrt5}{2};\frac{1+\sqrt5}{2}\right). \square$$

➤ ***Nhận xét.*** Một số bạn chứng minh

$\left(x^3+y^3\right)^3\left(x^4+y^4\right)^4 \ge \dfrac{(x+y)^{25}}{2^{18}}$ (6) và cho rằng phương trình thứ hai trong hệ tương đương với $x=y$ (thiếu trường hợp $x+y=0$).

Lưu ý, bất đẳng thức (6) chỉ đúng khi $x+y\ge0$. Các bạn tự kết luận bất đẳng thức trong trường hợp $x+y<0$.

Khi giải các phương trình $x^8+21x-13=0;\ x^8-21x-13=0$, một số bạn sử dụng mệnh đề :

Một hàm số liên tục $f(x)$ mà phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất thì phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm. Tuy nhiên việc chỉ ra hai nghiệm của phương trình là không tự nhiên.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Quảng Bình**: *Hồ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Trị**: *Võ Thanh Long*, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Nghệ An**: *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên Đại Học Vinh; **Sóc**

Trăng: *Lâm Quốc Bảo*, 11A7, THPT Hoàng Diệu, TP. Sóc Trăng; **Vĩnh Long**: *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Bình Phước**: *Nguyễn Hoàng Đức*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Long An**: *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Bến Tre**: *Phan Thanh Đại Dương*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Hà Nội**: *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định**: *Nguyễn Hùng Sơn*, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh; **Thanh Hóa**: *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống I, Nông Cống.

NGUYỄN ANH DŨNG

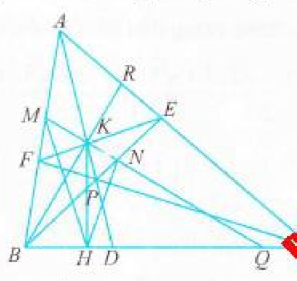
Bài T8/479. *Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong tam giác. E, F theo thứ tự là giao điểm của BP, CP và AC, AB. K là giao điểm của AP và EF. H là hình chiếu vuông góc của K trên BC. Điểm M thuộc đoạn AF. N là giao điểm của MK và PE. Chứng minh rằng* $\widehat{KHM} = \widehat{KHN}$.

Lời giải. Giả sử $R = BK \cap AC$. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $MN \parallel BC$.

Vì AP, BR, EF đồng quy tại K, nên $(AERC) = -1$ (hàng điểm điều hoà cơ bản) $\Rightarrow B(AERC) = -1$, từ đó kết hợp với $MN \parallel BC$ ta thấy K là trung điểm của MN. Lại do $HK \perp MN$, suy ra ΔHMN cân tại H. Do đó $\widehat{KHM} = \widehat{KHN}$.

Trường hợp 2. MN không song song với BC (hình vẽ)



Gọi Q là giao điểm của MN với BC. Từ $(AERC) = -1$ $\Rightarrow B(AERC) = -1$. Xét phép chiếu xuyên tâm B lên đường thẳng MQ ta được $(MNKQ) = -1$, dẫn đến $H(MNKQ) = -1$, kết hợp với $HK \perp HQ$, suy ra HK, HQ tương ứng là đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của $\widehat{MHN}$, do vậy $\widehat{KHM} = \widehat{KHN}$ (đpcm). ❒

➢***Nhận xét.*** Hầu hết các lời giải gửi về Toà soạn đều sử dụng *tính chất của chùm điều hoà* để giải bài toán này. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt: **Lào Cai:** *Trần Thu Nga*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Khánh*, 10 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Ánh*, 10A1, *Trần Minh Hiếu*, 11T2, *Nguyễn Thanh Huyền*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Hoàng Minh Đức*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Đặng Thị Trà My*, *Đàm Thị Xuân Ý*, 10/1, *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ, *Lê Hà Khiêm*, 10T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Sóc Trăng:** *Huỳnh Gia Bảo*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai; **Bình Phước:** *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A; THPT chuyên Quang Trung; **An Giang:** *Nguyễn Minh Uyên*, 10T1, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu; **Bến Tre:** *Dương Lê Hoàng Hiệp*, *Phan Thanh Đại Dương*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Long An:** *Phan Quý Lộc*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/479. *Với* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *là một song ánh. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d sao cho* $a < b < c < d$ *và* $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$.

Lời giải. Với số nguyên dương n bất kì ta kí hiệu $m = g(n)$ là số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn $f(m) > f(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (tồn tại số nguyên dương m như thế do f là toàn ánh).

Lấy a là số nguyên dương bất kì, $b = g(a)$, $c = g(b)$.

Ta có $f(a) < f(b) < f(c)$. Suy ra $f(b) + f(c) - f(a) > f(c)$.

Lại do f là toàn ánh, tồn tại $d \in \mathbb{N}^*$ mà

$$f(d) = f(b) + f(c) - f(a).$$

Chú ý $f(d) > f(c)$ và $c = g(b) \Rightarrow d > c$.

Như vậy ta có $a < b < c < d$ và $f(a) + f(d) = f(b) + f(c)$. ❒

➢***Nhận xét.*** Trong chứng minh trên chỉ có giả thiết f là toàn ánh được sử dụng. Hoan nghênh các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Sơn*, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh; *Trần Minh Hiếu*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Minh Tuệ*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Phú Yên:** *Lê Thành Lâm*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Sóc Trăng:** *Lâm Quốc Bảo*, 11A1, THPT Hoàng Diệu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/479. *Cho dãy* (u_n) *các số nguyên dương thỏa mãn* $0 \le u_{m+n} - u_m - u_n \le 2$ *với mọi* $m, n \ge 1$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số thực dương a_1, a_2 *sao cho* $[a_1 n] + [a_2 n] - 1 \le u_n \le [a_1 n] + [a_2 n] + 1$ *với mọi* $n \le 2017$.

(Ở đây kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Lời giải. (Của bạn *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**)

Trước hết ta chứng minh với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$mu_n < n(u_m + 2) \qquad (1)$$

Chứng minh bằng quy nạp theo $m + n$.

Với $m + n = 2$, khi đó $m = n = 1$, (1) trở thành $u_1 < u_1 + 2$, ta thấy (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với mọi $m + n$ mà $2 \le m + n < k$. Ta chứng minh (1) đúng với $m + n = k$. Thật vậy

• Nếu $m = n$ thì (1) $\Leftrightarrow mu_m < m(u_m + 2)$, BĐT đúng.

• Nếu $m > n$: Xét cặp số $(m - n, n)$ ta có

$$m - n + n = m < m + n = k.$$

Do đó theo giả thiết quy nạp $(m - n)u_n < n(u_{m-n} + 2)$.

Mặt khác từ điều kiện đề bài $u_n + u_{m-n} \le u_m$

$\Rightarrow n(u_n + u_{m-n}) \le nu_m$. Từ đó

$$(m - n)u_n + n(u_n + u_{m-n}) < n(u_{m-n} + 2) + nu_m$$

$\Leftrightarrow mu_n < n(u_m + 2)$.

• Nếu $m < n$: Xét cặp số $(m, n - m)$ ta có

$m + n - m = n < m + n = k$. Do đó theo giả thiết quy nạp $mu_{n-m} < (n - m)(u_m + 2)$.

Mặt khác, từ điều kiện đề bài $u_n \le u_{n-m} + u_m + 2$

$\Rightarrow mu_n \le m(u_{n-m} + u_m + 2)$. Thành thử

$mu_{n-m} + mu_n < (n - m)(u_m + 2) + m(u_{n-m} + u_m + 2)$

$\Leftrightarrow mu_n < n(u_m + 2)$. Vậy (1) được chứng minh.

Trở lại bài toán. Từ (1) suy ra $\dfrac{u_n}{n} < \dfrac{u_m + 2}{m}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $K = \max\limits_{1 \le n \le 2017}\left(\dfrac{u_n}{n} - 1\right) = \dfrac{u_p}{p} - 1$;

$$L = \min\limits_{1 \le n \le 2017}\left(\dfrac{u_n + 2}{n} - 1\right) = \dfrac{u_q + 2}{q} - 1.$$

Do (1) có $\dfrac{u_p}{p} < \dfrac{u_q + 2}{q} \Rightarrow K < L$.

Do $u_1 \ge 1$ nên $K \ge \dfrac{u_1}{1} - 1 \ge 0$. Vậy $0 \le K < L$.

Chọn $a_1 = 1$ và $a_2 \in (K, L)$, $a_2 \in \mathbb{R}$.

Với mọi $1 \le n \le 2017$, ta có:

• $a_2 n < Ln \le \left(\dfrac{u_n + 2}{n} - 1\right)n = u_n + 2 - n$, suy ra

$[a_2 n] \le u_n - n + 1$. Do đó

$[a_1 n] + [a_2 n] - 1 = n - 1 + [a_2 n] \le n - 1 + u_n - n + 1 = u_n$.

• $a_2 n > Kn \ge \left(\dfrac{u_n}{n} - 1\right)n = u_n - n \Rightarrow [a_2 n] \ge u_n - n$

(do $u_n - n \in \mathbb{Z}$ và $a_2 n > u_n - n$). Vậy

$[a_1 n] + [a_2 n] + 1 = n + 1 + [a_2 n] \ge n + 1 + u_n - n = u_n + 1 > u_n$.

Bài toán đã được chứng minh xong. ❒

➢***Nhận xét.*** Chỉ có hai bạn tham gia giải bài toán này và chỉ duy nhất bạn *Phương* có lời giải đúng và hoàn chỉnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/479. *Tìm tất cả các hàm số f xác định và liên tục trên khoảng $(-2016; +\infty)$ sao cho*

$$f(x + 2016) = f\left(\frac{x + 2017}{x + 2018}\right) + \frac{x^2 + 4033x + 4066271}{x + 2018}, \forall x > -2016.$$

Lời giải. Viết lại biểu thức của giả thiết đã cho:

$$f(x + 2016) = f\left(\frac{x + 2017}{x + 2018}\right) + \frac{x^2 + 4033x + 2016.2017 - 1}{x + 2018}$$

Đặt $t = x + 2016$ với $x > -2016$, khi đó $t > 0$ và ta có:

$$f(t) = f\left(\frac{t+1}{t+2}\right) + \frac{t^2 + t - 1}{t + 2} = f\left(\frac{t+1}{t+2}\right) - \frac{t+1}{t+2} + t.$$

$$\Rightarrow f(t) - t = f\left(\frac{t+1}{t+2}\right) - \frac{t+1}{t+2}, \forall t > 0 \qquad (1)$$

Đặt $g(t) = f(t) - t \Rightarrow g\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right) = f\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right) - \dfrac{t+1}{t+2}$.

Từ (1) ta có: $g(t) = g\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right), \forall t \in (0; +\infty)$.

