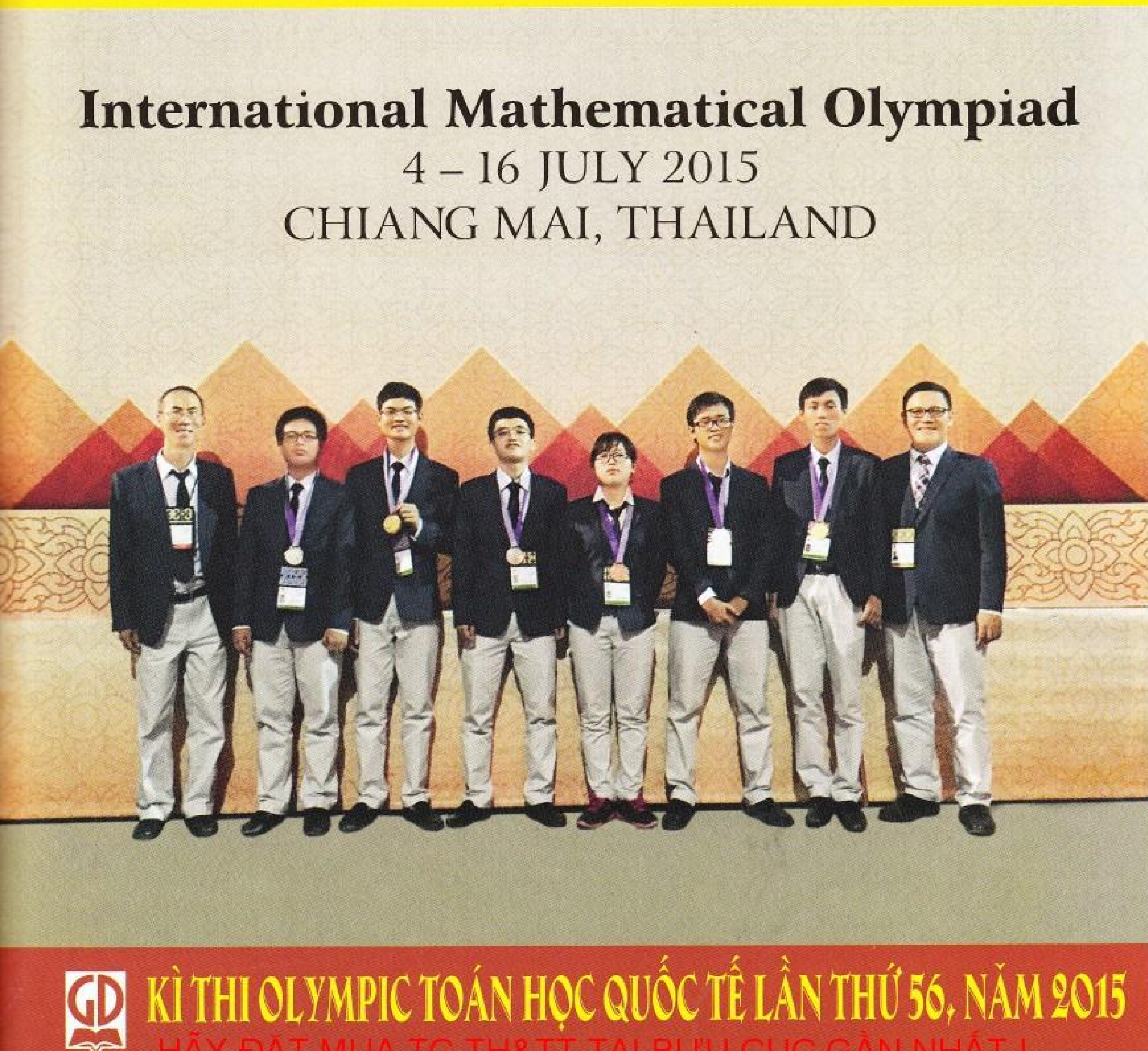
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2015 Số 458

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 56, NĂM 2015

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

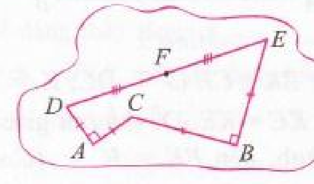
KHAI THÁC BÀI TOÁN ĐI TÌM KHO BÁU

NGƯT. NGUYỄN PHƯỚC
(*Hiệu trưởng THCS Chu Văn An, Thừa Thiên Huế*)

Trên website http://www.jstor.org và http://www.nctm.org, Ông *Thomas W Shilgalis* (toms@math.ilstu.edu), Bà *Atasa Shriki* (shriki@technion.ac.il), Ông *Daniel Scher* (dscher@mac.com) đã được Nationals Council of Teacher of Mathematics công bố các bài viết của mình có liên quan đến *Bài toán đi tìm kho báu*, các bài viết đã giải quyết được bài toán gốc và đã đưa ra nhiều cách giải. Trong hội thi khoa học thuật do Phòng GD – ĐT TP Huế và Sở GD – ĐT Thừa Thiên Huế trong năm học 2013-2014 có đề tài "*Đi tìm kho báu bằng Hình học và phần mềm GSP*" của hai học sinh lớp 9 Trường THCS Phạm Văn Đồng, TP Huế là *Nguyễn Viết Quang Khang* và *Trần Minh Hoàng* do cô giáo *Trương Thị Bích Phương* hướng dẫn, đã khai thác mở rộng hơn bài toán trên. Sau đây tác giả bài viết xin đưa ra bài toán gốc và một mở rộng hơn nữa của bài toán này.

***Bài toán đi tìm kho báu**: Một nhóm cướp biển chôn báu vật của họ tại một kho ở trên một hòn đảo và vẽ lại tấm bản đồ như hình 1 dưới đây: Trên đảo có một cây Cọ C và dọc bờ biển có hai tảng đá A và B. Từ cây Cọ C, một tên cướp biển bước đến tảng đá A, quay phải 90° rồi đi thẳng đến vị trí D sao cho AD = AC. Một tên cướp biển khác cũng từ cây Cọ C bước đến tảng đá B, quay trái 90° rồi đi thẳng đến vị trí E sao cho BE = BC. Nhóm cướp biển chôn báu vật tại trung điểm F của DE.*

Nhiều năm sau, một nhóm nhà thám hiểm có được tấm bản đồ kho báu và đã cùng nhau tìm đến hòn đảo nhưng chỉ thấy hai tảng đá nhưng không thấy vị trí cây cọ. Hỏi các nhà thám hiểm đã tìm kho báu bằng cách nào?

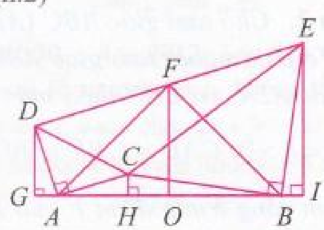


Hình 1

Bài toán đi tìm kho báu là một bài toán nổi tiếng được rất nhiều người đam mê toán quan tâm, nó được diễn đạt bằng ngôn ngữ toán học như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC (AB cố định, C tùy ý). Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai tam giác vuông cân ADC và BEC ($\widehat{CAD}=\widehat{CBE}=90^\circ$). Chứng minh rằng trung điểm F của DE không phụ thuộc vào vị trí điểm C.*

Lời giải. (h.2)



Hình 2

Cách 1.1. Kẻ $DG\perp AB$; $CH\perp AB$; $EI\perp AB$ ($G, H, I\in AB$). Ta có $\widehat{ACH}=\widehat{DAG}$ (cùng phụ với góc *CAH*); *AD* = *AC* (giả thiết), suy ra $\Delta GDA=\Delta HAC \Rightarrow GD = AH$ và $AG = HC$. Tương tự có $EI = BH$ và $BI = HC$, nên

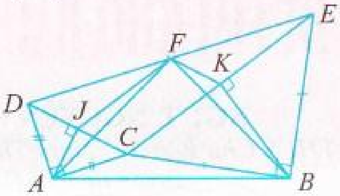
$$AB = GD + EI \text{ và } AG = HC = BI.$$

Gọi *O* là trung điểm của *AB* ta có: $OA + AG = OB + BI \Rightarrow OG = OI$. Lúc đó *OF* là đường trung bình của hình thang *GIED*, nên

$$OF=\frac{GD+EI}{2}=\frac{AB}{2}=OA=OB.$$

Suy ra tam giác *AFB* vuông tại *F*. Lại có *OF* là đường trung trực của đoạn AB, vì thế tam giác AFB vuông cân tại F, suy ra F là điểm cố định. Ta có điều cần chứng minh.

***Cách* 1.2.** (h.3)



Hình 3

Kẻ $AJ \perp DC$; $BK \perp CE$ ($J \in DC$; $K \in CE$), khi đó $JD = JC$; $KC = KE$. Dễ thấy tứ giác $CJFK$ là hình bình hành, nên $FK = JC = AC.\sin 45^\circ$ và $KB = BC.\sin 45^\circ \Rightarrow \dfrac{FK}{KB} = \dfrac{AC}{BC}$.

Lại có $\widehat{FKB} = \widehat{FKC} + 90^\circ = 270^\circ - \widehat{JCK}$
$= 270^\circ - (360^\circ - \widehat{DCA} - \widehat{ECB} - \widehat{ACB}) \Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{ACB}$
$\Rightarrow \Delta FKB \backsim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KBF} = \widehat{CBA}$. Vậy
$\widehat{FBA} = \widehat{ABC} \pm \widehat{FBC} = \widehat{KBF} \pm \widehat{FBC} = \widehat{KBC} = 45^\circ$.

Tương tự: $\widehat{FAB} = 45^\circ$, do đó trung điểm F của DE là điểm cố định.

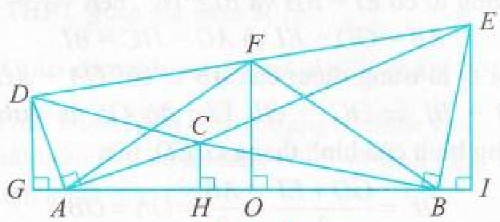
Hai em *Khang* và *Hoàng* đã giải quyết được ***bài toán mở sau***:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC (AB cố định, C tùy ý). Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai tam giác ADC và BEC thỏa mãn điều kiện* $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BE}{BC} = k > 0$; $\widehat{CAD} = \widehat{CBE} = 90^\circ$.

Chứng minh rằng trung điểm F của DE không phụ thuộc vào vị trí điểm C.

***Cách* 2.1.** (h.4) Kẻ $DG \perp AB$; $CH \perp AB$; $EI \perp AB$ ($G, H, I \in AB$). Từ $\widehat{ACH} = \widehat{GAD}$ (cùng phụ với góc CAB) $\Rightarrow \Delta GDA \backsim \Delta HAC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{GD}{AH} = \dfrac{AG}{CH} = \dfrac{AD}{AC} = k$.



Hình 4

Tương tự: $\dfrac{EI}{BH} = \dfrac{BI}{CH} = \dfrac{BE}{BC} = k \Rightarrow \dfrac{AG}{CH} = \dfrac{BI}{CH}$
$\Rightarrow AG = BI$; $GD + EI = k(AH + BH) = k.AB$.

Gọi O là trung điểm của AB ta có:

$$OA + AG = OB + BI \Rightarrow OG = OI.$$

Lúc đó OF là đường trung bình hình thang vuông $GIED$, nên: $OF = \dfrac{GD+EI}{2} = \dfrac{k.AB}{2}$; $EI \perp AB$ và $OF \,//\, EI \Rightarrow OF \perp AB$. Vì thế OF là đường trung trực của AB, suy ra tam giác AFB cân tại F. Mặt khác $OF = \dfrac{k.AB}{2}$ (chứng minh trên), do đó trung điểm F của DE là điểm cố định.

***Cách* 2.2.** Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ $O(0; 0)$ là trung điểm của AB.

Gọi tọa độ của C là $C(a; b)$ và giả thiết $a < 0$, $b > 0$. Giả sử $AB = 2c > 0$ và $A(-c; 0)$ và $B(c; 0)$. Kẻ $DG \perp AB$; $CH \perp AB$; $EI \perp AB$ ($G, H, I \in AB$). Ta có

$\widehat{ACH} = \widehat{DAG} \Rightarrow \Delta GDA \backsim \Delta HAC \Rightarrow GD = k.AH$ và $AG = k.HC$.

Tương tự $EI = k.BH$ và $BI = k.HC$. Lúc đó

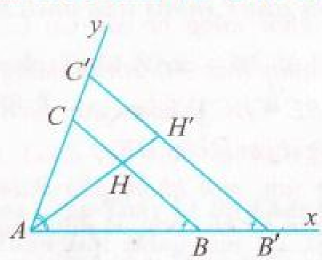
$$D(-c - kb; k(c+a)); E(c + kb; k(c-a)).$$

Do F là trung điểm của DE nên tọa độ của F là $F(0; kc)$, suy ra F là điểm cố định.

Tiếp tục mở rộng giả thiết $\widehat{CAD} = \widehat{CBE} = 90^\circ$ thành giả thiết hai góc $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBE}$ đều không đổi và có tổng bằng 180°, chúng ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Cho* $\widehat{xAy} = \alpha$, *không đổi. Trên hai tia Ax và Ay lần lượt lấy hai điểm B và C sao cho* $\dfrac{AC}{AB} = k$. *Trên BC lấy điểm H sao cho* $\dfrac{HC}{HB} = k'$.

Chứng minh số đo $\widehat{BAH}$ *và* $\widehat{CAH}$ *không đổi.*



Hình 5

Chứng minh. Trên tia Ax, Ay lần lượt lấy điểm B' và C' bất kỳ sao cho: $\dfrac{AC'}{AB'} = k; B \neq B'$ (h.5).

Trên đoạn thẳng $B'C'$ lấy điểm H' sao cho $\dfrac{H'C'}{H'B'} = k'$. Ta phải chứng minh: $\widehat{BAH} = \widehat{B'AH'}$

Theo giả thiết và cách dựng: $\dfrac{HC}{HB} = \dfrac{H'C'}{H'B'} = k'$

$\Rightarrow \dfrac{HB}{H'B'} = \dfrac{HC}{H'C'} = \dfrac{HB+HC}{H'B'+H'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$. Từ

$\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ ($\Delta ABC \backsim \Delta AB'C'$) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{HB}{H'B'}$ (1)

Ta lại có: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC'}{AB'} = k \Rightarrow BC // B'C'$, suy ra

$\Delta ABC \backsim \Delta AB'C' \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AB'C'}$ (2)

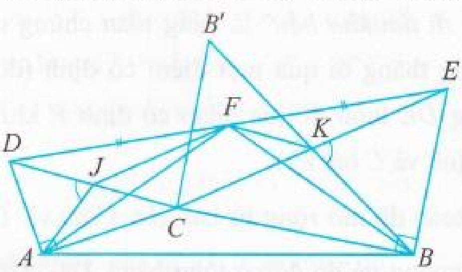
Từ (1) và (2) ta có: $\Delta ABH \backsim \Delta AB'H'$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{B'AH'}$. Do đó góc BAH không đổi. Tương tự góc CAH không đổi (đpcm).

Áp dụng bổ đề 1 chúng ta có cách giải thứ ba cho bài toán 2 và cũng là cơ sở để giải quyết bài toán 3.

Cách 2.3. (bài toán 2) (h.6)

Gọi J và K lần lượt là trung điểm của DC và EC. Khi đó $FK // DC \Rightarrow \widehat{FKC} + \widehat{JCK} = 180^\circ$.



Hình 6

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua K. Ta chứng minh được: $\Delta DAC \backsim \Delta B'CB \Rightarrow \Delta JCA \backsim \Delta KBC$.

Suy ra: $\dfrac{KB}{JC} = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{KB}{KF}$. Thêm vào đó:

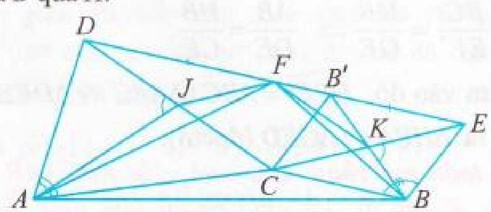
$\widehat{FKB} = \widehat{FKC} + \widehat{CKB} = 180^\circ - \widehat{JCK} + \widehat{AJC}$
$= 180^\circ - (360^\circ - \widehat{JCA} - \widehat{KCB} - \widehat{ACB}) + \widehat{AJC}$
$= \widehat{ACB} - 180^\circ + \widehat{JCA} + \widehat{JAC} + \widehat{AJC} = \widehat{ACB}$.

Vì thế: $\Delta FKB \backsim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{KBF} = \widehat{CBA}$, nên $\widehat{FBA} = \widehat{ABC} \pm \widehat{FBC} = \widehat{KBF} \pm \widehat{FBC} = \widehat{KBC}$.

Lại có góc KBC không đổi (theo bổ đề 1: $\dfrac{BE}{BC} = k; \widehat{CBE} = 90^\circ; \dfrac{KC}{KE} = 1$), vì vậy số đo góc FBA không đổi. Tương tự số đo góc FAB không đổi. Theo giả thiết A và B cố định, nên trung điểm F của DE cố định, không phụ thuộc vào vị trí điểm C.

✪Bài toán 3. *Cho tam giác ABC (AB cố định, C tùy ý). Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng hai tam giác ADC và BEC thỏa mãn điều kiện* $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BE}{BC} = k > 0$; *hai góc* $\widehat{CAD}$ *và* $\widehat{CBE}$ *đều không đổi và có tổng bằng* 180°. *Chứng minh rằng trung điểm F của DE không phụ thuộc vào vị trí điểm C.*

Lời giải. (h.7) Gọi J và K lần lượt là trung điểm của DC và EC. Khi đó $FK // DC \Rightarrow \widehat{FKC} + \widehat{JCK} = 180^\circ$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua K.



Hình 7

Từ $\Delta DAC \backsim \Delta B'CB$ (c.g.c) $\Rightarrow \Delta JCA \backsim \Delta KBC$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{JC} = \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{KB}{KF}$. Mặt khác

$\widehat{FKB} = \widehat{FKC} + \widehat{CKB} = 180^\circ - \widehat{JCK} + \widehat{AJC}$
$= 180^\circ - (360^\circ - \widehat{JCA} - \widehat{KCB} - \widehat{ACB}) + \widehat{AJC}$
$= \widehat{ACB} - 180^\circ + \widehat{JCA} + \widehat{JAC} + \widehat{AJC} = \widehat{ACB}$.

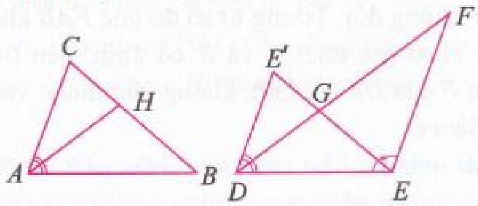
Vì thế: $\Delta FKB \backsim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KBF} = \widehat{CBA}$,

nên $\widehat{FBA} = \widehat{ABC} \pm \widehat{FBC} = \widehat{KBF} \pm \widehat{FBC} = \widehat{KBC}$.

Lại có góc KBC không đổi (theo bổ đề 1: $\dfrac{BE}{BC} = k; \widehat{CBE} = \alpha; \dfrac{KC}{KE} = 1$), vì vậy số đo góc FBA không đổi. Tương tự số đo góc FAB không đổi, nên F là điểm cố định.

Để chứng minh được bài toán mở rộng chúng ta cần tiếp bổ đề 2.

