NĂM THỨ MƯỜI CHÍN
ISSN 1859-2740

Toán tuổi thơ 2

6/9
180 + 181
NĂM HỌC 2017 - 2018

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Giá: 20000đ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY - 8 NĂM MỘT CHẶNG ĐƯỜNG

ĐIỂM SÁNG TRÊN BẢN ĐỒ GIÁO DỤC THỦ ĐÔ

Hội đồng sư phạm trường THCS Cầu Giấy

Em Đinh Vũ Tùng Lâm - lớp 9A2

Được thành lập năm 2010 với cơ sở vật chất khang trang, hiện đại trên tổng diện tích 6500 m^2, trường THCS Cầu Giấy là một trong những công trình được gắn biển công trình 1000 năm Thăng Long - Hà Nội với sự kì vọng lớn lao của các cấp lãnh đạo và nhân dân về một địa chỉ giáo dục chất lượng cao mang tính ưu việt của nền giáo dục thời đại mới.

Trong suốt 8 năm, trường THCS Cầu Giấy đã đạt được kết quả đáng khích lệ với khoảng 96% học sinh đạt học lực giỏi. Năm học 2016 - 2017 trường có 41 học sinh đạt giải HSG văn hóa lớp 9 cấp Thành phố (tăng hơn năm học trước 8 em), 217 giải Quốc gia và quốc tế (tăng hơn năm học trước 45 giải). Kết quả thi vào 10 THPT hai môn Văn, Toán của nhà trường luôn ở tốp đầu thành phố, kết quả học sinh đỗ các trường chuyên chiếm xấp xỉ 80%.

Tại cuộc thi Câu lạc bộ Toán tuổi thơ toàn quốc 2017 được tổ chức tại Trà Vinh, đội Hà Nội đạt nhiều giải cao. Trường THCS Cầu Giấy có 1 giải Vàng, 1 giải Bạc, 1 giải Đồng, trong đó có em Đinh Vũ Tùng Lâm (9A2) đã đạt giải Vàng với số điểm tuyệt đối. Trong cuộc thi Toán Châu Á - Thái Bình Dương (APMOS) được tổ chức tại Singapore, bạn Nguyễn Thành Vinh (6A6) đã đạt giải Bạch kim. Đặc biệt, trong cuộc thi WMTC (Vô địch các đội tuyển Toán quốc tế được tổ chức tại Seoul - Hàn Quốc), các em học sinh đã về đích tuyệt vời với thành tích 4 Huy chương Vàng cá nhân, 1 Huy chương Vàng đồng đội và được nhận bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo. Bước sang thềm năm học mới 2017 - 2018, cũng với cuộc thi này được tổ chức tại Thái Lan, trường có 5 bạn học sinh tham gia và cả 5 em đều đạt Huy chương Vàng cá nhân, 1 Huy chương Vàng đồng đội, đạt vị trí số 1 trong phần thi Tiếp sức. Trong 5 chàng trai "Vàng", có 1 bạn xếp thứ hai thế giới, 1 bạn xếp thứ ba thế giới và cả 2 bạn đều đạt được học bổng của cuộc thi. Đặc biệt biểu dương học sinh Đinh Vũ Tùng Lâm, 2 lần dự thi đều mang về những tấm huy chương danh giá và còn rất nhiều những tấm gương ưu tú khác của các em đã được ươm mầm trên mảnh đất của ngôi trường Cầu Giấy.

Trải qua 8 năm trưởng thành và phát triển, vượt qua nhiều khó khăn và thách thức, trường THCS Cầu Giấy đã đạt nhiều thành tích đáng tự hào như: 5 năm liền nhận Bằng khen Tập thể xuất sắc của UBND thành phố Hà Nội, được công nhận là trường chuẩn Quốc gia vào năm 2013 và được công nhận đạt kiểm định chất lượng mức độ III vào năm 2014. Năm học 2014 - 2015 trường vinh dự là một trong 40 đơn vị được nhận Cờ thi đua xuất sắc của thành phố. Năm học 2015 - 2016 trường được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Cờ thi đua xuất sắc.

Điều gì đã làm nên thương hiệu THCS Cầu Giấy thuyết phục như vậy?

Trước hết, phải kể đến tầm nhìn chiến lược của các lãnh đạo quận Cầu Giấy với một cơ chế chính sách thu hút nhân tài được thực hiện với hiệu quả cao. Đội ngũ quản lí nhà trường là những người có tâm huyết, nhiệt tình, đầy kinh nghiệm và không ngại bứt phá: Thầy giáo Dương Văn Tiến - Hiệu trưởng đầu tiên của nhà trường với kinh nghiệm 30 năm làm công tác quản lí; cô giáo Lê Kim Anh - Hiệu trưởng đương nhiệm của nhà trường với sức trẻ sáng tạo và khát khao đổi mới giáo dục; nhà giáo ưu tú Hoàng Ngọc Đan - nguyên Phó Hiệu trưởng nhà trường tâm huyết, say mê với công tác chuyên môn; thầy Đoàn Tiến Trung - Phó Hiệu trưởng đương nhiệm của nhà trường với chuyên môn vững vàng và cách làm việc khoa học; cô giáo Phạm Thị Như Hoa - Phó Hiệu trưởng, tiến sĩ đầu tiên của ngành giáo dục quận Cầu Giấy, với nỗ lực cống hiến hết mình vì thành tích của nhà trường. Đến nay, 100% giáo viên của nhà trường đạt trình độ chuẩn và trên chuẩn, hơn 40% giáo viên có trình độ thạc sĩ, một giáo viên có trình độ tiến sĩ, hai giáo viên đang là nghiên cứu sinh, 35% giáo viên dạy giỏi cấp thành phố, 30% giáo viên có khả năng giao tiếp được một ngoại ngữ. Tất cả đã cùng nhau xây dựng một ngôi trường từ những nền móng đầu tiên để đạt được thành tích như ngày hôm nay.

Có thể nói trường THCS Cầu Giấy là ngôi nhà chung để những ý tưởng, những hoài bão được chắp cánh, gắn kết và hiện thực hóa. Với phương châm "Khơi nguồn những tiềm năng", trường THCS Cầu Giấy luôn quan niệm mỗi học sinh là một cá thể đầy sáng tạo.

Chặng đường 8 năm của trường THCS Cầu Giấy đã mang về thật nhiều thành tích vẻ vang. Hi vọng trong tương lai, thầy và trò trường THCS sẽ ngày càng nỗ lực và phấn đấu hơn nữa để khẳng định sức mạnh của nhà trường và khơi nguồn những tiềm năng từ những thế hệ học sinh đang tiếp bước.

PV. TTT

Toán Tuổi thơ 2 Trung học cơ sở

Children's Fun Maths Journal

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TÒA SOẠN

Tầng 5, số 361 đường Trường Chinh,
quận Thanh Xuân, Hà Nội
Điện thoại: 024.35682701 - Fax: 024.35682702
Email (Ban biên tập): bbttoantuoitho@gmail.com
Email (Trị sự - Phát hành): tapchitoantuoitho@gmail.com
Website: http://www.toantuoitho.vn

ĐẠI DIỆN TẠI MIỀN NAM

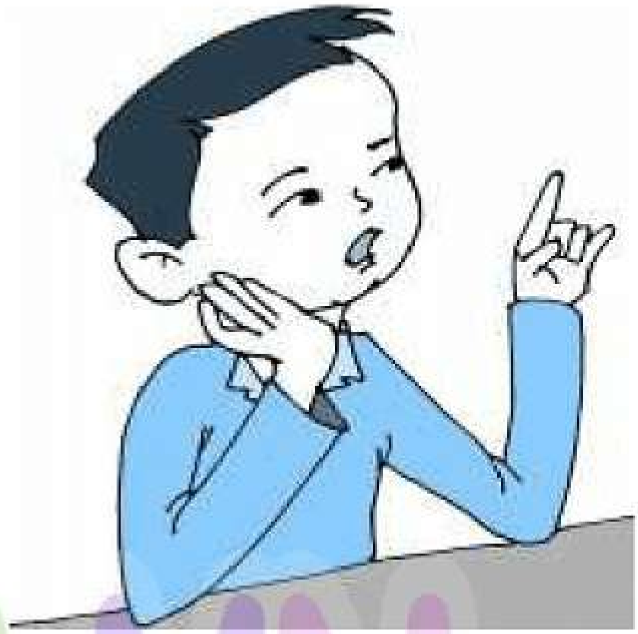
NGUYỄN VIẾT XUÂN
391/150 Trần Hưng Đạo, P. Cầu Kho, Q.1, TP. HCM
ĐT: 028.66821199, DĐ: 0973 308199

Trị sự - Phát hành:
TRỊNH THỊ TUYẾT TRANG, VŨ ANH THƯ,
NGUYỄN HUYỀN THANH, NGUYỄN THỊ HẢI ANH
Kĩ thuật vi tính: ĐỖ TRUNG KIÊN

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NXBGD Việt Nam:
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam:
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXBGD Việt Nam:
PHAN XUÂN THÀNH

TRONG SỐ NÀY



Dành cho học sinh lớp 6 7

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GÓC NGOÀI CỦA TAM GIÁC

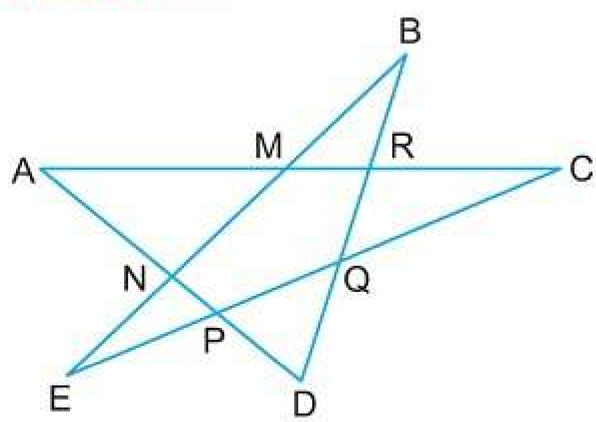
PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN
(Khoa Toán, Đại học Vinh, Nghệ An)
ThS. LÊ THỊ NGỌC THÚY
(Khoa Tự nhiên, Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An)

"Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó" là một kết quả đơn giản, dễ hiểu nhưng có nhiều ứng dụng trong giải toán hình học, từ những bài toán đơn giản đến những bài toán khá phức tạp. Sau đây ta xem xét một số bài toán có sử dụng tính chất góc ngoài của tam giác nhé.

1. Nhận dạng góc ngoài của tam giác

Góc trong của tam giác dễ nhận ra, nhưng ở một số bài toán, việc nhận biết và sử dụng góc ngoài không dễ. Cần có con mắt bao quát để phát hiện góc nào là góc ngoài của tam giác để áp dụng kết quả trên cho thích hợp.

Bài toán 1. Tính tổng các góc ở các đỉnh A, B, C, D, E của một hình ngôi sao năm cánh AMBRCQDPEN.



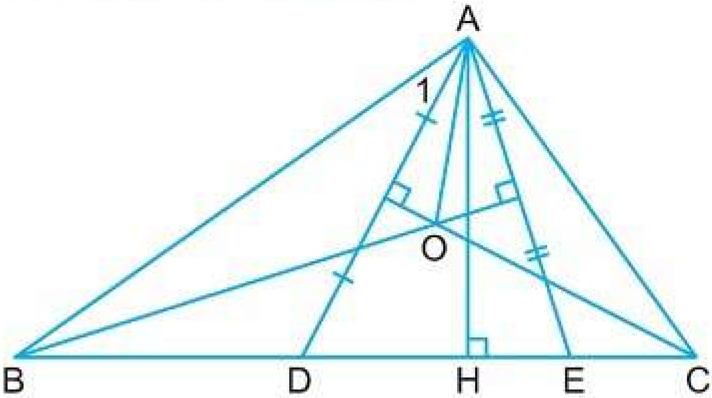
Lời giải. Vì $\widehat{AME}$ là góc ngoài của tam giác MEC nên $\widehat{AME} = \hat{C} + \hat{E}$.

Vì $\widehat{ANB}$ là góc ngoài của tam giác NBD nên $\widehat{ANB} = \hat{B} + \hat{D}$.

Suy ra

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = \hat{A} + \widehat{AMN} + \widehat{ANM} = 180^{o}$.

Bài toán 2. AH là đường cao của tam giác ABC vuông tại A. Các đường phân giác của các góc BAH và HAC lần lượt cắt BC tại D và E. Đường trung trực của AD và đường trung trực của AE cắt nhau tại O. Chứng minh AO là phân giác của góc BAC.



Lời giải. Vì $\widehat{ADC}$ là góc ngoài tam giác ABD nên $\widehat{ADC} = \widehat{A_1} + \widehat{ABC}$.

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{DAH}$, $\widehat{ABC} = 90^{o} - \widehat{ACB} = \widehat{HAC}$ nên $\widehat{CAD} = \widehat{CAH} + \widehat{DAH} = \widehat{ABC} + \widehat{A_1} = \widehat{ADC}$.

Do đó tam giác ACD cân tại C.

Suy ra đường trung trực của AD là đường phân giác của $\widehat{ACB}$.

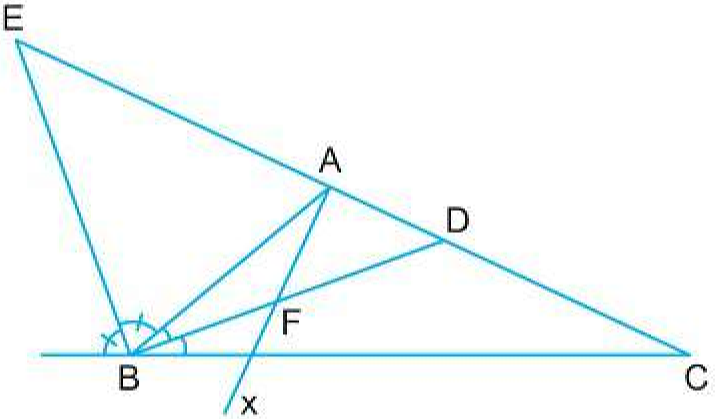
Tương tự, đường trung trực của AE là đường phân giác của $\widehat{ABC}$.

Vì ba đường phân giác trong của tam giác ABC đồng quy tại điểm O nên AO là đường phân giác của $\widehat{BAC}$.

2. Tạo ra góc ngoài của tam giác

Một số bài toán phải tạo ra các góc ngoài thích hợp mới giải được. Đây là phương pháp vẽ đường phụ để giải toán.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^o + \widehat{ACB}$. Gọi BD và BE tương ứng là các đường phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC. Chứng minh rằng BD = BE.



Lời giải. Vì $\widehat{ADB}$ là góc ngoài của tam giác BCD nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + \widehat{DBC}$.

Kẻ tia Ax sao cho Ax $\perp$ AC và Ax cắt BD tại F.

Vì $\widehat{AFD}$ là góc ngoài của tam giác ABF nên $\widehat{AFD} = \widehat{BAF} + \widehat{ABD}$.

Từ giả thiết $\widehat{BAC} = 90^o + \widehat{ACB}$ suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} - 90^o = \widehat{BAF}$. Từ đó và $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ (gt) nên $\widehat{ADF} = \widehat{AFD} = 45^o$.

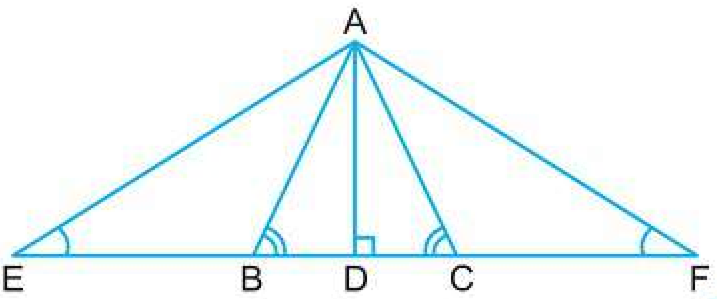
Mặt khác, BD và BE là các tia phân giác của hai góc kề bù nên BD $\perp$ BE.

Từ đó $\widehat{BED} = 45^o$ nên tam giác BDE vuông cân tại B. Suy ra BD = BE.

3. Góc ngoài của tam giác cân

Trong lời giải các bài toán sau ta có sử dụng kết quả: "Trong một tam giác cân, góc ngoài ở đỉnh gấp đôi mỗi góc trong ở đáy".

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với AD là đường cao. Biết rằng AB + BD = AC + CD. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A.



Lời giải. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho BE = BA. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho CF = CA.

Khi đó $\widehat{ABC}$ là góc ngoài của tam giác ABE cân ở B nên $\widehat{ABC} = 2.\widehat{AEB}$.

Tương tự ta có $\widehat{ACB} = 2.\widehat{AFC}$.

Từ giả thiết AB + BD = AC + CD suy ra DE = DF. Do đó $\Delta ADE = \Delta ADF$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$. Từ đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên tam giác ABC cân tại A.

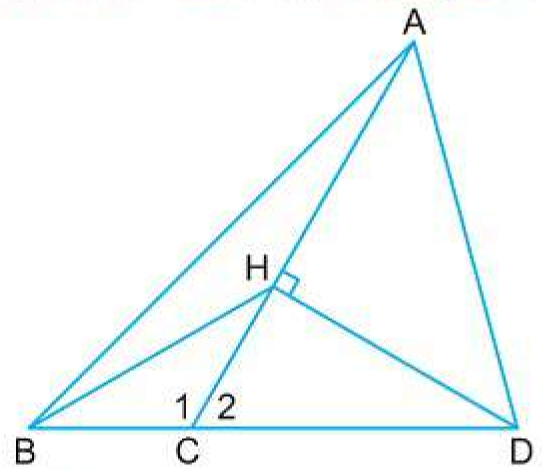
Bài toán 5. Cho tam giác ABC với AD là phân giác trong. Biết rằng AB + BD = AC + CD. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A.

Lời giải. Cách giải bài này tương tự bài toán 4, nhưng việc kéo dài có điểm khác: Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho BE = BD. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho CF = CD.

Các lập luận còn lại được tiến hành hoàn toàn tương tự bài toán trên.

4. Áp dụng tính chất góc ngoài tam giác vào các bài toán phức tạp hơn

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với $\widehat{ABC} = 45^o$, $\widehat{ACB} = 120^o$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho CD = 2CB. Tính số đo góc ADB.



Lời giải. Vì $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 180^o$ và $\widehat{C_1} = 120^o$ (gt) nên $\widehat{C_2} = 60^o$.

Vẽ DH $\perp$ AC. Trong tam giác HCD vuông tại H có $\widehat{CDH} = 30^o$ nên CD = 2CH.

Mà CD = 2CB (gt) nên CH = CB.

Vậy tam giác BCH cân tại C.

Mặt khác ΔBCH có góc ngoài $\widehat{HCD} = 60^o$ nên $\widehat{HBC} = 30^o = \widehat{HDC}$.

Do đó ΔHBD cân tại H nên HD = HB.

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{ABC} - \widehat{HBC} = 45^o - 30^o = 15^o$,

$\widehat{BAC} = 180^o - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$

$= 180^o - (45^o + 120^o) = 15^o$.

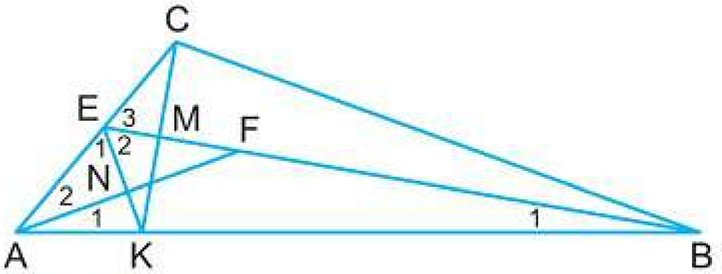
Do đó tam giác AHB cân tại H.

Suy ra HA = HB.

Do đó HA = HD, từ đó suy ra tam giác HAD vuông cân tại H.

Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ADH} + \widehat{HDC} = 45^o + 30^o = 75^o$.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 50^o$, $\widehat{ABC} = 20^o$. Trên đường phân giác BE của tam giác lấy điểm F sao cho $\widehat{FAB} = 20^o$. Gọi N là trung điểm của AF, K là giao điểm của EN và AB. Tính số đo góc KCB.



Lời giải. Gọi M là giao điểm của CK và BE.

Vì $\widehat{EFA}$ là góc ngoài của tam giác FAB nên $\widehat{EFA} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 20^o + 10^o = 30^o$.

Vì $\widehat{A_2} = 30^o$ nên tam giác EAF cân tại E, từ đó $\widehat{AEF} = 120^o$.

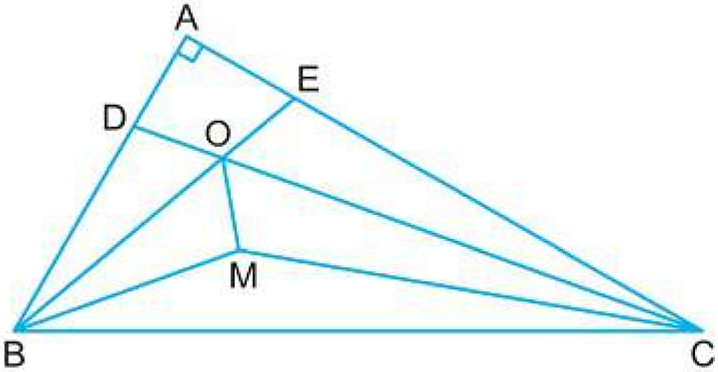
Mà đường trung tuyến EN cũng là đường phân giác trong của tam giác EAF nên $\widehat{E_1} = \widehat{E_2} = 60^o$, từ đó $\widehat{E_3} = 60^o$.

Suy ra $\Delta EBK = \Delta EBC$ (g.c.g) nên BC = BK.

Do đó tam giác BCK cân tại B với góc ở đỉnh B bằng 20^o.

Suy ra $\widehat{CKB} = (180^o - 20^o) : 2 = 80^o$.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AB lấy điểm D, trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ACD} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$, $\widehat{ABE} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng OD = OE.



Lời giải. Vì $\widehat{DOB}$ là góc ngoài của tam giác BOC nên

$\widehat{DOB} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \frac{2}{3}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 60^o$.

Do đó $\widehat{BOC} = 120^o$.

Tia phân giác của góc EBC và tia phân giác của góc DCB cắt nhau tại M.

Khi đó OM là đường phân giác của góc BOM nên $\widehat{MOB} = \widehat{MOC} = 60^o$.

Do đó $\Delta BMO = \Delta BDO$ (g.c.g).

Từ đó OM = OD.

Tương tự OM = OE nên OD = OE.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác trong góc C cắt phân giác trong và phân giác ngoài đỉnh B theo thứ tự tại D và E. Chứng minh BD = BE.

Bài 2. Cho tam giác ABC có góc A tù, đường cao AH và đường phân giác trong BD thỏa mãn $\widehat{AHD} = 45^o$. Tính số đo $\widehat{ADB}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50^o$. N là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{NBC} = 10^o$, $\widehat{NCB} = 20^o$. Tính số đo $\widehat{ANB}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 80^o$. Trên cạnh AC lấy các điểm D và E sao cho $\widehat{CBD} = 50^o$, $\widehat{BCE} = 60^o$. Tính số đo $\widehat{CED}$.

Bài 5. Cho góc vuông xOy. Trên tia Ox lấy một điểm A. Trên tia Oy lấy các điểm B, C, D theo thứ tự sao cho OB = BC = CD = OA. Chứng minh rằng $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} + \widehat{ADO}$.

Dành cho học sinh lớp 6 & 7

CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

VÕ XUÂN MINH
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Có một số bài toán số học mà nhờ xét chữ số tận cùng thì lời giải ngắn gọn, thậm chí mới có thể giải được.
Trước hết ta nhắc lại chữ số tận cùng của một số tự nhiên a chính là số dư khi chia a cho 10 và có thể tìm được thông qua một số dấu hiệu sau đây:

* $a \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow$ a có tận cùng là 0; 2; 4; 6 hoặc 8.
* $a \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow$ a có tận cùng là 0 hoặc 5.
* $a \,\vdots\, 10 \Leftrightarrow$ a có tận cùng là 0.
* a^2 tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6 hoặc 9.
* a(a + 1) tận cùng là 0; 2 hoặc 6.
* a và a^5 có chữ số tận cùng như nhau.
* a^n có tận cùng là 0; 1; 5 hoặc 6 với mỗi số tự nhiên $n > 0 \Leftrightarrow$ a lần lượt tận cùng là 0; 1; 5 hoặc 6.
* Tích 5a có tận cùng là 0 nếu a chẵn và có tận cùng là 5 nếu a lẻ.

Sau đây là một số bài toán được giải nhờ sử dụng chữ số tận cùng.

Bài toán 1. Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$.

Lời giải. Từ đề bài suy ra 1000a + 200b + 30c + 4d = 4574. (1)
Suy ra 4d có tận cùng là 4 nên d = 1 hoặc d = 6.

- Nếu d = 1 thì từ (1) suy ra
100a + 20b + 3c = 457. (2)
Suy ra 3c có tận cùng là 7 nên c = 9.
Thay vào (2) được $10a + 2b = 43 \Rightarrow 2b$ có tận cùng là 3 (loại).
- Nếu d = 6 thì từ (1) suy ra
100a + 20b +3c = 455. (3)
Suy ra 3c có tận cùng là 5 nên c = 5.
Thay vào (3) ta được 10a + 2b = 44. (4)
Suy ra 2b có tận cùng là 4 nên b = 2 hoặc b = 7.
Thay vào (4) ta được a = 4 hoặc a = 3.

Thử lại thấy đúng.
Vậy $\overline{abcd}$ là 4256 hoặc 3756.

Bài toán 2. Từ tích 1.2.3.4...2015 = 2015! người ta loại đi tất cả các số chia hết cho 5. Hỏi tích các số còn lại chia cho 10 có số dư là bao nhiêu?

Lời giải. Ta thấy tích 1.2.3.4.6.7.8.9 có tận cùng là 6.
Do đó các tích 11.12.13.14.16.17.18.19; ...; 2001.2002.2003.2004.2006.2007.2008.2009 đều có cùng chữ số tận cùng là 6.
Có 201 tích như vậy.
Từ đó suy ra tích 1.2.3.4...2015 = 2015! sau khi loại bỏ tất cả các số chia hết cho 5 có chữ số tận cùng chính là chữ số tận cùng của A = 6^{201}.(2011.2012.2013.2014) mà 6^{201} tận cùng là 6 và 2011.2012.2013.2014 tận cùng là 4 nên A tận cùng là 4, tức là số đó chia cho 10 có số dư là 4.
Đáp số: 4.

Bài toán 3. Cho S = (1 + 2 + 3 + ... + n) − 9 ($n \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng S không chia hết cho 2010.

Lời giải. Nếu S chia hết cho 2010 thì S có tận cùng là 0, suy ra 2S + 18 có tận cùng là 8, nhưng 2S + 18 = 2(1 + 2 + 3 + ... + n) = n(n + 1) chỉ có thể có tận cùng là 0, 2, 6. Vậy S không chia hết cho 2010.

Bài toán 4. Chứng minh rằng các số Fermat $A(n) = 2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) không thể là số chính phương.

Lời giải. Ta có A(2) = 17.
Giả sử A(n) có tận cùng là 7 với $n \geq 2$.
Ta có $A(n+1) = 2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1$.
Vì A(n) tận cùng là 7 nên 2^{2^n} có tận cùng là 6.
Suy ra A(n + 1) có tận cùng là 7.
Vậy A(n) có tận cùng là 7 với $n \geq 2$.

Kết hợp với A(0) = 3, A(1) = 5 thì A(n) không thể là số chính phương với bất kì $n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ với $a, b, n \in \mathbb{N}$ và $0 < b < 10$, $n > 3$ thì $ab \vdots 6$.

Lời giải. Vì $2^n = 10a + b$ và $0 < b < 10$ nên 2^n có tận cùng là b.

Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $0 \le r \le 3$) thì $2^n = 2^{4k+r} = 16^k.2^r$.

* Nếu r = 0 thì $2^n = 16^k$ có tận cùng là $6 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow ab \vdots 6$.

* Nếu $1 \le r \le 3$ thì $2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1)$ tận cùng là 0 (vì $16^k - 1$ tận cùng là 5)

$\Rightarrow 2^n$ có tận cùng là $2^r \Rightarrow b = 2^r$.

Từ đó

$10a = 2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \vdots (16 - 1)$

$\Rightarrow 10a \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3$.

Mặt khác $2^n = 10a + b \Rightarrow b \vdots 2$. Do đó $ab \vdots 6$.

Vậy ta luôn có $ab \vdots 6$.

Bài toán 6. Chứng minh rằng $A = 0,9 \times (1983^{1983} - 1917^{1917})$ là số nguyên.

Lời giải. Ta có

$3^{1983} = 3^3 \cdot (3^4)^{495} = 27 \cdot 81^{495}$

$\Rightarrow 1983^{1983}$ có tận cùng là 7.

Mặt khác $7^{1917} = 7 \cdot (7^4)^{479} = 7 \cdot 2401^{479}$

$\Rightarrow 1917^{1917}$ có tận cùng là 7.

Do đó $1983^{1983} - 1917^{1917}$ có tận cùng là 0 $\Rightarrow$ A là số nguyên.

Bài toán 7. Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

a) $10 + 11^x + 6^x = (\sqrt{3})^{y!}$;

b) $2^{x!} + 6^y = 10^y$.

Lời giải. a) Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên 11^x có tận cùng là 1 và 6^x có tận cùng là 6 $\Rightarrow 10 + 11^x + 6^x$ có tận cùng là 7.

Mặt khác nếu $y \ge 4$ thì $(\sqrt{3})^{y!} = (3^4)^{3.5...y} = 81^{3.5...y}$ có tận cùng là 1 (loại).

Do đó $y \le 3$.

- Nếu y = 1 thì $10 + 11^x + 6^x = \sqrt{3}$ (vô lí).
- Nếu y = 2 thì $10 + 11^x + 6^x = 3$ (vô lí).
- Nếu y = 3 thì $11^x + 6^x = 17 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x; y) là (1; 3).

b) Vì $y \in \mathbb{N}^*$ nên 6^y có tận cùng là 6 và 10^y có tận cùng là $0 \Rightarrow 2^{x!}$ có tận cùng là 4.

- Nếu $x \ge 4$ thì $2^{x!} = (2^4)^{2.3.5...x} = 16^{2.3.5...x}$ có tận cùng là 6 (loại).
- Nếu x = 1 thì $2^{x!} = 2$ (loại).
- Nếu x = 2 thì $10^y - 6^y = 4$. (*)

Với y > 1 ta có:

$10^y - 6^y = (10 - 6)(10^{y-1} + 10^{y-2}.6 + ... + 6^{y-1}) > 4$ (loại).

Suy ra y = 1 (thỏa mãn (*)).

- Nếu x = 3 thì $10^y - 6^y = 64$. (**)

Với y > 2 thì tương tự, ta có:

$10^y - 6^y > 4(10 + 6) = 64$ (loại).

Với y = 1 (loại) còn với y = 2 (thỏa mãn (**)).

Vậy (x; y) là (2; 1); (3; 2).

Bài tập

Bài 1. Chứng minh rằng:

a) $1979^{1972} - 1977^{1972} \vdots 10$;

b) $1993^{1993} + 1997^{1997} \vdots 10$.

Bài 2. Tìm số $\overline{abcd}$ biết:

a) $\overline{abc} = \overline{dac} : c$;

b) $\overline{abcd}.9 = \overline{dcba}$.

Bài 3. Tìm số $\overline{abc}$ biết $a + \overline{ab} + \overline{abc} = \overline{bcb}$.

Bài 4. Tìm a và b sao cho $\overline{19ab}$ chia hết cho 5 và 16.

Bài 5. Chứng minh rằng $n^5 - n \vdots 30$ ($n \in \mathbb{N}$).

Bài 6. Tìm số tự nhiên m và n sao cho $(m!)^4 = n^2 - 7$.

Bài 7. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $1! + 2! + 3! + ... + x! = y^2$.

Bài 8. Chứng minh rằng $A = 2 + 3 + 4 + ... + n - 2^{2^n}$ không chia hết cho 10 ($n \ge 2$).

Bài 9. Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $n^2 + n + 1 \vdots 2015$?

Bài 10. Tìm số nhỏ nhất mà khi đem nhân với số 12345679 sẽ nhận được một số biểu thị bởi các chữ số 5.

KĨ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

TRẦN QUỐC ANH
(Giám đốc Trung tâm Beta Education)

I. Bất đẳng thức AM-GM

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm thì $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

- Ta thường sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ 2 số và 3 số (không âm):

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

II. Kĩ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức AM-GM

Phương pháp giải: Dự đoán trước dấu bằng (tức điểm rơi) của bài toán, từ đó điều chỉnh hệ số để đảm bảo việc dấu bằng luôn xảy ra.

III. Ví dụ mẫu

Bài toán 1. Cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + \frac{1}{x}$.

Lời giải. Dự đoán được giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi $x = 2$, khi đó $\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$.

Bởi vậy áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$P = x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$, từ đó giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{2}$.

Bài toán 2. Cho $x, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Lời giải.

Biến đổi ta có $P = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Đặt $t = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, theo bất đẳng thức AM-GM ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow t \geq 2$.

Khi đó $P = t + \frac{1}{t}$ với $t \geq 2$, áp dụng kết quả bài toán 1 ta thu được $P \geq \frac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y$.

Bài toán 3. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;

b) $B = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$;

c) $C = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$;

d) $D = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$.

Lời giải. Dự đoán được giá trị nhỏ nhất của các biểu thức đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$, bởi vậy sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

a) $A = 4x + \frac{1}{x} + 4y + \frac{1}{y} - 3(x+y) \ge 4 + 4 - 3 = 5.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Min} A = 5.$

b) Chú ý rằng $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Do đó

$B = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$= 16xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 15xy$

$\ge 8 + 2 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Min} B = \frac{25}{4}.$

c) Chú ý rằng $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Do đó

$C \ge 2xy + \frac{2}{xy} = 2\left(16xy + \frac{1}{xy}\right) - 30xy$

$\ge 16 - \frac{15}{2} = \frac{17}{2}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Min} C = \frac{17}{2}.$

d) **Cách 1.** Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$ ta có

$D = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

$\ge \frac{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2}{2} = \frac{A^2}{2} \ge \frac{25}{2}.$

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng $a^2 + b^2 \ge 2ab$ ta có

$D = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

$\ge 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2B \ge \frac{25}{2}.$

Cách 3. Biến đổi ta có

$D = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

$= x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 4 = C + 4 \ge \frac{25}{2}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Min} D = \frac{25}{2}.$

IV. Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho $x \ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x + \frac{1}{x}$.

Bài 2. Cho x, y > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$.

Bài 3. Cho x, y > 0 thỏa mãn $x + y \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x + y + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$;

b) $B = \left(x + \frac{2}{x}\right)\left(y + \frac{2}{y}\right)$;

c) $C = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2}$;

d) $D = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{y}\right)^2$.

Bài 4. Cho x, y > 0 thỏa mãn $xy + 4 \le 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$.

Học ra sao? Giải toán thế nào?

SỬ DỤNG CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

TRẦN ANH TUẤN
(GV. THCS Nhân Hậu, Lý Nhân, Hà Nam)

Phương trình vô tỉ có nội dung phong phú và đa dạng. Trong bài viết này tôi xin trình bày phương pháp giải phương trình vô tỉ bằng cách sử dụng hằng đẳng thức.

Bài toán 1. Giải phương trình

$4\sqrt{x+3}=1+4x+\frac{3}{x}.$ (1)

Lời giải. ĐKXĐ $x\ge -3;\ x\ne 0$.

$(1)\Leftrightarrow 4x\sqrt{x+3}=x+4x^2+3$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3})^2-2.\sqrt{x+3}.2x+(2x)^2=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2x)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 4x^2-x-3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

Bài toán 2. Giải phương trình

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=1.$ (2)

Lời giải. ĐKXĐ $0\le x\le 1$.

$(2)\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}+\sqrt{1-x})$

$-(x-2\sqrt{x(1-x)}+1-x)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2-(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})^2=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}-\sqrt{x}+\sqrt{1-x})\times$

$\times(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}-\sqrt{1-x})=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}-\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=0 \text{ (i)}\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0 \text{ (ii)}\end{array}\right.$

(i) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}+(\sqrt[4]{1-x}-\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{1-x}-\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{1-x}=\sqrt[4]{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.\\ \sqrt[4]{1-x}=1-\sqrt[4]{x}\end{array}\right.$

Đặt $a=\sqrt[4]{1-x}$ và $b=\sqrt[4]{x}$ thì $0\le a\le 1$, $0\le b\le 1$ và $a+b=a^4+b^4=1$.

Điều này không xảy ra khi $0<a<1$, nên $a=0$ $\Leftrightarrow x=1$ hoặc $a=1\Leftrightarrow x=0$.

(ii) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x})=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}=0\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+1=0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

(thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là

$S=\left\{0;\ \frac{1}{2};\ 1\right\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình

$x^2-6x+29+2\sqrt{3x^2+10x+3}$
$=(10-2x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}).$ (3)

Lời giải. ĐKXĐ $x\ge -\frac{1}{3}$.

Ta có

$(3)\Leftrightarrow (x+3)+(3x+1)+(x-5)^2$

$+2\sqrt{(x+3)(3x+1)}+2(x-5)\sqrt{x+3}$

$+2(x-5)\sqrt{3x+1}=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+x-5)^2=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+x-5=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)+(\sqrt{3x+1}-2)+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

(Vì $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0,\ \forall x\ge -\dfrac{1}{3}$).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{1\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình

$x^3+3x^2+12x+6+\sqrt{-3x-2}=3x\sqrt{-3x-2}$. (4)

Lời giải. ĐKXĐ $x\le -\dfrac{2}{3}$.

(4) $\Leftrightarrow (-3x-2)\sqrt{-3x-2}+3\sqrt{-3x-2}-3(-3x-2)$

$=-x^3-3x^2-3x$

$\Leftrightarrow (\sqrt{-3x-2})^3-3(\sqrt{-3x-2})^2+3\sqrt{-3x-2}-1$

$=(-x)^3-3(-x)^2+3(-x)-1$

$\Leftrightarrow (\sqrt{-3x-2}-1)^3=(-x-1)^3$

$\Leftrightarrow \sqrt{-3x-2}-1=-x-1 \Leftrightarrow \sqrt{-3x-2}=-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x\ge 0\\ -3x-2=x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2+3x+2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-2\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\{-1;-2\}$.

Bài toán 5. Giải phương trình

$\sqrt[3]{3x^2-x+2016}-\sqrt[3]{3x^2-6x+2017}$

$-\sqrt[3]{5x-2018}=\sqrt[3]{2017}$. (5)

Lời giải. Đặt

$\begin{cases}m=\sqrt[3]{3x^2-x+2016}\\ n=-\sqrt[3]{3x^2-6x+2017}\\ p=-\sqrt[3]{5x-2018}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m^3=3x^2-x+2016\\ n^3=-3x^2+6x-2017\\ p^3=-5x+2018\end{cases}$

Suy ra $m^3+n^3+p^3=2017$.

Phương trình trở thành

$(m+n+p)^3=m^3+n^3+p^3$

$\Leftrightarrow 3(m+n)(n+p)(p+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-n\\ n=-p\\ p=-m\end{array}\right.$

- $m=-n \Leftrightarrow m^3=-n^3$.

$\Leftrightarrow 3x^2-x+2016=3x^2-6x+2017 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$.

- $n=-p \Leftrightarrow m^3=-p^3$.

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+2017=-5x+2018$

$\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

- $p=-m \Leftrightarrow p^3=-m^3$.

$\Leftrightarrow 5x-2018=3x^2-x+2016$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+4034=0$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có tập nghiệm là

$S=\left\{\dfrac{1}{5};\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Bài tập vận dụng

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+8}+\dfrac{9x}{\sqrt{x+8}}-6\sqrt{x}=0$;

b) $x^4-2x^3+\sqrt{2x^3+x^2+2}-2=0$;

c) $3x\sqrt[3]{x+7}(x+\sqrt[3]{x+7})=7x^3+12x^2+5x-6$;

d) $4x^2+(8x-4)\sqrt{x}-1=3x+2\sqrt{2x^2+5x-3}$;

e) $16x^2+19x+7+4\sqrt{-3x^2+5x+2}$
$=(8x+2)(\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+1})$;

g) $(5x+8)\sqrt{2x-1}+7x\sqrt{x+3}$
$=9x+18-(x+26)\sqrt{x-1}$;

h) $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$;

i) $(x+17)\sqrt{4-x}+(20-x)\sqrt{x+1}$
$-9\sqrt{(4-x)(x+1)}=36$.

Học ra sao? Giải toán thế nào?

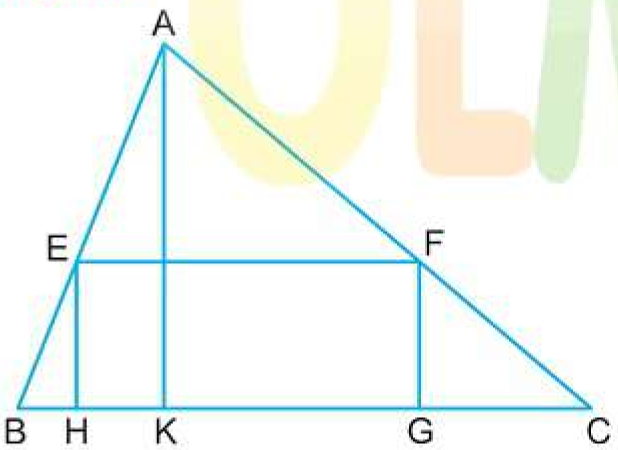
CẮT GIẤY ĐỂ ĐƯỢC HÌNH CÓ DIỆN TÍCH LỚN NHẤT

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Trong thực tế cuộc sống nhiều khi chúng ta phải giải quyết vấn đề: Có một tờ giấy cho trước cần cắt để được một hình theo yêu cầu và có diện tích lớn nhất. Một số bạn thực hành theo thói quen nhưng không biết giải thích là tại sao, cũng có khi không biết mình cắt có đúng không. Bài viết này sẽ giới thiệu cùng bạn đọc một số bài toán minh họa.

Bài toán 1. Cho một mảnh giấy hình tam giác nhọn. Hãy cắt mảnh giấy này để được một hình chữ nhật (các đỉnh của hình chữ nhật nằm trên cạnh của tam giác) có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn.



Vẽ $AK \perp BC$ tại K.

Tam giác ABK có EH // AK nên $\dfrac{EH}{AK} = \dfrac{BE}{AB}$.

Tam giác ABC có EF // BC nên $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$.

Do đó $\dfrac{EH}{AK} + \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{BE + AE}{AB} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm ta có

$$1 = \frac{EH}{AK} + \frac{EF}{BC} \geq 2\sqrt{\frac{EH}{AK}.\frac{EF}{BC}} = 2\sqrt{\frac{S_{EFGH}}{2S_{ABC}}}.$$

Suy ra $S_{EFGH} \leq \dfrac{1}{2}S_{ABC}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{EH}{AK} = \dfrac{EF}{BC} \Leftrightarrow$ E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, AC, CK, BK.

Từ đó ta có cách cắt thỏa mãn đề bài.

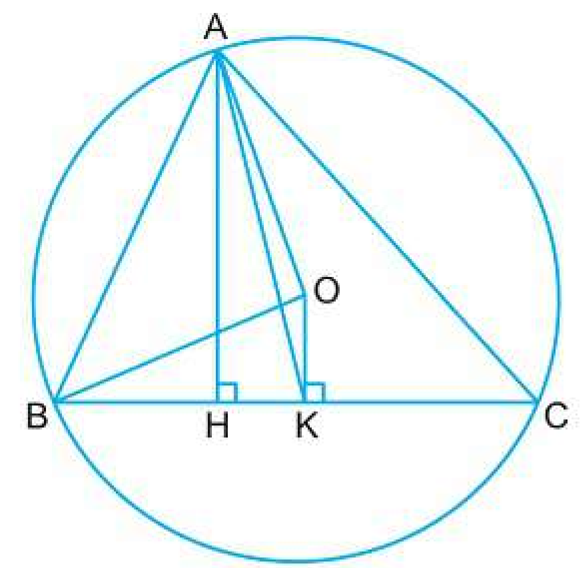
Bài toán 2. Cho một mảnh giấy hình tròn. Hãy cắt mảnh giấy đã cho để được một mảnh giấy hình tam giác có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn.

Nhận xét 1. *Hình tam giác nằm trong một hình tròn có diện tích lớn nhất thì các đỉnh của nó phải nằm trên đường tròn biên của hình tròn đó.*

Thật vậy, nếu tam giác ABC có đỉnh nằm bên trong hình tròn thì khi kéo dài một cạnh AB về phía ngoài tam giác và cắt đường tròn biên tại D sẽ được tam giác ACD có diện tích lớn hơn diện tích ΔABC.

Trở lại bài toán. Xét ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và $\overset{\frown}{BAC}$ lớn nhất.



Vẽ $AH \perp BC$ tại H thuộc BC, $OK \perp BC$ tại K.

Đặt $OK = x$.

Ta có $BC = 2BK = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

$AH \le AK$; $AK \le OA + OK$.

Do đó $AH \le R + x$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC \le (R+x)\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(R+x)(R+x)(R+x)(3R-3x)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{R+x+R+x+R+x+3R-3x}{4}\right)^4}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $R + x = 3R - 3x$; H trùng với K và O nằm giữa A và K khi và chỉ khi ΔABC đều.

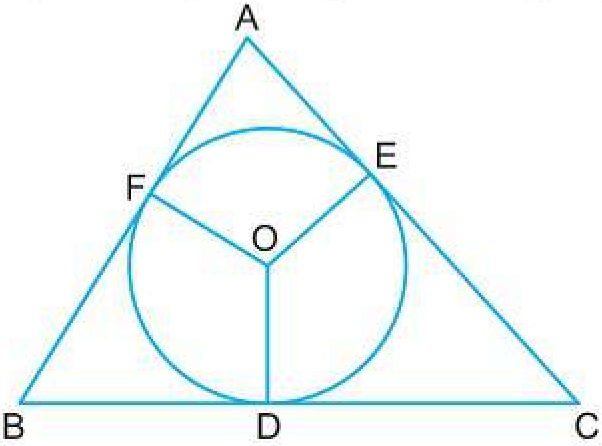
Từ đó ta suy ra cách cắt thỏa mãn đề bài.

Bài toán 3. Cho một mảnh giấy hình tam giác. Hãy cắt mảnh giấy đó để để được một hình tròn có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn.

Nhận xét 2. *Hình tròn nằm trong một tam giác có diện tích lớn nhất thì hình tròn đó có (ít nhất) một điểm chung với hai cạnh của tam giác.*

Chứng minh nhận xét này dành cho bạn đọc.



Đường tròn (O) có nhiều nhất một điểm chung với một cạnh của tam giác và $OD = OE = OF$.

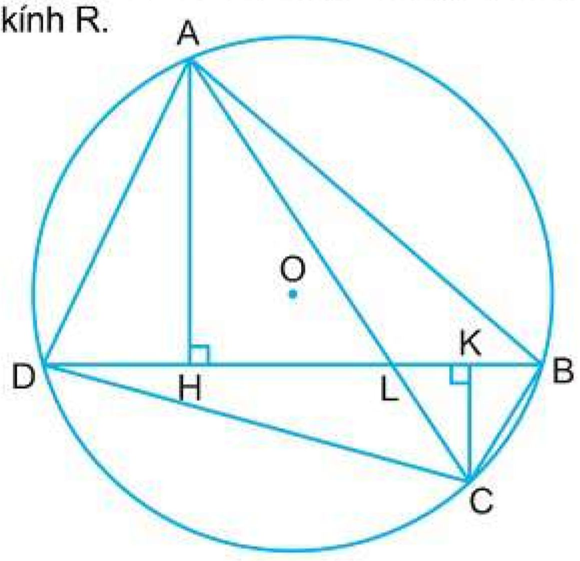
Do đó bán kính của hình tròn có diện tích lớn nhất bằng bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Từ đó ta suy ra cách cắt thỏa mãn đề bài.

Bài toán 4. Cho một mảnh giấy hình tròn. Hãy cắt mảnh giấy đó để được một mảnh giấy hình tứ giác có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn. Ta có nhận xét tương tự như nhận xét 1.

Xét tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.



Vẽ $AH \perp BD$ tại H, $CK \perp BD$ tại K.

Gọi L là giao điểm của AC và BD.

Ta có $AH \le AL$, $CK \le CL$.

Do đó $AH + CK \le AC$; $AC \le 2R$; $BD \le 2R$.

Suy ra $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$

$$= \frac{1}{2}.BD.AH + \frac{1}{2}.BD.CK$$

$$= \frac{1}{2}.BD(AH + CK) \le \frac{1}{2}BD.AC$$

$$\le \frac{1}{2}.2R.2R = 2R^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi H, K, L trùng nhau và $AC = BD = 2R$, tức là $AC \perp BD$ và $AC = BD = 2R$, tức là tứ giác ABCD là hình vuông.

Từ đó ta có cách cắt thỏa mãn đề bài.

Ta nhận thấy bài toán 3 là bài toán ngược của bài toán 2. Bạn hãy giải bài toán ngược của bài toán 1 và bài toán ngược của bài toán 4 dưới đây.

Bài toán 5. Cho một mảnh giấy hình chữ nhật. Hãy cắt mảnh giấy này để được một hình tam giác có diện tích lớn nhất.

Bài toán 6. Cho một mảnh giấy hình tứ giác. Hãy cắt mảnh giấy này để được một mảnh giấy hình tròn có diện tích lớn nhất.

Các bạn hãy sáng tạo các bài toán mới về cực trị hình học: cắt mảnh giấy (hình vuông, hình bình hành, ...) để được một hình có diện tích lớn nhất nhé.

Kì này KÌ 31

Hãy thay các chữ cái bởi các chữ số. Các chữ khác nhau biểu diễn các chữ số khác nhau. Lời giải cần có lập luận lôgic.

$$\begin{array}{r} \text{BULL} \\ \times \quad \text{BUS} \\ \hline \text{SOUNDS} \end{array}$$

ĐÔNG BA

Kết quả KÌ 30 (TTT2 số 176+177)

$$\begin{array}{r} \text{GO} \\ \times \quad \text{FLY} \\ \hline \text{KITES} \end{array}$$

Điều kiện đề bài là tất cả 10 chữ số đều khác nhau nên có đủ các giá trị từ 0 đến 9. Dễ thấy rằng G, F, K đều khác 0. Nếu G = 1 thì GO.FLY < 19.999 = 18981, nếu F = 1 thì GO.FLY < 99.199 = 19701, trong cả hai trường hợp thì K = 1 (loại). Như thế cả G và F đều lớn hơn 1. Để cho gọn ta kí hiệu chữ số tận cùng của một số a là t(a), chữ số hàng chục là cshc, chữ số hàng trăm là csht. Ta xét từ hàng đơn vị đến hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn.

1a) Với O = 2, Y = 3 thì S = 2.3 = 6.

+ Nếu G = 4 thì 42.(10L + 3) = 420L + 126, cshc là E = t(2L + 2). Do E khác 2, 3, 4, 6 thì t(2L) khác 0, 1, 2, 4 nên L chỉ có thể bằng 8, 9.

- Khi L = 8 thì 42.(100F + 83) = 4200F + 3486, E = 8 = L (loại).
- Khi L = 9 thì 42.(100F + 93) = 4200F + 3906, E = 0, T = t(2F + 9). Do T và F khác 0, 2, 3, 4, 6, 9 thì t(2F) khác 1, 3, 4, 5, 7, 0 nên F chỉ có thể bằng 8. Kiểm tra thấy 42.893 = 37506 (loại).

1b) Với O = 3, Y = 2 thì S = 3.2 = 6.

+ Nếu G = 4 thì 43.(10L + 2) = 430L + 86, cshc là E = t(3L + 8). Do E và L khác 2, 3, 4, 6 thì t(3L) khác 4, 5, 6, 8 nên L chỉ có thể bằng 0, 1, 7, 9.

- Khi L = 0 thì 43.(100F + 2) = 4300F + 86, E = 8, T = t(3F). Do T và F khác 0, 2, 3, 4, 6, 8 thì F chỉ có thể bằng 5, 7, 9. Có 43.502 = 21586, 43.902 = 38786 nên 2 ≤ K ≤ 3 (loại).
- Khi L = 1 thì 43.(100F + 12) = 4300F + 516, E = 1 = L (loại).
- Khi L = 7 thì 43.(100F + 72) = 4300F + 3096, E = 9, T = t(3F). Do T và F khác 2, 3, 4, 6, 7,9 thì F chỉ có thể bằng 5. Lúc đó 43.572 = 24596 (loại).
- Khi L = 9 thì 43.(100F + 92) = 4300F + 3956, E = 5, T = t(3F + 9). Do T và F khác 2, 3, 4, 5, 6, 9 thì t(3F) khác 3, 4, 5, 6, 7, 0 nên F chỉ có thể bằng 7. Lúc đó 43.792 = 34056 (loại).

Nếu G = 5, G = 7, G = 8, G = 9, lập luận tương tự trên, không có số nào thỏa mãn.

Tiếp tục xét các bộ số (O; Y; S) bằng (2; 4; 8), (4; 2; 8), (2; 5; 0), (5; 2; 0), (2; 7; 4), (7; 2; 4), (2; 8; 6), (8; 2; 6), (2; 9; 8), (9; 2; 8), (3; 4; 2), (4; 3; 2), (3; 6; 8), (6; 3; 8), (3; 7; 1), (7; 3; 1), (3; 8; 4), (8; 3; 4), (3; 9; 7), (9; 3; 7), (4; 5; 0), (5; 4; 0), (4; 7; 8), (7; 4; 8), (4; 8; 2), (8; 4; 2), (4; 9; 6), (9; 4; 6), (5; 6; 0), (6; 5; 0), (5; 8; 0), (8; 5; 0), (6; 7; 2), (7; 6; 2), (6; 9; 4), (9; 6; 4), (7; 8; 6), (8; 7; 6), (7; 9; 3), (9; 7; 3), (8; 9; 2), (9; 8; 2). Ta có các nghiệm sau:

52.367 = 19084, 39.402 = 15678, 63.927 = 58401, 27.594 = 16038, 54.297 = 16038,

45.396 = 17820, 46.715 = 32890, 36.495 = 17820, 78.345 = 26910.

VIỆT HẢI

Kì này CÓ CÒN ĐÚNG KHÔNG?

Bài toán. Vui vẽ tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi D là điểm giữa của cung nhỏ AC. Hai tia AD và BC cắt nhau ở E. Vui tính được $AD.AE = 3R^2$ nhưng không biết kết quả trên còn đúng khi D chạy trên cung nhỏ AC hay không? Ý kiến bạn thế nào?

PHẠM TUẤN KHẢI *(Hà Nội)*

Kết quả **(TTT2 số 178)**

BỂ NƯỚC NÀO ĐỰNG NHIỀU NƯỚC HƠN?

Số lượng nước đổ đầy ba khối lập phương có cạnh a, b, c tương ứng là $V = a^3 + b^3 + c^3$. Số lượng nước đổ đầy ba khối hộp chữ nhật có diện tích đáy a^2, b^2, c^2 với chiều cao b, c, a tương ứng là $U = a^2b + b^2c + c^2a$. Ta cần so sánh V và U.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3a^3b^3} = 3a^2b$. (1)

Tương tự ta có

$b^3 + b^3 + c^3 \geq 3b^2c$. (2)

$c^3 + c^3 + a^3 \geq 3c^2a$. (3)

Cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$.

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Tức là $V \geq U$.

Đẳng thức cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi đồng thời (1), (2), (3) đều là đẳng thức, tức là khi $a = b = c$.

Kết luận. 1) Nếu $a = b = c$ thì $V = U$, lúc này ba khối hộp hình chữ nhật trở thành ba khối lập phương.

2) Nếu a khác b, hoặc b khác c (với $a \geq b \geq c$) thì $V > U$, tức là lượng nước của ba khối lập phương lớn hơn lượng nước của ba khối hộp chữ nhật.

Nhận xét. Tất cả các bạn gửi lời giải về Tòa soạn đều giải đúng và cho kết luận 1, nhưng phát biểu về kết luận 2 chưa chuẩn xác (không cho biết khi nào thì $V > U$).

Các bạn chưa biết bất đẳng thức AM-GM có thể xét hiệu

$V - U = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a) = (a + b)(a - b)^2 + c^3 - c^2a + b^2(a - c)$

$= (a + b)(a - b)^2 + (b^2 - c^2)(a - c) \geq 0$

(vì $a \geq b \geq c$).

Các bạn sau có lời giải đúng, được khen thưởng kì này: *Đào Nhân Độ*, *Vũ Minh Khải*, *Nguyễn Công Hải*, *Nguyễn Công Hùng*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Hữu Đoàn*, 7A1, *Trương Thị Minh Oanh*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Hà Minh Hiển*, 8F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**.

ANH COMPA

ĐỀ DỰ TUYỂN CÂU LẠC BỘ TOÁN TUỔI THƠ TOÀN QUỐC 2017

CVD

Câu 1. Có bao nhiêu số tự nhiên có dạng $\overline{abcde}$ để $\overline{2017abcde}$ là số chính phương.

Câu 2. Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m. Tìm giá trị của M + m.

Câu 3. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^2(y^2 + 1) + y^2 + 24 = 12xy$.

Câu 4. Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng năm chữ số 1, hai chữ số 2 và ba chữ số 3.

Câu 5. Có bao nhiêu bộ ba số nguyên tố liên tiếp sao cho tổng bình phương của chúng cũng là một số nguyên tố?

Câu 6. Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn (a + b)(b + c)(c + a) = 8abc. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$

$$- \frac{ab}{(a+b)(b+c)} - \frac{bc}{(b+c)(c+a)} - \frac{ca}{(c+a)(a+b)}.$$

Câu 7. Cho $A = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2017}$ và

$$B = \frac{1010}{1\times 2017} + \frac{1010}{3\times 2015} + \ldots + \frac{1010}{2015\times 3} + \frac{1010}{2017\times 1}.$$

Hãy so sánh A và B.

Câu 8. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn ba tính chất sau:

i) Tổng các chữ số của nó bằng 37;

ii) Số đó chia hết cho 7;

iii) Hiệu của số đó với 35 là một số chia hết cho 100.

Câu 9. Tìm các số nguyên x thỏa mãn

$|x - 6| + |x - 10| + |x + 101| + |x + 990| + |x + 1010| = 2017.$

Câu 10. Cho đa thức $P(x) = x^{100} - 4x^{99} - 20x^{98} - 4x^{97} - 20x^{96} - 4x^{95} - 20x^{94} - \ldots - 4x^3 - 20x^2 - 4x$. Tính P(7).

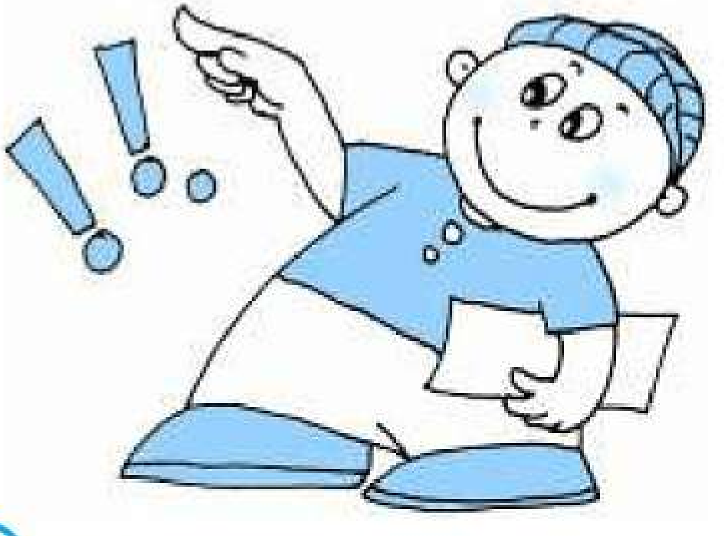
Câu 11. Cho các số thực không âm a, b, c, d, e thỏa mãn a + b + c + d + e = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = ab + bc + cd + de.

Câu 12. Cho tứ giác ABCD với AB = CD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Biết rằng tia BA cắt tia CD tại E và $\widehat{BEC} = 70^o$. Hai đường thẳng MN và CD cắt nhau tại P. Tính $\widehat{NPC}$.

Câu 13. Cho hình thang ABCD có AB // CD với AB = AD = 16 cm, BC = 30 cm và DC = 50 cm. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tính độ dài đoạn thẳng EF.

Câu 14. Sau một bữa tiệc, mỗi người bắt tay một lần với mỗi người khác trong phòng. Hệ thống camera tự động đếm thấy có tất cả 120 cái bắt tay. Hỏi trong phòng có bao nhiêu người?

Câu 15. Trên mặt phẳng cho 2017 đường thẳng phân biệt trong đó không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tính số miền của mặt phẳng được tạo thành bởi 2017 đường thẳng đó.



ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 7 HUYỆN TAM DƯƠNG, TỈNH VĨNH PHÚC

Năm học: 2016 - 2017

Thời gian làm bài: 120 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Tìm x biết: $\left|\left|3x-3\right|+2x+(-1)^{2016}\right|=3x+2017^0$.

b) Cho $B=1+\frac{1}{2}(1+2)+\frac{1}{3}(1+2+3)+\frac{1}{4}(1+2+3+4)+....+\frac{1}{x}(1+2+3+...+x)$.

Tìm số nguyên dương x để $B=115$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x}=\frac{x+z+2}{y}=\frac{x+y-3}{z}=\frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A=2016.x+y^{2017}+z^{2017}$.

b) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x=3y=5z$ và $\left|x-2y\right|=5$.

Tìm giá trị lớn nhất của $3x-2z$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M=\frac{2016x-2016}{3x+2}$ có giá trị nhỏ nhất.

b) Cho đa thức $f(x)=2016.x^4-32(25.k+2).x^2+k^2-100$ (với k là số thực dương cho trước). Biết đa thức f(x) có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c (với $a<b<c$). Tính hiệu của $a-c$.

Câu 4. *(2,5 điểm)*

Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Vẽ góc CBx sao cho $\widehat{CBx}=45^o$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn thẳng BM. Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD. Đường thẳng AM cắt CI tại N. Chứng minh rằng:

a) DN vuông góc với AC.

b) BH^2+CI^2 có giá trị không đổi khi D di chuyển trên đoạn thẳng BM.

c) Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

a) Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn 2^p+p^2 là số nguyên tố.

b) Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số 1; 0 hoặc −1. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

ĐỀ THI CÂU LẠC BỘ TTT

NGUYỄN ĐỨC TẤN
DƯƠNG THU TRANG *(dịch)*

Kì 14

CLB1. Given the polynomial $P(x) = 20ax^{11} + bx + 2018$ (a, b are constant) and $P(1963) = 2017$, find $P(-1963)$.

CLB2. a, b, c are non-zero real numbers such that $a + b + c = 0$, find the value of the following expression:

$$M=\frac{(b^2-c^2)^2}{a^4-(b^2-c^2)^2}+\frac{(c^2-a^2)^2}{b^4-(c^2-a^2)^2}+\frac{(a^2-b^2)^2}{c^4-(a^2-b^2)^2}.$$

CLB3. Let $A = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 99^{99} + 100^{100}$, prove that A has 201 digits and its two digits at the end of the left hand are 10.

CLB4. Given a, b, c, d such that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2018$. Find the minimum value of $M = (a + 8)(b + 8) - cd$.

CLB5. Given a right triangle ABC with $\angle A = 90^o$. H is on BC. Draw HD perpendicular to AB at D, HE perpendicular to AC at E. M is on DE such that $MD < ME$. Draw AN perpendicular to HM at N. Prove that:

a) $\angle DNE = 90^o$.

b) $AD.BD + AE.CE = BH.CH$.

Kết quả (TTT2 số 178)

Câu lạc bộ Toán Tuổi thơ

1. Ta có $S = (2-1)2^2 + (3-1)3^2 + ... + (n-1)n^2$

$= (1^3 + 2^3 + ... + n^3) - (1^2 + 2^2 + ... + n^2)$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$

2. Điều kiện $x \neq 0, x \neq -1$.

Ta có $(1 - x^2)(x^2 + 1) + x^2 = 2x^2(x + 1)$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(Vì $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$).

3. Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \Rightarrow xy+yz+zx=0.$

Kết hợp với $(x + y + z)^2 = 1$, ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\Rightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 1$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) = 1$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx(1 - y) = 1$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1.$

4. Ta có $\dfrac{h_a}{3}=\dfrac{h_b}{4}=\dfrac{h_c}{5}$ và $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Suy ra $3a.\dfrac{h_a}{3}=4b.\dfrac{h_b}{4}=5c.\dfrac{h_c}{5}$

$\Rightarrow 3a=4b=5c \Rightarrow \dfrac{a}{20}=\dfrac{b}{15}=\dfrac{c}{12}=k$

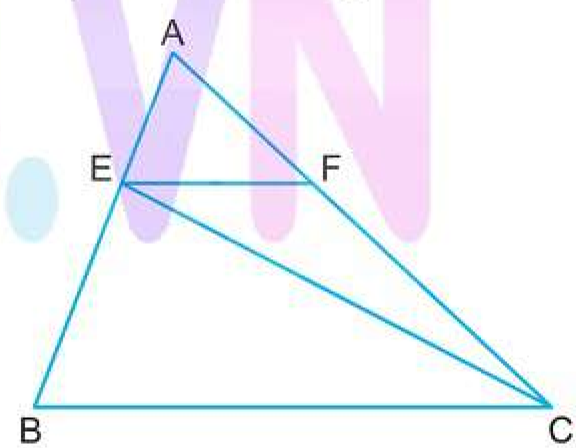
$\Rightarrow a = 20k, b = 15k, c = 12k$

Suy ra $a^2 = 400k^2$ và $b^2 + c^2 = 369k^2$.

Do đó $a^2 > b^2 + c^2$.

Vậy tam giác đã cho là tam giác tù.

5.



Ta có $\dfrac{S_{CEF}}{S_{AEF}}=\dfrac{CF}{AF}, \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{AF^2}{AC^2}.$

Suy ra $\dfrac{S_{CEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{CF.AF}{AC^2}\le\dfrac{\left(\dfrac{CF+AF}{2}\right)^2}{AC^2}=\dfrac{1}{4}.$

Do đó $S_{CEF} \le \dfrac{1}{4}S_{ABC}$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng được thưởng kì này: *Nguyễn Đại Dương*, 8A; *Hà Minh Hiếu*, 8F, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN QUỐC TẾ PHILIPINE ITMO 2017

THS. PHÙNG KIM DUNG *(GV. THPT Hà Nội - Amsterdam, Q. Cầu Gấy, Hà Nội)*
THS. CAI VIỆT LONG *(GV. THCS Ngô Sĩ Liên, Q. Hoàn Kiếm, Hà Nội)*
Sưu tầm, dịch và giới thiệu

(Đề đăng trên TTT2 số 179)

1. Nhìn vào cột hàng nghìn, dễ thấy A chỉ có thể bằng 0 hoặc 9. Ta xét 2 trường hợp:

- TH1. A = 0. Từ phép cộng các số hàng chục, ta thấy H = 1 (vì H < 2 và H khác 0).

Do đó

$O + O = \overline{HS} > 10 \Rightarrow O \geq 6$ và S là số chẵn.

$V + V = T < 10 \Rightarrow 2 \leq V \leq 4$ và T là số chẵn.

$D + D = M < 10 \Rightarrow 2 \leq D \leq 4$ và M là số chẵn.

* Nếu D = 2 thì M = 4, vì vậy V = 3.

Từ đó ta có T = 6.

Do S chẵn nên S = 8.

Từ đó O = 9.

Ta có đáp án:

$$\begin{array}{r} 20309 \\ +20309 \\ \hline 40618 \end{array}$$

* Nếu D = 3 thì M = 6.

+ Nếu V = 2 thì T = 4, vì vậy S = 8 (do S chẵn). Từ đó O = 9.

Ta có đáp án:

$$\begin{array}{r} 30209 \\ +30209 \\ \hline 60418 \end{array}$$

+ Nếu V = 4 thì T = 8, vì vậy S = 2 (do S chẵn). Từ đó O = 1 hoặc O = 6 = M (loại).

* Nếu D = 4 thì M = 8, vì vậy V = 3 (nếu V = 2 thì T = 4).

Từ đó, T = 6. Do S chẵn nên S = 2, suy ra O = 1 hoặc O = 6 = T (loại).

- TH2. A = 9. Từ phép cộng các số hàng chục, ta thấy H = 8.

Do đó

$O + O = S < 8 \Rightarrow 1 \leq O \leq 3$ và S là số chẵn.

$V + V + 1 = \overline{1T} \geq 10 \Rightarrow 5 \leq V \leq 7$, T là số lẻ.

$D + D + 1 = M < 9 \Rightarrow 1 \leq D \leq 3$, M là số lẻ.

* Với V = 5 thì T = 1.

+ Nếu M = 3 thì D = 1 = T (loại).

+ Nếu M = 7 thì D = 3, vì vậy O = 2.

Từ đó S = 4.

Ta có đáp án:

$$\begin{array}{r} 39592 \\ +39592 \\ \hline 79184 \end{array}$$

* Với V = 6 thì T = 3.

+ Nếu O = 1 thì S = 2, do $1 \leq D \leq 3$ (loại).

+ Nếu O = 2 thì S = 4, vì vậy D = 1.

Từ đó M = 3 = T (loại).

* Với V = 7 thì T = 5. Do M lẻ nên M = 3.

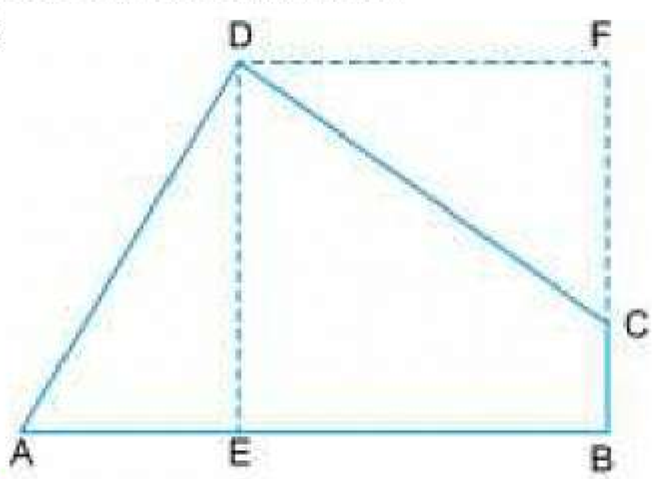
Từ đó D = 1, O = 2, S = 4.

Ta có đáp án:

$$\begin{array}{r} 19792 \\ +19792 \\ \hline 39584 \end{array}$$

Tóm lại, có bốn giá trị có thể của T là 6, 4, 1 và 5. Tổng của chúng là 16.

2.



Từ D hạ $DE \perp AB$, $DF \perp BC$. Dễ thấy BEDF là hình chữ nhật.

Do đó $\widehat{ADE} = \widehat{CDF}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

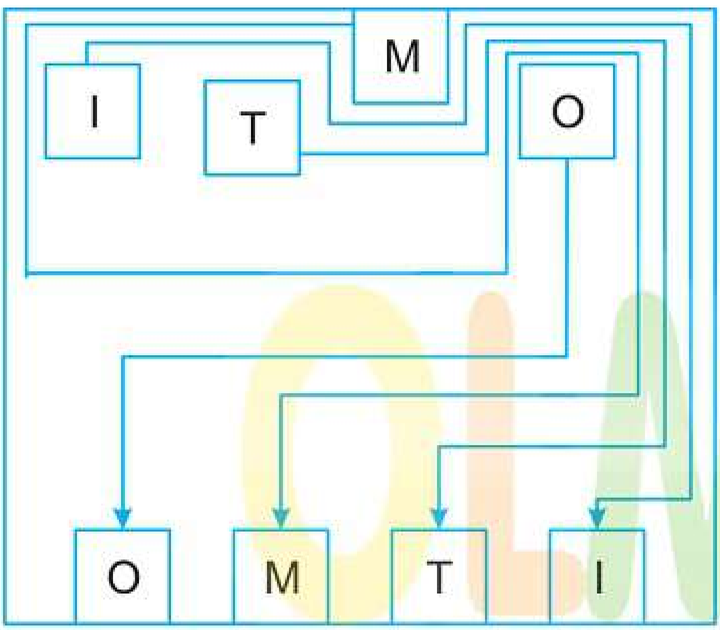
Ta có $\Delta ADE = \Delta CDF$ (cạnh huyền - góc nhọn).

Do đó DE = DF, từ đó BEDF là hình vuông.

Suy ra $S_{ABCD} = S_{BEDF} = DE^2 = 196$ (cm^2).

Vì vậy $DE = 14$ (cm).

3. Có nhiều cách để nối các hộp thỏa mãn điều kiện bài toán. Ví dụ một cách như sau:



4. Ta có $\dfrac{M}{N} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}} + \dfrac{1}{d + \dfrac{1}{e + \dfrac{1}{f}}}$

$= \dfrac{1}{a} + \dfrac{c}{bc+1} + \dfrac{ef+1}{def+d+f}$.

Từ đẳng thức trên ta thấy phân số thứ hai và phân số thứ ba của vế phải nhỏ hơn 1 nên ta chọn a = 1. Để phân số $\dfrac{c}{bc+1}$ lớn nhất thì ta chọn c = 9 và b = 2. Để phân số $\dfrac{ef+1}{def+d+f}$ lớn nhất thì ta chọn d = 3, e = 7 và f = 8.

Do đó ta có

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{c}{bc+1} + \dfrac{ef+1}{def+d+f}$

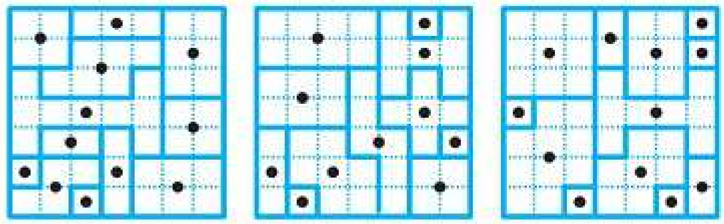
$= 1 + \dfrac{9}{2.9+1} + \dfrac{7.8+1}{3.7.8+3+8}$

$= 1 + \dfrac{9}{19} + \dfrac{57}{179} = \dfrac{3401+1611+1083}{3401}$

$= \dfrac{6095}{3401}$.

Vậy M – N = 6095 – 3401 = 2694.

5. Ta chia như sau:



6.

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ +\,B\ C\ D \\ C\ D\ E \\ \hline 2\ 0\ 1\ 7 \end{array}$$

● Để $\overline{ABCDE}$ lớn nhất thì A = 9 > B = 8.

* Nếu C = 1 thì $A + B + C = 18$, do đó phép cộng ở cột hàng chục có nhớ 2: (loại vì $D \le 7$ $\Rightarrow B + C + D \le 16$).

* Nếu $C \ge 3$ thì phép cộng ở cột hàng chục có nhớ sang hàng trăm, mà $A + B + C \ge 20$ (loại).

Vậy $C = 2$. Từ đó $D + \overline{DE} = 15$.

Vì vậy, $D = 1 < E = 4$.

Vậy số $\overline{ABCDE}$ lớn nhất là 98214.

● Để $\overline{ABCDE}$ bé nhất thì $A = 1$.

Ta lại có $A + B + C + 2 \ge 20$ (do phép cộng ở cột hàng chục nhớ tối đa là 2).

Suy ra $B + C \ge 17$.

Để $\overline{ABCDE}$ bé nhất thì $B = 8 < C = 9$.

Rút gọn phép cộng ta được $D + \overline{DE} = 38$.

Từ đây ta có $D = 3$, $E = 5$.

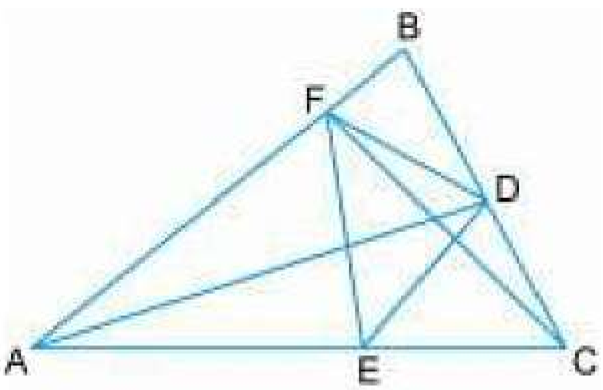
Vậy số $\overline{ABCDE}$ bé nhất là 18935.

Hiệu giữa 2 giá trị lớn nhất và bé nhất của $\overline{ABCDE}$ là 98214 – 18935 = 79279.

7. Có tổng cộng 4 bảng con 2×2 khác nhau. Tổng số đồng xu trên mỗi bảng con này là các số nguyên tố khác nhau. Vì dãy các số nguyên tố là 2, 3, 5, 7,... số đồng xu trên bảng con 2×2 có nhiều đồng xu nhất lớn hơn hoặc bằng 7. Do đó số đồng xu trên bảng 3×3 lớn hơn hoặc bằng 7. Có cách thả 7 đồng xu thỏa mãn như sau:

0	0	0
0	2	1
0	3	1

8.



Đặt $\frac{AF}{AB}=x$ thì $\frac{BF}{AB}=1-x$, do đó ta có

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}=\frac{CD}{CB}\cdot\frac{CE}{CA}=\frac{1}{5};$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{3x}{5};$$

$$\frac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\frac{BF}{BA}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{1-x}{2}.$$

Từ giả thiết, ta có

$$S_{DEF}=3S_{BFD}\Rightarrow\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{3(1-x)}{2}.$$

Vì $S_{ABC}=S_{CDE}+S_{AEF}+S_{BDF}+S_{DEF}$ nên ta có phương trình

$$\frac{1}{5}+\frac{3x}{5}+\frac{1-x}{2}+\frac{3(1-x)}{2}=1.$$

Giải phương trình trên ta được $x=\frac{6}{7}$.

Từ đây suy ra $\frac{AF}{FB}=6$.

9. Ngoài ví dụ của đề bài còn có một số bộ số thỏa mãn như sau:

$18\times297=5346;$

$27\times198=5346;$

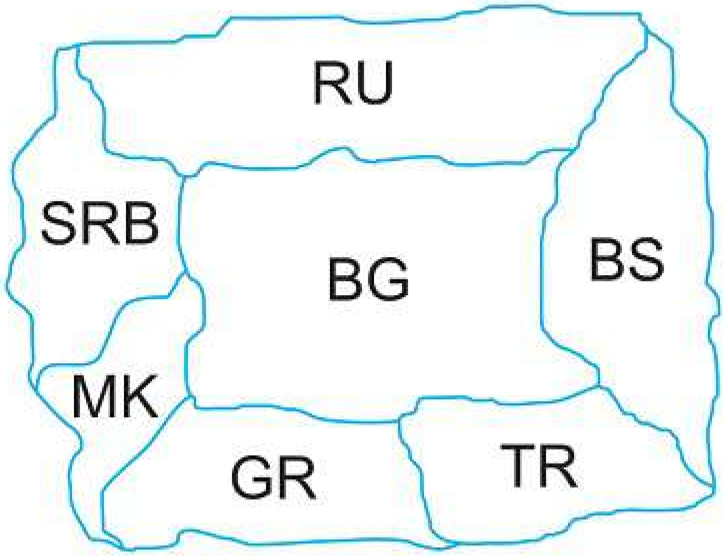
$28\times157=4396;$

$39\times186=7254;$

$48\times159=7632;$

$42\times138=5796.$

10.



Do SRB, RU, BG là 3 miền kề nhau đôi một, nên mỗi miền được tô bởi một màu khác nhau, ta có $4\times3\times2=24$ cách để tô màu 3 miền này. Giả sử BG tô màu a, RU tô màu b, SRB tô màu c (có 4 màu là a, b, c, d). Suy ra MK chỉ được tô bởi 2 màu b hoặc d. Ta có bảng sau:

MK	GR	TR	BS
b	c	b	c
			d
		d	c
	d	b	c
			d
		c	d
d	b	c	d
		d	c
	c	b	c
			d
		d	c

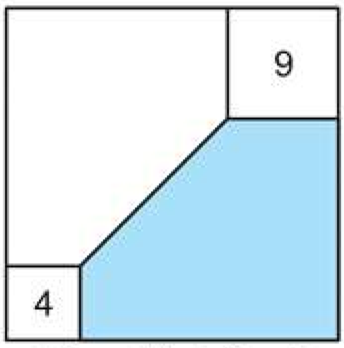
Có 11 cách để tô các miền MK, GR, TR, BS như trên. Do đó, có tổng cộng $24\times11=264$ cách.

ĐỀ THI TÌM KIẾM TÀI NĂNG TOÁN HỌC TRẺ VIỆT NAM 2017 LỚP 6 (MYTS)

PHẠM VĂN THUẬN

(Trung tâm Toán và Khoa học Hexagon)

1. Trong hình dưới, hai hình vuông nhỏ có diện tích là 4 cm^2 và 9 cm^2 được vẽ bên trong một hình vuông lớn có diện tích 81 cm^2. Tính diện tích phần tô màu.

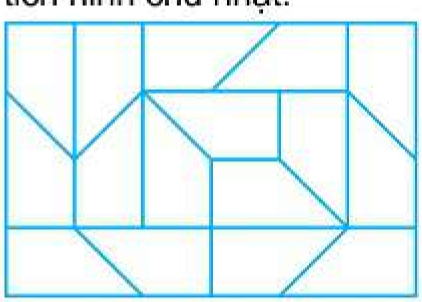


2. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số sao cho tổng các chữ số của nó bằng 13.

3. Ở một vương quốc có 2 loại quái vật là: quái vật béo có 3 đầu 6 tay và quái vật gầy có 1 đầu, 10 tay. Một ngày nọ, một chàng dũng sĩ đến khu rừng để diệt bọn quái vật và đếm được có 10 con và 16 cái đầu. Hỏi chúng có tổng cộng bao nhiêu cái tay?

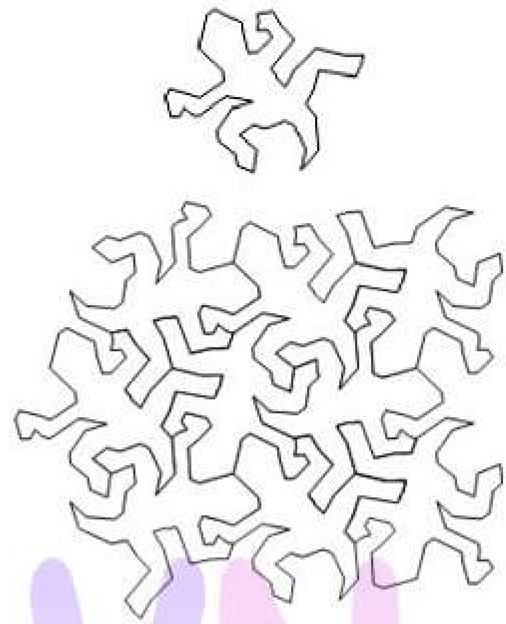
4. Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất chia hết cho 33 và tất cả các chữ số của N đều là số lẻ, không có hai chữ số nào giống nhau.

5. Hình chữ nhật được cắt thành 16 hình thang vuông bằng nhau, như hình dưới. Biết rằng đáy nhỏ của mỗi hình thang dài 3 cm. Tính diện tích hình chữ nhật.



6. Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất có bảy chữ số mà không có hai chữ số nào giống nhau, hơn nữa N chia hết cho 7 và tổng các chữ số của nó cũng chia hết cho 7.

7. Thầy Thuận cắt những mảnh giấy thành các đa giác, mà mỗi đa giác có hình con thằn lằn. Sau đó, các đa giác như vậy được ghép khít lại để được hình bên. Thầy Thuận muốn dùng số màu ít nhất để tô hình bên sao cho mỗi con thằn lằn một màu và hai con thằn lằn kề nhau thì khác màu. Theo em, thầy Thuận dùng mấy màu?



8. Có bao nhiêu số có bốn chữ số mà tổng các chữ số của mỗi số bằng 4?

9. Số 151 được gọi là số đối xứng vì khi viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại ta được số mới bằng chính nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu số đối xứng có ba chữ số?

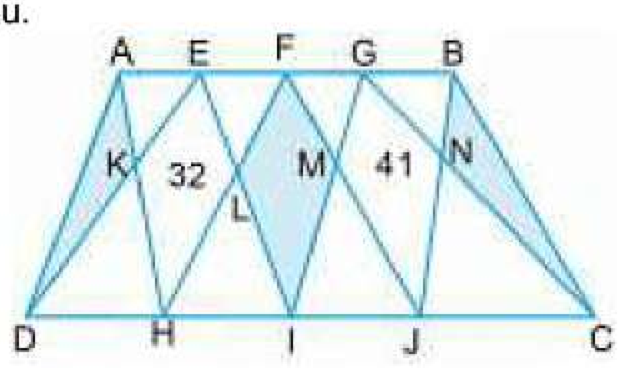
10. Các từ BEAUTIFUL được viết liên tiếp thành một hàng sao cho trong hàng có đúng 500 chữ cái.

BEAUTIFULBEAUTIFULBEAUTIFULBEAUT . . .

Hỏi hai chữ cái cuối cùng trong hàng là gì?

11. Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất có ba chữ số, chia hết cho 77 và tất cả các chữ số của N đều là số lẻ.

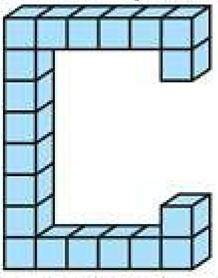
12. Trong hình dưới đây, ABCD là một hình thang có diện tích bằng 198 cm^2, diện tích hai tứ giác EKHL và GMJN lần lượt là 32 cm^2 và 41 cm^2. Tính tổng diện tích các phần được tô màu.



13. Trong các số chia hết cho 15, có sáu chữ số và không có hai chữ số nào giống nhau, thì số nào lớn nhất?

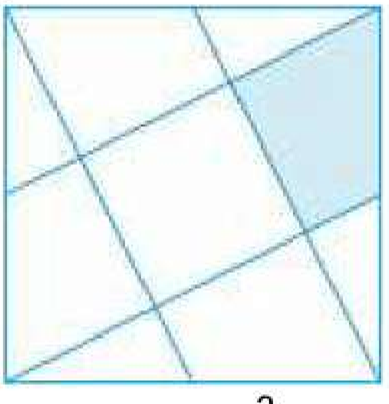
14. Một dãy nhà được đánh số lẻ liên tiếp từ 1 đến 29. Người ta cần cắt các chữ số bằng kim loại để gắn lên từng nhà. Chi phí mỗi chữ số là 30000 đồng. Hỏi tổng chi phí cắt chữ kim loại cho dãy nhà là bao nhiêu?

15. Sử dụng các hình lập phương giống nhau, ông Thuận xếp khối hình dạng chữ C như hình vẽ. Biết cạnh của mỗi hình lập phương là 2 cm, tính diện tích bề mặt của khối hình.



16. Các bạn Dân, Chủ, Văn, Minh, Việt đứng xếp hàng chụp ảnh. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp năm bạn đó thành một hàng sao cho bạn Dân luôn đứng cạnh bạn Việt?

17. Nối mỗi đỉnh của hình vuông với trung điểm (điểm chính giữa) của cạnh đối diện, như hình vẽ. Biết diện tích của hình vuông là 200 cm^2, hỏi diện tích của phần tô màu bằng bao nhiêu?

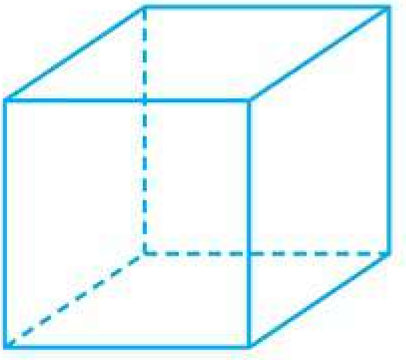


18. Trong một lớp học, có $\frac{3}{5}$ số bạn gái và $\frac{1}{2}$ số bạn trai đeo kính. Biết rằng số bạn gái đeo kính bằng số bạn trai đeo kính, tính tỉ số giữa số học sinh KHÔNG đeo kính và tổng số học sinh trong lớp?

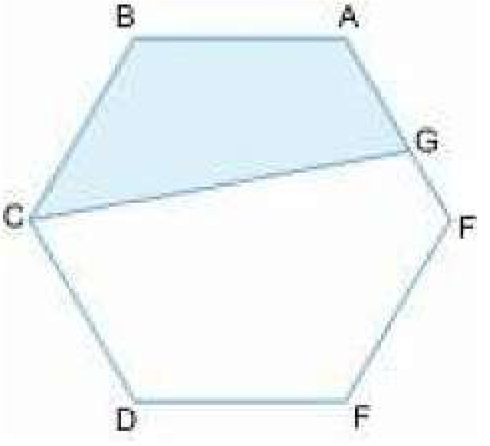
19. Trong hình dưới có bao nhiêu tam giác?

20. Điền số bạn cho là thích hợp vào chỗ trống 2, 5, 11, 20, 35, 59, 98, ?

21. Hình lập phương có 8 đỉnh và 12 cạnh. Bạn Dũng viết lên tám đỉnh của hình lập phương các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sao cho có nhiều nhất các cạnh mà tổng hai số tại hai đầu mút của cạnh là một số lẻ. Hỏi có bao nhiêu cạnh như vậy trong cách viết của bạn Dũng?



22. Trong hình dưới, ABCDEF là một hình lục giác đều (có sáu cạnh bằng nhau, sáu góc bằng nhau). Điểm G nằm trên cạnh AF sao cho GF = $\frac{2}{5}$AF. Biết diện tích của hình lục giác bằng 60 cm^2, tính diện tích phần tô đậm.



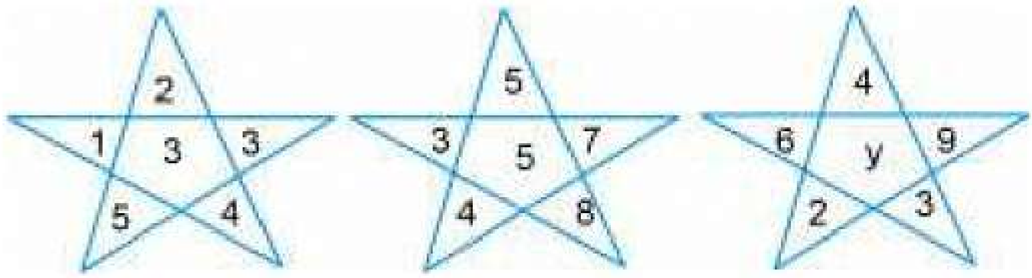
23. Một người đi xe đạp với vận tốc 9 km/h và một ô tô đi với vận tốc 60 km/h cùng khởi hành lúc 7 giờ từ địa điểm A đến địa điểm B. Sau đó 40 phút, một xe máy đi với vận tốc 40 km/h cũng khởi hành từ A để đi đến B. Hỏi trên quãng đường AB vào lúc mấy giờ thì xe máy ở chính giữa xe đạp và ô tô?

24. Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất chia hết cho 99 và tất cả các chữ số của N đều là số chẵn.

Kì này SỐ NÀO THÍCH HỢP?

Bài 1. Tìm x trong dãy số 1, 2, 3, 1, 7, –20, x.

Bài 2. Tìm y trong hình ngôi sao.



VÕ XUÂN MINH

(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Kết quả CHỮ NÀO LẠC LOÀI? (TTT2 số 178)

Quy luật.

Bài 1. Trong mỗi hình, số ở phía dưới bằng bình phương số ở phía trên bên trái trừ đi lập phương số ở phía trên bên phải. Theo quy luật đó, số cần tìm là ? $= 6^2 - 3^3 = 9$.

Bài 2. Trong các chữ cái đã cho : K, N, T, H, A, chỉ có chữ T được cấu tạo bởi hai ***đoạn thẳng***, các chữ cái còn lại được cấu tạo bởi ba ***đoạn thẳng***. Do đó chữ T là chữ cái lạc loài.

Nhận xét. Tất cả các bạn đều tìm ra kết quả đúng của Bài 1. Ở bài 2, có bạn nhận xét A là chữ cái lạc loài vì nó là nguyên âm duy nhất, các chữ cái còn lại đều là phụ âm.

Xin trao thưởng cho các bạn có diễn đạt chính xác: *Vũ Minh Khải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đàm Quang Anh*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Phạm Gia Hoàng*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Vương Trần Huệ Minh*, 7D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Trần Duy Khánh*, 8C, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.

Các bạn sau được tuyên dương: *Nguyễn Đức Tân*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Nguyễn Thị Ngọc Trâm*, 6H, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Nhóm bạn Nguyễn Đức Anh, Hoàng Công Hiếu*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**; *Nhóm bạn Phùng Thị Thùy Dung, Phùng Thị Thu Hường, Nguyễn Thanh Tùng, Đào Văn Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

LTS: *Từ số 1/9 của năm học 2017 - 2018, Toán Tuổi thơ mở chuyên mục **63 ô cửa** để nói về đất nước, con người Việt Nam. Hiểu để thêm yêu đất nước và phấn đấu lớn lên xây dựng non sông gấm vóc ngày càng tươi đẹp hơn.*

Bánh Tét Trà Cuôn níu chân du khách

ĐÔNG ĐỨC

Nếu bánh chưng là món đặc trưng của ngày tết miền Bắc, thì bánh Tét là món không thể thiếu trong những ngày đón năm mới ở miền Nam... Và mặc dù bánh tét có mặt ở rất nhiều nơi, nhưng hầu hết những ai đã từng biết đến bánh tét Trà Cuôn thì đều muốn trở lại nơi này để thưởng thức và mua về ăn Tết. Vì sao vậy? Vì bánh tét Trà Cuôn lâu nay đã nức tiếng khắp vùng bởi hương thơm, vị đậm, màu sắc hấp dẫn và đặc biệt là rất hợp khẩu vị với mọi người.

Làng nghề bánh tét Trà Cuôn nằm ở xã Kim Hoà, huyện Cầu Ngang, tỉnh Trà Vinh, cách trung tâm thành phố Trà Vinh khoảng 12 km. Đến đây, bạn sẽ được tận mắt chứng kiến bầu không khí làm việc hối hả, bận rộn, bởi có tới gần một nửa hộ dân vùng này sống bằng nghề làm bánh tét. Vào những dịp lễ tết như Tết Nguyên đán hay các lễ hội của người Khơme như Oóc Om Bóc (Lễ cúng trăng), Đôn ta (Lễ báo hiếu), Chol Chnam Thmay (Lễ năm mới) v.v...bánh tét Trà Cuôn thường được tiêu thụ vài nghìn chiếc mỗi ngày.

Khác với bánh chưng có hình vuông, bánh tét nói chung và bánh tét Trà Cuôn nói riêng có hình trụ dài (giống như bánh tày ở một số tỉnh miền núi phía Bắc) và được gói bằng lá chuối chứ không phải lá dong. Nguyên liệu làm bánh cũng là gạo nếp, đỗ xanh, thịt lợn, nhưng riêng bánh tét Trà Cuôn thì có thêm lòng đỏ trứng vịt muối nữa. Chính vị đậm đà của trứng muối đã làm nên hương vị rất riêng của bánh tét Trà Cuôn, khiến những người khảnh ăn nhất cũng cảm thấy không hề bị ngán. Đặc biệt, để tạo màu xanh cho bánh, trước khi gói, người Trà Cuôn thường ngâm gạo nếp vào nước rau ngót. Mỗi khoanh bánh cắt ra đều có đủ 5 màu, rất hài hoà, đẹp mắt: màu xanh của gạo, màu vàng của đỗ, màu hồng của thịt nạc, màu trắng của thịt mỡ và màu đỏ của lòng đỏ trứng muối.

Ngoài bánh tét nhân mặn, người Trà Cuôn còn làm bánh tét nhân ngọt, như nhân chuối, nhân đỗ đen với đường...

Hiện nay, bánh tét Trà Cuôn đang được xây dựng thành thương hiệu. Mỗi ngày, hàng ngàn đòn bánh được vận chuyển tới rất nhiều tỉnh thành và tới cả nước ngoài. Có lẽ những nét đặc trưng của miền đất giao thoa văn hoá giữa người Kinh, người Khơme và người Hoa đã làm nên hương vị rất riêng của món bánh tét Trà Cuôn.

HANOI OPEN MATHEMATICAL COMPETITION 2017

JUNIOR SECTION

PGS. TS. NGUYỄN MINH TUẤN *(Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội)*
(Sưu tầm và giới thiệu)

Tòa soạn TTT ghi chú về cách giải các Questions 1, 2, 3, 4, 5 để bạn đọc tham khảo. Bài khai thác sâu hơn của Question 11 đã đăng ở TTT2 số 173+174.

Question 1. Suppose x_1, x_2, x_3 are the roots of polynomial

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$.

The sum $|x_1| + |x_2| + |x_3|$ is

(A): 4 (B): 6 (C): 8
(D): 14 (E): None of the above.

Answer. The choice is (C).

Ghi chú: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

Question 2. How many pairs of positive integers (x, y) are there, those satisfy the identity

$2^x - y^2 = 1$?

(A): 1 (B): 2 (C): 3
(D): 4 (E): None of the above.

Answer. The choice is (A).

Ghi chú: $(y - 1)(y + 1) = 2(2^{x-1} - 1)$.

Question 3. Suppose $n^2 + 4n + 25$ is a perfect square. How many such non-negative integers n's are there?

(A): 1 (B): 2 (C): 4
(D): 6 (E): None of the above.

Answer. The choice is (B).

Ghi chú: $m^2 - (n + 2)^2 = 21\cdot 1 = 7\cdot 3$.

Question 4. Put $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + 5^{13} + ... + 505^{2013} + 506^{2017}$.

The last digit of S is

(A): 1 (B): 3 (C): 5
(D): 7 (E): None of the above.

Answer. The choice is (E).

Ghi chú: $a^{4n+1} - a = a(a^{4n} - 1) \vdots 10$.

Question 5. Let a, b, c be two-digit, three-digit, and four-digit numbers, respectively. Assume that the sum of all digits of number a + b, and the sum of all digits of b + c are all equal to 2. The largest value of a + b + c is

(A): 1099 (B): 2099 (C): 1199
(D): 2199 (E): None of the above.

Answer. The choice is (E).

Ghi chú: $a + b + c = 10199$.

Question 6. Find all triples of positive integers (m, p, q) such that $2^m p^2 + 27 = q^3$, and p is a prime.

Solution. By the assumption it follows that q is odd. We have $2^m p^2 = (q - 3)(q^2 + 3q + 9)$.

Remark that $q^2 + 3q + 9$ is always odd. There are two cases:

Case 1. $q = 2^m p + 3$. We have

$q^3 = (2^m p + 3)^3 > 2^m p^2 + 27$,

which is impossible.

Case 2. $q = 2^m + 3$. We have

$q^3 = 2^{3m} + 9 \times 2^{2m} + 27 \times 2^m + 27 = 2^m p^2 + 27$, which implies

$p^2 = 2^{2m} + 9 \times 2^m + 27$.

If $m \geq 3$, then $2^{2m} + 9 \times 2^m + 27 \equiv 3 \pmod 8$, but $p^2 \equiv 1 \pmod 8$. We deduce $m \leq 3$.

By simple computation we find m = 1, p = 7, q = 5.

Question 7. Determine two last digits of number $Q = 2^{2017} + 2017^2$.

Solution. We have

$2^{2017} = 2^7 \times (2^{10})^{201} = 128 \times 1024^{201}$

$\equiv 128 \times (-1)^{201} = -128 \equiv 22 \pmod{25}$;

$2017^2 \equiv 14 \pmod{25}$.

It follows $P \equiv 11 \pmod{25}$, by which two last digits of P are in the set $\{11; 36; 61; 86\}$.

In other side, $P \equiv 1 \pmod 4$. This implis $P \equiv 61 \pmod{100}$. Thus, the number 61 subjects to the question.

Question 8. Determine all real solutions x, y, z of the following system of equations

$$\begin{cases} x^3 - 3x = 4 - y \\ 2y^3 - 6y = 6 - z \\ 3z^3 - 9z = 8 - x. \end{cases}$$

Solution. From $x^3 + y = 3x + 4$ it follows

$x^3 - 2 - 3x = 2 - y$. Then

$(x-2)(x+1)^2 = 2 - y$. (1)

By $2y^3 - 4 - 6y = 2 - z$, we have

$2(y-2)(y+1)^2 = 2 - z$. (2)

Similarly, by $3z^3 - 3 - 3 - 9z = 2 - x$ we have

$3(z-2)(z+1)^2 = (2 - x)$. (3)

Combining (1)–(2)–(3) we obtain

$$(x-2)(y-2)(z-2)\left((x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 + \frac{1}{6}\right) = 0$$

Hence, $(x-2)(y-2)(z-2) = 0$. Comparing this with (1), (2) and (3), we find the unique solution $x = y = z = 2$.

Question 9. Prove that the equilateral triangle of area 1 can be covered by five arbitrary equilateral triangles having the total area 2.

Solution.

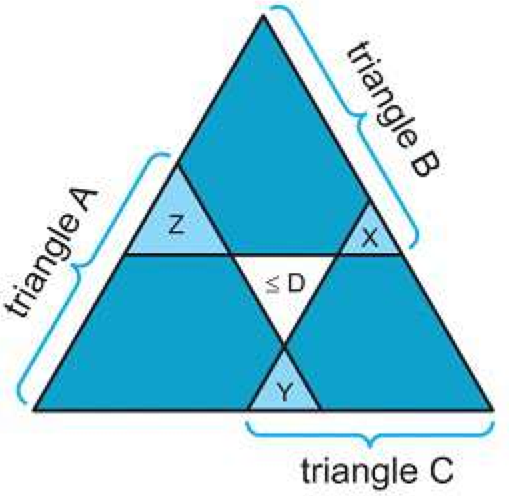


Figure 1: For Question 9

Let S denote the triangle of area 1. It is clearly that if $a \geq b$ then triangle of area a can cover triangle of area b. It suffices to consider the case when the areas of five small triangles are all smaller than 1.

Let $1 \geq A \geq B \geq C \geq D \geq E$ stand for the areas.

We will prove that the sum of side-lengths of B and C is not smaller than the side-length of triangle of area 1.

Indeed, suppose $\sqrt{B} + \sqrt{C} < \sqrt{1} = 1$.

It follows

$2 = A + B + C + D + E < 1 + B + C + 2\sqrt{BC} = 1 + (\sqrt{B} + \sqrt{C})^2 < 2$, which is impossible.

We cover S by A, B, C as Figure 1. We see that A, B, C will have common parts, mutually. Suppose

$X = B \cap C$; $Y = A \cap C$; $Z = A \cap B$.

It follows

$X + Y \leq C$; $Y + Z \leq A$; $Z + X \leq B$.

We deduce A, B, C cover a part of area:

$$A + B + C - X - Y - Z$$

$$= A + B + C - \frac{1}{2}[(X+Y) + (Y+Z) + (Z+X)]$$

$\geq \frac{1}{2}(A + B + C) = 1 - \frac{D + E}{2} \geq 1 - D.$

Thus, D can cover the remained part of S.

Question 10. Find all non-negative integers a, b, c such that the roots of equations:

$x^2 - 2ax + b = 0$; (1)

$x^2 - 2bx + c = 0$; (2)

$x^2 - 2cx + a = 0$ (3)

are non-negative integers.

Solution. We see that $a^2 - b$, $b^2 - c$, $c^2 - a$ are perfect squares. Namely,

$a^2 - b = p^2$; $b^2 - c = q^2$; $c^2 - a = r^2$.

There are two cases:

Case 1. $b = 0$. We derive that $b = c = 0$. Thus $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ is unique solution.

Case 2. $a, b, c \neq 0$. We have $a^2 - b \leq (a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$. This implies $b \geq 2a - 1$.

Similarly, we can prove that $c \geq 2b - 1$, and $a \geq 2c - 1$. Combining three above inequalities we deduce $a + b + c \leq 3$. By simple computation we obtain $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

Question 11. Let S denote a square of the side-length 7, and let eight squares of the side-length 3 be given. Show that S can be covered by those eight small squares.

Solution. Figure 2 is a solution.

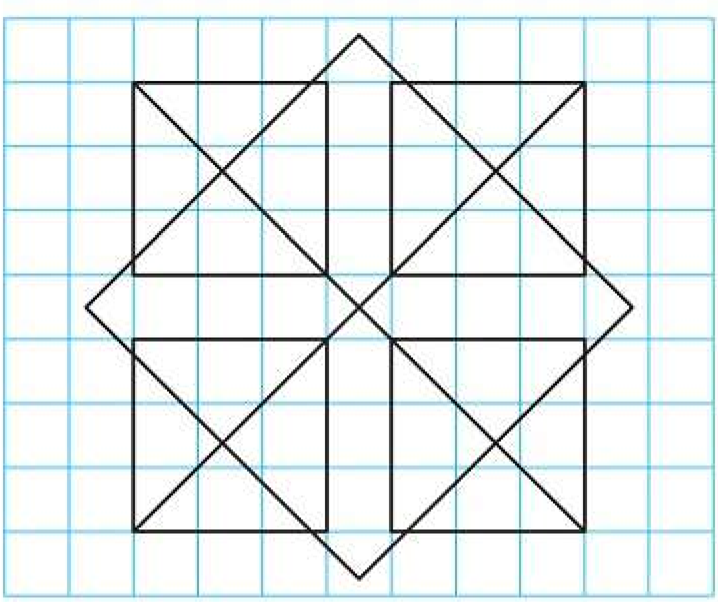


Figure 2: For Question 11

Question 12. Does there exist a sequence of 2017 consecutive integers which contains exactly 17 primes?

Solution. It is easy to see that there are more than 17 primes in the sequence of numbers 1, 2, 3, 4, ..., 2017. Precisely, there are 306 primes in that sequence.

Remark that if the sequence

$k + 1, k + 2, ..., k + 2017$

was changed by the sequence

$k, k + 1, ..., k + 2016,$

then the numbers of primes in the latter and former sequences are either equal, more or less by 1. In what follows, we say the such change a shift back with 1 step. First moment, we consider the sequence of 2017 consecutive integers:

$2018! + 2, 2018! + 3, ..., 2018! + 2018$

which contain no prime. After 2018! + 1 times shifts back, we obtain the sequence

1, 2, 3, 4, ..., 2017.

The last sequence has 306 primes, while the first sequence has no prime. Reminding the above remark we conclude that there is a moment in which the sequence contains exactly 17 primes.

Question 13. Let a, b, c be the side-lengths of triangle ABC with $a + b + c = 12$.

Determine the smallest value of

$$M = \frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c}.$$

Solution. Put

$$x := \frac{b+c-a}{2},\ y := \frac{c+a-b}{2},\ z := \frac{a+b-c}{2}.$$

Then x, y, z > 0, and $x + y + z = \frac{a+b+c}{2} = 6,$

$a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

We have

$$M = \frac{y+z}{2x} + \frac{4(z+x)}{2y} + \frac{9(x+y)}{2z}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{9x}{z}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z}\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{9x}{z}} + 2\sqrt{\frac{4z}{y}\cdot\frac{9y}{z}}\right) = 11.$$

The equality occurs in the above if and only if

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{4x}{y} \\ \frac{z}{x} = \frac{9x}{z} \\ \frac{4z}{y} = \frac{9y}{z}, \end{cases} \text{ or } \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ 2z = 3y. \end{cases}$$

Since x + y + z = 6 we receive x = 1; y = 2; z = 3. Thus minS = 11 if and only if (a, b, c) = (5, 4, 3).

Question 14. Given trapezoid ABCD with bases AB // CD (AB < CD). Let O be the intersection of AC and BD. Two straight lines from D and C are perpendicular to AC and BD intersect at E, i.e. CE ⊥ BD and DE ⊥ AC. By analogy, AF ⊥ BD and BF ⊥ AC. Are three points E, O, F located on the same line?

Solution. Since E is the orthocenter of triangle ODC, and F is the orthocenter of triangle OAB we see that OE is perpendicular to CD, and OF is perpendicular to AB. As AB is parallel to CD, we conclude that E, O, F are straightly lined.

Question 15. Show that an arbitrary quadrilateral can be divided into nine isosceles triangles.

Solution. Figures 1, 2, 3, and 4 shows some solution.

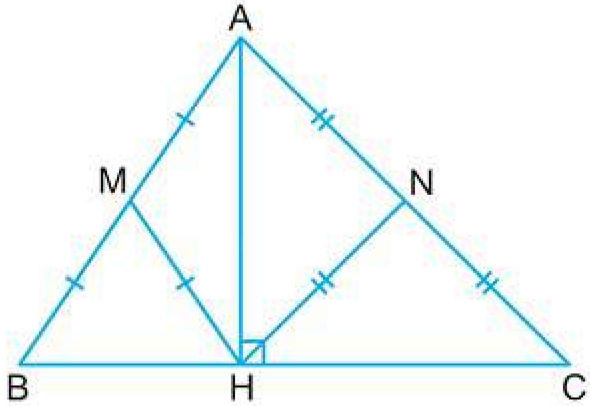


Figure 1: BC ≥ AB, BC ≥ AC

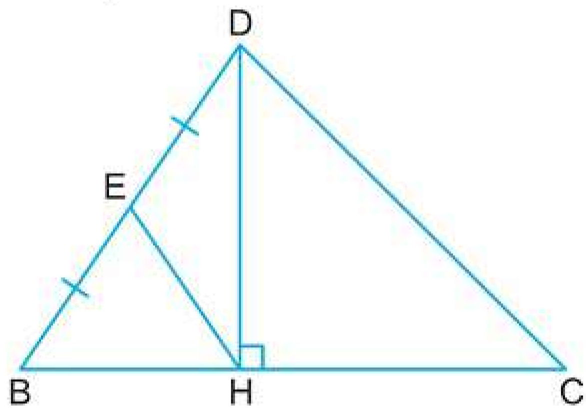


Figure 2: BC ≥ DB, BC ≥ DC

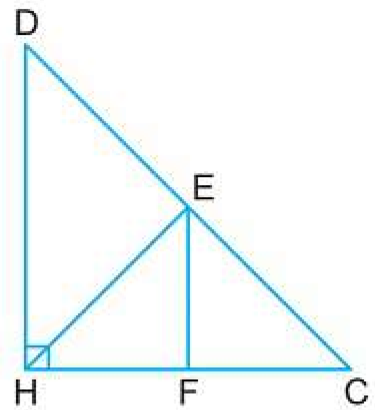


Figure 3: DH = HC

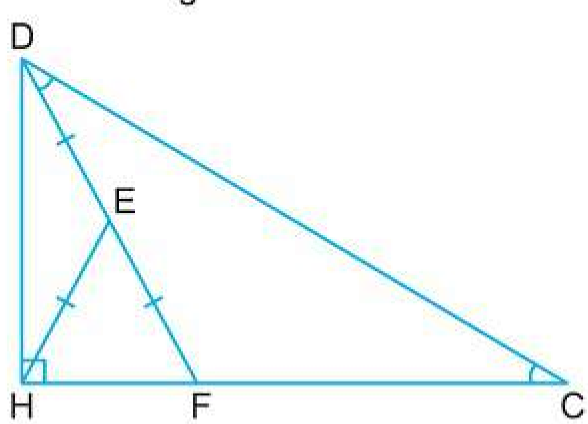


Figure 4: DH < HC

TỔ CHỨC CÁC TRẬN ĐẤU BÓNG ĐÁ

VÕ XUÂN MINH
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Hoạt động ngoại khóa môn Toán của trường chúng tôi diễn ra trong tháng 10 cũng là thời gian chuẩn bị tổ chức Hội khỏe Phù Đổng nên tổ Toán chúng tôi tổ chức cho học sinh thảo luận chuyên đề: "Tổ chức các trận đấu bóng đá" theo khối lớp nói chung và theo khối 9 nói riêng trong buổi ngoại khóa này.

Khối 9 có 8 lớp: 9A, 9B, 9C, 9D, 9E, 9F, 9G, 9H (kí hiệu A, B, C, D, E, F, G, H). Chúng tôi yêu cầu thảo luận theo lớp rồi một học sinh đại diện lớp lên trình bày phương án của mình.

Một học sinh (HS) trình bày phương án 1 như sau: Thi đấu vòng tròn 1 lượt, đội nào đạt nhiều điểm nhất là đội vô địch. Trường hợp có nhiều đội cùng số điểm nhiều nhất thì xét các chỉ số phụ như: hiệu số bàn thắng - thua, tính đối đầu ... Nếu hai đội bằng điểm nhau thì đá luân lưu.

Giáo viên (GV) dẫn chương trình đề nghị học sinh toàn trường cho biết số trận đấu theo phương án này.

HS: Số trận đấu là $7 \cdot 8 : 2 = 28$ trận.

GV: Các đội gặp nhau như thế nào?

HS: Cứ 2 đội chưa gặp nhau thì thi đấu với nhau.

GV: Mỗi lớp hãy lập bảng ghi 2 đội gặp nhau cụ thể nộp lên thầy.

Một vài lớp nộp lên GV nhưng chưa đạt yêu cầu vì có 2 đội gặp nhau 2 lần, và cũng có vài lớp đưa ra bảng đúng. Xin trích một bảng sau.

A - B, A - C, A - D, A - E, A - F, A - G, A - H
C - G, B - H, B - C, B - D, B - E, B - F, B - G
D - F, D - G, E - G, C - H, C - D, C - E, C - F
E - H, E - F, F - H, F - G, G - H, D - H, D - E

GV: Để khách quan và biết được thứ tự trận đấu, ta bốc thăm. Có 28 thăm, mỗi thăm ghi 1 cặp như bảng trên. Một học sinh bốc theo thứ tự lần 1, lần 2, lần 3... Ví dụ lần 1 là F - H có nghĩa là lớp 9F đấu trận đầu tiên với 9H, lần 2 là B - L nghĩa là 9B và 9L gặp nhau trận thứ 2... Các em có nhận xét gì về phương án này?

HS: Mỗi lớp đều được thi đấu với các lớp khác nhưng số trận đấu sẽ nhiều.

GV: Đúng rồi, số trận đấu quá nhiều, đó là chưa tính khối 6, 7, 8 sẽ ảnh hưởng đến học tập, nên phương án này không khả thi. Lớp nào có phương án 2?

HS: Chia làm 2 bảng, mỗi bảng thi đấu vòng tròn, đội nhất bảng này gặp đội nhì bảng kia và đội nhất bảng kia gặp đội nhì bảng này. Hai đội thắng vào chung kết.

GV: Phương án này giống các cuộc thi đấu quốc tế. Các em thử tính số trận đấu theo phương án 2?

HS: Mỗi bảng có số trận đấu là $4 \cdot 3 : 2 = 6$ trận, cả 2 bảng có 12 trận, có 2 trận bán kết và 1 trận chung kết, nên tổng số trận đấu là $12 + 2 + 1 = 15$ trận.

GV: Số trận đấu mặc dầu ít hơn phương án 1 nhưng vẫn còn nhiều. Các em hãy đề xuất phương án 3 sao cho số trận đấu ít hơn phương án 2.

HS: Giống phương án 2 nhưng không có 2 trận bán kết, chỉ có 2 đội nhất vào bảng chung kết nên tổng số trận đấu là 13 trận.

GV: Số trận đấu cũng còn nhiều. Trước khi trình bày phương án 4, các em hãy trả lời các câu đố vui có thưởng sau đây.

GV đọc từng câu hỏi, HS trả lời từng câu.

Câu 1. Có 3 đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt. Kết thúc thì tổng số điểm của 3 đội ít nhất là bao nhiêu? Nhiều nhất là bao nhiêu?

Câu 2. Có 3 đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt. Kết thúc đội nhất đạt 4 điểm, đội cuối có điểm là 0. Hỏi đội nhì đạt mấy điểm?

Câu 3. Có 4 đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt. Kết thúc thì tổng số điểm của 4 đội là 15 điểm. Hỏi có mấy trận thắng? Mấy trận thua và mấy trận hòa?

GV: Trở lại chuyên đề: "Tổ chức các trận đấu bóng đá", lớp nào trình bày phương án 4?

HS: Hai đội đấu loại trực tiếp (4 trận), nếu hòa thì đá luân lưu. Bốn đội thắng chia làm 2 cặp gặp nhau (2 trận), 2 đội thắng vào chung kết (1 trận). Tổng cộng có $4 + 2 + 1 = 7$ trận.

GV: Phương án này khả thi. Tuy nhiên để khách quan và khoa học ta sẽ bốc thăm 1 lần theo sơ đồ sau, trong đó mỗi trận được kí hiệu bởi 

Có 8 thăm được đánh số từ 1 đến 8. Lớp nào bốc số nào thì ghép vào theo sơ đồ trên.

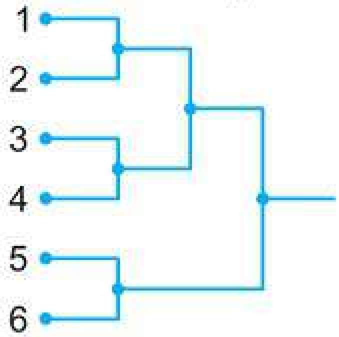
Sẵn đây tổ Thể dục đã thống nhất cho bốc thăm luôn. GV tiến hành cho 8 lớp trưởng khối 9 bốc thăm, rồi thông báo kết quả cho các lớp biết.

GV: Nếu số lớp là số lẻ như khối 8 có 7 lớp thì sơ đồ như thế nào?

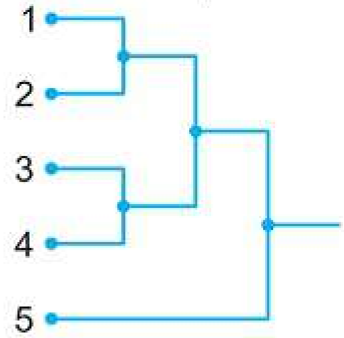
HS: Như sơ đồ của phương án 4. Lớp nào bốc số 7 sẽ chỉ thi đấu với đội thắng của cặp 5 - 6. Trường hợp này có tất cả 6 trận đấu.

GV: Hợp lí. Bốn khối trường mình đều có 7 lớp hoặc 8 lớp nên chúng ta tiến hành theo phương án 4. Giả sử có 6 lớp hoặc 5 lớp thì lập sơ đồ như thế nào? Có tất cả mấy trận đấu?

HS: Sơ đồ 6 lớp



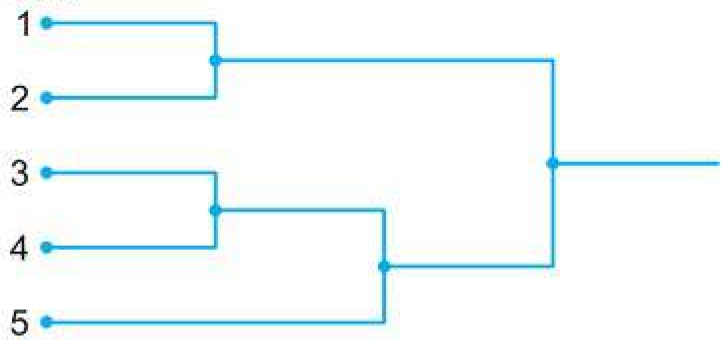
Sơ đồ 5 lớp



Nếu 6 lớp thì có 5 trận, nếu 5 lớp thì có 4 trận.

GV: Các em có nhận xét gì về 2 sơ đồ trên?

HS: Sơ đồ 6 lớp hợp lí, nhưng sơ đồ 5 lớp không hợp lí vì đội số 5 không đấu trận nào mà lại vào chung kết! Theo em thì sơ đồ như sau.



GV: Sơ đồ này hợp lí. Em nào có phương án khác cũng như bốc thăm cho khối 6, 7, 8 thì gặp thầy cô Thể dục. Chương trình ngoại khóa đến đây là hết.

GV nhận xét buổi hoạt động ngoại khóa. Tuyên dương phát thưởng khích lệ (bánh, kẹo, bút, vở) cho lớp tích cực và trả lời đúng, đồng thời phát bài tập tự luyện cho các lớp. Lớp nào nộp trước và đúng bài nào sẽ nhận phần thưởng bài đó.

Bài 1. Có 4 đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt. Kết thúc có 3 đội đạt số điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm, 1 điểm. Hỏi đội còn lại đạt mấy điểm?

Bài 2. Có 8 đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt. Kết thúc không có trận hòa. Chứng minh rằng trong 8 đội đó luôn tìm được 4 đội A, B, C, D sao cho A thắng 3 đội B, C, D. Đội B thắng C, D và đội C thắng D.

Bài 3. Có 8 đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt.

a) Chứng minh rằng có ít nhất 1 đội có số điểm không ít hơn 8 điểm.

b) Chứng minh rằng không thể có nhiều hơn 4 đội mà mỗi đội trong số đó nhiều hơn 15 điểm.

Kết quả

Giải toán qua thư

Bài 1(178). Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $2a^a + b^b = 3c^c$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2015^{a-b} + 2016^{b-c} + 2017^{c-a}$.

Lời giải. • Nếu $a = c$ thì $b = c$.

• Nếu $b = c$ thì $a = c$.

• Nếu $a < c$ và $b < c$ thì

$2a^a + b^b < 2c^c + c^c = 3c^c$ (trái với giả thiết).

• Nếu $b > c$ thì $b \geq c + 1$, khi đó

$$3c^c = 2a^a + b^b \geq 2 + (c+1)b^c$$

$$\geq 2 + (c+1)(c+1)^c > 2 + (c+1)^c$$

$$\Rightarrow (2-c)c^c > 2 \Rightarrow c < 2.$$

Do đó $c = 1$.

Khi đó $2a^a + b^b = 3 \Rightarrow a = b = 1 = c$ (loại).

• Nếu $a > c$ thì $a \geq c + 1$. Khi đó

$$3c^c = 2a^a + b^b \geq 2(c+1)^{c+1} + 1$$

$$> 2(c+1)(c+1)^c > 2(c+1)c^c$$

$$\Rightarrow (1-2c)c^c > 0 \Rightarrow c < 1 \text{ (loại).}$$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a = b = c$.

Suy ra $P = 2015^{a-b} + 2016^{b-c} + 2017^{c-a}$

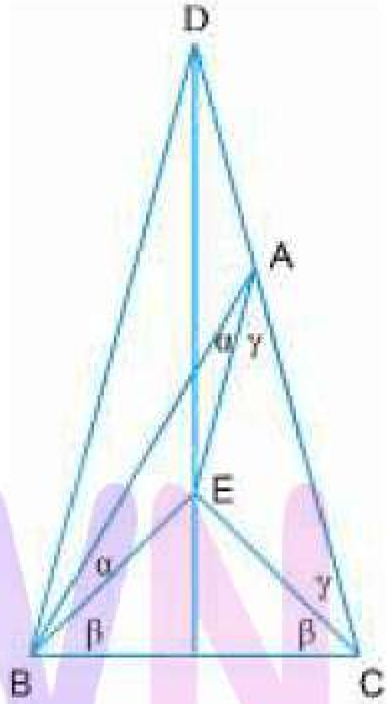
$= 1 + 1 + 1 = 3$.

Nhận xét. Bài toán này cần xét đầy đủ các trường hợp để đưa đến được kết luận về giá trị của các số a, b, c. Nhiều bạn tham gia giải bài, tuy nhiên một vài lời giải vẫn quá phức tạp, các bạn sau được khen kì này: *Trần Quang Đạt, Lê Tuyết Nga, Lê Triệu Hưng*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Minh Long, Lê Đức Chính*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; Nguyễn Văn Bảo Châu, 6/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**.

PHÙNG KIM DUNG

Bài 2(178). Cho tam giác ABC với $\hat{B} = 60^o$; $\hat{C} = 75^o$; BC = 2 cm. Gọi D là điểm trên tia đối của tia AC sao cho $AD = \sqrt{2}$ cm. Tính $\widehat{BDC}$.

Lời giải.



Gọi E là giao điểm các đường trung trực của AB, AC. Khi đó các tam giác EAB, EBC, ECA cân tại E, từ đó $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = \alpha$;

$\widehat{EBC} = \widehat{ECB} = \beta$; $\widehat{ECA} = \widehat{EAC} = \gamma$.

Theo giả thiết ta có $\alpha + \beta = 60^o; \beta + \gamma = 75^o$

nên $\gamma + \alpha = 180^o - (60^o + 75^o) = 45^o$.

Suy ra $\alpha = 15^o; \beta = 45^o; \gamma = 30^o$.

Do đó ΔEBC vuông cân tại E.

Áp dụng định lí Pythagoras vào tam giác vuông EBC ta có

$$BC^2 = EB^2 + EC^2 = 2EB^2$$

$$\Rightarrow EB^2 = \frac{BC^2}{2} = 2 \text{ (cm).}$$

Suy ra $EB = EC = \sqrt{2}$ (cm).

Do đó $AD = EA = EB = EC = \sqrt{2}$ (cm).

Suy ra ΔAED cân tại A.

Vì $\widehat{EAC} = \gamma = 30^o$ nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = 15^o$.

Trong ΔCED có $\widehat{ECD} = 30^o$, $\widehat{EDC} = 15^o$.

Từ đó $\widehat{CED} = 135^o$.

Ta lại có $\widehat{BEC} = 90^o$, từ đó $\widehat{BED} = 135^o$.

Suy ra $\Delta BED = \Delta CED$ (c.g.c).

Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{EDB} = 15^o$.

Suy ra $\widehat{BDC} = 30^o$.

Nhận xét. Một số bạn đã sử dụng các kiến thức ở THPT để giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt: *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; *Hoàng Thị Yến Nhi, Hà Quang Tùng, Lê Tuyết Nga, Bùi Trọng Hiếu, Nguyễn Minh Châu, Lê Triệu Hưng,* 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Vũ Hồng Phúc*, 7G, THCS Hùng Vương, TX. Phú Thọ, **Phú Thọ**; *Trần Phương Mai*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**.

HỒ QUANG VINH

Bài 3(178). Cho dãy số 1, 1, 2, 3, 7, 22, ... có quy luật là: Mỗi số hạng, kể từ số hạng thứ ba, bằng tích của hai số hạng đứng ngay trước nó cộng với 1. Chứng minh rằng các số hạng của dãy số là số chẵn thì không chia hết cho 4.

Lời giải. Ta thấy dãy số có quy luật: lẻ, lẻ, chẵn, lẻ, lẻ, chẵn, ...

Số chẵn đầu tiên là 2 không chia hết cho 4.

Giả sử năm số liên tiếp của dãy số đã cho là a, b, c, d và e, trong đó b, e là số chẵn, a, c, d là số lẻ.

Ta có e = cd + 1 hay (ab + 1)(bc + 1) + 1 = $ab^2c + b(a + c) + 2$. (*)

Vì b là số chẵn, a và c là số lẻ nên $ab^2c \vdots 4$ và $b(a + c) \vdots 4$.

Từ đó và (*) suy ra e là số chẵn không chia hết cho 4.

Suy ra đpcm.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt được khen kì này: *Nguyễn Quang Minh*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

NGUYỄN NGỌC HÂN

Bài 4(178). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 32x^3 - 48x^2 + 30x + (4y-7)\sqrt{1-y} = 7 \ (1) \\ 3x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $y \le 1$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 4(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) + 3(2x - 1)$
$- 4(1-y)\sqrt{1-y} - 3\sqrt{1-y} = 0.$

$\Leftrightarrow 4(2x-1)^3 + 3(2x-1) - 4(\sqrt{1-y})^3$
$- 3\sqrt{1-y} = 0.$ (2)

Đặt $a = 2x - 1$; $b = \sqrt{1-y}$ $(b \ge 0)$ thì (2) trở thành $4a^3 + 3a - 4b^3 - 3b = 0$

$\Leftrightarrow 4(a-b)(a^2 + ab + b^2) + 3(a-b) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(4a^2 + 4ab + 4b^2 + 3) = 0.$ (3)

Vì $4a^2 + 4ab + 4b^2 + 3 = (2a+b)^2 + 3b^2 + 3 > 0$ nên (3) $\Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Suy ra $2x - 1 = \sqrt{1-y} \ge 0$ nên $x \ge \frac{1}{2}$. (*)

Bình phương hai vế ta được

$4x^2 - 4x + 1 = 1 - y \Leftrightarrow y = 4x - 4x^2.$ (4)

Thay (4) vào phương trình thứ hai trong hệ phương trình đã cho, ta được

$3x + (4x - 4x^2) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{3}{4} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn (*))}.$$

- Với $x = 1$ thì từ (4), suy ra $y = 0$.
- Với $x = \frac{3}{4}$ thì từ (4) suy ra $y = \frac{3}{4}$.

Thử lại thấy đúng.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x; y) là (1; 0) và $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Nhận xét. Điều then chốt của bài toán là từ phương trình thứ nhất trong hệ suy ra $2x - 1 = \sqrt{1-y} \ge 0 \Leftrightarrow y = 4x - 4x^2$ rồi kết hợp với phương trình thứ hai.

Một số bạn đã từ phương trình thứ hai trong hệ suy ra y = –3x + 3; thay vào phương trình thứ nhất và chứng minh $2x-1=\sqrt{3x-2}$. Về bản chất cách giải này không khác nhiều với cách giải trên.

Các bạn sau có lời giải tốt: *Đặng Thái Tuấn, Đào Nhân Độ, Hạ Hiền Lương*, 8A3, *Trần Cao Mỹ Duyên,* 9A1, *Nguyễn Đăng Khoa*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Đặng Thị Hiền*, 8A, THCS Yên Phụ, *Nguyễn Tiến Phong, Trần Quang Tài, Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong, *Nguyễn Thị Minh Tâm*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Đàm Quang Anh, Đặng Phương Nam, Nguyễn Đức Hữu*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định.**

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài 5(178). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$ $(x, y, z > 0)$

và $P=\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}$.

Khi đó $P=\frac{xz}{xy+yz}+\frac{yz}{zx+xy}+\frac{xy}{yz+zx}$.

Ta có

$$P+3=(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy+yz}+\frac{1}{yz+zx}+\frac{1}{zx+xy}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(xy+yz)+(yz+zx)+(zx+xy)]\left(\frac{1}{xy+yz}+\frac{1}{yz+zx}+\frac{1}{zx+xy}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P+3\ge\frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)}}=\frac{9}{2}\Rightarrow P\ge\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}xy=yz\\ yz=zx\\ zx=xy\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng và ngắn gọn: *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 8E, *Nguyễn Trung Kiên*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Trần Phương Mai*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; *Nguyễn Trọng Đức*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Nguyễn Bích Ngọc*, 8A1, *Nguyễn Duy Bảo, Nguyễn Tiến Phong, Trần Quang Tài*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Ngọc Anh*, 9A, THCS Thị trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang**; *Trần Cao Kỳ Duyên*, 9A1, *Nguyễn Hà Trang, Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Phạm Việt Dũng, Nguyễn Phương Linh*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Trần Anh Tuấn*, 8C, *Trần Đức Tùng, Phạm Khánh Huyền*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Bích Ngọc*, 8A1, *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Sĩ Huy, Vũ Hải Sơn*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Lê Ngọc Nam*, 7B, *Nguyễn Minh Quý*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Đặng Phương Nam*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phú Mỹ, **Bình Định**; *Hà Minh Đức*, 9C, THCS Lê Qúy Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương.**

CAO VĂN DũNG

Bài 6(178). Cho a, b, c là các số thực khác nhau đôi một và $x=\frac{b}{a-b}$; $y=\frac{c}{b-c}$; $z=\frac{a}{c-a}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $M = xy + yz + zx + x + y + z$ không phụ thuộc vào giá trị của a, b, c.

Lời giải. Ta có $M = x(y + 1) + y(z + 1) + z(x + 1)$

$$=\frac{b}{a-b}\left(\frac{c}{b-c}+1\right)+\frac{c}{b-c}\left(\frac{a}{c-a}+1\right)+\frac{a}{c-a}\left(\frac{b}{a-b}+1\right)$$

$$= \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(b-c)(c-a)} + \frac{a^2}{(c-a)(a-b)}$$

$$= \frac{b^2(c-a) + c^2(a-b) - a^2\left[(c-a)+(a-b)\right]}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-(c-a)(a^2-b^2) + (a-b)(c^2-a^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{(a-b)(c-a)(c+a-a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1.$$

Vậy giá trị của biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của a, b ,c.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn tham gia giải bài. Các bạn sau có lời giải tốt và ngắn gọn: *Hà Quang Tùng, Nguyễn Minh Châu,* 7A3, *Nguyễn Công Hải*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Lương Minh Hiếu, Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Quỳnh Chi*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Đặng Phương Nam, Đàm Quang Anh, Nguyễn Đức Hữu*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Lê Thị Hằng Nhi, Nguyễn An Na*, 9A; *Trần Anh Tuấn*, 8C; THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Nguyễn Thị Hiền Diệu, Nguyễn Thanh Tiến*, 7B, *Trương Ngọc Tâm*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Sĩ Huy*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Lê Danh Vinh*, 8A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Ngô Minh Quân*, 8A; *Lê Văn Quang Trung*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An**; *Hà Minh Đức*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Vũ Ngọc Anh*, 9A, THCS Thị Trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phú Mỹ, **Bình Định**.

BÙI MẠNH TÙNG

Bài 7(178). Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^q.q^p = (2p + q + 1)(2q + p + 1)$.

Lời giải. Nếu p, q đều là số nguyên tố khác 2 thì p, q cùng là số lẻ. Khi đó $p^q.q^p$ là số lẻ, còn $(2p+q+1)(2q+p+1)$ là số chẵn (loại). Do đó p hoặc q phải bằng 2.

Giả sử p = 2 thì

$$2^q.q^2 = (q+5)(2q+3) = 2q^2 + 13q + 15$$

$$\Rightarrow 2q^2 + 13q + 15 \,\vdots\, q \Rightarrow 15 \,\vdots\, q.$$

Mà q là số nguyên tố nên $q \in \{3; 5\}$.

Thử lại ta thấy chỉ có q = 3 thỏa mãn.

Vì vai trò của p và q như nhau nên (p; q) bằng (2; 3), (3; 2).

Nhận xét. Từ $2^q.q^2 = (q+5)(2q+3)$ có thể lập luận để suy ra $q^2 = 2q+3$, $2^q = q+5$, từ đó $q = 3$.

Có rất nhiều bạn tham gia giải bài và hầu hết các bạn có lời giải đúng. Các bạn có bài giải tốt: *Đào Đoàn Tuấn Anh*, 6B, *Trần Quốc Anh, Hà Trung Chiến, Nguyễn Võ Hưng, Nguyễn Tiến Đức, Phan Văn Nam, Nguyễn Trí Dũng, Lê Thái Bảo, Phạm Huỳnh, Nguyễn Hưng Phát, Nguyễn Vũ Hoàng, Trần Đức Tùng, Nguyễn Ngọc Mai, Đặng Đình Huy, Trần Ngọc Khiêm, Vũ Thị Thái Hà, Lê Nguyễn Gia Huy*, 8B, *Lê Thị Hằng Nhi*, 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Quang Tài*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Hải Sơn*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Dương Đức An*, 7A3, *Nguyễn Công Hải, Vũ Minh Khải, Nguyễn Công Hùng*, 8A3, *Nguyễn Đức Tân*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, *Phùng Đăng Dương*, 7C, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

NGUYỄN HIỆP

Bài 8(178). Trên mặt phẳng cho 17 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua hai điểm bất kì ta vẽ được một đoạn thẳng và trên đoạn thẳng đó ghi một số nguyên dương (Các số ghi trên các đoạn thẳng khác nhau là các số nguyên dương khác nhau). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có các cạnh là các đoạn thẳng đã vẽ và tổng các số ghi trên các cạnh của tam giác đó là hợp số.

Lời giải. Trên mặt phẳng cho 17 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và qua hai điểm bất kì vẽ một đoạn thẳng. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng bằng một trong ba màu: Đỏ, Xanh và Vàng.

a) Trước hết ta sẽ chứng minh rằng: Tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng một màu.

Gọi A là một điểm đã cho, nối A với 16 điểm còn lại được 16 đoạn thẳng và chúng được tô bởi ba màu, theo Nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 6 đoạn thẳng có cùng một màu. Giả sử đó là các đoạn thẳng AB, AC, AD, AE, AF, AG có cùng màu Đỏ. Xét các đoạn thẳng nối từng cặp điểm trong 6 điểm B, C, D, E, F, G. Xảy ra các trường hợp sau:

- TH1. Tồn tại một đoạn thẳng có màu Đỏ, chẳng hạn là BC, thì tam giác ABC có ba cạnh cùng màu Đỏ, khẳng định đúng.
- TH2. Tất cả các đoạn thẳng nối B, C, D, E, F, G chỉ có màu Xanh hoặc màu Vàng. Ta xét 5 đoạn thẳng BC, BD, BE, BF, BG được tô bởi hai màu thì theo Nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 đoạn thẳng có cùng một màu. Giả sử đó là BC, BD và BE cùng có màu Xanh.

* Nếu trong ba đoạn thẳng CD, CE và DE có một đoạn tô màu Xanh, chẳng hạn là CD thì tam giác BCD có ba cạnh cùng màu Xanh, khẳng định đúng.

* Nếu trong ba đoạn thẳng CD, CE và DE không có một đoạn nào màu Xanh, thì tam giác CDE có ba cạnh cùng màu Vàng, khẳng định đúng.

Vậy tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng một màu.

b) Giả sử trên mỗi đoạn thẳng ghi một số nguyên dương, đoạn thẳng khác nhau ghi số khác nhau. Chia mỗi số nguyên dương đó cho 3 ta được các số dư là 0, 1, 2. Ta tô màu đoạn thẳng ghi số dư 0, 1, 2 theo thứ tự ứng với màu Đỏ, Xanh, Vàng thì theo kết quả trên tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng một màu, tức là ba số đó có cùng số dư r, chẳng hạn là $3k + r$, $3h + r$, $3m + r$.

Lúc đó tổng ba số trên ba cạnh của tam giác đó bằng

$3k + r + 3h + r + 3m + r = 3(k + h + m + r) \vdots 3$.

Mà $3k + r + 3h + r + 3m + r > 3$.

Do đó $3k + r + 3h + r + 3m + r$ là hợp số.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Lương Tùng Lâm*, 8H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Lê Danh Vinh*, 8A1, *Trần Quang Tài*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, *Nguyễn Thị Minh Tâm*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Kiều Trang*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Phạm Ngọc Nữ*, 7A, *Nguyễn Xuân Hưng*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài 9(178). Có thể cắt ra nhiều nhất bao nhiêu hình chữ nhật kích thước $4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ từ miếng giấy hình chữ nhật kích thước $13\text{ cm} \times 12\text{ cm}$.

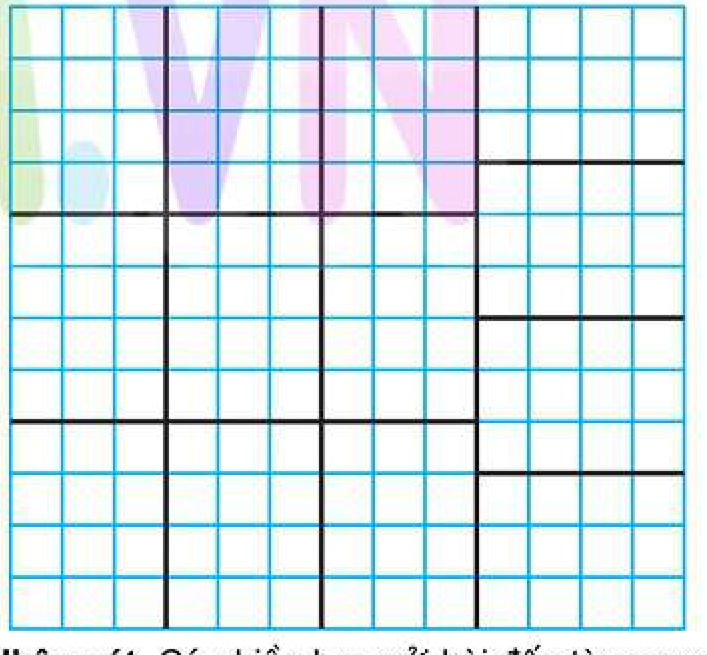
Lời giải. Diện tích miếng giấy hình chữ nhật kích thước $13\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ là

$13 \times 12 = 156\ (\text{cm}^2)$.

Diện tích hình chữ nhật kích thước $4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ là $3 \times 4 = 12\ (\text{cm}^2)$.

Do đó số hình chữ nhật tối đa chia được là $\frac{156}{12} = 13$.

Dưới đây là hình vẽ thể hiện một cách chia hình ban đầu thành 13 hình chữ nhật $4\text{ cm} \times 3\text{ cm}$.



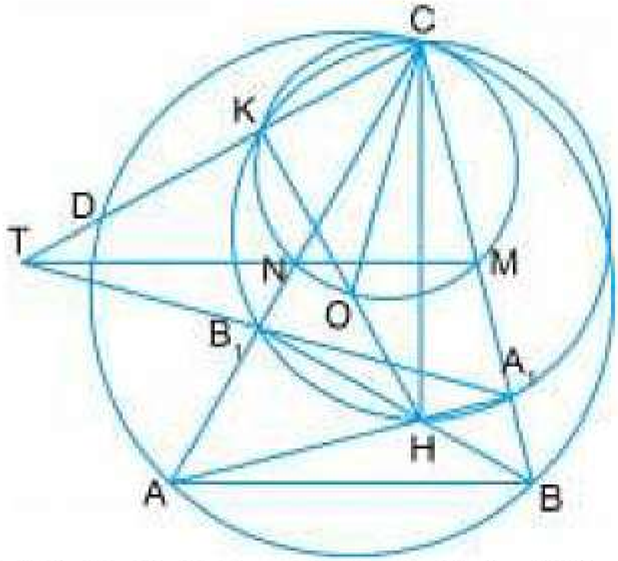
Nhận xét. Có nhiều bạn gửi bài đến tòa soạn và có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt và ngắn gọn: *Nguyễn Công Hải, Vũ Minh Khải, Nguyễn Công Hùng*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; *Lương Tùng Lâm*, 8H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Sỹ Huy*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Nguyễn Khánh Huyền*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**; *Trần Quang Tài*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên

Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Thị Kiều Trang*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Thanh, Nam Trực, **Nam Định**; *Trần Đức Anh, Nguyễn Ngọc Linh, Nguyễn Vân Khánh*, 6A1; *Phạm Đức Trí*, 6A2; *Bùi Minh Đức*, 6A4, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.

TRỊNH HOÀI DƯƠNG

Bài 10(178). Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của CB, CA. Vẽ các đường cao AA_1, BB_1 của tam giác. Giả sử A_1B_1 và MN cắt nhau tại T. Chứng minh rằng TC vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC (Đường thẳng Euler của tam giác là đường thẳng đi qua trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó).

Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC; D là giao điểm thứ hai của CT và (O); K là trung điểm của CD.



Dễ thấy M, N, K theo thứ tự là hình chiếu của O trên CB, CA, CD.

Do đó $OK \perp CK \equiv CT$ và tứ giác CKNM nội tiếp. (1)

Vì M, N theo thứ tự là trung điểm của CB, CA nên MN // BA.

Vì A_1, B_1 theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên CB, CA nên tứ giác ABA_1B_1 nội tiếp.

Vậy $\widehat{CMN} = \widehat{CBA} = \widehat{CB_1A_1}$.

Do đó tứ giác A_1B_1NM nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$TC.TK = TM.TN = TA_1.TB_1$.

Do đó tứ giác CKB_1A_1 nội tiếp.

Kết hợp với $HB_1 \perp CB_1$, suy ra

$HK \perp CK \equiv CT$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra H, O, K thẳng hàng và $OH \perp CT$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt: *Nguyễn Đăng Khoa*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phú Mỹ, **Bình Định**.

NGUYỄN MINH HÀ

ĐƯỢC THƯỞNG KÌ NÀY

Thi giải toán qua thư

Lê Tuyết Nga, Lê Triệu Hưng, Hà Quang Tùng, Nguyễn Minh Châu, 7A3; *Nguyễn Đăng Khoa*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Lê Minh Long, Lê Đức Chính*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, thị trấn Bút Sơn, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Văn Bảo Châu*, 6/5, THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**; *Trần Phương Mai*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; *Nguyễn Quang Minh*, 7A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Trần Quang Tài*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Đặng Phương Nam, Đàm Quang Anh*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường**, Vĩnh Phúc**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phú Mỹ, **Bình Định**; *Vũ Ngọc Anh*, 9A, THCS Thị trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang**; *Nguyễn Thị Kiều Trang*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Thanh, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Sỹ Huy*, 9A, THCS Kiến Quốc, Kiến Thụy, **Hải Phòng**; *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phú Mỹ, **Bình Định**; *Hà Minh Đức*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương**; *Nguyễn Vân Khánh*, 6A1; *Phạm Đức Trí*, 6A2, THCS Giảng Võ, Ba Đình, **Hà Nội**.

DISTANCE FORMULA

THS. DƯƠNG THU TRANG *(Gmath Education)*

1. Definition

Distance formula is used to find the distance between any two arbitrary points in space.

2. Distance formula

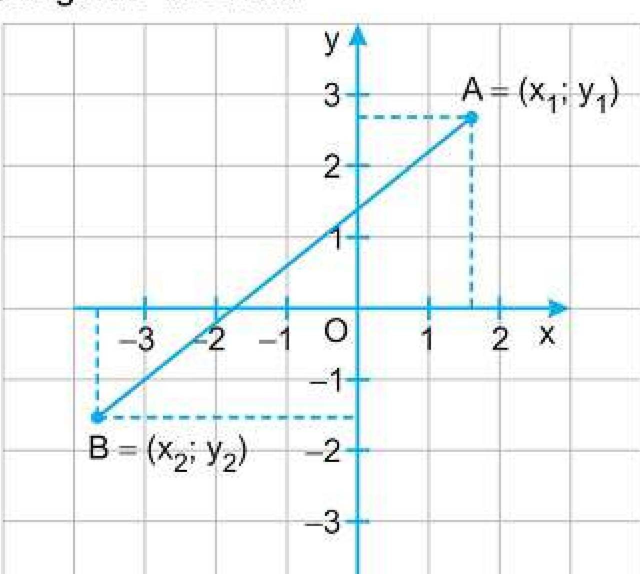
Suppose $A = (x_1)$ and $B = (x_2)$ are two points lying on the real number line. Then the **distance** between A and B is:

$$d(A,B) = |x_1 - x_2|.$$

In the plane, we can consider the x-axis as a one-dimensional number line, so we can compute the distance between any two points lying on the x-axis as the absolute value of the difference of their x-coordinates. Similarly, the distance between any two points lying on the y-axis is the absolute value of the difference of their y-coordinates. To find the distance between two points $(x_1; y_1)$ and $(x_2; y_2)$, all that you need to do is use the coordinates of these ordered pairs and apply the formula given by:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

The distance formula is derived from the Pythagoras' theorem.



3. Exercise:

1) Prove the distance formula.

2) Show that the points A = (–3; 0); B = (1; –3); C = (4; 1) are the vertices of an isosceles right-angled triangle. Also find the area of the triangle.

4. Technical terms

TERM	MEANING
Distance	Khoảng cách
Formula	Công thức
Arbitrary	Bất kì
Space	Không gian
Number line	Trục số
One-dimensional	Một chiều
Absolute value	Giá trị tuyệt đối
Isosceles	Cân (tam giác)
Right-angled	Vuông (tam giác)
Derive	Thu được

Bạn hãy giải hai bài toán trên (bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh) rồi gửi bài giải về tòa soạn nhé. Năm bạn có bài giải tốt nhất sẽ được nhận quà.

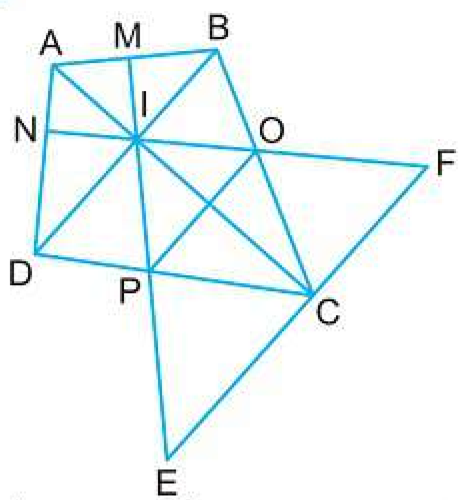
TỨ GIÁC NỘI TIẾP CÓ HAI ĐƯỜNG CHÉO VUÔNG GÓC

VŨ CÔNG MINH
(GV. THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Chúng ta đã biết tới đường thẳng Euler của tam giác. Đó là đường thẳng đi qua ba điểm là trọng tâm G; trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác đó. Vậy đối với tứ giác thì sao? Bài viết này đề cập tới một phát hiện đẹp về một đường thẳng liên quan tới tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc. Trước hết ta có bài toán xuất phát sau.

Bài toán 1. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Kẻ IM vuông góc với AB tại M; IN vuông góc với AD tại N. Tia MI cắt CD tại P, tia NI cắt CB tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với BD.

Lời giải.



Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt IP và IQ lần lượt tại E và F.

Từ đó $\frac{QB}{QC} = \frac{BI}{CF}; \frac{PD}{PC} = \frac{DI}{CE}$. (1)

Ta có $\widehat{ABI} = \widehat{AIM} = \widehat{CIE}$ và $\widehat{ADI} = \widehat{AIN} = \widehat{CIF}$. Do đó

- $\Delta ICE \backsim \Delta BIA$ (g.g) nên $\frac{IC}{BI} = \frac{CE}{IA}$

hay BI.CE = IC.IA. (2)

- $\Delta ICF \backsim \Delta DIA$ (g.g) nên $\frac{IC}{DI} = \frac{CF}{IA}$

hay DI.CF = IC.IA. (3)

Từ (2) và (3) suy ra

BI.CE = DI.CF hay $\frac{BI}{CF} = \frac{DI}{CE}$. (4)

Từ (1), (4) ta có $\frac{QB}{QC} = \frac{PD}{PC}$.

Từ đó PQ // BD.

Nhận xét. Vì PQ // BD nên $\widehat{MPQ} = \widehat{MIB}$ (đồng vị). Mặt khác $\widehat{MIB} = \widehat{MAI}$ (cùng phụ với $\widehat{MBI}$) và tứ giác AMIN nội tiếp nên $\widehat{MAI} = \widehat{MNI}$. Do vậy $\widehat{MNI} = \widehat{MPQ}$. Từ đó tứ giác MNPQ nội tiếp một đường tròn.

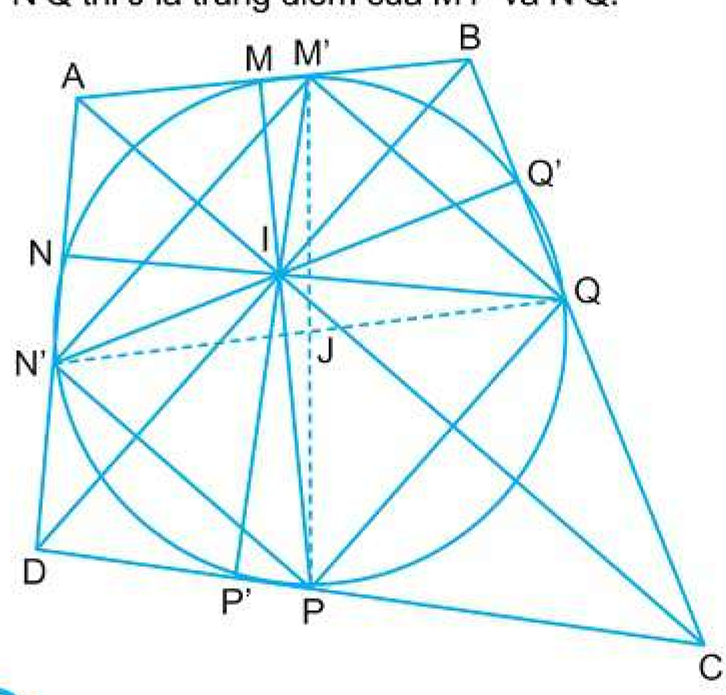
Bây giờ ta đi xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MNPQ.

Đường thẳng qua I vuông góc với CD tại P' và cắt AB tại M'. Đường thẳng qua I vuông góc với CB tại Q và cắt AD tại N'.

Theo chứng minh trên ta có tứ giác M'N'P'Q' nội tiếp một đường tròn.

Từ kết quả ở trên ta có PQ // BD // N'M' và N'P // AC // M'Q. Mặt khác AC ⊥ BD nên tứ giác M'N'PQ là hình chữ nhật. Vậy N'Q = M'P.

Gọi J là giao điểm của hai đường chéo M'P và N'Q thì J là trung điểm của M'P và N'Q.

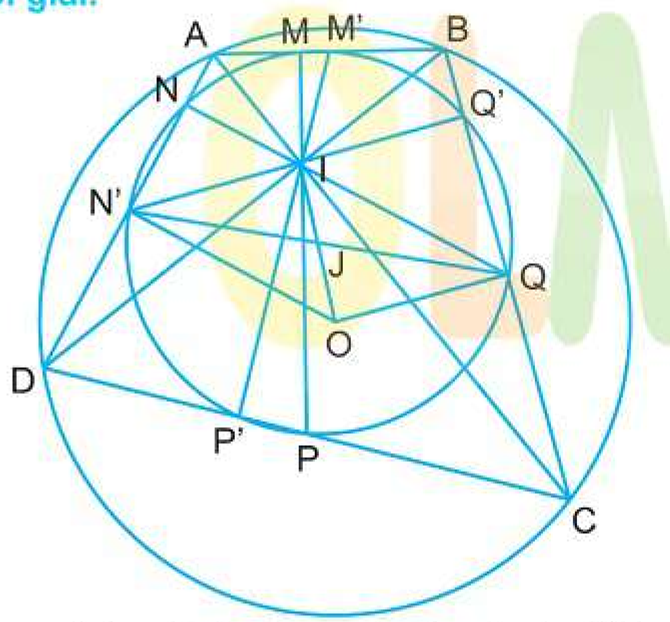


Thấy rằng 4 điểm N, N', Q, Q' cùng nằm trên đường tròn tâm J bán kính $\frac{N'Q}{2}$; 4 điểm M, M', P, P' nằm trên đường tròn tâm J bán kính $\frac{M'P}{2}$. Do đó 8 điểm M, N, P, Q, M', N', P', Q' nằm trên một đường tròn tâm J. Vậy MNPQ nội tiếp đường tròn tâm J bán kính $\frac{N'Q}{2}$.

Một vấn đề đặt ra, nếu tứ giác ABCD ban đầu nội tiếp trong một đường tròn ta có kết quả gì đặc biệt? Một trong những kết quả đó được trình bày dưới đây.

Bài toán 2. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc tại I và nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng qua I vuông góc với AB tại M và cắt CD tại P. Đường thẳng qua I vuông góc với AD tại N và cắt BC tại Q. Gọi J là tâm đường tròn đi qua bốn điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng ba điểm O, J, I thẳng hàng và JO = JI.

Lời giải.



Theo nhận xét ở trên ta có tâm J của đường tròn đi qua bốn điểm M, N, P, Q là trung điểm của N'Q.

Mặt khác, do tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$. Mà $\widehat{ACB} = \widehat{BIQ'} = \widehat{N'ID}$. Từ đó $\widehat{ADB} = \widehat{N'ID}$. Vậy ΔN'DI cân tại N', suy ra N' là trung điểm của AD. Chứng minh tương tự ta có Q là trung điểm của BC. Do đó ON' $\perp$ AD và OQ $\perp$ BC.

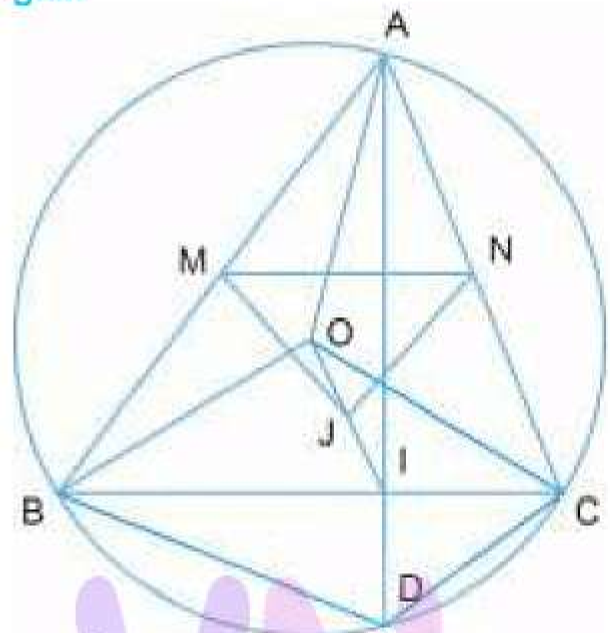
Tứ giác IN'OQ là hình bình hành nên ta có O, J, I thẳng hàng và JO = JI.

Tương tự ta có M' và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Do vậy đường tròn tâm J bán kính JQ đi qua trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD.

Sau đây ta xét bài toán ứng dụng những kết quả ở trên.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường cao AI. Gọi M và N thứ tự là trung điểm của AB và AC. J là trung điểm của OI. Chứng minh rằng JM = JN.

Lời giải.



Tia AI cắt đường tròn (O) ở D. Ta có tứ giác ABDC có hai đường chéo AD và BC vuông góc với nhau tại I và nội tiếp đường tròn tâm O. Theo kết quả bài toán 2 thì trung điểm J của OI cách đều trung điểm các cạnh của tứ giác ABDC. Do đó ta có JM = JN.

Cuối cùng, các bạn hãy áp dụng kết quả ở trên để giải các bài tập sau:

Bài toán 4. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} < 90^o$. Trên các cạnh DA và DC lấy các điểm P và Q theo thứ tự sao cho $\widehat{PBQ} = 90^o$ và $\widehat{ABP} = \widehat{CBQ}$. Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt BQ tại E, đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt BP tại F.

a) Chứng minh rằng DE = DF.

b) Gọi I là hình chiếu của B lên EF. Chứng minh rằng AI $\perp$ IC.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường cao BI. Qua I kẻ IH và IK thứ tự vuông góc với AB và BC (H $\in$ AB; K $\in$ BC). Gọi J là trung điểm của OI. Chứng minh rằng JH = JK.

Bài toán 6. Cho đường tròn (O). Hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại I. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của AC và BD đi qua trung điểm của OI.

HƯỚNG SUY NGHĨ VỀ NHIỀU CÁCH GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

LÊ VIẾT THẮNG

(Chuyên viên Phòng GD - ĐT Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, Nghệ An)

Phương trình vô tỉ là một trong những chuyên đề hay và khó trong chương trình toán THPT. Nó thường được chọn để làm các bài thi chọn học sinh giỏi các cấp. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình vô tỉ, vấn đề đặt ra là chúng ta suy nghĩ về nó như thế nào và có bao nhiêu cách để xử lí phương trình đó. Bài viết này hi vọng có thể đưa ra một số hướng giải phương trình vô tỉ.

Ví dụ. Giải phương trình:

$$10x^2+3x+1=(6x+1)\sqrt{x^2+3}. \quad (1)$$

Lời giải. ***Cách 1.*** Làm mất căn thức và nhẩm nghiệm.

$(1) \Leftrightarrow (10x^2+3x+1)^2=(6x+1)^2(x^2+3)$

$\Leftrightarrow 100x^4+9x^2+1+60x^3+6x+20x^2=(36x^2+12x+1)(x^2+3)$

$\Leftrightarrow 100x^4+60x^3+29x^2+6x+1=36x^4+12x^3+109x^2+36x+3$

$\Leftrightarrow 32x^4+24x^3-40x^2-15x-1=0$

Nhẩm được một nghiệm của phương trình là $x=1$. Sử dụng lược đồ Horner ta đưa phương trình về dạng $(x-1)(32x^3+56x^2+16x+1)=0$.

Phương trình có nghiệm $x=1$. Nếu phương trình $32x^3+56x^2+16x+1=0$ có nghiệm hữu tỉ $x=\frac{u}{v}$ thì u là ước của 1 và v là ước của 32. Thử được nghiệm $x=-\frac{1}{4}$. Từ đó có $32x^3+56x^2+16x+1=(4x+1)(8x^2+12x+1)=0$. Phương trình $8x^2+12x+1$ có nghiệm $x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$.

Thử lại ta được hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{4} \end{array}\right.$

Cách 2. Sử dụng kĩ thuật nhân lượng liên hợp và đồng nhất hệ số.

Nhận thấy $x=\frac{-1}{6}$ không phải là nghiệm của phương trình (1), chia cả hai vế cho $6x+1$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{10x^2+3x+1}{6x+1}=\sqrt{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x^2+3x+1}{6x+1}-(ax+b)=\sqrt{x^2+3}-(ax+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10-6a)x^2+(3-6b-a)x+1-b}{6x+1}$$

$$=\frac{(1-a^2)x^2-2abx+3-b^2}{\sqrt{x^2+3}+(ax+b)}.$$

Ta sẽ đi tìm a và b thỏa mãn đồng nhất thức

$$(10-6a)x^2+(3-6b-a)x+1-b$$
$$=(1-a^2)x^2-2abx+3-b^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-6a=1-a^2 \\ 3-6b-a=-2ab \\ 1-b=3-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3,\ b=-1 \\ a=3,\ b=2. \end{array}\right.$$

Chọn cặp số $a=3$, $b=-1$. Khi đó

$$\frac{-8x^2+6x+2}{6x+1}=\frac{-8x^2+6x+2}{\sqrt{x^2+3}+(3x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8x^2+6x+2=0 \ (*) \\ \sqrt{x^2+3}=3x+2 \ (**) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (*) ta được $x=1$, $x=\frac{-1}{4}$.

Với $a=3$, $b=2$ cho cùng kết quả.

Thử vào (**) chỉ chọn $x=1$.

Giải phương trình (**) ta được

$$\begin{cases} 3x+2\ge 0 \\ x^2+3=(3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}.$$

Thử lại ta chọn $x=\frac{-3+\sqrt{7}}{4}$.

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm

$x = 1,\ x = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}.$

Cách 3. Cân bằng hệ số làm xuất hiện hằng đẳng thức ở cả hai vế.

Nhân cả hai vế của phương trình với 2a nhằm chuyển vế phải thành dạng bình phương của một biểu thức chứa căn thức và tham số a.

$10x^2 + 3x + 1 = (6x+1)\sqrt{x^2+3}$

$\Leftrightarrow 2a.(10x^2 + 3x + 1) = 2a(6x+1)\sqrt{x^2+3}$

$\Leftrightarrow 2a.(10x^2 + 3x + 1) + (6x+1)^2 + a^2(x^2+3)$

$= \left[(6x+1) + a\sqrt{x^2+3}\right]^2.$

Chuyển vế trái thành đa thức bậc hai đối với ẩn x ta được $(a^2 + 20a + 36)x^2 + 6(a+2)x + (3a^2 + 2a + 1)$ rồi chọn a để vế trái có dạng là bình phương của một nhị thức. Cho $\Delta' = 0$

$\Leftrightarrow 9(a+3)^2 - (a^2 + 20a + 36)(3a^2 + 2a + 1) = 0$

$\Leftrightarrow a = -2.$

Do đó (1) $\Leftrightarrow 9 = \left(6x + 1 - 2\sqrt{x^2+3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3} = 3x-1 \\ \sqrt{x^2+3} = 3x+2 \end{array}\right.$

• Với $\sqrt{x^2+3} = 3x-1$ thì $\begin{cases} 3x-1 \ge 0 \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ($x = \dfrac{-1}{4}$ bị loại).

• Với $\sqrt{x^2+3} = 3x+2$ thì $\begin{cases} 3x+2 \ge 0 \\ 8x^2 + 12x + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}$ ($x = \dfrac{-3-\sqrt{7}}{4}$ bị loại).

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm

$x = 1,\ x = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}.$

Cách 4. Đặt ẩn phụ để chuyển phương trình về hệ phương trình.

Đặt $\sqrt{x^2+3} = u,\ 3x = v$ thì $x^2 + 3 = u^2,\ 9x^2 = v^2.$

Khi đó $u^2 + v^2 - 3 = 10x^2.$

Phương trình (1) trở thành

$u^2 + v^2 - 3 + v + 1 = (2v+1)u$

$\Leftrightarrow (u^2 - 2uv + v^2) - (u - v) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (u-v)^2 - (u-v) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = -1 \\ u - v = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3} = 3x-1 \\ \sqrt{x^2+3} = 3x+2 \end{array}\right.$

Đến đây giải tiếp như cách 3 ta tìm được hai nghiệm $x = 1,\ x = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}.$

Cách 5. Đặt ẩn phụ là biểu thức căn kèm theo một tham số, sau đó chọn giá trị tham số để tạo thành bình phương một biểu thức.

Đặt $a = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow a^2 = x^2 + 3.$

Nhân thêm tham số m được

$ma^2 = mx^2 + 3m \Rightarrow mx^2 - ma^2 + 3m = 0.$

Ta viết lại phương trình (1) theo biến số a như sau:

$10x^2 + 3x + 1 + mx^2 - ma^2 + 3m = (6x+1)a$

$\Leftrightarrow -ma^2 - (6x+1)a + (10+m)x^2 + 3x + 3m + 1 = 0.$ (*)

Ta có $\Delta = (6x+1)^2 + 4m[(10+m)x^2 + 3x + 3m + 1]$

$= (36 + 40m + 4m^2)x^2 + 12(m+1)x + 12m^2 + 4m + 1.$

Để Δ viết được dưới dạng một bình phương thì biệt số

$\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow (12m + 12)^2 - 4(12m^2 + 4m + 1)(36 + 40m + 4m^2) = 0.$

Giải phương trình ẩn m ta được $m = -1$. Thay vào (*) ta có $a^2 - (6x+1)a + 9x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3x-1 \\ a = 3x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3} = 3x-1 \\ \sqrt{x^2+3} = 3x+2 \end{array}\right.$

Đến đây giải tiếp như cách 3 ta tìm được hai nghiệm $x = 1,\ x = \dfrac{-3+\sqrt{7}}{4}.$

Việc định hướng để giải phương trình vô tỉ là rất quan trọng trong quá trình tìm lời giải bài toán. Sử dụng kết hợp các kĩ thuật như: nhẩm nghiệm, đồng nhất hệ số hay đặt ẩn phụ cho thấy hiệu quả đáng kể.

Sau đây là một số bài tập áp dụng.

Bài 1. Giải phương trình:

$x^2 + 6x + 1 = (2x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}.$

Bài 2. Giải phương trình:

$x^2 + x - 1 = (x+2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$

Bài 3. Giải phương trình:

$13x - 1 = (x+3)\sqrt{5x^2 + x + 3}.$

Bài 4. Giải phương trình:

$2x^2 + 2x + 1 = (4x-1)\sqrt{x^2+1}.$

CHIẾC VÒNG BIẾN MẤT

MAI ĐÌNH BẢO QUỐC
(7/1, THCS Lê Văn Thiêm, TP. Hà Tĩnh, Hà Tĩnh)

Sáng nay, thám tử Sêlôccôc quyết định nghỉ ngơi sau mấy ngày phá án căng thẳng. Đang tưới cho mấy khóm hoa vườn nhà, thám tử chợt giật mình bởi tiếng chuông điện thoại. Là bà Hoa, hàng xóm cũ của thám tử. Bà mới chuyển nhà đến khu khác và gọi điện mời thám tử đến chơi. Thám tử Sêlôccôc vui vẻ nhận lời và ít phút sau ông đã có mặt ở nhà bà Hoa.

Sau vài câu chuyện, thám tử dè dặt hỏi:

- Hình như bà không vui lắm?

- Ôi, ông tinh quá! Đúng là thám tử tài ba có khác! Tôi cũng không định kể với ông, vì chỉ là chuyện trong nhà thôi...

- Chỗ bạn bè, bà cứ kể cho nhẹ lòng... Mà biết đâu tôi lại giúp được thì sao?

- Chuyện thế này ông ạ. Chiều qua tôi tháo chiếc vòng đeo tay kim cương, đặt tạm trên két sắt, rồi quên không cất. Gần tối, sực nhớ ra thì chả thấy đâu nữa. Chiếc vòng là kỉ vật của chồng tôi nên để mất thế này tôi thấy rất ân hận...

- Bà có nhớ lúc bà đặt chiếc vòng trên két là khoảng mấy giờ không?

- Khoảng hơn 2 giờ.

- Từ lúc đó đến lúc bà phát hiện bị mất, trong nhà có những ai?

- Có cháu con chị gái tôi, con trai tôi và cô giúp việc. Tôi ngại hỏi họ lắm.

- Đúng là rất ngại, nhưng theo tôi, vẫn phải hỏi để đỡ nghi ngờ lẫn nhau.

Sau đó, thám tử Sêlôccôc đã hỏi chuyện từng người. Đầu tiên là cậu Nam, cháu bà Hoa:

- Chiều qua cháu đã làm gì, ở đâu?

- Cháu có buổi thi đấu bóng rổ bác ạ.

- Vậy à? Cháu giỏi quá! Mà trời rét căm căm thế này, lúc thay sang đồng phục thi đấu, chắc ngại lắm cháu nhỉ?

- Vâng. Đúng thế bác ạ... Nhưng bọn cháu mặc thêm áo dài tay vào trong áo thi đấu nên cũng đỡ lạnh.

Tiếp theo là cô giúp việc:

- Chiều qua chắc chị bận dọn dẹp lắm nhỉ? Nhà mới là phải lau chùi, sắp xếp đủ thứ...

- Vâng, đúng thế ông ạ. Cặm cụi suốt buổi chiều mà tôi vẫn chưa dọn xong tầng một.

Cuối cùng là con trai bà Hoa:

- Cháu có thể cho bác biết chiều qua cháu đã làm gì, đi đâu không?

- Dạ, cháu đi đá bóng với nhóm bạn. Bọn cháu tự thuê sân rồi đá với nhau.

- Vui nhỉ! Lạnh thế này, các cháu không ngại sao?

- Ồ không ạ! Đá bóng rất vui, rất thích, nên cứ có thời gian là bọn cháu rủ nhau, bất kể nóng hay rét.

Sau khi trò chuyện với ba người, thám tử nói nhỏ với bà Hoa:

- Tôi nghi ngờ một người, nhưng chưa thể kết luận chắc chắn. Bà hãy nhẹ nhàng hỏi người đó, có thể sẽ tìm lại được chiếc vòng kỉ vật đấy.

Bà Hoa nghĩ mãi mà chưa đoán ra thám tử đã nghi ai. Các Thám tử Tuổi Hồng chắc sẽ giúp được bà chứ?

Kết quả (TTT2 số 178)

THẾ CỜ (Kì 95)

1.♕f6+ gxf6 2.♗h6#

Các bạn được thưởng kì này: *Lương Tùng Lâm*, 8H, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Ngô Mạnh Hiếu*, 8A2, THCS Trưng Vương, xã Đại Thịnh, Mê Linh, **Hà Nội**; *Nguyễn Duy Bảo*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Lê Đặng Thành An*, 6H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Thu Hiền*, 8A3, THCS Thị trấn Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**.

LÊ THANH TÚ

Kết quả (TTT2 số 178)

Sợi dây chuyền ngọc trai

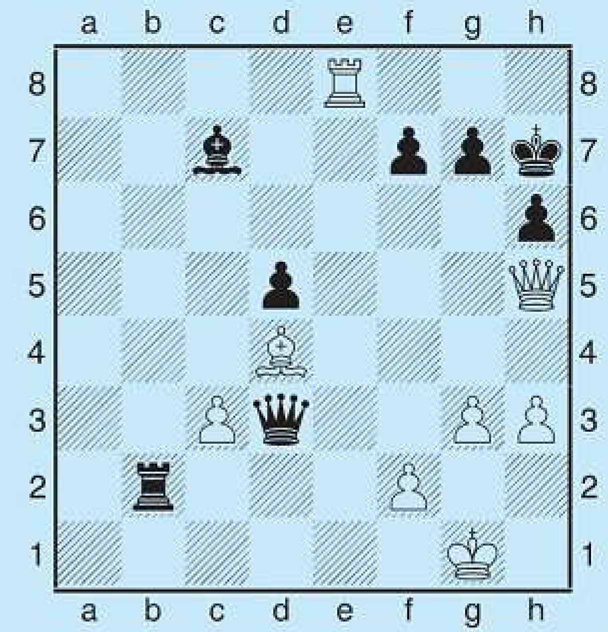
Kì này, rất đông bạn tham gia gửi bài và tất cả đều "phá án" rất chính xác. Kẻ khả nghi là anh Việt, cháu bà My. Việt kể mình đọc "Vợ nhặt" của nhà văn Kim Lân, nhưng khi nói đến một nhân vật cụ thể thì anh ta lại để lộ sơ hở: Nhân vật ông giáo cùng những lời nói mà Việt trích dẫn không hề có trong tác phẩm "Vợ nhặt".

Phần thưởng được trao cho: *Nguyễn Dương Việt Nga*, 7A1, THCS Bắc Kạn, TP. Bắc Kạn, **Bắc Kạn**; *Nguyễn Phương Linh*, 6A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Ngọc Huyền Anh*, 6D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Hoàng Võ Long*, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Ngô Đức Anh Thái*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc, **Hà Tĩnh**.

Thám tử Sêlôccôc

THẾ CỜ (Kì 97)

Trắng đi trước và thắng.



LÊ THANH TÚ *(Đại kiện tướng Quốc tế)*

CHỨNG MINH BÀI TOÁN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐƯỜNG THẲNG GAUSS

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

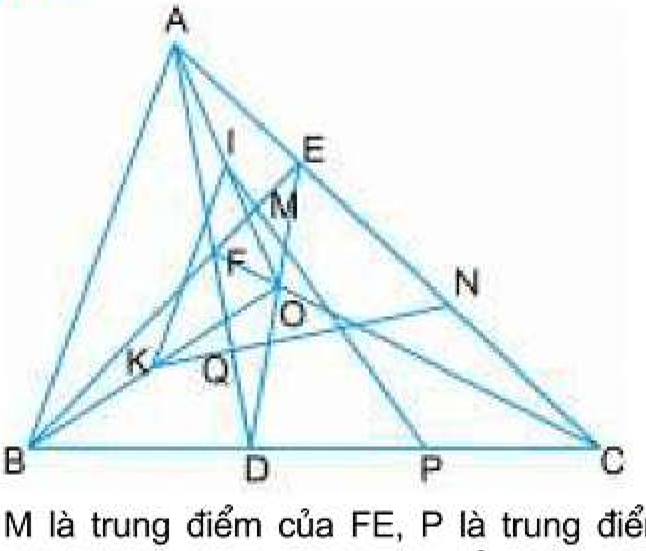
Đường thẳng Gauss. *Tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Khi đó các trung điểm của AC, BD và EF cùng thuộc một đường thẳng. Đường thẳng đó gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác ABCD (Gauss là tên một nhà toán học người Đức).*

Các bạn tham khảo chứng minh trên trong TTT2 số 39.

Chúng ta xét một số bài toán mà trong chứng minh có sử dụng đường thẳng Gauss.

Bài toán 1. Cho ΔABC, điểm D trên BC, điểm E trên AC (D khác B và C, E khác A và C). Gọi F là giao điểm của AD và BE, O là giao điểm của CF và DE. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của FE, EC, CD và DF. Gọi I là giao điểm của OA và MP, K là giao điểm của OB và NQ. Chứng minh rằng độ dài IK không đổi khi D di chuyển trên BC và E di chuyển trên AC.

Lời giải.



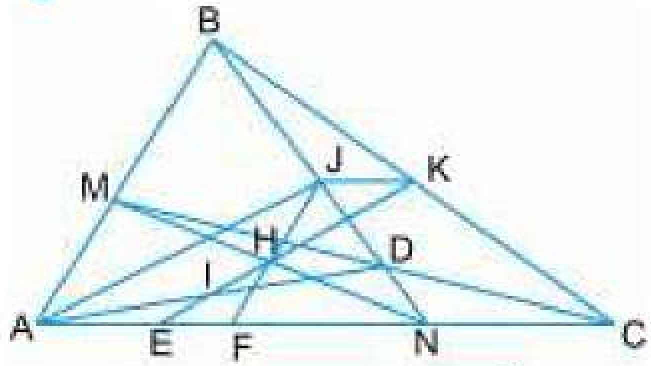
Vì M là trung điểm của FE, P là trung điểm của CD nên MP đi qua trung điểm I của OA (Đường thẳng Gauss của tứ giác AFOE).

Vì N là trung điểm của EC, Q là trung điểm của DF nên NQ đi qua trung điểm K của OB (Đường thẳng Gauss của tứ giác BFOD).

Do đó IK là đường trung bình của ΔAOB, suy ra $IK = \dfrac{AB}{2}$ (không đổi).

Bài toán 2. Cho ΔABC có $AB < AC$. Gọi M, N là hai điểm tương ứng trên AB, AC sao cho $BM = CN$. Gọi D là giao điểm của BN và CM. Hỏi trung điểm I của AD di động trên đường nào khi M, N di động trên AB, AC tương ứng?

Lời giải.



Gọi H, K và J lần lượt là trung điểm của MN, BC và BN.

Ta có I, H, K cùng thuộc đường thẳng Gauss của tứ giác AMDN.

Gọi E là giao điểm của HI và AC, F là giao điểm của HJ và AC.

Ta có $JH = \dfrac{BM}{2}$, $JK = \dfrac{CN}{2}$.

Mà $BM = CN$ nên $JH = JK$.

Suy ra $\widehat{JHK} = \widehat{JKH} \Rightarrow \widehat{FHE} = \widehat{FEH} = \dfrac{\widehat{CFH}}{2}$ (hai góc đối đỉnh và JK // NC).

Kẻ tia phân giác Ax của $\widehat{BAC}$ thì $\widehat{FAx} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

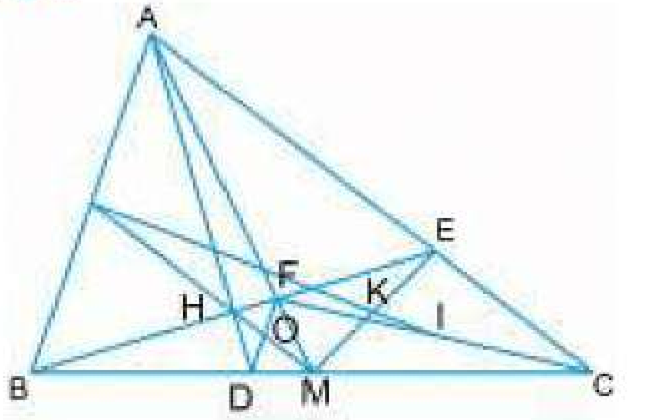
Mà $\widehat{CFH} = \widehat{BAC}$ (vì JH // BM) nên $\widehat{FEH} = \widehat{FAx} \Rightarrow EK \,//\, Ax$.

Vì K, Ax, AC cố định nên EK cố định.

Vậy I di động trên đường thẳng KE cố định.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có AB < AC, đường trung tuyến AM và đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Gọi F là giao điểm của AM và BE. Gọi O, I, K thứ tự là trung điểm của DF, CF, ME. Chứng minh rằng MO, IK và AB đồng quy.

Lời giải.



Vì ΔABE cân nên tia phân giác AD đi qua trung điểm H của BE.

Suy ra $MH // CE$, $MH = \dfrac{CE}{2}$.

Từ đó

$$\frac{FA}{FM} = \frac{AE}{MH} \Rightarrow \frac{FA}{AM} = \frac{AE}{MH + AE}$$

$$= \frac{2AE}{CE + 2AE} = \frac{2AB}{AB + AC}. \ (1)$$

Mặt khác $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

Suy ra $\dfrac{2AB}{AB + AC} = \dfrac{2DB}{BC} = \dfrac{DB}{BM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{FA}{AM} = \dfrac{DB}{BM} \Rightarrow DF // AB$.

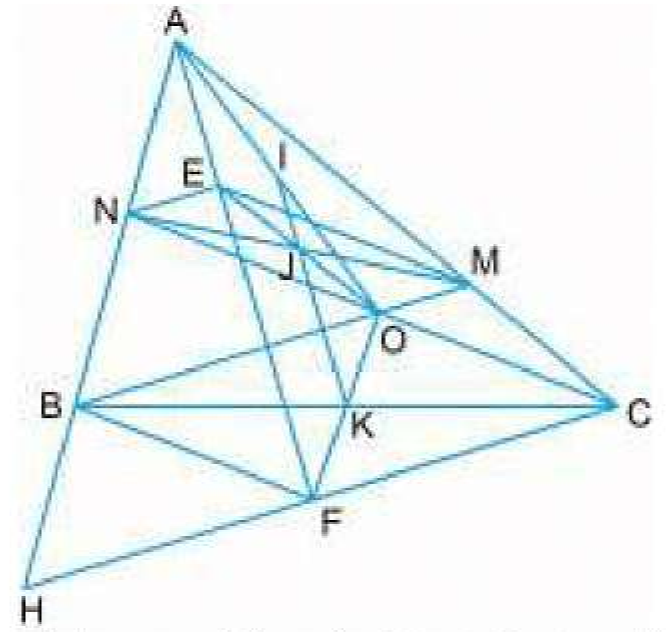
Vì MH đi qua trung điểm của AB (MH // CE, MB = MC) và DF // AB nên MH đi qua trung điểm O của DF.

Mặt khác I, K thuộc đường thẳng Gauss của tứ giác MFEC nên IK đi qua trung điểm của AB.

Vậy MO, IK và AB đồng quy tại trung điểm của AB.

Bài toán 4. Điểm O nằm trong ΔABC. BO cắt AC tại M, CO cắt AB tại N. Dựng các hình bình hành OMEN và OBFC. Chứng minh rằng $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AM.AN}{AB.AC} = \dfrac{OM.ON}{OB.OC}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của OA, J là giao điểm của OE và MN, K là giao điểm của OF và BC. Suy ra I, J, K cùng thuộc đường thẳng Gauss của tứ giác AMON.

Mà AE // IJ và EF // JK nên A, E, F thẳng hàng.

Gọi H là giao điểm của CF và AB.

Theo định lí Thales ta có

$$\frac{AM.AN}{AB.AC} = \frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AH}.\frac{AN}{AB}$$

$$= \frac{AN}{AH} = \frac{AE}{AF}. \ (1)$$

Mặt khác

$$\frac{AM}{AC}.\frac{AN}{AB} = \frac{S_{OAM}}{S_{OAC}}.\frac{S_{OAN}}{S_{OAB}} = \frac{S_{AOM}}{S_{AOB}}.\frac{S_{OAN}}{S_{OAC}}$$

$$= \frac{OM}{OB}.\frac{ON}{OC} = \frac{OM.ON}{OB.OC}. \ (2)$$

Từ (1), (2) suy ra đpcm.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có H, K, I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, BD. Gọi E là giao điểm của ạ và BI, F là giao điểm của CJ và EI. Chứng minh rằng EF // HK.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, gọi I là giao điểm của tia phân giác của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BAD}$. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD và OI cùng thuộc một đường thẳng.

MỘT CÁCH TÌM BẤT ĐẲNG THỨC RIÊNG

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV. THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Trong kì thi học sinh giỏi Toán lớp 9, thành phố Hà Nội, năm học 2012 - 2013 có một bài toán như sau:

Bài toán 1. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{27a^2}{c(c^2+9a^2)}+\frac{b^2}{a(4a^2+b^2)}+\frac{8c^2}{b(9b^2+4c^2)}\ge\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{2}{b}, z=\frac{3}{c}$ thì $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{2}{y}$, $c=\frac{3}{z}$ với x, y, z đều dương, suy ra $x+y+z=3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{z^3}{x^2+z^2}+\frac{x^3}{y^2+x^2}+\frac{y^3}{z^2+y^2}\ge\frac{3}{2}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{z^3}{x^2+z^2}\ge z-\frac{1}{2}x. \quad (1)$$

Thật vậy

$$\frac{z^3}{x^2+z^2}\ge z-\frac{1}{2}x \Leftrightarrow z^3\ge(x^2+z^2).\left(z-\frac{1}{2}x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2z^3\ge 2z^3-xz^2+2x^2z-x^3$$

$$\Leftrightarrow x(z-x)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng, suy ra bất đẳng thức (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $x=z$.

Chứng minh tương tự, ta được

$$\frac{x^3}{y^2+x^2}\ge x-\frac{1}{2}y. \quad (2) \qquad \frac{y^3}{z^2+y^2}\ge y-\frac{1}{2}z. \quad (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2), (3), ta được

$$\frac{z^3}{x^2+z^2}+\frac{x^3}{y^2+x^2}+\frac{y^3}{z^2+y^2}\ge\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}.$$

Đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$
$\Leftrightarrow a=1, b=2, c=3$.

Nhận xét. Giải bài toán này cần có hai bước:

- *Bước 1. Đặt ẩn phụ sao cho các ẩn mới có vai trò bình đẳng trong biểu thức.*
- *Bước 2. Chứng minh bất đẳng thức riêng (1). Bước này không tự nhiên, khó phát hiện. Làm thế nào để phát hiện ra bất đẳng thức riêng (1)? Chúng ta sẽ phân tích đề bài để tìm bất đẳng thức riêng.*

Từ đề bài ta cần phải chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{z^3}{x^2+z^2}+\frac{x^3}{y^2+x^2}+\frac{y^3}{z^2+y^2}\ge\frac{x+y+z}{2}.$$

Căn cứ vào bậc của tử (bậc ba) và bậc của mẫu (bậc hai) ta dự đoán bất đẳng thức riêng có dạng $\frac{z^3}{x^2+z^2}\ge\alpha z+\beta x$. (4)

$$\frac{x^3}{y^2+x^2}\ge\alpha x+\beta y,\quad \frac{y^3}{z^2+y^2}\ge\alpha y+\beta z.$$

Từ đó, cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{z^3}{x^2+z^2}+\frac{x^3}{y^2+x^2}+\frac{y^3}{z^2+y^2}\ge(\alpha+\beta)(x+y+z)$$
$$=3(\alpha+\beta).$$

Ta sẽ chọn α,β sao cho $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$. Thay $\alpha=\frac{1}{2}-\beta$ vào bất đẳng thức (1) ta được

$$\frac{z^3}{x^2+z^2}\ge\left(\frac{1}{2}-\beta\right)z+\beta x$$

$$\Leftrightarrow z^3\ge(x^2+z^2)\left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)z+\beta x\right]. \quad (5)$$

Chúng ta lưu ý rằng dấu bằng xảy ra trong (4) khi $x=z$ nên biến đổi (5) trở thành

$$(z-x)\left[\left(\frac{1}{2}+\beta\right)z^2+\frac{1}{2}xz+\beta x^2\right]\ge 0.$$

Để bất đẳng thức đúng với mọi x, z thì nhân tử thứ hai phải chứa nhân tử (z − x) tức là triệt tiêu khi z = x. Từ đó suy ra :

$\left(\frac{1}{2}+\beta\right)x^2+\frac{1}{2}x^2+\beta x^2=0$ với mọi x > 0.

$\Leftrightarrow (1+2\beta)x^2=0$ với mọi x > 0.

Suy ra $\beta=-\frac{1}{2}$, từ đó tìm được

$$\alpha=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Vậy bất đẳng thức riêng là $\frac{z^3}{x^2+z^2}\ge z-\frac{1}{2}x.$

Sau đây chúng ta xét một số bài toán khác mà trong lời giải có sử dụng bất đẳng thức riêng.

Bài toán 2. Cho ba số thực a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{5}$. Chứng minh rằng

$$\frac{41a^3-b^3}{ab+7a^2}+\frac{41b^3-c^3}{bc+7b^2}+\frac{41c^3-a^3}{ca+7c^2}\le 1.$$

• Phân tích để bài, tìm bất đẳng thức riêng.

Từ đề bài ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{41a^3-b^3}{ab+7a^2}+\frac{41b^3-c^3}{bc+7b^2}+\frac{41c^3-a^3}{ca+7c^2}\le 5(a+b+c).$$

Căn cứ vào bậc của tử (bậc ba) và bậc của mẫu (bậc hai) ta dự đoán bất đẳng thức riêng có dạng $\frac{41a^3-b^3}{ab+7a^2}\le\alpha a+\beta b.$ (6)

$$\frac{41b^3-c^3}{bc+7b^2}\le\alpha b+\beta c\,,\ \frac{41c^3-a^3}{ca+7c^2}\le\alpha c+\beta a\,.$$

Từ đó, cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{41a^3-b^3}{ab+7a^2}+\frac{41b^3-c^3}{bc+7b^2}+\frac{41c^3-a^3}{ca+7c^2}$$

$$\le(\alpha+\beta)(a+b+c).$$

Ta chọn α,β sao cho $\alpha+\beta=5$.

Thay $\beta=5-\alpha$ vào bất đẳng thức (6) ta được: $\frac{41a^3-b^3}{ab+7a^2}\le\alpha a+(5-\alpha)b$

$$\Leftrightarrow (41a^3-b^3)\le(ab+7a^2)[\alpha a+(5-\alpha)b].\ (7)$$

Dấu bằng xảy ra trong (6) khi a = b nên biến đổi (7) trở thành

$$(a-b)\left[(7\alpha-41)a^2-(6-\alpha)ab-b^2\right]\ge 0.\ (8)$$

Để bất đẳng thức (8) đúng với mọi a, b thì nhân tử thứ hai phải chứa nhân tử (a − b) tức là triệt tiêu khi a = b.

Từ đó suy ra

$(7\alpha-41)a^2-(6-\alpha)a^2-a^2=0$ với mọi a > 0

$\Leftrightarrow (8\alpha-48)a^2=0$ với mọi a > 0

$\Leftrightarrow \alpha=6.$

Từ đó ta tìm được $\beta=5-6=-1.$

Vậy bất đẳng thức riêng là

$$\frac{41a^3-b^3}{ab+7a^2}\le 6a-b.$$

Bài toán 3. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Phân tích đề bài, tìm bất đẳng thức riêng:

Căn cứ vào bậc của tử (bậc nhất) và bậc của mẫu (bậc hai) ta dự đoán bất đẳng thức riêng có dạng

$$\frac{b}{a(a+b)}\ge\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}.\ (9)$$

$$\frac{c}{b(b+c)}\ge\frac{\alpha}{b}+\frac{\beta}{c};\ \frac{a}{c(c+a)}\ge\frac{\alpha}{c}+\frac{\beta}{a}.$$

Từ đó, cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}$$

$$\ge(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Ta chọn α,β sao cho $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$.

Thay $\beta=\frac{1}{2}-\alpha$ vào bất đẳng thức (9) rồi quy đồng mẫu số, khử mẫu rồi rút gọn ta được

$$(1-\alpha)b^2-\frac{1}{2}ab-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)a^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left[(1-\alpha)(b+a)-\frac{1}{2}a\right]\ge 0.\ (10)$$

Để bất đẳng thức (10) đúng với mọi a, b thì nhân tử thứ hai phải chứa nhân tử (a – b) tức là triệt tiêu khi a = b.
Từ đó suy ra

$$(1-\alpha)(a+a)-\frac{1}{2}a=0 \text{ với mọi } a>0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow \beta=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}.$$

Vậy bất đẳng thức riêng là

$$\frac{b}{a(a+b)}\geq \frac{3}{4a}-\frac{1}{4b}.$$

Bài toán 4. Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=\sqrt{6}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+2y^2+3xy}+\sqrt{y^2+2z^2+3yz}+\sqrt{z^2+2x^2+3zx}\leq 6.$$

Phân tích đề bài, tìm bất đẳng thức riêng
Từ đề bài ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{6x^2+12y^2+18xy}+\sqrt{6y^2+12z^2+18yz}+\sqrt{6z^2+12x^2+18zx}\leq 6(x+y+z).$$

Căn cứ vào bậc của biểu thức trong dấu căn ở vế trái, ta dự đoán bất đẳng thức riêng có dạng

$$\sqrt{6x^2+12y^2+18xy}\leq \alpha x+\beta y; \ (11)$$

$$\sqrt{6y^2+12z^2+18yz}\leq \alpha y+\beta z;$$

$$\sqrt{6z^2+12x^2+18zx}\geq \alpha z+\beta x.$$

Với $\alpha\geq 0, \beta\geq 0$.
Từ đó, cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{6x^2+12y^2+18xy}+\sqrt{6y^2+12z^2+18yz}+\sqrt{6z^2+12x^2+18zx}\leq (\alpha+\beta)(x+y+z).$$

Ta chọn α, β sao cho $\alpha+\beta=6$.
Thay $\beta=6-\alpha$ vào bất đẳng thức (11) ta được $\sqrt{6x^2+12y^2+18xy}\leq \alpha x+(6-\alpha)y$.
Bình phương hai vế và biến đổi ta được

$$(x-y)\left[(\alpha^2-6)x-(\alpha^2-12\alpha+24)y\right]\geq 0. \ (12)$$

Để bất đẳng thức (12) đúng với mọi x, y thì nhân tử thứ hai phải chứa nhân tử (x – y) tức là triệt tiêu khi x = y.
Từ đó suy ra

$$(\alpha^2-6)x-(\alpha^2-12\alpha+24)x=0 \text{ với mọi } x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{2}\Rightarrow \beta=6-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức riêng là

$$\sqrt{6x^2+12y^2+18xy}\leq \frac{5x}{2}+\frac{7y}{2}.$$

Với các kĩ thuật tìm bất đẳng thức riêng như đã trình bày, các bạn hãy giải các bài tập sau nhé:

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn xy + yz + zx = 1. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{2y^2+3z^2}+y\sqrt{2z^2+3x^2}+x\sqrt{2x^2+3y^2}\geq \sqrt{5}$$

Bài 2. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+2y+3z=\frac{1}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{232y^3-x^3}{2xy+24y^2}+\frac{783z^3-8y^3}{6yz+54z^2}+\frac{29x^3-27z^3}{3xz+6x^2}.$$

Bài 3. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+3ca+a^2}\geq \frac{a+b+c}{5}.$$

Bài 4. Cho ba số thực x, y, z không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+y^2+3xy}+\sqrt{y^2+z^2+3yz}+\sqrt{z^2+x^2+3zx}\leq \sqrt{5}(x+y+z).$$

Bài 5. Cho a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $ab+bc+cd+da=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3}+\frac{b^4}{b^3+2c^3}+\frac{c^4}{c^3+2d^3}+\frac{d^4}{d^3+2a^3}\geq \frac{4}{3}.$$

Bài 25NS. Cho f(x) là đa thức bậc hai với hệ số nguyên, có f(2) = 3, f(3) = 8. Tìm chữ số tận cùng của hiệu số: f(2016) – f(2014).

CAO NGỌC TOẢN *(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)*

Bài 26NS. Cho x, y, z là các số thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = xyz + 2(1 + x + y + z + xy + yz + zx).

ĐOÀN CÁT NHƠN *(Phòng GD - ĐT thị xã An Nhơn, Bình Định)*

Bài 27NS. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 30^o$. Lấy điểm M trên cạnh AB. Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho BM = BN. Gọi H là trực tâm của tam giác BMN và K là trung điểm của AN. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với HK luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên cạnh AB.

PHÙNG VĂN LONG *(GV. THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)*

Kết quả **(TTT2 số 178)**

Cuộc thi giải toán dành cho nữ sinh

Bài 19NS. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$P = 21(x+y) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2} + 8x + 8x\right) + \left(\frac{1}{y^2} + 8y + 8y\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{x} + 4x\right) + \left(\frac{1}{y} + 4y\right) + x + y$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}.8x.8x} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}.8y.8y}$$

$$+ 2\sqrt{\frac{1}{x}.4x} + 2\sqrt{\frac{1}{y}.4y} + 1 = 33.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy Min P = 33 (khi $x = y = \frac{1}{2}$).

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Hà Trang, Hạ Hiền Lương, Đào Phương Anh,* 8A3, *Trần Cao Kỳ Duyên,* 9A1, *Triệu Hồng Ngọc, Lê Thị Phương Lan,* 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Phương Linh, Ngô Gia Linh, Đỗ Thị Minh Phượng, Nguyễn Thị Kiều Trang, Đặng Khánh Duyên, Phạm Thị Thủy Lệ, Nguyễn Thị Anh Thư, Trương Thị Phương Nga,* 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Thị Mai Anh,* 9D, *Hoàng Thị Việt Hằng,* 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Khánh Huyền, Nguyễn Ngọc Mai, Trần Hà Nhi, Cao Thị Khánh Linh,* 8B, *Lê Thị Hằng Nhi,* 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Thị Thu Phương,* 8A, THCS Đông Tân, *Hà Minh Hiền,* 8F, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Thị Thu Hiền,* 8A3, THCS Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Trương Thị Minh Oanh,* 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Mai Hương,* 9A, THCS Thị trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang.**

Bài 20NS. ĐKXĐ $x \geq 1$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x-1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$a^3 + 2a - a^2 - 2a\sqrt{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sqrt{a}-1\right)^2\left(a + 2\sqrt{a} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1;\ 2\}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: *Nguyễn Hà Trang, Hạ Hiền Lương, Đào Phương Anh,* 8A3, *Trần Cao Kỳ Duyên,* 9A1, *Triệu Hồng Ngọc, Lê Thị Phương Lan,* 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Phương Linh, Ngô Gia Linh, Đỗ Thị Minh Phượng, Đặng Khánh Duyên, Phạm Thị Thủy Lệ, Nguyễn Thị Anh Thư, Trương Thị Phương Nga,* 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Thị Mai Anh,* 9D, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Khánh Huyền, Nguyễn Ngọc Mai, Trần Hà Nhi, Cao Thị Khánh Linh,* 8B, *Lê Thị Hằng Nhi,* 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Thị Thu Phương,* 8A, THCS Đông Tân, *Hà Minh Hiền,* 8F, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Thu Hiền,* 8A3, THCS Kỳ Sơn, Kỳ Sơn, **Hòa Bình**; *Trương Thị Minh Oanh,* 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Mai Hương,* 9A, THCS Thị trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang**; *Huỳnh Bảo Uyên,* 9A7, THCS Thốt Nốt, Thốt Nốt, **Cần Thơ**. ☞

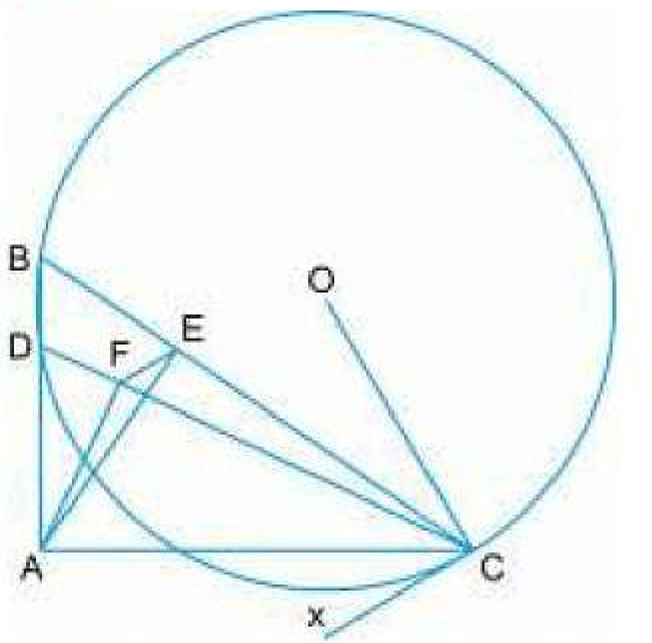
NEW YEAR WISHES

Trên khắp Trái Đất này, mỗi khi chào đón năm mới, mọi người - dù nói bằng bất cứ thứ tiếng nào - cũng chúc nhau những lời chúc tốt đẹp nhất. Mời các bạn tham khảo một số lời chúc năm mới bằng tiếng Anh. Hi vọng các bạn sẽ cảm thấy vui và sẽ học được nhiều điều từ những lời chúc này! Chủ Vườn cũng chờ đợi những lời chúc bằng tiếng Anh từ các bạn! Những lời chúc đúng ngữ pháp, đúng chính tả sẽ được lì xì đấy!

- May the New Year bring to you warmth of love and a light to guide your path towards a positive destination. Happy New Year!
- No one can go back in time to change what has happened. So work on your present to make yourself a wonderful future. Happy New Year!
- May the coming year bring more happiness to you than last year. May you have an amazing year. Happy New Year!
- May your world be filled with warmth, joy and good cheer... Wishing you a Happy New Year!
- A new year is like a blank book. The pen is in your hands. It is your chance to write a beautiful story for yourself. Happy New Year!

CHỦ VƯỜN

Bài 21NS.



Trên nửa mặt phẳng bờ OC chứa A, kẻ tiếp tuyến Cx của (O).

Ta có ACEF là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{CAE} = \widehat{CFE}$.

Mà $\widehat{CAE} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ $\widehat{EAB}$).

Suy ra $\widehat{CFE} = \widehat{CBA}$.

Ta lại có $\widehat{xCD} = \widehat{CBA}$.

Do đó $\widehat{xCF} = \widehat{CFE}$.

Suy ra $EF \,//\, Cx$. Mặt khác $Cx \perp OC$.

Vậy $EF \perp OC$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng: *Trần Cao Kỳ Duyên,* 9A1, *Triệu Hồng Ngọc, Lê Thị Phương Lan,* 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Phương Linh, Ngô Gia Linh, Đỗ Thị Minh Phượng, Đặng Khánh Duyên, Phạm Thị Thủy Lệ, Nguyễn Thị Anh Thư, Trương Thị Phương Nga, Nguyễn Thị Kiều Trang,* 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Thị Mai Anh,* 9D, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thị Hằng Nhi,* 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Lê Thị Thu Phương,* 8A, THCS Đông Tân, *Hà Minh Hiển,* 8F, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Trương Thị Minh Oanh,* 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**; *Vũ Mai Hương,* 9A, THCS Thị trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang.**

Các bạn sau được thưởng kì này: *Trần Cao Kỳ Duyên,* 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Kiều Trang,* 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Thị Mai Anh,* 9D, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Khánh Huyền,* 8B; *Lê Thị Hằng Nhi,* 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh.**

NGUYỄN HIỆP

NHỮNG BÀI TOÁN CHIA ĐỀU TRONG SÁCH HÁN NÔM

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học Việt Nam)*,
ĐOÀN THỊ LỆ *(Đại học Thanh Hoa, Đài Loan)*,
VŨ TRỌNG LƯỠNG *(Đại học Tây Bắc)*,
CUNG THỊ KIM THÀNH, PHAN THỊ ÁNH TUYẾT

Các sách toán viết bằng chữ Hán và chữ Nôm (viết gọn: sách toán Hán Nôm) hiện nay được biết gồm 22 cuốn, được lưu trữ chủ yếu trong thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, có nội dung chính gồm các bài toán số học, các bài toán đại số và các bài toán hình học.

Phép bình phân (Bình phân pháp) là dạng *toán chia đều*: *Biết tổng số S (tiền, bạc, ...), chia cho N (người). Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?*

Dạng toán này thường gặp trong thực tế (chia lương, tiền công, phát lương thực cho quân lính, chia thuế,...). Phép bình phân và phép sai phân là dạng toán bắt buộc trong các kì thi toán ngày xưa. Phép bình phân thực chất là *phép toán chia đều* trong chương trình Tiểu học hoặc lớp 5, lớp 6 Trung học Cơ sở hiện nay. Nhằm giúp bạn đọc làm quen và hiểu biết về *Toán ngày xưa*, cũng như cuộc sống và sinh hoạt của *Người xưa*, bài viết này giới thiệu một số bài toán về *Phép bình phân* trong năm cuốn sách toán Hán Nôm tiêu biểu.

1. Phép bình phân trong *Toán pháp đại thành*

Giới thiệu: *Toán pháp đại thành* được coi là do Lương Thế Vinh (1441-1496) biên soạn.

Bài 1.1. Hữu quan tiền cửu thập quán nhị mạch nhị thập tứ văn, phân dữ nhân số tam thập lục nhân. Vấn mỗi nhân hoạch tiền can?

Dịch. Có số tiền là 90 quán 2 mạch 24 văn, chia cho 36 người. Hỏi mỗi người nhận bao nhiêu?

Lời giải. Đổi đơn vị: 90 quán 2 mạch 24 văn $= 90 \times 600 + 2 \times 60 + 24 = 54144$ văn.

Số tiền mỗi người nhận được là:
$54144 : 36 = 1504$ văn.

Đơn vị tiền cổ: *(theo thứ tự từ trên xuống)* 1 quán (quan) = 10 mạch = 600 văn (tiền); 1 mạch (bách) = 60 văn (tiền).

Đơn vị đo khối lượng: *(vàng, bạc)* 1 hốt (cân) = 10 lượng (lạng); 1 lạng = 10 tiền; 1 tiền = 10 phân; 1 phân = 10 li; 1 li = 10 hào; ...

Lưu ý: Từ nay về sau, để dễ đọc, chúng tôi chỉ viết lời dịch các đề bài.

Bình phân pháp là dạng toán dễ, nên trong phần lớn các bài, chúng tôi chỉ ghi đáp số.

Bài 1.2. Có số tiền là 72 quán 4 mạch 48 văn, chia cho 48 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu tiền?

Đáp: 906 văn.

Bài 1.3. Nay có số tiền là 95 quán 5 mạch 30 văn, chia cho đội quân 112 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp: 511 văn, dư 98 văn.

Bài 1.4. Nay có số tiền là 503 quán 7 mạch, chia cho quân lính 345 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp: 876 văn = 1 quán 4 mạch 36 văn.

Bài 1.5. Nay có số tiền là 698 quán 7 mạch 10 văn, chia cho số người là 548 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp: 765 văn dư 10 văn.

Bài 1.6. Nay có số bạc là 12345 lạng 6 tiền 7 phân 8 li 9 hào, hỏi chia cho 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 người thì mỗi người được bao nhiêu?

Lời giải. Lấy 12345 lạng 6 tiền 7 phân 8 li 9 hào = 123456789 hào lần lượt chia cho 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 sẽ được đáp số.

Lời bình. Số bị chia khá lớn gồm 9 chữ số.

Bài 1.7. Có số bạc là 14 hốt 7 lượng 9 tiền, chia cho 85 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp: 1 lượng 7 tiền 4 phân.

Bài 1.8. Có số vải là 14 xấp 15 xích 2 thốn, chia đều cho 68 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp: 6 xích 4 thốn.

Bài 1.9. Nay có 30 thước vải, giá tiền là 4 quán 7 mạch. Hỏi mỗi thước giá bao nhiêu?

Đáp: 94 văn = 1 mạch 34 văn.

Đơn vị đo độ dài: 1 xấp (1 thất) = 30 xích; 1 trượng = 10 xích; 1 xích (1 thước) = 10 thốn; 1 thốn (1 tấc) = 10 phân; 1 phân = 10 li.

Bài 1.10. Nay có số ruộng là 58 mẫu 3 sào 6 phương xích, mỗi người nhận được số ruộng là 2 sào 1 phương xích. Hỏi số người là bao nhiêu?

Đơn vị đo diện tích: 1 mẫu = 10 sào; 1 sào = 360 m^2 = 15 phương xích; 1 phương xích (thước) = 24 m^2.

Lời giải. 58 mẫu 3 sào 6 xích = 8751 xích; 2 sào 1 phương xích = 31 phương xích. Số người là 8751 : 31 = 282 người, còn dư 9 phương xích.

2. Phép bình phân trong *Cửu chương lập thành tính pháp*

Giới thiệu: *Cửu chương lập thành tính pháp* của Phạm Hữu Chung in (lần đầu) năm 1713. Đây là cuốn sách toán Hán Nôm cổ nhất hiện còn giữ được. Dưới đây là một số bài dạng *Phép bình phân* trong *Cửu chương lập thành tính pháp*.

Bài 2.1. Nay có số tiền là 346 quán 5 mạch 48 văn, chia cho 456 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu tiền?

Đáp: 456 văn = 7 mạch 36 văn, thừa 12 văn.

Bài 2.2. Nay có số tiền là 119 quán 7 mạch 16 văn, chia đều cho số người là 268 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp: 268 văn = 3 mạch 28 văn, thừa 12 văn.

3. Phép bình phân trong *Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục*

Giới thiệu: *Ý Trai Toán pháp nhất đắc lục* (Một điều tâm đắc về toán của Ý Trai) được Ý Trai Nguyễn Hữu Thận hoàn thành năm 1829. Đây là cuốn sách toán Hán Nôm (viết tay) dày dặn nhất và có nội dung toán phong phú nhất trong số các sách toán Hán Nôm. Sách gồm 8 Chương (8 Quyển).

Bài 3.1. Có số tiền là 17 quán 5 mạch, chia đều cho 36 người. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Đáp: 291 văn dư 24 văn.

Bài 3.2. Có số tiền là 18 quán 1 mạch 32 văn, chia cho 36 người và một người nhận một nửa phần. Hỏi mỗi người được bao nhiêu?

Lời giải. 36 người nhận toàn phần và 1 người nhận nửa phần = 73/2 phần. Vậy mỗi người nhận được: 18 quán 1 mạch 32 văn = 10892 văn: (73/2) = 298 văn thừa 15 văn.

Bài 3.3. Có số tiền là 3 quán 1 mạch 15 văn, chia cho 30 người, trong đó có một người nhận được 4 phần 7. Hỏi mỗi người được nhận bao nhiêu?

Lời giải. Một người nhận 4x tiền, thì 29 người nhận 7x. Ta có $29 \times 7x + 4x = 1875$ (văn). Vậy mỗi người nhận 63 văn, người cuối cùng nhận 36 văn, thừa 12 văn.

4. Phép bình phân trong *Cửu chương toán pháp lập thành*

Giới thiệu: *Cửu chương toán pháp* hay *Cửu chương toán pháp lập thành*, không rõ tác giả, được chép lại vào năm Tự Đức thứ 35 (1882).

Bài 4.1. Nay có số tiền là 1643 quán 7 mạch chia cho một số người, mỗi người được 3 mạch. Hỏi số người là bao nhiêu?

Đáp: 5479 người.

Bài 4.2. Nay có số tiền là 3489 quán 8 mạch 24 văn, chia đều cho số người, mỗi người nhận số tiền là 3 mạch 42 văn. Hỏi số người là bao nhiêu?

Đáp: 9432 người.

Bài 4.3. Nay có số tiền là 222 quán 5 mạch. Đem đi mua bạc. Mỗi hốt bạc có giá tiền là 9 quán 5 mạch. Hỏi số bạc là bao nhiêu?

Lời giải. 222 quán 5 mạch: 9 quán 5 mạch = 23 hốt 4 lạng 2 tiền. Còn thừa 6 văn.

Bài 4.4. Nay có số tiền là 4 quán. Cứ 7 người nhận 6 văn. Hỏi số người là bao nhiêu?

Đáp: 2800 người.

Bài 4.5. Nay có số tiền là 100 quán. Mỗi người nhận 6 mạch 40 văn. Hỏi có bao nhiêu người?

Đáp: 150 người.

Bài 4.6. Nay có số vải là 221 thất 12 xích (mỗi thất 30 xích), chia cho 359 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp: 18 xích 5 thốn, dư 5 thốn.

Bài 4.7. Nay có số lụa là 3989 thất, chia cho số quân nhân là 9535 người. Hỏi số lụa mỗi người nhận được là bao nhiêu?

Đáp: Mỗi người nhận được 12 xích 5 thốn 5 phân. Còn thừa 5 xích 7 thốn 5 phân.

Bài 4.8. Nay có số mật ong là 86 vò (mỗi vò 21 bát), chia cho số quân nhân là 258 người. Hỏi mỗi người nhận được bao nhiêu?

Đáp: 7 bát.

5. Phép bình phân trong *Bút toán chỉ nam*

Giới thiệu: *Bút toán chỉ nam* của Nguyễn Cẩn là cuốn sách toán Hán Nôm in cuối cùng (năm 1909). Tuy muộn nhất trong số các sách toán Hán Nôm, nhưng *Bút toán chỉ nam* có nội dung khá đơn giản, lời giải khá chi tiết, ngôn ngữ gần với ngôn ngữ hiện đại. Mặc dù viết bằng chữ Hán, *Bút toán chỉ nam* đã tiếp thu toán học phương Tây và trình bày bốn phép tính (cộng trừ nhân chia) theo phương pháp hiện đại (đặt phép toán nhân hoặc chia theo hàng dọc,...).

Bài 5.1. Nay có 37 quyển sách chia cho 9 người. Hỏi mỗi người được mấy quyển?

Đáp: 4 quyển dư 1 quyển.

Bài 5.2. Nay có tiền là 3 nguyên 6 hào 4 xu (1 nguyên =10 hào) mua 28 thoi mực. Hỏi mỗi thoi bao nhiêu tiền?

Đáp: 1 hào 3 xu.

Đơn vị tiền thời Nguyễn: 1 nguyên (1 đồng) = 10 hào; 1 hào = 10 xu; 1 xu = 10 chinh.

Bài 5.3. Nay có 183 thước lụa, may 60 cái áo. Hỏi mỗi áo cần bao nhiêu lụa?

Đáp: 3 thước 5 phân.

Bài 5.4. Nay có một vật nặng 19845 cân. Dùng xe chở, nhưng mỗi xe chỉ chở được 405 cân. Hỏi cần mấy xe?

Đáp: 49 xe.

Bài 5.5. Nay có đường xe lửa dài ba triệu sáu ức năm vạn không nghìn tám trăm ba mươi hai thước (3650832 thước). Từ khi khởi công cho đến khi hoàn thành hết 729 tuần lễ. Hỏi mỗi tuần xây được bao nhiêu đường?

Đáp: 5008 thước.

Thay lời kết

Bài viết trình các bài toán dạng toán *Bình phân pháp* (phép chia đều), được chọn lựa từ 5 cuốn sách từ cuối thế kỉ XV đến đầu thế kỉ XX. Từ những bài toán này, có thể phần nào hình dung được những mốc phát triển của toán học Việt Nam qua 500 năm. *Phép bình phân* là dạng toán đơn giản nhất, ai cũng làm được, nhất là hiện nay, với sự hỗ trợ của máy tính. Các bài toán này thường được phát biểu dưới dạng bài toán thực tế, thể hiện tính thực tiễn cao, qua đó ta cũng phần nào hiểu thêm cuộc sống và sinh hoạt của người xưa. Thí dụ, lương cấp cho binh lính có thể được trả bằng hiện vật, ...

GAUSS CONTEST 2017

(CEMC. University of Waterloo. America)

GRADE 7

Time: *1 hour*

HOÀNG TRỌNG HẢO

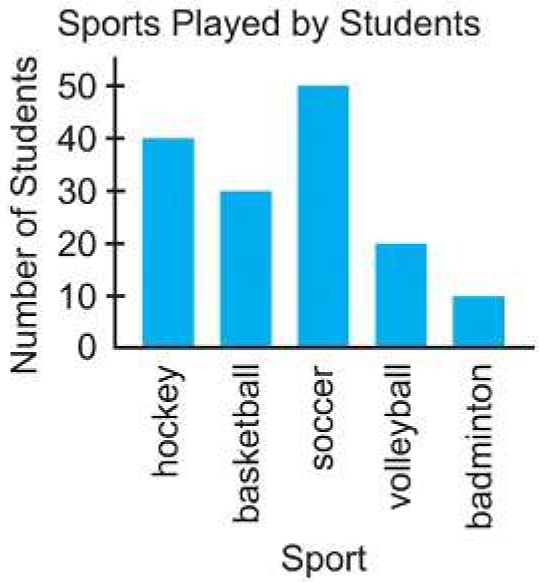
(Sưu tầm và giới thiệu)

Part A: Each correct answer is worth 5.

1. The value of $(2 + 4 + 6) - (1 + 3 + 5)$ is

(A) 0 (B) 3 (C) –3 (D) 21 (E) 111

2. Based on the graph shown, which sport is played by the most students?



(A) hockey (B) basketball (C) soccer
(D) volleyball (E) badminton

3. Michael has \$280 in \$20 bills. How many \$20 bills does he have?

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

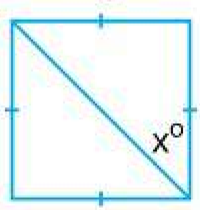
4. When two integers between 1 and 10 are multiplied, the result is 14. What is the sum of these two integers?

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 33

5. Three thousandths is equal to

(A) 300 (B) 0.3 (C) 0.03
(D) 30 (E) 0.003

6. In the square shown, x is equal to



(A) 0 (B) 45 (C) 60 (D) 180 (E) 360

7. Which integer is closest in value to $\frac{35}{4}$?

(A) 10 (B) 8 (C) 9 (D) 7 (E) 6

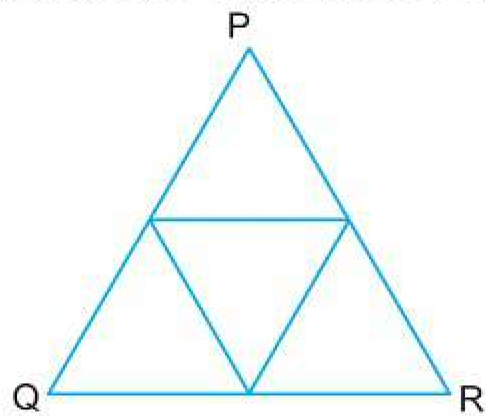
8. When $n = 101$, which of the following expressions has an even value?

(A) $3n$ (B) $n + 2$ (C) $n - 12$
(D) $2n - 2$ (E) $3n + 2$

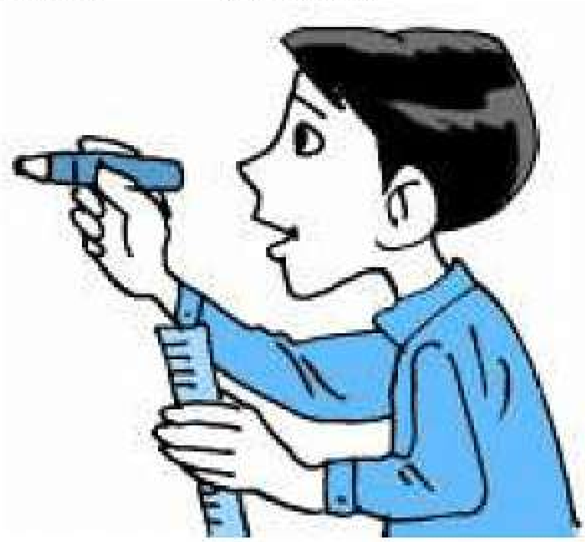
9. The sum of three consecutive integers is 153. The largest of these three integers is

(A) 52 (B) 50 (C) 53 (D) 54 (E) 51

10. In the diagram, ΔPQR is equilateral and is made up of four smaller equilateral triangles. If each of the smaller triangles has a perimeter of 9 cm, what is the perimeter of ΔPQR?



(A) 15 cm (B) 9 cm (C) 36 cm
(D) 27 cm (E) 18 cm



Part B: Each correct answer is worth 6.

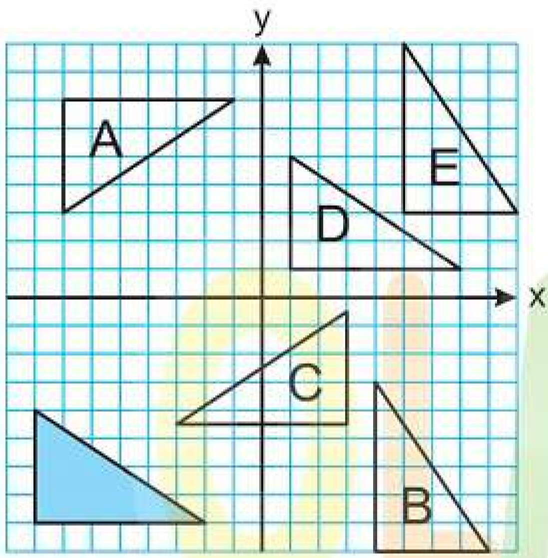
11. The number that goes into the $\square$ to make $\frac{3}{7}=\frac{\square}{63}$ true is

(A) 27 (B) 9 (C) 59 (D) 63 (E) 3

12. At the Gaussian Store, puzzles cost \$10 each or \$50 for a box of 6 puzzles. If a customer would like exactly 25 puzzles, what is the minimum possible cost?

(A) \$210 (B) \$230 (C) \$250
(D) \$220 (E) \$200

13. When the shaded triangle shown is translated, which of the following triangles can be obtained?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

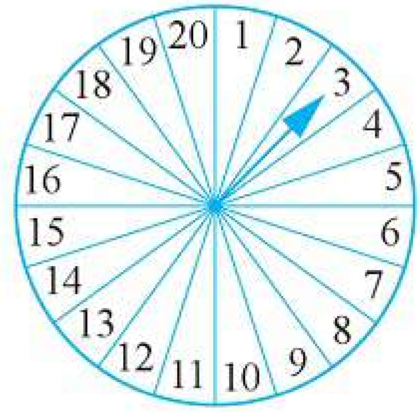
14. When the time in Toronto, ON is 1:00 p.m., the time in Gander, NL is 2:30 p.m. A flight from Toronto to Gander takes 2 hours and 50 minutes. If the flight departs at 3:00 p.m. (Toronto time), what time will the flight land in Gander (Gander time)?

(A) 7:20 p.m. (B) 5:00 p.m. (C) 6:20 p.m.
(D) 5:20 p.m. (E) 8:50 p.m.

15. Five students ran a race. Ryan was faster than Henry and Faiz. Henry was slower than Faiz. Toma was faster than Ryan but slower than Omar. Which student finished fourth?

(A) Faiz (B) Henry (C) Omar
(D) Ryan (E) Toma

16. A circular spinner is divided into 20 equal sections, as shown. An arrow is attached to the centre of the spinner. The arrow is spun once. What is the probability that the arrow stops in a section containing a number that is a divisor of 20?



(A) $\frac{12}{20}$ (B) $\frac{14}{20}$ (C) $\frac{15}{20}$ (D) $\frac{7}{20}$ (E) $\frac{6}{20}$

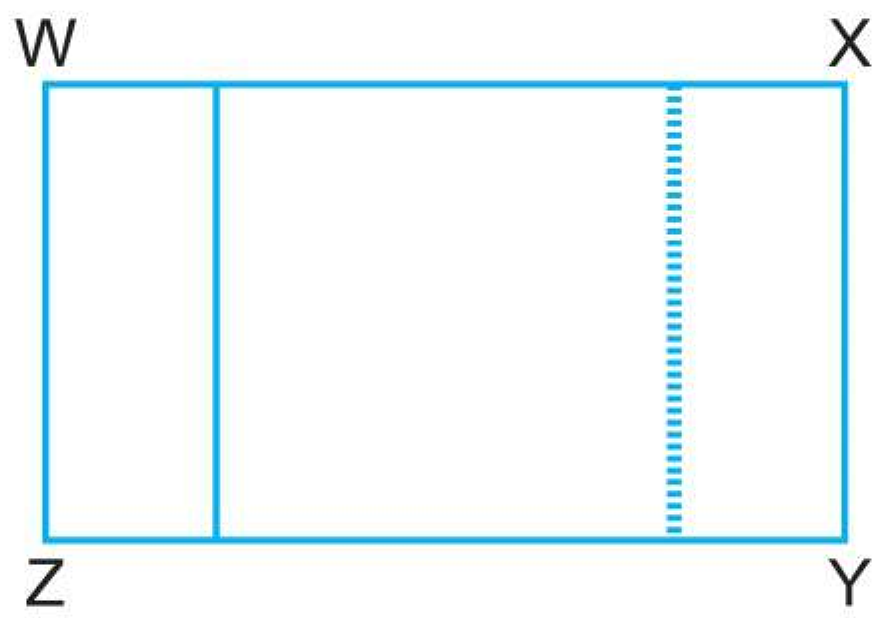
17. The mean (average) of the four integers 78; 83; 82; and x is 80. Which one of the following statements is true?

(A) x is 2 greater than the mean
(B) x is 1 less than the mean
(C) x is 2 less than the mean
(D) x is 3 less than the mean
(E) x is equal to the mean

18. Sara goes to a bookstore and wants to buy a book that is originally priced at \$100. Which of the following options gives her the best discounted price?

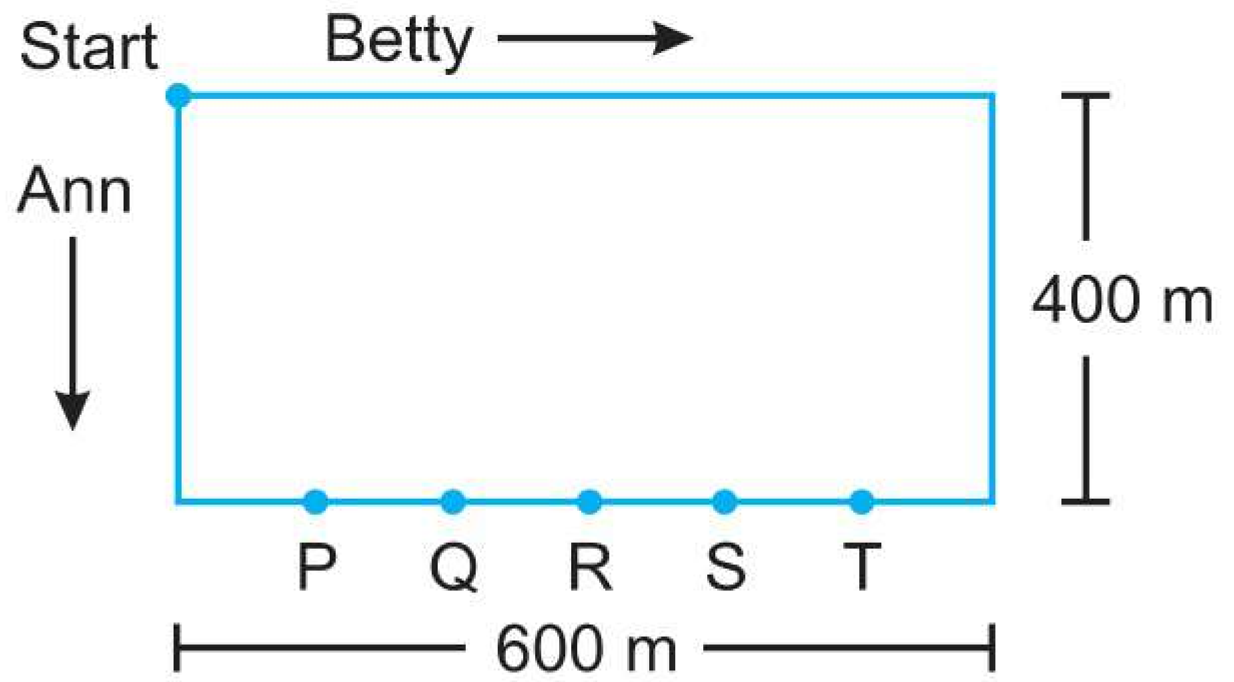
(A) A discount of 20%
(B) A discount of 10%, then a discount of 10% off the new price
(C) A discount of 15%, then a discount of 5% off the new price
(D) A discount of 5%, then a discount of 15% off the new price
(E) All four options above give the same price

19. Two sheets of 11 cm × 8 cm paper are placed on top of each other, forming an overlapping 8 cm × 8 cm square in the centre, as shown.



The area of rectangle WXYZ is
(A) 88 cm^2 (B) 112 cm^2 (C) 136 cm^2
(D) 121 cm^2 (E) 176 cm^2

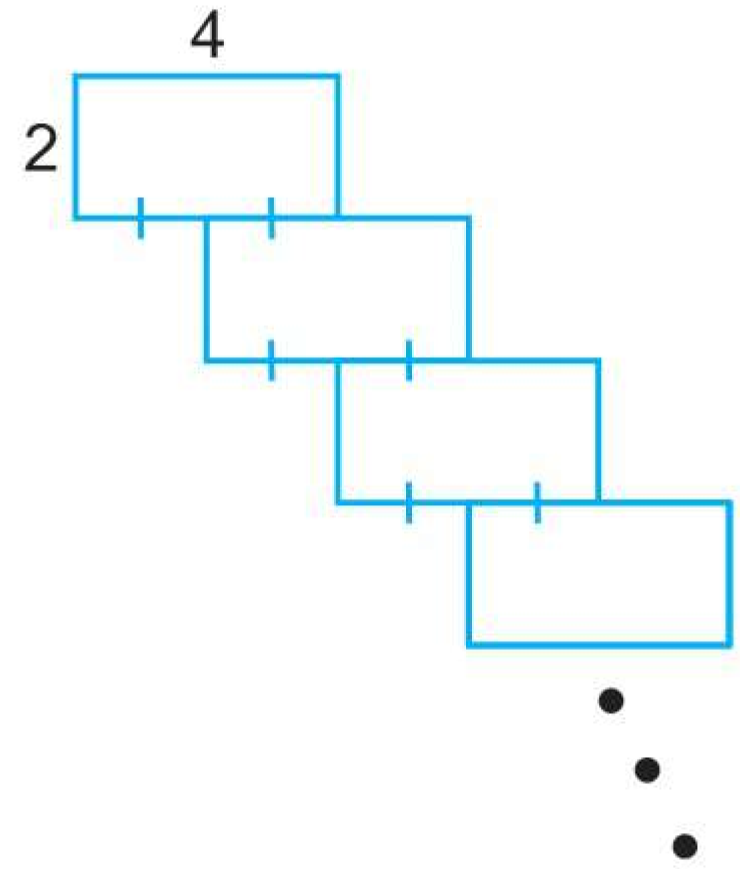
20. Betty and Ann are walking around a rectangular park with dimensions 600 m by 400 m, as shown. They both begin at the top left corner of the park and walk at constant but different speeds. Betty walks in a clockwise direction and Ann walks in a counterclockwise direction. Points P, Q, R, S, T divide the bottom edge of the park into six segments of equal length. When Betty and Ann meet for the first time, they are between Q and R. Which of the following could be the ratio of Betty's speed to Ann's speed?



(A) 5 : 3 (B) 9 : 4 (C) 11 : 6
(D) 12 : 5 (E) 17 : 7

Part C: Each correct answer is worth 8.

21. Rectangles that measure 4 × 2 are positioned in a pattern in which the top left vertex of each rectangle (after the top one) is placed at the midpoint of the bottom edge of the rectangle above it, as shown. When a total of ten rectangles are arranged in this pattern, what is the perimeter of the figure?



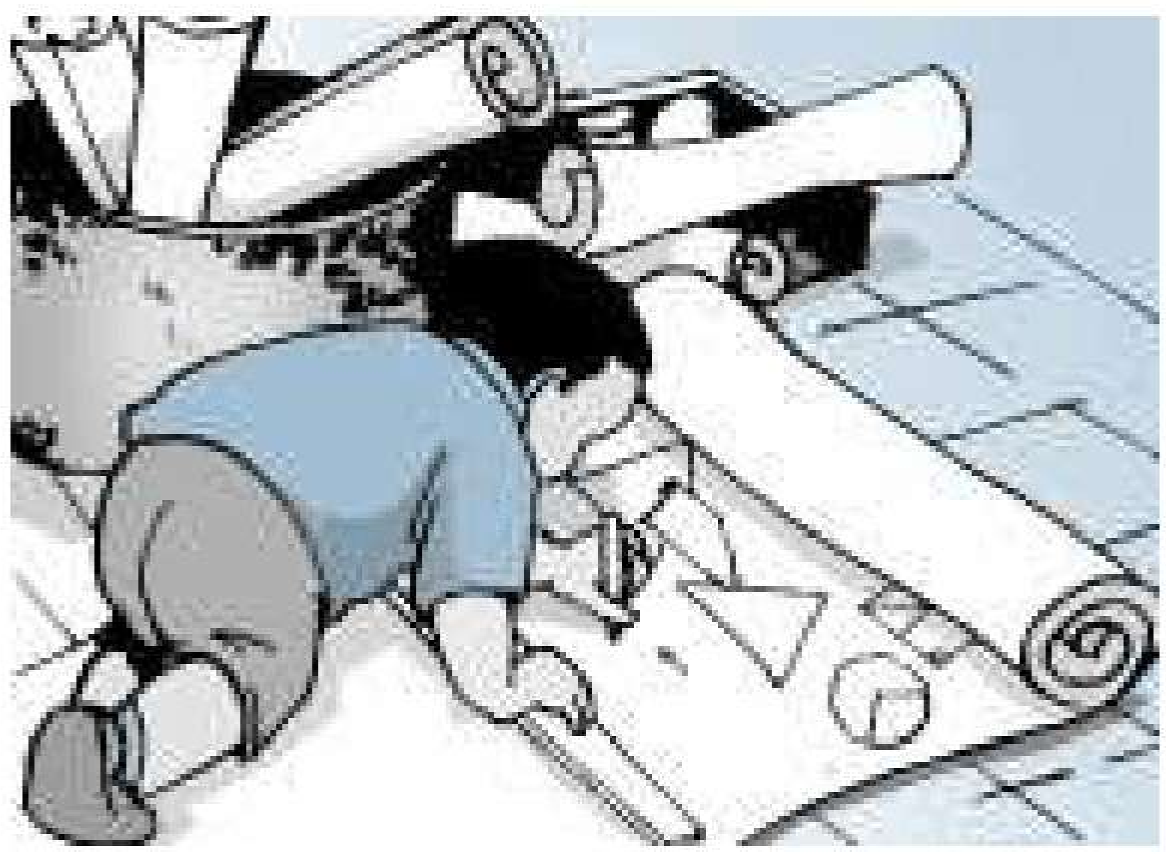
(A) 48 (B) 64 (C) 90 (D) 84 (E) 100

22. In the six-digit number 1ABCDE, each letter represents a digit.
Given that 1ABCDE × 3 = ABCDE1, the value of A + B + C + D + E is
(A) 29 (B) 26 (C) 22 (D) 30 (E) 28

23. Given 8 dimes (10 ¢ coins) and 3 quarters (25 ¢ coins), how many different amounts of money can be created using one or more of the 11 coins?
(A) 27 (B) 29 (C) 35 (D) 26 (E) 28

24. Four vertices of a quadrilateral are located at (7, 6), (–5, 1), (–2, –3), and (10, 2).
The area of the quadrilateral in square units is
(A) 60 (B) 63 (C) 67 (D) 70 (E) 72

25. Ashley writes out the first 2017 positive integers. She then underlines any of the 2017 integers that is a multiple of 2, and then underlines any of the 2017 integers that is a multiple of 3, and then underlines any of the 2017 integers that is a multiple of 5. Finally, Ashley finds the sum of all the integers which have not been underlined. What is this sum?
(A) 542 708 (B) 543 213 (C) 542 203
(D) 543 326 (E) 543 618



THÁCH ĐẤU

TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI HAI

Người thách đấu: *Lê Sơn Tùng*, GV. THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.

Bài toán thách đấu: Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình $x.(8x^2 + 12x + 6) = y.(y^4 + y^3 + 1)$.

Thời hạn: Trước ngày 08.03.2018 theo dấu bưu điện.

Kết quả TRẬN ĐẤU THỨ MỘT TRĂM NĂM MƯƠI (TTT2 số 178)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các số dương ta có

$$2x^5 + y^4 - x^2 + 4 = (x^5 + x^5 + x^2) + (x^4 + 1) + y^4 + 3 - (x^4 + 2x^2)$$

$$\ge 3x^4 + 2x^2 + y^4 + 3 - (x^4 + 2x^2) = (x^4 + y^4) + (x^4 + 1) + 2 \ge 2(x^2y^2 + x^2 + 1).$$

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^5 + y^4 - x^2 + 4}} \le \dfrac{1}{\sqrt[3]{2(x^2y^2 + x^2 + 1)}} = \sqrt[3]{36}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{2(x^2y^2 + x^2 + 1)}}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}.\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$

$$\le \frac{\sqrt[3]{36}}{3}\left(\frac{1}{2(x^2y^2 + x^2 + 1)} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2x^5 + y^4 - x^2 + 4}} \le \frac{\sqrt[3]{36}}{6}.\frac{1}{x^2y^2 + x^2 + 1} + \frac{\sqrt[3]{36}}{9}.\ (1)$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2y^5 + z^4 - y^2 + 4}} \le \frac{\sqrt[3]{36}}{6}.\frac{1}{y^2z^2 + y^2 + 1} + \frac{\sqrt[3]{36}}{9}.\ (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2z^5 + x^4 - z^2 + 4}} \le \frac{\sqrt[3]{36}}{6}.\frac{1}{z^2x^2 + z^2 + 1} + \frac{\sqrt[3]{36}}{9}.\ (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta được

$$Q \le \frac{\sqrt[3]{36}}{6}\left(\frac{1}{x^2y^2 + x^2 + 1} + \frac{1}{y^2z^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{z^2x^2 + z^2 + 1}\right) + \frac{\sqrt[3]{36}}{3}.$$

Ta lại có $xyz = 1$, suy ra $\dfrac{1}{x^2y^2 + x^2 + 1} + \dfrac{1}{y^2z^2 + y^2 + 1} + \dfrac{1}{z^2x^2 + z^2 + 1}$

$$= \frac{1}{x^2y^2 + x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^2y^2z^2 + x^2y^2 + x^2} + \frac{x^2y^2}{x^4y^2z^2 + x^2y^2z^2 + x^2y^2} = \frac{x^2y^2 + x^2 + 1}{x^2y^2 + x^2 + 1} = 1.$$

Do đó $Q \le \dfrac{\sqrt[3]{36}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy $\text{Max}Q = \dfrac{\sqrt[3]{36}}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Nhận xét. Đăng quang trong trận đấu này là võ sĩ *Huỳnh Nguyên Phúc*, 9A1, THCS Mỹ Lộc, Phù Mỹ, **Bình Định**.

Các võ sĩ có lời giải đúng được khen kì này: *Lương Tùng Lâm*, 8H, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Thị Minh Tâm*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ; *Phan Đình Trường*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; *Nguyễn Mạnh Kiên*, 9A1, THCS Yên Phong, Yên Phong, **Bắc Ninh**.

LÊ ĐỨC THUẬN

SỐ HỌC VÀ NHỮNG CHÚ THỎ

PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN
(Khoa Toán, Đại học Vinh, Nghệ An)

1. Leonardo Fibonacci (1170 - 1250) là nhà toán học thiên tài Italia thời trung cổ. Ông đã để lại nhiều tác phẩm giá trị cho kho tàng toán học nhân loại. Nổi bật nhất là tác phẩm *Liber Abaci* được hoàn thành vào năm 1202. Trong tác phẩm này ông trình bày nhiều kết quả sâu sắc về số học và đại số sơ cấp, vượt quá tầm hiểu biết của các học giả cùng thời.

2. Một trong những bài toán được trình bày trong tác phẩm *Liber Abaci* là bài toán sau đây về những chú thỏ.

Bài toán 1. *Một cặp thỏ mỗi tháng sinh một lần, cho một cặp thỏ con (một đực, một cái). Mỗi cặp thỏ con mới sinh ra sau hai tháng lại bắt đầu sinh một cặp thỏ con nữa..., và giả sử tất cả các thỏ sinh ra đều sống. Hỏi nếu một cặp thỏ con nuôi từ tháng giêng và đẻ con vào tháng hai thì cuối năm sẽ có bao nhiêu cặp thỏ tất cả?*

Sử dụng ngôn ngữ toán học ngày nay, có thể trình bày lời giải của Fibonacci như sau.

Kí hiệu f_n là cặp thỏ có được sau tháng thứ n kể từ đầu năm.

Trong tháng giêng có một cặp thỏ, $f_1 = 1$. Vào đầu tháng hai, cặp thỏ này đẻ ra một cặp thỏ mới. Vậy trong tháng hai có hai cặp thỏ, $f_2 = 2$. Vào đầu tháng thứ ba, cặp thỏ đầu tiên đẻ ra cặp thỏ thứ ba, còn cặp thỏ thứ hai mới một tháng tuổi nên chưa đẻ được. Vậy $f_3 = 3$. Sau tháng thứ n + 1 sẽ có f_n cặp thỏ ban đầu cộng thêm f_{n-1} số cặp thỏ sau tháng thứ n − 1 đẻ ra, vậy $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. (1).

Dùng công thức (1), tính được: $f_4 = f_3 + f_2 = 3 + 2 = 5$, $f_5 = f_4 + f_3 = 5 + 3 = 8$, $f_6 = 13$, $f_7 = 21$, $f_8 = 34$, $f_9 = 55$, $f_{10} = 89$, $f_{11} = 144$, $f_{12} = 233$.

Như vậy cuối năm có tất cả 233 cặp thỏ.

3. Từ lời giải bài toán trên, ta đưa ra định nghĩa:

Dãy số f_n thỏa mãn các điều kiện $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ với $n \geq 2$ được gọi là *dãy số Fibonacci*.

Bằng phương pháp quy nạp theo n ta chứng minh dãy Fibonacci được cho bởi công thức

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n \geq 1.\ (2)$$

Sử dụng công thức (1) hoặc (2), ta chứng minh được nhiều tính chất thú vị của dãy Fibonacci: Chẳng hạn, giả sử f_n là dãy Fibonacci.

Chứng minh rằng $f_0^2 + f_1^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

- Chú ý rằng từ công thức (2) ta nhận được công thức $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398$. Với giả thiết như ở bài toán, các thế hệ của loài thỏ tăng lên theo mỗi cặp thỏ là $\varphi \approx 1{,}618$ bố mẹ, chứ không phải là $\frac{3}{2} = 1{,}5$ như nhiều người nghĩ!

- Những kết quả nghiên cứu khoa học gần đây cho thấy dãy Fibonacci xuất hiện khá nhiều trong các bí mật của tự nhiên. Chẳng hạn thông thường một tế bào tự phân đôi thành hai tế bào giống nhau. Tuy nhiên cũng có ngoại lệ. các thí nghiệm của Amar Klar làm ở Trung tâm nghiên cứu y học Maryland Hoa Kỳ cho thấy đối với loài giun tròn, hai tế bào đó không giống nhau. Một tế bào cái phải mất một thời gian lâu hơn mới có khả năng tự phân chia ra so với tế bào cái kia. Và số tế bào ở những thế hệ khác nhau của loài giun tròn này là f_n.

4. Dãy Fibonacci xuất hiện khá nhiều trong tự nhiên.

- Các nhà sinh vật học đã lập luận về sự sinh trưởng của các cành trên trên một cây non như sau: Một cây non sau hai năm mọc ra một cành mới, năm thứ ba cành mới chưa sinh trưởng còn cành cũ đâm chồi, sau đó cành cũ đâm chồi cùng với cành đã "nghỉ ngơi" một năm để sinh trưởng, cành mới sinh năm sau đó thì năm sau nghỉ ngơi để sau đó sinh trưởng... Quy luật này trong sinh học gọi là *Định luật Lut Weige*. Căn cứ vào quy luật này, số lượng của một cành cây qua các năm chính là dãy số Fibonaci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

- Một bài toán khác liên quan đến "Dòng họ của loài ong": *Ong cái có cả bố, mẹ. Ong đực chỉ có mẹ. Vậy một con ong đực có bao nhiêu tổ tiên ở đời thứ 10?*

Một con ong đực chỉ có 1 ong mẹ, 2 ong ông bà (1 ong đực, 1 ong cái), 3 ong cụ cố (1 ong đực, 2 ong cái), 5 ong cụ kị (2 ong đực, 3 ong cái)…Gọi n là thế hệ thứ n về trước và f_n là số tổ tiên thì ta có $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$. Nếu quy ước $f_0 = 1$ thì ta nhận được công thức truy hồi $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với n = 2, 3, ... Đây chính là dãy Fibonacci đề cập ở trên. Nói riêng, $f_{10} = 89$. Như vậy một con ong đực đến đời thứ 10 có 89 tổ tiên (!).

5. Dãy Fibonacci liên quan chặt chẽ với số $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Số này được gọi là *Tỉ số vàng* và được kí hiệu bởi φ; $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

Ngoài ra, φ cũng là số đo cạnh của thập giác đều nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1.

- Trong kiến trúc người ta cho rằng hình chữ nhật có tỉ số chiều rộng và chiều dài bằng φ là hình chữ nhật cân đối nhất. Nó được gọi là *"hình chữ nhật vàng"*.

- Một vài ví dụ khác: Điện thờ Parthenon ở thành phố Athens (Hy Lạp) hay Kim tự tháp vĩ đại ở Giza (Ai Cập) được xây dựng từ khoảng 4000 năm trước Công nguyên đều có tỉ số giữa chiều cao của một mặt với nửa cạnh đáy là tỉ số vàng.

Dãy Fibonacci có nhiều ứng dụng đến nỗi năm 1963 một *Hiệp hội Fibonacci* được thành lập và xuất bản Tập san *Fibonacci Quarterly* ra ba tháng một kì và đang duy trì đến tận bây giờ.

CÂY ĐÀO ĐÂU CHỈ CHO HOA

ĐÔNG NGUYỄN

Hoa đào thật quen thuộc và thật đẹp! Thiếu hoa đào thì có vẻ như chưa phải là Tết, là Xuân! Quả đào cũng rất thơm ngon, bổ dưỡng. Nhưng không chỉ có vậy đâu nhé, đào còn "chứa đựng" khá nhiều điều thú vị đấy! Không tin, bạn hãy đọc mà xem!

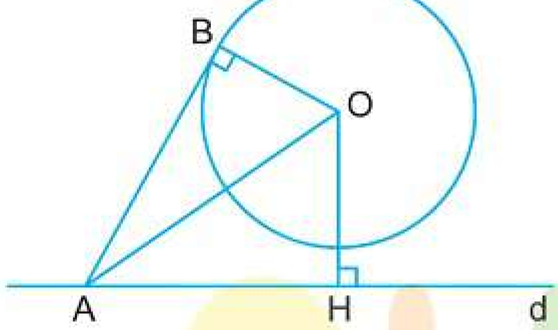
- Truyền thuyết kể rằng: Ngày xưa ở phía đông núi Sóc Sơn, có cây đào cổ thụ. Mỗi dịp giáp Tết, hoa đào luôn nở rực rỡ, thắm đỏ cả một vùng. Có hai vị thần trú ngụ trên cây đào đó để giúp dân xua ma đuổi quỷ. Bọn quỷ ma chỉ cần nhìn thấy hoa đào là sợ hết hồn. Một lần, vào dịp gần Tết, hai vị thần có việc về trời. Lo ngại bọn quỷ sẽ quấy nhiễu dân làng, hai vị thần đã khuyên dân làng bẻ cành hoa đào về cắm trong nhà. Quả nhiên, Tết năm đó, mặc dù hai vị thần đi vắng nhưng lũ quỷ ma không hề dám quậy phá. Từ đó, hàng năm, vào những ngày Tết, mọi người luôn bẻ cành đào về cắm trong nhà. Sau này, mọi người dần quên ý nghĩa trừ tà của hoa đào. Loài hoa tươi thắm này chủ yếu chỉ còn mang ý nghĩa trang trí, làm đẹp cho ngôi nhà.
- Các bộ phận của cây đào - từ thân, lá, cho đến hoa, quả, hạt... - đều được Đông y coi là những vị thuốc quý, có thể chữa bệnh ngoài da, bệnh tiêu hoá v.v... Đặc biệt, cánh hoa đào từ lâu đã được phụ nữ châu Á dùng để dưỡng da, làm đẹp.
- Khi chín, quả đào thường rất ngọt... nhưng thật tuyệt là nó lại chứa ít calo, do đó, những bạn sợ béo phì cứ việc chén thoải mái nhé!
- Trái đào không chỉ thơm ngon mà còn chứa nhiều chất rất tốt cho da và tóc. Chính vì thế, tinh chất đào thường được các hãng hoá mỹ phẩm sử dụng. Dầu gội, sữa tắm, sữa rửa tay, kem dưỡng da có chứa tinh chất đào và thoang thoảng hương đào luôn được nhiều người ưa thích.
- Mùi đào chín có sức hấp dẫn đặc biệt và đó là lí do khiến bạn có thể bắt gặp từ "hương đào" trong khá nhiều loại bánh kẹo, trà, nước giải khát, kem ...
- Người Hunggari gọi đào là "quả thanh thản" vì đào có tác dụng chống căng thẳng, mệt mỏi, làm dịu bớt những cơn đau đầu.
- Người phương Tây cho rằng đào có nguồn gốc từ Ba Tư nên gọi đào là "táo Ba Tư". Từ Peach bắt nguồn từ từ Persica (Ba Tư là Persis). Thực ra, quê hương bản xứ của đào là Trung Quốc. Nhờ con đường tơ lụa mà đào đã "tới" Ba Tư, rồi từ đây "đi tiếp" tới các nước khác.
- Đào được người Trung Quốc và người Nhật Bản coi là biểu tượng của trường thọ, thành đạt và an toàn. Hiện nay Trung Quốc là nước đứng đầu thế giới về sản lượng đào, tiếp theo là Italy. Ở Mỹ, bang Georgia thường được người dân địa phương gọi vui là "bang đào" do ở đây trồng rất nhiều đào.
- Đào "có mặt" trong khá nhiều truyện thần thoại của các dân tộc châu Á. "Cậu bé quả đào" là một câu chuyện rất nổi tiếng ở Nhật. Còn quả đào tiên trong Tây Du Kí thì các bạn biết rất rõ rồi, đúng không? Ở nước ta, thời xưa, mọi người cũng mượn hình ảnh trái đào để chỉ mái tóc của các cậu bé (tóc trái đào).

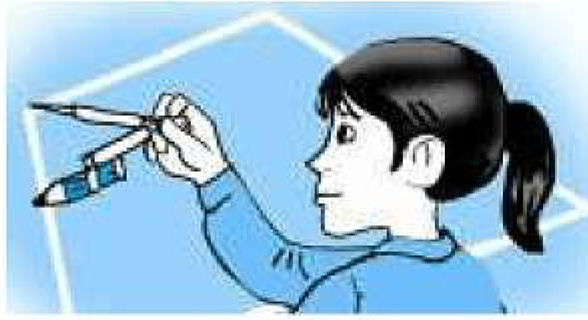
CHẤP NHẬN ĐƯỢC KHÔNG?

TẠ THẬP *(TP. Hồ Chí Minh)*

Bài toán. Cho đường thẳng d và đường tròn (O; R) không cắt nhau. Lấy điểm A trên đường thẳng d. Vẽ AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) (B là tiếp điểm). Xác định vị trí của A để độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.

Một bạn học sinh đã giải bài toán này như sau:





Vẽ OH ⊥ d tại H. Ta có H cố định và $OA \geq OH$.

Xét ba điểm O, A, B ta có

$AB \geq |OA - OB| = OA - R$.

Do đó $AB \geq OH - R$, không đổi.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A \equiv H$.

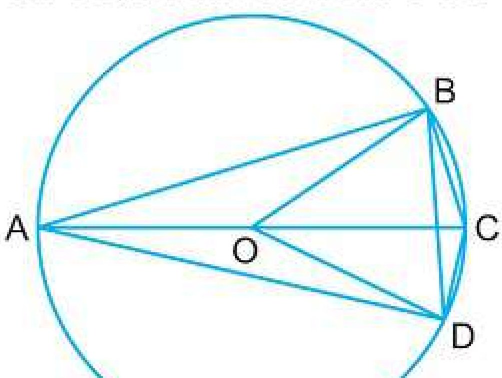
Vậy khi A là hình chiếu của O trên d thì độ dài của AB là nhỏ nhất.

Theo các bạn lời giải này chấp nhận được không?

Kết quả **(TTT2 số 178)**

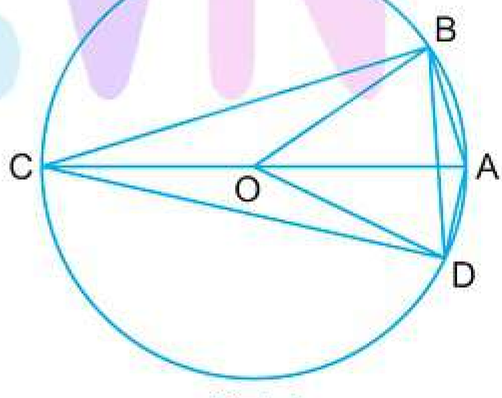
LỜI GIẢI ĐÚNG CHƯA?

Bạn học sinh chỉ giải bài toán trong trường hợp đường chéo BD của tứ giác ABCD cắt bán kính OC (hình 1) mà chưa xét trường hợp đường chéo BD cắt bán kính OA (hình 2). Lời giải của trường hợp BD cắt OA tương tự như khi BD cắt OC, chỉ cần đổi A và C cho nhau.



Hình 1

Kết quả là khi BD cắt OA thì các góc của tứ giác ABCD là $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^{\circ}$, $\widehat{BCD} = 30^{\circ}$, $\widehat{BAD} = 150^{\circ}$.



Hình 2

Nhận xét. Một số bạn xét trường hợp tứ giác ABDC là không đúng với đề bài. Các bạn sau có lời giải đúng, được thưởng kì này: *Đàm Quang Anh*, 9E1, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Đào Phương Anh*, *Ngô Gia Linh*, *Nguyễn Thị Kiều Trang*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, **Nam Định**; *Nguyễn Hoàng Sơn*, 9B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**.

ANH KÍNH LÚP

Hỏi: "Tết Tết Tết đến rồi! ..." - em rất muốn biết anh thích nhất điều gì vào mỗi dịp Tết ạ?

PHẠM LÊ HƯNG

(THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)

Đáp:

Anh thích ăn bánh chưng
Thích được ba mẹ cưng
Thích được bà xoa lưng
Thích được nhảy tưng tưng
Thích được chúc em Hưng
Có nhiều điều thật ưng.

Hỏi: Anh ơi! Sêlôcôc là tên thật của vị thám tử tài ba đáng kính trên TTT hay đó chỉ là nickname của ông?

NGUYỄN HẢI TUẤN

(THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Đáp: *Thú thực với em là cho đến nay, dù thám tử Sêlôcôc làm việc ở TTT đã 15 năm, nhưng chưa một ai "điều tra" được điều bí mật mà em hỏi. Để anh chuyển lời của em tới thám tử, biết đâu ông ấy sẽ đề nghị các thám tử nhí bọn em "phá án" vụ này nhỉ?*

Hỏi: Anh ơi! Sao dạo này TTT không có chuyên mục *Thăm vườn Tiếng Anh*? Số nào em cũng chờ chuyên mục này mà chờ hoài chẳng thấy!

NGUYỄN KHÁNH HUYỀN

(9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Nghệ An)

Đáp: *Hì hì... Đoán là thế nào em cũng hỏi câu này nên anh đã nhắc Chủ Vườn của Vườn Tiếng Anh rồi. Ngay trong số này, em có thể ghé thăm "khu vườn" mà em yêu thích. Tết đến, xuân sang, khu vườn đang rất vui tươi đấy, em và các bạn ghé đi nhé! Chủ Vườn cũng đã hứa với anh là từ nay sẽ luôn mở cửa chào đón các em. Đúng là tin vui đầu xuân em nhỉ!*

Hỏi: Em thấy anh hay trả lời bằng thơ. Trong những ngày Tết rộn ràng như thế này, anh "xuất khẩu" mấy câu vui vui được không ạ?

Một bạn quên ghi tên

(THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

Đáp:

Tết đến phải có hoa đào
Anh Phó phải viết vần ÀO mới hay
Xuân về phải có mưa bay
Anh Phó phải viết vần AY mới tài
Chúc em năm mới rộng dài
Bình an, may mắn, mọi ngày đều vui!

ANH PHÓ GỠ

PHIẾU ĐĂNG KÍ THAM DỰ CUỘC THI GTQT NĂM HỌC 2017-2018

CÁC LỚP 6 & 7

Bài 1(180+181). Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (a; b) thỏa mãn

$(3^a - 1)(3^a - 2)(3^a - 3)(3^a - 4)(3^a - 5)(3^a - 6) = 2016^b + 20159.$

NGUYỄN NGỌC HÙNG

(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)

Bài 2(180+181). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 75^o$, $\widehat{B} = 45^o$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = 30^o$. Chứng minh rằng $AD = \sqrt{3}DC$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

(3/29E, Đà Nẵng, Hải Phòng)

CÁC LỚP THCS

Bài 3(180+181). Cho phương trình: $2x^4 - 4x^3 + (4 - a)x^2 + (a - 2)x + a - a^2 = 0$. Chứng minh rằng phương trình đã cho có đúng một nghiệm âm khi $a > 1$.

BÙI HẢI QUANG

(GV. THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài 4(180+181). Cho tam giác ABC vuông tại A có độ dài cạnh huyền là a và độ dài đường cao xuất phát từ A là h. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 30\frac{a}{h} + 4\frac{h}{a} + 1975$.

CAO MINH QUANG *(GV. THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)*

PHIẾU ĐĂNG KÍ THAM DỰ CUỘC THI GTQT NĂM HỌC 2017-2018

Bài 5(180+181). Cho A là một tập hợp con của tập {1, 2, 3, ... , 31} mà có không ít hơn 19 phần tử. Chứng minh rằng A hoặc chứa một lũy thừa của 2 hoặc chứa hai số mà tổng của chúng là một lũy thừa của 2.

VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

Bài 6(180+181). Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M (khác B, C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM cắt cạnh AB tại D, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM cắt cạnh AC tại E. Gọi N là giao điểm của BE và CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác NBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác NDE cắt nhau tại N và K. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tổng KB + KC + KM đạt giá trị nhỏ nhất.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

SOLVE VIA MAIL COMPETITION QUESTIONS

Translated by Trang Duong Thu

1(180+181). Find all pairs of whole numbers (*a*; *b*) such that $(3^a - 1)(3^a - 2)(3^a - 3)(3^a - 4)(3^a - 5)(3^a - 6) = 2016^b + 20159$.

2(180+181). Given a triangle *ABC* with $\angle A = 75^o$, $\angle B = 45^o$. *D* is on *AC* such that $\angle ABD = 30^o$. Prove that $AD = \sqrt{3}DC$.

3(180+181). Given the following equation:

$$2x^4 - 4x^3 + (4 - a)x^2 + (a - 2)x + a - a^2 = 0.$$

Prove that the equation has only one negative root when $a > 1$.

4(180+181). Given a right triangle *ABC* with $\angle A = 90^o$. Its hypotenuse's length is *a* and its height from *A* is *h*. Find the minimum value of

$$Q = 30\frac{a}{h} + 4\frac{h}{a} + 1975.$$

5(180+181). *A* is a subset less than 19 elements of {1, 2, 3, ... , 31}. Prove that *A* has one exponent of 2 or has two numbers whose sum is exponent of 2.

6(180+181). Given a triangle *ABC* with *M* is on *BC* (*M* is not *B* or *C*). The circumscribe circle of triangle *ACM* intersects *AB* at *D*, the circumscribe circle of triangle *ABM* intersect *AC* at *E*. *N* is the intersection point of *BE* and *CD*. The circumscribe circle of triangle *NBC* intersects the circumscribe circle of triangle *NDE* at *N* and *K*. Find the position of *M* on *BC* such that the sum *KB* + *KC* + *KM* get the minimum value.

CÓ DUYÊN VỚI HOA ĐÀO

Nếu giở lại báo *Thiếu Niên Tiền Phong* và *Hoa Học trò* từ khoảng hai chục năm trước, rất có thể bạn sẽ bị hút hồn bởi nét vẽ minh hoạ hết sức hóm hỉnh của Hoạ sĩ Còm. Anh tên thật là Nguyễn Hữu Khoa, do người còm nhom nên lấy bút danh là Còm.

Sau một thời gian dài cộng tác với sách báo, tạp chí, đặc biệt là mảng chân dung hí hoạ, anh Còm bất chợt "kết duyên" với hoa đào. Từ một người chuyên về đồ hoạ, anh quay sang tự mày mò học hỏi để vẽ sơn dầu và hoa đào Tây Hồ - nơi anh sinh ra - đã trở thành chủ đề chính, chiếm trọn đam mê của người hoạ sĩ tài hoa này.

Hồi bé, do thường xuyên phải giúp bố mẹ trồng đào, chăm sóc đào nên anh đã từng "ghét" loài cây này. Thế mà gần chục năm nay, anh lại yêu vô cùng những cây đào quê hương. Đào Tây Hồ với dáng vẻ vững chãi, khoẻ khoắn, nụ hoa mập mạp, sắc hoa thắm hồng, lộc non xanh biếc đã được anh đưa vào hàng trăm bức tranh, trưng bày ở một số triển lãm lớn. Mỗi bông hoa đào, mỗi cây đào, với anh, đều có sắc thái riêng nhưng tất cả đều giống nhau ở một điểm, đó là chúng luôn khơi gợi trong anh tình yêu bất tận.

PHAN HƯƠNG

Dành cho giáo viên, phụ huynh và trẻ em từ 12 tuổi đến dưới 16 tuổi.
Giấy phép xuất bản: số 31/GP-BVHTT, cấp ngày 23/1/2003 của Bộ Văn hóa và Thông tin.
Mã số: 8BTT180M18. **In tại:** Công ty cổ phần in Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn, Đống Đa, Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2018.