Chọn $a > 0$ tùy ý, ta xây dựng dãy số (x_n) như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_n + 2}, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Khi đó $g(a) = g(x_1) = g(x_2) = \ldots = g(x_{n+1}) = \ldots$

Trước tiên ta chứng minh dãy số trên có giới hạn. Thật vậy, giả sử $b > 0$ thỏa mãn

$$b = \frac{b+1}{b+2} \Rightarrow b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vì $b > 0, x_n > 0, \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ nên ta có:

$$0 \le |x_{n+1} - b| = \left|\frac{x_n + 1}{x_n + 2} - \frac{b+1}{b+2}\right| = \left|\frac{x_n - b}{(x_n+2)(b+2)}\right|$$

$$\le \frac{1}{4}|x_n - b| \le \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_{n-1} - b| \le \ldots \le \left(\frac{1}{4}\right)^n |x_1 - b|.$$

Theo định lý kẹp suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - b| = 0 \Rightarrow \lim x_n = b$.

Vì hàm $f(x)$ liên tục trên $(-2016; +\infty)$ nên hàm $g(t)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Ta có

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g(a) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Như vậy, với mọi $a > 0$ ta luôn có

$$g(a) = g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow g(t) = c, \forall t \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow f(t) = t + c, \forall t \in (0; +\infty).$$

Thử lại, ta thấy hàm số cần tìm là $f(x) = x + c$, $\forall x \in (-2016; +\infty)$, c là hằng số tuỳ ý. ❒

➢***Nhận xét.*** 1) Đề bài cần sửa: f xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ thành f xác định và liên tục trên $(-2016; +\infty)$ (vì nếu $x \in (0; +\infty)$ thì $t > 2016$ và g không xác định tại $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$).

2) Biến đổi về đẳng thức (1) là mấu chốt lời giải của bài toán. Trong các bài gửi về có một bạn giải sai, một bạn có lời giải không chặt chẽ. Các bạn có lời giải tương đối tốt là: **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Bình Phước:** *Nguyễn Lê Phi Long*, 11T3, THPT chuyên Bình Long – Bình Phước.

NHƯ HOÀNG

Bài T12/479. *Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O). Một điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn và có AB < AC. D là một điểm trên cạnh AC sao cho AB = AD. BD cắt đường tròn (O) tại điểm E khác B. Hình chiếu vuông góc của E trên AC là H, hình chiếu vuông góc của D trên AE là M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH cắt đường tròn (O) tại điểm K. Điểm N là hình chiếu vuông góc của điểm K trên đường thẳng AB.*

a) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm I của BD.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH cắt nhau tại P và Q. Chứng minh rằng trung điểm đoạn thẳng PQ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi A thay đổi trên đường tròn (O).

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp. Điểm P thuộc (O). H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của P trên BC, CA, AB. Khi đó H, K, L thẳng hàng.*

Bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày cách chứng minh ở đây. Trở lại giải bài toán T12/479.

a) Gọi K' là giao điểm của DM và EH.

Vì $K'M \equiv DM \perp AE; AH \equiv AC \perp K'E$

nên $BD \equiv LE \perp AK'$ và K' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH.

Vì $AB = AD$ và $BD \equiv EB \perp AK'$ và chú ý rằng $AC \perp EH \equiv EK'$ nên ta có

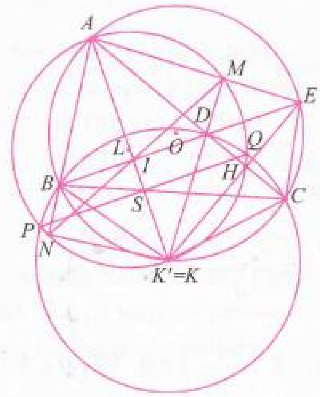
$$(AB, AK') \equiv (AK', AC) \equiv (EB, EK') (\bmod \pi).$$

Do đó K' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Nói cách khác K' thuộc (O). Vậy K' trùng K.

Vì $AB = AD$ và $BD \equiv EB \perp AK$ nên

$$KI \equiv KA \perp BD \equiv BE.$$

Từ đó, chú ý rằng $KN \perp BA; KM \perp AE$, theo bổ đề trên, MN đi qua I.



b) Gọi L là trung điểm của AK. Vì $\widehat{AMK} = \widehat{AHK} = 90^0$ nên L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH, kí kiệu là (L). Vì $AB = AD$ và $BD \perp AK$ nên

$(EK, ED) \equiv (EK, EB) \equiv (AK, AB) \equiv (AC, AK) \equiv (EC, EK) (\bmod \pi)$.

Kết hợp với $EK \perp DC$, suy ra EK là trung trực của DC. Từ đó, chú ý rằng AK là trung trực của BD, suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, kí hiệu là (K).

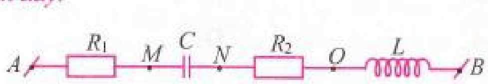
Dễ thấy AK, BC, PQ theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (L), (O); (O), (K); (K), (L).

Do đó AK, BC, PQ đồng quy (tại S). Từ đó, chú ý rằng $AK \equiv LK$, suy ra S là trung điểm của PQ. ❒

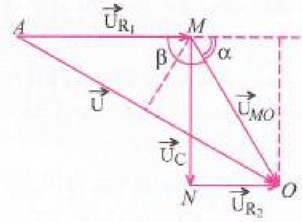
➤ ***Nhận xét.*** 1) Bài toán này dễ, số bạn tham gia giải khá nhiều, tuy nhiên vẫn có bạn giải sai. 2) Xin nêu tên tất cả các bạn giải đúng: **Lào Cai:** *Nguyễn Thị Minh Ngọc*, 10T, *Nguyễn Minh Hiệu*, 11T, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 11T2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **Quảng Nam:** *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Hà Khiêm*, 10T, *Trần Thiện Thu Uyên*, 10/1, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An; **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Phương Trang*, 10T1, THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Bình Phước:** *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, TP. Đồng Xoài; **Long An:** *Phan Quý Lộc*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Bến Tre:** *Phan Thanh Đại Dương*, 10T, THPT chuyên Bến Tre, TP. Bến Tre; **An Giang:** *Nguyễn Minh Uyên*, 10T2, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/479. *Cho đoạn mạch như hình vẽ. Trong đó $R_1 = 30\ \Omega$, cuộn cảm thuần. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 150$ V và tần số $f = 50$ Hz thì công suất tiêu thụ trong mạch bằng 500 W. Nối hai đầu cuộn cảm thuần bằng một dây dẫn có điện trở không đáng kể. Khi đó điện áp hiệu dụng trên các đoạn AM và MO bằng nhau và bằng $50\sqrt{3}$ V. Xác định độ tự cảm L của cuộn dây.*



Lời giải. Sau khi nối tắt cuộn cảm thuần, ta có giản đồ vectơ như hình vẽ.



Từ giản đồ ta có : $\sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{U}{2U_{R_1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{2\pi}{3}$ và $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Từ $U_{R_1} = U_{MO} \Rightarrow Z_{MO} = \sqrt{R_2^2 + Z_C^2} = R_1 = 30\ (\Omega)$

$\Rightarrow R_2 = Z_{MO}\cos\dfrac{\pi}{3} = 15\ (\Omega)$; $Z_C = 15\sqrt{3}\ (\Omega)$.

Khi chưa nối tắt cuộn cảm thuần thì:

$I = \sqrt{\dfrac{\mathscr{P}}{R_1 + R_2}} = \sqrt{\dfrac{500}{45}} = \dfrac{10}{3}$ (A).

Do đó $Z = \dfrac{U}{I} = 45\ (\Omega)$. Mặt khác :

$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (Z_L - Z_C)^2}$

$\Rightarrow 45^2 = 45^2 + (Z_L - Z_C)^2 \Rightarrow Z_L = Z_C = 15\sqrt{3}\ (\Omega)$.

Suy ra: $L = \dfrac{3\sqrt{3}}{20\pi}$ (H). ❒

➤***Nhận xét***: Chúc mừng hai bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: *Nguyễn Thanh Huyền*, 11 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**; còn một bài giải đúng nữa, nhưng bạn đó lại không ghi họ tên và địa chỉ nên tòa soạn không có thông tin để viết tên bạn lên tạp chí khen ngợi được.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/479. *Người ta bố trí hệ như hình vẽ: Lò xo nhẹ L đủ dài, có độ cứng k, đầu trên gắn vào giá cố định còn đầu dưới treo N vật nhỏ đánh số theo thứ tự từ trên xuống là 1, 2, ..., N – 1, N (với $N \geq 3$). Các vật có khối lượng lần lượt là $m_1, m_2, ..., m_{N-1}, m_N$. Giữa các vật nối với nhau bằng các đoạn dây nhẹ không co*

giãn. Lúc đầu hệ cân bằng. Tại một thời điểm dây nối giữa vật N và vật N – 1 được đốt nhẹ (lần 1). Khi lò xo giãn cực đại lần thứ hai thì đốt dây nối giữa vật N – 1 và N – 2 (lần 2). Ta làm tương tự như thế cho đến thời điểm lò xo giãn cực đại lần thứ N – 1 thì đốt dây nối giữa vật 2 và vật 1 (lần N – 1). Bỏ qua ma sát.

a) Tìm điều kiện để sau mỗi lần đốt dây các vật còn lại đều dao động điều hòa.

b) Xét trường hợp N = 4. Cho $m_1 = m_2 = m_0$ và m_3, m_4 được chọn có giá trị lớn nhất có thể đạt được. Tìm biên độ dao động khi chỉ còn lại vật m_1 dao động.

Lời giải. Muốn thỏa mãn điều kiện bài ra thì các dây nối giữa các vật phải luôn căng. Sau khi đốt dây lần 1, biên độ dao động của các vật còn lại là: $A_1 = \dfrac{m_n g}{k}$

Điều kiện cần thỏa mãn: $A_1 \le \dfrac{m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}}{k} g$,

suy ra: $$m_n \le m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} \qquad (1)$$

Tương tự cho lần đốt dây thứ 2:

$$m_{n-1} \le m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} \qquad (2)$$

Đến lần đốt dây thứ $N-2$ thì điều kiện là:

$$m_3 \le m_1 + m_2 \qquad (N-2)$$

Vì lò xo có thể nén nên ta không cần điều kiện cho lần đốt thứ $N-1$.

Từ (1), (2),..., $(N-2)$ ta có điều kiện khối lượng các vật cần thỏa mãn:

$$m_3 \le m_1 + m_2; m_4 \le 2(m_1 + m_2); \ldots; m_n \le 2^{n-3}(m_1 + m_2)$$

b) Ta có:

$$\max m_3 = m_1 + m_2 = 2m_0;\ \max m_4 = 2(m_1 + m_2) = 4m_0$$

Do đó biên độ dao động khi chỉ còn m_1 là:

$$A = \frac{m_2 + \max m_3 + \max m_4}{k} g = \frac{7m_0 g}{4}. \ \square$$

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải cho bài Vật lý này.