Bổ đề 2. *Cho hai tam giác ABC và DEF có* $\widehat{BAC}+\widehat{DEF}=180^\circ$ *và* $\frac{AC}{AB}=k; \frac{EF}{DE}=k'$. *Trên cạnh BC và DF theo thứ tự lấy điểm H và G sao cho* $\frac{DG}{GF}=\frac{CH}{HB}=\frac{k}{k'}$. *Chứng minh:* $\Delta HBA \backsim \Delta GED$.



Hình 8

Chứng minh. Trên tia đối của tia GE lấy điểm E' sao cho: $\frac{GE'}{GE}=\frac{k}{k'}=\frac{DG}{GF}$. Khi đó $EF \,//\, DE'$

$\Rightarrow \widehat{E'DE}=180^\circ-\widehat{DEF}=\widehat{BAC}$. Ta có:

$\widehat{E'DE}=\widehat{BAC}$; $\frac{AC}{AB}=\frac{DE'}{DE}=k$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEE'$(c.g.c)

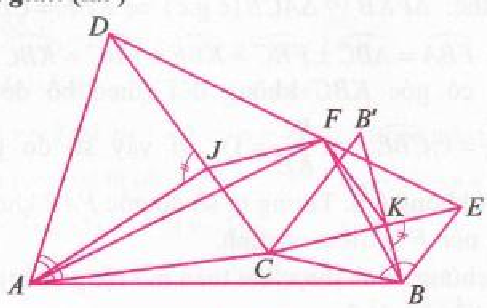
$\Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EE'}$. Mặt khác: $\frac{E'G}{GE}=\frac{CH}{HB}=\frac{k}{k'}$

$\Rightarrow \frac{BC}{EE'}=\frac{HB}{GE} \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{HB}{GE}$.

Thêm vào đó: $\widehat{DEE'}=\widehat{ABC}$ ($\Delta ABC \backsim \Delta DEE'$), suy ra $\Delta HBA \backsim \Delta GED$ (đpcm).

Bài toán mở rộng. *Cho tam giác ABC (AB cố định, C tùy ý). Vẽ phía ngoài tam giác ABC dựng hai tam giác ADC và BEC thỏa điều kiện: hai góc* $\widehat{CAD}$ *và* $\widehat{CBE}$ *đều không đổi và có tổng bằng* 180°, $\frac{AD}{AC}=k; \frac{BE}{BC}=k'$. *Trên đoạn DE lấy điểm F sao cho* $\frac{DF}{FE}=\frac{k}{k'}$. *Chứng minh điểm F không phụ thuộc vào vị trí điểm C.*

Lời giải. (h.9)



Hình 9

Lấy $J \in DC$ và $K \in EC$ sao cho

$\frac{DJ}{JC}=\frac{CK}{KE}=\frac{k}{k'}=\frac{DF}{FE}$, khi đó $FK \,//\, DC$

$\Rightarrow \widehat{FKC}+\widehat{JCK}=180^\circ$.

Lấy B' ở trên tia đối tia KB sao cho $\frac{KB'}{KB}=\frac{k}{k'}=\frac{CK}{KE}$. Thì $B'C \,//\, BE$

$\Rightarrow \widehat{B'CB}=180^\circ-\widehat{CBE}$

$=\alpha=\widehat{CAD}$. Và: $\frac{B'C}{BC}=\frac{B'C}{BE}.\frac{BE}{BC}=\frac{k}{k'}.k'=k=\frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow \Delta DAC \backsim \Delta B'CB \Rightarrow \Delta JCA \backsim \Delta KBC$ (Bổ đề 2).

Suy ra: $\frac{CB}{CA}=\frac{KB}{JC}=\frac{KB}{KF}$ (FKCJ là hình bình hành).

$$\widehat{FKB}=\widehat{FKC}+\widehat{CKB}=180^\circ-\widehat{JCK}+\widehat{AJC}$$
$$=180^\circ-(360^\circ-\widehat{JCA}-\widehat{KCB}-\widehat{ACB})+\widehat{AJC}$$
$$=\widehat{ACB}-180^\circ+\widehat{JCA}+\widehat{JAC}+\widehat{AJC}=\widehat{ACB}.$$

Vì thế: $\Delta FKB \backsim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KBF}=\widehat{CBA}$,

nên: $\widehat{FBA}=\widehat{ABC}\pm\widehat{FBC}=\widehat{KBF}\pm\widehat{FBC}=\widehat{KBC}$.

Do đó số đo góc FBA không đổi, (Bổ đề 1). Tương tự số đo góc FAB không đổi. Theo giả thiết A và B cố định. Do đó trung điểm F của DE cố định.

Như vậy bài toán mở rộng của "*Bài toán đi tìm kho báu*" đã được giải quyết. Thực chất "*Bài toán đi tìm kho báu*" là dạng toán chứng minh đường thẳng đi qua một điểm cố định (đường thẳng DE luôn đi qua điểm cố định F khi A,B cố định và C bất kỳ).

Bài toán đã mở rộng từ hai góc $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBE}$ đều vuông và do đó có tổng bằng 180° đến hai góc $\widehat{CAD}$ và $\widehat{CBE}$ chỉ cần không đổi và có tổng bằng 180°, nhưng liệu *tổng hai góc CAD và CBE khác* 180° *thì cần thêm điều kiện gì để bài toán trên vẫn còn đúng,...* Xin mời các bạn cùng góp sức để làm phong phú thêm kho tàng toán học sơ cấp phục vụ cho việc nghiên cứu và dạy học môn Toán.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN Trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội NĂM HỌC 2015 - 2016

(Đề thi đăng trên TH&TT số 457, tháng 7 năm 2015)

VÒNG I

Câu I. 1) a) Ta có

$(a^2-b^2)+3(a-b)=0 \Rightarrow a+b=-3$ (do $a\neq b$).

b) Ta có $(a^2+b^2)+3(a+b)=4 \Rightarrow a^2+b^2=13$

$\Rightarrow (a+b)^2-2ab=13 \Rightarrow ab=-2$

$\Rightarrow a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=-45.$

Lưu ý. Học sinh có thể giải bằng định lý Viète.

2) Từ HPT đã cho suy ra $\begin{cases}2xy+3y^2=5xy^2\\4x^2+y^2=5xy^2\end{cases}$

$\Rightarrow 4x^2-2y^2-2xy=0 \Rightarrow (x-y)(y+2x)=0$

$\Rightarrow y=x;\ y=-2x$. Từ đó tìm được các nghiệm của hệ là: $(0;0);\ (1;1);\ \left(\frac{2}{5};-\frac{4}{5}\right)$.

Câu II. 1) Đặt $a=\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$

$=\frac{(x-1)(y-1)+x+y-2}{(x-1)(y-1)}=1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}.$

Ta có: $x\geq 2; y\geq 2 \Rightarrow 0<\frac{1}{x-1}\leq 1$ và $0<\frac{1}{y-1}\leq 1$

$\Rightarrow \begin{cases}1<a\leq 3\\a\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=2\\a=3\end{array}\right.$.

• Với $a=2$ ta có $1=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)-(x-1)-(y-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=1 \Rightarrow \begin{cases}x-2=1\\y-2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$.

• Tương tự với $a=3$ ta tìm được: $x=2$ và $y=2$.

2) Vì $x^2y^2+2y+1=0 \Rightarrow y\neq 0$

$\Rightarrow x^2+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}=0 \Rightarrow x^2+\left(\frac{1}{y}+1\right)^2=1.$

Đặt $u=\frac{1}{y}+1$, ta được $x^2+u^2=1$.

Ta có: $P=\frac{x}{3+\frac{1}{y}}=\frac{x}{u+2} \Leftrightarrow 2P=x-Pu$

$\Rightarrow 4P^2=(x-Pu)^2\leq (1+P^2)(x^2+u^2)=1+P^2$

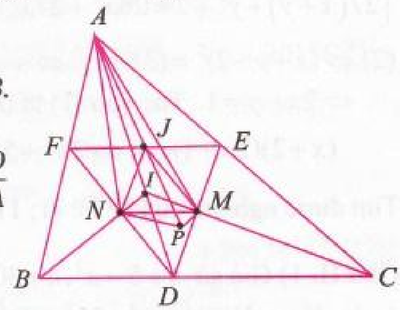
$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}\leq P\leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$

• Với $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{2}{3}$ thì $P=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

• Với $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{2}{3}$ thì $P=\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\max P=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\min P=\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Câu III.



1) Dễ thấy $E\in CA, F\in AB$.

Do đó $\frac{BF}{BA}=\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CA}$, vậy $EF // BC$.

2) Ta có $\widehat{MPN}=\widehat{MPA}+\widehat{NPA}=\widehat{MEC}+\widehat{NFB}$

$=\widehat{MDC}+\widehat{NDB}=180^\circ-\widehat{MDN}=180^\circ-\widehat{MJN}.$

Suy ra tứ giác $MPNJ$ nội tiếp.

3) Tứ giác $MPNJ$ nội tiếp nên $\widehat{MPJ}=\widehat{MNJ}$

$=\widehat{MEJ}=\widehat{EDC}=\widehat{DEC}=\widehat{MPA} \Rightarrow A, J, P$ thẳng hàng.

Câu IV. 1) Theo quy tắc trên, số ở hàng 1 cột j bằng $1+2+3+\cdots+j=\frac{j(j+1)}{2}$.

Ta có $\frac{63.64}{2}=2016$. Vậy số 2016 ở hàng 1 cột 63 suy ra số 2015 ở hàng 2 cột 62 $\Rightarrow m=2, n=62$.

2) Ta có $ab+bc+ca+abc\leq 4$

$\Leftrightarrow 12+(ab+bc+ca)+4(a+b+c)$

$\geq 8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc$

$\Leftrightarrow (2+a)(2+b)+(2+b)(2+c)+(2+c)(2+a)$

$\geq (2+a)(2+b)(2+c)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\geq 1 \quad (*).$

Ta có: $\frac{1}{2+a}=\frac{a+b^2+c^2}{(a+1+1)(a+b^2+c^2)}\leq \frac{a+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$,

tương tự: $\frac{1}{2+b}\leq \frac{b+a^2+c^2}{(a+b+c)^2}$, $\frac{1}{2+c}\leq \frac{c+a^2+b^2}{(a+b+c)^2}$.

Cộng 3 bất đẳng thức và sử dụng (*) suy ra

$2(a^2+b^2+c^2)+a+b+c\geq (a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+a+b+c\geq 2(ab+bc+ca).$

VÒNG II

Câu I. 1) Đặt $x=3a+b-c, y=3b+c-a,$ $z=3c+a-b$ ta được $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=24$

$\Leftrightarrow 3(x+y)(y+z)(z+x)=24$

$\Leftrightarrow 24(a+2b)(b+2c)(c+2a)=24$

$\Leftrightarrow (a+2b)(b+2c)(c+2a)=1.$

2) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x+2)(y+2)=9 & (1)\\ 27(x+y)+y^3+7=26x^3+27x^2+9x & (2)\end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow (x+y+2)^3=(3x+1)^3 \Leftrightarrow x+y+2=3x+1$

$\Leftrightarrow 2x-y=1.$ Thế vào (1) ta thu được

$(x+2)(2x+1)=9 \Leftrightarrow 2x^2+5x-7=0.$

Tìm được nghiệm của hệ là: (1; 1) và $\left(-\frac{7}{2};-8\right).$

Câu II. 1) Giả sử $n+5=a^2, n+30=b^2$ $(a,b\in\mathbb{N}, a<b) \Rightarrow b^2-a^2=25 \Leftrightarrow (b+a)(b-a)=25$

$\Rightarrow 0<b-a<b+a.$ Do đó

$$\begin{cases}b+a=25\\ b-a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=12\\ b=13\end{cases} \Rightarrow n=139 \text{ (thỏa mãn).}$$

2) ĐK: $x\ge 0,\ y\ge 0.$ Từ giả thiết ta có

$x+y+4+2\sqrt{x+y+3}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3}=\sqrt{xy}-2$

$\Rightarrow x+y+3=xy+4-4\sqrt{xy}.$

Do đó $\sqrt{xy}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{xy}=\frac{p}{q}$ với $p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}^*$ và $(p,q)=1.$ Suy ra $p^2=q^2xy \Rightarrow q=1.$

$\Rightarrow \sqrt{xy}=p \Rightarrow \sqrt{x+y-3}=p-2.$

Thay vào phương trình đầu ta được

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=p-1 \Rightarrow \sqrt{x}=(p-1)-\sqrt{y}$

$\Rightarrow x=(p-1)^2+y-2(p-1)\sqrt{y}$

$\Rightarrow \sqrt{y}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{y}=u\in\mathbb{N}.$

Tương tự ta có $\sqrt{x}=v\in\mathbb{N} \Rightarrow x+y=u^2+v^2.$

Thay vào phương trình đầu ta nhận được

$\sqrt{u^2+v^2+3}=u+v-1$

$\Rightarrow u^2+v^2+3=u^2+v^2+1+2uv-2u-2v$

$\Rightarrow uv-u-v-1=0$

$$\Leftrightarrow (u-1)(v-1)=2 \Rightarrow \begin{cases}u-1=1\\ v-1=2\end{cases} \vee \begin{cases}u-1=2\\ v-1=1.\end{cases}$$

Tìm được: $(x=9, y=4), (x=4, y=9).$

3) Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$2\sqrt{y+z-4}=\sqrt{4(y+z-4)}\le\frac{y+z-4+4}{2}=\frac{y+z}{2}$$

$\Rightarrow \sqrt{y+z-4}\le\frac{y+z}{4}.$

Tương tự $\sqrt{z+x-4}\le\frac{z+x}{4}; \sqrt{x+y-4}\le\frac{x+y}{4}.$

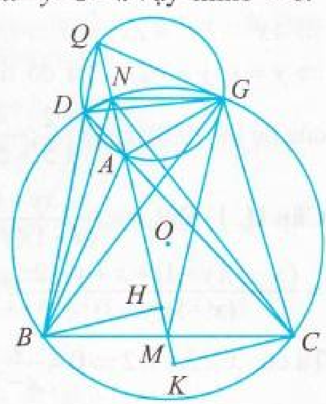
Do đó $P\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$

$$=4\left(\frac{x^2}{xy+xz}+\frac{y^2}{zy+xy}+\frac{z^2}{xz+yz}\right)\ge 4\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)}.$$

Mà $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+xz) \Rightarrow P\ge 4.\frac{3}{2}=6.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=4.$ Vậy $\min P=6.$

Câu III



1) Gọi K là hình chiếu của C lên AM. Ta thấy $BH=CK$ và $HM=MK$. Từ đó $AN=2HM=HK$ nên $HN=AK$. Vậy $\Delta BHN=\Delta CKA$ (c.g.c) suy ra $BN=AC$.

2) $\Delta BHN=\Delta CKA$

$\Rightarrow \widehat{BNH}=\widehat{CAK}$ hay $\widehat{BNQ}=\widehat{CAN}.$

Lại có $AN=QN$ và $BN=CA \Rightarrow \Delta BNQ=\Delta CAN$ (c.g.c), suy ra $\widehat{QBN}=\widehat{NCA}$ hay $\widehat{DBN}=\widehat{NCD}$ vậy tứ giác $BDNC$ nội tiếp.

3) $\widehat{GQA}=\widehat{GDA}=\widehat{GBC}$ và $\widehat{GAQ}=\widehat{GDQ}=\widehat{GCB}$ $\Rightarrow \Delta GQA \backsim \Delta GBC$ và có trung tuyến tương ứng là GN và GM nên $\Delta GQN\backsim\Delta GBM$ và $\Delta GNA\backsim\Delta GMC$. Từ đó $\Delta GNM\backsim\Delta GAC$

$\Rightarrow \widehat{GNQ}=180^\circ-\widehat{GNA}=180^\circ-\widehat{GAC}=\widehat{GAD},$ kết hợp $\widehat{GQN}=\widehat{GDA}\Rightarrow \Delta GQN\backsim\Delta GDA.$ Từ đó $\frac{DA}{NA}=\frac{DA}{QN}$ $=\frac{DG}{QG},$ kết hợp $\widehat{DAN}=\widehat{DGQ}\Rightarrow \Delta DNA\backsim\Delta DQG$

$\Rightarrow \widehat{GNC}=\widehat{GDC}=\widehat{QDN}=\widehat{NCB}\Rightarrow NG//BC.$

Câu IV. Ta chứng minh bài toán đúng với tập S có n điểm $(n\ge 3)$. Trước hết ta chứng minh có tồn tại đường thẳng... *(Xem tiếp trang 26)*

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM HỌC 2015 - 2016

VÒNG I (*Thời gian làm bài 120 phút*)

Câu 1 (2,5 *điểm*). Cho biểu thức

$$P=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}$$, với $a>0, b>0, a\neq b$.

1) Chứng minh $P=\frac{1}{ab}$.

2) Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a+b+\sqrt{ab}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2 (2 *điểm*). Cho hệ phương trình

$\begin{cases}x-my=2-4m\\ mx+y=3m+1\end{cases}$ với m là tham số.

1) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

2) Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m. Giả sử $(x_0\,;\,y_0)$ là một nghiệm của hệ. Chứng minh đẳng thức

$$x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0.$$

Câu 3 (1,5 *điểm*). Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh $|a|=|b|$.

Câu 4 (3 *điểm*). Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ nhọn và $\widehat{BAC}=60°$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I.

1) Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.

2) Gọi K là giao điểm thứ hai (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp ΔBC_1I. Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

3) Chứng minh $AK\perp B_1C_1$.

Câu 5 (1 *điểm*). Tìm các số thực không âm a và b thoả mãn

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)=\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

VÒNG II (*Thời gian làm bài 150 phút*)

Câu 1 (2,5 *điểm*).

1) Cho $a\geq 0$, $a\neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S=\sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}:\left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)}-1\right].$$

2) Cho x, y thoả mãn: $0<x<1$, $0<y<1$ và $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}=1$. Tính giá trị biểu thức

$$P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}.$$

Câu 2 (2 *điểm*). Một xe tải có chiều rộng là 2,4m và chiều cao là 2,5m muốn đi qua một cái cổng hình Parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh Parabol) tới mỗi chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dày của cổng).

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi Parabol (P): $y=ax^2$ với $a<0$ là hình biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Chứng minh $a=-1$.

2) Hỏi xe tải có thể đi qua cổng được không? Tại sao?

Câu 3 (1,5 *điểm*). Cho hai số nguyên a, b thoả mãn $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh rằng a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Câu 4 (3 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$), M là trung điểm của cạnh BC, O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Các tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với các đường thẳng BS, AO. Chứng minh rằng

1) $MX\perp BF$.

2) Hai tam giác SMX và DHF đồng dạng.

3) $\frac{EF}{FY}=\frac{BC}{CD}$.

Câu 5 (1 *điểm*). Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có các đỉnh là các điểm nguyên (một điểm được gọi là điểm nguyên nếu hoành độ và tung độ của điểm đó là các số nguyên). Chứng minh rằng hai lần diện tích của tam giác ABC là một số nguyên.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) giới thiệu.

BÌNH LUẬN ĐỀ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2015

HOÀNG GIA HỨNG
(GV THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà, Thái Bình)

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và: $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\in(1;3)$

$f(1)=5; f(2)=4; f(3)=\dfrac{13}{3}$. Vậy:

$\min\limits_{[1;3]} f(x)=4$ khi $x=2$; $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$ khi $x=1$

Lời bình. *Các bước bài toán tìm GTLN, GTNN của $f(x)$ trên $[a;b]$:*

Bước 1. Khẳng định $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, tính $f'(x)$. Tìm các giá trị $x_i\in(a;b)$ sao cho $f'(x_i)=0$.

Bước 2. Tính $f(a); f(b); f(x_i)$ và so sánh các giá trị để đưa ra kết luận bài toán.

Bài tập tương tự

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$.

Câu 3 Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z-1+5i=0$. Tìm phần thực và phần ảo của z.

Lời giải. $(1-i)z-1+5i=0 \Leftrightarrow (1-i)z=1-5i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1-5i}{1-i}=\dfrac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1-4i-5i^2}{2}=3-2i.$

Vậy phần thực của z là 3; phần ảo của z là -2.

Lời bình: Câu trên có thể làm theo cách: giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thiết lập hệ phương trình chứa a, b, giải hệ tìm được a, b suy ra số phức z.

Bài tập tương tự

Bài 1. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(2+i)z+\dfrac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $w=1+z+i$.

Bài 2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Tìm mô đun của số phức $w=\dfrac{\bar{z}-2z+1}{z^2}$.

Câu 4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1(x-3)e^x\,dx$.

Lời giải. Đặt $u=x-3 \Rightarrow du=dx$.
Đặt $dv=e^x dx$, chọn $v=e^x$. Ta có

$I=(x-3)e^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx=-2e+3-e^x\Big|_0^1=4-3e.$

Lời bình. Để tính tích phân dạng: $I=\int\limits_a^b f(x).e^{mx+n}dx$ ta thực hiện theo phương pháp tích phân từng phần bằng cách đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=e^{mx+n}dx\end{cases}$.

Bài tập tương tự. Tính các tích phân sau:

1) $I=\int\limits_0^1 x(x+e^{2x+1})dx.$

2) $I=\int\limits_1^2\dfrac{x^3e^{2x}+1}{x^2}dx.$

Câu 5. Trong không gian với hệ trục Oxyz, cho các điểm A(1; –2; 1), B(2; 1; 3) và mặt phẳng (P) $x-y+2z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng AB và tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

Lời giải. Đường thẳng AB đi qua A (1; –2; 1) và nhận $\overrightarrow{AB}=(1; 3; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có PT: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{2}$.

Tọa độ giao điểm M của AB và (P) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{2}\\ x-y+2z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow M(0;-5;-1).$$

Bài tập tương tự

Bài 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\ 1;\ -1)$; $B(1;\ 2;\ 3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Bài 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC có $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 1)$ và trọng tâm $G(0;\ 2;\ -1)$. Viết phương trình đường thẳng BC và tìm giao điểm của BC và (OAG).

Câu 6. *Trong đợt phòng chống dịch MERS – CoV. Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm Y tế dự phòng TP Hồ Chí Minh và 20 đội của Trung tâm Y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất 2 đội của các Trung tâm Y tế cơ sở được chọn.*

Lời giải. Số phần tử của không gian mẫu là:

$$n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300.$$

Gọi A là biến cố "có ít nhất 2 đội của các trung tâm Y tế cơ sở".

Số phần tử của A là: $n(A) = C_{20}^2 C_5^1 + C_{20}^3 = 2090.$

Xác suất cần tìm là : $P = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{209}{230}.$

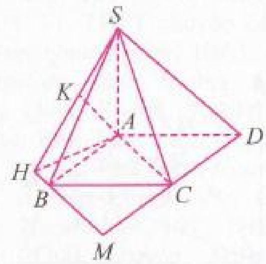
Bài tập tương tự

Bài 1. Vòng chung kết World cup 2014 có 32 đội tuyển tham dự trong đó có 4 đội tuyển Châu Á, 13 đội tuyển Châu Âu, 10 đội tuyển Châu Mỹ và 5 đội tuyển Châu Phi. Trong lễ bốc thăm chia bảng sẽ chọn ngẫu nhiên 4 đội bóng vào bảng " tử thần". Tính xác suất để trong 4 đội bóng rơi vào bảng " tử thần" có một đội bóng Châu Á và ít nhất 2 đội bóng Châu Âu.

Bài 2. Trong một môn học thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó lập ra các đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một đề, tính xác suất để trong đề kiểm tra đó nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Câu 7. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ACBD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ACBD) bằng 45°. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.*

Lời giải



• Do $SA \perp (ABCD)$ nên SC có hình chiếu vuông góc trên $(ABCD)$ là AC, do đó góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên tam giác SAC vuông cân tại A. Ta có:

$$AS = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

• Lấy điểm M sao cho $ABMC$ là hình bình hành. Vẽ AH vuông góc với BM tại H, AK vuông góc SH tại K. Khi đó AK vuông góc với mặt phẳng (SBM).

Ta có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{4}{2a^2} = \dfrac{5}{2a^2}.$

Vì $AC \,//\, (SBM)$, suy ra

$$d(AC, SB) = d(A; (SBM)) = AK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Lời bình. Ngoài cách trên có thể dùng phương pháp tọa độ để giải.

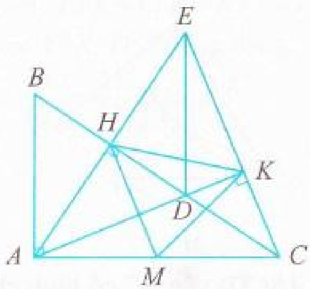
Bài tập tương tự

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc bằng 45° và $SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa SD và AC.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, góc $ADB = 30^\circ$; SC tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa SC và BD.

Câu 8. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu của vuông góc C trên đường thẳng AD. Giả sử H (–5; –5), K (9; –3) và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng có phương trình: x – y + 10 = 0. Tìm tọa độ điểm A.*

Lời giải



Cách 1. Gọi M là trung điểm của AC. Vì M thuộc d nên $M(t;\ 10+t)$.
Ta có tứ giác $AHKC$ nội tiếp đường tròn tâm M nên $MH = MK \Rightarrow M(0;\ 10)$. Gọi E là giao điểm của AH và CK thì D là trực tâm tam giác AEC, suy ra $AB \,//\, DE$. Do đó $\widehat{BAH}=\widehat{DAH}=\widehat{AED}=\widehat{HKD}$ nên tam giác HAK cân tại H. Giả sử $A(a;\ b)$, khi đó:

$$\begin{cases} HK = HA \\ MA = MH \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+5)^2+(b+5)^2=200 \\ a^2+(b-10)^2=250 \end{cases}$$

Tìm được $A(-15;\ 5)$.

Cách 2. Đường trung trực của HK có phương trình $y=-7x+10$ cắt đường thẳng (d): $x-y+10=0$ tại điểm $M(0;\ 10)$.
Vì ΔHAK cân tại H nên điểm A là điểm đối xứng của K qua đường thẳng MH: $y=3x+10$, vậy tọa độ điểm $A(-15;\ 5)$.

Lời bình. Mấu chốt của bài toán là việc chứng minh tam giác HAK cân tại K và để ý đến tính chất của tứ giác nội tiếp.

Câu 9. *Giải phương trình:*

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x+3}=(x+1)(\sqrt{x+2}-2) \text{ trên tập số thực.}$$

Lời giải. ĐK: $x \geq -2$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+4)}{x^2-2x+3}=(x+1)\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{x+4}{x^2-2x+3}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \quad (1) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow (x+4)(\sqrt{x+2}+2)=(x+1)(x^2-2x+3)$

$$\Leftrightarrow \left((\sqrt{x+2})^2+2\right)(\sqrt{x+2}+2) =\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right] \quad (2)$$

Xét $f(t)=(t+2)(t^2+2)=t^3+2t^2+2t+4$, với $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=3t^2+4t+2>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy (2) $\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-2x+1=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy $x=2$; $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ là nghiệm của PT.

Bài tập tương tự

Bài 1. Giải phương trình:

$$\frac{x^2+3x}{x^2+2}=(x+1)(\sqrt{x+1}-1).$$

Bài 2. Giải phương trình:

$$(\sqrt{4x^4-12x^3+9x^2+16}-2x^2+3x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})=8.$$

Câu 10. *Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1,3]$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc.$$

Lời giải

$$P=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc+72}{ab+bc+ca}-\frac{1}{2}abc.$$

Ta có: $(ab+bc+ca)^2$

$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+12abc.$$

Đặt $x=ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=12.$

Ta có $a, b, c\in[1;3]$, suy ra

$(a-1)(b-1)(c-1)\geq 0$

$\Rightarrow abc-(ab+bc+ac)+a+b+c-1\geq 0$

$\Rightarrow abc-x+5\geq 0 \Rightarrow abc\geq x-5.$

Lại có $(a-3)(b-3)(c-3)\leq 0$

$\Rightarrow abc-3(ab+bc+ac)+9(a+b+c)-27\leq 0$

$\Rightarrow abc\leq 3x-27.$

Vậy $3x-27\geq abc\geq x-5$

$3x-27\geq x-5 \Rightarrow 2x\geq 22 \Rightarrow x\geq 11$. Ta thấy

$$P=\frac{x^2+72}{x}-\frac{1}{2}abc\leq\frac{x^2+72}{x}-\frac{1}{2}(x-5)=\frac{x}{2}+\frac{72}{x}+\frac{5}{2}$$

($x\in[11;\ 12]$). Đặt $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{72}{x}+\dfrac{5}{2}$ thì

$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{72}{x^2}\leq 0$. Từ đó $P\leq\dfrac{11}{2}+\dfrac{72}{11}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{160}{11}$;

$P=\dfrac{160}{11}$ khi $a=1, b=2, c=3$. Vậy $\max P=\dfrac{160}{11}$.

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO BÀI TOÁN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ TÍNH TỔNG LIÊN QUAN ĐẾN C_n^k

TRẦN ĐÌNH NAM
(*GV THPT Yên Dũng Số 3, Yên Dũng, Bắc Giang*)

I. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG SỐ PHỨC

1. Kiến thức cơ bản

• Nếu cho số phức $z = x + iy$ thì:

– Số phức liên hợp là $\bar{z} = x - iy$.

– Bình phương của số phức z là:

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xy.i.$$

– Lập phương của số phức z là:

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3).i.$$

– Lũy thừa bậc bốn của số phức z là:

$$z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4(x^3y - xy^3)i.$$

– Nghịch đảo của số phức z là: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$.

Dẫn đến $\dfrac{i}{z} = \dfrac{y + xi}{x^2 + y^2}$.

– Ta có mô đun của số phức z là

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z.\bar{z}}.$$

• Cho hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$ và $z_2 = x_2 + y_2 i$.

Ta có: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

• Để giải HPT $\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ bằng phương pháp sử dụng số phức ta có thể nhân vào hai vế của một trong hai PT trong hệ với i rồi cộng (trừ) thích hợp để xuất hiện những số hạng $z, z^2, z^3, \dfrac{1}{z}, \dfrac{i}{z}, ...,$ từ đó tìm được nghiệm của hệ.

2. Một số thí dụ

Thí dụ 1. Giải HPT trên tập số thực:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + x + 1 = y^2 + 2xy - x^2 \quad (1) \\ y^3 - 3x^2y - y - 1 = x^2 + 2xy - y^2 \quad (2) \end{cases} \quad (\mathrm{I}).$$

Lời giải.

Nhân vào hai vế của PT (1) với đơn vị ảo i ta được PT: $i(x^3 - 3xy^2 + x + 1) = (y^2 + 2xy - x^2)i$ (3)

Từ PT (2) và PT (3), ta có

$$y^3 + 3(ix)^2y + 3(ix)y^2 + (ix)^3 - (y + ix) - (1 + i)$$
$$= x^2 + 2xy - y^2 - y^2 i - 2xyi + x^2 i.$$
$$\Leftrightarrow (y + ix)^3 - (y + ix) - (1 + i) = (x - yi)^2 + i(x - iy)^2$$

Đặt $z = x + iy,\ z \in \mathbb{C}$ thay vào PT trên ta được

$$(i\bar{z})^3 - i\bar{z} - (1 + i) = (1 + i)(\bar{z})^2$$
$$\Leftrightarrow (1 + (\bar{z})^2)(i\bar{z} + 1 + i) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = i,\ \bar{z} = -i,\ \bar{z} = -1 + i.$$

– Với $\bar{z} = i \Rightarrow x - iy = i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

– Với $\bar{z} = -i \Rightarrow x - iy = -i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

– Với $\bar{z} = -1 + i \Rightarrow x - iy = -1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy HPT có các nghiệm $(x; y) = (0; -1)$, $(x; y) = (0; 1)$ và $(x; y) = (-1; -1)$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi về tích để giải hệ (I) như sau

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)(x^2 - y^2 + 1) = 2xy(y + 1) \\ (y + 1)(y^2 - x^2 - 1) = 2xy(x + 1) \end{cases}$$

Bằng cách xét các trường hợp: $x = -1$; $y = -1$; $x = 0$; $y = 0$; $(x; y) \neq (0; 1)$, $(x; y) \neq (-1; -1)$ và $(x; y) \neq (0; -1)$ ta cũng tìm được nghiệm của hệ (I) như cách giải trên.

Thí dụ 2. Giải HPT trên tập số thực

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \quad (1) \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x^2 + y^2 \neq 0$. Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \left(y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}\right).i = 0 \quad (3).$$

Từ (1) và (3), ta có: $x + iy - \dfrac{y + ix}{x^2 + y^2} + 3\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} = 3$.

Đặt $z = x + iy$ và thay vào PT trên ta được:

$$z-\frac{i\bar{z}}{|z|^2}+3\frac{\bar{z}}{|z|^2}=3 \qquad (4)$$

Do $x^2+y^2\neq 0$ nên $z\neq 0$. Nhân cả hai vế của PT (4) với z ta được: $z^2-3z-i+3=0$ (5). PT (5) có biệt thức $\Delta=-3+4i=(2i+1)^2$ nên có nghiệm: $z=2+i$ và $z=1-i$.

– Với $z=2+i$ suy ra $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.

– Với $z=1-i$ suy ra $\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$.

Vậy HPT có hai nghiệm $(x;y)$ là: $(2;1)$ và $(1;-1)$.

Thí dụ 3. *Giải HPT trên tập số thực*

$$\begin{cases}\sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 & (1)\\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} & (2)\end{cases} \quad (\text{I}).$$

Nhận xét. hệ trong *Thí dụ* 3 có dạng giống như hệ trong *Thí dụ* 2 nhưng đã được tịnh tiến lên với hệ số khác không. Để giải được bằng phương pháp sử dụng số phức ta phải đặt ẩn phụ để đưa về hệ dạng trong *Thí dụ* 2.

Lời giải. ĐK: $\begin{cases}x\geq 0, y\geq 0\\x+y\neq 0\end{cases}$.

Đặt $a=\sqrt{3x}, b=\sqrt{7y}$ với $a\geq 0, b\geq 0$. Thế vào hệ (I) ta được:

$$\begin{cases}a+\dfrac{21a}{7a^2+3b^2}=2\\ b-\dfrac{21b}{7a^2+3b^2}=4\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\sqrt{7}+\dfrac{21\sqrt{7}a}{7a^2+3b^2}=2\sqrt{7} & (3)\\ bi\sqrt{3}-\dfrac{21\sqrt{3}bi}{7a^2+3b^2}=4\sqrt{6}.i & (4)\end{cases}.$$

Từ PT (3) và PT (4) ta có:

$$a\sqrt{7}+bi\sqrt{3}+21.\frac{\sqrt{7}a-\sqrt{3}bi}{7a^2+3b^2}=2\sqrt{7}+4\sqrt{6}.i \quad (5).$$

Đặt $z=\sqrt{7}a+i\sqrt{3}.b$ thế vào PT (5) ta được

$$z+21\frac{\bar{z}}{|z|^2}=2\sqrt{7}+4\sqrt{6}.i$$

$$\Leftrightarrow z^2-2(\sqrt{7}+2.i\sqrt{6})z+21=0 \qquad (6).$$

PT (6) có biệt thức $\Delta'=-38+4\sqrt{42}.i=(i\sqrt{42}+2)^2$ nên có hai nghiệm là $z=2+\sqrt{7}+i(2\sqrt{6}+\sqrt{42})$ và $z=-2+\sqrt{7}+i(2\sqrt{6}-\sqrt{42})$.

– Với $z=2+\sqrt{7}+i(2\sqrt{6}+\sqrt{42})$ suy ra

$\begin{cases}x=\sqrt{7}+2\\y=2\sqrt{6}+\sqrt{42}\end{cases}$ (thỏa mãn ĐK).

– Với $z=-2+\sqrt{7}+i(2\sqrt{6}-\sqrt{42})$ suy ra

$\begin{cases}x=\sqrt{7}-2\\y=2\sqrt{6}-\sqrt{42}\end{cases}$ (không thỏa mãn ĐK, loại).

Vậy HPT có nghiệm $(x;y)$ là:

$(\sqrt{7}+2;2\sqrt{6}+\sqrt{42})$ và $(\sqrt{7}-2;2\sqrt{6}-\sqrt{42})$.

3. Một số bài tập vận dụng

Giải các hệ sau trên tập hợp số thực

1. $\begin{cases}x^3-3xy^2-x+1=x^2-2xy-y^2\\y^3-3x^2y+y-1=y^2-2xy-x^2\end{cases}$

2. $\begin{cases}x^3-3xy^2=-1\\y^3-3x^2y=-\sqrt{3}\end{cases}$. **3.** $\begin{cases}x^4-6x^2y^2+y^4=\sqrt{3}\\x^3y-xy^3=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+\dfrac{5x+7\sqrt{5}y}{x^2+y^2}=7\\y+\dfrac{-5y+7\sqrt{5}x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$. **5.** $\begin{cases}\sqrt{x}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)=2\\\sqrt{y}\left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)=6\end{cases}$

6. $\begin{cases}(6-x)(x^2+y^2)=6x+8y\\(3-y)(x^2+y^2)=8x-6y\end{cases}$.

II. TÍNH TỔNG LIÊN QUAN ĐẾN C_n^k BẰNG SỐ PHỨC

1. Kiến thức cơ bản

• Khai triển nhị thức Newton:

– Với mọi $x\in\mathbb{R}$ và với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

$$(1+x)^n=C_n^0+xC_n^1+x^2C_n^2+...+x^nC_n^n.$$

– Với mọi $x\in\mathbb{R}$ và với mọi $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ ta có: $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+3x^2C_n^3+...+nx^{n-1}C_n^n$.

– Với mọi $x\in\mathbb{R}$ và với mọi $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$, ta có: $n(n-1)(1+x)^{n-2}=1.2C_n^2+2.3xC_n^3+ ...+(n-1).nx^{n-2}C_n^n$.

– Với $n\in\mathbb{N}^*$: $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$;

$C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}$.

• Một số tính chất của số phức

– Cho hai số phức $z_1=x_1+y_1i$; $z_2=x_2+y_2i$.

Ta có: $z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$.

– Công thức Moa-vrơ: Cho số phức

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)^n$.

– PT: $z^3 - 1 = 0$ có các nghiệm trên tập số phức là $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z = 1$. Các nghiệm này chính là các căn bậc 3 phức của đơn vị.

– Nếu $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ thì:

a) $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$.

c) $\varepsilon^3 = 1$; $\varepsilon^{3k} = 1$; $\varepsilon^{3k+1} = \varepsilon$; $\varepsilon^{3k+2} = \varepsilon^2$ với k là số nguyên dương.

– Nếu i là đơn vị ảo thì:

$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

· *Dấu hiệu sử dụng số phức để tính tổng liên quan đến C_n^k*

Ta sử dụng số phức để tính tổng của các C_n^k khi tổng này có một trong những đặc điểm sau:
– Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau .
– Chỉ số trên k luôn lẻ, hoặc luôn chẵn.

2. Một số thí dụ

Thí dụ 1. *Tính các tổng sau:*

$A = C_{2015}^0 - C_{2015}^2 + C_{2015}^4 - C_{2015}^6 + ... + C_{2014}^{2012} - C_{2015}^{2014}$

$B = C_{2015}^1 - C_{2015}^3 + C_{2015}^5 - C_{2015}^7 + ... + C_{2014}^{2013} - C_{2015}^{2015}$

Lời giải. Xét khai triển:

$$(1+x)^{2015} = C_{2015}^0 + xC_{2015}^1 + x^2C_{2015}^2 + ... + x^{2014}C_{2015}^{2014} + x^{2015}C_{2015}^{2015}$$

Cho $x = i$ ta có:

$$(1+i)^{2015} = C_{2015}^0 + iC_{2015}^1 + i^2C_{2015}^2 + ... + i^{2014}C_{2015}^{2014} + i^{2015}C_{2015}^{2015}$$

$$= (C_{2015}^0 - C_{2015}^2 + C_{2015}^4 - C_{2015}^6 + ... + C_{2014}^{2012} - C_{2015}^{2014}) + (C_{2015}^1 - C_{2015}^3 + C_{2015}^5 - C_{2015}^7 + ... + C_{2014}^{2013} - C_{2015}^{2015})i \quad (1)$$

Mặt khác: $(1+i)^{2015} = (\sqrt{2})^{2015}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2015}$

$$= (\sqrt{2})^{2015}\left(\cos\frac{2015\pi}{4} + i\sin\frac{2015\pi}{4}\right)$$

$$= (\sqrt{2})^{2015}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{1007} - 2^{1007}i \quad (2).$$

So sánh phần thực và phần ảo của $(1+i)^{2015}$ trong hai cách tính trên ta được:

$$A = C_{2015}^0 - C_{2015}^2 + C_{2015}^4 - C_{2015}^6 + ... + C_{2014}^{2012} - C_{2015}^{2014} = 2^{1007}.$$

và $$B = C_{2015}^1 - C_{2015}^3 + C_{2015}^5 - C_{2015}^7 + ... + C_{2014}^{2013} - C_{2015}^{2015} = -2^{1007}.$$

Thí dụ 2. *Tính tổng*

$$C = C_{2015}^0 + C_{2015}^4 + C_{2015}^8 + ... + C_{2014}^{2012}.$$

Lời giải. Xét khai triển

$$(1+x)^{2015} = C_{2015}^0 + xC_{2015}^1 + x^2C_{2015}^2 + ... + x^{2015}C_{2015}^{2015} \quad (*)$$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức (*) ta được

$$2^{2015} = C_{2015}^0 + C_{2015}^1 + C_{2015}^2 + ... + C_{2015}^{2015} \quad (1)$$

Thay $x = -1$ vào đẳng thức (*) ta được

$$C_{2015}^0 - C_{2015}^1 + C_{2015}^2 - C_{2015}^3 + ... - C_{2015}^{2015} = 0$$

$$\Leftrightarrow C_{2015}^0 + C_{2015}^2 + ... + C_{2015}^{2014} = C_{2015}^1 + C_{2015}^3 + ... + C_{2015}^{2015} \ (2).$$

Theo thí dụ 1 ta có:

$$C_{2015}^0 - C_{2015}^2 + C_{2015}^4 - ... - C_{2015}^{2014} = 2^{1007} \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$2C = 2(C_{2015}^0 + C_{2015}^4 + C_{2015}^8 + ... + C_{2014}^{2012}) = 2^{1007} + 2^{2014}.$$

Vậy $C = 2^{1006} + 2^{2013}$.

Thí dụ 3. *Tính tổng:*

$$D = \frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - ... + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50}\right).$$

Lời giải. Xét khai triển:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50} = \frac{1}{2^{50}}\left[C_{50}^0 - (i\sqrt{3})C_{50}^1 + (i\sqrt{3})^2C_{50}^2 + ... - (i\sqrt{3})^{49}C_{50}^{49} + (i\sqrt{3})^{50}C_{50}^{50}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{50}}\left[C_{50}^0 - (\sqrt{3})^2C_{50}^2 + (\sqrt{3})^4C_{50}^4 - ... - (\sqrt{3})^{46}C_{50}^{46} + (\sqrt{3})^{48}C_{50}^{48} - (\sqrt{3})^{50}C_{50}^{50}\right]$$

$$+ \frac{1}{2^{50}}\left[-\sqrt{3}C_{50}^1 + (\sqrt{3})^3C_{50}^3 - (\sqrt{3})^5C_{50}^5 + ... + (\sqrt{3})^{47}C_{50}^{47} - (\sqrt{3})^{49}C_{50}^{49}\right]i.$$

Mặt khác: $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{50}$

$$= \cos\frac{100\pi}{3} + i.\sin\frac{100\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

So sánh phần thực của số phức $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}$

(Xem tiếp trang 27)

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 56 NĂM 2015

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT*)

I. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

IMO lần thứ 56 năm 2015 (IMO 2015) được tổ chức từ ngày 4/7 đến ngày 16/7/2015, tại thành phố Chiang Mai, Vương quốc Thái Lan. Dự thi IMO 2015 có 577 học sinh, trong đó có 52 học sinh nữ, thuộc 104 quốc gia và vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Nguyễn Tuấn Hải Đăng* (h/s lớp 12, trường THPT chuyên KHTN - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), *Nguyễn Thị Việt Hà* (nữ, h/s lớp 12, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, *Nguyễn Thế Hoàn* (h/s lớp 12, trường THPT chuyên KHTN - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), *Nguyễn Huy Hoàng* (h/s lớp 12, trường PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh), *Hoàng Anh Tài* (h/s lớp 12, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Tỉnh Nghệ An) và *Vũ Xuân Trung* (h/s lớp 11, trường THPT chuyên Thái Bình). Đoàn do *TS. Lê Bá Khánh Trình*, giảng viên Khoa Toán-Tin, trường ĐHKHTN - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, làm Trưởng đoàn và *PGS. TS. Lê Anh Vinh*, giảng viên trường ĐH Giáo dục - ĐHQG Hà Nội, làm Phó trưởng đoàn; người viết bài này tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn). Tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên C (Quan sát viên đi cùng học sinh) có: thầy *Lê Phi Hùng*, giáo viên trường THPT chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh và thầy *Đậu Hoàng Hưng*, giáo viên trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Tỉnh Nghệ An.

Lễ Khai mạc IMO 2015 đã được tổ chức vào hồi 9h00 ngày 9/7/2015, tại Trung tâm Hội nghị của Đại học Tổng hợp Chiang Mai, dưới sự chủ tọa của Công chúa Thái Lan *Maha Chakri Sirindhorn*.

Lễ Bế mạc IMO 2015 đã được tổ chức vào hồi 15h00 ngày 15/7/2015, tại Nhà hát Kad, Thành phố Chiang Mai.

II. ĐỀ THI

Đề thi của IMO 2015 được xây dựng theo nguyên tắc và phương thức như tại IMO 2014. Cụ thể, từ các bài toán thuộc Danh sách các bài toán được đề xuất sử dụng làm bài toán thi (do Ban tổ chức IMO xây dựng trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham dự IMO và được gọi tắt bằng tiếng Anh là Short List), Hội đồng các Trưởng đoàn tiến hành bầu chọn cho mỗi phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học 1 bài dễ và 1 bài trung bình; từ đó, xây dựng các tổ hợp 4 bài toán đảm bảo mỗi phân môn có 1 bài và trong 4 bài toán đó phải có 2 bài ở mức độ dễ, 2 bài ở mức độ trung bình, rồi biểu quyết chọn một tổ hợp trong số đó; tiếp theo, căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó cho đề thi. Theo sự sắp xếp phân môn trong Short List và kết quả bình chọn của Hội đồng các Trưởng đoàn, trong 6 bài toán của Đề thi, bài 1 là bài dễ thuộc phân môn Tổ hợp, bài 2 là bài trung bình thuộc phân môn Số học, bài 3 là bài khó thuộc phân môn Hình học, bài 4 là bài dễ thuộc phân môn Hình học, bài 5 là bài trung bình thuộc phân môn Đại số và bài 6 là bài khó thuộc phân môn Tổ hợp. Dưới đây là phương án tiếng Việt của **Đề thi IMO 2015**:

Ngày thi thứ nhất, 10/7/2015

Bài 1. Ta nói tập $\mathcal{S}$ gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng là tập *cân đối* nếu với hai điểm phân biệt A và B tùy ý thuộc $\mathcal{S}$, tồn tại điểm C thuộc $\mathcal{S}$ sao cho $AC = BC$. Ta nói $\mathcal{S}$ là tập *vô tâm* nếu với ba điểm phân biệt A, B, C tùy ý thuộc $\mathcal{S}$, không tồn tại điểm P thuộc S sao cho $PA = PB = PC$.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 3$, tồn tại tập cân đối gồm n điểm.

b) Hãy tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại tập cân đối và vô tâm gồm n điểm.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các bộ số nguyên dương (a, b, c) sao cho mỗi số trong các số $ab - c$, $bc - a$, $ca - b$ là lũy thừa của 2.

(*Lũy thừa của 2 là một số nguyên có dạng 2^n, với n là số nguyên không âm*).

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC với $AB > AC$. Ký hiệu Γ là đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm và F là chân đường cao hạ từ A của tam giác đó. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi Q là điểm nằm trên Γ sao cho $\widehat{HQA} = 90^\circ$, và gọi K là điểm nằm trên Γ sao cho $\widehat{HKQ} = 90^\circ$. Giả sử rằng các điểm A, B, C, K và Q đôi một phân biệt và nằm trên Γ theo thứ tự đó. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác KQH và FKM tiếp xúc với nhau.

Ngày thi thứ hai, 11/7/2015

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn Ω tâm O. Đường tròn Γ tâm A cắt đoạn thẳng BC tại các điểm D và E sao cho B, D, E và C đôi một phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo thứ tự đó. Gọi F và G là các giao điểm của Γ và Ω, sao cho A, F, B, C và G nằm trên Ω theo thứ tự đó. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF và đoạn thẳng AB. Gọi L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác CGE và đoạn thẳng CA. Giả sử các đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại điểm X. Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO.

Bài 5. Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp số thực. Hãy tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình:

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$$

với mọi số thực x và y.

Bài 6. Dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $1\le a_j\le 2015$ với mọi $j\ge 1$;

ii) $k+a_k\ne \ell+a_\ell$ với mọi $1\le k<\ell$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương b và N sao cho $\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\le 1007^2$ với mọi số nguyên m và n thỏa mãn $n>m\ge N$.

III. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2015, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

- Huy chương Vàng (HCV): Từ **26** đến **42** điểm;
- Huy chương Bạc (HCB): Từ **19** đến **25** điểm;
- Huy chương Đồng (HCĐ): Từ **14** đến **18** điểm.

Theo đó, tại IMO 2015 có 282 học sinh được trao Huy chương; gồm: 39 học sinh được trao HCV, trong đó có 1 học sinh đạt điểm tuyệt đối 42/42 (học sinh *Zhuo Qun* (*Alex*) *Song* của Đoàn Canada); 100 học sinh được trao HCB và 143 học sinh được trao HCĐ. Cả 6 thí sinh của Đoàn Việt Nam đều được trao Huy chương, gồm 2 em được trao HCV, 3 em được trao HCB và 1 em được trao HCĐ. Kết quả chi tiết của các học sinh Đoàn Việt Nam như bảng dưới. Với tổng điểm 151, Đoàn Việt Nam đứng thứ 5 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2015, sau các Đoàn: Mỹ (185 điểm), Trung Quốc (181 điểm), Hàn Quốc (161 điểm) và CHDCND Triều Tiên (156 điểm).

Stt	Họ và Tên	Điểm thi							HC
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng	
1	*Nguyễn Tuấn Hải Đăng*	7	2	0	7	7	0	23	Bạc
2	*Nguyễn Thị Việt Hà*	3	2	1	7	2	0	15	Đồng
3	*Nguyễn Thế Hoàn*	7	5	7	7	5	0	31	Vàng
4	*Nguyễn Huy Hoàng*	4	2	7	7	1	2	23	Bạc
5	*Hoàng Anh Tài*	7	3	1	7	7	0	25	Bạc
6	*Vũ Xuân Trung*	7	7	7	7	6	0	34	Vàng

THÔNG BÁO

Hiện nay việc trình bày nội dung các chuyên mục của Tạp chí TH&TT trong 32 trang đã không đáp ứng được nhu cầu đọc, viết bài ngày càng cao của bạn đọc về các chuyên đề, các nội dung Toán. Vì vậy việc tăng trang đã trở thành một nhu cầu cấp thiết. Tạp chí TH&TT dự kiến: tăng từ 32 trang ruột hiện nay lên 40 trang ruột bắt đầu từ tháng 10 năm 2015 với giá điều chỉnh là 12 500 đồng/1số. Với 8 trang tăng này, nhiều chuyên mục như: *Tìm hiểu sâu thêm Toán học phổ thông*, *Toán học và đời sống*, *Sai lầm ở đâu*, *Câu lạc bộ Toán học*, … sẽ được xuất hiện thường xuyên trên Tạp chí, nội dung các chuyên mục sẽ đầy đủ và phong phú hơn.

Rất mong các Thầy giáo, Cô giáo, các em học sinh và bạn đọc yêu toán ủng hộ đọc, viết bài cho các chuyên mục, để Tạp chí ngày càng phát triển. Tạp chí trân trọng cám ơn!

TH&TT

CÁC LỚP THCS

Bài T1/458 (Lớp 6). Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ với p là số nguyên tố đã cho.

LÊ VĂN TRẠCH
(Tổ 6, ấp Gia Hòa, xã Xuân Trường, Xuân Lộc, Đồng Nai)

Bài T2/458 (Lớp 7). Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua A song song với MH và đường thẳng qua H song song với MA cắt nhau tại N. Chứng minh rằng : $AH^2+BC^2=MN^2$.

VÕ XUÂN MINH
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T3/458. Cho hai số a, b thỏa mãn:

$$\begin{cases} a^3-a^2+a-5=0 \\ b^3-2b^2+2b+4=0 \end{cases}.$$ Tính $a+b$.

LẠI THỊ HOA
(GV THPT Lê Quý Đôn, Thái Bình)

Bài T4/458. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). C là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AB của (O). Các tia AC và BC lần lượt cắt MB và MA tại D và E. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ACE, BCD, OCM đồng quy tại một điểm thứ hai khác C.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Bài T5/458. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn: $(a^5+b)(a+b^5)=2^c$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/458. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z+\sqrt{xyz}=4 \\ \sqrt{2x}+\sqrt{3y}+\sqrt{3z}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \\ x=\min(x,y,z) \end{cases}.$$

TRẦN QUANG CHUNG
(SV Lớp: ĐTYS12- Học viện Kỹ thuật Quân sự)

Bài T7/458. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=120^{\circ}$. Gọi M là điểm thay đổi trên cạnh BD; H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, AD; N là trung điểm đoạn HK. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T8/458. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\cos^2 2A.\cos^2 2B.\cos^2 2C+\frac{\cos 4A.\cos 4B.\cos 4C}{8}.$$

TRẦN QUỐC LUẬT
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/458. Tìm số k nhỏ nhất sao cho:

$$S=a^3+b^3+c^3+kabc-\frac{k+3}{6}\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]\le 0$$

với mọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

HOÀNG NGỌC TUẤN
(K27E Toán, ĐHSP Hà nội II, Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc)

Bài T10/458. Cho dãy đa thức $(P_n(x))$ thỏa mãn điều kiện: $P_1(x)=2x$, $P_2(x)=2(x^2+1)$ và $P_n(x)=2xP_{n-1}(x)-(x^2-1)P_{n-2}(x)$, $n\in\mathbb{N}, n\ge 3$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đa thức $P_n(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)=x^2+1$ là $n=4k+2, k\in\mathbb{N}$.

NGUYỄN THÀNH NHÂN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương)

Bài T11/458. Cho hàm số

$$f(n)=1+2n+3n^2+...+2016n^{2015}$$

và $(t_0, t_1,..., t_{2016})$, $(s_0, s_1,..., s_{2016})$ là hai hoán vị của $(0,1,...,2016)$. Chứng minh rằng trong tập hợp $A=\{s_0f(t_0); s_1f(t_1);...; s_{2016}f(t_{2016})\}$ tồn tại hai số khác nhau có hiệu chia hết cho 2017.

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài T12/458. Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{AB^2}\geq\frac{9}{(MA+MB+MC)^2}.$$

NGUYỄN VĂN QUÝ

(SV K56A1T1, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/458. Một thấu kính mỏng hai mặt lồi có bán kính bằng nhau. Khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính khi đặt thấu kính trong không khí và đặt trong nước lần lượt là $2f_1$ và $2f_2$. Cho chiết suất tuyệt đối của không khí bằng 1, chiết suất tuyệt đối của nước bằng n_n.

1) Tính chiết suất tuyệt đối của chất làm thấu kính.

2) Đặt thấu kính ngập một nửa trong nước sao cho trục chính vuông góc với mặt phẳng phân cách nước và không khí. Tính khoảng cách giữa hai tiêu điểm chính.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/458. Một quả cầu lớn dẫn điện có bán kính $R = 0,2$ m được tích điện đến $V = 1000$V. Một quả cầu nhỏ dẫn điện có bán kính $r = 0,1$m chưa tích điện, có gắn tay cầm cách điện. Cho hai quả cầu tiếp xúc với nhau rồi đưa qua cầu nhỏ ra xa và cho nó phóng điện hết điện tích thu được. Sau đó lại cho hai quả cầu tiếp xúc nhau. Hỏi cần làm như vậy bao nhiêu lần để điện thế quả cầu lớn còn lại bằng $V' = 905$ V.

VŨ THANH KHIẾT

(NXB Giáo dục Việt Nam)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/458 (For 6th grade). For a given prime number p, find positive integers x, y such that $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$.

Problem T2/458 (For 7th grade). Given an acute triangle ABC with the orthocenter H. Let M be the midpoint of BC. The line through A parallel to MH meets the line through H parallel to MA at N. Prove that $AH^2+BC^2=MN^2$.

Problem T3/458. Suppose that

$$\begin{cases} a^3-a^2+a-5=0 \\ b^3-2b^2+2b+4=0 \end{cases}$$. Find $a+b$.

Problem T4/458. From a point M outside the circle (O) draw to tangents MA, MB to (O) (A, B are points of tangency). C is an arbitrary point on the minor arc AB of (O). The rays AC and BC intersect MB and MA at D and E respectively. Prove that the circumcircles of the triangles ACE, BCD, and OCM meet at another point which is different from C.

Problem T5/458. Find all triples of positive integers (a, b, c) such that $(a^5+b)(a+b^5)=2^c$.

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/458. Solve the following system of equations

$$\begin{cases} x+y+z+\sqrt{xyz}=4 \\ \sqrt{2x}+\sqrt{3y}+\sqrt{3z}=\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ x=\min(x,y,z) \end{cases}.$$

Problem T7/458. Given a diamond $ABCD$ with $\widehat{BAD}=120^0$. Let M vary on the side BD. Assume that H and K are the orthogonal projections of M on the lines through AB and AD respectively. Let N be the midpoint of HK. Prove that the line through MN always passes through a fixed point.

Problem T8/458. Given a triangle ABC. Find the maximum value and the minimum value of the expression

$$P=\cos^2 2A.\cos^2 2B.\cos^2 2C+\frac{\cos 4A.\cos 4B.\cos 4C}{8}.$$

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/454. *Với $n \geq 2$, xét các số $a_1, a_2, ..., a_n$ và các số nguyên tố phân biệt $p_1, p_2, ..., p_n$ thỏa mãn điều kiện $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = ... = p_n|a_n - a_1|$. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = ... = a_n$.*

Lời giải. Đặt $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = p_3|a_3 - a_4| = \ldots = p_n|a_n - a_1| = k$ với k là số không âm. Từ đó có n đẳng thức: $a_1 - a_2 = \dfrac{kt_1}{p_1}$, $a_2 - a_3 = \dfrac{kt_2}{p_2}$, $\ldots$, $a_{n-1} - a_n = \dfrac{kt_{n-1}}{p_{n-1}}$, $a_n - a_1 = \dfrac{kt_n}{p_n}$, trong đó mỗi số $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n$ lấy giá trị 1 hoặc -1. Cộng tất cả n đẳng thức trên được $k\left(\dfrac{t_1}{p_1} + \dfrac{t_2}{p_2} + ... + \dfrac{t_n}{p_n}\right) = 0$. Đặt $\dfrac{t_1}{p_1} + \dfrac{t_2}{p_2} + ... + \dfrac{t_n}{p_n} = M$ thì

$M - \dfrac{t_1}{p_1} = \dfrac{t_2}{p_2} + ... + \dfrac{t_n}{p_n} = \dfrac{Q}{p_2 p_3 ... p_n}$, trong đó tử số Q là số nguyên. Từ đó $(Mp_1 - t_1)\, p_2 p_3 \ldots p_n = Qp_1$, hay là $p_1(Mp_2 p_3 \ldots p_n - Q) = t_1 p_2 p_3 \ldots p_n$. Nếu M là số nguyên thì trong đẳng thức trên, vế trái chia hết cho p_1 nhưng vế phải không chia hết cho p_1 vì $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các số nguyên tố phân biệt, do đó M không là số nguyên, suy ra số $M \neq 0$. Từ đó trong đẳng thức $kM = 0$ thì $k = 0$, dẫn đến $p_1|a_1 - a_2| = p_2|a_2 - a_3| = \ldots = p_n|a_n - a_1| = 0$, suy ra $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ❐

➤***Nhận xét.*** Nhiều bạn đã chú ý xét dãy tỉ số bằng nhau $\dfrac{a_1 - a_2}{x_1} = \dfrac{a_2 - a_3}{x_2} = ... = \dfrac{a_n - a_1}{x_n}$, trong đó $x_i = \dfrac{t_i}{p_i}$ với i bằng $1, 2, \ldots, n$, nhưng chưa dẫn đến kết quả.

VIỆT HẢI

Bài T2/454. *Chọn 100 số tự nhiên khác nhau bất kì, mỗi số không lớn hơn 2015 và mỗi số đều chia cho 17 dư 10. Chứng minh rằng trong 100 số đó luôn chọn được 3 số có tổng không lớn hơn 999.*

Lời giải. Giả sử n là số tự nhiên chia cho 17 dư 10, khi đó $n \neq 0$ và n có dạng $n = 17k + 10$ (với $k \in \mathbb{N}$). Gọi 100 số được chọn là $17k_1 + 10$, $17k_2 + 10$, $17k_3 + 10$, $\ldots$, $17k_{100} + 10$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_{100}$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $k_{100} \leq 117$ (*). Thật vậy, vì nếu $k_{100} \geq 118$ thì khi đó $17k_{100} + 10 \geq 17.118 + 10 = 2016$ điều này trái với giả thiết. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $k_3 \leq 20$. Thật vậy, giả sử $k_3 \geq 21$ khi đó $k_4 \geq k_3 + 1 \geq 21 + 1 = 22$, $k_5 \geq k_4 + 1 \geq 22 + 1 = 23$, $k_6 \geq k_5 + 1 \geq 23 + 1 = 24, \ldots\ldots, k_{100} \geq k_{99} + 1$ $\geq 117 + 1 = 118$, điều này trái với (*). Vì $k_3 \leq 20 \Rightarrow k_2 \leq k_3 - 1 \leq 20 - 1 = 19$; $k_1 \leq k_2 - 1$ $\leq 19 - 1 = 18$. Với các kết quả trên thì tổng ba số nhỏ nhất trong 100 số được chọn sẽ là

$$(17k_1 + 10) + (17k_2 + 10) + (17k_3 + 10)$$
$$= 17(k_1 + k_2 + k_3) + 30$$
$$\leq 17(18 + 19 + 20) + 30 = 17.57 + 30 = 999.$$

Đây là điều phải chứng minh. ❐

➤***Nhận xét.*** Tất cả các bạn gửi bài đều cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt:
Vĩnh Phúc: *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Trần Minh Huy*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Bảo Ngọc*, 7C, *Đinh Thị Quỳnh Châu*, *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hải Phòng:** *Vũ Thị Diễm Quỳnh*, 7A2, THCS Hồng Bàng, Quận Hồng Bàng; **Vũng Tàu:** *Đoàn Thị Khánh Vy*, 9A9, THCS Võ Trường Toản, TP Vũng Tàu; **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 7A5, THCS Cầu Giấy, **Phú Thọ:** *Nguyễn Chí Công*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/454. *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì giá trị của biểu thức $\sqrt{\dfrac{(1^4+4)(2^4+4)...(n^4+4)}{2}}$ luôn là một số vô tỉ.*

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**)

Đặt $A = (1^4 + 4)(2^4 + 4)...(n^4 + 4)$.

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{A}{2}$ không là số chính phương.

Thật vậy, với $n = 1$ thì $\dfrac{A}{2} = \dfrac{5}{2}$; với $n > 1$ thì A luôn là số chẵn.

Ta lại có, với số nguyên dương k, nếu k lẻ thì $k^4 + 4$ lẻ; nếu k chẵn thì $k = 2l$ và $k^4 + 4 = 16l^4 + 4 = 2^2(4l^4 + 1)$ trong đó $4l^4 + 1$ luôn là số lẻ. Do đó số mũ của 2 trong phân tích ra thừa số nguyên tố của các thừa số trong A luôn là 0 hoặc 2. Vì vậy số mũ của 2 trong phân tích ra thừa số nguyên tố của A luôn là số chẵn. Suy ra số mũ của 2 trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $\dfrac{A}{2}$ luôn là số lẻ và không thể là số chính phương, suy ra đpcm. ❒

➢ **Nhận xét.**

1. Hầu hết các bạn sử dụng biến đổi:
$a_k = k^4 + 4 = (k^2+2)^2 - 4k^2 = (k^2+2-2k)(k^2+2+2k) = [(k-1)^2+1][(k+1)^2+1]$ để có

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^4 + 4 = (0^2+1)(2^2+1)\\ a_2 &= 2^4 + 4 = (1^2+1)(3^2+1)\\ a_3 &= 3^4 + 4 = (2^2+1)(4^2+1)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ a_{n-1} &= (n-1)^4 + 4 = [(n-2)^2+1][n^2+1]\\ a_n &= n^4 + 4 = [(n-1)^2+1][(n+1)^2+1]. \end{aligned}$$

Từ đó có $a_1.a_2.a_3\dots a_n = 2.(2^2+1)^2(3^2+1)^2\dots[(n-1)^2+1]^2(n^2+1)[(n+1)^2+1]$.

Đến đây, để chứng minh giá trị của (1) luôn là số vô tỉ, ta cần chứng minh $P = (n^2+1)[(n+1)^2+1]$ không chính phương. Sau đây là một vài cách chứng minh của các bạn:

Cách 1: $(n^2+n+1)^2 < P < (n^2+n+2)^2$;

Cách 2: $P = [n(n+1)]^2 + 2n(n+1) + 2$ chia 4 luôn dư 2;

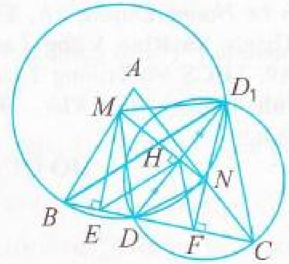
Cách 3: $P = (n^2+n+1)^2 + 1$ là số chính phương $\Leftrightarrow n^2+n+1 = 0$, vô lí.

2. Ngoài bạn *Nguyễn Đình Tuấn*, các bạn khác cũng có lời giải tốt là: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Hiếu, Trần Đức Duy*, 8A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Trần Lê Hiệp*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lê Trương Thái Bảo, Nguyễn Trọng Bằng*, 8A2, THCS thị trấn Quán Hành, Nghi Trung, Nghi Lộc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thảo Chi*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Cao, Vương Tiến Đạt, Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đoàn Thị Khánh Vi*, 9A9, THCS Võ Trường Toản, TP. Vũng Tàu; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum; **Quảng Bình:** *Hoàng Nhật Tuấn*, 9[1], THCS thị trấn Quán Hàu, Quảng Ninh.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/454. *Cho tam giác ABC và D là một điểm bất kì trên cạnh BC (D khác B, D khác C). Các đường trung trực của các đoạn thẳng BD, CD theo thứ tự cắt AB, AC tại M và N. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng MN; E, F theo thứ tự là trung điểm của BD và CD. Chứng minh rằng $\widehat{EHF} = \widehat{BAC}$.*

Lời giải.



Xét trường hợp M và N thuộc các cạnh AB, AC. Còn trường hợp M, N nằm trên các đường thẳng AB, AC ta chứng minh tương tự. Gọi D_1 là điểm đối xứng của D qua H. Vì B, D, D_1 nằm trên đường tròn tâm M, bán kính MB, nên $\widehat{BMD} = 2\widehat{BD_1D}$ (1). Lại thấy D, C, D_1 nằm trên đường tròn tâm N bán kính NC nên $\widehat{DNC} = 2\widehat{DD_1C}$ (2). Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\widehat{BD_1C} = \widehat{BD_1D} + \widehat{DD_1C} = \frac{\widehat{BMD} + \widehat{DNC}}{2}$$
$$= \frac{360^\circ - 2(180^\circ - \widehat{BAC})}{2} = \widehat{BAC} \quad (3)$$

Do E, F theo thứ tự là trung điểm của DB và DC nên EH, FH lần lượt là các đường trung bình của tam giác BDD_1 và DCD_1. Từ đó $EH \,//\, BD_1$ và $FH \,//\, CD_1$. Lúc đó $\widehat{EHF} = \widehat{BD_1C}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EHF} = \widehat{BAC}$ (đpcm). ❒

➢***Nhận xét.*** Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng theo hướng biến đổi góc. Những bạn sau có lời giải ngắn gọn, có lưu ý đến các trường hợp liên quan đến vị trí của các điểm M, N trên các đường thẳng AB và AC. **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Cao, Vương Tiến Đạt, Nguyễn Thành Long, Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên, *Trần Đức Duy, Nguyễn Văn Hiếu, Bùi Thị Liễu Dương*, 8A4, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thảo Chi, Nguyễn Hải Dương, Trần Thị Thu Huyền, Trần Quốc Lập*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** *Đồng Xuân Luân*, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chính, Đông Sơn, *Trần Quốc Phương*, 9A, THCS Thị trấn huyện Thường Xuân; **Nghệ An:** *Võ Phương Tâm*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, *Trần Lê Hiệp*, *Nguyễn Thu Giang*, *Nguyễn Văn Mạnh*, *Nguyễn Thị Như Quỳnh A*, *Nguyễn Thị Như Quỳnh B*, *Trịnh Thị Kim Chi*, 8A, *Hoàng Trần Đức*, *Đỗ Viết Ty*, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Lê Hoàng Duyên*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Đoàn Thị Khánh Vy*, 9A9, THCS Võ Trường Toản, TP. Vũng Tàu; **Tây Ninh:** *Dương Anh Kiệt*, THCS Lý Tự Trọng, Hòa Thành.

HỒ QUANG VINH

Bài T5/454. *Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (các hệ số a, b, c nguyên, a > 0). Biết rằng phương trình có hai nghiệm dương phân biệt bé hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hệ số a.*

Lời giải. Gọi hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ là x_1, x_2 với $0< x_1 < x_2 <1$.

Khi đó $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Do $a>0$ và $0< x_1 < x_2 <1$ nên

$$f(0)=a(0-x_1)(0-x_2)=a x_1 x_2>0$$
$$f(1)=a(1-x_1)(1-x_2)>0.$$

Mặt khác, *a, b, c* là các số nguyên nên $f(0) = c$, $f(1)= a+b+c$ là các số nguyên.

Do đó $f(0) \geq 1$, $f(1) \geq 1$, suy ra $f(0).f(1) \geq 1$ (1)

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có $x_1(1-x_1)\leq\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, đẳng thức xảy ra khi $x_1=1-x_1 \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{2}$.

Tương tự $x_2(1-x_2)\leq\frac{1}{4}$, đẳng thức xảy ra khi $x_2=\frac{1}{2}$; $f(0).f(1)=a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\leq\frac{a^2}{16}$ (2)

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ (mâu thuẫn với điều kiện $x_1 \neq x_2$). Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2}{16}>1 \Rightarrow a>4$ (do $a > 0$). Mà a là số nguyên nên $a \geq 5$.

Với $a = 5$ thì $1\leq f(0).f(1)<\frac{25}{16}<2$, mà $f(0)$, $f(1) \in \mathbb{Z}$ nên

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-5 \text{ (do } a=5) \end{cases}$$

Khi đó phương trình có dạng $5x^2 - 5x + 1= 0$, phương trình này có hai nghiệm $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$ đều dương và nhỏ hơn 1(thỏa mãn điều kiện).

Vậy $a = 5$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. ❐

➤***Nhận xét.*** Bài này không có nhiều bạn tham gia. Một số bạn sử dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để suy luận loại trừ các khả năng $a = 1, 2, 3, 4$ nên lời giải bị dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hải Dương**: *Đồng Xuân Luân*, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên, TP Vĩnh Yên; **Hà Nội**: *Nguyễn Thành Long*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/454. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{z}-1 \\ \sqrt{y-\sqrt{z}}=\sqrt{x}-1 \\ \sqrt{z-\sqrt{x}}=\sqrt{y}-1 \end{cases} \quad \text{(I)}.$$

Lời giải. (Của đa số các bạn).

ĐK: $x\geq1, y\geq1, z\geq1, x^2\geq y, y^2\geq z, z^2\geq x$.

Bình phương hai vế các PT của hệ (I), ta có:

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=z-2\sqrt{z}+1 \\ y-\sqrt{z}=x-2\sqrt{x}+1 \\ z-\sqrt{x}=y-2\sqrt{y}+1 \end{cases} \quad \text{(II)}.$$

Cộng từng vế các PT của hệ (II) và rút gọn ta được: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3$ (1).

Từ ĐK ta có: $\sqrt{x}\geq1, \sqrt{y}\geq1, \sqrt{z}\geq1$. Suy ra

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq3 \quad (2).$$

Để đẳng thức (1) xảy ra thì dấu đẳng thức trong BĐT (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ $x=1, y=1, z=1$. Các giá trị này thỏa mãn hệ (I). Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; 1; 1)$. ❐

➤***Nhận xét.*** Có thể dùng phương pháp đánh giá để dẫn tới $x = y = z$. Bài toán này khá dễ và có nhiều bạn tham gia giải, các lời giải đều đúng. Xin nêu tên các bạn có lời giải ngắn gọn và chặt chẽ nhất: **Hà Nội:** *Vương Tiến Đạt*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền ; Ứng Hòa; *Vũ Đức Văn*, *Trần Bá Khôi*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội. **Nam Định:** *Ông Tùng Dương*, *Ninh Quốc Cường*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hồng Chinh*, 11A1-K10, THPT Yên Phong 2 - Bắc Ninh. **Thái Nguyên:** *Nguyễn Triều Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Nguyên. **Vĩnh**

Phúc: *Nguyễn Hữu Huy*, 10A1 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Bắc Giang:** *Dương Thị Hạnh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Giang. **Phú Thọ:** *Võ Tuấn Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương. **Hưng Yên:** *Triệu Ninh Ngân*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang. **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi. **Thanh Hóa:** *Trần Quốc Phương*, 9A, THCS Thị Trấn, Thường Xuân; *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn. **Nghệ An:** *Nguyễn Huy Hùng Minh*, 10A1K43, THPT chuyên Phan Bội Châu; *Đậu Thị Khánh Linh*, 10T1, THPT Đô Lương I. **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hoàng*, *Nguyễn Thị Linh*, 10T1; *Nguyễn Văn Thế*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh. **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Thị Hạ Vi*, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết. **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Huy Mân*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa. **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển. **Ninh Thuận:** *Nguyễn Thành Khải*, *Trần Lê Xuân Trúc*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, AK11, THPT chuyên Quang Trung.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/454. *Cho P là một điểm nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi*

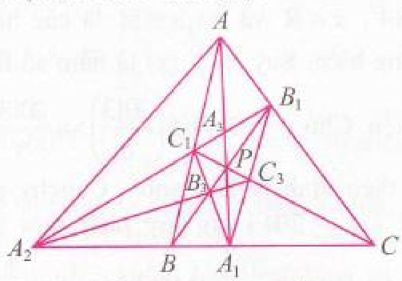
$A_1 = BC \cap AP,\ B_1 = AC \cap BP,\ C_1 = AB \cap CP,$

$A_2 = BC \cap B_1C_1,\ B_2 = AC \cap A_1C_1,\ C_2 = AB \cap A_1B_1;$

$A_3 = B_1C_1 \cap AP,\ B_3 = BP \cap A_1C_1,\ C_3 = A_1B_1 \cap CP.$

Chứng minh rằng B_3C_3 đi qua A_2; A_3C_3 đi qua B_2 và A_3B_3 đi qua C_2.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).



Áp dụng tính chất hàng điểm điều hoà và chùm điều hoà ta có

$(A_2A_1BC) = (A_2A_3C_1B_1) = -1$ nên

$A_1(A_2A_1BC) = P(A_2A_3C_1B_1) = -1$ hay

$A_1(A_2PB_3C_3) = P(A_2A_1B_3C_3) = -1.$

Suy ra $A_1(PA_2B_3C_3) = P(A_1A_2B_3C_3)$.

Do đó ba điểm A_2, B_3, C_3 thẳng hàng.

Tương tự ta có B_2, C_3, A_3 thẳng hàng và C_2, A_3, B_3 thẳng hàng. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán không khó nên có nhiều bạn tham gia giải và đa số cho lời giải đúng. Sử dụng định lí Menelaus và định lí Ceva cũng là định hướng khá tự nhiên, được nhiều bạn lựa chọn khi trình bày lời giải. Cũng có thể sử dụng định lí Desargues để giải bài toán trên. Xin nêu tên một số bạn có lời giải ngắn gọn. **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Khánh*, 10 T2, *Phạm Khánh Hà*, *Vũ Đức Văn*, *Hoàng Anh Quân*, THPT Chuyên ĐHSP; *Trần Thiện Nam*, 11A1, THPT Ứng Hoà A, Ứng Hoà; *Vũ Bá Sang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nam Định:** *Phạm Hồng Trường*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Thế*, *Bùi Huyền Trang*, 11T1, *Phan Anh Tuấn*, *Chu Thuý Hằng*, *Ngô Việt Hoàng*, 10T1, THPT Chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Yên:** *Hồ Minh Hoàng*, *Đặng Bảo Vinh*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T8/454. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2+3 \geq \frac{5}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right).$$

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{a-b}{a+b};\ y=\dfrac{b-c}{b+c};\ z=\dfrac{c-a}{c+a}$.

Vì a,b,c là các số dương nên $-1 < x,y,z < 1$.

Khi đó $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+x}{1-x};\ \dfrac{b}{c}=\dfrac{1+y}{1-y};\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1+z}{1-z}$, suy ra

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\cdot\frac{1+z}{1-z}=1 \Leftrightarrow (1+x)(1+y)(1+z)$$
$$=(1-x)(1-y)(1-z) \Leftrightarrow x+y+z=-xyz \quad (1).$$

Ta có $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}=\dfrac{\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1+x}{1-x}+1}=\dfrac{1+x}{2}$.

Tương tự: $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{1+y}{2};\dfrac{c}{c+a}=\dfrac{1+z}{2}$.

Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với (lưu ý (1)):

$$\frac{1}{4}\left((1+x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2\right)+3\geq\frac{5}{4}(3+x+y+z)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-3(x+y+z)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3xyz\geq 0 \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và lưu ý rằng $|xyz| < 1$, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \ge 3|xyz| \ge -3xyz.$$

Suy ra bất đẳng thức (2).

Vậy bất đẳng thức trong đầu bài được chứng minh.

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} -1 < x, y, z < 1 \\ x^2 = y^2 = z^2 \\ \sqrt[3]{(xyz)^2} = |xyz| = -xyz \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$ ❐

➢***Nhận xét.*** Một số bạn đã giả thiết $a \le b \le c$. Điều đó là không đúng vì trong bài toán vai trò của *a*, *b*, *c* không như nhau. Tuy nhiên, nếu thực hiện hoán vị vòng quanh theo thứ tự $a \to b \to c \to a$ thì bài toán không thay đổi. Do đó có thể giả thiết $a = \min\{a, b, c\}$.

Một số bạn đặt

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1+x}{2}; \frac{b}{b+c} = \frac{1+y}{2}; \frac{c}{c+a} = \frac{1+z}{2}.$$

Kết quả và lời giải cũng như trên.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Long An**: *Phạm Đăng Khoa, Đặng Thành Trung*, 10T2, THPT chuyên Long An; **Phú Thọ**: *Lê Bảo Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/454. *Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng d có phương trình* $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$. *Gọi* a_1 *và* a_2 *là hai đường thẳng (phân biệt) song song và cách đều đường thẳng d một khoảng bằng* $\frac{1}{12}$. *Hỏi miền mặt phẳng chứa đường thẳng d với biên là* a_1 *và* a_2 *có chứa điểm nguyên nào không? (Điểm nguyên là điểm có hoành độ và tung độ đều là số nguyên).*

Lời giải. (Theo bạn *Lê Duy Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**). Giả sử trong miền đã cho có điểm nguyên $M(m, n)$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Theo giả thiết

$$d(M, d) \le \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{3}{2}m - n + \frac{1}{3}\right|}{\frac{\sqrt{13}}{2}} \le \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow \left|3m - 2n + \frac{2}{3}\right| \le \frac{\sqrt{13}}{12}$$

$$\Leftrightarrow \left(3m - 2n + \frac{2}{3}\right)^2 \le \frac{13}{144} \text{ (1). Ta có } 3m - 2n \in \mathbb{Z}.$$

i) Nếu $3m - 2n \ge 0$. Từ (1) suy ra $\frac{4}{9} \le \frac{13}{144}$, vô lý.

ii) Nếu $3m - 2n < 0 \Rightarrow 3m - 2n \le -1$

$$\Rightarrow 3m - 2n + \frac{2}{3} \le -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left(3m - 2n + \frac{2}{3}\right)^2 \ge \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{13}{144} > \frac{1}{9}, \text{ vô lý.}$$

Vậy trong miền đã cho không tồn tại điểm nguyên nào. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia giải bài toán này đều làm đúng (trừ một bạn). Một số lời giải đúng nhưng hơi dài. Các bạn có lời giải tốt bao gồm: **Quảng Bình:** *Hoàng Thanh Việt*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bình Phước:** *Bùi Văn Bình*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, **Phú Thọ:** *Lê Bảo Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội:** *Hoàng Anh Quân*, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Bình Thuận:** *Dương Đức Tín*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/454. *Cho phương trình* $2014^x + nx = 2013$. *Chứng tỏ rằng với mọi số n nguyên dương phương trình trên có đúng một nghiệm* x_n, *tìm* $\lim x_n$.

Lời giải. Đặt $f_n(x) = 2014^x + nx$ và $x \in \mathbb{R}$. Ta có: 2014^x, $x \in \mathbb{R}$ và $nx, x \in \mathbb{R}$ là các hàm liên tục, đồng biến. Suy ra $f_n(x)$ là hàm số liên tục, đồng biến. Chú ý $f_n(0) = 1, f_n\left(\frac{2013}{n}\right) > n \cdot \frac{2013}{n} = 2013.$

Do đó theo định lý Bolzano - Cauchy phương trình $f_n(x) = 2013$ có duy nhất một nghiệm thực x_n và $0 < x_n < \frac{2013}{n}$. Mặt khác $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2013}{n} = 0.$

Bởi vậy theo định lý kẹp $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0.$ ❐

➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán giải tích cơ bản, không khó. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 10 sau đã tham gia giải và có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Trần Bá Khôi*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP; **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** *Trịnh Tuấn Giang*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT

Đông Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Phú Yên:** *Đặng Bảo Vinh*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bình Thuận:** *Dương Đức Tín*, 10T, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/454. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$(x+y)f(x+y)=xf(x)+yf(y)+2xy$ (1) $\forall x,\ y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Thay $y=x$ vào (1) ta được $2xf(2x)=2xf(x)+2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(2x)-2x=f(x)-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ hay $g(2x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (2) trong đó $g(x)=f(x)-x$. Từ (2), bằng quy nạp toán học ta dễ dàng suy ra

$$g(2x)=g(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)=\ldots=g\left(\frac{x}{2^n}\right),\ \forall x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\quad(3)$$

Sử dụng tính liên tục của hàm $g(x)$ (do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$), ta thu được

$g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=g(0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $g(x)=c$ hay $f(x)=x+c$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x)=x+c$ thỏa mãn điều kiện bài ra ứng với mọi hằng số c. □

➤***Nhận xét.*** Đây là dạng toán về phương trình hàm dạng Cauchy trong lớp hàm liên tục thuộc dạng quen thuộc nên có nhiều bạn giải được. Đa số các bạn giải theo cách trình bày ở trên, một số khác đặt ẩn số phụ để đưa về giải phương trình hàm Cauchy tương ứng. Các bạn sau đây có lời giải đúng.

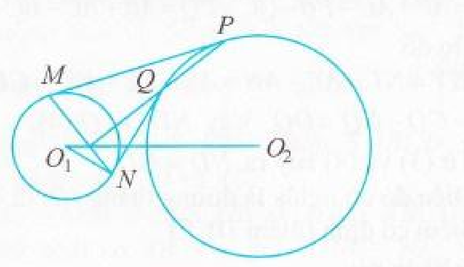
Bắc Ninh: *Lê Huy Cường*, 11T, THPT chuyên, *Nghiêm Chi*, 11A1K10, THPT Yên Phong 2; **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Phước:** *Bùi Văn Bình, Bùi Công Minh*, AK11, THPT chuyên Quang Trung; **Bình Thuận:** *Dương Đức Tín, Tô Quốc Hưng*, 10T, THPT chuyên Trần Hưng Đạo; **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T2, THPT chuyên KHTN, *Vũ Bá Sang*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, *Trần Bá Khôi*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP; **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hùng, Nguyễn Đức Thắng, Nguyễn Anh Triều*, 10T1, *Nguyễn Văn Thế* 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Mạnh Hiệp, Dương Hồng Sơn, Triệu Ninh Ngân*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Kim Hoàng*, A12, THPT Nguyễn Trãi; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An, *Nguyễn Giáp Phương Duy*, 11A1, THPT Hậu Nghĩa; **Nam Định:** *Trịnh Tuấn Giang*, 10T2, *Ông Tùng Dương, Ninh Quốc Cương*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Trần Quang Huy*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Nguyễn Cảnh Hoàng, Cao Hữu Đạt, Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Thọ:** *Lê Bảo Anh*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Phú Yên:** *Nguyễn Chí Lương*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Quảng Bình:** *Hoàng Thanh Việt*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thái Nguyên:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT *Đông Thụy Anh, Nguyễn Triều Minh*, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T, *Nguyễn Tiến Tài* 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/454. *Cho tam giác ABC. Điểm M di động trên đoạn BC. (I_1), (I_2) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp tam giác ABM, ACM. Tiếp tuyến chung XY khác BC của (I_1), (I_2) cắt AM tại N ($X\in(I_1)$); $Y\in(I_2)$). Z, T theo thứ tự là tiếp điểm của AM và (I_1), (I_2). K là giao điểm của XT và YZ. Chứng minh rằng NK luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Trước hết ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Nếu *MP*, *NQ* theo thứ tự là tiếp tuyến chung ngoài và tiếp tuyến chung trong của các đường tròn (O_1), (O_2) ($M,N\in(O_1);P,Q\in(O_2)$) thì $MN\perp PQ$ và *MN*, *PQ*, O_1O_2 đồng quy (h.1).



Hình 1

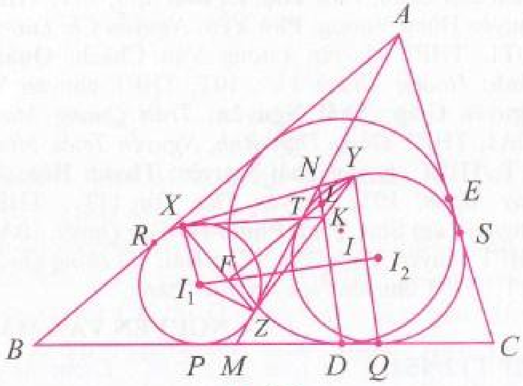
Phép chứng minh bổ đề trên rất quen thuộc, không trình bày ở đây.

Gọi (*I*) là đường tròn nội tiếp ΔABC; *P*, *R* theo thứ tự là tiếp điểm của (I_1) và *BM*, *BA*; *Q*, *S* theo thứ tự là tiếp điểm của (I_2) và *CM*, *CA*; *D*, *E* theo thứ tự là tiếp điểm của (I_2) và *CB*, *CA*; *F*, *L* theo thứ tự là giao điểm của *XZ*, *NK* và *YT* (h.2). Dễ thấy $(YTFL)=-1$.

Theo bổ đề trên, $\widehat{YFX}=90°=\widehat{TFZ}$.

Kết hợp với $\widehat{FYX}=\widehat{TYN}=\widehat{NTY}=\widehat{FTZ}$, suy ra các tam giác YFX, TFZ đồng dạng.

Vậy $\dfrac{FX}{FZ}=\dfrac{FY}{FT}=\dfrac{LY}{LT}$ (1).



Hình 2

Dễ thấy các tam giác I_1XZ, NYT đồng dạng cùng hướng (2).
Từ (1) và (2) suy ra tam giác I_1XF, NYL đồng dạng cùng hướng. Theo bổ đề trên, F thuộc I_1I_2.
Vậy, chú ý rằng $NI\perp I_1X$, ta có

$$(NL,I_1I_2)\equiv(NL,I_1F)\equiv(NY,I_1X)\equiv\frac{\pi}{2}(\operatorname{mod}\pi).$$

Do đó $NL\perp I_1I_2$. Kết hợp với $YQ\perp I_1I_2$, suy ra $NL//YQ$ (3). Mặt khác

$$2AN=AZ-NZ+AT-NT=AR-NX+AS-NY$$
$$=AB-RB+AC-SC-XY$$
$$=AB+AC-PB-QC-PQ=AB+AC-BC=2AE.$$

Do đó

$$NY=NT=AT-AN=AS-AE=ES=CE-CS$$
$$=CD-CQ=DQ.$$ Vậy $ND//YQ$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $ND\equiv NL$.
Điều đó có nghĩa là đường thẳng NK đi qua một điểm cố định (điểm D). ❐

➢*Nhận xét.*
1) Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này và giải đúng. Ngoài cách giải trên một vài bạn còn giải bằng cách sử dụng cực và đối cực.
2) Xin nêu tên tất cả các bạn: **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Yên Bái; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; Vĩnh Phúc, *Hà Hữu Linh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thanh Hoá:** *Vũ Duy Mạnh*, *Nguyễn Đình Lương*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hoá; **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hoàng*, 10T1, *Bùi Huyền Trang*, *Chu Thuý Hằng*, *Nguyễn Văn Thế*, *Võ Duy Khánh*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh Tiến*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP Đồng Hới; **Bình Định:** *Trần Văn Thiên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Quy Nhơn; **Bình Phước:** *Bùi Văn Bình*, 11A, THPT chuyên Quang Trung, TP Đồng Xoài; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Hà Nội:** *Lê Duy Anh*, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành, *Tạ Khánh Hà*, *Vũ Văn Đức*, *Trần Bá Khôi*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội .

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/454. *Đặt điện áp xoay chiều $u=U_0\cos\omega t$ (U_0 và ω không đổi) vào hai đầu đoạn mạch nối tiếp gồm điện trở R, tụ điện có điện dung C, cuộn cảm thuần có độ tự cảm L thay đổi được. Khi $L=L_1$ và $L=L_2$ điện áp hiệu dụng ở hai đầu cuộn cảm có cùng giá trị; độ lệch pha của điện áp ở hai đầu đoạn mạch so với cường độ dòng điện lần lượt là φ_1 và φ_2. Khi $L=L_0$ điện áp giữa hai đầu cuộn cảm đạt cực đại; độ lệch pha của điện áp hai đầu đoạn mạch so với cường độ dòng điện là φ. Tìm φ theo φ_1 và φ_2. Áp dụng bằng số: $\varphi_1=0{,}52$ rad, $\varphi_2=1{,}05$ rad.*

Lời giải. Theo bài ra ta có:

$$\tan\varphi_1=\frac{Z_{L_1}-Z_C}{R}\ (1)\quad \tan\varphi_2=\frac{Z_{L_2}-Z_C}{R}\qquad (2)$$

$$\tan\varphi=\frac{Z_{L_0}-Z_C}{R}=\frac{\dfrac{R^2+Z_C^2}{Z_C}-Z_C}{R}=\frac{R}{Z_C}\qquad (3)$$

$$\frac{1}{Z_{L_1}}+\frac{1}{Z_{L_2}}=\frac{2Z_C}{R^2+Z_C^2}\qquad (4)$$

Từ các phương trình trên ta thu được phương trình ẩn $\tan\varphi$:

$$\tan\varphi\left[\tan^2\varphi(\tan\varphi_1+\tan\varphi_2)+2\tan\varphi(1-\tan\varphi_1\tan\varphi_2)-(\tan\varphi_1+\tan\varphi_2)\right]=0\quad (5)$$

Giải phương trình (5) và lấy nghiệm $\tan\varphi>0$ ta có:

- Nếu $\tan(\varphi_1+\varphi_2)>0$ thì:

$$\tan\varphi=\tan\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

- Nếu $\tan(\varphi_1+\varphi_2)<0$ thì:

$$\tan\varphi=-\tan\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

Thay số ta được: $\varphi=0{,}785\text{rad}$. ❐

➢*Nhận xét.* Các bạn có lời giải đúng: **Nghệ An:**

Hồ Thanh Tùng, 12CL, THPT Kim Liên, Nam Đàn; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lý, *Nguyễn Nam Khánh*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/454. *Ba con lắc lò xo 1, 2, 3 dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng trên ba trục nằm ngang song song với nhau nằm trong cùng một mặt phẳng và con lắc lò xo thứ 2 cách đều hai lò xo còn lại, vị trí cân bằng của vật có cùng toạ độ, trục toạ độ cùng chiều dương. Biết $k_1 = 2k_2 = 0,5k_3 = 100$ N/m, khối lượng các vật nặng mắc vào lò xo có khối lượng lần lượt $m_1 = 2m_2 = 0,5m_3 = 100$g. Ở thời điểm ban đầu truyền cho vật m_1 vận tốc $v = 30\pi$ cm/s theo chiều dương, còn đưa vật m_2 lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ có toạ độ 1,5 cm rồi thả nhẹ và kích thích con lắc thứ 3 dao động. Trong quá trình dao động cả ba vật nặng nằm trên một đường thẳng. Tính vận tốc ban đầu của vật nặng m_3.*

Lời giải. Tần số góc:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{100}{0,1}} = 10\pi \text{ rad/s};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{50}{0,05}} = 10\pi \text{ rad/s};$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m_3}} = \sqrt{\frac{200.0,5}{0,1}} = 10\pi \text{ rad/s}$$

+ Xét con lắc lò xo thứ (1): $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

Lúc $t = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = A_1.\cos\varphi_1 = 0 \\ v_1 = -\omega_1 A_1 \sin\varphi_1 = 30\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 3\text{ cm} \\ \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3\cos(10\pi t - \frac{\pi}{2})\text{ (cm)}$$

+ Xét con lắc lò xo thứ (2) : $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Lúc $t = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = A_2.\cos\varphi_2 = 1,5 \\ v_2 = -\omega_2 A_2 \sin\varphi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 1,5\text{ cm} \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1,5.\cos(10\pi t)\text{ (cm)}$$

+ Trong quá trình dao động cả ba vật nặng nằm trên một đường thẳng : $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \Rightarrow x_3 = 2x_2 - x_1$

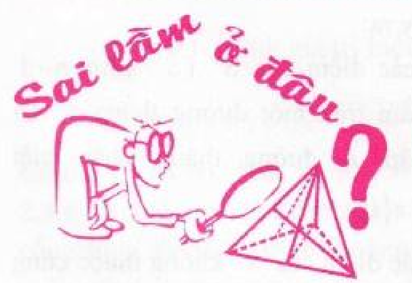
$$x_3 = 3\sqrt{2}\cos(10\pi t + \frac{\pi}{4})\text{(cm)}$$

$$\Rightarrow v_3 = -30\sqrt{2}\pi\sin(10\pi t + \frac{\pi}{4})\text{ (cm/s)}.$$

Lúc $t = 0$: $v_{03} = -30\pi$ cm/s. ❒

➤***Nhận xét :*** Chỉ có bốn bạn đã hoàn thành trọn vẹn đề bài này: **Nam Định:** *Nguyễn Nam Khánh*, 12 Lý, *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Ngô Văn Khoa*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng; **Hà Tĩnh:** *Trần Bảo Trung*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐINH THÁI QUỲNH



Lời giải đã trọn vẹn ?

NGUYỄN HỮU THỌ

(GV THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, Hà Tĩnh)

Bài toán. *Giải bất phương trình :*

$$\frac{(x-9)\sqrt{2x-1}}{x-2015} \le 0 \ (*).$$

Lời giải. $\dfrac{(x-9)\sqrt{2x-1}}{x-2015} \le 0$ (*)

Tập xác định : $D = \left\{x \colon \dfrac{1}{2} \le x \ne 2015\right\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $\sqrt{2x-1} \ge 0$ nên

(*) $\Leftrightarrow \dfrac{x-9}{x-2015} \le 0 \Leftrightarrow 9 \le x < 2015$.

Đối chiếu với tập xác định ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là : $9 \le x < 2015$.

Theo các bạn thì lời giải trên đã đúng chưa?

PROBLEMS ...(*Tiếp theo trang 17*)

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/458. Find the smallest k such that $S = a^3 + b^3 + c^3 + kabc$.

$$-\frac{k+3}{6}\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]\le 0$$

for all triples (a, b, c) which are the lengths of the sides of a triangle.

Problem T10/458. Given a sequence of polynomials $(P_n(x))$ satisfying the following conditions $P_1(x)=2x$, $P_2(x)=2(x^2+1)$, and

$P_n(x)=2xP_{n-1}(x)-(x^2-1)P_{n-2}(x)$, $n\in\mathbb{N}, n\ge 3$.

Prove that $P_n(x)$ is divisible by $Q(x)=x^2+1$ if and only if $n=4k+2, k\in\mathbb{N}$.

Problem T11/458. Consider the function

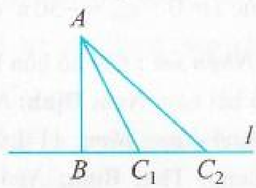
$$f(n)=1+2n+3n^2+...+2016n^{2015}.$$

Let $(t_0, t_1,..., t_{2016})$ and $(s_0, s_1,..., s_{2016})$ be two permutations of $(0,1,...,2016)$. Prove that there exist two different numbers in the following set $A=\{s_0f(t_0); s_1f(t_1);...; s_{2016}f(t_{2016})\}$ such that their difference is divisible by 2017.

Problem T12/458. Given a triangle ABC and an arbitrary point M. Prove that

$$\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{AB^2}\ge\frac{9}{(MA+MB+MC)^2}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI...(*Tiếp theo trang 6*)



...đi qua đúng 2 điểm của S. Giả sử L là tập hợp các đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm của S. Vì S, L là các tập hợp hữu hạn suy ra ta có điểm $A\in S$ và đường thẳng $l\in L$ sao cho khoảng cách từ A đến l là nhỏ nhất $(A\notin l)$. Gọi B là chân đường cao hạ từ A đến đường thẳng l, điểm B chia đường thẳng l thành 2 nửa đường thẳng và ta chứng minh ở mỗi phía của B chỉ tồn tại nhiều nhất một điểm của S. Giả sử phản chứng có một nửa đường thẳng có chứa 2 điểm của S, là C_1, C_2 $(C_1\ne C_2)$.

Ta có $0\le|BC_1|<|BC_2|$ và ΔAC_1C_2 là tù hoặc vuông (khi $C_1\equiv B$) suy ra $\widehat{AC_1C_2}$ là lớn nhất. Ta có $|C_1C_2|<|AC_2|$ khi đó khoảng cách từ C_1 đến AC_2 nhỏ hơn khoảng cách $|AB|$ (mâu thuẫn với giả thiết khoảng cách từ A đến l là nhỏ nhất). Suy ra l đi qua nhiều nhất 2 điểm của $S \Rightarrow l$ đi qua đúng 2 điểm của S. Ta chứng minh tiếp bài toán bằng quy nạp theo $n\ge 3$.

- $n=3$ là hiển nhiên.
- Giả sử kết luận đúng với $n-1$ ta chứng minh kết luận của bài toán đúng với n.

Áp dụng kết quả trên với tập S ta có tồn tại một đường thẳng đi qua đúng hai điểm, gọi hai điểm đó là A, B. Ta xét tập $S'=S\setminus\{A\}$ khi đó có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Tất cả các điểm của S' (S' gồm $n-1$ điểm) cùng nằm trên một đường thẳng l. Ta nhận được tập n đường thẳng phân biệt $\{AX : X\in S'\}\cup\{l\}$.

TH2: Tất cả các điểm của S' không thuộc cùng một đường thẳng. Khi đó theo giả thiết quy nạp có ít nhất $n-1$ đường thẳng nối các điểm của S'. Vì đường thẳng $l=AB$ phân biệt với $n-1$ đường thẳng trên $(l\cap S'=\{B\})$. Với $n=2015$, ta được điều phải chứng minh.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN - ĐHQG Hà Nội) Giới thiệu

ỨNG DỤNG SỐ PHỨC...*(Tiếp theo trang 13)*

...trong hai cách tính trên ta được:

$$D = \frac{1}{2^{50}}\left(C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - \right.$$
$$\left. ... - 3^{23}C_{50}^{46} + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Thí dụ 4. *Tính tổng:*

$$E = C_{2015}^0 + C_{2015}^3 + C_{2015}^6 + ... + C_{2015}^{3k} + ... + C_{2015}^{2013}.$$

Lời giải. Xét khai triển:

$$(1+x)^{2015} = C_{2015}^0 + xC_{2015}^1 + x^2C_{2015}^2 + ... + x^{2015}C_{2015}^{2015} \quad (*)$$

Thay $x=1$ vào đẳng thức (*) ta được

$$2^{2015} = C_{2015}^0 + C_{2015}^1 + C_{2015}^2 + ... + C_{2015}^{2015} \quad (1)$$

Thay $x=\varepsilon=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ vào đẳng thức (*) ta được

$$(1+\varepsilon)^{2015} = C_{2015}^0 + \varepsilon C_{2015}^1 + \varepsilon^2C_{2015}^2 + ... + \varepsilon^{2015}C_{2015}^{2015}$$
$$= C_{2015}^0 + \varepsilon C_{2015}^1 + \varepsilon^2C_{2015}^2 + C_{2015}^3 + \varepsilon C_{2015}^4 + \varepsilon^2C_{2015}^5 + ... + \varepsilon^2C_{2015}^{2015}$$
$$= (C_{2015}^0 + C_{2015}^3 + ...C_{2015}^{2013}) + \varepsilon(C_{2015}^1 + C_{2015}^4 + ... + C_{2015}^{2014}) + \varepsilon^2(C_{2015}^2 + C_{2015}^5 + ... + C_{2015}^{2015}) \quad (2)$$

Thay $x=\varepsilon^2$ vào đẳng thức (*) ta được:

$$(1+\varepsilon^2)^{2015} = C_{2015}^0 + \varepsilon^2C_{2015}^1 + \varepsilon^4C_{2015}^2 + ... + \varepsilon^{2.2015}C_{2015}^{2015}$$
$$= (C_{2015}^0 + C_{2015}^3 + ... + C_{2015}^{2013}) + \varepsilon^2(C_{2015}^1 + C_{2015}^4 + ... + C_{2015}^{2014}) + \varepsilon(C_{2015}^2 + C_{2015}^5 + ... + C_{2015}^{2015})$$

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3) ta được:

$$3E = 2^{2015} + (1+\varepsilon)^{2015} + (1+\varepsilon^2)^{2015}$$
$$= 2^{2015} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2015} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2015} = 2^{2015} + 1.$$

Vậy $E = \frac{2^{2015}+1}{3}$.

Thí dụ 5. *Tính tổng:*

$$F = C_{2015}^0 + 3C_{2015}^3 + 6C_{2015}^6 + ... + 3kC_{2015}^{3k} + ... + 15C_{2015}^{15} + 2013C_{2015}^{2013}$$

Lời giải. Xét khai triển:

$$(1+x)^{2015} = C_{2015}^0 + xC_{2015}^1 + x^2C_{2015}^2 + ... + x^{2015}C_{2015}^{2015} \quad (*)$$

Đạo hàm hai vế ta được:

$$2015(1+x)^{2014} = C_{2015}^1 + 2xC_{2015}^2 + ... + 2015x^{2014}C_{2015}^{2015} \quad (*)$$

Nhân hai vế của đẳng thức (*) với x ta được:

$$2015x(1+x)^{2014} = xC_{2015}^1 + 2x^2C_{2015}^2 + ... + 2015x^{2015}C_{2015}^{2015} \quad (**)$$

Thay $x=1$ vào (**) ta được:

$$2015.2^{2014} = C_{2015}^1 + 2C_{2015}^2 + ... + 2015C_{2015}^{2015} \quad (1)$$

Thay $x=\varepsilon=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ vào (**) ta được :

$$2015\varepsilon(1+\varepsilon)^{2014} = \varepsilon C_{2015}^1 + 2\varepsilon^2C_{2015}^2 + ... + 2015\varepsilon^{2015}C_{2015}^{2015}$$
$$= \varepsilon(C_{2015}^1 + 4C_{2015}^4 + ... + 2014C_{2015}^{2014}) + \varepsilon^2(2C_{2015}^2 + 5C_{2015}^5 + ... + 2015C_{2015}^{2015}) + 3C_{2015}^3 + 6C_{2015}^6 + ... + 2013C_{2015}^{2013} \quad (2)$$

Thay $x=\varepsilon^2$ vào (**) ta được:

$$2015\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^{2014} = \varepsilon^2C_{2015}^1 + 2\varepsilon^4C_{2015}^2 + ... + 2015\varepsilon^{2.2015}C_{2015}^{2015}$$
$$= \varepsilon(2C_{2015}^2 + 5C_{2015}^5 + ... + 2015C_{2015}^{2015}) + \varepsilon^2(C_{2015}^1 + 4C_{2015}^4 + 7C_{2015}^7 + ... + 2014C_{2015}^{2014}) + 3C_{2015}^3 + 6C_{2015}^6 + ... + 2013C_{2015}^{2013} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế của các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$2015.\left[2^{2014} + \varepsilon(1+\varepsilon)^{2014} + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^{2014}\right] = 3(F - C_{2015}^0).$$

Mặt khác: $\varepsilon+1=-\varepsilon^2$, $1+\varepsilon^2=-\varepsilon$. Dẫn đến $(1+\varepsilon)^{2014}=\varepsilon^2$, $(1+\varepsilon^2)^{2014}=\varepsilon$. Vậy

$$F = \frac{2015.2^{2014}+4033}{3}.$$

3. Bài tập vận dụng

Tính các tổng sau:

1. $S_1 = C_{2015}^0 - 3C_{2015}^2 + 5C_{2015}^4 - 7C_{2015}^6 + ... - 2015C_{2015}^{2014}$.

2. $S_2 = 2C_{2015}^1 - 4C_{2015}^3 + 6C_{2015}^5 - 8C_{2015}^7 + ... - 2016C_{2015}^{2015}$.

3. $S_3 = C_{40}^0 + 4C_{40}^3 + 7C_{40}^6 + 10C_{40}^9 + ... + 40C_{40}^{39}$.

4. $S_4 = 1C_{2015}^1 - 3^2C_{2015}^3 + 5^2C_{2015}^5 - 7^2C_{2015}^7 + ... - 2015^2C_{2015}^{2015}$.

5. $S_5 = 2^2C_{2015}^2 - 4^2C_{2015}^4 + 6^2C_{2015}^6 - 8^2C_{2015}^8 + ... + 2014^2C_{2015}^{2014}$.

6. $S_6 = C_{2015}^1 + C_{2015}^5 + C_{2015}^9 + ... + C_{2015}^{2013}$.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

BỔ ĐỀ LTE VÀ ỨNG DỤNG

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(*GV THPT chuyên Tiền Giang*)

Bổ đề LTE (Lifting The Exponent) có rất nhiều ứng dụng trong các bài toán số học liên quan đến số mũ, nhất là các phương trình Diophant bậc cao. Bổ đề này sẽ giúp đưa các bài toán số học liên quan đến số mũ cao về bài toán có số mũ thấp hơn mà việc giải quyết nó dễ dàng hơn. Trước khi đi vào các bổ đề, tôi xin giới thiệu định nghĩa $v_p(x)$ và một vài tính chất cơ bản của nó:

1. Định nghĩa. Cho số nguyên x và p là một số nguyên tố bất kì, ta định nghĩa $v_p(x)$ là số mũ cao nhất của p mà chia hết x, tức là: nếu $x \neq 0$ thì $v_p(x) = n \in \mathbb{N}$ nếu $p^n \mid x$ và $p^{n+1} \nmid x$. Nếu $x = 0$ thì $v_p(0) = +\infty$.

2. Các tính chất. Từ định nghĩa $v_p(x)$, ta dễ dàng chứng minh được tính chất 1 sau đây:

Tính chất 1. Cho x, y là hai số nguyên và p là số nguyên tố. Khi đó, ta có:

i) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

ii) $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$.

iii) $v_p(x+y) = \min\{v_p(x), v_p(y)\}$ nếu $v_p(x) \neq v_p(y)$.

Tính chất 2. Cho x, y là hai số nguyên và n là số nguyên dương, p là số nguyên tố sao cho $(n, p) = 1$ và $p \mid (x-y)$, $p \nmid x, p \nmid y$. Khi đó, $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y)$.

Chứng minh. Ta có:

$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1})$. Ta chỉ cần chứng minh $p \nmid (x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1})$ sẽ suy ra $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y)$.

Thật vậy, ta có: $p \mid (x-y) \Rightarrow x \equiv y \pmod{p}$

$\Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}$

$\equiv x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1} \equiv nx^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Tính chất 3: Cho x, y là 2 số nguyên và n là số nguyên dương lẻ, p là số nguyên tố sao cho $(n, p) = 1$ và $p \mid (x+y)$, $p \nmid x, p \nmid y$. Khi đó, $v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y)$.

Chứng minh: Theo tính chất 2 ta có:

$v_p(x^n + y^n) = v_p(x^n - (-y)^n) = v_p(x - (-y)) = v_p(x+y)$.

Bổ đề LTE 1

Cho x, y là hai số nguyên và n là số nguyên dương, p là số nguyên tố lẻ sao cho $p \mid (x-y)$ và $p \nmid x, p \nmid y$.

Khi đó: $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo $v_p(n)$. Trước tiên ta chứng minh:

$v_p(x^p - y^p) = v_p(x-y) + 1$. Thật vậy

$x^p - y^p = (x-y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1})$.

$\Rightarrow v_p(x^p - y^p)$

$= v_p(x-y) + v_p(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1})$.

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$v_p(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1}) = 1$$

hay $p \mid (x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1})$ và

$$p^2 \nmid (x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1}).$$

Vì $x \equiv y \pmod{p}$ nên ta có:

$(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1}) \equiv px^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

Đặt $y = x + kp, k \in \mathbb{Z}$. Với mọi số nguyên $t \in [1; p)$ ta có: $x^{p-1-t}y^t = x^{p-1-t}(x+kp)^t$

$\equiv x^{p-1-t}\left(x^t + t(kp)(x^{t-1}) + \dfrac{t(t-1)}{2}(kp)^2(x^{t-2}) + \ldots\right)$

$\equiv x^{p-1-t}(x^t + t(kp)x^{t-1}) = x^{p-1} + tkpx^{p-2} \pmod{p^2}$.

Do đó: $(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1})$

$\equiv x^{p-1} + (x^{p-1} + kpx^{p-2}) + (x^{p-1} + 2kpx^{p-2}) + \ldots + (x^{p-1} + (p-1)kpx^{p-2})$

$\equiv px^{p-1} + (1 + 2 + \ldots + p - 1)kpx^{p-2}$

$= px^{p-1} + \dfrac{p(p-1)}{2}.kp.x^{p-2} = px^{p-1} + \dfrac{p-1}{2}.kp^2.x^{p-2}$

$\equiv px^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

Trở lại bài toán, giả sử $n = p^m.q$, trong đó $(p, q) = 1$, $m, q \in \mathbb{N}$.

Ta có: vì $x^k - y^k \,\vdots\, x - y \Rightarrow x^k - y^k \,\vdots\, p$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ do đó, theo tính chất 2 ta có:

$v_p(x^n - y^n) = v_p\left[(x^{p^m})^q - (y^{p^m})^q\right] = v_p(x^{p^m} - y^{p^m})$

$= v_p\left[(x^{p^{m-1}})^p - (y^{p^{m-1}})^p\right] = v_p(x^{p^{m-1}} - y^{p^{m-1}}) + 1$

$= ... = v_p(x-y) + m = v_p(x-y) + v_p(n).$

Bổ đề LTE 2

Cho x, y là hai số nguyên và n là số nguyên dương lẻ, p là số nguyên tố lẻ sao cho $p \mid (x+y)$ và $p \nmid x, p \nmid y$. Khi đó: $v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n).$

Chứng minh. Áp dụng bổ đề LTE 1, ta có:

$v_p(x^n + y^n) = v_p(x^n - (-y)^n)$

$= v_p(x-(-y)) + v_p(n) = v_p(x+y) + v_p(n).$

Bổ đề LTE 3

Cho n là số nguyên dương và x, y là hai số nguyên lẻ sao cho $4 \mid (x-y)$. Khi đó:

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n).$$

Chứng minh. Giả sử $n = 2^m.q$, trong đó $(2, q) = 1$, $q \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$x^{2^m} - y^{2^m} \vdots x - y \Rightarrow x^{2^m} - y^{2^m} \vdots 2.$$

Do đó, theo tính chất 2:

$v_2(x^n - y^n) = v_2\left[(x^{2^m})^q - (y^{2^m})^q\right] = v_2(x^{2^m} - y^{2^m}).$

Ta có: $x^{2^m} - y^{2^m} = (x^{2^{m-1}} + y^{2^{m-1}})(x^{2^{m-2}} + y^{2^{m-2}})$

$...(x^2 + y^2)(x+y)(x-y).$

Vì $x \equiv y \equiv \pm 1 \pmod 4$

$\Rightarrow x^{2^k} \equiv y^{2^k} \equiv 1 \pmod 4, \forall k \in \mathbb{Z}^+.$

Do đó, $x^{2^k} + y^{2^k} \equiv 2 \pmod 4, \forall k \in \mathbb{Z}^+.$

Vì x, y lẻ và $4 \mid (x-y)$ nên $x + y \equiv 2 \pmod 4$.

Suy ra: $x^{2^m} - y^{2^m} = 2^m(x-y).A$, trong đó A là số nguyên lẻ $\Rightarrow v_2(x^n - y^n) = v_2(x^{2^m} - y^{2^m})$

$= v_2(x-y) + m = v_2(x-y) + v_2(n).$

Bổ đề LTE 4

Cho x, y là hai số nguyên lẻ và n là số nguyên dương chẵn. Khi đó: $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1.$

Chứng minh. Giả sử $n = 2^m.q$, trong đó $(2, q) = 1$, $q, m \in \mathbb{Z}^+$. Ta có: vì x, y là 2 số nguyên lẻ nên $x^{2^m} - y^{2^m} \vdots 2$. Do đó, theo tính chất 2: $v_2(x^n - y^n) = v_2\left[(x^{2^m})^q - (y^{2^m})^q\right] = v_2(x^{2^m} - y^{2^m}).$

Vì x, y là hai số nguyên lẻ nên $x^2 \equiv 1 \pmod 4$, $y^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod 4$.

Áp dụng bổ đề LTE 3, ta có:

$v_2(x^{2^m} - y^{2^m}) = v_2\left[(x^2)^{2^{m-1}} - (y^2)^{2^{m-1}}\right]$

$= v_2(x^2 - y^2) + v_2(2^{m-1})$

$= v_2(x-y) + v_2(x+y) + m - 1.$ Suy ra đpcm.

Bổ đề LTE 5

Cho x, y là hai số nguyên lẻ và n là số nguyên dương chẵn. Khi đó: $v_2(x^n + y^n) = 1.$

Chứng minh. Áp dụng bổ đề LTE 4, ta có: $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1.$ Vì x, y lẻ nên $v_2(x-y) \geq 1, v_2(x+y) \geq 1, v_2(n) \geq 1 \Rightarrow v_2(x^n - y^n) \geq 2.$

Mà $v_2(2y^n) = 1$ (do y lẻ) nên $v_2(x^n + y^n)$

$= v_2(x^n - y^n + 2y^n) = v_2(2y^n) = 1$ (theo tính chất 1).

Một số thí dụ ứng dụng

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng:* $3^{2^n} - 1$ *chia hết cho* 2^{n+2} *và không chia hết cho* 2^{n+3} *với mọi số nguyên dương* n.

Lời giải. Theo bổ đề LTE 4 ta có:

$v_2(3^{2^n} - 1) = v_2(3-1) + v_2(3+1) + v_2(2^n) - 1 = n + 2$

từ đó ta có đpcm.

Thí dụ 2. *Cho* a, b *là hai số nguyên,* p *là số nguyên tố. Chứng minh rằng: nếu* $a \equiv b \pmod p$ *thì* $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Lời giải. Ta thấy nếu a, b chia hết cho p thì a^{p^n}, b^{p^n} chia hết cho $p^{p^n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, do đó chia hết cho $p^{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

(do $p^n = \left[1 + (p-1)\right]^n \geq 1 + n(p-1) \geq n+1$).

Vì vậy $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta xét a, b không chia hết cho p. Ta chia hai trường hợp sau:

– TH1: $p = 2$ thì a, b lẻ (do a, b không chia hết cho p) nên $v_2(a-b) \geq 1, v_2(a+b) \geq 1$, theo bổ đề LTE 4 ta có:

$v_2(a^{2^n} - b^{2^n}) = v_2(a-b) + v_2(a+b) + v_2(2^n) - 1 \geq n+1.$

Do đó, $a^{2^n} - b^{2^n} \vdots 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ hay

$$a^{2^n} \equiv b^{2^n} \pmod{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

– TH2: p là số nguyên tố lẻ thì theo bổ đề LTE 1 ta có: $v_p(a^{p^n} - b^{p^n}) = v_p(a-b) + v_p(p^n) \geq n+1.$

Do đó, $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \pmod{p^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Thí dụ 3. *Tìm số nguyên dương* n *nhỏ nhất thỏa mãn:* $2^{2015} \mid 17^n - 1$.

Lời giải. Giả sử n là số nguyên dương sao cho $2^{2015} \mid 17^n - 1$. Vì $4 \mid (17-1)$ nên theo bổ đề LTE 3 ta có:

$$v_2(17^n - 1^n) = v_2(17-1) + v_2(n) = 4 + v_2(n).$$

Suy ra: $4+v_2(n)\ge 2015 \Rightarrow v_2(n)\ge 2011 \Rightarrow n\ge 2^{2011}$.

Hơn nữa cũng theo bổ đề LTE 3 ta có:

$$v_2(17^{2^{2011}}-1)=v_2(17-1)+v_2(2^{2011})$$
$$=4+2011=2015.$$

Do đó, $2^{2015}\mid(17^{2^{2011}}-1)$. Vậy số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là 2^{2011}.

***Thí dụ 4.* (Ireland 1996)** *Cho số nguyên tố p và a, n là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng: nếu $2^p+3^p=a^n$ thì $n=1$.*

Lời giải

– Nếu $p=2$ thì $a^n=13\Rightarrow a=13$ và $n=1$.

– Nếu $p=5$ thì $a^n=275=5^2.11\Rightarrow a=275,\ n=1$.

– Nếu $p\nmid 5$ thì vì $5\mid(2+3)$ và $5\nmid 2, 5\nmid 3$ nên theo bổ đề LTE 2 ta có:

$$v_5(2^p+3^p)=v_5(2+3)+v_5(p)=1.$$

Suy ra: $a^n=2^p+3^p=5.m$, với $m\in\mathbb{Z}^+$, $(5, m)=1$.

Do đó: $a^n\,\vdots\,5\Rightarrow a\,\vdots\,5$ và $n=1$ (do 5 là số nguyên tố).

***Thí dụ 5.* (Czech Slovakia 1996)** Tìm tất cả các bộ ba $(x; y; p)$ *gồm hai số nguyên không âm x, y và số nguyên tố p thỏa mãn: $p^x-y^p=1$.*

Lời giải. Dễ thấy nếu $x=0$ thì $y=0$ và ngược lại, $y=0$ thì $x=0$. Ta xét $x, y>0$.

• Nếu $p=2$ thì ta có $2^x=y^2+1\Rightarrow y$ lẻ nên theo bổ đề LTE 5 ta có: $x=v_2(2^x)=v_2(y^2+1)=1\Rightarrow y=1$.

• Nếu p lẻ thì $p^x=y^p+1$.

Theo định lí Fermat nhỏ ta có:

$$p^x=y^p+1\equiv y+1\ (\mathrm{mod}\ p)\ \Rightarrow\ p\mid y+1\ .$$

Hiển nhiên y và 1 đều không chia hết cho p, nên theo bổ đề LTE 2 ta có:

$$v_p(y^p+1)=v_p(y+1)+v_p(p)=v_p(y+1)+1.$$

Vì $y^p+1=p^x\Rightarrow v_p(y^p+1)=x\Rightarrow v_p(y+1)=x-1$.

Ta có:

$$p^x=y^p+1=(y+1)(y^{p-1}-y^{p-2}+...+y^2-y+1)$$

Do đó $\begin{cases} y+1=p^{x-1} \\ y^{p-1}-y^{p-2}+...+y^2-y+1=p\end{cases}$.

Nếu $y=1$ thì $p^x=2$ (loại vì p lẻ).

Nếu $y=2$ thì $p^{x-1}=3\Rightarrow p=3, x=2$ (thỏa mãn).

Nếu $y>2$ thì ta có: $p=y^{p-1}-y^{p-2}+...+y^2-y+1$

$$=y^{p-2}(y-1)+y^{p-4}(y-1)+ ...+y(y-1)+1>y+1=p^{x-1}$$

$\Rightarrow x=1\Rightarrow v_p(y+1)=0$, vô lí vì $p\mid y+1$.

Vậy bộ ba các số $(x; y; p)$ cần tìm là $(1; 1; 2)$, $(2; 2; 3)$, $(0; 0; p)$, trong đó p là số nguyên tố tùy ý.

Thí dụ 6. *Cho a, b là 2 số hữu tỉ phân biệt sao cho $a^n-b^n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng: a, b cũng là số nguyên.*

Lời giải. Nếu $a=-b$ thì ta có: $2a=m\in\mathbb{Z}$ và $2a^3\in\mathbb{Z}$. Do đó, $2a^3=\dfrac{m^3}{4}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\,\vdots\,2\Rightarrow a\in\mathbb{Z}$ và $b\in\mathbb{Z}$. Xét $a\ne\pm b$. Giả sử $a=\dfrac{x}{z}, b=\dfrac{y}{z'}$, trong đó $x,y\in\mathbb{Z}, z,z'\in\mathbb{Z}^+, (x,z)=(y,z')=1$. Ta có:

$$a-b=\frac{x}{z}-\frac{y}{z'}\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z'(a-b)=z'.\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z'}\right)=z'.\frac{x}{z}-y\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow z'.\dfrac{x}{z}\in\mathbb{Z}$. Vì $(x,z)=1$ nên $z\mid z'$.

Tương tự: $z'\mid z$. Do đó, $z'=z$. Vậy $a=\dfrac{x}{z}, b=\dfrac{y}{z}$, trong đó $(x,z)=(y,z)=1$, $x\ne\pm y$ (do $a\ne\pm b$).

Ta sẽ chứng minh: $z=1$.

Thật vậy, giả sử phản chứng là $z>1$. Theo giả thiết ta có: $z^n\mid x^n-y^n,\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Gọi p là một ước nguyên tố của z thì $p^n\mid z^n\mid x^n-y^n,\forall n\in\mathbb{Z}^+$, nói riêng với $n=1$ thì $p\mid(x-y)$. Suy ra: $n\le v_p(x^n-y^n),\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Vì $(x,z)=(y,z)=1$ nên $p\nmid x, p\nmid y$. Ta xét 2 trường hợp :

• TH1: $p=2$. Khi đó, $2\nmid x, 2\nmid y\ \Rightarrow x, y$ là hai số nguyên lẻ. Theo bổ đề LTE 4 ta có:

$$2^m\le v_2(x^{2^m}-y^{2^m})=v_2(x-y)+v_2(x+y)+v_2(2^m)-1$$
$$=v_2(x-y)+v_2(x+y)+m-1,\ \ \forall m\in\mathbb{Z}^+.$$
$$\Rightarrow 2^m-m\le v_2(x-y)+v_2(x+y)-1,\ \ \forall m\in\mathbb{Z}^+.$$

Điều này vô lí vì $2^m-m=(1+1)^m-m$

$$>C_m^2-m=\frac{m(m-1)}{2}-m,\forall m>1, m\in\mathbb{Z}^+$$

nên $\lim\limits_{m\to+\infty}(2^m-m)=+\infty$, mà $x\ne\pm y$ nên $v_2(x-y)+v_2(x+y)-1$ là hữu hạn.

• TH2: p là số nguyên tố lẻ thì theo bổ đề LTE 1 ta có: $p^m\le v_p(x^{p^m}-y^{p^m})=v_p(x-y)+v_p(p^m)$

$$=v_p(x-y)+m,\forall m\in\mathbb{Z}^+$$

Điều này vô lí vì: $\lim\limits_{m\to+\infty}(p^m-m)=+\infty$ và $v_2(x-y)$ là hữu hạn (do $x\neq y$). Vậy $z=1$ và ta có đpcm.

Thí dụ 7. *Cho a, b là 2 số thực phân biệt sao cho $a^n-b^n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng: a, b cũng là số nguyên.*

Lời giải. Ta có:

$$\begin{cases}a-b=k\in\mathbb{Z},k\neq 0\\(a-b)(a+b)=a^2-b^2=m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=k\in\mathbb{Q}\\a+b=\dfrac{m}{k}\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}a\in\mathbb{Q}\\b\in\mathbb{Q}\end{cases}$. Áp dụng thí dụ 6 ta có $\begin{cases}a\in\mathbb{Z}\\b\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Thí dụ 8. *Cho a, b là 2 số hữu tỉ sao cho $a^n+b^n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng: a, b cũng là số nguyên.*

Lời giải. Nếu $a=-b$ thì ta có: $2a^2=m\in\mathbb{Z}$ và $2a^4\in\mathbb{Z}$. Do đó, $2a^4=\dfrac{m^2}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\,\vdots\,2\Rightarrow a^2\in\mathbb{Z}$, mà $a\in\mathbb{Q}$ nên $a\in\mathbb{Z}$, suy ra $b\in\mathbb{Z}$.

Xét $a\neq -b$. Giả sử $a=\dfrac{x}{z},b=\dfrac{y}{z'}$, trong đó $x,y\in\mathbb{Z},z,z'\in\mathbb{Z}^+,(x,z)=(y,z')=1$. Ta có:

$$a+b=\frac{x}{z}+\frac{y}{z'}\in\mathbb{Z}\Rightarrow z'(a+b)$$

$$=z'.\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z'}\right)=z'.\frac{x}{z}+y\in\mathbb{Z}\Rightarrow z'.\frac{x}{z}\in\mathbb{Z}.$$

Vì $(x,z)=1$ nên $z\mid z'$.

Tương tự: $z'\mid z$. Do đó, $z'=z$. Vậy $a=\dfrac{x}{z},b=\dfrac{y}{z}$, trong đó $(x,z)=(y,z)=1$, $x\neq -y$ (do $a\neq -b$).

Ta sẽ chứng minh: $z=1$.

Thật vậy, giả sử phản chứng là $z>1$. Theo giả thiết ta có: $z^n\mid x^n+y^n,\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Gọi p là một ước nguyên tố của z thì $p^n\mid z^n\mid(x^n+y^n),\forall n\in\mathbb{Z}^+$, nói riêng với $n=1$ thì $p\mid(x+y)$. Suy ra: $n\le v_p(x^n+y^n),\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Vì $(x,z)=(y,z)=1$ nên $p\nmid x,p\nmid y$. Ta xét 2 trường hợp :

- TH1: $p=2$. Khi đó, $2\nmid x,2\nmid y\Rightarrow x,y$ là hai số nguyên lẻ. Theo bổ đề LTE 5 ta có:

$2^m\le v_2(x^{2^m}+y^{2^m})=1$, $\forall m\in\mathbb{Z}^+$. Điều này vô lí.

- TH2: p là số nguyên tố lẻ thì theo bổ đề LTE 2 ta có: $p^m\le v_p(x^{p^m}+y^{p^m})=v_p(x+y)+v_p(p^m)$

$$=v_p(x+y)+m,\forall m\in\mathbb{Z}^+$$

Điều này vô lí vì $\lim\limits_{m\to+\infty}(p^m-m)=+\infty$ và $v_2(x+y)$ là hữu hạn (do $x\neq -y$). Vậy $z=1$ và ta có đpcm.

➢ **Chú ý.** Tồn tại hai số vô tỉ a, b sao cho $a^n+b^n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Thật vậy, với $a=1-\sqrt{2},b=1+\sqrt{2}$ thì ta có a, b là hai số vô tỉ . Đặt $a^n+b^n=(1-\sqrt{2})^n+(1+\sqrt{2})^n=S_n$.

Ta có: a, b là 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2-2x-1=0.$$

Từ đó, dễ dàng thấy rằng: $S_{n+2}-2S_{n+1}-S_n=0$. Và do $S_1=2,S_2=6\in\mathbb{Z}$ nên dễ dàng bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $S_n\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Thí dụ 9. *Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho: 2^x-1 là số chính phương.*

Lời giải. Giả sử: $2^x-1=y^2,y\in\mathbb{Z}^+$. Vì x là số nguyên dương nên 2^x-1 là số lẻ, suy ra y là số lẻ. Nên theo bổ đề LTE 5 ta có:

$$x=v_2(2^x)=v_2(y^2+1)=1.$$

Cuối cùng xin dành cho bạn đọc một số bài tập rèn luyện sau đây:

1. Cho m là một số nguyên dương. Tìm các số nguyên dương x, y, n sao cho: $(x^2+y^2)^m=(xy)^n$.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho:

$$x^{2009}+y^{2009}=7^z.$$

3. (*Olympic* 30 – 4 – 2012, *Lớp* 10) Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, không tồn tại hai số nguyên dương x, y sao cho: $2^p+3^p=x^{y+1}$.

4. Tìm tất cả các số nguyên dương $a,b>1$ sao cho

$$b^a\mid a^b-1.$$

5. (*IMO* 1990) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2\mid 2^n+1$.

6. (*IMO* 2000) Có tồn tại hay không một số nguyên dương n sao cho n có đúng 2000 ước nguyên tố và n chia hết 2^n+1?

7. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho

$$n\mid 2^{n-1}+1.$$

8. Tìm tất cả các số nguyên không âm x, y, z thỏa mãn: $2^x+3^y=z^2$.

9. Giải phương trình nghiệm nguyên dương:

$$(n-1)!+1=n^m.$$

10. (*Bulgaria* 1997) Cho n là số nguyên dương sao cho 3^n-2^n là lũy thừa của một số nguyên tố. Chứng minh rằng n là một số nguyên tố.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 458 (8.2015)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Đoàn Việt Nam tại Kì thi IMO 2015.

Từ trái qua phải: Thầy *Lê Bá Khánh Trình*, em *Nguyễn Tuấn Hải Đăng*, em *Vũ Xuân Trung*, em *Hoàng Anh Tài*, em *Nguyễn Thị Việt Hà*, em *Nguyễn Huy Hoàng*, em *Nguyễn Thế Hoàn*, Thầy *Lê Anh Vinh*.

• Công đoàn nhà trường liên tục đạt Công đoàn cơ sở vững mạnh xuất sắc được Tổng Liên Đoàn Lao động Việt Nam và Công Đoàn Giáo dục Việt Nam tặng Bằng khen.

• Chi bộ nhà trường có 32 đảng viên, hằng năm đều được công nhận Chi Bộ trong sạch, vững mạnh.

Với những thành tích nổi bật nêu trên, trường liên tục được UBND Tỉnh công nhận đạt danh hiệu Tập thể Lao động xuất sắc, được nhận Cờ thi đua đơn vị xuất sắc của Tỉnh, Cờ thi đua xuất sắc và Bằng khen của Bộ Giáo Dục & Đào Tạo, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ và đặc biệt là được Chủ tịch Nước trao tặng Huân chương Lao động hạng Ba.

Tự hào với những thành tích trong 15 năm qua, tập thể cán bộ giáo viên và học sinh của trường vẫn tiếp tục không ngừng phấn đấu để đạt được nhiều kết quả tốt hơn nữa, xứng đáng với niềm vinh dự của ngôi trường mang tên Nhà giáo lỗi lạc Chu Văn An cũng như sự tin tưởng của Ngành và Nhân dân đã giao phó.

Một số hình ảnh hoạt động của Thầy và Trò Trường THCS Chu Văn An trong năm học 2014 - 2015

TRƯỜNG THCS CHU VĂN AN - THÀNH PHỐ HUẾ

Địa chỉ 36A Dương Văn An, Thành phố Huế - Điện thoại 054.3810649
Website: http://thcs-cvan.tphue.thuathienhue.edu.vn/

NGUT *Nguyễn Phước*
Hiệu trưởng - Bí thư Chi bộ nhà trường

Hội đồng Sư phạm Trường THCS Chu Văn An

Trường THCS Chu Văn An được thành lập vào đầu năm học 2000 – 2001 theo quyết định số 847/QĐ-TCCB ngày 23-8-2000 của Giám đốc Sở GD&ĐT tỉnh Thừa Thiên Huế.

Đến nay, trường có 99 cán bộ giáo viên, nhân viên và gần 2000 học sinh được biên chế thành 45 lớp. Trường có đầy đủ phòng học, phòng chức năng, phòng bộ môn, nhà thi đấu đa năng với nhiều trang thiết bị khá hiện đại. Khuôn viên trường thoáng mát, sạch sẽ, xa khu dân cư, cảnh quan nhà trường rất thân thiện để tiến hành các hoạt động sư phạm. Qua 15 năm xây dựng và trưởng thành, thầy và trò Trường THCS Chu Văn An đã nỗ lực phấn đấu đáp ứng yêu cầu phát triển sự nghiệp giáo dục và đào tạo và đã đạt được những thành tích sau:

• Trường luôn là một trong những đơn vị nằm tốp đầu về thành tích học sinh giỏi cấp Thành phố, cấp Tỉnh và cấp Quốc gia. Hằng năm số học sinh đậu vào trường THPT chuyên Quốc Học khá cao, năm học 2013-2014 trong số 17 học sinh đỗ vào trường chuyên Quốc Học có 2 học sinh đậu thủ khoa môn Lịch sử và môn Vật lý, đặc biệt hơn nữa, năm học 2014-2015 trường rất tự hào khi số học sinh đỗ vào trường chuyên Quốc Học đã tăng lên 31 em. Bên cạnh thành tích về văn hóa Trường còn có 1 học sinh đạt huy chương Vàng môn Cờ vua cấp Quốc gia và khu vực Đông Nam Á.

• Kể từ năm học đầu tiên đến nay quý thầy cô giáo trong nhà trường luôn thi đua dạy tốt học tốt, có rất nhiều điển hình tiên tiến, đội ngũ giáo viên ngày càng lớn mạnh về cả số lượng và chất lượng, qua các hội thi đã có 8 giáo viên được công nhận là giáo viên dạy giỏi cấp Tỉnh, 39 giáo viên đạt giải giáo viên dạy giỏi cấp Thành phố.

• Nhà trường rất quan tâm đến giáo dục toàn diện cho học sinh, các em Trường THCS Chu Văn An không chỉ học giỏi mà còn tham gia các phong trào TDTT rất sôi nổi, mặt mạnh của trường là Cờ vua và Điền kinh, nhiều năm liền trường đạt giải cao trong Hội Khỏe Phù Đổng cấp thành phố và đã có nhiều học sinh tham gia giải cấp Tỉnh và cấp Quốc gia.

• Cơ sở vật chất của nhà trường ngày càng được tăng cường theo hướng hiện đại, vào đầu năm học 2015-2016 tất cả các phòng học của nhà trường đều được trang bị 1 TV trên 50 inches hoặc 1 projector. Ngoài 7 phòng bộ môn đã có, năm học mới nhà trường đã được lãnh đạo các cấp trang bị thêm 2 phòng học bộ môn, trong đó có 1 phòng ngoại ngữ.

• Phong trào Đội TNTP luôn được các cấp khen thưởng, trong đó có nhiều năm đạt danh hiệu vững mạnh cấp Trung ương.

(xem tiếp bìa 3)

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT8M5
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2015
Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng