TS. NGUYỄN CAM

Sổ tay

TOÁN HỌC

LỚP 10, 11, 12

LUYỆN THI TÚ TÀI

LUYỆN THI ĐẠI HỌC & CAO ĐẲNG

ĐHQG Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. NGUYỄN CAM

SỔ TAY TOÁN HỌC

Lớp 10 . 11 . 12

Luyện thi TÚ TÀI

Luyện thi ĐẠI HỌC & CAO ĐẲNG

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Phần 1

ĐẠI SỐ

1. PHÉP CHIA HẾT TRONG SỐ HỌC

- *Một số chia hết cho 2 khi có chữ số tận cùng là số chẵn.*
- *Một số chia hết cho 3 khi tổng các chữ số chia hết cho 3.*
- *Một số chia hết cho 9 khi tổng các chữ số chia hết cho 9.*
- *Một số chia hết cho 6 khi đồng thời chia hết cho 2 và cho 3.*
- *Một số chia hết cho 5 khi chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5.*
- *Một số chia hết cho 4 khi hai chữ số tận cùng bằng 0 hoặc tạo nên một số chia hết cho 4.*
- *Một số chia hết cho 8 khi có ba chữ số tận cùng bằng 0 hoặc tạo nên một số chia hết cho 8.*
- *Tích hai số nguyên liên tiếp chia hết cho 2.*
- *Tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.*
- *Tích n số nguyên liên tiếp chia hết cho*

$$n! = 1.2.3...n$$

2. TỈ LỆ THỨC

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \pm c}{b \pm d}$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d}$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{b \pm a} = \dfrac{c}{d \pm c}$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a + b}{a - b} = \dfrac{c + d}{c - d}$
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{c - d}{c + d}$

3. HẰNG ĐẲNG THỨC

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$

  $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

- $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) =$

  $= (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$

- $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - \left(\sqrt{2}ab\right)^2$

  $= (a^2 + b^2 + \sqrt{2}\,ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2}\,ab)$

4. TAM GIÁC PASCAL

- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \to & 2 & \to & 1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
1 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

5. NHỊ THỨC NEWTON

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$$

trong đó : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

6. CẤP SỐ CỘNG

- **Định nghĩa**

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ là cấp số cộng với công sai r nếu :

$$a_i = a_{i-1} + r \qquad (i = 2, ..., n)$$

- **Tính chất** i) $a_i = a_1 + (i-1)r$

ii) $2a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$

iii) $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ...$

- **Tổng của cấp số cộng**

$$S_n = a_1 + ... + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

Trường hợp đặc biệt :

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

7. CẤP SỐ NHÂN

- **Định nghĩa**

$(a_1, a_2, ..., a_n)$ là cấp số nhân với công bội q nếu :

$$a_i = a_{i-1}.q \qquad (i = 2, ..., n)$$

- **Tính chất**

i) $a_i = a_1 . q^{i-1} \qquad (i = 2, ..., n)$

ii) $a_i^2 = a_{i-1} . a_{i+1} \qquad (i = 2, ..., n-1)$

- **Tổng của cấp số nhân**

$$S_n = a_1 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Khi $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a_1}{1 - q}$

Trường hợp đặc biệt :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ (với } x \neq 1)$$

8. TỔNG SỐ HỮU HẠN THÔNG DỤNG

- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$
- $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \dfrac{1}{3} n(4n^2 - 1)$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$
- $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$

9. BẤT ĐẲNG THỨC

- **Tính chất cơ bản**

  * $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$

  * $(a \geq b$ và $b \geq c)$ thì $a \geq c$

  * $a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c, \quad \forall c \in R$

* $(a_1 \geq b_1$ và $a_2 \geq b_2) \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$
* $a \geq b \Rightarrow ac \geq bc, \forall c > 0$
* $a \geq b \Rightarrow ac \leq bc, \forall c < 0$
* $(a_1 \geq b_1 > 0$ và $a_2 \geq b_2 > 0) \Rightarrow a_1a_2 \geq b_1b_2$
* $ab > 0$ thì : $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
* $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$
* $|x| \geq \alpha \ (\alpha > 0) \Leftrightarrow (x \leq -\alpha$ hay $x \geq \alpha)$
* $|x + y| \leq |x| + |y| \quad , \forall x \in R, \forall y \in R$
* $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad , \forall x \in R, \forall y \in R$
* $a > b > 0 \Rightarrow a^x > b^x \quad , \forall x > 0$
* $a > b > 0 \Rightarrow a^x < b^x \quad , \forall x < 0$
* $a > 1$ thì : $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
* $0 < a < 1$ thì : $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

- **Bất đẳng thức Cauchy**

Dạng cơ bản :

i) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ với $a \in R, b \in R$

ii) Cho $a \geq 0, b \geq 0$ thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b$.

Dạng mở rộng :

Cho n số $a_1 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0$ thì :

$$a_1 + \ldots + a_n \geq n.\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a_1 = \ldots = a_n$

Các biểu thức thông dụng :

* $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad , \forall x > 0$

* $a^x + a^{-x} \geq 2 \quad , \forall x \in R$

* $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2 \quad , \forall x \neq 0$

* $|tgx + cotgx| \geq 2, \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$

* $|\log_a b + \log_b a| \geq 2$ $(a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1)$

- **Bất đẳng thức Schwartz**

Dạng cơ bản :

$$|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$$

với $\forall x, y, a, b \in R$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

Dạng tổng quát :

Cho bất kì các số $a_1, ..., a_n$ và $b_1, ..., b_n$ thì :

$$|a_1b_1 + ... + a_nb_n| \leq \sqrt{(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $\frac{b_1}{a_1} = ... = \frac{b_n}{a_n}$

- **Bất đẳng thức Bernouilli**

Cho $x > -1$ và $n \in N$ thì :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0$ hay $y = 1$

- **Bất đẳng thức và bài toán Max,Min**

Cho $x \geq 0$, $y \geq 0$ thỏa $x + y = k$ (hằng số) thì tích số xy đạt max khi :

$$x = y = \frac{k}{2}$$

Cho $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 + \ldots + x_n = k$ thì tích số $x_1 \ldots x_n$ đạt max khi :

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{k}{n}$$

Cho $x \geq 0$, $y \geq 0$ thỏa $xy = k$ thì tổng số $x + y$ đạt min khi :

$$x = y = \sqrt{k}$$

Cho $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ thỏa $x_1 \ldots x_n = k$ thì tổng số $x_1 + \ldots + x_n$ đạt min khi :

$$x_1 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{k}$$

- **Ứng dụng**

Với $y = \sqrt{A} + \sqrt{B}$ $(A \geq 0, B \geq 0, A + B = k)$:

Ta có $y^2 = A + B + 2\sqrt{AB} = k + 2\sqrt{AB}$

nên y đạt max $\Leftrightarrow$ AB đạt max

$\Leftrightarrow$ $A = B = \dfrac{k}{2}$ do đó :

$$\max y = \sqrt{2k}$$

Với $y = A^n.B$

$(A \geq 0, B \geq 0, A + B = k, n \geq 1)$:

Ta có $$y = n^n.\left(\frac{A}{n}\cdots\frac{A}{n}\right)\cdot B$$

trong đó $$\left(\frac{A}{n}+\ldots+\frac{A}{n}\right)+B = k$$

nên y đạt max khi :

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{1} = \frac{A+B}{n+1} = \frac{k}{n+1}$$

tức $$A = \frac{kn}{n+1}; \qquad B = \frac{k}{n+1}$$

Do đó $$y_{max} = \left(\frac{kn}{n+1}\right)^n \frac{k}{n+1}$$

Với $y = A^n.B^m$

$(A \geq 0, B \geq 0, A + B = k, n \geq 1, m \geq 1)$

Ta có : $$y = n^n.m^m.\left(\frac{A}{n}\cdots\frac{A}{n}\right)\left(\frac{B}{m}\cdots\frac{B}{m}\right)$$

trong đó :

$$\left(\frac{A}{n}+\ldots+\frac{A}{n}\right)+\left(\frac{B}{m}+\ldots+\frac{B}{m}\right) = A + B = k$$

nên y đạt max chỉ khi :

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{A+B}{n+m} = \frac{k}{n+m}$$

tức là $A = \frac{kn}{n+m}$; $B = \frac{km}{n+m}$

Do đó : $y_{max} = \left(\frac{kn}{n+m}\right)^n \cdot \left(\frac{km}{n+m}\right)^m$

Với $y = A\cos x + B\sin x$:

Ta có :

$|y| = |A\cos x + B\sin x| \leq \sqrt{A^2 + B^2}$,

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{A^2+B^2} \leq y \leq \sqrt{A^2+B^2}$, $\forall x$

Do đó : $y_{min} = -\sqrt{A^2+B^2}$

$y_{max} = \sqrt{A^2+B^2}$

10. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ax + b = 0

Nếu $a \neq 0$: phương trình có nghiệm nhất $x = -\frac{b}{a}$

Nếu $a = b = 0$: phương trình vô (nghiệm là $\forall x \in R$)

Nếu $a = 0$, $b \neq 0$: phương trình vô nghi

11. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ax + b ≥

Nếu $a > 0$: phương trình có nghiệm là $x \geq$

Nếu $a < 0$: phương trình có nghiệm là $x \leq$

Nếu $a = 0$, $b < 0$: phương trình vô nghi

Nếu $a = 0$, $b \geq 0$: mọi x là nghiệm phương trình

- **Dấu nhị thức $f(x) = ax + b$**

$$af(x) > 0 \text{ khi } x > -\frac{b}{a}$$

$$af(x) < 0 \text{ khi } x < -\frac{b}{a}$$

- **Hệ quả**

$f(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow (a = 0 \text{ và } b > 0)$

$f(x) < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow (a = 0 \text{ và } b < 0)$

$f(x) \geq 0, \forall x \in [u, v] \Leftrightarrow (f(u) \geq 0 \text{ và } f(v) \geq 0)$

$f(x) \leq 0, \forall x \in [u, v] \Leftrightarrow (f(u) \leq 0 \text{ và } f(v) \leq 0)$

12. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Xét $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Nếu $D \neq 0$: hệ có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Nếu $D = 0$, $D_x \neq 0$ (hay $D_y \neq 0$) : hệ vô nghiệm

Nếu $D = D_x = D_y = 0$: hệ vô định

13. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $ax^2 + bx + c = 0$

- Nghiệm là : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

  với $\Delta = b^2 - 4ac$, $\Delta' = b'^2 - ac$, $b = 2b'$

- Công thức VIET :

  $$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

- Nghiệm kép $x_o = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b'}{a}$ (khi $\Delta = 0$

  hoặc $\Delta' = 0$

- Khi $a + b + c = 0$ thì $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{c}{a} = P$

  Khi $a - b + c = 0$ thì $x_1 = -1, x_2 = -\dfrac{c}{a} = -$

- Nếu $x + y = S$ và $xy = P$ thì x và y l nghiệm của phương trình sau :

  $$X^2 - SX + P = 0$$

14. TAM THỨC BẬC HAI $f(x) = ax^2 + bx + c$

- **Phân tích tam thức**

  Nếu $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

  Nếu $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_o)^2$ với $x_o = \dfrac{-b}{2a}$

  Nếu $\Delta < 0$: $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

- **Dấu của tam thức**

Nếu $\Delta < 0$: $af(x) > 0, \forall x \in R$

Nếu $\Delta = 0$: $af(x) \geq 0, \forall x \in R$

$$\left(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \right)$$

Nếu $\Delta > 0$: $af(x) > 0$ khi $(x < x_1$ hay $x > x_2)$

$af(x) < 0$ khi $x_1 < x < x_2$

- **Hệ quả**

$f(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow (\Delta < 0, a > 0)$

$f(x) < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow (\Delta < 0, a < 0)$

$f(x) \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow (\Delta \leq 0, a > 0)$

$f(x) \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow (\Delta \leq 0, a < 0)$

- **So sánh nghiệm của f(x) với số α**

Nếu $af(\alpha) < 0 : x_1 < \alpha < x_2$

Nếu $af(\alpha) > 0, \Delta > 0, \frac{S}{2} - \alpha > 0 : \alpha < x_1 < x_2$

Nếu $af(\alpha) > 0, \Delta > 0, \frac{S}{2} - \alpha < 0 : x_1 < x_2 < \alpha$

- **Hệ quả**

$f(\alpha).f(\beta) < 0$

$\Rightarrow \quad \alpha < x_1 < \beta < x_2 \quad$ (nếu $\alpha < \beta$)

hay $\quad x_1 < \alpha < x_2 < \beta$

$af(x) < 0, \ \forall x \in [u, v]$

$\Leftrightarrow \quad x_1 < u < v < x_2$

$\Leftrightarrow \quad (af(u) < 0$ và $af(v) < 0))$

$af(x) \leq 0, \ \forall x \in [u, v]$

$\Leftrightarrow \quad x_1 \leq u < v \leq x_2$

$\Leftrightarrow \quad (af(u) \leq 0$ và $af(v) \leq 0))$

Nếu có α để $af(\alpha) < 0$ thì $\Delta > 0$

Nếu có α, β để $f(\alpha)f(\beta) < 0$ thì $\Delta > 0$

Nếu ($\alpha > 0$, $\Delta \geq 0$, $|x_1x_2| \leq \alpha^2$) thì $f(x) = 0$ có nghiệm thỏa điều kiện $|x| \leq \alpha$

- **So sánh nghiệm của f(x) với số 0**

Nếu $P < 0$: $x_1 < 0 < x_2$

Nếu $\Delta > 0$, $P > 0$, $S > 0$: $0 < x_1 < x_2$

Nếu $\Delta > 0$, $P > 0$, $S < 0$: $x_1 < x_2 < 0$

Hệ quả : – Nếu $P < 0$ thì $\Delta > 0$

– Nếu $P \leq 0$ thì $\Delta \geq 0$

15. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $ax^2 + bx + c > 0$ (với $a \neq 0$)

Xét $a > 0$:

– Nếu $\Delta < 0$: nghiệm của bất phương trình là $\forall x \in R$

– Nếu $\Delta = 0$: nghiệm của bất phương trình là $\forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$

– Nếu $\Delta > 0$: nghiệm của bất phương trình là $x < \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ hay $x > \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Xét $a < 0$:

– Nếu $\Delta \le 0$: bất phương trình vô nghiệm

– Nếu $\Delta > 0$: nghiệm của bất phương trình là $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} < x < \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

16. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$

- Công thức VIET

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ &x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ &x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{aligned}}$$

trong đó x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình.

- **Nhẩm nghiệm**

– Nếu tổng các hệ số bằng 0 thì phương trình có nghiệm $x = 1$

– Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình có nghiệm $x = -1$

(Nguyên tắc trên đúng cho mọi phương

trình đa thức)

- **Thuật chia Horner**

Chia $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cho $x - \alpha$

	a	b	c	d
α	a	$\alpha a + b \equiv b'$	$\alpha b' + c \equiv c'$	$\alpha c' + d \equiv d'$

Kết quả phép chia là :

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x - \alpha} = ax^2 + b'x + c' + \frac{d'}{x - \alpha}$$

Nếu α là nghiệm của phương trình thì :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(ax^2 + b'x + c')$$

7. PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Dùng ẩn số phụ $X = x^2$ thì phương trình trở thành :

$$\begin{cases} aX^2 + bX + c = 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- Nếu $\Delta > 0$, $P > 0$, $S > 0$: phương trình có 4 nghiệm
- Nếu $\Delta > 0$, $P = 0$, $S > 0$: phương trình có 3 nghiệm
- Nếu $\Delta > 0$, $P > 0$, $S < 0$: phương trình vô nghiệm
- Nếu $P < 0$: phương trình có 2 nghiệm

- Phương trình có nghiệm kép khi :

$$P = 0 \text{ hay } (\Delta = 0 \text{ và } S > 0)$$

- Phương trình có 4 nghiệm tạo thành cấp số cộng khi có : $0 < X_1 < X_2$ tạo nên

$$-\sqrt{X_2} < -\sqrt{X_1} < \sqrt{X_1} < \sqrt{X_2}$$

thỏa : $\sqrt{X_2} - \sqrt{X_1} = 2\sqrt{X_1}$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{X_1} = \sqrt{X_2} \quad \Leftrightarrow \quad 9X_1 = X_2$$

18. PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

- **Dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$**

$$\left(\textbf{với } \mathbf{a \neq 0,\ \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2}\right)$$

Chia 2 vế cho x^2 thì có :

$$a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0$$

Đặt ẩn số phụ $X = x + \dfrac{d}{bx}$ thì :

$$X = x^2 + \frac{e}{ax^2} + \frac{2d}{b} \qquad \left(\text{do } \frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2\right)$$

nên phương trình trở thành :

$$aX^2 + bX + c - \frac{2ad}{b} = 0$$

Trường hợp đặc biệt : $a = e$, $b = \pm d$ thì có :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $X = x \pm \frac{1}{x}$ để đưa về phương trình bậc hai.

- **Dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = k$**

  (với $a + b = c + d$)

Dùng ẩn phụ :

$$X = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

nên : $(x + c)(x + d) = X - ab + cd$

Phương trình cho ta :

$$X(X - ab + cd) = k$$

$$\Leftrightarrow \quad X^2 + (cd - ab)X - k = 0$$

- **Dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$**

  (với a, b, c là các hệ số)

Dùng ẩn số phụ $X = x + \frac{a + b}{2}$

thì $x + a = X + \alpha$

$x + b = X - \alpha$ (trong đó $\alpha = \frac{a - b}{2}$)

Phương trình trở thành :

$$(X + \alpha)^4 + (X - \alpha)^4 = c$$

$$\Leftrightarrow \quad 2X^4 + 12\alpha^2X^2 + 2\alpha^4 - c = 0$$

Đây là phương trình trùng phương.

• **Dạng** $\mathbf{a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0}$

Dùng ẩn phụ $X = x + \frac{1}{x}$ thì :

$$X^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = X^3 - 3X$$

và phương trình cho ta :

$$a(X^3 - 3X) + bX + c = 0$$

Đây là phương trình bậc ba.

• **Dạng** $\mathbf{(x - n)^{2m} + [x - (n + 1)]^{2m} = 1}$

(với $\mathbf{n \in Z, m \in N}$)

$x = n$, $x = n + 1$ là nghiệm. Sau đó lí luận chúng là nghiệm duy nhất bởi :

Nếu : $x < n$

thì $[x - (n + 1)]^{2m} > 1$

$\Rightarrow \quad (x - n)^{2m} + [x - (n + 1)]^{2m} > 1$

Nếu : $x > n + 1$

thì $(x - n)^{2m} > 1$

$\Rightarrow \quad (x - n)^{2m} + [x - (n + 1)]^{2m} > 1$

Nếu : $n < x < n + 1$

thì $0 < x - n < 1$ và $0 < n + 1 - x < 1$

nên : $(x-n)^{2m} < x - n$

$[x-(n+1)]^{2m} = (n+1-x)^{2m} < n+1-x$

Do đó :

$$(x-n)^{2m} + [x-(n+1)]^{2m} < 1$$

19. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

- **Phương trình dạng cơ bản $\sqrt{A} = B$**

Biến đổi $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$

- **Cách giải cho phương trình vô tỉ bậc hai**

– Đặt điều kiện

– Biến đổi để làm mất các dấu căn

– Giải phương trình thu được rồi kiểm tra lại điều kiện.

Lưu ý : $\sqrt[n]{x^n} = x$ *(nếu n lẻ)*

$\sqrt[n]{x^n} = |x|$ *(nếu n chẵn)*

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẬC CAO

- **Dạng $a\sqrt[n]{f(x)} + b\sqrt[n]{g(x)} + c = 0$**

(với $f(x) + g(x) = k$)

Đặt ẩn phụ : $u = \sqrt[n]{f(x)}$, $v = \sqrt[n]{g(x)}$

thì được : $\begin{cases} au + bv = -c \\ u^n + v^n = k \end{cases}$

Giải hệ tìm u, v rồi suy ra x.

- **Dạng** $a\sqrt[n]{f(x)} + b\sqrt[n]{g(x)} = c\sqrt[n]{h(x)}$

(với $f(x) + g(x) = h(x)$)

Trước tiên xét $h(x) = 0$. Với $h(x) \neq 0$ thì phương trình trở thành :

$$a\sqrt[n]{\frac{f(x)}{h(x)}} + b\sqrt[n]{\frac{g(x)}{h(x)}} = c$$

trong đó $\dfrac{f(x)}{h(x)} + \dfrac{g(x)}{h(x)} = 1$.

Đây là bài toán thuộc dạng vừa nêu ở trên.

- **Dạng** $a\sqrt[n]{f(x)} + b\sqrt[n]{g(x)} + c = 0$

(với $f(x).g(x) = k$)

Dùng ẩn số phụ $X = \sqrt[n]{f(x)}$ thì ta có :

$$\sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\frac{k}{f(x)}} = \frac{\sqrt[n]{k}}{X}$$

nên phương trình cho ta :

$$aX + \frac{b\sqrt[n]{k}}{X} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad aX^2 + cX + b\sqrt[n]{k} = 0$$

Giải X rồi suy ra x.

- **Dạng** $a\sqrt[n]{(x+\alpha)^2} + b\sqrt[n]{(x-\alpha)^2} + c\sqrt[n]{x^2-\alpha^2} = 0$

Trước tiên xét $x^2 - \alpha^2 = 0$. Với $x^2 - \alpha^2 \neq 0$ thì phương trình cho ta :

$$a\sqrt[n]{\frac{(x+\alpha)^2}{x^2-\alpha^2}} + b\sqrt[n]{\frac{(x-\alpha)^2}{x^2-\alpha^2}} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\sqrt[n]{\frac{x+\alpha}{x-\alpha}} + b\sqrt[n]{\frac{x-\alpha}{x+\alpha}} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad aX + \frac{b}{X} + c = 0 \qquad \left(\text{với } X = \sqrt[n]{\frac{x+\alpha}{x-\alpha}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad aX^2 + cX + b = 0$$

20. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

- $|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \pm g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

hoặc :

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f^2(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

- $|f(x)| = |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \pm g(x)$

hoặc :

$$|f(x)| = |g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad f^2(x) = g^2(x)$$

21. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

$$\sqrt{A} \geq B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} A \geq B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} \le B \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le A \le B^2 \\ B \ge 0 \end{cases}$$

***Lưuý** : Chỉ khi A và B đều không âm thì ta có:*

$$A \ge B \Leftrightarrow A^2 \ge B^2$$

22. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

- $|f(x)| \le \alpha \Leftrightarrow -\alpha \le f(x) \le \alpha$ (với $\alpha > 0$)
- $|f(x)| > \alpha \Leftrightarrow f(x) < -\alpha$

  hay : $f(x) > \alpha$ (với $\alpha > 0$)
- $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$
- $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -g(x) < f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- $|f(x)| > g(x)$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -g(x) \text{ hay } f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

  hay : $g(x) < 0$

23. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

- **Định nghĩa :**

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

(với $x > 0$, $a > 0$, $a \ne 1$, $y \in R$)

- **Các tính chất :**

Cho $x > 0, y > 0$ thì :

* $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

* $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

* $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad (\alpha \in R)$

* $\log_a x = \log_{a^\alpha} x^\alpha \quad (\alpha \neq 0)$

* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

* $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a} \quad (x \neq 1)$

* $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a \dfrac{1}{a} = -1$

Lưu ý :

$\log_a [f(x).g(x)] = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$

$\log_a [f(x)]^\alpha = \alpha \log_a |f(x)|$

- **Dạng cơ bản**

* $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

* $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ a(x) > 0, a(x) \neq 1 \end{cases}$

- **Phương pháp giải**

  * *Đặt điều kiện*

  * *Biến đổi theo một cơ số nào đó*

  * *Đặt ẩn phụ để đưa về các phương trình đại số giải được.*

  * *Kiểm tra điều kiện để nhận nghiệm*

  Nếu phương pháp trên không thực hiện được thì ta dùng cách giải sau đây :

  * *Nhẩm nghiệm*

  * *Lí luận nghiệm là duy nhất dựa vào tính đơn điệu của hàm số*

  Cần biết *: Nếu f là hàm số tăng (hoặc giảm) trên (a, b) thì phương trình f(x) = 0 có* ***tối đa*** *một nghiệm x ∈ (a, b).*

24. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Với a > 1 :

$$\log_a x > \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad x > y > 0$$

Với 0 < a < 1 :

$$\log_a x > \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < y$$

- $$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \\ a(x) > 1 \end{cases}$$

$$\text{hay : } \quad \begin{cases} 0 < f(x) < g(x) \\ 0 < a(x) < 1 \end{cases}$$

25. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- **Định nghĩa :**

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

(với $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$)

- **Tính chất**

* $a^{\log_a x} = x$ với $\forall x > 0$

* $\log_a a^x = x$ với $\forall x \in R$

* $a^x.a^y = a^{x+y}$

* $(a^x)^y = a^{x.y}$

* $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a^0 = 1$

- **Phương trình cơ bản**

* $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

* $|a(x)|^{f(x)} = |a(x)|^{g(x)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ a(x) \neq 0, a(x) \neq \pm 1 \end{cases}$$

- **Phương pháp giải**

* *Biến đổi theo một cơ số*

* *Đặt ẩn số phụ để đưa về các phương trình giải được*

* *Đưa về phương trình logarit*

Nếu các cách giải trên không hiệu quả ta dùng cách giải sau :

* *Nhẩm nghiệm*

* *Dùng tính đơn điệu của hàm số để lí luận phương trình có nghiệm duy nhất*

26. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Với a > 1 :

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x)$$

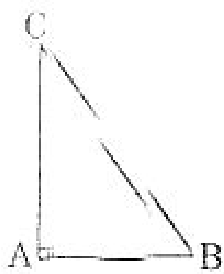
Với 0 < a < 1 :

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x)$$

Phần 2

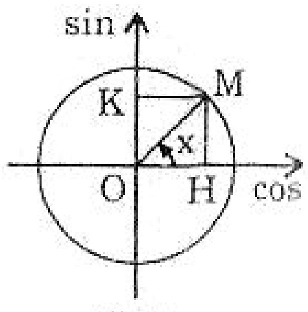
LƯỢNG GIÁC

1. HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

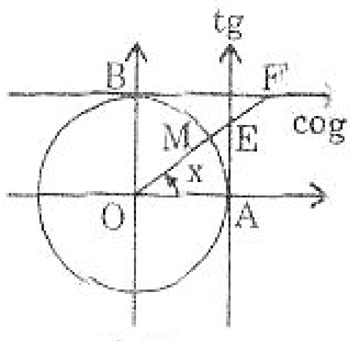


- $\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$
- $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$
- $\text{tg}B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$
- $\text{cotg}B = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$

2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



(h.1)



(h.2)

Với $x = (\widehat{Ox, OM})$ thì :

- $\cos x = \overline{OH}$; $\sin x = \overline{OK}$ (h.1)

- $\operatorname{tg}x = \overline{AE}$; $\operatorname{cotg}x = \overline{BF}$ (h.2)

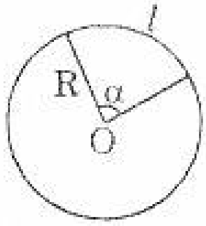
3. ĐƠN VỊ ĐO GÓC (CUNG)

- $180^\circ = \pi \text{ rad} \quad \Leftrightarrow \quad 1^\circ = \dfrac{\pi}{180} \text{ rad}$

- $\pi \text{ rad} = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad 1\text{rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

4. CHIỀU DÀI CUNG

$$\boxed{l = R\alpha}$$



l : chiều dài của cung

R : bán kính của đường tròn

α : góc ở tâm chắn cung tương ứng

(tính bằng radian)

5. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT

$$\boxed{S = \frac{1}{2}R^2\alpha}$$

S : diện tích hình quạt

R : bán kính đường tròn

α : góc ở tâm (tính bằng rad)

6. HỆ THỨC CƠ BẢN

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

- $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$; $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

- $\text{tgx} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\text{cotgx} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Hệ quả

- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

7. CÔNG THỨC CUNG LIÊN KẾT

§a. Cung đối nhau

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{tg}(-x) = -\text{tgx}$$

$$\text{cotg}(-x) = -\text{cotgx}$$

§b. Cung bù nhau

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{tg}(\pi - x) = -\text{tgx}$$

$$\text{cotg}(\pi - x) = -\text{cotgx}$$

§c. Cung phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg}x$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}x$$

§d. Cung hơn kém π

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg}x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg}x$$

§e. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg}x$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}x$$

8. CÔNG THỨC CỘNG

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$tg(a + b) = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb}$$

$$tg(a - b) = \frac{tga - tgb}{1 + tgatgb}$$

$$cotg(a + b) = \frac{cotgacotgb - 1}{cotga + cotgb}$$

$$cotg(a - b) = \frac{-(cotgacotgb + 1)}{cotga - cotgb}$$

- **Hệ quả**

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 \pm \sin 2x = (\sin x \pm \cos x)^2$$

$$tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tgx + 1}{1 - tgx}, \quad tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tgx - 1}{1 + tgx}$$

9. CÔNG THỨC CUNG BỘI

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$$

$$cotg2x = \frac{cotg^2x - 1}{2cotgx}$$

$$cos3x = 4cos^3x - 3cosx$$

$$sin3x = 3sinx - 4sin^3x$$

10. CÔNG THỨC HẠ BẬC

$$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$$

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$$

$$cos^3x = \frac{1}{4}(cos3x + 3cosx)$$

$$sin^3x = \frac{1}{4}(3sinx - sin3x)$$

11. CÔNG THỨC BIẾN TỔNG RA TÍCH

$$sina + sinb = 2sin\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$$

$$sina - sinb = 2cos\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2}$$

$$cosa + cosb = 2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$$

$$cosa - cosb = -2sin\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2}$$

$$\text{tga} + \text{tgb} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\text{tga} - \text{tgb} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$\text{cotga} + \text{cotgb} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$\text{cotga} - \text{cotgb} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$$

12. CÔNG THỨC BIẾN TÍCH RA TỔNG

$$\text{cosacosb} = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{sinacosb} = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\text{sinasinb} = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

13. CÔNG THỨC CUNG CHIA ĐÔI

Với $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ thì :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{tgx} = \frac{2t}{1-t^2}$$

14. BIỂU DIỄN ĐẦU CUNG

Cho $x = a + \frac{k2\pi}{n}$ (với $k \in Z$, $n \in N$) thì x được biểu diễn bởi n đầu cung trên đường tròn lượng giác (tạo thành n - giác đều) với :

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \frac{2\pi}{n}, \dots$$

$$x_2 = a + 2\frac{2\pi}{n}, \dots$$

$$x_{n-1} = a + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

15. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC THÔNG DỤNG

Góc	*sin*	*cos*	*tg*	*cotg*
$0\ (0^\circ)$	0	1	0	$\|\|$
$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	1	0	$\|\|$	0
$\frac{2\pi}{3}(120^\circ)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3\pi}{4}(135^\circ)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\pi\,(180^\circ)$	0	-1	0	$\|$
$\frac{3\pi}{2}(270^\circ)$	-1	0	$\|$	0
$\frac{\pi}{12}(15^\circ)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{8}(22^\circ30')$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{3\pi}{8}(67^\circ30')$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5\pi}{12}(75^\circ)$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{12}(105^\circ)$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$-2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-2$
$\frac{5\pi}{8}(112^\circ30')$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\sqrt{2}-1$	$1-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{8}(157^\circ30')$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$1-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}-1$
$\frac{11\pi}{12}(165^\circ)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\sqrt{3}-2$	$-2-\sqrt{3}$

6. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + k2\pi$

  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + k2\pi$

  hay $x = \pi - a + k2\pi$

  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

- $\text{tg}x = \text{tg}a \Leftrightarrow x = a + k\pi$

  $\text{tg}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

- $\text{cotg}x = \text{cotg}a \Leftrightarrow x = a + k\pi$

  $\text{cotg}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

17. PHƯƠNG TRÌNH acosx + bsinx = c

- Điều kiện có nghiệm :

$$a^2 + b^2 \geq c^2$$

- Phương pháp giải : Có 3 phương pháp

Phương pháp 1 :

Dùng $tg\varphi = \frac{b}{a}$ (hoặc $tg\varphi = \frac{a}{b}$)

Phương trình cho ta :

$$\cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a} \quad (\text{vớ } tg\varphi = \frac{b}{a})$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x - \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

Đây là phương trình dạng cơ bản.

Phương pháp 2 :

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ thì :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$(\text{với } \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Đây là phương trình dạng cơ bản

Phương pháp 3 :

Dùng ẩn số phụ $t = tg\frac{x}{2}$. Phương trình trở thành :

$$a\frac{1-t^2}{1+t^2} + b\frac{2t}{1+t^2} = c$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+c)t^2 - 2bt + c - a = 0$$

Đây là phương trình bậc hai theo t.

Lưu ý :

Cần xét bổ sung trường hợp $\cos\frac{x}{2} = 0$.

18. PHƯƠNG TRÌNH $a\cos^2x + b\sin^2x + c\sin x\cos x + d = 0$

Chia 2 vế cho $\cos^2x$ thì có :

$$a + btg^2x + ctgx + d(1 + tg^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+d)tg^2x + ctgx + (a+d) = 0$$

Đây là phương trình dạng bậc hai theo tgx.

Sau đó xét bổ sung trường hợp $\cos x = 0$

Nhận xét : *Có khi ta dùng công thức :*

$$\cos^2x = \frac{1}{2}(1 + \cos2x).$$

$$\sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos2x)$$

$$\textit{và} \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

để đưa phương trình về dạng :

$$A\cos 2x + B\sin 2x = C$$

19. PHƯƠNG TRÌNH
$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

Dùng ẩn phụ

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

Phương trình trở thành :

$$\frac{b}{2}t^2 + at - \left(\frac{b}{2} - c\right) = 0, \text{ với } -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$$

Đây là phương trình bậc hai theo t (có điều kiện về nghiệm t).

20. PHƯƠNG TRÌNH
$a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

Dùng ẩn phụ

$$t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

thì $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}(1 - t^2)$$

Phương trình trở thành :

$$\frac{b}{2}t^2 - at - c - \frac{b}{2} = 0, \quad \text{với } -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$$

21. MỘT SỐ BIẾN ĐỔI ĐẶC BIỆT THƯỜNG DÙNG

- $\cos a + \cos b = 2 \Leftrightarrow (\cos a = 1$ và $\cos b = 1)$
- $\cos a + \cos b = -2 \Leftrightarrow (\cos a = -1$ và $\cos b = -1)$
- $\cos a - \cos b = 2 \Leftrightarrow (\cos a = 1$ và $\cos b = -1)$
- $\cos a - \cos b = -2 \Leftrightarrow (\cos a = -1$ và $\cos b = 1)$
- $\cos a.\cos b = 1 \Leftrightarrow (\cos a = 1$ và $\cos b = 1)$

  hay $(\cos a = -1$ và $\cos b = -1)$
- $\cos a.\cos b = -1 \Leftrightarrow (\cos a = 1$ và $\cos b = -1)$

  hay $(\cos a = -1$ và $\cos b = 1)$
- $\cos a_1 + \ldots + \cos a_n = n$

  $\Leftrightarrow (\cos a_1 = +1$ và $\ldots \cos a_n = +1)$
- $\cos a_1 + \ldots + \cos a_n = -n$

  $\Leftrightarrow (\cos a_1 = -1$ và $\ldots \cos a_n = -1)$

Nhận xét :

i) Các kết quả trên là do : $-1 \le \cos x \le 1, \forall x$

ii) Các kết quả trên vẫn đúng khi thay cosin bởi sin.

22. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP THÔNG DỤNG TRONG VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

i) Đưa về dạng tích số

Ví dụ : $\sin 7x - \cos 4x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 7x - \sin x - \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 4x \sin 3x - \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$$

ii) Dùng ẩn số phụ

Ví dụ : $\sin 2x + \mathrm{tg}x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2t}{1+t^2} + t + 2 = 0 \quad \text{(ẩn phụ } t = \mathrm{tg}x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad t^3 + 2t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)(t^2 + t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -1$$

Nhận xét :

- *Các ẩn số phụ thường dùng là sinx, cosx tgx, cotgx,* $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, *sinx ± cosx, tgx ± cotgx*
- *Ta có thể dùng nguyên tắc sau để chọn ẩn số phụ :*

  ** Nếu thay x bởi –x mà phương trình không thay đổi thì nên dùng t = cosx*

** Nếu thay x bởi $\pi - x$ mà phương trình không thay đổi thì nên dùng $t = sinx$*

** Nếu thay x bởi $\pi + x$ mà phương trình không thay đổi thì nên dùng $t = tgx$*

Khi 3 cách trên không dùng được thì ta chọn :

$$t = tg\frac{x}{2}$$

Khi 3 cách trên đều dùng được thì nên chọn :

$$t = cos2x$$

iii) Đưa phương trình về dạng quen thuộc

Ví dụ : $\sin^3x + \cos^3x = \sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \quad \sin^3x + \cos^3x = (\sin x - \cos x)(\sin^2x + \cos^2x)$

$\Leftrightarrow \quad \sin^3x + \cos^3x = \sin^3x - \cos^3x -$

$- \cos x\sin^2x + \sin x\cos^2x$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(2\cos^2x + \sin^2x - \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 0$

hay $2\cos^2x + \sin^2x - \sin x\cos x = 0$

23. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

a) Phương pháp "nghiệm duy nhất"

Xét phương trình $f(x) = 0$. Nếu $f(x)$ là một hàm đơn điệu thì $f(x) = 0$ có *tố đa* một nghiệm.

Ví dụ : $x + \sin x = 0$

Đặt $f(x) = x + \sin x$ thì có

$f(0) = 0$, hơn nữa :

$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0, \forall x$

nên f là hàm tăng trên R. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

b) Phương pháp so sánh

Xét phương trình $f(x) = g(x)$ với $x \in D$. Nếu tồn tại hàm số $h(x)$ sao cho :

$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in D$ thì :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = h(x) \\ g(x) = h(x) \end{cases}$$

Ví dụ : $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = e^x + e^{-x}$

Ta có : $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \leq e^x + e^{-x}$

(Theo bất đẳng thức Cauchy : $e^x + e^{-x} \geq 2$) nên phương trình trở thành hệ :

$$\begin{cases} 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \\ e^x + e^{-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

c) Phương pháp "tổng bình phương"

Xét phương trình $f(x) = 0$.

Nếu tồn tại $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$ thì :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Ví dụ :

$$\sin^2 x + tg^2 x - \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}tgx + \frac{15}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(tgx - \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ tgx - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

24. HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

a) Dạng $\begin{cases} \sin x + \sin y = a & (1) \\ x + y = b & (2) \end{cases}$

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \quad (\text{do } (2))$$

rồi giải được $x - y = c$ (3)

Hệ (2) và (3) cho ta x, y cần tìm.

b) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{\sin x - \sin y = a} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{x - y = b} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $\sin x + \sin(-y) = a$

(2) $\Leftrightarrow$ $x + (-y) = b$

Lúc đó hệ có dạng a).

c) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{\cos x \pm \cos y = a} \\ \mathbf{x \pm y = b} \end{cases}$

Cách giải hoàn toàn tương tự như dạng a).

d) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{\sin x + \cos y = a} \\ \mathbf{x + y = b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Cách giải tương tự như dạng a).

e) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{\cos x + \sin y = a} \\ \mathbf{x - y = b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Giải tương tự như dạng a).

g) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{sinxsiny = a} & (1) \\ \mathbf{x + y = b} & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)] = a$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x - y) = 2a - \cos b$$

Giải được $x - y = c$ (3)

(2) và (3) cho ta tìm x, y.

h) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{cosxcosy = a} \\ \mathbf{x \pm y = b} \end{cases}$

Tương tự như dạng g).

i) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{cos^2x + cos^2y = a} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{x + y = b} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) = a$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + \cos 2y = 2(a - 1)$$

và giải hệ $\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = 2(a - 1) \\ x + y = b \end{cases}$

Tương tự như dạng a).

k) **Dạng** $\begin{cases} \mathbf{sinxcosy = a} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{sinycosx = b} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

(1) + (2) cho $\sin(x + y) = a + b$ (3)

(1) − (2) cho $\sin(x - y) = a - b$ (4)

Giải hệ (3 và (4) để tìm x, y.

l) Dạng $\begin{cases} \cos x\cos y = a & (1) \\ \sin x\sin y = b & (2) \end{cases}$

(1) + (2) cho $\cos(x - y) = a - b$ (3)

(1) – (2) cho $\cos(x + y) = a - b$ (4)

Giải hệ (3) và (4) để tìm x, y.

m) Dạng $\begin{cases} \cos x + \cos y = a & (1) \\ \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{y}{2} = b & (2) \end{cases}$

Đặt $u = \cos\dfrac{x}{2}$, $v = \cos\dfrac{y}{2}$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} 2(u^2 + v^2) = a + 2 \\ u + v = b \end{cases}$$

Giải u, v rồi suy ra x, y.

n) Dạng $\begin{cases} \sin x + \sin y = a & (1) \\ \cos x + \cos y = b & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ $2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a$ (1')

(2) $\Leftrightarrow$ $2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = b$ (2')

Chia (1') cho (2') ta được :

$$\text{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}$$

Khi đó ta được :

$$x + y = c \qquad (3)$$

Dùng (3) thế vào (1') thì có :

$$x - y = d \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) giải ra được x, y.

o) Dạng $\begin{cases} \mathbf{sinx + msiny = a} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{cosx + mcosy = b} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

(1) cho $\sin^2 x + m^2\sin^2 y + 2m\sin x\sin y = a^2$

(2) cho $\cos^2 x + m^2\cos^2 y + 2m\cos x\cos y = b^2$

Cộng 2 vế của phương trình trên ta được :

$$1 + m^2 + 2m\cos(x - y) = a^2 + b^2$$

Giải ra ta được : $x - y = c \Leftrightarrow x = y + c$

Thế $x = y + c$ vào hệ để giải (siny và cosy) rồi suy ra x.

Lưu ý : *Cách giải trên cần phải thử lại xem x, y có thỏa hệ phương trình ban đầu không vì phép biến đổi bình phương 2 vế là có thể tạo ra nghiệm lạ.*

25. CÁC CÔNG THỨC HÌNH HỌC THƯỜNG DÙNG TRONG BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

- **Hệ thức cosin (trong ΔABC)**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

(với a = BC, b = AC, c = AB)

- **Hệ thức sin góc đối (trong ΔABC)**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp)

- **Hệ thức về trung tuyến của ΔABC**

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

(với m_a là trung tuyến kẻ từ A)

- **Hệ thức về phân giác của ΔABC**

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{AB}{AC}$$

(với AM, AN là các phân giác kẻ từ A)

- **Hệ thức về đường cao của ΔABC**

$$AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{OH}$$

với AH là đường cao của tam giác ; O là trung điểm của BC.

- **Các công thức tính điện tích tam giác ABC**

* $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

* $S = pr$

với : $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ là nửa chu vi

r là bán kính đường tròn nội tiếp

* $S = \frac{abc}{4R}$

với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp

* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

* $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

với r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C.

Phần 3

GIẢI TÍCH

A. CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

1. ÁNH XẠ

Cho hai tập hợp X và Y. Cứ mỗi phần tử $x \in X$ *cho tương ứng duy nhất một phần tử* $y \in Y$ *(ký hiệu là* $y = f(x)$*) thì xác định một ánh xạ f :*

$$f: \quad X \longrightarrow Y$$

2. TOÀN ÁNH

Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ *là toàn ánh nếu :*

$\forall y \in Y$ *tồn tại* $x \in X$ *để* $y = f(x)$ *(nói khác đi, phương trình* $f(x) = y$ *luôn có nghiệm với mọi* $y \in Y$*)*

3. ĐƠN ÁNH

Ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ *là đơn ánh nếu :*

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow x_1 = x_2$ *với mọi* $x_1, x_2 \in X$

(hoặc là : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X$*)*

4. SONG ÁNH

$f : X \longrightarrow Y$ *là song ánh khi f vừa là toàn* *ánh vừa là đơn ánh (tức là phương trình $f(x) = y$ có duy nhất một nghiệm $x \in X$, với mọi $y \in Y$).*

- *Khi $Y \subset R$ (tập hợp các số thực) thì ta gọi f là một hàm số.*

5. MIỀN GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $f : D \longrightarrow R$ thì ta gọi D là miền xác định, còn $f(D) = \{f(x) / \text{với } x \in D\}$ là miền giá trị của f.

- *Ta có : $y \in f(D) \Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = y$ có nghiệm $x \in D$.*

Ví dụ : Tìm miền giá trị của hàm số

$$y = 2\cos x + 3\sin x$$

Ta có : $y = f(x) \Leftrightarrow 2\cos x + 3\sin x = y$.

Phương trình này có nghiệm khi :

$$2^2 + 3^2 \geq y^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 13$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq y \leq \sqrt{13}$$

Vậy miền giá trị là $-\sqrt{13} \leq y \leq \sqrt{13}$.

6. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

Cho $f : (a, b) \longrightarrow R$

- *f là hàm số tăng (đồng biến) trên (a, b) khi:*

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$

- *f là hàm số giảm (nghịch biến) trên (a, b) khi :*

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ *với mọi* $x_1, x_2 \in (a, b)$

  Ta gọi chung hàm số tăng hoặc giảm là hàm số đơn điệu.

7. HÀM SỐ CHẴN – HÀM SỐ LẺ

Cho $f : D \longrightarrow R$ *với D thỏa tính chất mọi* $x \in D$ *thì* $-x \in D$ *và :*

- *f là hàm số lẻ nếu* $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$
- *f là hàm số chẵn nếu* $f(-x) = f(x), \forall x \in D$
- *Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.*
- *Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.*

8. HÀM SỐ TUẦN HOÀN – CHU KÌ

- *Cho* $f : D \longrightarrow R$ *và* $T > 0$, *f là hàm số tuần hoàn với chu kì T nếu :*

$$\begin{cases} \forall x \in D \text{ thì } x + T \in D \\ f(x+T) = f(x), \forall x \in D \end{cases}$$

Lưu ý : *$T > 0$ là số nhỏ nhất thỏa định nghĩa nêu trên.*

- **Các cách tính chu kì thông dụng**

  sinx, cosx : $T = 2\pi$

sinax, cosax : $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$

tgx, cotgx : $T = \pi$

tgax, cotgax : $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

- Cho y_1 có chu kì T_1 và y_2 có chu kì T_2 thì :

  $y_1 \pm y_2$ có chu kì $T = \text{BSCNN}(T_1, T_2)$

9. HÀM SỐ HỢP (TÍCH ÁNH XẠ)

Cho $f : D \longrightarrow Y$ *và* $g : Y \longrightarrow Z$

thì $gof : D \longrightarrow Z$ *xác định bởi*

$$gof(x) = g[f(x)],\ x \in D$$

gof *: hàm số hợp giữa f và g*

10. HÀM SỐ NGƯỢC

Cho $f : D \longrightarrow Y$ *là song ánh thì có ánh xạ ngược là :* $f^{-1}(y) : Y \longrightarrow D$ *xác định bởi :*

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y \quad (\text{với } x \in D,\ y \in Y)$$

- **Tính chất**

$$fof^{-1}(y) = y,\ \forall y \in Y$$

$$f^{-1}of(x) = x,\ \forall x \in D$$

11. DÃY SỐ

- **Định nghĩa**

$f : N \longrightarrow R$ *xác định một dãy số* $\{f(n)\}_n$

- **Tính chất**

  * *Dãy số (x_n) bị chặn trên khi tồn tại hằng số a để $x_n \le a, \forall n$.*

  * *Dãy số (x_n) bị chặn dưới khi tồn tại hằng số b để $b \le x_n, \forall n$.*

  * *Dãy số (x_n) bị chặn khi vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới nghĩa là $\exists a > 0$ thỏa $|x_n| \le a, \forall n$.*

  * *Mọi dãy số tăng và bị chặn trên đều hội tụ (có giới hạn) ((x_n) là tăng khi $x_{n+1} - x_n \ge 0, \forall n$).*

  * *Mọi dãy số giảm và bị chặn dưới đều hội tụ (dãy (x_n) là giảm khi $x_{n+1} - x_n \le 0, \forall n$).*

- **Giới hạn cần biết**

Số $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2{,}7...$

12. GIỚI HẠN HÀM SỐ

- **Tính chất**

  * $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

  * $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x).\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

  * $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

* Nếu $f(x) \le g(x), \forall x$ thì :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

* Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ và $\lim\limits_{y \to \alpha} g(y) = \beta$ thì :

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \beta$$

- **Các dạng vô định thường gặp**

$$\frac{0}{0}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

- **Giới hạn của hàm số hữu tỉ**

$$y = \frac{a_m x^n + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_o} \quad (a_n \ne 0, b_m \ne 0)$$

Nếu $n = m$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{a_n}{b_m}$

Nếu $n < m$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$

Nếu $n > m$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$

- **Các giới hạn cần biết**

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1$

* $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to \pm\frac{\pi}{2}} tgx = \pm\infty$

13. HÀM SỐ LIÊN TỤC

- **Định nghĩa**

Cho $f : (a, b) \longrightarrow R$, $x_o \in (a, b)$

f liên tục tại x_o khi $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

f liên tục trên (a, b) khi f liên tục tại $\forall x \in (a, b)$

- **Tính chất**

Cho f và g là hai hàm số liên tục trên (a, b) thì

$$f \pm g, \quad f.g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f|, \quad gof$$

cũng là những hàm số liên tục (nếu xác định)

- **Định lí (về sự tồn tại nghiệm)**

Cho f liên tục trên đoạn [a, b]. Nếu f(a).f(b) < 0 thì phương trình f(x) = 0 có nghiệm x trong khoảng (a, b).

Ví dụ : Xét $x^7 + 5x + 3 = 0$

Với $f(x) = x^7 + 5x + 3$ thì

. $f(0) = 3$; $f(-1) = -3$ nên $f(0).f(-1) < 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x \in (-1, 0)$.

B. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho $f : (a, b) \longrightarrow R$, $x_o \in (a, b)$. Đạo hàm của f tại x_o là :

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Đạo hàm bên phải của f tại x_o là :

$$f'_+(x_o) = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Đạo hàm bên trái của f tại x_o là :

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

***Lưu ý :** Nếu tồn tại $f'(x_o)$ thì :*

$$f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$$

Nếu $f'_+(x_o) \neq f'_-(x_o)$ thì không có $f'(x_o)$

2. CÁC TÍNH CHẤT

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(ku)' = k.u'$ (với $k \in R$)

$(uv)' = u'v + uv'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ HỢP

Cho y là hàm số theo biến u và u là hàm s
theo biến x thì :

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ NGƯỢC

Gọi f^{-1} là hàm số ngược của f thì :

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

trong đó $y = f(x)$ và $f'(x) \neq 0$

5. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

Cho đồ thị (C) : $y = f(x)$ thì :

- $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tạ
điểm $M(x_0, f(x_0))$
- Tiếp tuyến với (C) tại M có phương trình :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

6. CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

Bảng công thức 1

$(C)' = 0$ (với C là hằng số)

$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x.\ln a$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x.\ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(\operatorname{cotg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

Bảng công thức 2

$$(u^\alpha)' = \alpha.u'.u^{\alpha-1}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$(e^u)' = u'.e^u$$

$$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a|u|)' = \frac{u'}{u.\ln a}$$

$$(\sin u)' = u'.\cos u$$

$$(\cos u)' = -u'.\sin u$$

$$(\mathrm{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \mathrm{tg}^2 u)$$

$$(\mathrm{cotg}u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \mathrm{cotg}^2 u)$$

Bảng công thức 3

$$\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

$$\left(\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}\right)' =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

(với $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b, \ldots$)

$$(e^x.f(x))' = e^x\,[f(x) + f'(x)]$$

$$[a(x)^{f(x)}]' = \left[e^{\ln(a(x))^{f(x)}}\right]' = \left[e^{f(x)\ln a(x)}\right]'$$

7. QUI TẮC L'HOSPITAL

Cho các hàm số f(x) và g(x) có đạo hàm trên khoảng (a, b) sao cho :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Qui tắc trên vẫn còn đúng nếu thay giả thiết là $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$

Ví dụ : Xét $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \ln(\cos x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{[\ln(\cos x)]'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$$

nên theo qui tắc L'Hospital, ta có :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = 0$$

Lưu ý : *Nếu* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *không tồn tại thì qui tắc L'Hospital không còn đúng nữa.*

Xét $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$

thì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

thì giới hạn này không tồn tại, trong khi ta lại có :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \dfrac{\sin x}{x}}{1 + \dfrac{\cos x}{x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

(vì $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$

nên $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$)

8. VI PHÂN

- **Định nghĩa**

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm. Vi phân của hàm số y là :

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Ví dụ : $y = x^2$ thì $dy = 2xdx$

$y = \sin x$ thì $dy = \cos x dx$

- **Tính chất**

Cho u, v là các hàm số có đạo hàm thì :

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(u - v) = du - dv$$

$$d(ku) = kdu \quad (k \in R)$$

$$d(u.v) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Ví dụ : $u = \sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}$

thì $u^2 = a\sin^2 x + b\cos^2 x$

và suy ra

$$2udu = (2a\sin x\cos x - 2b\cos x\sin x)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad udu = (a - b)\sin x\cos x dx$$

9. CÔNG THỨC LAGRANGE

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn [a, b] và có đạo hàm trên (a, b) thì tồn tại số $c \in (a, b)$ sao cho :

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)}$$

Hệ quả : Nếu cho thêm f(a) = f(b) thì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm $x_o \in (a, b)$

10. HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì f tăng trên (a, b)

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì f giảm trên (a, b)

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ thì f là hằng số trên (a, b)

Nhận xét : *Với hàm số f có đạo hàm trên (a, b) và không là hằng số thì ta có :*

** f tăng trên (a, b)* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$

** f giảm trên (a, b)* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$

11. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Nếu f có đạo hàm tại x_o và f đạt cực trị tại x_o thì $f'(x_o) = 0$

  Nhận xét :

  Có thể f đạt cực trị tại x_o *mà không có* $f'(x_o)$

  Có thể $f'(x_o) = 0$ *mà f không đạt cực trị tại* x_o.

- Cho f có đạo hàm trên (a, b) thì :

* Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – tại x_o thì f đạt cực đại tại x_o.

* Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ – sang + tại x_o thì f đạt cực tiểu tại x_o.

Nhận xét *: f đạt cực trị tại x_o khi và chỉ khi $f'(x)$ đổi dấu tại x_o.*

- Cho f có đạo hàm cấp 2 liên tục tại x_o

  * Nếu $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_o.

  * Nếu $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_o.

12. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (MAX), GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (MIN)

- **Định nghĩa :**

  Cho $f : D \longrightarrow R$ thì :

$$f_{max} = \underset{x \in D}{\mathrm{Max}}\, f(x)\ ; \quad f_{min} = \underset{x \in D}{\mathrm{Min}}\, f(x)$$

- **Cách tìm Max, Min của f xác định trên [a, b]**

  * *Giải $f'(x) = 0$ để tìm các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trong [a, b]*

  * *Tính $f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)$*

  * *Ta có :*

$$f_{max} = Max\,[f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)]$$

$$f_{min} = Min[f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)]$$

- **Tính chất**

 * $f(x) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f_{min} > 0$

 * $f(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f_{max} < 0$

 * Bất phương trình $f(x) > 0$ vô nghiệm

 $\Leftrightarrow f(x) \le 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f_{max} \le 0$

 * Bất phương trình $f(x) > 0$ có nghiệm

 $\Leftrightarrow f_{max} > 0$

 * Bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm

 $\Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f_{min} \ge 0$

 * Bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm

 $\Leftrightarrow f_{min} < 0$

13. ĐỒ THỊ LỒI – ĐỒ THỊ LÕM – ĐIỂM UỐN

- **Cho (C) : $y = f(x)$ với $x \in (a, b)$:**

 * Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì (C) lồi trên (a, b)

 * Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì (C) lõm trên (a, b)

 * Nếu (x_o, y_o) là điểm uốn thì $f''(x_o) = 0$

- **Ứng dụng vào bất đẳng thức :**

 * Nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì :

$$\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \le f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), x_1, x_2 \in (a,b)$$

 * Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì :

$$\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \ge f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), x_1, x_2 \in (a,b)$$

14. TIỆM CẬN

Cho (C) : y = f(x) :

* Nếu $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = b$ thì y = b là tiệm cận ngang

* Nếu $\lim\limits_{x \to a} y = \pm\infty$ thì x = a là tiệm cận đứng

* Nếu f(x) = ax + b + ε(x) thì y = ax + b là tiệm cận xiên (với $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$)

* Nếu $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - \varepsilon(x))$

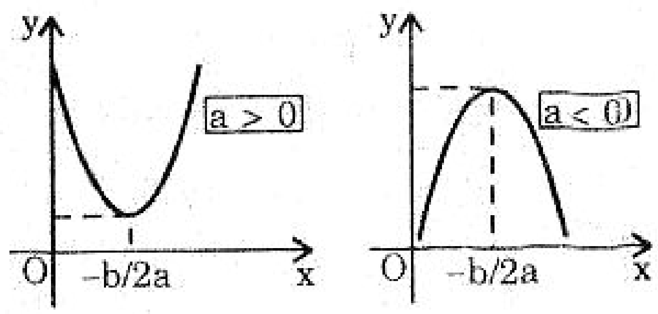
thì y = ax + b là tiệm cận xiên

* Khi $x \to \pm\infty$ thì

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| + \varepsilon(x)$$

15. CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

15.1. Hàm số bậc hai y = ax² + bx + c



Đồ thị là một Parabol có đỉnh

$$S = \left(x = -\frac{b}{2a}, y = -\frac{\Delta}{4a}\right);$$

Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

15.2. Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

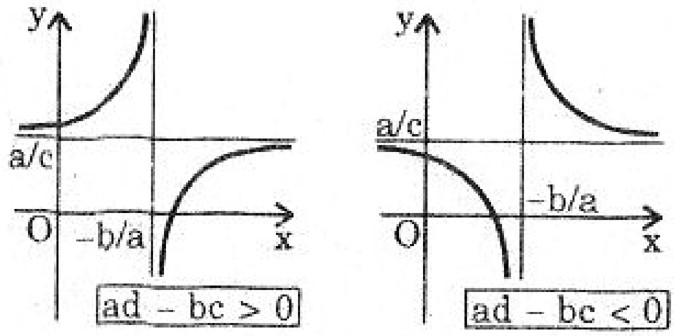
Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Đồ thị là một Hyperbol vuông góc với :

Tiệm cận đứng: $x = -\dfrac{d}{c}$

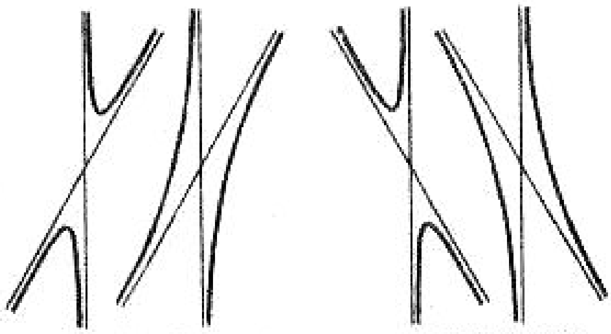
Tiệm cận ngang : $y = \dfrac{a}{c}$

Tâm đối xứng là $I\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$



15.3. Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$

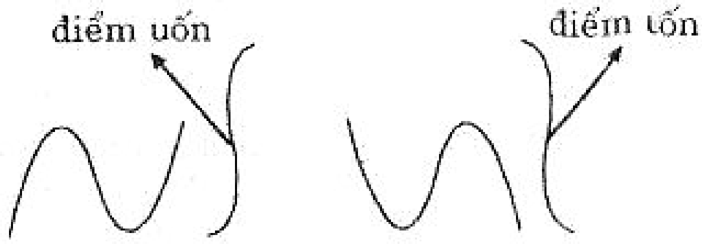
Đồ thị là một Hyperbol xiên góc có tâm đối xứng là giao điểm giữa tiệm cận đứng và tiệm cận xiên.



a.b > 0 a.b < 0

15.4. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

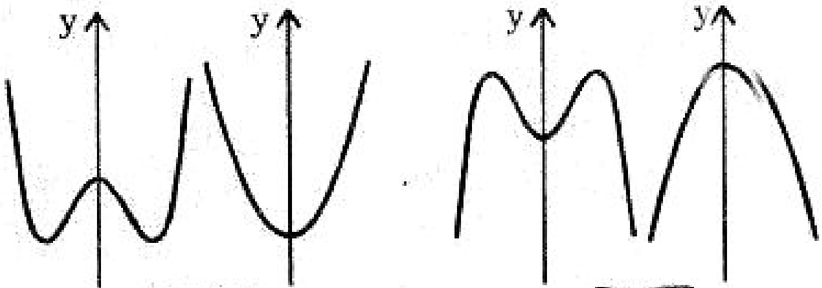
Đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng và có các dạng như sau :



a > 0 a < 0

15.5. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

Hàm số chẵn, đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng và có các dạng sau :



a > 0 a < 0

16. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA HAI ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

16.1. Với hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Thực hiện phép chia hàm số y cho đạo hàm y', ta có :

$$y = y'(\alpha x + \beta) + mx + n$$

Tại hai điểm cực trị thì y' = 0 nên y = mx + n. Đây chính là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

16.2. Với hàm số dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$

Tại cực trị thì y' = 0 nên :

$$y = \frac{(ax^2 + bx + c)'}{(b'x + c')'} = \frac{2ax + b}{b'}$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{2a}{b'}x + \frac{b}{b'}$$

Đây chính là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

16.3. Với hàm số dạng $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

Tọa độ hai điểm cực trị thỏa :

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} & (1) \\ y = \dfrac{2ax + b}{2a'x + b'} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) hãy tạo ra kết quả có dạng :

$$y = \alpha x + \beta$$

thì đây chính là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ví dụ 1 : Cho đồ thị (C) của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1.$$

Viết phương trình đường thẳng đi qua h điểm cực trị.

Giải

Chia y cho $y' = 3x^2 - 6x + 4$ thì được :

$$y = y'\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

Tại hai điểm cực trị thì $y' = 0$ nên

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Đây là phương trình qua hai điểm cực trị.

Ví dụ 2 : Viết phương trình đường thẳr qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số :

$$y = \frac{2x^2 + 5x + m}{3x - 1}$$

Giải

Tọa độ hai điểm cực trị thỏa :

$$y = \frac{(2x^2 + 5x + m)'}{(3x - 1)'} = \frac{4x + 5}{3}$$

nên $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ là phương trình đườn thẳng qua hai điểm cực trị.

Ví dụ 3 : Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số :

$$y = \frac{x^2 + 4x + m}{x^2 + 3}$$

Giải

Tọa độ hai điểm cực trị thỏa :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 4x + m}{x^2 + 3} \\ y = \dfrac{2x + 4}{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2y + 3y = x^2 + 4x + m & (1) \\ xy = x + 2 & (2) \end{cases}$$

nhân x cho (2) thì : $\quad x^2y = x^2 + 2x \quad (2')$

Lấy (1) trừ (2') ta được :

$$3y = 2x + m \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{m}{3}$$

Đây là phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị.

C. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

1. ĐỊNH NGHĨA

G(x) là nguyên hàm của f(x) trên [a, b] nếu:

$G'(x) = f(x)$ với $\forall x \in [a, b]$

2. TÍNH CHẤT

Gọi $G_1(x)$ và $G_2(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ thì tồn tại hằng số C thỏa :

$$G_1(x) = G_2(x) + C, \forall x \in [a, b]$$

Ta ký hiệu : $\int f(x)dx = G_1(x) + C$

và đọc là : *Tích phân bất định của f (hoặc gọi là tích phân của f).*

3. CÁC QUI TẮC CƠ BẢN

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in R$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

4. BẢNG CÔNG THỨC TÍCH PHÂN

$$\int 0dx = C$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int (1 + tg^2 x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int (1 + cotg^2 x)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\, cotgx + C$$

Trong các công thức sau thì $a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x + a} = \ln|x + a| + C$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

$$\int \cos(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$$

$$\int \sin(ax + b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} +$$

$$+ \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$$

$$- \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)} dx = \frac{-1}{u(x)} + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \sqrt{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$$

5. TÍCH PHÂN CỦA HÀM HỮU TỈ

- **Dạng** $\mathbf{I} = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ **(a ≠ 0)**

Nếu $\Delta > 0$:

$$I = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \int \left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \ln\left|\frac{x - x_1}{x - x_2}\right| + C$$

với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Nếu $\Delta = 0$:

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - x_o)^2} dx \quad (\text{với } x_o = -\frac{b}{2a})$$

$$= \frac{-1}{a(x - x_o)} + C$$

Nếu $\Delta < 0$:

$$I = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+m)^2 + n^2}$$

(m, n : phụ thuộc a, b, c)

• **Dạng** $\mathbf{I} = \int\frac{(mx+n)dx}{ax^2 + bx + c}$ **(m ≠ 0)**

Biến đổi ra dạng sau đây :

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \alpha\frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} + \beta\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Với

$$\int\frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}dx = \ln|ax^2+bx+c| + C$$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$ (Xem dạng trên)

• **Dạng** $\mathbf{I} = \int f(x)dx$

với $f(x) = \frac{P(x)}{(x-m)(ax^2+bx+c)}$

(trong đó P(x) là đa thức có bậc tối đa là 2)

Dùng phép phân tích sau để đưa về dạng đã biết cách giải (ở phần nêu trên).

Nếu $\Delta > 0$: $f(x) = \dfrac{A}{x-m} + \dfrac{B}{x-x_1} + \dfrac{C}{x-x_2}$

Nếu $\Delta = 0$: $f(x) = \dfrac{A}{x-m} + \dfrac{B}{x-x_o} + \dfrac{C}{(x-x_o)^2}$

Nếu $\Delta < 0$: $f(x) = \dfrac{A}{x-m} + \dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$

(trong đó A, B, C là các hệ số cần tìm)

6. TÍCH PHÂN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Xét $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ trong đó R là hàm hữu tỉ theo sinx và cosx.

Ta dùng phép biến đổi sau để đưa về dạng tích phân hàm hữu tỉ hoặc cơ bản.

* Nếu R(–sinx, cosx) = –R(sinx, cosx):

đổi biến số u = cosx

* Nếu R(sinx, –cosx) = –R(sinx, cosx):

đổi biến số u = sinx

* Nếu R(–sinx, –cosx) = R(sinx, cosx):

đổi biến số u = tgx

* Nếu ba cách trên không thực hiện được thì

đổi biến $u = tg\dfrac{x}{2}$

7. TÍCH PHÂN HÀM SỐ VÔ TỈ

- **Dạng** $\mathbf{I} = \int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt[n]{\dfrac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}}\right)\mathbf{dx}$ **:**

Đổi biến : $u = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

- **Dạng** $\mathbf{I} = \int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\right)\mathbf{dx}$ **:**

Cách 1 : Đổi biến $u = \sqrt{ax^2+bx+c}$

Cách 2 : (Khi cách 1 không thành công)

* Với tích phân có chứa $\sqrt{A^2 - x^2}$:

Đổi biến : $x = A\cos u$

* Với tích phân có chứa $\sqrt{A^2 + x^2}$:

Đổi biến $x = A\,\mathrm{tg}\,u$

* Với tích phân có chứa $\sqrt{x^2 - A^2}$:

Đổi biến $x = \dfrac{A}{\cos u}$

- **Dạng** $\mathbf{I} = \int \dfrac{(\mathbf{mx+n})\,\mathbf{dx}}{(\mathbf{x}-\alpha)\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$

Đổi biến $u = \dfrac{1}{x-\alpha}$

8. CÔNG THỨC NEWTON – LEIBNITZ

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b}$$

trong đó G(x) là nguyên hàm của f(x)

9. CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN CHO TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

$$\boxed{\int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du}$$

trong đó $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$

10. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN CHO TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du}$$

trong đó $dv = v'(x)dx$; $du = u(x)dx$

11. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (\text{với } a \le b)$$

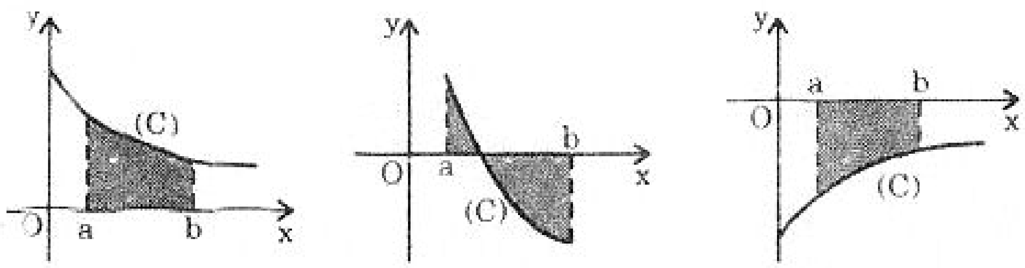
* Nếu $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$ thì :

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

* Nếu $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ thì :

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

12. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

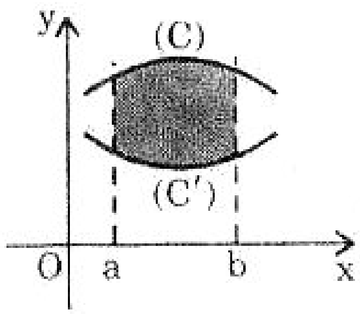


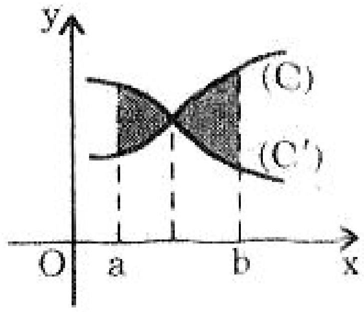
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) : $y = f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính bởi :

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) : $y = f(x)$; (C') : $y = g(x)$ và các đường thẳng x = a, x = b được tính bởi :

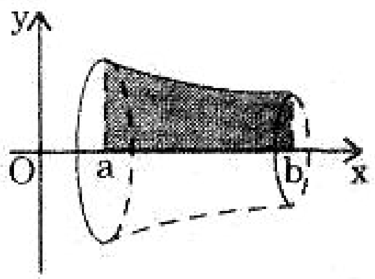
$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx}$$





- Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox, hình phẳng giới hạn bởi (C) : y = f(x), trục Ox và các đường thẳng x = a, x = b được tính bởi :

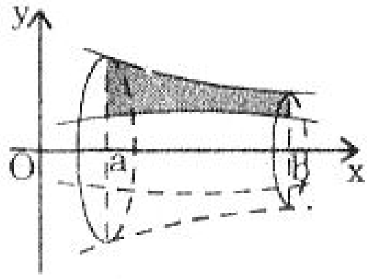
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$



- Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox, hình phẳng giới hạn bởi (C) : y = f(x), (C') : y = g(x), các đường thẳng x = a, x = b được tính bởi :

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx}$$

(Với điều kiện f(x) ≥ g(x) ≥ 0)



D. GIẢI TÍCH TỔ HỢP

1. HOÁN VỊ n PHẦN TỬ

Phép hoán vị n phần tử là một song ánh từ một tập hợp gồm n phần tử vào một tập hợp gồm n phần tử.

Số các hoán vị là :

$$\boxed{P_n = 1.2...n = n!}$$

2. CHỈNH HỢP n CHẬP r

Chỉnh hợp n chập r là một đơn ánh từ tập hợp r phần tử vào tập hợp gồm n phần tử $(n \geq r)$

Số các chỉnh hợp n chập r là :

$$\boxed{A_n^r = n(n-1)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

3. TỔ HỢP n CHẬP r

Tổ hợp n chập r là một tập con gồm r phần tử được lấy ra từ một tập hợp gồm n phần tử $(n \geq r)$

Số tổ hợp n chập r là :

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

4. TÍNH CHẤT

$$C_n^o = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^r = C_n^{n-r} \quad (r \leq n)$$

$$C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1} = C_n^r \quad (r \leq n-1)$$

5. NHỊ THỨC NEWTON

$$(a+b)^n = C_n^o.a^n + C_n^1.a^{n-1}b + \ldots + C_n^r.a^{n-r}b^r + \ldots + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k.a^{n-k}.b^k$$

Lưu ý :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.b^{n-k}.a^k$$

$$= C_n^o b^n + C_n^1 b^{n-1}a + \ldots + C_n^n a^n$$

Phần 4

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

A. TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

1. TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$$

trong đó O là gốc tọa độ; $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ là vectơ đơn vị của trục Ox, Oy.

2. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Nhận xét : *Điểm M và $\overrightarrow{OM}$ có cùng tọa độ*

3. VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

Cho $\vec{a}(a_1, a_2), \vec{b}(b_1, b_2)$ thì $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi :

$$a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

(nếu $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$)

Lưu ý : *Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.*

4. CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ

Cho $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$

- Phép cộng : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
- Phép trừ : $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
- Nhân một số k với vectơ :

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2), k \in R$$

- Tích vô hướng :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Nhận xét : $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}.\vec{a}$$

5. MÔĐUN CỦA VECTƠ

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

6. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

7. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

$$\boxed{\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)}}}$$

8. ĐIỂM M(x, y) CHIA ĐOẠN AB THEO TỈ SỐ k

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$$

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$$

trongđó $k \neq +1$ và $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

9. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN AB

$$x = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$$

10. CÔNG THỨC ĐỔI HỆ TỌA ĐỘ

Cho $I(x_o, y_o)$ trong hệ thống xOy. Xét IX // Ox và IY // Oy, ta có hệ thống XIY thì công thức đổi hệ xOy sang hệ XIY là :

$$x = X + x_o$$

$$y = Y + y_o$$

B. ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

Đường thẳng qua (x_o, y_o) và có vectơ chỉ phương (a_1, a_2) thì có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = x_o + ta_1 \\ y = y_o + ta_2 \end{cases} \quad (t \in R)$$

2. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TỔNG QUÁT

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

trong đó (-b, a) là vectơ chỉ phương ; (a, b) là pháp vectơ.

3. ĐƯỜNG THẲNG QUA HAI ĐIỂM A VÀ B CHO TRƯỚC

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)}$$

- **Phương trình đoạn chắn**

Đường thẳng qua (a, 0) và (0, b) có phương trình là :

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

- **Phương trình dạng chính tắc :**

Đường thẳng qua $M(x_o, y_o)$ và vectơ chỉ phương $\vec{a}(a_1, a_2)$ thì có phương trình chính tắc là :

$$\boxed{\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2}}$$

4. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA (x_o, y_o) VÀ CÓ HỆ SỐ GÓC k

$$\boxed{y - y_o = k(x - x_o)}$$

trong đó $k = tg(\widehat{Ox, D})$

(Với $(\widehat{Ox, D})$ là góc giữa Ox và đường thẳng D)

5. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG - VUÔNG GÓC

Cho d : $ax + by + c = 0$

d' : $a'x + b'y + c' = 0$

$$d \,//\, d' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$d \perp d' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Trường hợp đặc biệt : d có hệ số góc k, d' có hệ số góc k' thì ta có :

$$d \,//\, d' \Leftrightarrow k = k'$$

$$d \perp d' \Leftrightarrow kk' = -1$$

Nhận xét :

- *Nếu d có hệ số góc k thì (1, k) là vectơ chỉ phương.*
- *Nếu* $\vec{a}(u, v)$ *là vectơ chỉ phương thì* $k = \dfrac{v}{u}$ *là hệ số góc.*
- *Nếu d // Oy thì d không có hệ số góc.*

6. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho d : $ax + by + c = 0$

d' : $a'x + b'y + c' = 0$

thì $$\cos(d, d') = \pm \frac{aa' + bb'}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}}$$

Nếu d có hệ số góc k, d' có hệ số góc k' thì :

$$\operatorname{tg}(d, d') = \pm \frac{k' - k}{1 + kk'}$$

7. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho D : ax + by + c = 0 và $M(x_0, y_0)$ thì khoảng cách từ M tới D là :

$$\boxed{d(M,(D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

8. PHÂN GIÁC GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

$$d : \ ax + by + c = 0$$

$$d' : a'x + b'y + c' = 0$$

thì phân giác của góc (d, d') có phương trình là :

$$\boxed{\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}}$$

9. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho d : $ax + by + c = 0$

d' : $a'x + b'y + c' = 0$

- Nếu $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \iff ab' \neq a'b$

thì d cắt d' tại điểm có tọa độ là :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{D} = \frac{bc' - cb'}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{D} = \frac{ca' - ac'}{ab' - a'b}$$

- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$: d // d'
- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$: d trùng với d'

10. CHÙM ĐƯỜNG THẲNG

Chùm đường thẳng tạo bởi 2 đường thẳng

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

có phương trình là :

$$m(ax + by + c) + n(a'x + b'y + c') = 0$$

(với $m^2 + n^2 > 0$)

C. ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG CHÍNH TẮC

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

với I(a, b) là tâm và R là bán kính.

2. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG TỔNG QUÁT

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$$

với tâm I(a, b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
(điều kiện là $a^2 + b^2 \geq c$)

3. PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

Phương tích của $M(x_o, y_o)$ đối với đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là :

$$\boxed{\mathscr{P}_{(M)/(C)} = x_o^2 + y_o^2 - 2ax_o - 2by_o + c}$$

4. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Trục đẳng phương của hai đường tròn :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0 \end{cases}$$

có phương trình là :

$$\boxed{-2ax - 2by + c = -2a'x - 2b'y + c'}$$

D. ELIP

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho 2 điểm cố định F và F' ; một hằng số $2a > 0$.

Tập hợp $(E) = \{M \mid MF + MF' = 2a\}$ được gọi là một elip có tiêu điểm là F, F' và tâm sai là $e = \dfrac{c}{a}$; tiêu cự là $2c = FF'$ (trong đó $0 < e < 1$)

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Chọn trục hoành đi qua F và F', trục tung là trung trực của đoạn FF' thì (E) có phương trình dạng chính tắc :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

trong đó : $b^2 = a^2 - c^2$

3. BÁN KÍNH QUA TIÊU ĐIỂM

Cho (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và M(x, y) thuộc (E). Ta có :

$$\begin{cases} MF = a + ex \\ MF' = a - ex \end{cases}$$

trong đó F(−c, 0) là tiêu điểm trái, F(c, 0) là tiêu điểm phải.

4. HÌNH DÁNG CỦA (E)

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$$

Đỉnh trục lớn là : $(\pm a, 0)$

Đỉnh trục nhỏ là : $(0, \pm b)$

Tiêu điểm : $(\pm c, 0)$

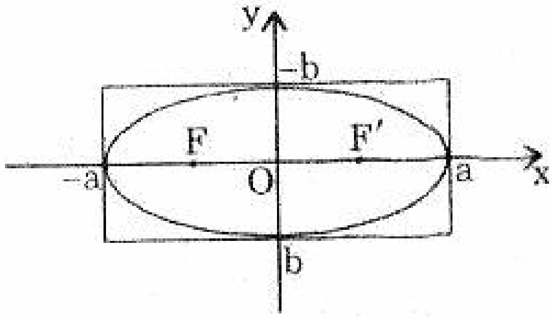
Tâm sai : $e = \frac{c}{a}$

Độ dài trục lớn : 2a

Độ dài trục nhỏ : 2b

Hình chữ nhật cơ sở tạo bởi :

$$x = \pm a \quad , \; y = \pm b$$



Lưu ý :

Với (E) : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $(a > b > 0)$ thì :

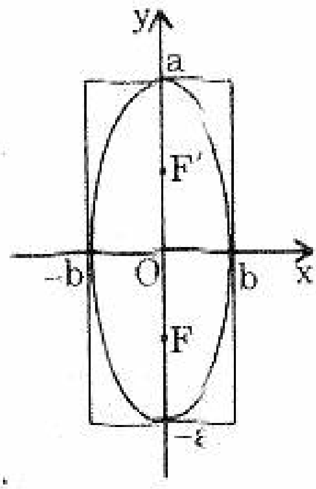
Đỉnh trục lớn là : $(0, \pm a)$

Đỉnh trục nhỏ là : $(\pm b, 0)$

Tiêu điểm : $(0, \pm c)$

Tâm sai : $e = \frac{c}{a}$

với $c^2 = a^2 - b^2$



Hình chữ nhật cơ sở tạo bởi :

$$x = \pm b \; , \; y = \pm a$$

5. ĐƯỜNG CHUẨN

• (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ có phương trình đường chuẩn là :

$$\boxed{x = \pm \frac{a^2}{c}}$$

• (E) : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (a > b) có phương trình đường chuẩn là :

$$\boxed{y = \pm \frac{a^2}{c}}$$

6. TIẾP TUYẾN CỦA (E)

Cho (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $M(x_o, y_o) \in (E)$ thì tiếp tuyến với (E) tại M có phương trình :

$$\boxed{\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1}$$

7. ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI (E)

(E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(D) : $Ax + By + C = 0$

(D) tiếp xúc (E) khi và chỉ khi :

$$\boxed{A^2a^2 + B^2b^2 = C^2}$$

E. HYPERBOL

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho 2 điểm cố định F và F' và một hằng số $2a > 0$. Tập hợp $(H) = \{M / |MF - MF'| = 2a\}$ được gọi là một Hyperbol có tiêu điểm là F, *F' ; có tâm sai là $e = \dfrac{c}{a}$ trong đó FF' = 2c là tiêu cự (với e > 1).*

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Chọn trục hoành đi qua tiêu điểm F, F', trục tung là trung trực của đoạn FF' thì (H) có phương trình chính tắc là :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

với $b^2 = c^2 - a^2$ (lưu ý : c > a)

3. BÁN KÍNH QUA TIÊU ĐIỂM

Cho (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm M(x, y) ở trên (H) thì có :

$$MF = |a + ex| \;; \quad MF' = |a - ex|$$

với F(–c, 0) là tiêu điểm trái ; F'(c, 0) là tiêu điểm phải.

4. HÌNH DÁNG CỦA (H)

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Đỉnh trục thực : (±a, 0)

Độ dài trục thực : 2a (Ox là trục thực)

Độ dài trục ảo : 2b (Oy là trục ảo)

Tiệm cận :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

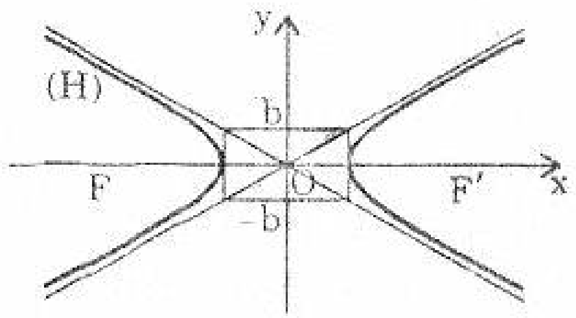
Tiêu điểm : $(\pm c, 0)$

Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a}$

Hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a$, $y = \pm b$

Đường chuẩn : $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$

Tiệm cận là các đường chéo của hình chữ nhật cơ sở.



5. TIẾP TUYẾN CỦA (H)

(H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; điểm $M(x_o, y_o) \in (H)$ thì tiếp tuyến với (H) tại điểm M có phương trình là :

$$\boxed{\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1}$$

8. HỆ THỨC SCHALES

$$\boxed{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}}$$

9. BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

- Là ba vectơ khác $\vec{0}$ và có giá cùng song song với một mặt phẳng.

- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi tồn tại các số m, n ∈ R sao cho :

$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ (m, n không cùng bằng 0)

10. TÍCH VÔ HƯỚNG

- **Định nghĩa**

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})}$$

- **Biểu thức giải tích**

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

nếu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

11. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- **Định nghĩa**

Cho $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ thì :

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

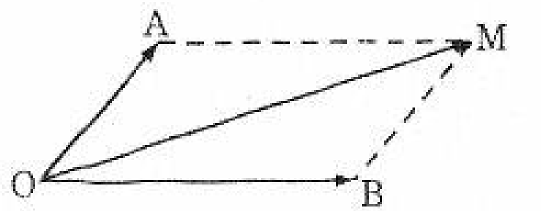
5. PHÉP CỘNG VECTƠ

Cho $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ thì :

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}}$$

với OM là đường chéo của hình bình hành OAMB và nếu : $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ thì :

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)}$$

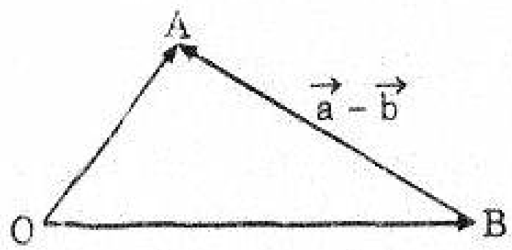


6. PHÉP TRỪ VECTƠ

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}}$$

và ta có :

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)}$$



7. NHÂN MỘT SỐ k VỚI VECTƠ

$$\boxed{k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3), k \in R}$$

trong đó $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

4. BÁN KÍNH QUA TIÊU ĐIỂM

$(P): y^2 = 2px$ và điểm $M(x, y)$ thuộc (P) thì :

$$\boxed{MF = x + \frac{p}{2}}$$

5. TIẾP TUYẾN VỚI PARABOL

$$(P): y^2 = 2px, \quad M(x_o, y_o) \in (P)$$

Tiếp tuyến với (P) tại điểm M có phương trình là :

$$\boxed{y_o y = p(x_o + x)}$$

6. ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI (P)

$$(P): y^2 = 2px$$

$$(D): Ax + By + C = 0$$

(D) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi :

$$\boxed{B^2p = 2AC}$$

H. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

1. HỆ TỌA ĐỘ VUÔNG GÓC

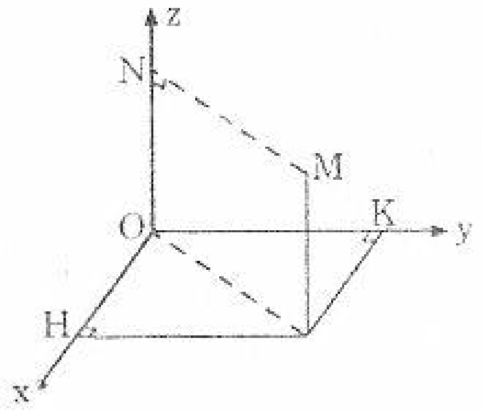
Tạo bởi ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau đôi một tại gốc O (với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị)

2. TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

Cho điểm M trong không gian, ta có

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(với $\overrightarrow{OH} = x$, $\overrightarrow{OK} = y$, $\overrightarrow{ON} = z$)



3. TỌA ĐỘ VECTƠ

$$\boxed{\vec{V}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

Nhận xét :

* $\vec{O}(0, 0, 0)$

* $M(x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(x, y, z)$

* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

4. ĐIỀU KIỆN VECTƠ CÙNG PHƯƠNG

Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ thì :

$\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ khi :

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k\vec{b}}$$

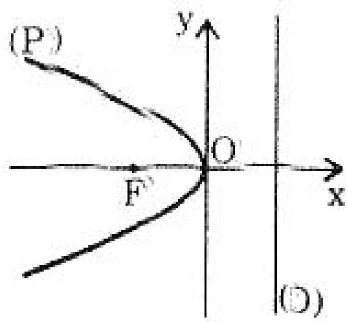
Đường chuẩn : $x = -\dfrac{p}{2}$

Đỉnh : gốc O

Trục đối xứng : trục hoành

- **Với (P) : $y^2 = -2px$**

Tiêu điểm : $F\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$

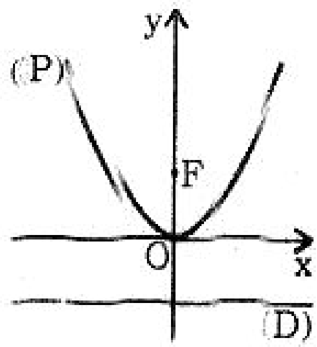


Đường chuẩn : $x = \dfrac{p}{2}$

Trục đối xứng : Ox

- **Với (P) : $x^2 = 2py$**

Tiêu điểm : $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$

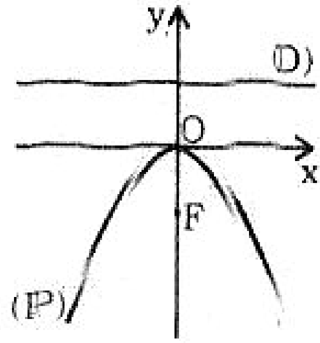


Đường chuẩn : $y = -\dfrac{p}{2}$

Trục đối xứng : Oy

- **Với (P) : $x^2 = -2py$**

Tiêu điểm : $F\left(0, -\dfrac{p}{2}\right)$



Đường chuẩn : $y = \dfrac{p}{2}$

Trục đối xứng : Oy

6. ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI (H)

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(D): Ax + By + C = 0$$

(D) tiếp xúc với (H) khi và chỉ khi :

$$\boxed{A^2a^2 - B^2b^2 = C^2}$$

G. PARABOL

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm F ở ngoài đường thẳng D (cả F và D đều cố định). Tập hợp (P) = {M / MF = d(M, (D))} được gọi là một Parabol có tiêu điểm F, đường chuẩn (D), tham số tiêu là p = d(F, (D)).

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA (P)

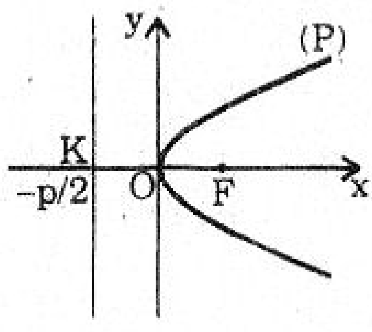
Chọn trục hoành qua tiêu điểm F và vuông góc với (D) và trục tung là trung trực của đoạn FK (với K là hình chiếu của F lên (D)) thì (P) có phương trình dạng :

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

3. HÌNH DÁNG CỦA (P)

- **Với (P) : $y^2 = 2px$**

Tiêu điểm : $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$



- **Tính chất**

$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$; $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$

$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

$\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$

$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.|\sin(\vec{a}, \vec{b})|$

- **Áp dụng**

Diện tích ΔABC là :

$$S = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$$

Diện tích hình bình hành ABCD là

$$S = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$$

Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D' là :

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AA'}|$$

Thể tích tứ diện ABCD là :

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}|$$

12. MÔĐUN CỦA VECTƠ

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

với $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$

13. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

14. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

với $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

15. ĐIỂM CHIA ĐOẠN AB THEO TỈ SỐ k

Điểm M(x, y, z) chia AB theo tỉ số k theo nghĩa : $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ và thỏa

$$x = \frac{a_1 - kb_1}{1 - k},\ y = \frac{a_2 - kb_2}{1 - k},\ z = \frac{a_3 - kb_3}{1 - k}$$

với $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$

16. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN AB

$$x = \frac{1}{2}(x_A + x_B),\ y = \frac{1}{2}(y_A + y_B),\ z = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

I. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ *khác* $\vec{0}$ *được gọi là vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu* $\vec{a}$ *và*

$\overrightarrow{b}$ *không cùng phương và giá của chúng song song với (P) hoặc nằm trong (P).*

2. PHÁP VECTƠ CỦA MẶT PHẲNG (P)

- Là vectơ $\overrightarrow{n}$ khác $\overrightarrow{0}$ và vuông góc với (P)
- Nếu $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ là vectơ chỉ phương thì pháp vectơ $\overrightarrow{n}$ xác định bởi:

$$\overrightarrow{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

trong đó (A, B, C) là pháp vectơ

- Mặt phẳng (xOy) : $z = 0$
- Mặt phẳng (yOz) : $x = 0$
- Mặt phẳng (zOx) : $y = 0$

4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

$(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Góc α giữa (P_1) và (P_2) được tính bởi công thức :

$$\cos\alpha = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$$

• **Đặc biệt :**

$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

5. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MẶT PHẲNG

$(P) : Ax + By + Cz + D = 0$, điểm $M(x_o, y_o, z_o)$.

Ta có :

$$\boxed{d(M,(P)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

6. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI MẶT PHẲNG

$(P_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$(P_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$(P_1) // (P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$

$(P_1) \equiv (P_2) \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

(P_1) cắt (P_2) $\Leftrightarrow$ không xảy ra

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

7. MẶT PHẲNG QUA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC VÀ SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG ĐÃ BIẾT

Mặt phẳng qua $M(x_o, y_o, z_o)$ và song song

với $Ax + By + Cz + D = 0$ có phương trìn
là :

$$\boxed{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0}$$

8. MẶT PHẲNG ĐI QUA A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{với } a, b, c \neq 0)$$

9. CHÙM MẶT PHẲNG

Chùm mặt phẳng tạo bởi 2 mặt phẳng

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

có phương trình là :

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

$$(\text{với } m^2 + n^2 > 0)$$

K. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

Đường thẳng (D) qua $A(x_o, y_o, z_o)$ và c
vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ thì c
phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_o + ta_1 \\ y = y_o + ta_2 \quad (\text{với } t \in R) \\ z = z_o + ta_3 \end{cases}$$

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

với điều kiện không xảy ra :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

3. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

(D) qua $A(x_0, y_0, z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ thì có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

4. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

(D) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

(D') có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v'} = (a', b', c')$

α là góc giữa (D) và (D') thì :

$$\cos\alpha = \pm\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}$$

5. GÓC GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT MẶT PHẲNG

(D) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

(P) có pháp vectơ là $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$

α là góc giữa (D) và (P)

$$\sin\alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

6. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG (VUÔNG GÓC) VỚI MẶT PHẲNG

(D) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$

(P) có pháp vectơ là $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$

- (D) // (P) khi $Aa + Bb + Cc = 0$
- (D) $\perp$ (P) khi $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$

7. HỌ MẶT PHẲNG ĐI QUA ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Cho (D) : $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

thì họ mặt phẳng luôn đi qua (D) có phương trình dạng :

$$\boxed{m(A_1x + B_1y + C_1z) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}$$

(trong đó $m^2 + n^2 > 0$)

8. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

(D) qua $M(x_o, y_o, z_o)$ và vuông góc với

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

thì có phương trình là :

$$\boxed{\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C}}$$

L. MẶT CẦU

1. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Mặt cầu tâm I(a, b, c), bán kính R có phương trình chính tắc là :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$$

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

Mặt cầu có phương trình dạng tổng quát :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}$$

trong đó : tâm I(a, b, c)

bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

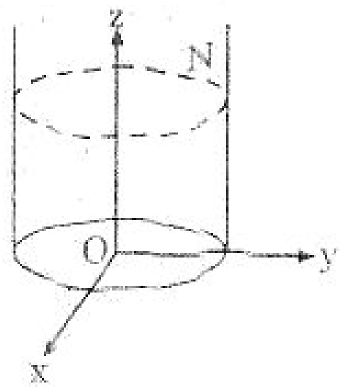
M. MẶT TRỤ

1. MẶT TRỤ CÓ ĐƯỜNG SINH SONG SONG VỚI TRỤC Oz

Trong mặt phẳng (xOy) cho đường ($\mathscr{C}$) có phương trình là :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

thì mặt trụ có đường chuẩn ($\mathscr{C}$), đường sinh song song với Oz có phương trình là : $f(x, y) = 0$.



Ví dụ :

$x^2 + y^2 = 1$ cho mặt trụ như trong hình vẽ.

2. MẶT TRỤ CÓ ĐƯỜNG SINH SONG SONG VỚI TRỤC Oy

Có phương trình dạng : $f(x, z) = 0$

3. MẶT TRỤ CÓ ĐƯỜNG SINH SONG SONG VỚI TRỤC Ox

Có phương trình dạng : $f(y, z) = 0$

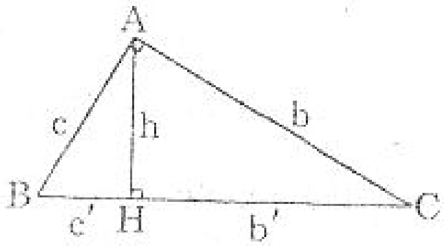
Phần 5

HÌNH HỌC PHẲNG

1. HỆ THỨC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = h$ (đường cao), $BH = c'$, $CH = b'$ thì :

- $a^2 = b^2 + c^2$
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$
- $ah = bc$
- $c^2 = ac'$; $b^2 = ab'$; $h^2 = b'c'$



Nhận xét :

* $BC^2 > AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \widehat{BAC}$ là góc tù

* $BC^2 < AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \widehat{BAC}$ là góc nhọn

2. HỆ THỨC TRONG TAM GIÁC ĐỀU

Cho tam giác đều có cạnh a, đường cao là h, diện tích là S, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R thì :

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

3. HỆ THỨC TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

Cho ΔABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

- **Hệ thức sin**

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp)

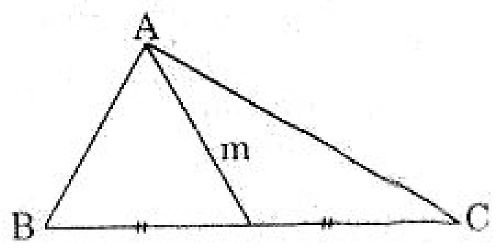
- **Hệ thức cosin**

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}}$$

- **Hệ thức đường trung tuyến**

$$\boxed{b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}}$$

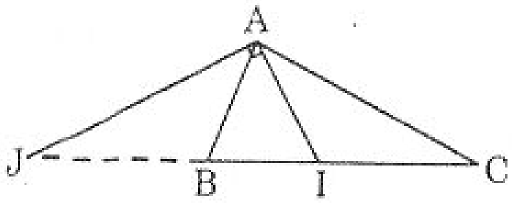
(m là trung tuyến kẻ từ A)



- **Hệ thức đường phân giác**

AI và AJ là các phân giác của $\widehat{BAC}$ thì :

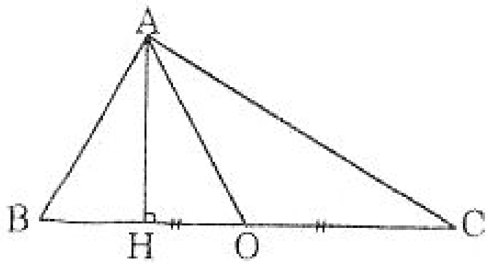
$$\boxed{\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}}$$



- **Hệ thức về đường cao**

$$\boxed{AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC}.\overline{OH}}$$

(O là trung điểm của BC ; AH là đường cao)

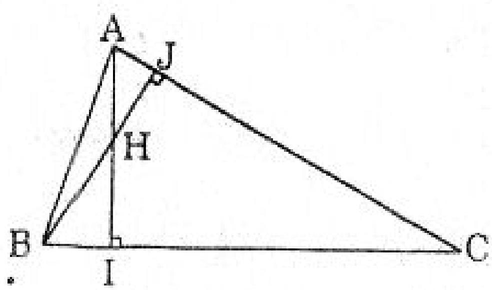


- **Về trọng tâm G**

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}\\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}\end{array}}$$

(Với O là một điểm tùy ý)

- **Về trực tâm H**



$$\boxed{IH.IA = IB.IC}$$

Đối xứng của trực tâm qua cạnh của tam giác là các điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

4. DIỆN TÍCH CỦA TAM GIÁC

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = (p-a)r_A = (p-b)r_B = (p-c)r_C$$

với :

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ là nửa chu vi

r là bán kính đường tròn nội tiếp

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp

r_A, r_B, r_C lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C

- Tâm đường tròn bàng tiếp trong $\hat{A}$ là giao điểm của phân giác trong của $\hat{A}$ và các phân giác ngoài của $\hat{B}$, $\hat{C}$.

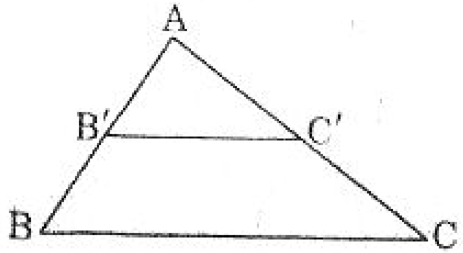
5. TỈ SỐ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Cho B' ∈ AB, C' ∈ AC thì có :

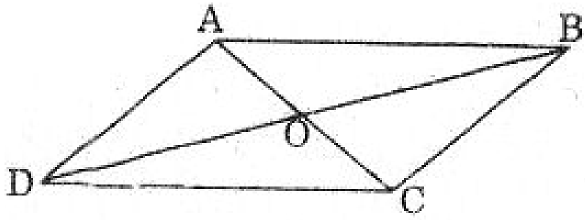
$$\boxed{\frac{S(\Delta AB'C')}{S(\Delta ABC)} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}}$$

Đặc biệt khi B'C' // BC thì :

$$\boxed{\frac{S(\Delta AB'C')}{S(\Delta ABC)} = \left(\frac{AB'}{AB}\right)^2}$$



6. HÌNH BÌNH HÀNH



- Trong hình bình hành ABCD (AC, BD là đường chéo)

$$\boxed{AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)}$$

- Diện tích hình bình hành :

$$\boxed{S = ah \text{ ; (a là cạnh đáy, h là chiều cao)}}$$

$$\boxed{S = AB.AD.\sin A}$$

- Gọi O là tâm của hình bình hành thì ta có:

$$\boxed{S_{(AOB)} = S_{(BOC)} = S_{(COD)} = S_{(AOD)} = \frac{1}{4} S_{ABCD}}$$

7. DIỆN TÍCH TỨ GIÁC LỒI

$$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1.d_2.\sin\alpha}$$

với d_1, d_2 là hai đường chéo ; α là góc giữa hai đường chéo.

8. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

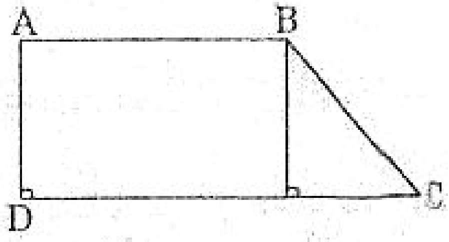
$$\boxed{S = \frac{1}{2}(a + b).h}$$

với a, b là hai đáy ; h là chiều cao

9. HỆ THỨC TRONG HÌNH THANG VUÔNG

Hình thang ABCD vuông tại A và D cho ta :

$$\boxed{BC^2 = AD^2 + (DC - AB)^2}$$



10. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC ĐỀU n – CẠNH

$$\boxed{S = \frac{n}{2} R^2.\sin x}$$

với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác; x là góc ở tâm chắn bởi cạnh của đa giác.

11. ĐIỀU KIỆN NỘI TIẾP CỦA TỨ GIÁC LỒI

- *Các góc đối diện bù nhau*
- *Tồn tại điểm M sao cho MA.MB = MC.MD thì tứ giác ABCD nội tiếp được.*

12. ĐIỀU KIỆN NGOẠI TIẾP CỦA TỨ GIÁC LỒI

Tứ giác lồi ngoại tiếp một đường tròn khi và chỉ khi tổng các cạnh đối diện là bằng nhau.

13. ĐƯỜNG TRÒN

- **Phương tích của một điểm**

Phương tích của một điểm M đối với đường tròn (C) có tâm (O), bán kính R là :

$$\boxed{\mathscr{P}_{M/(C)} = MO^2 - R^2}$$

- **Hệ thức lượng trong đường tròn**

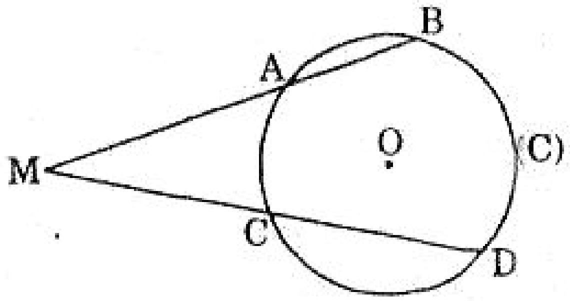
Gọi MAB và MCD là 2 cát tuyến bất kì kẻ từ M tới đường tròn (C) thì có :

$$\boxed{\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD} = \mathscr{P}_{M/(C)}}$$

Đảo lại nếu có :

$$\boxed{\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}}$$

thì bốn điểm A, B, C, D ở trên một đường tròn.



- **Trục đẳng phương của hai đường tròn**

Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2).

Tập hợp $(\Delta) = \{M \mid \mathscr{P}_{M/(C1)} = \mathscr{P}_{M/(C2)}\}$ được gọi là trục đẳng phương của (C_1), (C_2). (Δ) là đường thẳng vuông góc với đoạn nối tâm của hai đường tròn nói trên tại điểm I thỏa :

$$\boxed{IO_1^2 - R_1^2 = IO_2^2 - R_2^2}$$

với : O_1, O_2 lần lượt là tâm của (C_1), (C_2)

R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (C_1), (C_2)

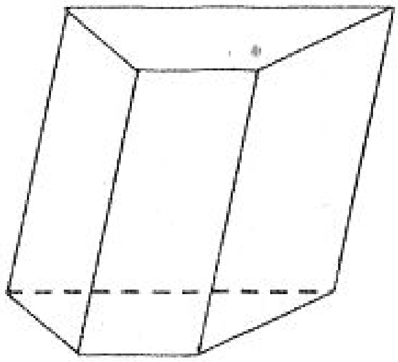
Phần 6

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. HÌNH LĂNG TRỤ

- **Định nghĩa**

Hình lăng trụ là khối đa diện có 2 mặt song song (gọi là đáy) ; các cạnh ở ngoài 2 đáy đều song song với nhau (gọi là *cạnh bên)*



- **Tính chất hình lăng trụ**

  * *Cạnh bên bằng nhau*

  * *Mặt bên là những hình bình hành*

- **Thể tích hình lăng trụ**

$$\boxed{V = S.h}$$

S : diện tích đáy

h : chiều cao

2. LĂNG TRỤ ĐỨNG

- *Lăng trụ đứng là lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.*
- *Trong lăng trụ đứng mặt bên là những*

hình chữ nhật.

- Diện tích xung quanh :

$$\boxed{S_{xq} = C.h}$$

C : chu vi đáy

h : chiều cao

3. LĂNG TRỤ ĐỀU

Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều ; do đó các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.

4. HÌNH HỘP

- *Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.*
- *Trong hình hộp bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường (O là tâm của hình hộp).*

5. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

- *Hình hộp chữ nhật là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật*
- *Trong hình hộp chữ nhật bốn đường chéo bằng nhau và được tính bởi công thức :*

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

d : đường chéo

a, b, c : ba cạnh của hình hộp

- Thể tích :

$$\boxed{V = abc}$$

- Diện tích toàn phần :

$$\boxed{S_{tp} = 2(ab + bc + ca)}$$

6. HÌNH LẬP PHƯƠNG

- *Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có các cạnh đều bằng nhau.*
- Thể tích :

$$\boxed{V = a^3}$$

- Diện tích toàn phần :

$$\boxed{S_{tp} = 6a^2}$$

- Đường chéo :

$$\boxed{d = a\sqrt{3}}$$

(với a là cạnh của hình lập phương)

7. LĂNG TRỤ CỤT

- *Lăng trụ cụt có 2 đáy không song song ; các cạnh bên song song.*
- Thể tích lăng trụ cụt đáy tam giác :

$$\boxed{V = B\left(\frac{a + b + c}{3}\right)}$$

B : diện tích thiết diện thẳng

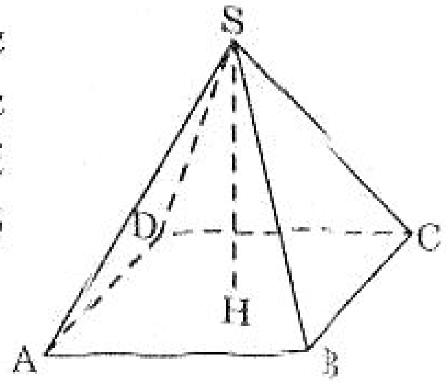
a, b, c : ba cạnh bên

(Thiết diện thẳng là thiết diện vuông góc với cạnh bên và cắt cả 3 cạnh bên của lăng trụ).

8. HÌNH CHÓP

- **Định nghĩa**

Hình chóp là khối đa diện có đáy là một đa giác ; các mặt còn lại là các tam giác có chung một đỉnh.



Đỉnh : S

Đáy : ABCD

Cạnh bên : SA, SB, SC, SD

Chiều cao : SH

Mặt bên : (SAB), (SBC), ...

- **Thể tích hình chóp**

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

V : thể tích

S : diện tích đáy

h : chiều cao

9. HÌNH CHÓP ĐỀU

- *Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.*

- *Trong hình chóp đều đường cao chính là trục của mặt đáy.*
- *Diện tích xung quanh hình chóp đều :*

$$\boxed{S_{xq} = \frac{1}{2}Ca}$$

C : chu vi đáy

a : trung đoạn (đường cao của mặt bên kẻ từ đỉnh của hình chóp)

10. HÌNH CHÓP CỤT

- *Mặt bên của hình chóp cụt là hình thang*
- *Thể tích hình chóp cụt là :*

$$\boxed{V = \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'})}$$

h : chiều cao của hình chóp cụt

S, S' : diện tích của 2 đáy

11. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

- *Mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và bằng nhau.*
- *Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều :*

$$\boxed{S_{xq} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)a}$$

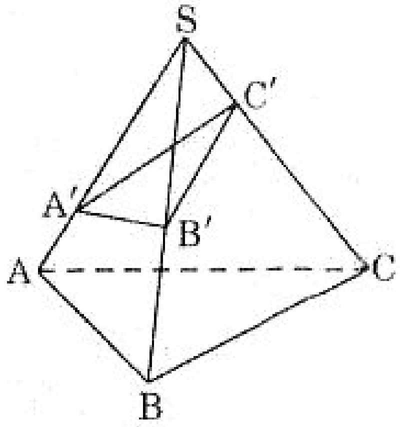
C_1, C_2 : chu vi của hai đáy

a : trung đoạn

12. TỈ SỐ THỂ TÍCH CỦA TỨ DIỆN

Cho tứ diện SABC với $A' \in SA$, $B' \in SB$, $C' \in SC$ thì :

$$\boxed{\frac{V(SA'B'C')}{V(SABC)} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}}$$



13. THỂ TÍCH TỨ DIỆN ABCD

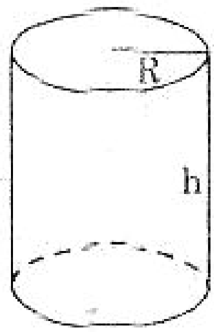
$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.HK.\sin(AB,CD)}$$

trong đó HK là đoạn vuông góc chung giữa AB và CD.

14. HÌNH TRỤ

$$\boxed{V = \pi R^2 h}$$

$$\boxed{S_{xq} = 2\pi Rh}$$



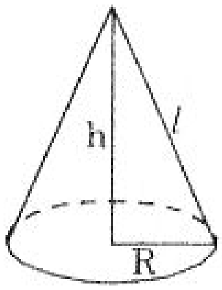
với R là bán kính đáy;

h là chiều cao.

15. HÌNH NÓN

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi R^2 h}$$

$$\boxed{S_{xq} = \pi R l}$$



với R là bán kính đáy

h là chiều cao

l là đường sinh

16. HÌNH NÓN CỤT

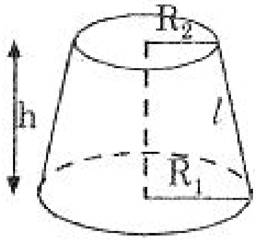
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right)}$$

$$\boxed{S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)\, l}$$

với l là đường sinh

h là chiều cao

R_1, R_2 là bán kính của hai đáy



17. HÌNH CẦU

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

với V là thể tích hình cầu ; S là diện tích hình cầu ; R là bán kính hình cầu.

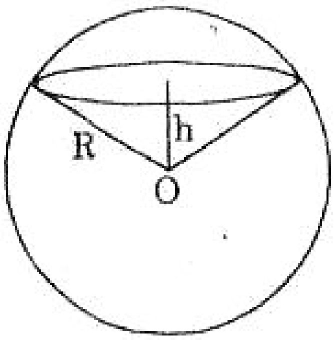
18. HÌNH QUẠT CẦU

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

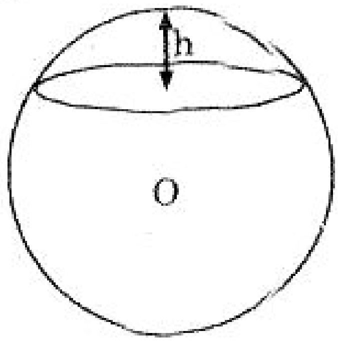
19. CHỎM CẦU

$$\boxed{V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)}$$

$$\boxed{S = 2\pi Rh}$$



(h.1)



(h.2)

Phần 7

SỐ PHỨC

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

- *$z = x + iy$ là số phức có phần thực là $x = R(z)$; có phần ảo là $y = J(z)$; còn số i thỏa tính chất $i^2 = -1$.*

- Cho $z = x + iy$ và $z' = x' + iy'$ thì :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z - z' = (x - x') + i(y - y')$$

$$z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\,\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

2. SỐ PHỨC LIÊN HIỆP

- Cho $z = x + iy$ thì $z = x - iy$ là liên hiệp của z.

- Tính chất

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,.\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$z + \bar{z} = 2R(z)$$

$$z - \bar{z} = 2iJ(z)$$

3. TRỊ TUYỆT ĐỐI

- Cho $z = x + iy$ thì $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $|\bar{z}| = |z|$; $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{với } z_2 \neq 0)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

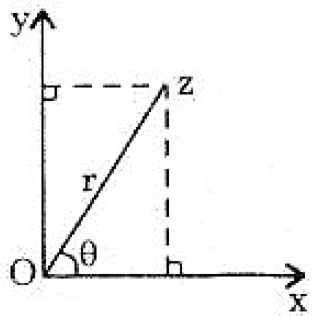
$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

4. DẠNG CỰC CỦA SỐ PHỨC

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

với $r = |z|$ và $\theta = \arg(z)$ xác định bởi $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$

(với $z = x + iy$)



Ký hiệu là $z(r; \theta)$ thì ta có :

Với $z_1 = (r_1; \theta_1)$, $z_2 = (r_2; \theta_2)$, ta được :

$$z_1z_2 = (r_1r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

$$iz = \left(r, \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^n = (r^n, n\theta) \qquad \text{với } n \in Z$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right); \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}, -\theta\right)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(Công thức Moivre)

5. RÚT CĂN CỦA SỐ PHỨC

Cho $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Tìm z_0 sao cho $z_0^n = z \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = \sqrt[n]{z}$

Ta có :

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

với $k = 0, 1, \ldots, n - 1$

Tổng quát :

$$\boxed{z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right]}$$

với $k = 0, 1, \ldots, n - 1$

6. HÀM SỐ MŨ

- Với $z = x + iy$ thì $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

Suy ra :

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \text{ và } e^z = e^x.e^{iy}$$

Do đó : $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$

- **Tính chất**

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}; \qquad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

$$\left(e^z\right)^n = e^{nz} \quad ; \qquad e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$$

7. HÀM SỐ LÔGARIT

- Với $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ thì :

$$\boxed{\log z = \log r + i\theta \quad (\text{với } -\pi < \theta \le \pi)}$$

- **Tính chất**

$$\log(e^z) = z$$

$$e^{\log z} = z$$

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$$

$$\log(z^n) = n\log z$$

MỤC LỤC

Phần 1 ĐẠI SỐ

Phần 2 LƯỢNG GIÁC

Phần 3 GIẢI TÍCH

A. CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ

B. ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

C. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

B. ĐƯỜNG THẲNG

C. ĐƯỜNG TRÒN

D. ELLIP

I. MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA
Tổng biên tập: NGUYỄN THIỆN GIÁP

Biên tập: LAN HƯƠNG

Sửa bản in: PHẠM THỊ CẨM TIÊU

Trình bày bìa: NGỌC ANH

SỔ TAY TOÁN HỌC

Mã số: 01.48.ĐH2003
In 2000 cuốn, khổ 10 × 18cm, tại Xưởng in Tuần báo Văn nghệ
Số xuất bản: 234/27/CXB. Số trích ngang: 82KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu tháng 04 năm 2003.