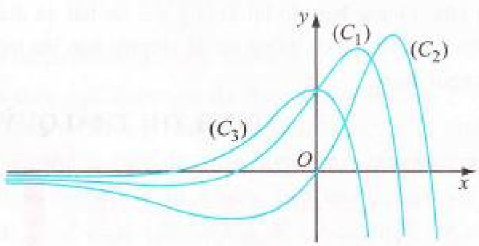
NGUYỄN XUÂN QUANG

KHAI THÁC...

(Tiếp theo trang 1...)

BÀI TẬP VẬN DỤNG

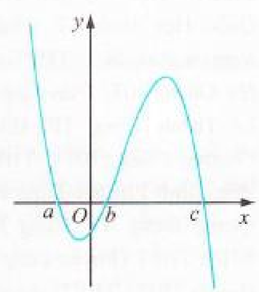
1. Cho đồ thị của ba hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và $y = f''(x)$ theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?



A. $(C_3);(C_2);(C_1)$. **B.** $(C_2);(C_1);(C_3)$.

C. $(C_2);(C_3);(C_1)$. **D.** $(C_1);(C_3);(C_2)$.

2. *(Thi thử của THPT chuyên Lào Cai)* Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $(f(b) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.

B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(c) + f(a) - 2f(b) > 0$.

D. $f(a) > f(b) > f(c)$.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4).$$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3. **B.** 2.

C. 4. **D.** 1.

GIẢI ĐÁP ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2017

ĐỢT MỘT

Bài 1. HÌNH VUÔNG VÀ TAM GIÁC VUÔNG VỚI 2017

a) *Tìm hai hình vuông với số đo các cạnh là số nguyên sao cho tổng diện tích hai hình vuông đó bằng 2017. Hãy lập luận để lời giải cần ít phép thử nhất.*

b) *Hãy tìm các tam giác vuông có số đo các cạnh đều là số nguyên sao cho số đo một cạnh bằng 2017.*

Lời giải. a) Gọi số đo hai cạnh hình vuông là m, n và $m < n$. Từ $2017 = m^2 + n^2$ có $n^2 < 2017 < 2n^2$ suy ra $32 \le n \le 44$. Ta có thể hạn chế số lần thử đối với n như sau: Xét số dư khi chia cho 10. Chữ số tận cùng của một số chính phương chỉ có thể là 0, 1, 4, 5, 6, 9 mà tổng hai số chính phương (bằng 2017) có tận cùng là 7 nên m^2 và n^2 chỉ có thể có chữ số tận cùng là 1 và 6, do đó chữ số tận cùng của số n chỉ có thể là 1, 4, 6, 9. Thử với n bằng 34, 36, 39, 41, 44 (chỉ cần 5 phép thử) tìm được nghiệm duy nhất là $2017 = 9^2 + 44^2$.

b) Giả sử 2017 là cạnh huyền và m, n là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông.

Do $(n^2 + m^2)^2 = (n^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2$ nên

$$2017^2 = (44^2 + 9^2)^2 = (44^2 - 9^2)^2 + 4.44^2.9^2$$
$$= 1855^2 + 792^2.$$

Vậy tồn tại tam giác vuông có ba cạnh là 792, 1855 và 2017. Giả sử 2017 là cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền là n và cạnh góc vuông là m thì có $2017^2 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Do 2017 là số nguyên tố thì chỉ xảy ra $n - m = 1$ và $n + m = 2017^2 = 4068289$, nên $n = 2034145$ và $m = 2034144$, từ đó có

$$2017^2 + 2034144^2 = 2034145^2.$$

Như vậy tồn tại tam giác vuông có ba cạnh là 2017, 2034144 và 2034145.

ĐAN QUỲNH (*Hà Nội*)

Bài 2. TAM GIÁC NGUYÊN !

Tam giác nguyên là tam giác có độ dài các cạnh là các số nguyên. Không tính đến đơn vị đo, hãy tìm tất cả các tam giác nguyên có chu vi bằng diện tích.

Lời giải. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác nguyên cần tìm $(a,b,c \in \mathbb{Z}^+)$, và giả sử $a \le b \le c$. Từ giả thiết ta có: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p$ (1) với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Đặt $x = p - a = \dfrac{b+c-a}{2} > 0$, $y = p - b = \dfrac{c+a-b}{2} > 0$,

$z = p - c = \dfrac{a+b-c}{2} > 0 \Rightarrow x + y + z = p, x \ge y \ge z.$

Khi đó (1) trở thành:

$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z) \Leftrightarrow xyz = 4(x+y+z)$ (2).

Nếu x, y, z không nguyên thì VT(2) không nguyên, VP(2) nguyên, (2) không xảy ra. Vậy x, y, z phải là các số nguyên dương. Từ (2) ta có $xyz = 4(x + y + z) \le 12x$ nên $z^2 \le yz \le 12$, do đó $z \le 3$. Xét ba trường hợp:

1) $z = 1$, thay vào (2) được $xy = 4x + 4y + 4$

$\Rightarrow (x - 4)(y - 4) = 20$. Do $(y - 4)^2 \le (x - 4)(y - 4) = 20$ nên $y - 4 \le 4$. Ta có nghiệm $(x ; y ; z)$ là:

$$(24; 5; 1),\ (14; 6; 1),\ (9; 8; 1).$$

2) $z = 2$, thay vào (2) được $xy = 2x + 2y + 4$

$\Rightarrow (x - 2)(y - 2) = 8$. Do $(y - 2)^2 \le (x - 2)(y - 2) = 8$ nên $y - 2 \le 2$. Ta có nghiệm $(x ; y ; z)$ là

$$(10; 3; 2),\ (6; 4; 2).$$

3) $z = 3$, thay vào (2) được $3xy = 4x + 4y + 12 \le 8x + 12$

$\Rightarrow y(3y - 8) \le x(3y - 8) \le 12 \Rightarrow 3y^2 - 8y - 12 \le 0$

$\Rightarrow 1 \le y < \dfrac{4+\sqrt{52}}{3} < 4$. Do $z = 3 \le y$ nên $y = 3$, thay vào (2) thì x không nguyên. Vậy có 5 tam giác thỏa mãn đề bài, trong đó có 2 tam giác vuông:

x	y	z	$x+y+z=p$	a	b	c
24	5	1	30	6	25	29
14	6	1	21	7	15	20
9	8	1	18	9	10	17
10	3	2	15	5	12	13
6	4	2	12	6	8	10

Thử lại ta thấy các giá trị a, b, c tìm được thỏa mãn bài toán.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Bài 3. PHÂN CHIA MỘT TAM GIÁC ĐỀU

Cho tam giác đều ABC. Hãy vẽ đoạn thẳng DE với điểm D thuộc cạnh AB và điểm E thuộc cạnh AC sao cho đoạn thẳng DE ngắn nhất và chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải. (Của bạn *Vũ Thanh Thảo*, 11 Toán, THPT Sơn Tây, **Hà Nội**)

ΔABC đều nên $AB = BC = CA$. Theo giả thiết, ta có :

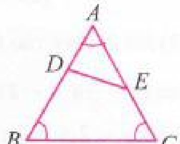
$S_{ADE} = \frac{1}{2}S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AD.AE.\sin A = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$\Leftrightarrow AD.AE = \frac{1}{2}AB^2$. Áp dụng định lí Côsin cho ΔADE và sử dụng BĐT Cauchy ta có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD.AE.\cos A$$
$$= AD^2 + AE^2 - AD.AE$$
$$\ge 2AD.AE - AD.AE = AD.AE = \frac{1}{2}AB^2$$

$\Rightarrow DE \ge \frac{AB}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi

$AD = AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.



Hình 1

Vậy ta vẽ đoạn thẳng $DE \,//\, BC$ sao cho $AD = AE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ thì DE có độ dài ngắn nhất và chia tam giác đều ABC cạnh a thành hai phần có diện tích bằng nhau.

VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

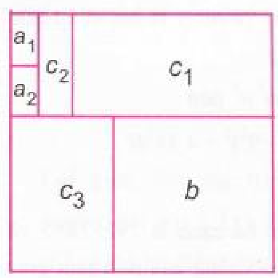
ĐỢT HAI

Bài 1. CẮT GHÉP HÌNH VUÔNG

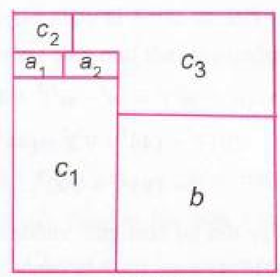
Ba tấm bìa hình vuông có cạnh tương ứng là 4 cm, 13 cm *và* 16 cm *với mặt trên màu xanh, mặt dưới màu trắng. Bạn tìm được bao nhiêu cách cắt ba tấm bìa đó thành các đa giác với hai cạnh chung đỉnh vuông góc với nhau để ghép lại được một hình vuông màu xanh cạnh là* 21 cm *sao cho số đa giác bị cắt ra là ít nhất ? Biết rằng hai kiểu cắt ghép coi là như nhau nếu mỗi đa giác bị cắt ra của kiểu này chồng khít lên một đa giác cùng màu của kiểu kia.*

Lời giải. Do điều kiện $4^2 + 13^2 + 16^2 = 21^2$ thì phải ghép tất cả các đa giác bị cắt ra mà không chờm lên nhau. Số đa giác ít nhất bị cắt ra để ghép là 6.

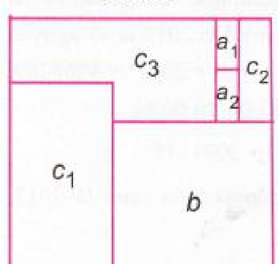
Các hình 2, 3, 4, 5 dưới đây (tương ứng với 4 cách cắt ghép) chỉ ra cách cắt ghép các đa giác bị cắt ra thành hình vuông cạnh 21 cm, trong đó gọi hình vuông cạnh 4 cm là a, hình vuông cạnh 13 cm là b, hình vuông cạnh 16 cm là c. Trong các hình 2, 3, 4, 5 có thể thay đổi vị trí các hình chữ nhật bằng nhau, nhưng vẫn chỉ là một cách. Nếu lấy đối xứng của các hình 3, 4, 5 qua đường trung trực của cạnh đáy hình vuông 21 cm ta được thêm 3 cách cắt ghép khác. Nếu ta chia hình vuông cạnh a thành 2 phần, hình vuông cạnh b thành 3 phần thì có thêm các cách khác.



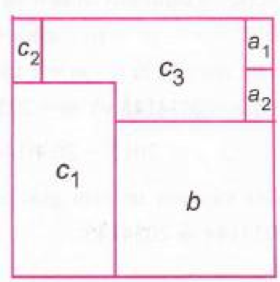
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

Bài 2. THÁNG 6 NĂM 2017

Trên bảng ta viết tất cả các số từ 1 đến 2017. Hỏi xóa ngẫu nhiên nhiều nhất bao nhiêu số để trên bảng chắc chắn tồn tại 6 số và tổng của chúng ?

Lời giải. Xóa ngẫu nhiên 332 số, ta gọi các số còn lại trên bảng: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{1685}$.

Với mọi $i = 1, \ldots, 1685$, ta có: $a_{1685} - a_i \geq 1685 - i$

$$\Rightarrow 2017 \geq a_{1685} \geq a_i + 1685 - i \Rightarrow a_i \leq 332 + i.$$

Do đó: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 1338 \leq a_{1343} - a_5$

$$\Rightarrow S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq a_{1343}.$$

Ta có 2 dãy nằm trong khoảng từ 1 đến 2017:

$$a_6 < a_7 < \ldots < a_{1685}$$

$$a_{1344} - S < a_{1345} - S < \ldots < a_{1685} - S.$$

Cả 2 dãy có 1680 + 342 = 2022 số. Các số này nằm trong khoảng từ 1 đến 2017 nên không thể khác nhau từng đôi một. Suy ra tồn tại 2 số thuộc 2 dãy sao cho $a_n = a_m - S$. Do đó trên bảng tồn tại 6 số:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_n = a_m.$$

Mặt khác nếu xóa đi 333 số nhỏ nhất thì tổng 6 số bất kì trong các số còn lại lớn hơn hoặc bằng

334 + 335 + 336 + 337 + 338 + 339 = 2019 vượt quá số lớn nhất còn lại trên bảng. Vậy xóa ngẫu nhiên nhiều nhất 332 số để trên bảng chắc chắn tồn tại 6 số và tổng của chúng.

NGUYỄN HIỆP (*Hà Nội*)

Bài 3. XÓA NHỮNG CHỮ SỐ NÀO!

Cho số A = 1234567891011…100101102 (*gồm tập hợp các số viết liên tục từ* 1, 2, 3, …, *đến* 102). *Hãy xóa bỏ* 102 *chữ số trong số* A *để được số*:

a) *có giá trị lớn nhất*;

b) *có giá trị nhỏ nhất*.

Lời giải. Số đã cho có 198 chữ số, số có được sau khi gạch bỏ đi 102 chữ số, là số gồm 96 chữ số.

a) Các chữ số đầu của số mà chúng ta quan tâm phải có giá trị lớn nhất. Chúng ta có thể xóa bỏ 102 chữ số trong số có 198 chữ số đã cho sao cho 96 chữ số còn lại tạo thành số được bắt đầu với 5 chữ số 9, 5 chữ số 9 này có thể lấy từ các số 9, 19, 29, 39, 49 bằng cách loại bỏ

$$8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84 \text{ chữ số.}$$

Chúng ta không thể thiết lập chữ số tiếp theo là 9 vì chữ số 9 gần nhất chứa trong số 59 và chúng ta phải xóa bỏ thêm 19 chữ số, khi đó đã xóa bỏ đi 84 + 19 > 102 chữ số. Chữ số ta thiết lập tiếp theo là chữ số 8 chứa trong số 58, khi đó ta sẽ xóa bỏ thêm 17 chữ số nữa, tổng cộng đã xóa bỏ 84 + 17 = 101 chữ số, và ta được số: 999998596061…101102.

Ta chỉ phải xóa 1 chữ số nữa là số 5 trong số 59 để được chữ số phải tìm là: 99999896061…101102.

b) Một chữ số *n* (khác 0) sẽ vẫn là chính nó nếu ta viết thêm tùy ý các chữ số 0 ở bên trái của *n*. Nên định hướng trước tiên của ta là cần xóa bỏ thế nào đó để chữ số cần tìm có nhiều chữ số 0 nhất ở bên trái. Chúng ta có thể có được số phải tìm, sau khi xóa bỏ 86 chữ số để được số bắt đầu với 5 chữ số 0: những chữ số 0 này chứa trong các số 10, 20, 30, 40, 50; số các chữ số số loại bỏ là:

$$10 + 19 + 19 + 19 + 19 = 86 \text{ chữ số.}$$

Khi đó ta được số: 000005152…6061…102.

Chữ số tiếp theo 5 chữ số 0 vừa thiết lập không thể là chữ số 0 chứa trong số 60 vì khi đó ta sẽ loại bỏ đi 86 + 19 > 102 chữ số. Ta loại bỏ chữ số 5 trong số 51 để được chữ số tiếp theo là 1 và được số :

000001525354…606162…102.

Chữ số tiếp theo không thể là 0 trong số 60 (vì khi đó các chữ số loại bỏ sẽ > 102), nên ta loại bỏ chữ số 5 (trong số 52) để được chữ số tiếp theo là 2. Đến đây ta đã loại bỏ 88 chữ số để được số:

0000012535455…606162…102.

Chữ số tiếp theo không thể là 0 trong số 60, nên ta loại bỏ số 5 trong số 53 để được chữ số 3 tiếp theo. Đến đây ta đã loại bỏ 89 chữ số để được số:

000001235455…606162…102.

Đến đây ta thấy có thể thiết lập chữ số tiếp theo là 0 trong số 60, và đã loại bỏ đi 89 + 13 =102 chữ số để được số 0000012306162…102.

Bỏ đi 5 chữ số 0 đứng ở đầu, ta được số cần tìm là:

12306162…102 (gồm 91 chữ số).

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Kết quả cuộc thi ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2017

☆ **Giải Nhất (1 giải)**

1. *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.

☆ **Giải Nhì (2 giải)**

1. *Hoàng Minh Dũng*, Tổ 5A, Tổ dân phố 2, Phường Đồng Sơn, TP. Đồng Hới, **Quảng Bình**.
2. *Vũ Thanh Thảo*, 11 Toán, THPT Sơn Tây, TX. Sơn Tây, **Hà Nội**.

☆ **Giải Ba (3 giải)**

1. *Cao Ngọc Toản*, Giáo viên THPT Tam Giang, Phong Điền, **Thừa Thiên Huế**.
2. *Lê Trí Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An**.
3. *Nguyễn Văn Bản*, Đội 4, Pom Lốt, H. Điện Biên, **Điện Biên**.

☆ **Giải Khuyến khích (3 giải)**

1. *Nguyễn Hương Giang*, 11A13, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Nội**.
2. *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc long Quân, TP. Bến tre, **Bến tre**.
3. *Đàm Ngọc Hiếu*, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hòa, **Phú Yên**.

Giải thưởng của Tạp chí

Giải Nhất: Giấy Chứng nhận + Cuốn đóng tập Tạp chí TH&TT năm 2016 + Tiền thưởng.

Giải Nhì: Giấy Chứng nhận + Cuốn đóng tập Tạp chí TH&TT năm 2016 + Tiền thưởng.

Giải Ba: Giấy Chứng nhận + Cuốn đóng tập Tạp chí TH&TT năm 2016 + Tiền thưởng.

Giải Khuyến Khích: Giấy Chứng nhận + Cuốn đóng tập Tạp chí TH&TT năm 2016.

Các bạn đoạt giải gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giấy chứng nhận và Tặng phẩm của Tạp chí.

PROBLEM...

(Tiếp theo trang

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/483. Solve the following system of equations (a is a parameter)

$$\begin{cases} 2x(y^2+a^2)=y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2)=z(z^2+9a^2). \\ 2z(x^2+a^2)=x(x^2+9a^2) \end{cases}$$

Problem T7/483. Suppose that $x=\dfrac{2013}{2015}$ is a solution of the polynomial

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{Z}[x].$$

Can the sum of the coefficients of $f(x)$ be 2017?

Problem T8/483. Given three circles $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$, $(O_3;R_3)$ which are pairwise externally tangent to each other at A, B, C. Let r be the radius of the incircle of ABC. Prove that

$$r\le\frac{R_1+R_2+R_3}{6\sqrt{3}}.$$

Problem T9/483. Given positive numbers x, y, z satisfying $x^2+y^2-2z^2+2xy+yz+zx\le 0$. Find the minimum value of the expression

$$P=\frac{x^4+y^4}{z^4}+\frac{y^4+z^4}{x^4}+\frac{z^4+x^4}{y^4}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYPIAD

Problem T10/483. Find the maximum value of the expression $T=\dfrac{a+b}{c+d}\left(\dfrac{a+c}{a+d}+\dfrac{b+d}{b+c}\right)$ where a, b, c, d belong to $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$.

Problem T11/483. Let $R(t)$ be a polynomial of degree 2017. Prove that there exist infinitely many polynomials $P(x)$ such that

$$P\left((R^{2017}(t)+R(t)+1)^2-2\right)=P^2\left(R^{2017}(t)+R(t)+1\right)-2.$$

Find a relation between those poynomials $P(x)$.

Problem T12/483. Given a triangle ABC. The incircle (I) of ABC is tangent to AB, BC and CA at K, L and M. The line t which passes through B and is different from AB and BC intersects MK at ML respectively at R and S. Prove that $\widehat{RIS}$ is an acute angle.

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN HAY TỪ ĐỀ THI OLYMPIC HÌNH HỌC SHARYGIN NĂM 2017

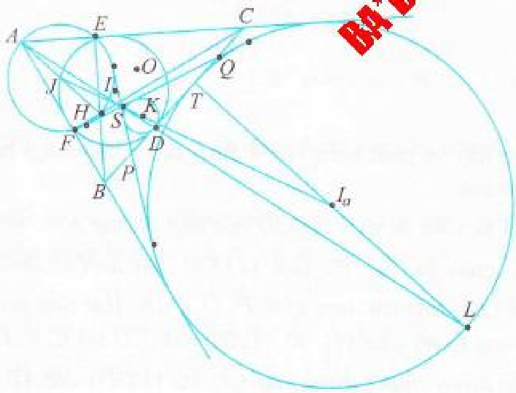
NGUYỄN VĂN LINH
(*SV Khoa Toán, Trường ĐHSP Hà Nội*)

Cuộc thi Olympic hình học Sharygin lấy tên từ nhà sư phạm nổi tiếng *I.F.Sharygin*. Đây là một cuộc thi do Nga tổ chức và mở rộng ra quốc tế. Những năm gần đây, nhiều học sinh Việt Nam đã lọt vào vòng chung kết và đạt được một số thành tích đáng kể. Điển hình là *Nguyễn Huy Hoàng* từng đoạt Huy chương Bạc IMO năm 2015 là thí sinh Việt Nam đầu tiên giành được Huy chương Đồng Olympic Sharygin năm 2013.

Năm nay vòng chung kết cuộc thi Olympic hình học Sharygin diễn ra tại Moscow trong hai ngày 31/7 và 1/8. Trong đó ngày thi thứ hai có một bài toán của khối 9 khá thú vị như sau.

Bài 1. *Cho tam giác ABC với các đường cao BE, CF và (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi P, Q là giao điểm của tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) với BC. Chứng minh rằng BP = CQ.*

Sau đây chúng ta sẽ đưa ra lời giải cho bài toán này và tìm cách khai thác mở rộng nó.



Hình 1

Lời giải. (h.1) Gọi (J) là đường tròn (AEF), S là giao của hai tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a); $(I),(K)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, SPQ; $(I),(K),(I_a)$ lần lượt tiếp xúc với BC tại D, D', T; L là điểm đối xứng với T qua I_a.

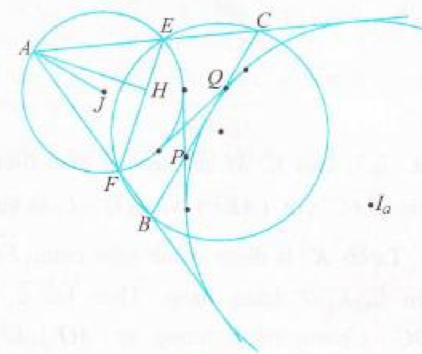
Ta có $JA \parallel I_aL$ và S là tâm vị tự trong của (J) và (I_a) nên ba điểm A, S, L thẳng hàng.

Lại có A là tâm vị tự ngoài của (I) và (I_a) đồng thời $ID \parallel I_aL$ nên A, D, L thẳng hàng. Do đó bốn điểm A, S, D, L thẳng hàng.

Mặt khác, S là tâm vị tự ngoài của (K) và (I_a) đồng thời $KD' \parallel I_aL$ nên S, D', L thẳng hàng. Suy ra $D' \equiv D$. Từ đó ta có $DP = TQ$. Mà $DB = TC$ nên $BP = CQ$.

Có thể thấy trong lời giải bài toán 1 chỉ sử dụng đến dữ kiện $JA \perp BC$, do đó ta mở rộng bài toán 1 như sau.

Bài 2. *Cho tam giác ABC với (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng BP = CQ.*



Hình 2

Có thể giải hoàn toàn tương tự bài toán 1 với lưu ý rằng nếu gọi J là tâm của (AEF) và AH là đường cao của tam giác AEF thì AJ và AH đẳng giác trong $\widehat{BAC}$. Đồng thời EF đối song với BC nên $AJ \perp BC$.

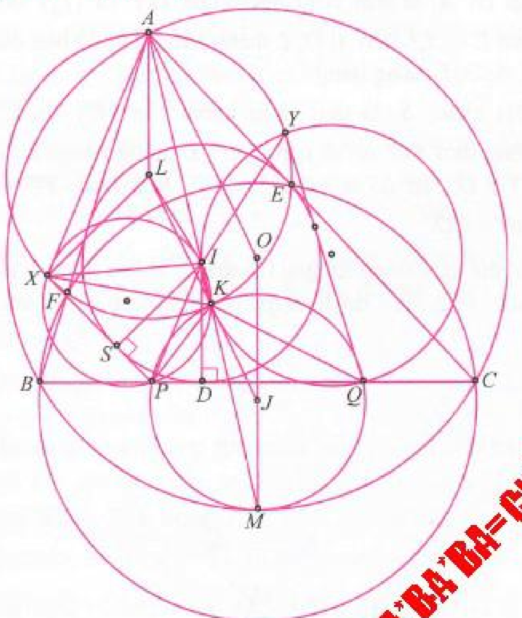
Nếu thay đường tròn bàng tiếp (I_a) bằng đường tròn nội tiếp (I) ta thu được bài toán tương tự bài 2.

Bài 3. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt* *tại E, F. Tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng $BP = CQ$.*

Qua khai thác, ta phát hiện một tính chất khá đẹp liên quan tới hình vẽ của bài toán 1, đó là đường tròn đường kính PQ tiếp xúc với (AEF) và (O).

Ta sẽ phát biểu tính chất này trong trường hợp tổng quát.

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường tròn tâm J bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn (AEF) và đường tròn (I) cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng đường tròn (J, JP) tiếp xúc với (O) và (AEF).*



Hình 3

Lời giải. (h.3) Gọi K, M lần lượt là giao điểm của phân giác $\widehat{BAC}$ với (AEF) và (O); L là tâm của (AEF). Ta có K là điểm chính giữa cung $\widehat{EF}$ của (L) nên L, K, J thẳng hàng. Theo bài 2, ta có $AL \perp BC$. Chứng minh tương tự $AO \perp EF$ nên $ALJO$ là hình bình hành.

Do đó $JK = LJ - LK = AO - AL = OM - OJ = JM$. Như vậy (J, JM) tiếp xúc với (O) và (L).

Lại theo bài 1, $BP = CQ$ nên $JP = JQ$. Vậy ta chỉ cần chứng minh tứ giác $PKQM$ nội tiếp.

Do $MP = MQ$ nên ta cần chứng minh KM là phân giác của $\widehat{PKQ}$.

Gọi X, S lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung qua P của $(L),(I)$ với $(L),(I)$; Y là tiếp điểm của tiếp tuyến chung qua Q của $(L),(I)$ với (L). Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với BC tại D.

Ta có $IS \,//\, LX$, $ID \,//\, LA$ nên $\widehat{ALX} + \widehat{SID} = 180^0$. Suy ra $\widehat{PID} + \dfrac{1}{2}\widehat{ALX} = 180^0$ hay $\widehat{PID} = \widehat{XAL}$.

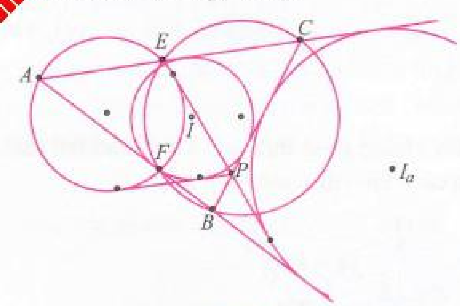
Từ đó $AX \,//\, IP$. Ta thu được $\widehat{PIK} = \widehat{XAK} = \widehat{PXK}$ hay tứ giác $PXIK$ nội tiếp.

Tương tự ta có tứ giác $QYIK$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{PKM} = \widehat{PXI} = \widehat{IYQ} = \widehat{MKQ}$ (do PX và QY đối xứng nhau qua LI). Ta có đpcm.

Nhận xét: Ta lại thay đường tròn nội tiếp (I) thành đường tròn bàng tiếp (I_a) với P', Q' là giao của tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) với BC thì (J, JP') vẫn tiếp xúc với $(O),(AEF)$ lần lượt tại M, K. Do đó $P' \equiv P, Q' \equiv Q$. Ta thu được bài toán sau.

Bài 5. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), với (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Một đường tròn bất kì qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Một tiếp tuyến chung ngoài của (AEF) và (I) cắt BC tại P. Chứng minh rằng P nằm trên tiếp tuyến chung trong của (AEF) và (I_a) (h.4).*

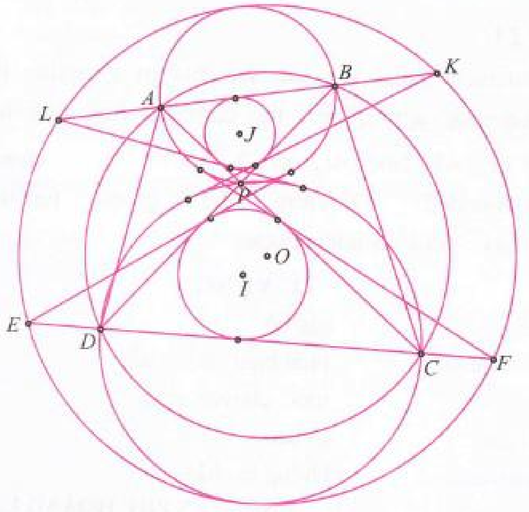


Hình 4

Sau đây ta phát biểu bài 4 dưới dạng khác đẹp hơn như sau.

Bài 6. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. Gọi $(I),(J)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp các tam giác PCD, PAB. Hai tiếp tuyến chung trong của (I) và (PAB) cắt CD tại E, F. Hai tiếp tuyến chung trong của (J) và (PCD) cắt AB tại K, L. Chứng minh rằng E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn tâm O và đường tròn này tiếp xúc với hai đường tròn $(PAB),(PCD)$ (h.5).*

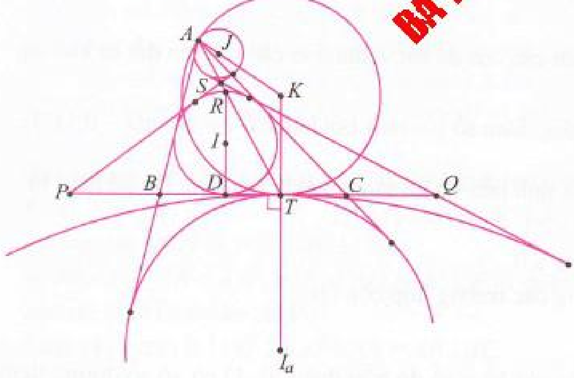
Tất nhiên 4 điểm L, K, E, F nằm trên các tiếp tuyến chung ngoài của các cặp đường tròn (PCD) và đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PAB, đường tròn (PAB) và đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PCD.



Hình 5

Bây giờ ta tìm điều kiện để cặp tiếp tuyến chung trong của một đường tròn (J) đi qua A và đường tròn nội tiếp tam giác ABC cắt BC tại hai điểm P, Q thỏa mãn $BP = CQ$. Ta thu được kết quả sau.

Bài 7. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), với đường tròn (I_a) bàng tiếp góc A. (I_a) tiếp xúc với BC tại T. Đường trung trực của AT cắt I_aT tại K. J là điểm bất kì trên AK sao cho đường tròn (J, JA) và (I) ngoài nhau. Gọi P, Q là các giao điểm của tiếp tuyến chung trong của (I) và (J, JA) với BC. Chứng minh rằng BP = CQ.*



Hình 6

Lời giải. (h.6) Gọi S là giao điểm của hai tiếp tuyến chung trong của (J) và (I). Dựng đường tròn (K, KA) thì (K, KA) tiếp xúc với (J) tại A và tiếp xúc với (I_a) tại T.

Áp dụng định lý Monge-D'Alembert cho ba đường tròn $(I), (K), (I_a)$ ta thu được tâm vị tự trong của (I) và (K) nằm trên AT.

Lại áp dụng định lý định lý Monge-D'Alembert cho ba đường tròn (J), (I), (K) ta thu được tâm vị tự trong của (I) và (K) nằm trên AS. Suy ra A, S, T thẳng hàng.

Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, R là điểm đối xứng với D qua I. Ta có A là tâm vị tự ngoài của (I) và (I_a) nên A, R, T thẳng hàng. Suy ra S, R, T thẳng hàng. Từ đó T là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc S của tam giác SPQ với PQ. Suy ra $DP = TQ$. Mà $DB = TC$ nên $BP = CQ$.

Khai thác cấu hình của bài toán 7, tác giả tìm ra bài toán sau.

Bài 8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). M là điểm chính giữa cung $\widehat{BAC}$ của (O). Gọi E, F là hai điểm bất kì trên BC sao cho BE = CF. Từ E, F kẻ tiếp tuyến d_E, d_F khác BC của (I). Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn (ω) đi qua A và tiếp xúc với $d_E, d_F, (MEF)$.*

Nhận xét. Ngược lại nếu cho một điểm P chuyển động trên (ω). Từ P kẻ hai tiếp tuyến tới (I) cắt BC tại K, L thì (PKL) tiếp xúc với hai đường tròn cố định, trong đó một đường tròn là (MEF), một đường tròn đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (I) và (ω) với BC và tiếp xúc với (ω).

Để kết thúc bài viết, mời bạn đọc thử chứng minh một trường hợp đặc biệt của bài toán 4.

Bài 9. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A. Gọi P, Q lần lượt là tiếp điểm của (I) và (I_a) với BC, M là trung điểm của II_a, AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn (PMQ) tiếp xúc với đường tròn đường kính AH.*

Tài liệu tham khảo

[1] Sharygin Geometry Olympiad 2017. http://geometry.ru/olimp/2017.php

[2] AoPS topic *Mixtilinear incircles and somehow Poncelet's porism.* https://artofproblemsolving.com/community/c6h186117p1022749

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 24

***Problem**: Prove or disprove the statement: "The functions $f(x) = \sin x^2$ is periodic".*

Remark: For this problem, we will use the following facts about periodic functions which were given in the same section of the previous issue.

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable and periodic function. Then

(i) f is bounded, i.e. there exists M such that $|f(x)| \le M, \forall x$,

(ii) f' is also a periodic function.

Solution: We will show that $f(x) = \sin x^2$ is not periodic. Assume that it is periodic. By (ii), its derivative $f'(x) = 2x\cos x^2$ is periodic. And then, by (i) $f'(x) = 2x\cos x^2$ is bounded. But the later statement fails. We can see this by choosing the sequence $x_n = \sqrt{2n\pi}$, the corresponding sequence $f'(x_n) = 2\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi) = 2\sqrt{2n\pi}$ is clearly unbounded. Therefore the given function $f(x) = \sin x^2$ is not periodic.

TỪ VỰNG

disprove	:	bác bỏ
statement	:	phát biểu (mệnh đề)
section	:	mục, chuyên mục
issue	:	số báo
unbounded	:	không bị chặn

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

BÀI DỊCH SỐ 21

Bài toán. *Hãy xây dựng một hàm số sao cho đồ thị của nó có 4 (và chỉ 4) đường tiệm cận: $y = -3$; $y = 2$; $x = 0$ và $x = 1$.*

Lời giải. Chúng ta xây dựng hàm số: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x \ge 1 \\ -3 & \text{nếu } x \le 0 \\ \ldots & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$

Rõ ràng là $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$.

Theo định nghĩa, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = -3$ và $y = 2$. Bây giờ ta tập trung vào "*các đường tiệm cận đứng*". Ta sẽ sử dụng hàm số lượng giác $y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ vì đồ thị của hàm số này có các đường tiệm cận đứng $x = -\frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{2}$ tương tự như yêu cầu của đề bài. Chúng ta cần chuyển đổi từ khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thành khoảng (0; 1). Để làm được điều đó ta thay hàm số $y = \tan x$ bởi hàm số $y = \tan \pi(x - 0{,}5)$. Ta nhân với π để điều chỉnh chu kì từ π về 1 và trừ đi 0,5 để tịnh tiến đồ thị sang phải 0,5 đơn vị. Do đó hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } x \ge 1 \\ -3 & \text{nếu } x \le 0 \\ \tan\pi(x - 0{,}5), & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

sẽ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Câu hỏi: Có thể xây dựng một hàm số $f(x)$ sao cho đồ thị của hàm số đó trên đoạn [0; 1] có vô số đường tiệm cận đứng hay không?

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Yên Bái:** *Nguyễn Khánh Linh*, 11A1, THPT Hoàng Văn Thụ, Lục Yên; **Hưng Yên:** *Hoàng Văn Thái*, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Ngọc Thanh*, 12T1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Nam:** *Nguyễn Thanh Hùng*, *Huỳnh Đinh Ngọc Trác*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Đồng Nai:** *Phạm Hữu Danh*, GV THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hoà; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Quân*, 11T1, *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Đồng Tháp:** *Lê Vũ Lam Hiền*, 10A1, THPT Tháp Mười.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

✪ BÀI TOÁN 3. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + 2y$, trong đó x, y là hai số thực thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = x + y$* (1)

Lời giải

ĐỊNH HƯỚNG 1. Thay $x = F - 2y$ vào (1) được phương trình (PT) bậc hai ẩn y với tham số F rồi xét các giá trị của F để PT này có nghiệm.

Cách giải 1. Thay $x = F - 2y$ vào (1) được PT bậc hai ẩn y sau: $(F-2y)^2 + y^2 - F + 2y - y = 0$

$\Leftrightarrow 5y^2 - (4F-1)y + F^2 - F = 0$ (2)

PT (1) có nghiệm y khi biệt số $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (4F-1)^2 - 20(F^2 - F) \geq 0 \Leftrightarrow 4F^2 - 12F - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4\left(F^2 - 2.\frac{3}{2}F + \frac{9}{4}\right) - 10 \leq 0 \Leftrightarrow \left(F - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{10}{4},$$

hay là $\frac{3-\sqrt{10}}{2} \leq F \leq \frac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\Delta = 0$.

Thay $F = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ vào (2) tính được

$$y = \frac{5+2\sqrt{10}}{10} \text{ và } x = \frac{5+\sqrt{10}}{10};$$

thay $F = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ vào (2) tính được

$$y = \frac{5-2\sqrt{10}}{10} \text{ và } x = \frac{5-\sqrt{10}}{10}.$$

Vậy, max $F = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ và min $F = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$. ❐

Có thể làm tương tự như trên khi xét PT bậc hai ẩn x, hoặc PT bậc hai ẩn $z = y - \frac{1}{2}, \ldots$

ĐỊNH HƯỚNG 2. Xét vị trí tương đối của họ đường thẳng $x + 2y - F = 0$ với tham số F và đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

Cách giải 2. Biến đổi (1) thành dạng

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Đây là PT đường tròn tâm $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ với bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Họ đường thẳng $\Delta: x + 2y - F = 0$ cắt đường tròn (T) khi khoảng cách $d(T, \Delta)$ từ tâm đường tròn đến đường thẳng Δ không lớn hơn R,

tức là $d(T,\Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} - F\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3}{2} - F\right| \leq \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{10}}{2} \leq F \leq \frac{3+\sqrt{10}}{2}.$$

Vậy, max $F = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ khi $x + 2y = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ và (1).

Giải hệ hai PT này được $x = \frac{5+\sqrt{10}}{10}; y = \frac{5+2\sqrt{10}}{10}$.

min $F = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ khi $x + 2y = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ và (1).

Giải hệ hai PT này được $x = \frac{5-\sqrt{10}}{10}; y = \frac{5-2\sqrt{10}}{10}$. ❐

ĐỊNH HƯỚNG 3. Biến đổi (1) thành

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Nếu viết $F = x + 2y = \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$ thì có thể áp dụng được BĐT *Bunyakovsky*.

Cách giải 3. Áp dụng BĐT *Bunyakovsky* ta có:

$$\left[1.\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq (1^2 + 2^2)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 5.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + 2y - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{2}.$$

Từ đó có $-\frac{\sqrt{10}}{2} \leq x + 2y - \frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{10}}{2} \leq x + 2y \leq \frac{3+\sqrt{10}}{2}.$$

Từ đây ta cũng nhận được kết quả như cách giải 1 và cách giải 2.

ĐỊNH HƯỚNG 4. Biến đổi (1) thành dạng

$$\left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

Từ (3) ta biểu diễn x, y thành dạng lượng giác rồi tìm cực trị của hàm lượng giác $F = x + 2y$.

Cách giải 4. Đặt $\sqrt{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha$ và $\sqrt{2}y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\alpha$ với $0 \le \alpha < 2\pi$ thì x và y thỏa mãn PT (3).

Từ cách đặt trên có $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$ và $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$,

còn $F = x + 2y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Ta xét cực trị của hàm lượng giác $E = \cos\alpha + 2\sin\alpha$.

Đặt $\tan\varphi = 2$ với $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ thì

$E\cos\varphi = \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi = \cos(\alpha - \varphi) \le 1$, suy ra $E^2\cos^2\varphi \le 1 \Leftrightarrow E^2 \le 1 + \tan^2\varphi = 1 + 2^2 = 5$, hay là $-\sqrt{5} \le E \le \sqrt{5}$.

Từ $F = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}E$ có $\dfrac{3-\sqrt{10}}{2} \le F \le \dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\alpha = \varphi$, tức là khi $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$ và $\sin^2\alpha = \dfrac{4}{5}$. Do $\tan\varphi > 0$ nên $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ cùng dấu.

Khi $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ thì $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, ta có

$$x = \frac{5+\sqrt{10}}{10};\ y = \frac{5+2\sqrt{10}}{10} \text{ và}$$

$$F = x + 2y = \frac{3+\sqrt{10}}{2},\ \max F = \frac{3+\sqrt{10}}{2}.$$

Khi $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ thì $\sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, ta có

$$x = \frac{5-\sqrt{10}}{10};\ y = \frac{5-2\sqrt{10}}{10} \text{ và}$$

$$F = x + 2y = \frac{3-\sqrt{10}}{2},\ \min F = \frac{3-\sqrt{10}}{2}.\square$$

ĐỊNH HƯỚNG 5. Ta nhận thấy $x^2 + y^2 = x + y$ không có số hạng tự do khác không nên có thể biểu diễn x và y qua một biến mới, rồi chuyển việc xét $F = x + 2y$ từ hàm hai biến về hàm một biến.

Cách giải 5. Đặt $y = xt$ thì

$$x^2 + y^2 = x^2 + x^2t^2 \text{ và } x + y = x + xt.$$

Từ đó có $x^2 + x^2t^2 = x + xt$ (4)

- Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và $F = x + 2y = 0$.
- Nếu x khác 0 thì từ (4) có

$$x = \frac{1+t}{1+t^2} \text{ và } y = xt = \frac{t+t^2}{1+t^2}.$$

Từ đó $F = x + 2y = \dfrac{1+t+2(t+t^2)}{1+t^2} = \dfrac{1+3t+2t^2}{1+t^2}$.

Để xét cực trị của hàm $F(t)$ có thể làm như cách giải 1, tức là coi F là tham số của PT bậc hai ẩn t dạng $F(1+t^2) = 1 + 3t + 2t^2 \Leftrightarrow (F-2)t^2 - 3t + F - 1 = 0$ rồi xét các giá trị của F để PT này có nghiệm.

PT trên có nghiệm t khi biệt số $\Delta \ge 0$

$\Leftrightarrow 9 - 4(F-2)(F-1) \ge 0 \Leftrightarrow 4F^2 - 12F - 1 \le 0.$

Ta tiếp tục làm như Cách giải 1, dẫn đến kết luận sau khi so sánh với giá trị $F = 0$.$\square$

➢ ***Nhận xét.*** 1) Tác giả ra đề *Trần Văn Hạnh*, GV ĐH Phạm Văn Đồng, **Quảng Ngãi** đã đưa ra 4 cách giải đầu tiên. Các bạn gửi bài giải cũng nêu ra 4 cách giải như thế là: *Nguyễn Văn Xá*, GV THPT Yên Phong 2, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Anh Vũ*, GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định; *Trương Quang An*, GV, xã Nghĩa Thắng, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**. 2) Bạn *Nguyễn Anh Vũ* đã nêu thêm cách giải 5 và chú ý rằng học sinh lớp 12 có thể giải bằng cách khảo sát hàm phân thức nhờ lấy đạo hàm của hàm số. Bạn *Nguyễn Anh Vũ* cũng nêu rõ: Sử dụng Cách giải 1 ta giải được bài toán tổng quát hơn khi xét cực trị của biểu thức $F = mx + ny + v$ với điều kiện

$$ax^2 + by^2 = cx + dy + e.$$

3) Bạn *Nguyễn Văn Xá* nêu cách giải tương tự như cách giải 2 khi biến đổi $F = x^2 + y^2 + y$ rồi xét giao điểm của hai đường tròn: Đường tròn $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ tâm T bán kính R và đường tròn $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + F$ tâm Q bán kính r. Cách này phức tạp hơn cách giải 2 một chút khi phải xét điều kiện $F + \dfrac{1}{4} \ge 0$ và $|R - r| \le TQ \le R + r$.

4) Có bạn nêu lời giải bằng cách sử dụng BĐT về tích vô hướng của hai vectơ $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$, tuy nhiên về thực chất đây cũng là cách sử dụng BĐT *Bunyakovsky*.

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi Bài toán 6 sau đây về Toà soạn TH&TT trước ngày 31.10.2017.

Bài toán 6. *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và dây cung CD không là đường kính. Gọi H là giao điểm của các đường thẳng AC và BD. Đường thẳng qua H vuông góc với HO cắt AD, BC lần lượt tại E, F. Chứng minh: HE = HF.*

ĐẬU CÔNG NHO

(*GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 481, T7.2017.

Bài 3. (*Kì thi lần thứ 50 vô địch Czech và Slovak, năm 2000, bài 4, vòng 1*).

Giải bất phương trình: $\begin{cases} \sin x + \cos y \geq \sqrt{2} \\ \sin y + \cos z \geq \sqrt{2}. \\ \sin z + \cos x \geq \sqrt{2} \end{cases}$

Lời giải. Cách 1. Cộng theo vế các BĐT ta có:

$$(\sin\ x + \cos x) + (\sin\ y + \cos y)$$
$$+ (\sin\ x + \cos x) \geq 3\sqrt{2} \quad (1)$$

Mặt khác với mỗi số thực t ta luôn có:

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin t + \sin\frac{\pi}{4}\cos t\right)$$
$$= \sqrt{2}.\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

Cộng theo vế các BĐT tương ứng với $t = x, y, z$ ta nhận được:

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin x + \cos x) \leq 3\sqrt{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra ta phải có đẳng thức

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin x + \cos x) = 3\sqrt{2}.$$

Từ đó suy ra phải có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi,\ \ y = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi,\ \ z = \frac{\pi}{4} + 2k_3\pi.$$

Cách 2. Cộng theo vế các bất đẳng thức ta có:

$$(\sin\ x + \cos x) + (\sin\ y + \cos y)$$
$$+ (\sin\ x + \cos x) \geq 3\sqrt{2} \quad (1)$$

Ta có: $\sin x + \cos x \leq |\sin x| + |\cos x|$

$$\leq 2\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} = \sqrt{2}.$$

Tương tự: $\sin y + \cos y \leq |\sin y| + |\cos y| \leq \sqrt{2}$

$$\sin z + \cos z \leq |\sin z| + |\cos z| \leq \sqrt{2}.$$

Cộng theo vế các BĐT trên ta có:

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin x + \cos x) \leq 3\sqrt{2} \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra phải có đẳng thức tại các BĐT trên và ta có:

$$\sin x = \cos x = \sin y = \cos y = \sin z = \cos z\ .$$

Từ đó ta lại có nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, y = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi,\ z = \frac{\pi}{4} + 2k_3\pi.$$

Cách 3. Từ hệ phương trình đã cho chuyển vế và bình phương hai vế ta có hệ

$$\begin{cases} \sin^2 x \geq 2 - 2\cos y + \cos^2 y \\ \sin^2 y \geq 2 - 2\cos z + \cos^2 z\ . \\ \sin^2 z \geq 2 - 2\cos x + \cos^2 x \end{cases}$$

Cộng theo vế các BĐT và biến đổi ta thu được:

$$0 \geq (1 - \sqrt{2}\cos x)^2 + (1 - \sqrt{2}\cos y)^2$$
$$+ (1 - \sqrt{2}\cos z)^2.$$

Từ đó, kết hợp với $\sin x \geq 0, \sin y \geq 0, \sin z \geq 0$, ta có nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi, y = \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi,\ z = \frac{\pi}{4} + 2k_3\pi.$$

Cách 4. Bình phương các vế của hệ

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y+2\sin x\cos y\ge 2\\ \sin^2 y+\cos^2 z+2\sin y\cos z\ge 2\,.\\ \sin^2 z+\cos^2 x+2\sin z\cos x\ge 2\end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức, ta thu được:

$$2\sin x\cos y+2\sin y\cos z+2\sin z\cos x\ge 3\,.$$

Tuy nhiên, ta có

$$2\sin x\cos y+2\sin y\cos z+2\sin z\cos x$$

$$\le(\sin^2 x+\cos^2 y)+(\sin^2 y+\cos^2 z)+(\sin^2 z+\cos^2 x)=3$$

cho nên các BĐT trên trở thành đẳng thức và ta dễ dàng thu được nghiệm:

$$x=\frac{\pi}{4}+2k_1\pi,\ y=\frac{\pi}{4}+2k_2\pi,\ z=\frac{\pi}{4}+2k_3\pi.$$

Bài 4. (*Kì thi lần thứ 27 vô địch Serbia, năm 2001, bài 1, vòng 1*).

Cho biết $\sqrt{x}-\frac{1}{y}=\sqrt{y}-\frac{1}{z}=\sqrt{z}-\frac{1}{x}$.

Hãy chứng minh rằng $x=y=z$.

***Lời giải. Cách** 1.*

Từ $\sqrt{x}-\frac{1}{y}=\sqrt{y}-\frac{1}{z}$ ta có

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{z-y}{zy}.$$

Vậy: $$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{z-y}{zy}.\qquad(1)$$

Tương tự: $$\frac{y-z}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{x-z}{xz}\qquad(2)$$

$$\frac{z-x}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\frac{y-x}{yx}.\qquad(3)$$

Đặt $A=(x-y)(y-z)(z-x)$ và nhân theo vế của (1), (2) và (3) ta thu được:

$$\frac{A}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}=-\frac{A}{x^2y^2z^2},$$

$$\Leftrightarrow A.\left[\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)}+\frac{1}{x^2y^2z^2}\right]=0.$$

Vậy $A=0$, do đó phải có 2 trong 3 số x,y,z bằng nhau, và khi thay vào hệ ban đầu ta thu được $x=y=z$.

Cách 2. Cũng biến đổi như trên để thu được ba đẳng thức (1), (2) và (3). Xét các trường hợp:

TH1: $y>z$. Khi đó từ (1) suy ra $y>x$. Từ (3) suy ra từ $z>x$. Nhưng từ (2) suy ra $z>y$: mâu thuẫn.

TH2: $y<z$. Khi đó từ (1) suy ra $y<x$. Từ (3) suy ra từ $z<x$. Nhưng từ (2) suy ra $z<y$: mâu thuẫn.

Từ đó suy ra $y=z$ và tương tự ta có:

$$x=y=z.$$

VŨ ĐÌNH HÒA

(*GV khoa Công nghệ Thông tin, ĐHSP Hà Nội*)

***Nhận xét**.* Một số bạn gửi bài có đưa ra một số cách hình thức trình bày có vẻ khác những cách giải đã trình bày trên nhưng thực chất vẫn là những cách giải đó. Xin nêu tên hai bạn có lời giải tốt: **Quảng Bình:** *Hoàng Minh Dũng*, tổ dân phố 2, phường Đồng Sơn, TP. Đồng Hới; **Quảng Ngãi:** *Trương Quang An*, thôn An Hòa Nam, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa.

NHƯ HOÀNG

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 9. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích là S. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S.$$

Bài 10. Cho x, y, z là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+8zx}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+8xy}}\ge 1.$$

NGÔ VĂN THÁI

(*GV THPT Phạm Quang Thẩm, Vũ Thư, Thái Bình*)

GIẢI ĐÁP: BÀI TOÁN CỰC TRỊ !

(*Đề đăng trên TH&TT số* 479, *tháng* 5 *năm* 2017)

1. *Phân tích sai lầm.*

• Dễ thấy rằng nếu $A(1;1;0), B(1;1;2)$ thì

$$HA + HB = 1 + 3 \ge 2 = AB.$$

Do đó với $A(1;1;0), B(1;1;2)$ thì đẳng thức ở (1) không xảy ra. Bạn Toàn khẳng định "đẳng thức ở (1) xảy ra khi ba điểm H, A, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ cùng phương " là không đúng. Đẳng thức ở (1) xảy ra khi điểm H thuộc đoạn AB, nghĩa là hai vectơ $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ cùng phương, ngược hướng. Từ đặc điểm tọa độ của $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ ta thấy nếu hai vectơ này cùng phương thì $\overrightarrow{HB} = 3\overrightarrow{HA}$, tức là khi $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}$ cùng phương, cùng hướng. Vậy chứng tỏ đẳng thức ở (1) không xảy ra.

• Hơn nữa A, B là những điểm thay đổi lần lượt trên Δ_1, Δ_2 nên độ dài đoạn AB không phải là hằng số. Vì thế nếu đẳng thức ở (1) xảy ra thì cũng không kết luận được rằng khi đó $HA + HB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. *Lời giải đúng. Cách* 1.

Gọi $A(1+a;1+2a;0) \in \Delta_1$, $B(-3-2b;-1-b;2) \in \Delta_2$.

Lúc này $HA + HB = \sqrt{5a^2+1} + \sqrt{5(b+2)^2+9} \ge 4$ (2).

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi $a = 0$, $b = -2$. Suy ra $A(1;1;0), B(1;1;2)$. Vậy $HA + HB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi $A(1;1;0), B(1;1;2)$.

***Cách* 2.** Gọi $H_1(1+a;1+2a;0) \in \Delta_1$ và $H_2(-3-2b;-1-b;2) \in \Delta_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Δ_1, Δ_2. Ta có $\overrightarrow{u_1}(1;2;0)$ là VTCP của Δ_1, $\overrightarrow{u_2}(-2;-1;0)$ là VTCP của Δ_2.

Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{HH_1}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{HH_2}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4a = 0 \\ -2(-4-2b) - 1(-2-b) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Suy ra $H_1(1;1;0)$, $H_2(1;1;2)$. Vậy với mọi $A \in \Delta_1$, $B \in \Delta_2$ ta có: $HA + HB \ge HH_1 + HH_2 = 4$.

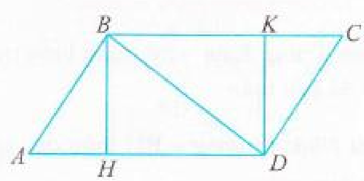
Đẳng thức xảy ra khi A, B tương ứng trùng với H_1, H_2. Vậy với $A(1;1;0), B(1;1;2)$ thì $HA + HB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4.

Nhận xét. Chỉ có bạn *Nguyễn Trung Kiên*, 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế** là phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải đúng.

KIHIVI

THÊM DẤU HIỆU: NHẬN BIẾT HÌNH BÌNH HÀNH !

Bài toán. *Cho tứ giác ABCD có $AB = CD$ và $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.*



Lời giải. Hạ $BH \perp AD$ tại H, $DK \perp BC$ tại K. Vì $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ nên H, K hoặc tương ứng thuộc các đoạn AD, BC hoặc tương ứng thuộc tia đối của AD, CB.

Ta có $\Delta ABH = \Delta CDK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra $DK = BH$ và $CK = AH$.

Suy ra $\Delta BHD = \Delta DKB$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông). Do đó $BK = DH$. Từ đó suy ra $BC = AD$.

Vậy tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$ và $AD = BC$ nên nó là hình bình hành. ❒

Như vậy, ta đã chứng minh được dấu hiệu nhận biết mới cho hình bình hành: "*Tứ giác có một cặp cạnh đối bằng nhau và một cặp góc đối bằng nhau là hình bình hành*".

Theo các bạn, lời giải trên đúng hay sai ? Tại sao?

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 483 (9.2017)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower,
Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Biên tập: LÊ MAI *Mĩ thuật*: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN *Thiết kế, chế bản*: MAI ANH

NHÀ THƠ PUSKIN QUÁ GIÀU TƯỞNG TƯỢNG ...

A. S. Pushkin (1799 -1837)

Puskin là nhà thơ Nga vĩ đại, có những bài thơ làm rung động trái tim hàng triệu người trên thế giới từ thế kỷ này sang thế kỷ khác. Điều đó không ai phủ nhận, nhưng nhiều khi vì *Puskin* để tâm hồn *"mơ theo trăng và vần cùng mây"* (Xuân Diệu) nên trong thơ của ông có nhiều chi tiết mới đọc thì thấy quá hào hùng, nhưng bình tâm đọc kỹ lại đối chiếu lời thơ với hiện thực thì thấy quá vô lý đến buồn cười,….

Thực vậy, các bạn hãy đọc bài thơ "***Chàng hiệp sĩ keo kiệt*** " trong truyện cổ tích bằng thơ của *Puskin*:

" Truyện xưa chép rằng:
Một hôm nhà Vua truyền cho quân sĩ:
Mỗi người bốc một nắm đất xếp thành đống cao
Để dựng lên ngọn đồi kiêu hãnh ".

Và nhà vua có thể ngự trên đỉnh đồi vui vẻ ngắm nhìn:

"Cả thung lũng dày đặc lều trại trắng xóa
Cả biển khơi tấp nập chiến thuyền ...."

Hùng tráng và đẹp quá ! Nhà Vua đứng trên đỉnh đồi cao, chống kiếm nheo mắt nhìn đoàn quân chiến thắng dưới thung lũng ở chân đồi và trên các chiến thuyền ken dày đặc ngoài biển khơi…

Nhưng nhà Vua đứng trên đồi nào nhỉ?

Chính là cái đồi được tạo thành bởi *"mỗi người bốc một nắm đất"* đắp nên.

Đồi này chắc là phải cao lắm. Ta hãy tính xem độ cao tối đa của nó là bao nhiêu. Cứ cho đoàn quân đông nhất là 10 vạn người = 100.000 người. Mỗi người bốc một nắm đất khoảng $\frac{1}{5}$ dm^3, vậy thể tích đồi là:

$$V = \frac{1}{5}.100000 = 20.000\ \text{dm}^3 = 20\ \text{m}^3.$$

Trước hết ta thấy độ dốc lớn nhất của đồi là 45^0, vì nếu độ dốc lớn hơn thì đất chuồi xuống, không bảo đảm an toàn cho nhà Vua; 20 m³ đắp thành một hình nón có độ dốc tối đa là 45 độ. Khi đó dễ thấy $h \le R$ (*h*, *R* thứ tự là đường cao, bán kính đáy của hình nón). Lấy $\pi = 3{,}14$ và chiều cao *h* lớn nhất bằng *R*, ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}3.14 \times h^3$$

$$\Rightarrow\ 20 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times h^3 \Rightarrow h \approx 2{,}7\ \text{m}.$$

Ngọn đồi chỉ cao có 2,7 mét mà nhà Vua lại có thể ngự trên ngọn đồi kiêu hãnh đó nhìn xa thấy *"lều trại trắng xóa"*, *"tấp nập chiến thuyền"*, vô lý quá.

Trí tưởng tượng của nhà thơ vĩ đại Puskin có thể nói là bay bổng thật, nhưng rõ ràng là không thực tế chút nào!

Nhưng nhiều người yêu thơ *Puskin* nói : Bài thơ có tứ thơ làm trí tưởng tượng ta bay bổng, gây cho ta nhiều cảm xúc sâu sắc là tốt rồi. Không có ai cảm thụ thơ theo cái kiểu toán học như vậy. Chỉ có các nhà Toán học dở hơi mới đọc thơ theo cái kiểu "Dùi đục chấm mắm cáy" như vậy!

PHAN THANH QUANG (*TP. Hồ Chí Minh*) *sưu tầm*

PHẢN VÍ DỤ !

Sau khi học xong các dấu hiệu chia hết, bạn *Chi*, học lớp 6, hỏi chị mình là *Phương*, học lớp 9:

Các số tự nhiên có tổng các chữ số chia hết cho 3^n $(n \ge 3)$ *có chia hết cho* 3^n *không?*

Suy nghĩ một lát, *Phương* bảo: *Có thể là không. Ví dụ: số* 9819 có 9 + 8 + 1 + 9 = 27, *nhưng* $9819 \not\vdots\, 27$.

Chi ồ lên ngạc nhiên nhưng vẫn muốn chị mình đưa ra phản ví dụ cho trường hợp tổng quát. *Phương* hơi lúng túng! Bạn có thể giúp *Phương* không?

LÊ QUANG NĂM

(*Khoa Toán Tin, ĐH KHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh*)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu bộ sách

CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ DÀNH CHO TIỂU HỌC VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Sau bộ sách ***Các kì thi Toán Quốc tế*** *dành cho học sinh THCS và THPT* đã được các giáo viên và các bạn học sinh hào hứng đón nhận, chúng tôi giới thiệu tiếp bộ sách tương tự dành cho lứa tuổi nhỏ hơn, bộ sách ***Các kì thi Toán Quốc tế*** *dành cho học sinh Tiểu học và THCS.* Dự kiến bốn tập đầu của bộ sách này như sau:

Tập 1. ***International Kangaroo Mathematics Contest*** (IKMC) - Kì thi Toán Quốc tế Kangaroo.

Tập 2. ***Bebras Computational Thinking Challenge*** (BCTC) - Thách thức tư duy tính toán Bebras.

Tập 3. ***International Mathematical Assessment for Schools*** (IMAS) - Kì thi đánh giá năng lực Toán học Quốc tế.

Tập 4. ***Math Olympiads for Elementary and Middle Schools*** (MOEMS) - Kì thi học sinh giỏi Toán Hoa Kì dành cho học sinh Tiểu học và THCS.

Việc tiếp cận với các kì thi quốc tế, các dạng toán mới lạ và hấp dẫn sẽ có tác động tích cực đến phong trào học tập nói chung. Bên cạnh đó, đây cũng sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích giúp các em học sinh chuẩn bị tốt hơn trong các kì thi học sinh giỏi mà các em có cơ hội tham dự. Bộ sách được thực hiện dưới sự chủ biên của PGS.TS. Lê Anh Vinh cùng các tác giả có nhiều kinh nghiệm trong việc bồi dưỡng cũng như dẫn đoàn học sinh giỏi của Việt Nam tham dự các kì thi Toán quốc tế và khu vực.

Tập 1 của bộ sách giới thiệu Kì thi Toán Quốc tế Kangaroo (International Kangaroo Mathematics Contest – IKMC) được tổ chức lần đầu tiên tại Pháp vào năm 1991. Đây là kì thi Toán học có số lượng thí sinh tham dự lớn nhất trên thế giới, thu hút trên 6 000 000 thí sinh đến từ khoảng 50 quốc gia mỗi năm. Kì thi là một hoạt động phi lợi nhuận, nhằm thúc đẩy phong trào dạy và học Toán theo xu hướng hội nhập quốc tế, tạo ra một sân chơi mở cho các em học sinh Tiểu học và Trung học cơ sở. Trung tâm Nghiên cứu và Ứng dụng khoa học Giáo dục (CERA), Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội là đơn vị được Uỷ ban Kangaroo quốc tế chỉ định là điều phối quốc gia tại Việt Nam, đại diện phối hợp cùng Trung tâm Phát triển Tư duy và Kỹ năng IEG tổ chức Kì thi Toán Quốc tế Kangaroo tại Việt Nam.

Liên hệ mua sách: **Phòng Kinh doanh - Công ty cổ phần Dịch vụ Xuất bản Giáo dục Hà Nội**

- **Địa chỉ: 187B Giảng Võ, Quận Đống Đa, Thành phố Hà Nội**
- **Tel: 024.35121974 - 024.36210196 – Fax: 024.35121973 - 024.36210201**
- **E-mail: phathanh@xbgdhn.vn**

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT9M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2017

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng