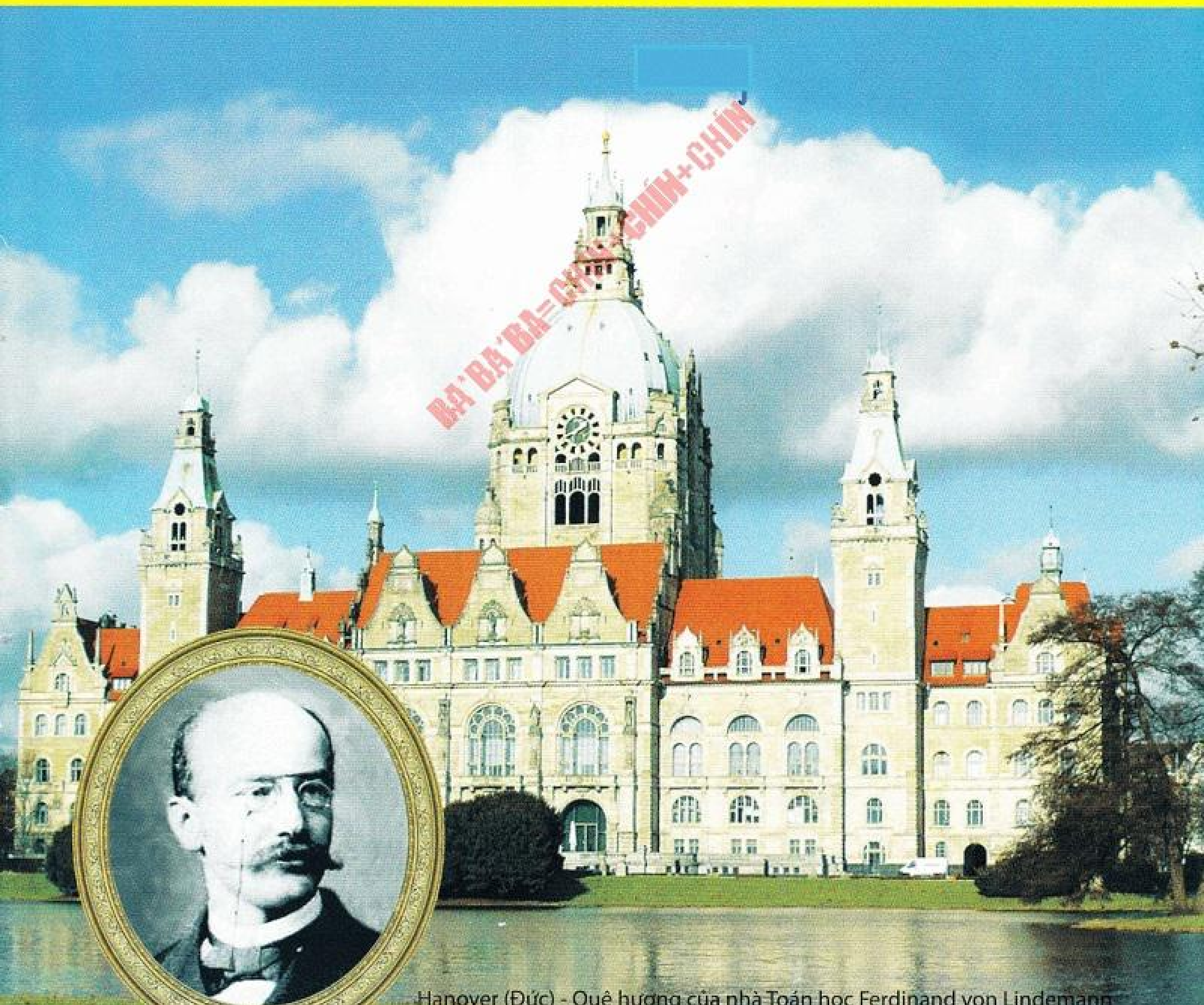
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
3 2018
Số 489

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Hanover (Đức) - Quê hương của nhà Toán học Ferdinand von Lindemann

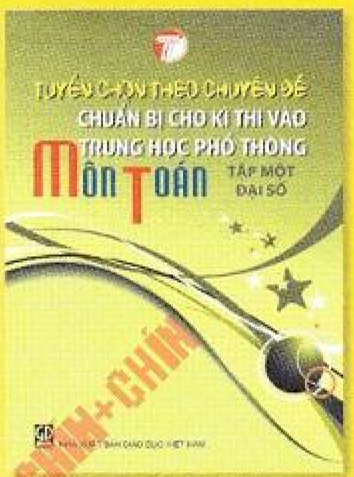
Ferdinand von Lindemann
(1852 – 1939)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI HÀ NỘI
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

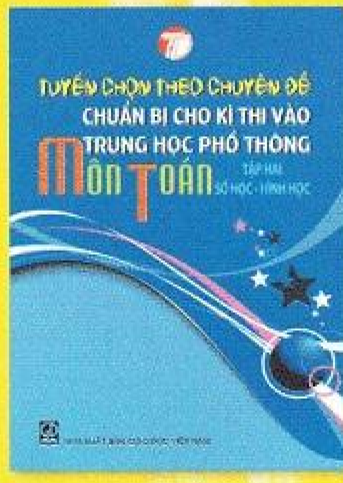
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

Bộ sách gồm hai tập tuyển chọn theo chuyên đề những bài viết hay trên Tạp chí TH&TT và một số bài viết thêm của các nhà giáo có kinh nghiệm nhằm giúp các bạn HS THCS ôn tập và thi có hiệu quả vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên. Bộ sách cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh HS.



200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

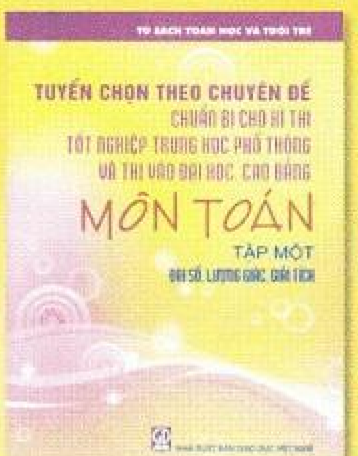


200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

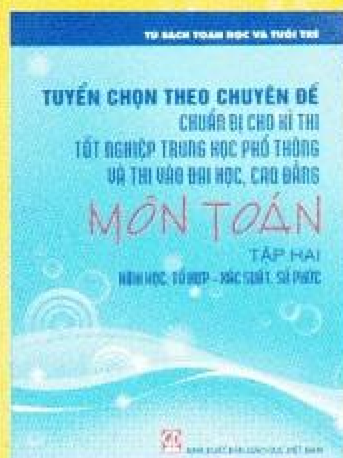
Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.



260 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 46.000 đồng



240 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 44.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax-phát hành: 024.35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

TRĂN TRỞ VỚI MỖI BÀI TOÁN

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Hãy "*suy nghĩ và trăn trở*" với mỗi bài toán mà bạn gặp, khi đó bạn sẽ đạt được thành quả lớn hơn nhiều so với việc bạn chỉ là "*thợ giải toán*". Dưới đây, ta sẽ bắt đầu từ một bài toán trong đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Phú Thọ năm học 2012 – 2013.

Bài toán 1. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$P=\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}.$$

Lời giải. Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ ta tách mẫu để $a+c=b+c=2b,...$

Áp dụng BĐT Schwarz ta có:

$$\frac{9ab}{a+3b+2c}=\frac{ab(1+1+1)^2}{(a+c)+(b+c)+2b}$$

$$\le ab.\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)=\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)\quad(1)$$

Tương tự

$$\frac{9bc}{b+3c+2a}=\frac{bc(1+1+1)^2}{(a+b)+(c+a)+2c}\le\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{c+a}+\frac{b}{2}\quad(2)$$

$$\frac{9ca}{c+3a+2b}=\frac{ca(1+1+1)^2}{(b+c)+(a+b)+2a}\le\frac{ca}{b+c}+\frac{ca}{b+a}+\frac{c}{2}\cdot\quad(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$\frac{9ab}{a+3b+2c}+\frac{9bc}{b+3c+2a}+\frac{9ca}{c+3a+2b}$$

$$\le\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c.$ ❐

Bài toán 1.1. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{3a+4b+2c}+\frac{bc}{3b+4c+2a}+\frac{ca}{3c+4a+2b}\le\frac{a+b+c}{9}.$$

Gợi ý: Định hướng tương tự Bài toán 1 tách mẫu số để $a+b+c=a+b+b=a+2b...$

Bài toán 1.2. *(HSG lớp 12, Vĩnh Phúc, 2014) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{5a+6b+7c}+\frac{bc}{5b+6c+7a}+\frac{ca}{5c+6a+7b}\le\frac{a+b+c}{18}.$$

Gợi ý: Định hướng tương tự Bài toán 1 tách khéo mẫu số để $\frac{7}{2}(b+c)=\frac{7}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(3a+5b)...$

Bài toán 1.3. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{\sqrt{5}a+\sqrt{6}b+\sqrt{7}c}+\frac{bc}{\sqrt{5}b+\sqrt{6}c+\sqrt{7}a}+\frac{ca}{\sqrt{5}c+\sqrt{6}a+\sqrt{7}c}$$

$$\le\frac{a+b+c}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}.$$

Bạn tách mẫu số nào đây?

Bài toán 2. *Cho a, b, c, m, n, p là các số thực dương thỏa mãn* $m>\frac{p}{2},\ n>\frac{p}{2}\cdot$ *Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{ma+nb+pc}+\frac{bc}{mb+nc+pa}+\frac{ca}{mc+na+pb}\le\frac{a+b+c}{m+n+p}\cdot$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{ab(m+n+p)^2}{ma+nb+pc}=ab\frac{\left[\left(m-\frac{p}{2}\right)+\left(n-\frac{p}{2}\right)+p+p\right]^2}{\left(m-\frac{p}{2}\right)a+\left(n-\frac{p}{2}\right)b+\frac{p}{2}(c+a)+\frac{p}{2}(b+c)}$$

$$\le ab\left(\frac{m-\frac{p}{2}}{a}+\frac{m-\frac{p}{2}}{b}+\frac{2p}{c+a}+\frac{2p}{b+c}\right)$$

$$=\left(m-\frac{p}{2}\right)b+\left(n-\frac{p}{2}\right)a+\frac{2pab}{c+a}+\frac{2pab}{b+c}\quad(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{bc(m+n+p)^2}{mb+nc+pa}\le\left(m-\frac{p}{2}\right)c+\left(n-\frac{p}{2}\right)b+\frac{2pbc}{a+b}+\frac{2pab}{b+c}\quad(2)$$

(Xem tiếp trang 6)

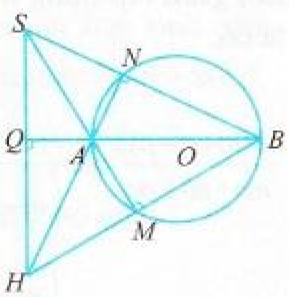
NHỮNG ĐIỀU THÚ VỊ TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC 9

NGUYỄN THỊ THU HẰNG
(GV THCS Quang Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)

Với nhiều năm trực tiếp giảng dạy học sinh giỏi và học sinh thi vào THPT, chúng tôi thấy rằng từ lời giải của một số bài tập trong SGK tưởng chừng như đơn giản, nhưng sau mỗi lời giải đó chứa đựng nhiều điều thú vị, với sự khéo léo, sáng tạo nhiều khi chúng ta sẽ giúp các em học sinh củng cố, ôn luyện, bồi dưỡng nâng cao kiến thức toán. Qua kết quả của từng bài toán HS tiếp tục suy nghĩ và đưa ra được nhiều bài toán mới, hay và lí thú. Phát huy khả năng sáng tạo, phát triển khả năng tự học, hình thành cho học sinh tư duy tích cực, độc lập và kích thích tính tò mò ham tìm hiểu, đem lại niềm vui và những điều lí thú sâu sắc trong học toán. Chúng ta hãy cùng làm điều này từ một bài toán trong SGK Toán 9.

Bài toán 1. (*Bài 19 trang 75 SGK toán 9 - Tập 2, NXB Giáo dục 2012*) *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm bất kỳ nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.*

Lời giải. Ta có $BM \perp SA$ (vì $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Tương tự $AN \perp SB$. Như vậy BM và AN là hai đường cao của tam giác SAB và $H = BM \cap AN \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác SAB. Suy ra $SH \perp AB$ tại Q $(Q \in SH)$.



Nhận xét. Từ kết quả Bài toán 1 chú ý rằng A là trực tâm của ΔSBH nên $SH \perp BQ$ $(Q \in SH)$, suy ra B, A, Q thẳng hàng. Từ đó ta có bài toán sau:

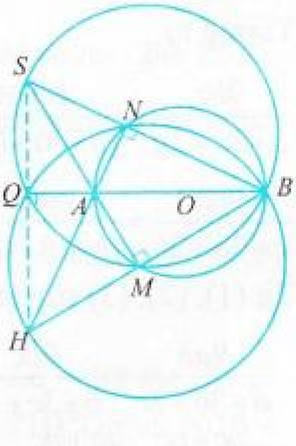
Bài toán 2. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M và N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh B, A, Q thẳng hàng (Q là hình chiếu của B trên SH).*

Gợi ý. Q là hình chiếu của B trên SH suy ra $SH \perp BQ$. Theo chứng minh Bài toán 1 ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ kết quả Bài toán 1 và Bài toán 2 ta có các đường tròn ngoại tiếp ΔSMB và ΔHNB cắt nhau tại Q. Kết hợp Bài toán 1 và Bài toán 2, ta có bài toán:

Bài toán 3. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt lại đường tròn tại M và N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác SMB và HNB cắt nhau tại điểm thứ hai Q. Chứng minh H, Q, S thẳng hàng và A, B, Q thẳng hàng.*

Gợi ý. Sử dụng kết quả Bài toán 1 ta có các đường tròn ngoại tiếp ΔSMB và ΔHNB lần lượt nhận SB và BH làm đường kính. Để chứng minh Bài toán 3 ta chỉ cần nối H với Q, Q với S. Dễ thấy ngay



$$\widehat{SQB} = \widehat{HQB} = 90^0$$

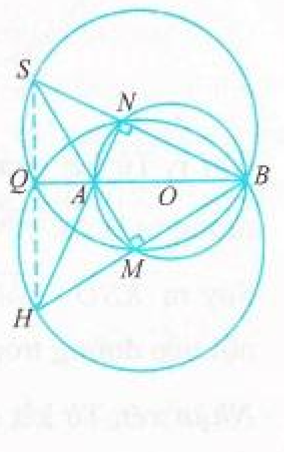
$\Rightarrow H, S, Q$ thẳng hàng. Vì $BQ \perp SH$ nên suy ra BQ phải đi qua A. Vậy khi đó B, Q, A thẳng hàng.

Nhận xét. Sau khi đã chứng minh Bài toán 3 ta nhận thấy đường tròn ngoại tiếp ΔHAM cũng phải qua đi qua điểm Q. Từ đó ta có bài toán 4:

Bài toán 4. *Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. S là một điểm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt lại đường tròn tại M và N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng* *các đường tròn ngoại tiếp các tam giác SMB, HNB và HMA cùng đi qua Q.*

Gợi ý. Sử dụng kết quả Bài toán 3 ta có ΔSMB và ΔHNB cùng đi qua điểm Q. (1)

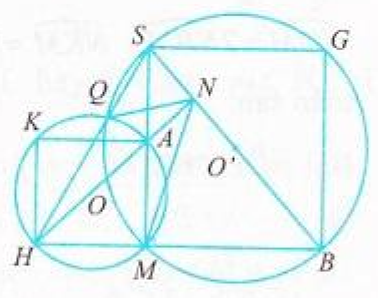
Mặt khác ta có hai điểm Q, M cùng nhìn đoạn thẳng AH dưới một góc vuông nên 4 điểm Q, A, M, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH. Từ đó đường tròn ngoại tiếp ΔAMH đi qua điểm Q. Kết hợp với (1) suy ra điều cần chứng minh.



Nhận xét. Đường tròn đường kính HA và đường tròn đường kính SB cùng cắt nhau tại Q gợi ý cho ta để chứng minh SH và BA đi qua Q cần phải chứng minh S, Q, H thẳng hàng; B, A, Q thẳng hàng. Sự thật là sẽ khó chứng minh Bài toán 5 dưới đây nếu không biết sử dụng Bài toán 3.

Bài toán 5. *Cho điểm M bất kỳ trên đoạn thẳng HB. Lấy HB làm cạnh vẽ hình vuông HMAK và lấy MB làm cạnh vẽ hình vuông thứ hai MBGS (3 điểm S, A, M thẳng hàng). Hai hình vuông này nằm về cùng một phía đối với HB. Các đường tròn tâm O và O' ngoại tiếp hai hình vuông này cắt nhau tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng các đường thẳng HS và BA đi qua Q. (Đề thi học sinh giỏi toán cấp II Quốc gia năm 1967).*

Gợi ý. Từ kết quả Bài toán 3 gợi cho ta đi chứng minh A, B, Q thẳng hàng; H, A, N thẳng hàng.



• Kéo dài HA cắt BS tại N. Ta có:

$\widehat{HAM}=\widehat{SAN}=45^0$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{SNA}=90^0 \Rightarrow HN\perp SB$

suy ra A là trực tâm $\Delta SBH \Rightarrow BA\perp HS$. (3)

Mặt khác $\widehat{BQS}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $BQ\perp HS$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra đường thẳng BQ, BA trùng nhau hay 3 điểm B, A, Q thẳng hàng. Do đó:

$\widehat{BQS}+\widehat{HQA}=180^0$ nên 3 điểm H, Q, S thẳng hàng.

Nhận xét. Từ kết quả bài toán ta có $\widehat{HQB}=90^0$. Nếu cho đoạn HB cố định, M di chuyển trên đoạn HB thì khi đó Q di chuyển trên hình nào? Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 6. *Cho điểm M bất kỳ trên đoạn HB cố định. Trên đoạn HM và MB dựng về một phía đối với HB hai hình vuông HMAK và MBGS. Các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông này cắt nhau tại điểm thứ hai Q.*

a) Chứng minh đường thẳng HQ đi qua một đỉnh của hình vuông MBGS.

b) Tìm quỹ tích điểm Q khi M di động trên HB.

Gợi ý. a) Để chứng minh HQ đi qua một đỉnh của hình vuông $MBGS$ ta đi chứng minh 3 điểm H, Q, S thẳng hàng (Bài toán 5).

b) Chứng minh Q nằm trên đường tròn đường kính HB, giới hạn trong nửa đường tròn.

Nhận xét. Từ kết quả câu a, nhận thấy QB là tia phân giác của $\widehat{NQM}$, NH là tia phân giác của $\widehat{QNM}$, A là trực tâm ΔSBH và là tâm đường tròn nội tiếp ΔQMN. Do đó ta có bài toán sau:

Bài toán 7. *Cho tam giác SBH có ba góc nhọn, các đường cao SM, BQ, HN cắt nhau tại A.*

a) Chứng minh rằng QB là tia phân giác của góc $\widehat{NQM}$.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác QNM.

c) Chứng minh tứ giác SNMH nội tiếp.

Gợi ý. a) Từ kết quả Bài toán 4 chứng minh được:

$\widehat{NQB}=\widehat{NHB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{NB}$). (5)

$\widehat{BQM}=\widehat{NHB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$). (6)

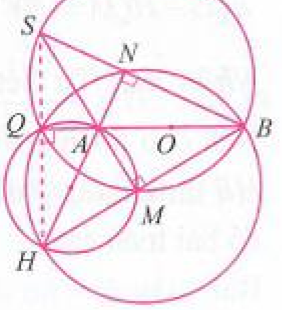
Từ (5) và (6) suy ra

$\widehat{NQB}=\widehat{BQM}\Rightarrow QB$ là tia phân giác của $\widehat{NQM}$.

b) Chứng minh tương tự câu a) ta cũng có NH là tia phân giác của góc $\widehat{QNM}\Rightarrow A$ là giao điểm của

3 tia phân giác của ΔQNM. Vậy A là tâm đường tròn nội tiếp ΔQNM.

c) Ta có $\widehat{SNH} = \widehat{SMH} = 90^0$ (giả thiết). N, M cùng nhìn đoạn thẳng SH dưới góc 90^0 nên N, M thuộc đường tròn đường kính SH. Vậy tứ giác $SNMH$ nội tiếp.



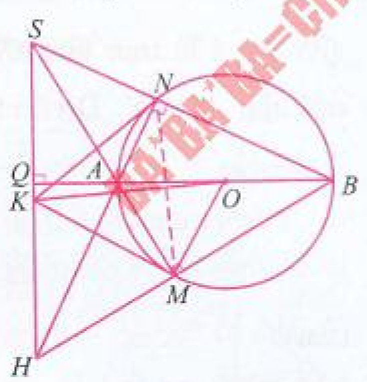
Nhận xét. Từ kết quả câu c) và Bài toán 1 ta có đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính SH cắt nhau tại M, N. Nếu gọi K là trung điểm của SH thì khi đó ta có $OK \perp MN$. Nhưng sẽ khó để chứng minh $OK \perp MN$ nếu ta không biết sử dụng kết quả Bài toán 1 và Bài toán 7, để chứng minh bài toán sau:

Bài toán 8. *Cho ΔSBH có ba góc nhọn, các đường cao BQ, SM, HN cắt nhau tại A. Gọi O, K lần lượt là trung điểm của AB và SH. Chứng minh rằng:*

a) $MN \perp OK$.

b) MK là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔMAN.

Gợi ý. a) Từ Bài toán 1 và kết quả câu c) Bài toán 7 ta dễ dàng chứng minh được đường tròn tâm O và tâm K bán kính KS đều đi qua M, N hay MN là dây chung của hai đường tròn này. Mặt khác OK là đoạn nối tâm, từ đó ta có điều phải chứng minh.



b) Đường tròn ngoại tiếp ΔMAN là (O). Ta có ΔBOM cân ở $O \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OMB}$; ΔKHM cân ở K nên $\widehat{KHM} = \widehat{KMH}$. Mặt khác $\widehat{OBM} + \widehat{KHM} = 90^0$ (vì ΔQBH vuông tại Q) $\Rightarrow \widehat{OMB} + \widehat{KMH} = 90^0$ suy ra $\widehat{KMO} = 90^0 \Rightarrow OM \perp MK$. Vậy MK là tiếp tuyến đường tròn tâm O hay MK là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp ΔMAN.

Nhận xét. Từ kết quả bài toán, chứng minh tương tự ta có $\widehat{KNO} = 90^0$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 9. *Cho tam giác SBH có ba góc nhọn, các đường cao BQ, SM, HN cắt nhau tại A. Gọi O, K lần lượt là trung điểm của AB và SH. Chứng minh rằng tứ giác $OMKN$ nội tiếp.*

Gợi ý. Từ kết quả câu b) Bài toán 8, chứng minh tương tự ta có: $\widehat{KNO} = 90^0 \Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{KNO} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{KNO} + \widehat{KMO} = 180^0$. Do đó tứ giác $OMKN$ nội tiếp đường tròn đường kính OK.

Nhận xét. Từ kết quả Bài toán 9 và $\widehat{KQO} = 90^0 \Rightarrow$ Q thuộc đường tròn đường kính KO. Do đó năm điểm Q, N, O, M, K cùng thuộc đường tròn đường kính KO. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 10. *Cho tam giác SBH có ba góc nhọn, các đường cao BQ, SM, HN cắt nhau tại A. Gọi O, K lần lượt là trung điểm của AB và SH. Chứng minh rằng năm điểm O, M, K, Q, N cùng thuộc một đường tròn.*

Gợi ý. Việc giải Bài toán 10 hoàn toàn giống Bài toán 9 và kết hợp với điều nhận xét trên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Từ kết quả Bài toán 10 ta có các điểm Q, N, O, M, K cùng thuộc đường tròn đường kính KO. Do đó: $\widehat{NKM} = \widehat{NQM}$, và nhận thấy $\widehat{NOM} = 2\widehat{NBM}$, $\widehat{NKM} = 2\widehat{NHM}$. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 11. *Cho tam giác SHB có ba góc nhọn, đường cao BQ, SM, HN cắt nhau tại A. Gọi O, K lần lượt là trung điểm của AB và SH.*

a) Chứng minh rằng $\widehat{NKM} = \widehat{NQM}$; $\widehat{NHM} = \widehat{NSM}$.

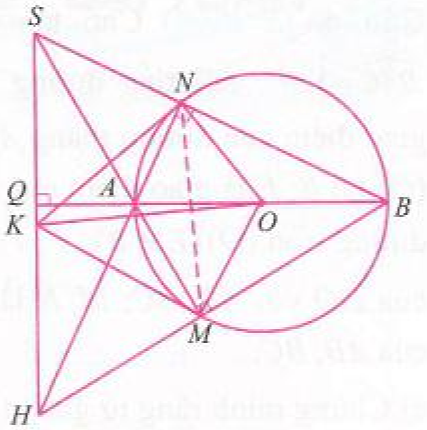
b) Cho $\widehat{NQM} = 90^0$.

• Tính số đo các góc của tứ giác $KNOM$.

• Tính số đo các góc $\widehat{NBM}$; $\widehat{NHM}$; $\widehat{NSM}$.

Gợi ý. a) Theo Bài toán 10 ta chứng minh được năm điểm Q, N, O, M, K cùng thuộc đường tròn đường kính KO. Từ đó $\widehat{NKM}=\widehat{NQM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MN}$).

Tứ giác $SNMH$ nội tiếp đường tròn đường kính SH nên suy ra ta có



$\widehat{MSN}=\widehat{NHM}$

(hai góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{NM}$).

b) • Từ kết quả câu a) ta có:

$\widehat{NKM}=\widehat{NQM}$ mà $\widehat{NQM}=90^0$ nên $\widehat{NKM}=90^0$. (7)

Mặt khác $\widehat{KNO}=\widehat{OMK}=90^0$ (theo Bài toán 7) (8)

Từ (7) và (8) suy ra $\widehat{NOM}=90^0$. (*)

• Từ (*) ta suy ra $\widehat{NBM}=\frac{1}{2}\widehat{NOM}=45^0$.

$\widehat{NHM}=\widehat{NSM}=\frac{1}{2}\widehat{NKM}=45^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{NM}$).

Nhận xét. Từ kết quả bài toán, tứ giác $SNMH$ nội tiếp đường tròn (K), $\widehat{NKM}=90^0$, $\widehat{SBM}=\widehat{BSM}=45^0$, nên $MS = BM$, $SN = NA$ từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 12. *Cho nửa đường tròn đường kính SH, tâm K. Kẻ hai bán kính KN, KM vuông góc với nhau. SM và HN cắt nhau tại A ở trong nửa đường tròn, SN và HM cắt nhau ở B ngoài nửa đường tròn. Chứng minh rằng:*

a) SN =NA và SM =MB.

b) Bán kính KN quay quanh điểm K, từ KS đến vị trí vuông góc với SH. Tìm quỹ tích điểm A.

c) Trong những điều kiện ở câu b) hãy tìm quỹ tích của điểm B.

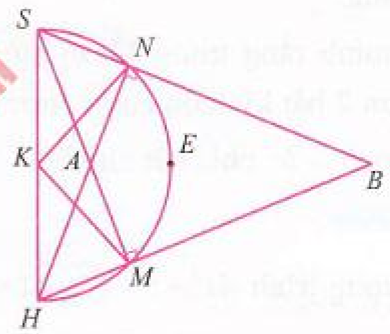
Gợi ý.

a) Ta có $\widehat{SKH}=180^0, \widehat{NKM}=90^0$, nên ta có

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{SN} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{HM} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{NM}$$

và $\widehat{NAS}=\frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{SN} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{HM})$; $\widehat{NSM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{NM}$.

Vậy $\widehat{NSM}=\widehat{NAS}$ nên ΔNAS cân tại N, do đó $AN = NS$. Tứ giác $BNAM$ nội tiếp suy ra $\hat{B}$ bù với $\widehat{NAM}$, $\widehat{NSM}$ cũng bù với $\widehat{NAM}$ nên $\hat{B}=\widehat{NSM}$, tức là ΔBMS cân tại M. Suy ra $BM = MS$.



b) Dễ dàng chứng minh được $\widehat{SAH}=135^0$ không đổi. Vậy A chạy trên cung chứa góc 135^0 vẽ qua SH. Gọi E là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{SH}$. Khi N tiến tới S, M tiến tới E, A tiến tới S. Khi N tiến tới E, M tiến tới H, A tiến tới H. Từ đó quỹ tích của A là cung $\overset{\frown}{HAS}$ chứa góc $\hat{A}=135^0$, đi qua S, H.

c) Ta có $\hat{B}=45^0$ tương tự như trên, quỹ tích của B là cung chứa góc 45^0 đi qua A, B.

Rất mong các bạn tìm kiếm thêm những bài toán mới quanh bài toán xuất phát ban đầu (*Bài 19 trang 75 SGK toán 9 – Tập 2 – NXB Giáo dục* 2012)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG NĂM HỌC 2017 - 2018

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1).$$

b) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $x^2+3mx+2m^2=\dfrac{x^4+x^3}{2}$.

Câu 2. (2 điểm)

a) Tìm các số nguyên m sao cho m^2+12 là số chính phương.

b) Chứng minh rằng trong 11 số nguyên tố phân biệt, lớn hơn 2 bất kỳ luôn chọn được hai số gọi là a, b sao cho a^2-b^2 chia hết cho 60.

Câu 3. (2 điểm)

a) Giải phương trình $4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x}+\sqrt{2y}=6\\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+9}=8\end{cases}$.

Câu 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC cân với $\widehat{BAC}=120^0$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến của (O) tại B; E là giao điểm của đường thẳng BO với đường tròn $(O)\,(E\neq B)$; F, I lần lượt là giao điểm của DO với AB, BC; M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ADBN$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng F, N, E thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng các đường thẳng MI, BO, FN đồng quy.

Câu 5. (1 điểm) Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+z^2+\frac{9}{2}xyz.$$

LÊ BÁ VIỆT HÙNG

(*Phòng GD Trung học, Sở GD&ĐT Phú Thọ*) **giới thiệu**

****

TRẦN TRỞ VỚI ...

(Tiếp theo trang 1)

$$\frac{ca(m+n+p)^2}{mc+na+pb}\le\left(m-\frac{p}{2}\right)a+\left(n-\frac{p}{2}\right)c+\frac{2pbc}{a+b}+\frac{2pab}{b+c}\quad(3)$$

Từ (1), (2),(3) suy ra

$$(m+n+p)^2\left(\frac{ab}{ma+nb+pc}+\frac{bc}{mb+nc+pa}+\frac{ca}{mc+na+pb}\right)$$
$$\le\left(m-\frac{p}{2}\right)(a+b+c)+\left(n-\frac{p}{2}\right)(a+b+c)+2p(a+b+c)$$
$$=(m+n+p)(a+b+c).$$

Suy ra

$$\frac{ab}{ma+nb+pc}+\frac{bc}{mb+nc+pa}+\frac{ca}{mc+na+pb}\le\frac{a+b+c}{m+n+p}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❐

Rõ ràng Bài toán 2 là một bài toán tổng quát của các Bài toán 1 với bộ số a, b, c, m, n, p là các số thực dương thỏa mãn $m>\frac{p}{2}, n>\frac{p}{2}$. Lời giải bài toán thật là thú vị. Từ đây bạn có thể sáng tạo được vô số bài toán BĐT dạng như trên với bộ số thực dương a, b, c, m, n, p với $m>\frac{p}{2}$, $n>\frac{p}{2}$ tùy ý. Mong các bạn góp ý vào bài viết nhỏ này để bài viết được hoàn thiện tốt hơn. Xin cảm ơn.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH HƯNG YÊN NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1. Ta có $a+b=\sqrt{2};\ a.b=\dfrac{1}{4};a^2+b^2=\dfrac{3}{2}$ (1)

Khi đó, ta có:

$$a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-a^3b^3(a+b)$$
$$=[(a+b)^3-3ab(a+b)]$$
$$\times[(a^2+b^2)^2-2a^2b^2]-a^3b^3(a+b)\quad(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $a^7+b^7=\dfrac{169\sqrt{2}}{64}$.

Câu 2. a) Vì (d) đi qua điểm $A(1;\ 2)$ nên ta có phương trình của đường thẳng (d): $y=ax+2-a$.

(d) cắt trục Ox tại $B\left(\dfrac{a-2}{a};0\right)$ và cắt trục Oy tại C $(0;2-a)$. Do điểm B có hoành độ dương và C có tung độ dương nên $a<0$. Khi đó ta có:

$$OB+OC=\frac{a-2}{a}+2-a=1-\frac{2}{a}+2-a$$
$$=3+\frac{-2}{a}+(-a)\geq 3+2\sqrt{\frac{-2}{a}.(-a)}=5.$$

Suy ra $OB+OC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a=-\sqrt{2}$

Vậy phương trình (d) có dạng: $y=-\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}$.

b) ĐK: $3x-16y-24\geq 0$. Ta có:

$$3x-16y-24=\sqrt{9x^2+16x+32}$$
$$\Leftrightarrow(3x-16y-24)^2=9x^2+16x+32$$
$$\Leftrightarrow 9(3x-16y-24)^2=9(9x^2+16x+32)$$
$$\Leftrightarrow(9x-48y-72)^2=(9x+8)^2+224$$
$$\Leftrightarrow(9x-48y-72)^2-(9x+8)^2=224$$
$$\Leftrightarrow(18x-48y-64)(-48y-80)=224$$
$$\Leftrightarrow -32(9x-24y-32)(3y+5)=224$$
$$\Leftrightarrow(9x-24y-32)(3y+5)=-7$$

Với x, y nguyên thì $(3y+5)$ là ước của (-7) và chia 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+5=-1$ hoặc $3y+5=-7$.

- TH1: $3y+5=-1\Rightarrow y=-2\Rightarrow x=-1$.
- TH2: $3y+5=-7\Rightarrow y=-4\Rightarrow x=-7$.

Vậy các cặp nghiệm nguyên của phương trình trên là $(-1;-2)$ và $(-7;-4)$.

Câu 3. ĐK: $x\geq\dfrac{-1}{3}$. Ta có:

$$4x^3+5x^2+1=\sqrt{3x+1}-3x$$
$$\Leftrightarrow 4x^3+5x^2+x+(2x+1)-\sqrt{3x+1}=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^3+5x^2+x+\frac{(2x+1)^2-(3x+1)}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow(4x^2+x)(x+1)+\frac{4x^2+x}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}=0$$
$$\Leftrightarrow(4x^2+x)\left[(x+1)+\frac{1}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}\right]=0\quad(*)$$

Với $x\geq\dfrac{-1}{3}$ thì $(x+1)+\dfrac{1}{(2x+1)+\sqrt{3x+1}}>0$.

$(*)\Leftrightarrow 4x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{-1}{4}\end{array}\right.$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình có nghiệm $x=0,\ x=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 4. ĐK: $x\geq\dfrac{1}{2}$. Biến đổi PT thứ hai ta được:

$$2y^4(5x-2)(x-3)=3(2-5x)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{5}\text{ (loại)}\\2xy^4+3=6y^4\end{array}\right..$$

Ta đưa về hệ phương trình

$$\begin{cases}y^2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\sqrt{2x-1}=5y^2-\sqrt{3}\\2xy^4+3=6y^4\end{cases}.$$

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ PT nên chia cả hai vế của PT thứ nhất cho y^2 và PT thứ hai cho y^4 ta có

$$\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}\sqrt{2x-1}=5-\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}\\2x-1+\dfrac{3}{y^4}=5\end{cases}$$

Đặt $a=\sqrt{2x-1};b=\dfrac{\sqrt{3}}{y^2}$ với $a\geq 0,b>0$.

Ta có hệ PT: $\begin{cases} a+ab+b=5 (1) \\ a^2+b^2=5 \quad (2) \end{cases}$. Từ (1) có: $a=\dfrac{5-b}{1+b}$,

thay vào (2) ta có: $\left(\dfrac{5-b}{1+b}\right)^2+b^2=5$

$$\Leftrightarrow b^4+2b^3-3b^2-20b+20=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)(b-2)(b^2+5b+10)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(a;b)=(2;1)\\(a;b)=(1;2)\end{array}\right..$$

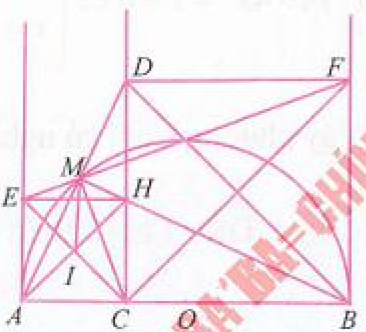
• Với $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\pm\sqrt[4]{3} \end{cases}$

• Với $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\pm\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ PT trên là

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{5}{2};\pm\sqrt[4]{3}\right);\left(1;\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Câu 5. a) Do MC là phân giác của ΔAMB, theo tính chất đường phân giác



$$\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BM} \quad (1)$$

Xét ΔBHC và ΔBAM có: $\widehat{BCH}=\widehat{BMA}=90^0$ và $\widehat{ABM}$ chung

$$\Rightarrow \Delta BHC \backsim \Delta BAM \Rightarrow \frac{HC}{BC}=\frac{AM}{BM} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC=HC.$

b) Gọi I là giao điểm của AH và EC. Tứ giác $ACHE$ hình vuông $\Rightarrow AH = EC$. Xét ΔAMH vuông tại $M \Rightarrow MI=\dfrac{AH}{2}\Rightarrow MI=\dfrac{EC}{2}\Rightarrow \widehat{EMC}=90^0$.

Chứng minh tương tự $\widehat{CMF}=90^0$.

Vậy $\widehat{EMF}=90^0+90^0=180^0 \Rightarrow E,M,F$ thẳng hàng.

c) Vì $ACHE$ là hình vuông nên $CH=\dfrac{CE}{\sqrt{2}}$ suy ra

$$S_1=CH^2=\frac{CE^2}{2}\Rightarrow 2S_1=CE^2.$$

Tương tự ta cũng được $2S_2=CF^2$.

Dễ thấy ΔFCE vuông tại C, đường cao CM. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{CE^2}+\frac{1}{CF^2}=\frac{1}{CM^2}\Rightarrow CM^2=\frac{CE^2.CF^2}{CE^2+CF^2}$$

$$\Rightarrow CM^2=\frac{2S_1.S_2}{S_1+S_2}\le\frac{2S_1.S_2}{2\sqrt{S_1.S_2}}=\sqrt{S_1.S_2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow S_1=S_2 \Leftrightarrow AM=BM$ (vô lý vì $MA<MB$). Vậy $CM^2<\sqrt{S_1.S_2}$.

Câu 6.

• Chứng minh bất đẳng thức: Với $x,y,z\ge 0$ thì

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{3(x+y+z)}. \qquad (*)$$

(Bạn đọc tự chứng minh)

• Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$P=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}$$

$$\le\sqrt{3\left[3-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]}=\sqrt{9-3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}.$$

Suy ra $P\le\sqrt{9-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2}$.

Từ giả thiết $32abc=18(a+b+c)+27$.

$$\Leftrightarrow 18\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{27}{abc}=32 \qquad (**)$$

Áp dụng BĐT quen thuộc:

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

và BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2;\ \frac{1}{abc}\le\frac{1}{27}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3$$

Đặt $t=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ thì từ (**) suy ra:

$$18\left(\frac{t^2}{3}\right)+27\left(\frac{t^3}{27}\right)\ge 32\Leftrightarrow t^3+6t^2-32\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+4)^2\ge 0\Leftrightarrow t\ge 2.$$

Suy ra $P\le\sqrt{9-\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2}\le\sqrt{9-2^2}=\sqrt{5}.$

Dấu "=" xảy ra khi chỉ khi $a=b=c=\dfrac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt{5}$.

NGUYỄN THANH GIANG

(*GV THPT chuyên Hưng Yên*) ***Giới thiệu***

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

1A	2B	3A	4C	5C	6A	7A	8C	9B	10D
11A	12A	13B	14A	15D	16B	17A	18D	19A	20D
21D	22A	23A	24A	25C	26C	27A	28A	29A	30C
31D	32B	33B	34A	35A	36D	37A	38C	39D	40A
41C	42A	43B	44D	45A	46A	47A	48B	49A	50C

Câu 1. $\frac{9!}{2!.3!.4!}=1260$. Chọn A.

Câu 2. PT $\Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ta thấy

$$0\le -\frac{5\pi}{6}+k2\pi\le 4035\pi \Leftrightarrow \frac{5}{12}\le k\le \frac{24215}{12}\approx 2017,9\cdot$$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1,2,3,...,2017\}$. Vậy trên đoạn $[0;4035\pi]$ phương trình $\sqrt{3}\cos x+\sin x=-2$ có 2017 nghiệm. Chọn B.

Câu 4. Vì $\sqrt[3]{a^{14}}>\sqrt[4]{a^7}$ nên $a>1$. Với $a>1$ thì $2\sqrt{a+1}>\sqrt{a}+\sqrt{a+2}\Leftrightarrow a+1>\sqrt{a^2+2a}\Leftrightarrow 1>0$ (luôn đúng).

Mặt khác $\log_b\left(2\sqrt{a+1}\right)<\log_b\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)$ nên $0<b<1$. Chọn C.

Câu 5. Tổng diện tích

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2=\frac{\pi+4}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16}$$

nhỏ nhất khi $x=\frac{a\pi}{\pi+4}$. Chọn C.

Câu 6. $n(\Omega)=6$, gọi A là biến cố cần tính xác suất thì $n(A)=2\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}$. Chọn A.

Câu 7. Xin đính chính đề bài ở câu này: Đã viết: $\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=\left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1$ mmHg, sửa lại: $P_0=760$ mmHg

Khi đó: $P=760.e^{\frac{3000}{1000}\ln\frac{672,71}{760}}\approx 527,06$ (mmHg). Chọn A.

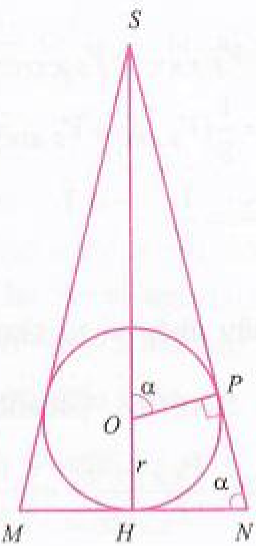
Câu 8. Gọi khối chóp đã cho là $S.ABCD$, gọi M,N,H lần lượt là trung điểm của AD,BC,MN, thì $SH=h$ và SMN là tam giác cân tại S. Gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và gọi P là tiếp điểm của mặt cầu đó với mặt phẳng (SBC). Do $\Delta SOP\backsim\Delta SNH\Rightarrow SN=\frac{h-r}{r}HN$.

Lại có:

$SN^2=h^2+HN^2$. Suy ra $HN^2=\frac{hr^2}{h-2r}$. Ta có

$$S_{ABCD}=4.HN^2=\frac{4hr^2}{h-2r}\cdot$$

Vậy $V=\frac{h}{3}.S_{ABCD}=\frac{4h^2r^2}{3(h-2r)}\cdot$ Chọn C.



Câu 9. Gọi A_1,A_2 là điểm biểu diễn của số phức z_1,z_2 $(z_1\ne z_2)$ thì tập hợp những điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=1$ là đường trung trực của đoạn thẳng A_1A_2. Tìm ra $z=1+i$.

Câu 12. Phương trình hoành độ điểm chung của (C) và d là $mx-m-3=2x^3-3x^2-2$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1-m)=0.$$

Với $\begin{cases} m>-\frac{9}{8} \\ m\ne 0\end{cases}$ thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(x_1;mx_1-m-3),B(x_2;mx_2-m-3),I(1;-3)$, trong đó

$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1}{2} \\ x_1x_2=-\dfrac{m+1}{2} \end{cases}$. Tiếp tuyến với (C) tại A, B vuông góc với nhau khi $(6x_1^2-6x_1)(6x_2^2-6x_2)=-1$

$$\Leftrightarrow 36x_1x_2(x_1x_2+1-x_1-x_2)=-1$$

hay $9m(m+1)=-1 \Leftrightarrow 9m^2+9m+1=0.$

Tập S gồm hai giá trị của m có tổng bằng -1. Chọn A.

Câu 13. Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}=\dfrac{1}{8}$,

$$\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{8}.$$

và $\begin{matrix} V_{S.A'B'C'D'}=V_{S.A'B'C'}+V_{S.A'D'C'} \\ V_{S.ABCD}=V_{S.ABC}+V_{S.ADC} \end{matrix}$

nên

$$V_{S.A'B'C'D'}=V_{S.A'B'C'}+V_{S.A'D'C'}$$
$$=\frac{1}{8}\left(V_{S.ABC}+V_{S.ADC}\right)=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$
$$\Rightarrow \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}.$$

Cũng có thể thấy phép vị tự tâm S tỉ số $\dfrac{1}{2}$ biến hình chóp $S.ABCD$ thành hình chóp $S.A'B'C'D'$, nên $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$. Chọn B.

Câu 14. Với $m<-1$ thì đồ thị hàm số $y=x^4+(m+1)x^2-2m-1$ có ba điểm cực trị $A(0;-2m-1)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};\dfrac{-m^2-10m-5}{4}\right)$, $C(-\sqrt{\dfrac{-m-1}{2}};\dfrac{-m^2-10m-5}{4})$.

Ta có

$$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{\frac{-m-1}{2}};\frac{-m^2-2m-1}{4}\right),$$
$$\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{\frac{-m-1}{2}};\frac{-m^2-2m-1}{4}\right),$$

nên $AB^2=AC^2=\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^4-\dfrac{m+1}{2}$. Tam giác ABC cân tại A, do đó tam giác này có một góc bằng 120^0 khi

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\left(\frac{m+1}{2}\right)^4+\frac{m+1}{2}\right)=\frac{m+1}{2}-\left(\frac{m+1}{2}\right)^4$$
$$\Leftrightarrow m=-1-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}.$$

(do $m<-1$). Chọn A.

Câu 17. Ta có $\Delta_1 \cap \Delta_2 = M(1;0;0)$, $\vec{u}_1=(1;2;-1)$, và $\vec{u}_2=(-1;-1;2)$ là các VTCP của hai đường thẳng đã cho, $\vec{u}_1.\vec{u}_2=-5<0$, $|\vec{u}_1|=|\vec{u}_2|=\sqrt{6}$, nên $\vec{u}=\vec{u}_1-\vec{u}_2=(2;3;-3)$ là một VTCP của đường phân giác Δ của góc nhọn tạo bởi Δ_1,Δ_2. Vậy

$\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-3}$. Chọn A.

Câu 18. Ta có

$$\left(1-3x+2x^3\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{k}C_{10}^kC_k^i2^{10-k}(-3)^ix^{30-3k+i}.$$

Các cặp số nguyên (i,k) thỏa mãn $0\le i\le k\le 10$, $30-3k+i=7$ là $(i,k)=(1,8),(4,9),(7,10)$. Do đó hệ số của x^7 trong khai triển đã cho là

$$C_{10}^8C_8^12^2(-3)^1+C_{10}^9C_9^42^1(-3)^4$$
$$+C_{10}^{10}C_{10}^72^0(-3)^7=-62640.$$

Chọn D.

Câu 19. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\,dx$. Khi đó

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n+1}dx=I_n-\int_0^1 x^3.x(1-x^2)^n\,dx.$$

Với tích phân $J=\int_0^1 x^3.x(1-x^2)^n dx$ ta đặt

$$\begin{cases} u=x^3 \\ v=-\dfrac{1}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=3x^2 \\ v'=x(1-x^2)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow J=\left(\frac{-x^3}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\right)\Bigg|_0^1+\int_0^1 \frac{3x^2}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}dx$$

$$\Rightarrow J=\frac{3}{2(n+1)}I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1}=I_n-\frac{3}{2(n+1)}I_{n+1}$$

$\Rightarrow \dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{2n+2}{2n+5}$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=1$. Chọn A.

Câu 20. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;h)$, $B(a;0;h), B'(a;0;0), C'(0;a;0)$,

$\overrightarrow{AB'}=(a;0;-h), \overrightarrow{BC'}=(-a;a;-h)$,

$\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right]=(ah;2ah;a^2), \overrightarrow{AB}=(a;0;0)$.

Vậy $d(AB',BC')=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right]\right|}=\dfrac{ah}{\sqrt{a^2+5h^2}}$.

Chọn D.

Câu 21. Phép vị tự tâm $I(a;b)$ tỉ số $k\neq 0$ biến điểm $M(x;y)\in(C): y=f(x)$ thành điểm $M'(x';y')\in(C')$ và biến (C) thành (C'). Ta có $\overrightarrow{IM'}=k.\overrightarrow{IM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'-a=k(x-a) \\ y'-b=k(y-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'+ka-a}{k} \\ y=\dfrac{y'+kb-b}{k} \end{cases}.$$

Do đó $M\in(C) \Leftrightarrow \dfrac{y'+kb-b}{k}=f\left(\dfrac{x'+ka-a}{k}\right)$

$$\Leftrightarrow y'=k.f\left(\frac{x'+ka-a}{k}\right)-kb+b$$

$$\Leftrightarrow M'(x';y')\in(C'): y=k.f\left(\frac{x+ka-a}{k}\right)-kb+b.$$

Vậy phép vị tự tâm $I(a;b)$ tỉ số $k\neq 0$ biến đồ thị $(C): y=f(x)$ thành đồ thị

$$(C'): y=k.f\left(\frac{x+ka-a}{k}\right)-kb+b.$$

Chọn D.

Câu 23. Gọi số hạng thứ hai của cấp số cộng là u_2 thì số hạng thứ 9 và thứ 44 của cấp số cộng này là $u_9=u_2+7d, u_{44}=u_2+42d$ (d là công sai của cấp số cộng, $d\neq 0$ vì u_2,u_9,u_{44} phân biệt).

Ta có $\begin{cases} u_2.u_{44}=u_9^2 \\ u_2+u_9+u_{44}=217 \end{cases}$

nên $\begin{cases} u_2.(u_2+42d)=(u_2+7d)^2 \\ u_2+u_2+7d+u_2+42d=217 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2=7 \\ d=4 \end{cases}$

(do $d\neq 0$). Do đó $u_1=u_2-d=3$ và

$$S_n=\frac{n}{2}(2u_1+(n-1)d)=n(2n+1).$$

Phương trình $n(2n+1)=820$ có một nghiệm nguyên dương là $n=20$. Chọn A.

Câu 24. Độ dài đường sinh của hình nón là

$$l=SA=SB=SC=\frac{\sqrt{86}}{6}\cdot$$ Chọn A.

Câu 30. Bán kính mặt cầu $R=OH=3$. Chọn C.

Câu 31. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,AC,SA và $MN=NP=MP=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{MNP}=60^0$.

Góc giữa AB,SC bằng 60^0. Chọn D.

Câu 34. Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Kẻ $AH\perp BC$, $H\in BC$ thì $\widehat{SHA}=60^0$ và

$$BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos 120^0=7a^2,$$

$$AH=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC}=a\sqrt{\frac{3}{7}}\Rightarrow SA=AH.\tan 60^0=\frac{3a}{\sqrt{7}}\cdot$$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{\sqrt{7}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=a^3.\dfrac{\sqrt{21}}{14}\cdot$ Chọn A.

Câu 37. Tiếp tuyến với (C) tại A,B là

$$d_1: y=-2x+4, d_2: y=4x-11, d_1\cap d_2=M\left(\frac{5}{2};-1\right).$$

Diện tích cần tính

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\left[(x^2-4x+5)-(-2x+4)\right]dx+$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left[(x^2-4x+5)-(4x-11)\right]dx=\frac{9}{4}\cdot \quad \text{(đvdt)}$$

Chọn A.

Câu 38. $AA'+CC'=BB'+DD'$. Chọn C.

Câu 39. Gọi K là trung điểm của DC và H là hình chiếu của O trên SK. Ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{5}{a^2}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{5}}\Rightarrow d(SC,AB)=2.OH=\frac{2a}{\sqrt{5}}\cdot$$

Chọn D.

Câu 40. Khối nón có chiều cao $h=AH=4{,}8\,\text{cm}$ và bán kính đáy $r=HC=6{,}4\,\text{cm}$ nên có thể tích $V=\frac{1}{3}\pi r^2h\approx 205{,}89\,\text{cm}^3$. Chọn A.

Câu 41. Qua mỗi cạnh của tứ diện $ABCD$ dựng mặt phẳng song song với cạnh đối diện, ta được hình hộp $AMBN.QCPD$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Vì các cặp cạnh đối của $ABCD$ bằng nhau nên mỗi mặt của hình hộp nói trên là những hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau. Vì thế $AMBN.QCPD$ là hình hộp chữ nhật với các kích thước $AM=x, AN=y, AQ=z$ và $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. Hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ chính là hình cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $AMBN.QCPD$ và có bán kính bằng

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$ Chọn C.

Câu 42. $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Chọn A.

Câu 43. Ta thấy $3y-2=-\dfrac{11}{3x+4}$, do đó nếu $x,y\in\mathbb{Z}$ thì $3x+4$ là ước của 11, tìm ra hai điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số đã cho là $A(-1;-3), B(-5;1)$. Chọn B.

Câu 44. Tập $S=\{-1;0\}$ có 4 tập con. Chọn D.

Câu 46. Đặt $t=\sin 2x$, tính ra $a=0, b=-\dfrac{1}{8}$ nên $e^a+\log_2|b|=-2$. Chọn A.

Câu 47. Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S), gọi A là hình chiếu của I trên d. Khi đó trung điểm H của TT' thỏa mãn $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IA}=r^2$ và $\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IA}$ cùng hướng. Chọn A.

Câu 48. Ta có

$$|w|=1\Leftrightarrow|z_1.z+z_2|=1$$

$$\Leftrightarrow\left|z_1.(z+\frac{z_2}{z_1})\right|=1\Leftrightarrow\left|z+\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{1}{|z_1|}.$$

Chọn B.

Câu 49. Đạo hàm cấp n $(n\in\mathbb{N}^*)$ của hàm số $y=\ln|ax+b|$ $(a^2+b^2\neq 0)$ là

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{ax+b}\right)^n.$$

Chọn A.

Câu 50. Đặt $t=2^{\cot x}$ thì $t=t(x)=2^{\cot x}$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right)$ và tập giá trị của t là $(0;2]$.

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)=t^3+(m-3)t+3m-2, t\in(0;2]$, nghịch biến trên nửa khoảng $(0;2]$. Ta có

$$f'(t)=3t^2+m-3\le 0\forall t\in(0;2]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-m\ge 0\\ -\sqrt{\dfrac{3-m}{3}}\le 0\\ \sqrt{\dfrac{3-m}{3}}\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow m\le -9.$$

Vậy với $m\le -9$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{\pi}{4};\pi\right)$. Chọn C.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong số 2 – Bắc Ninh)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Cho số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ và xét hai số phức $\alpha = z^2 + (\overline{z})^2$ và $\beta = 2z.\overline{z} + i(z - \overline{z})$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

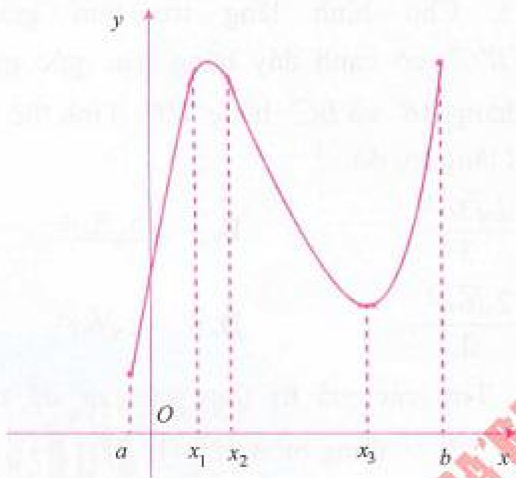
A. α là số thực, β là số thực.

B. α là số ảo, β là số thực.

C. α là số thực, β là số ảo.

D. α là số ảo, β là số ảo.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng $(a;\ b)$ và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào là **sai**?



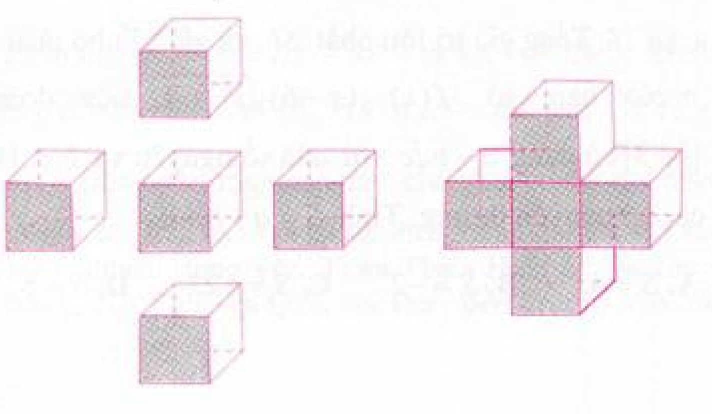
A. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trong khoảng $(a;\ b)$.

B. $f'(x_1) > 0$.

C. $f'(x_2) > 0$.

D. $f'(x_3) = 0$.

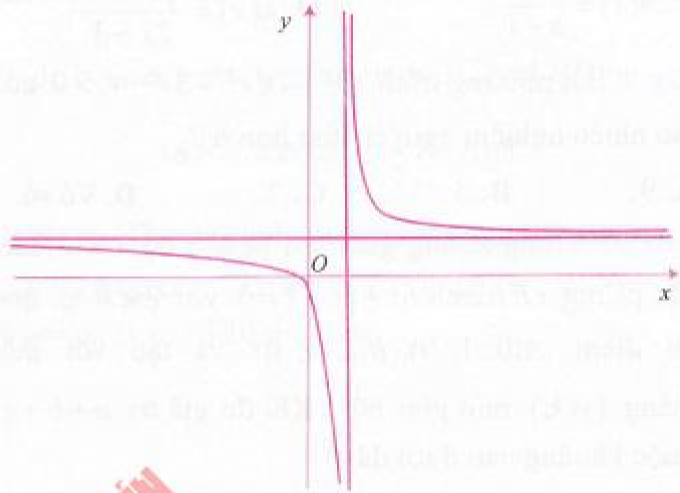
Câu 3. Người ta ghép 5 khối lập phương cạnh a để được khối hộp chữ thập như hình dưới. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối chữ thập đó.



A. $S_{tp} = 20a^2$. **B.** $S_{tp} = 12a^2$.

C. $S_{tp} = 30a^2$. **D.** $S_{tp} = 22a^2$.

Câu 4.



Cho hàm số $y = \dfrac{bx - c}{x - a}$ $(a \neq 0$ và $a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $a > 0,\ b < 0,\ c - ab < 0$.

B. $a > 0,\ b > 0,\ c - ab < 0$.

C. $a < 0,\ b > 0,\ c - ab < 0$.

D. $a < 0,\ b < 0,\ c - ab > 0$.

Câu 5. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $a^{\log_2 5} = 4;\ b^{\log_4 6} = 16;\ c^{\log_7 3} = 49$. Tính giá trị

$$T = a^{\log_2^2 5} + b^{\log_4^2 6} + 3c^{\log_7^2 3}.$$

A. $T = 126$. **B.** $T = 5 + 2\sqrt{3}$.

C. $T = 88$. **D.** $T = 3 - 2\sqrt{3}$.

Câu 6. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^b > b^a$.

B. Với mọi $a > b > 1$, ta có $\log_a b < \log_b a$.

C. Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^{a-b} > b^{b-a}$.

D. Với mọi $a > b > 1$, ta có $\log_a \dfrac{a+b}{2} < 1$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;\ 1;\ 1), B(-1;\ 1;\ 0), C(1;\ 3;\ 2)$.

Đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC nhận vectơ $\vec{a}$ nào dưới đây làm một vectơ chỉ phương?

A. $\vec{a}=(1;\ 1;\ 0)$. **B.** $\vec{a}=(-2;\ 2;\ 2)$.

C. $\vec{a}=(-1;\ 2;\ 1)$. **D.** $\vec{a}=(-1;\ 1;\ 0)$.

Câu 8. Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $f(x)=3^x$. **B.** $g(x)=\log_3 x$.

C. $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$. **D.** $k(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$.

Câu 9. Bất phương trình $(3^x-1)(x^2+3x-4)>0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 6 ?

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** Vô số.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua hai điểm $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60^o. Khi đó giá trị $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;\ 3)$. **B.** $(3;\ 5)$. **C.** $(5;\ 8)$. **D.** $(8;\ 11)$.

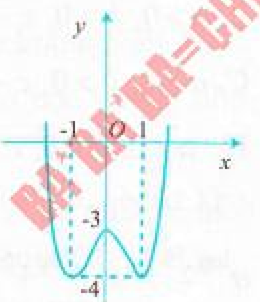
Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. $-4<m<-3$.

B. $0<m<3$.

C. $m>4$.

D. $3<m<4$.



Câu 12. Tính nguyên hàm của hàm số

$$f(x)=e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right).$$

A. $\int f(x)=2017e^x+\dfrac{2018}{x^4}+C$.

B. $\int f(x)=2017e^x+\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)=2017e^x-\dfrac{504,5}{x^4}+C$.

D. $\int f(x)=2017e^x-\dfrac{2018}{x^4}+C$.

Câu 13. Tìm giá trị dương của k để

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(3k+1)x^2+1}}{x}=9f'(2) \text{ với } f(x)=\ln(x^2+5).$$

A. $k=12$. **B.** $k=2$. **C.** $k=5$. **D.** $k=9$.

Câu 14. Xét $f(x)$ là một hàm số tùy ý. Trong bốn mệnh đề dưới đây có bao nhiêu mệnh đề đúng?

(I). Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

(II). Nếu $f'(x_0)=0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0.

(III). Nếu $f'(x_0)=0$ và $f''(x)>0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

(IV). Nếu $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 thì $f''(x)<0$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60^o. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó.

A. $V=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V=2\sqrt{3}a^3$.

C. $V=\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $V=2\sqrt{6}a^3$.

Câu 16. Tìm các giá trị thực của m để hàm số $y=2^{x^3-x^2+mx+1}$ đồng biến trên $[1;\ 2]$.

A. $m>-8$. **B.** $m\geq-1$. **C.** $m\leq-8$. **D.** $m<-1$.

Câu 17. Kết quả $(b,\ c)$ của việc gieo một con súc sắc cân đối hai lần liên tiếp, trong đó b là số chấm xuất hiện lần gieo thứ nhất, c là số chấm xuất hiện lần gieo thứ hai được thay vào phương trình bậc hai $x^2+bx+c=0$. Tính xác suất để phương trình bậc hai đó vô nghiệm?

A. $\dfrac{7}{12}$. **B.** $\dfrac{23}{36}$. **C.** $\dfrac{17}{36}$. **D.** $\dfrac{5}{36}$.

Câu 18. Tổng giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=(x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $[0;\ 3]$ có dạng $a-b\sqrt{c}$ với a là số nguyên và b, c là các số nguyên dương. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=4$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=-22$. **D.** $S=5$.

Câu 19. Cho số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thoả mãn $a + (b-1)i = \dfrac{1+3i}{1-2i}$. Giá trị nào dưới đây là môđun của z?

A. 5. **B.** 1. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 20. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,dx = \frac{1}{a} + b\ln\frac{3}{2}$ $(a, b > 0)$.

Tìm các giá trị k để $\displaystyle\int_8^{ab} dx < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k < 0$. **B.** $k \neq 0$. **C.** $k > 0$. **D.** $k \in \mathbb{R}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a, AB = BC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{110}}{5}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

C. $d = \dfrac{a\sqrt{110}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{10}}{5}$

Câu 22. Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao bằng 4,2m. Trong số các cây đó có 2 cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40cm, 6 cây cột còn lại phân bố đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26cm. Chủ nhà thuê nhân công để sơn các cây cột bằng loại *sơn giả đá*, biết giá thuê là $380000/1\text{m}^2$ (kể cả vật liệu sơn và phần thi công). Hỏi người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó (đơn vị đồng)? (lấy $\pi = 3{,}14159$).

A. $\approx 11.833.000$. **B.** $\approx 12.521.000$.

C. $\approx 10.400.000$. **D.** $\approx 15.642.000$.

Câu 23. Số giờ có ánh sáng của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12, t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng nhất?

A. 262. **B.** 353. **C.** 80. **D.** 171.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\ 4;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc mặt phẳng (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a + b = c$. **B.** $a + b + c = 5$.

C. $a \in (b;\ c)$. **D.** $a + b > c$.

Câu 25. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^n$ $(x \neq 0)$, biết rằng $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \cdots + n.C_n^n = 256n$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

A. 489888. **B.** 49888.

C. 48988. **D.** 4889888.

Câu 26. Cho phương trình

$$8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x.$$

Khi đặt $t = 2^x + \dfrac{1}{2^x}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $8t^3 - 3t - 12 = 0$. **B.** $8t^3 + 3t^2 - t - 10 = 0$.

C. $8t^3 - 125 = 0$. **D.** $8t^3 + t - 36 = 0$.

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-3;2), B(1;1), C(2;-4)$. Gọi $A'(x_1;\ y_1)$, $B'(x_2;\ y_2)$, $C'(x_3;\ y_3)$ lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -\dfrac{1}{3}$. Tính $S = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3$.

A. $S = 1$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = \dfrac{2}{3}$. **D.** $S = \dfrac{14}{27}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1;\ 3;\ 2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của cạnh MN.

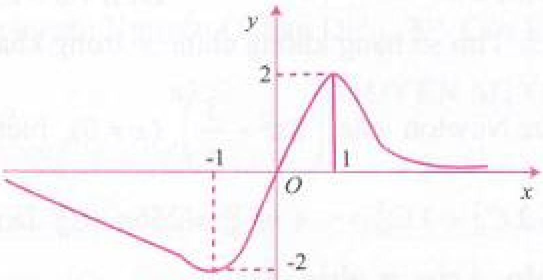
A. $\dfrac{x-6}{7} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{-1}$. **B.** $\dfrac{x+6}{7} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-6}{7} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+3}{-1}$. **D.** $\dfrac{x+6}{7} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $(y')^2+y.y''=-1$. B. $(y')^2+2y.y''=1$.
C. $y.y''-(y')^2=1$. D. $(y')^2+y.y''=1$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới:



Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt dương.

A. $m>1$. B. $0<m<1$.
C. $m<0$. D. $0<m<2$.

Câu 31. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx=\frac{1}{2}\int_1^3(au^4+bu^2+c)du$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=3$. B. $S=0$. C. $S=1$. D. $S=2$.

Câu 32. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, trục hoành và đường thẳng $x=e$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $S=\frac{\pi}{2}$. B. $S=\frac{\pi}{3}$. C. $S=\frac{\pi}{6}$. D. $S=\pi$.

Câu 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối nón đó có dạng bằng $\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b}+c)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b>1$. Tính $b.c$.

A. $b.c=5$. B. $b.c=8$. C. $b.c=15$. D. $b.c=7$.

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;\ b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;\ \sqrt{10})$. B. $(-4;\ 2)$.
C. $(\sqrt{7};\ 4\sqrt{10})$. D. $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x+1=m\sqrt{2x^2+1}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $m<\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $m>\frac{\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 36. Tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-2(m^2+1)x^2+2$ có 3 điểm cực trị sao cho giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=2$. B. $m=0$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}, f(0)=2017, f(2)=2018$. Tính
$$S=f(3)-f(-1).$$

A. $S=1$. B. $S=\ln 2$.
C. $S=\ln 4035$. D. $S=4$.

Câu 38. Cho A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_0, z_1 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_0^2+z_1^2=z_0z_1$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì (O là gốc tọa độ)? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Cân tại O. B. Vuông cân tại O.
C. Đều. D. Vuông tại O.

Câu 39. Cho hàm $f(x)=-x^3+2x^2-11x+\sin x$ và u, v là hai số thỏa mãn $u<v$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $f(u)<f(3v.\log e)$. B. $f(u)>f(3v.\log e)$.
C. $f(u)=f(v)$. D. Cả 3 khẳng định trên đều sai.

Câu 40. Cho hàm số $y=\frac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\ e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;0)$, $B(2;2;2)$, $C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}\cdot$ Tìm điểm M thuộc d để thể tích V của tứ diện $MABC$ bằng 3.

A. $M\left(-\dfrac{15}{2};\ \dfrac{9}{4};-\dfrac{11}{2}\right);\ M\left(-\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{3}{4};\ \dfrac{1}{2}\right)\cdot$

B. $M\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right);\ M\left(-\dfrac{15}{2};\ \dfrac{9}{4};\ \dfrac{11}{2}\right)\cdot$

C. $M\left(\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{3}{4};\ \dfrac{1}{2}\right);\ M\left(\dfrac{15}{2};\ \dfrac{9}{4};\ \dfrac{11}{2}\right)\cdot$

D. $M\left(\dfrac{3}{5};\ -\dfrac{3}{4};\ \dfrac{1}{2}\right);\ M\left(\dfrac{15}{2};\ \dfrac{9}{4};\ \dfrac{11}{2}\right)\cdot$

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0<x<x_0 \\ x^2+12 & \text{khi } x\geq x_0 \end{cases}$.

Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;\ +\infty)$ Tính giá trị $S=x_0+a$.

A. $S=2(3-2\sqrt{2})$. **B.** $S=2(1+4\sqrt{2})$.

C. $S=2(3-4\sqrt{2})$. **D.** $S=2(3+2\sqrt{2})$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+m=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 30°. Tính tỉ số $\dfrac{3V}{a^3}$ biết V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cdot$

Câu 45. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{z+i}{z}\right|$, với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính $2M-m$.

A. $2M-m=\dfrac{3}{2}\cdot$ **B.** $2M-m=\dfrac{5}{2}\cdot$

C. $2M-m=10$. **D.** $2M-m=6$.

Câu 46. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $b<c$. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng quanh cạnh BC, quanh cạnh AC, quanh cạnh AB, ta được các hình có diện tích toàn phần theo thứ tự bằng S_a, S_b, S_c. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S_b>S_c>S_a$. **B.** $S_b>S_a>S_c$.

C. $S_c>S_a>S_b$. **D.** $S_a>S_c>S_b$.

Câu 47. Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}=10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S=abcde$.

A. $|S|=42$. **B.** $|S|=62$.

C. $|S|=32$. **D.** $|S|=52$.

Câu 48. Với giá trị lớn nhất của a bằng bao nhiêu để phương trình $a\sin^2 x+2\sin 2x+3a\cos^2 x=2$ có nghiệm?

A. 2. **B.** $\dfrac{11}{3}\cdot$ **C.** 4. **D.** $\dfrac{8}{3}\cdot$

Câu 49. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=0$ và $u_{n+1}=u_n+4n+3$, $\forall n\geq 2$. Biết

$$\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\frac{a^{2019}+b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính giá trị $S=a+b-c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$.

C. $S=2017$. **D.** $S=2018$.

Câu 50. Biết luôn có hai số a và b để

$$F(x)=\frac{ax+b}{x+4}\ (4a-b\neq 0)$$

là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn:

$$2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x).$$

Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4$. **B.** $a=1, b=-1$.

C. $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **D.** $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$.

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

NHỮNG CÂU CHUYỆN THÚ VỊ XUNG QUANH BÀI TOÁN CHIA BA MỘT GÓC

LÊ QUỐC HÁN
(GV Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

Đã có không ít tài liệu đề cập đến vấn đề này nhưng vì những lí do nào đó mà cách trình bày hoặc chưa đầy đủ hoặc thiếu hệ thống. Bài viết này mong muốn được bổ sung phần nào điều đó.

1. Các dụng cụ dựng hình Euclid

Dụng cụ dựng hình Euclid gồm cây thước kẻ và chiếc compa. Điều quan trọng trước hết là phải thấy rõ chúng ta được phép làm những gì với cây thước kẻ và chiếc compa?

Với cây thước kẻ chúng ta được phép vẽ một đường thẳng có chiều dài không xác định đi qua hai điểm phân biệt cho trước. Với chiếc compa ta được phép vẽ một đường tròn với bất kỳ một điểm nào cho trước làm tâm và đi qua điểm thứ hai bất kỳ nào.

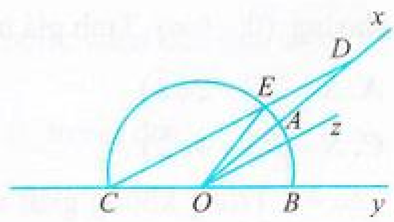
Vì các tiên đề trong tác phẩm *Nguyên lý* của Euclid quy định chỉ được dùng thước kẻ và compa theo các luật trên nên hai dụng cụ này được gọi là *các dụng cụ Euclid*. Dựng hình bằng thước kẻ và compa được xem như một "*trò chơi*" phải tuân theo theo hai luật đó, đã tỏ ra rằng đó là một "*trò chơi*" hấp dẫn nhất từ trước tới nay. Thật đáng ngạc nhiên khi các phép dựng hình thực sự phức tạp lại có thể thực hiện được bằng cách này và cũng khó tin rằng một số bài toán dựng hình tưởng chừng như đơn giản (mà điển hình nhất là bài toán *chia ba một góc bất kỳ cho trước thành ba phần bằng nhau*) lại không thực hiện được như vậy.

Cần đặc biệt chú ý là *thước kẻ không hề có ly tấc* gì. Nếu dùng thước kẻ có ly tấc thì có thể chia ba một góc bất kỳ cho trước, chẳng hạn bằng phương pháp sau:

Bài toán. *Chia góc $\widehat{xOy}$ cho trước thành ba phần bằng nhau.*

Lời giải. Dựng đường tròn tâm O, bán kính tùy ý cắt Ox tại A, cắt Oy tại B và cắt tia đối của tia Oy tại C. Trên Ox dựng điểm D sao cho $ED = OC$ trong đó E là giao điểm của CD với đường tròn (O). Kẻ tia $Oz \,//\, CD$, khi đó

$$\widehat{DOz} = \frac{1}{3}\widehat{xOy}.$$



Thật vậy, vì $ED = OC = OE$ nên tam giác OED cân tại E, suy ra

$$\widehat{EDO} = \widehat{EOD} = \frac{1}{2}\widehat{OEC} = \frac{1}{2}\widehat{DCO}.$$

Lại có $\widehat{EDO} = \widehat{DOz}$ và $\widehat{zOy} = \widehat{DCO}$ (vì $Oz \,//\, CD$).

Từ đó $\widehat{DOz} = \frac{1}{2}\widehat{zOy}$, suy ra $\widehat{DOZ} = \frac{1}{3}\widehat{xOy}$.

Như vậy, khi dựng điểm D ở lời giải trên ngoài thước kẻ và compa, ta phải dùng thêm một dụng cụ thứ ba đó là *thước chia độ*.

2. Ba bài toán nổi tiếng về dựng hình Euclid

Bài toán trên là một trong ba bài toán nổi tiếng về dựng hình Euclid sau:

1. *Gấp đôi một khối lập phương*, là bài toán dựng cạnh của một khối lập phương có thể tích gấp hai lần thể tích của một khối lập phương cho trước.
2. *Chia ba một góc*, là bài toán chia một góc bất kỳ thành ba phần bằng nhau.
3. *Cầu phương một vòng tròn*, là bài toán dựng một hình vuông có diện tích bằng với diện tích một hình tròn cho trước.

Tầm quan trọng của các bài toán này là ở chỗ chúng không giải được (trừ phép xấp xỉ) bằng các dụng cụ Euclid. Việc nỗ lực nghiên cứu cách giải cho ba bài toán này đã ảnh hưởng sâu sắc đến sự phát triển môn hình học Hy Lạp cổ đại và mang lại nhiều khám phá hữu ích về các thiết diện conic, các đường bậc hai và bậc ba và nhiều đường siêu việt. Mãi đến thế kỷ XIX với sự phát triển của Lý thuyết các phương trình có liên quan đến các số hữu tỷ, các số đại số và các số siêu việt cùng với *Lý thuyết nhóm*, tính bất khả thi đối với phép dựng hình ba bài toán trên bằng các dụng cụ Euclid mới được xác lập, nghĩa là trên 2000 năm sau khi ba bài toán đó lần đầu tiên được đặt ra.

3. Tính bất khả thi trong việc giải ba bài toán nổi tiếng bằng các dụng cụ Euclid

Trước hết ta nhắc lại rằng các phương trình $f(x)=0$, trong đó $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên, được gọi là một *phương trình đại số*. Các số thực là nghiệm của một phương trình đại số nào đó được gọi là *số đại số*, những số thực còn lại được *gọi là số siêu việt*. Năm 1882, nhà toán học người Đức *Ferdinand von Lindenmann* (1852 – 1939) đã chứng minh được rằng π là số siêu việt, và do đó $\sqrt{\pi}$ cũng là số siêu việt.

Đến thế kỷ XIX, người ta đã chứng minh được hai định lý quan trọng sau:

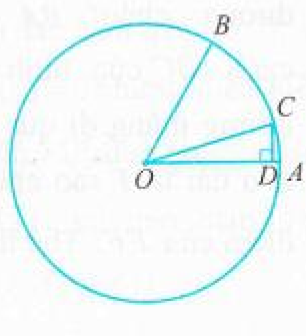
Định lý 1. *Số đo bất kỳ chiều dài nào dựng được bằng các dụng cụ Euclid từ một chiều dài đơn vị đều là một số đại số.*

Định lý 2. *Từ một vị chiều dài đơn vị cho trước không thể dựng được bằng các dụng cụ Euclid mà độ đo chiều dài đơn vị của nó là nghiệm của một phương trình bậc ba với hệ số hữu tỷ nhưng không có nghiệm hữu tỷ.*

Định lý thứ nhất bác bỏ bài toán *Cầu phương một vòng tròn*. Thật vậy, nếu ta lấy bán kính của đường tròn làm đơn vị thì cạnh của hình vuông tương đương phải là $\sqrt{\pi}$. Như vậy nếu bài toán cầu phương giải được bằng các dụng cụ *Euclid* thì ta có thể dựng từ một đoạn thẳng đơn vị một đoạn thẳng khác có chiều dài là $\sqrt{\pi}$. Nhưng điều này là không thể vì *Lindenmann* đã chứng minh rằng $\sqrt{\pi}$ không phải là số đại số.

Định lý thứ hai đã loại bỏ hai bài toán còn lại. Thật vậy, trong bài toán *Gấp đôi một khối lập phương* ta lấy cạnh khối lập phương cho trước làm đơn vị độ dài và ký hiệu x là cạnh của khối lập phương cần dựng. Thế thì $x^3=2$ hay $x^3-2=0$. Nếu bài toán *Gấp đôi một khối lập phương* giải được bằng các dụng cụ Euclid thì ta có thể dựng từ một đoạn thẳng đơn vị một đoạn thẳng khác có chiều dài là x. Nhưng điều này là không thể được vì $x^3-2=0$ là một phương trình bậc ba không có nghiệm hữu tỷ (Thật vậy, đa thức x^3-2 có hệ số nguyên và hệ số của số hạng cao nhất bằng 1 nên nếu phương trình $x^3-2=0$ có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó phải là số nguyên và là ước của 2, nhưng thử trực tiếp ta thấy $\pm1, \pm2$ không là nghiệm phương trình ấy).

Chúng ta có thể chứng minh rằng một góc *nói chung* là không thể chia ba được bằng các dụng cụ Euclid bằng cách chỉ ra rằng một góc *đặc biệt* nào đó không thể chia ba được như vậy. Từ công thức nhân ba ta có $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. Lấy $\theta = 20^0$, đặt $x=\cos\theta$ nhận được $8x^3-6x-1=0$. Đặt $2x=t$ ta có $t^3-3t-1=0$. Lập luận như trên ta thấy phương trình $t^3-3t-1=0$ không có nghiệm hữu tỉ nên phương trình $8x^3-6x-1=0$ cũng không có nghiệm hữu tỷ.

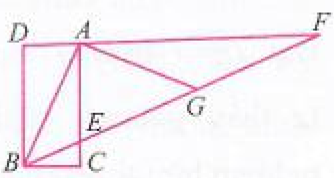


Gọi OA là đoạn thẳng đơn vị cho trước. Vẽ một đường tròn tâm O, bán kính OA. Vẽ tiếp cung tròn tâm A, bán kính OA cắt đường tròn $(O;OA)$ tại B. Khi đó $\widehat{AOB}=60^0$. Giả sử đã dựng được điểm C trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ sao cho $\widehat{COA}=20^0$. Gọi D là chân đường vuông góc hạ từ C xuống OA. Thế thì $OD=\cos 20^0=x$. Suy ra rằng nếu góc 60^0 chia được thành ba phần bằng nhau bởi các dụng cụ Euclid, hay nói cách khác nếu OC có thể dựng được bằng các dụng cụ này thì từ một đoạn thẳng đơn vị OA ta có thể dựng được đoạn thẳng khác có chiều dài là x. Điều này là không thể được vì phương trình bậc ba $8x^3-6x-1=0$ trên có hệ số hữu tỷ nhưng không có nghiệm hữu tỷ, trái với định lý thứ hai.

Cần lưu ý rằng không phải chúng ta chứng minh được rằng *không có góc nào* có thể chia ba được được bằng các dụng cụ Euclid mà chỉ chứng minh rằng *không phải tất cả* các góc đều chia ba được như vậy. Thực tế có các góc như 45^0, 90^0 và vô số góc khác đều chia ba được bằng các dụng cụ Euclid. Việc xác định một góc cho trước có thể chia ba được bằng các dụng cụ Euclid hay không cần đến những lý thuyết toán học hiện đại sâu sắc hơn, chẳng hạn *Lý thuyết Galois*.

4. Phương pháp tiệm cận

Sau khi đã bất lực trong việc chia ba một góc tùy ý bằng các dụng cụ Euclid, người Hy Lạp cổ đại đã tìm những phương pháp tiếp cận khác để chia ba một góc bằng các dụng cụ "cải tiến" khác. Trước hết họ rút gọn nó về bài toán mà họ gọi là *Bài toán tiệm cận*. Một góc nhọn $\widehat{ABC}$ nào đó được xem là góc giữa đường chéo BA và cạnh BC của hình chữ nhật $BCAD$. Xét một đường thẳng đi qua B cắt CA tại E và cắt DA kéo dài tại F sao cho $EF=2BA$. Gọi G là trung điểm của EF. Thế thì $EG=GF=GA=AB$ nên



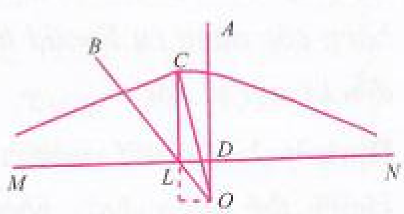
$$\widehat{ABG}=\widehat{AGB}=\widehat{GAF}+\widehat{GFA}=2\widehat{GFA}=2\widehat{GBC}.$$

Như vậy $\widehat{BEF}$ chia ba $\widehat{ABC}$. Do đó bài toán quy về dựng một đoạn thẳng EF có chiều dài là $2.BA$ giữa AC và DA kéo dài sao cho FE *tiến gần* (tiệm cận) tới B. Nếu làm ngược lại với những giả định Euclid, chúng ta tự cho phép mình đánh dấu trên thước kẻ sao cho nó đi qua B và các điểm được đánh dấu E' nằm trên AC và F' nằm trên phần kéo dài của DA thì góc $\widehat{ABC}$ sẽ được chia thành ba phần bằng nhau. Cách dùng thước kẻ không được phép như vậy có thể được xem là một áp dụng của "nguyên lý đưa vào".

Những đường phẳng cao cấp khác nhau đã được tìm thấy sẽ giúp giải bài toán tiệm cận mà *bài toán chia ba* quy về. Một trong những đường xưa nhất trong các đường này là *đường conchoit* được *Nicomedes* đưa ra (khoảng 240 trước công nguyên).

Giả sử c là một đường thẳng và O là một điểm bất kỳ cố định không nằm trên c và k là một chiều dài cho trước. Với mỗi điểm P chuyển động trên c, trên OP kéo dài ta lấy điểm Q sao cho $PQ=k$. Khi đó quỹ tích Q là (một nhánh) đường conchoit của c với cực là O và hằng số là k.

Làm ra một dụng cụ để vẽ đường *conchoit* khá đơn giản và người ta đã dùng nó để chia ba một góc bất kỳ khá dễ dàng. Giả sử cần chia ba góc nhọn $\widehat{AOB}$ cho trước. Dựng đường thẳng MN vuông góc với OA, cắt OA và OB tương ứng tại D và L. Bây giờ vẽ đường *conchoit* của MN với cực O và hằng số $2OL$. Qua L dựng đường thẳng song song với OA, cắt đường *conchoit* ở C. Khi đó OC sẽ chia ba góc $\widehat{AOB}$.



Có những đường siêu việt (không đại số) không chỉ có thể chia ba một góc bất kì cho trước mà nói chung có thể chia được góc đó thành một số phần bằng nhau. Ngoài ra chúng còn có thể giải được bài toán Cầu phương một vòng tròn. Hai trong chúng là *đường bậc hai* của *Hippias* (khoảng 425 trước công nguyên) và *đường xoắn ốc* của *Archimedes* (khoảng 225 trước công nguyên).

5. Chia ba góc bằng các cônic

Một góc nói chung có thể dùng một cônic để chia ba. Những người Hy Lạp xa xưa không quen thuộc lắm để làm việc này. Mãi đến khoảng năm 300 sau công nguyên, *Pappus* mới sử dụng tiêu chuẩn và tính chất đường chuẩn của các cônic để giải bài toán chia ba. Sau đây là một số cách dựng thuộc loại này.

• Cho trước một góc $\widehat{AOB}$. Vẽ nhánh của một hypebol đều có tâm là O và OA là đường tiệm cận cắt OB ở P. Dựng đường tròn tâm P bán kính $2PO$ cắt hypebol ở R. Dựng đường thẳng Px song song với OA và đường thẳng Ry vuông góc với OA. Gọi M là giao của Px và Ry. Khi đó $\widehat{AOM}=\frac{1}{3}\widehat{AOB}$.

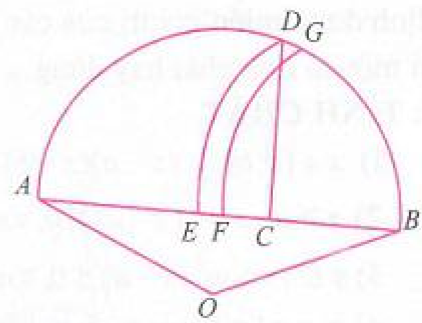
• Lấy $\widehat{AOB}$ là một góc ở tâm một vòng tròn và OC là đường phân giác của góc $\widehat{AOB}$. Vẽ nhánh của hypebol tâm sai bằng 2, A là tiêu điểm và OC là đường chuẩn tương ứng và giả sử nhánh này cắt cung AB tại P. Khi đó $\widehat{AOP}=\frac{1}{3}\widehat{AOB}$.

Pappus đã đưa ra cách dựng này.

• Một cách chia ba một góc bất kỳ khá thông minh được mô tả bởi *Aubry* vào năm 1986. Giả sử có một hình nón tròn xoay thẳng đứng (làm bằng gỗ chẳng hạn) có chiều dài đường sinh bằng ba lần bán kính đáy. Trên chu vi của đường tròn đáy của hình nón đánh dấu cung $\overset{\frown}{AB}$ của góc ở tâm $\widehat{AOB}$ cho bằng góc mà ta muốn chia ba. Bây giờ lấy giấy bọc quanh hình nón và đánh dấu lại trên giấy các vị trí của các điểm A, B và đỉnh V của hình nón. Khi trải giấy ra ta có góc $\widehat{AVB}=\frac{1}{3}\widehat{AOB}$.

6. Chia ba góc bằng cách xấp xỉ

Năm 1525, một họa sĩ nổi tiếng tên là *Abrecht Durer* đã đưa ra cách chia ba gần đúng một góc bằng các dụng cụ Euclid như sau: Cho một góc ở tâm $\widehat{AOB}$ của một đường tròn. Gọi C ở gần B là điểm chia ba của dây AB. Đường thẳng kẻ từ C và vuông góc với AB cắt cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ tại D. Đường tròn tâm B, bán kính bằng BD cắt AB tại E. Trên đoạn thẳng EC lấy điểm F sao cho $EF=\frac{1}{3}EC$. Đường tròn tâm B, bán kính bằng BF cắt cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ tại G. Khi đó OG là đường chia ba gần đúng của $\widehat{AOB}$. Có thể chỉ ra bằng bằng sai số trong việc chia ba này tăng cùng kích thước của góc $\widehat{AOB}$ nhưng chỉ khoảng 1″ cho $\widehat{AOB}=60^0$ và 18″ cho $\widehat{AOB}=90^0$.



Kết luận. Mặc dù đã xuất hiện trên 2500 năm, bài toán chia ba góc nói chung và ba bài toán dựng hình bằng các công cụ Euclid nổi tiếng trên vẫn hấp dẫn giới làm toán cho đến ngày nay.

XÁC ĐỊNH MIỀN GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN VĂN NHO

(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

Bài viết giới thiệu với bạn đọc cách chứng minh các bất đẳng thức (BĐT) hoặc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của các BĐT hoặc các biểu thức có chứa các biến số mà ta xác định được miền giá trị của các biến số đó. Sau đây là một số tính chất hay dùng.

I. TÍNH CHẤT

1) $x \in [a;b] \Rightarrow (x-a)(x-b) \le 0;$

2) $x \ge a \Rightarrow m^2(x-a) \ge 0, \forall m;$

3) $x \le a \Rightarrow m^2(x-a) \le 0, \forall m;$

4) $x, y \in [a;b] \Rightarrow |x-y| \le b-a;$

5) $a \le x \le y \le b \Rightarrow a-b \le x-y \le 0,$
$0 \le y-x \le b-a;$

6) $0 < a \le x \le y \le b \Rightarrow \dfrac{a}{b} \le \dfrac{x}{y} \le 1,\ 1 \le \dfrac{y}{x} \le \dfrac{b}{a};$

7) $\begin{cases} 0 < x \le a \\ m \ge n \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{a}\right)^m \le \left(\dfrac{x}{a}\right)^n;$

8) $x, y, z \in [a;b] \Rightarrow (x-a)(y-a)(z-a) \ge 0,$
$(x-b)(y-b)(z-b) \le 0;...$

(*Chứng minh các tính chất trên đơn giản, xin dành cho bạn đọc*).

II. MỘT SỐ THÍ DỤ

Thí dụ 1. *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \le 1$.*

Lời giải. Vì *a*, *b*, *c* là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=1$ nên $0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1, 0 \le c \le 1$ hay

$a^2 \le a, b^2 \le b, c^2 \le c \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \le a+b+c=1$

do đó BĐT đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a^2=a, b^2=b, c^2=c$ và $a+b+c=1$.

Vậy $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

Thí dụ 2. *Cho a, b, c là các số không âm và không lớn hơn 2 thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \le 5$.*

Lời giải. Theo giả thiết $(2-a)(2-b)(2-c) \ge 0$ hay

$$8+2(ab+bc+ca)-4(a+b+c)-abc \ge 0.$$

Để áp dụng được giả thiết $a+b+c=3$ ta cộng hai vế BĐT trên với $a^2+b^2+c^2$ ta thu được

$$8+(a+b+c)^2-4(a+b+c)-abc \ge a^2+b^2+c^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \le 5-abc.$$

Lại do *a*, *b*, *c* là các số không âm nên $abc \ge 0$ từ đó ta có $a^2+b^2+c^2 \le 5$ nên BĐT cần chứng minh đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong các số *a*, *b*, *c* có một số nhận giá trị là 0 và có một số nhận giá trị 2 và kết hợp với giả thiết $a+b+c=3$ ta thấy điều này tương đương với trong ba số *a*, *b*, *c* có một số bằng 0, có một số bằng 1, có một số bằng 2.

Thí dụ 3. *Với hai số không âm a, b mà $a+b=3$, tìm GTLN của biểu thức: $P=a^3+b^3$.*

Hướng dẫn. Từ giả thiết ta có: $0 \le a \le 3, 0 \le b \le 3$, suy ra $a^3 \le 9a, b^3 \le 9b \Rightarrow P=a^3+b^3 \le 9(a+b)$.

Mặt khác, theo giả thiết thì

$$a+b=3 \Rightarrow P \le 9 \times 3 = 27.$$

Ta có $P=27$ khi và chỉ khi hai số *a*, *b* nhận giá trị 0 hoặc 3, kết hợp với $a+b=3$ ta thấy khi đó trong hai số *a* và *b* có đúng một số nhận giá trị 0 và một số nhận giá trị 3. Vậy max $P=27$.

Thí dụ 4. *Với n số không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng 1 (n là số nguyên dương lớn hơn 1), tìm GTLN của biểu thức: $P={x_1}^{100}+{x_2}^{100}+...+{x_n}^{100}$.*

Lời giải. Từ điều kiện suy ra $0 \le x_1 \le 1$ nên ta có:

$$x_1({x_1}^{99}-1) \le 0 \Rightarrow {x_1}^{100} \le x_1.$$

Tương tự ta có: ${x_2}^{100} \le x_2, ..., {x_n}^{100} \le x_n$.

Cộng các BĐT cùng chiều ở trên vế theo vế ta có:

$${x_1}^{100}+{x_2}^{100}+...+{x_n}^{100} \le x_1+x_2+...+x_n \Rightarrow P \le 1$$

Ta có: $P=1 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=x_3=...=x_n=0$ và các hoán vị. Vậy $\max P=1$.

Thí dụ 5. *Cho các số x, y thỏa mãn: $1\le x\le y\le 4$. Tìm GTLN của biểu thức* $P=\dfrac{6x+y}{x+y}+\dfrac{7x-y}{2x+3y}$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có: $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{x}{y}\le 1$ (theo tính chất 6). Ta viết P dưới dạng tương đương:

$$P=\frac{6\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}+1}+\frac{7\frac{x}{y}-1}{2\frac{x}{y}+3},\ \text{đặt } t=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{1}{4}\le t\le 1.$$

Khi đó: $P=\dfrac{6t+1}{t+1}+\dfrac{7t-1}{2t+3}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{6t+1}{t+1}+\dfrac{7t-1}{2t+3}, \forall t\in\left[\dfrac{1}{4};1\right]$, ta có: $f'(t)=\dfrac{5}{(t+1)^2}+\dfrac{23}{(2t+3)^2}>0, t\in\left[\dfrac{1}{4};1\right]$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{4};1\right]$. Suy ra

$$\max_{x\in\left[\frac{1}{4};1\right]} f(t)=f(1)=\frac{47}{10}\cdot \text{ Vậy } \max P=\frac{47}{10}$$

khi $x=y=1\in[1;4]$.

Thí dụ 6. *Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $1\le x\le y\le 30$. Tìm GTNN của biểu thức sau:*

$$P=\frac{(2x-y)\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}.$$

Lời giải. Từ điều kiện có: $\dfrac{1}{30}\le\dfrac{x}{y}\le 1$, đặt $t=\dfrac{x}{y}$, khi đó: $\dfrac{1}{30}\le t\le 1$ và $x=ty$, thay vào P ta có:

$$P=\frac{(2ty-y)\sqrt{ty}}{y\sqrt{y}}=(2t-1)\sqrt{t}.$$

Xét hàm số $f(t)=(2t-1)\sqrt{t},\ t\in\left[\dfrac{1}{30};1\right]$ ta có

$$f'(t)=\frac{6t-1}{2\sqrt{t}}, f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{6}\cdot$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{6}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra:

$$\min_{t\in\left[\frac{1}{30};1\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{-\sqrt{6}}{9}.$$

Suy ra: $\min P=\dfrac{-\sqrt{6}}{9}$ khi $y=6x$ kết hợp với điều kiện của x, y ta có các trường hợp để P đạt GTNN là: $(x;y)\in\{(1;6),(2;12),(3;18),(4;24),(5;30)\}$.

Thí dụ 7. *Với các số x, y thay đổi thỏa mãn $1\le x\le y\le 5$. Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P=2(x^2+y^2)+4(x-y-xy)+7.$$

Lời giải. Từ điều kiện của x, y có: $-4\le x-y\le 0$ (theo tính chất 5), đặt $t=x-y$ thì $t\in[-4;0]$. Khi đó, ta có: $P=2(x-y)^2+4(x-y)+7=2t^2+4t+7$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2+4t+7, t\in[-4;0]$. Bằng phương pháp tam thức bậc hai ta thấy: $\min\limits_{t\in[-4;0]} f(t)=f(-1)=5$. Từ đó ta thấy $\min P=5$ đạt được khi $x-y=-1$ hay $\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha+1\end{cases}, \alpha\in[1;4]$.

Thí dụ 8. *Cho các số không âm a, b và c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P=2(a^4+b^3+c)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+\frac{4}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời giải. Từ điều kiện $a+b+c=1$ suy ra $a,b,c\in[0;1]$. Từ đó $b^3\ge b^4, c\ge c^4$ suy ra:

(Xem tiếp trang 42)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/489 (Lớp 6). Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2+x=3^{2018y}+1$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T2/489 (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=45^0, \widehat{C}=30^0$, BM là đường trung tuyến của tam giác ABC. Tính số đo góc $\widehat{AMB}$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/489. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $0<x, y<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F=x^2+y^2+\frac{2xy-x-y+1}{4xy}.$$

LA ĐẠI CƯƠNG
(GV THPT Cam Lộ, Quảng Trị)

Bài T4/489. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tròn (O) lấy điểm C (C khác với A và B). Kẻ CH vuông góc với đường kính AB tại H. Lấy điểm M nằm giữa C và H, lấy điểm N nằm giữa B và C sao cho MN song song với AB. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt tia AM tại D. Trên đường thẳng DO lấy hai điểm F và K sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng FK. Các đường thẳng AF và AK theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại P và Q. Chứng minh rằng ba điểm D, P, Q thẳng hàng.

HUỲNH THANH TÂM
(Cán bộ Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T5/489. Giả sử đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có ba nghiệm thực không âm. Tìm số thực α lớn nhất thỏa mãn: $f(x)\geq\alpha(x-a)^3, \forall x\geq 0.$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/489. Giải phương trình

$$(1-\sqrt{2}\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=\frac{1}{2}.$$

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Bài T7/489. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{yz(y+z-x)}{x+y+z}=a\\ \dfrac{zx(z+x-y)}{x+y+z}=b\\ \dfrac{xy(x+y-z)}{x+y+z}=c\end{cases}$$

với a, b, c là các tham số dương

a) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm dương.

b) Giải hệ khi $a=2, b=5, c=10$.

TRẦN QUANG CHUNG
(Lớp ĐTYS 12, Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội)

Bài T8/489. Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác, chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{2}+\frac{2r}{R}$$

trong đó R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

NGUYỄN VĂN HUYỆN
(SV ĐH Giao thông Vận tải, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T9/489. Cho biểu thức

$$P=\sqrt[60]{3}.\sqrt[120]{4}\ldots\sqrt[(n^3-n)]{n-1}$$

với n là số tự nhiên và $n\geq 4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[(24n^2+24n)]{3^{n^2+n-12}}\leq P<\sqrt[8]{3}.$$

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du số 1, Bắc Ninh)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/489. Tìm số tự nhiên n sao cho 4^m+2^n+29 không thể là số chính phương với mọi số tự nhiên m.

NGUYỄN NGỌC TÚ
(GV THPT chuyên Hà Giang)

Bài T11/489. Cho dãy số (a_n) xác định như sau:

$$a_1=\frac{1}{2};\ a_{n+1}=\frac{(a_n-1)^2}{2-a_n}\ \text{ với mọi } n=1,2,\ldots.$$

a) Hãy tìm giới hạn của dãy (a_n) khi n dần tới dương vô cực.

b) Chứng minh rằng $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ với mọi $n=1,2,....$

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T12/489. Cho tam giác *ABC* nội tiếp đường tròn (*O*). Điểm *P* chạy trên (*O*) và khác *A*, *B*, *C*. *M*, *N* theo thứ tự nằm trên *PB*, *PC* sao cho tứ giác *AMPN* là hình bình hành.

a) Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định cách đều hai điểm *M* và *N*.

b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác *AMN* luôn đi qua một điểm cố định.

LÊ VIẾT ÂN

(Nhà 15, xóm 2, Ngọc Anh, Phú Thượng, Phú Vang, Thừa Thiên Huế)

Bài L1/489. Trên mặt nước có hai nguồn sóng *A*, *B* cách nhau 28 cm dao động đồng pha với tần số 50 Hz. Tốc độ truyền sóng trên mặt nước là 3 m/s. Trên mặt nước xét đường tròn tâm *A*, bán kính *AB*. Điểm *M* trên đường tròn dao động với biên độ cực đại cách đường thẳng qua *A*, *B* một đoạn bằng bao nhiêu?

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/489. Mạch điện gồm tải Z_2 nối với điện trở *R* rồi nối vào nguồn điện xoay chiều có điện áp hiệu dụng U_1. Khi đó, điện áp hiệu dụng và hệ số công suất trên tải là U_2 và $\cos\varphi_2 = 0,6$ điện áp hai đầu *R* là $\Delta U = \frac{U_2}{4}$ hệ số công suất toàn mạch là $\cos\varphi_1 = 0,8$. Bằng cách điều chỉnh tải Z_2 và điện áp nguồn, người ta làm cho công suất tiêu thụ trên *R* giảm 100 lần còn công suất tiêu thụ $\mathscr{P}_2$ và hệ số $\cos\varphi_2$ trên tải không đổi. Khi đó, điện áp đầu nguồn phải tăng bao nhiêu lần?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Bài T1/489 (Lớp 6). Find all pairs of integers (x, y) satisfying $x^2+x=3^{2018y}+1$.

Bài T2/489 (Lớp 7). Given a triangle *ABC* with $\widehat{B}=45^0$, $\widehat{C}=30^0$. Let *BM* be one of the medians of *ABC*. Find the angle $\widehat{AMB}$.

Bài T3/489. Given real numbers *x*, *y* satisfying $0<x,y<1$. Find the minimum value of the expression $F=x^2+y^2+\frac{2xy-x-y+1}{4xy}$.

Bài T4/489. Given a circle (*O*) with a diameter *AB*. On (*O*) pick a point *C* (*C* is different from *A* and *B*). Draw *CH* perpendicular to *AB* at *H*. Choose *M* and *N* on the line segments *CH* and *BC* respectively such that *MN* is parallel to *AB*. Through *N* draw a line perpendicular to *BC*. This line intersects the ray *AM* at *D*. On the line *DO* choose two points *F* and *K* such that *O* is the midpoint of *FK*. The lines *AF* and *AK* respectively intersect (*O*) at *P* and *Q*. Prove that *D*, *P*, *Q* are colinear.

Bài T5/489. Suppose that the polynomial $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ has 3 non-negative real solutions. Find the maximal real number α so that $f(x)\geq\alpha(x-a)^3, \forall x\geq 0$.

FOR HIGHSCHOOL

Bài T6/489. Solve the equation

$$(1-\sqrt{2}\sin x)(\cos 2x+\sin 2x)=\frac{1}{2}.$$

Bài T7/489. Given the following system of equations

$$\begin{cases} \frac{yz(y+z-x)}{x+y+z}=a \\ \frac{zx(z+x-y)}{x+y+z}=b \\ \frac{xy(x+y-z)}{x+y+z}=c \end{cases}$$

where *a*, *b*, *c* are positive parameters.

(Xem tiếp trang 46)

Bài T1/485. *Cho $a=n^3+2n$ và $b=n^4+3n^2+1$. Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, hãy tìm ước chung lớn nhất của a, b.*

Lời giải. Đặt ước chung lớn nhất của a và b là $d=(a,b)$ thì d là ước của $a=n^3+2n$ nên d là ước của $n(n^3+2n)=n^4+2n^2$. Từ đó và do d là ước của $b=n^4+3n^2+1$ nên d là ước của

$$n^4+3n^2+1-(n^4+2n^2)=n^2+1 \qquad (*)$$

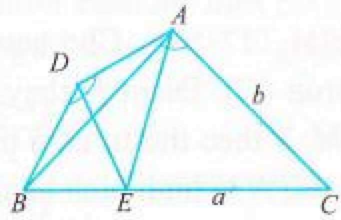
suy ra d là ước của $n(n^2+1)=n^3+n.$ Từ đó và do d là ước của $a=n^3+2n$ nên d là ước của $n^3+2n-(n^3+n)=n.$ Từ đó d là ước của n^2, kết hợp với (*) suy ra d là ước của $n^2+1-n^2=1$, do đó $d=1$, tức là $(a,b)=1$. ❒

➢***Nhận xét.*** Một số bạn viết sai dấu hoặc sai số. Các bạn có lời giải đúng: **Phú Thọ:** *Nguyễn Ngọc Diệp*, 6B, THCS Đông Cửu, Thanh Sơn; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Nghệ An**: *Trần Hồng Minh*, *Phạm Đào Đan Lê*, *Nguyễn Công An*, 6A, *Kiều Đình Nam*, 6C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đậu Nhật Nam*, 6B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Phạm Ngọc Trinh*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Hoàng Nguyên*, *Trần Ngân Hà*, *Trần Thị Lệ Quyên*, *Bùi Thị Hà Trang*, *Đậu Bá Tiệp*, *Nguyễn Đức Anh*, *Nguyễn Thị Bảo Ngân*, *Phan Trâm Anh*, *Lê Tâm Thư*, *Nguyễn Thị Hương Linh*, *Nguyễn Duy Mạnh Cường*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Gia Lai**: *Nguyễn Lê Việt Hưng*, 6/10, THCS Nguyễn Du, TP. Pleiku; **Quảng Ngãi**: *Mai Thành Nguyên*, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/485. *Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A}=100^0, BC=a, AC=b.$ Về phía ngoài tam giác vẽ tam giác ABD cân tại D có $\widehat{ADB}=140^0$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.*

Lời giải. Vì ΔABC cân tại A nên $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=40^0$



Và ΔABD cân tại D nên $\widehat{DBA}=\widehat{DAB}=20^0$. Do đó $\widehat{DBC}=60^0$. Lấy điểm E trên BC sao cho $BE=BD$. Khi đó ΔBDE đều nên

$$BD=BE=DE=DA, \widehat{EDA}=\widehat{BDA}-\widehat{BDE}=80^0.$$

Tam giác DAE cân tại D nên ta có

$$\widehat{DAE}=\widehat{DEA}=(180^0-80^0):2=50^0.$$

Suy ra

$$\widehat{EAC}=\widehat{DAB}+\widehat{BAC}-\widehat{DAE}=20^0+100^0-50^0=70^0 \quad (1)$$

Và

$$\widehat{AEC}=180^0-\widehat{DEA}-\widehat{DEB}=180^0-50^0-60^0=70^0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được ΔCAE cân tại $C \Rightarrow AC=EC.$

Do đó $AD=BD=BE=BC-EC=BC-AC=a-b$, và $AB=AC=b.$ Vậy chu vi ΔABD là:

$$AD+BD+AB=a-b+a-b+b=2a-b.$$ ❒

➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia đều có lời giải tương tự như trên, xin được chúc mừng các bạn: **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Trung Phú*, *Lê Tuấn Kiệt*, 7A, *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Thanh Hóa:** *Đỗ Lê Trung*, 7A4, THCS Quang Trung; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Thùy Trang*, 6A3, THCS Thanh Lãng, Bình Xuyên; *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngân Chi*, 7C, THCS Lý Thái Tổ, Cầu Giấy.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/485. *Tìm các cặp nghiệm nguyên (x,y) thỏa mãn: $x^3y+xy^3+2x^2y^2-4x-4y+4=0.$* (1)

Lời giải. Ta có:

$(1) \Leftrightarrow xy(x^2+2xy+y^2)-4(x+y)+4=0$

$\Leftrightarrow xy(x+y)^2-4(x+y)+4=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(1-xy)=(x+y-2)^2 \quad (2)$

Nhận thấy $x + y = 0$ không thỏa mãn (2). Nên khi đó với $x + y \neq 0$, chia hai vế của (2) cho $(x+y)^2$, ta có: $1-xy=\left(1-\dfrac{2}{x+y}\right)^2 \quad (3)$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $1-xy \in \mathbb{Z}$ suy ra $\dfrac{2}{x+y} \in \mathbb{Z}$. Do đó $x+y \in \{\pm 1; \pm 2\}$. Kết hợp với (3) xảy ra các trường hợp sau:

- $\begin{cases} x+y=1 \\ 1-xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=0 \\ x=0; y=1 \end{array}\right.$
- $\begin{cases} x+y=-1 \\ 1-xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-8 \end{cases}$

(không có nghiệm nguyên).

- $\begin{cases} x+y=2 \\ 1-xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y=-2 \\ 1-xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=-3 \\ x=-3; y=1. \end{array}\right.$

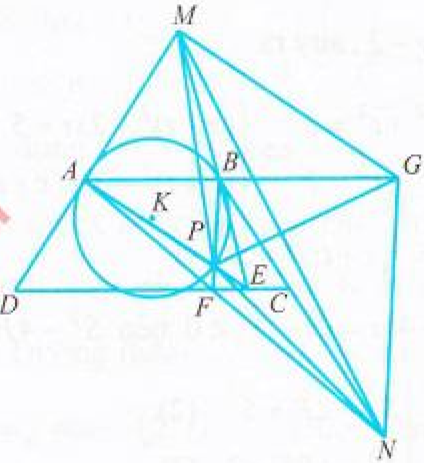
Vậy có 5 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là (1; 0), (0; 1), (1; 1), (1; − 3), (− 3; 1). ❒

➢***Nhận xét.*** Có rất nhiều bạn tham gia giải bài, nhưng một số bạn xét thiếu trường hợp nên làm mất nghiệm. Một số bạn đã biến đổi phương trình thành $(x+y)[xy(x+y)-4]=-4$ rồi suy ra $4 \vdots (x+y)$ nên $x+y \in \{\pm 1; \pm 2, \pm 4\}$ và cũng tìm ra kết quả đúng nhưng dài hơn. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Ngân Chi,* 7C, THCS Lý Thái Tổ, Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc**: *Tạ Kim Nam Tuấn,* 6A2, *Nguyễn Thị Thanh Hằng,* 7A3, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ**: *Nguyễn Công Hải, Vũ Minh Hải,* 8A3, *Hoàng Đức Thuận,* 9A3, THCS Lâm Thao; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng,* 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An**: *Trần Thị Hải Yến, Nguyễn Phương Uyên,* 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Phạm Văn Quyền, Đặng Hữu* Khanh, 7A, *Nguyễn Huy Hoàng, Lê Thùy Linh,* 8B, *Nguyễn Đức Hồng Hạnh, Nguyễn Văn Hoàng Minh,* 8D, *Nguyễn Thu Hiền, Lê Đình Tú,* 9D,THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Trung Phú,* 7A, THCS Phạm Văn Đồng; **Bến Tre**: *Ngô Quốc Bảo,* 8/1, THCS Mỹ Hóa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/485. *Cho hình thang cân ABCD có $AB \parallel CD$ và $DA = AB = BC$. (K) là đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với AD, BC. P là một điểm thuộc (K) và nằm trong hình thang cân. PA, PB lần lượt cắt CD tại E, F. BE, AF theo thứ tự cắt AD, BC tại M, N. Chứng minh rằng PM = PN.*

Lời giải.



Ta có:

- $\widehat{PAB}=\widehat{FBC}$ $(=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{PB})$
- $\widehat{PBA}=\widehat{PFC}$ (so le trong).

Suy ra $\Delta PAB \backsim \Delta CBF$. Gọi G là giao điểm của phân giác ngoài đỉnh P của tam giác PAB và đường thẳng AB. Từ đó theo định lí Thales và tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{NF}{NA}=\frac{FC}{AB}=\frac{FC}{BC}=\frac{PB}{PA}=\frac{GB}{GA}.$$

Suy ra $FB \parallel NG$. Tương tự $AE \parallel MG$.

Lại theo định lí Thales và tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{GM}{GN}=\frac{GM}{AE}\cdot\frac{AE}{BF}\cdot\frac{BF}{GN}=\frac{GB}{AB}\cdot\frac{PA}{PB}\cdot\frac{AB}{GA}=\frac{PA}{PB}\cdot\frac{GB}{GA}=1$$

$\Rightarrow GM = GN.$

Từ đó, ΔMGP và ΔNGP có GP chung, $GM = GN$ và $\widehat{PGM}=\widehat{GPE}=\widehat{GPB}=\widehat{PGN}$, nên $\Delta MGP = \Delta NGP$. Do đó $PM = PN$. ❒

➤***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào giải đúng bài toán này.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/485. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2+y^2=4y+1 \\ x^3+(y-2)^3=7 \end{cases}.$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=5 \\ x^3+(y-2)^3=7 \end{cases}.$$

Đặt $t = y-2$, suy ra

$$\begin{cases} x^2+t^2=5 \\ x^3+t^3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+t)^2-2xt=5 \\ (x+t)^3-3xt(x+t)=7 \end{cases}.$$

Lại đặt $S=x+t; P=xt,$ vì

$(x+t)^2-4xt=(x-t)^2 \geq 0$ nên $S^2-4P \geq 0.$ (1)

Ta được $\begin{cases} S^2-2P=5 & (2) \\ S^3-3PS=7 & (3) \end{cases}.$

Từ $(2) \Rightarrow P=\dfrac{S^2-5}{2}\cdot$ Thay vào (3) ta có:

$$S^3-\frac{3S(S^2-5)}{2}=7 \Leftrightarrow S^3-15S+14=0$$

$$\Leftrightarrow (S-1)(S^2+S-14)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1 \\ S=\dfrac{-1\pm\sqrt{57}}{2} \end{array}\right.$$

Với $S=1 \Rightarrow P=-2 \Rightarrow \begin{cases} x+t=1 \\ xt=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ t=-1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ t=2 \end{cases}\cdot$ Thay $y=t+2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}.$

Với $S=\dfrac{-1-\sqrt{57}}{2} \Rightarrow P=\dfrac{19+\sqrt{57}}{4}$ không thỏa mãn (1) (loại).

Với $S=\dfrac{-1+\sqrt{57}}{2} \Rightarrow P=\dfrac{19-\sqrt{57}}{4}$ không thỏa mãn (1) (loại).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (2; 1) và (–1; 4). ❒

➤***Nhận xét.*** Trong hệ $\begin{cases} x^2+t^2=5 \\ x^3+t^3=7 \end{cases}$ vai trò của x, y như nhau. Người ta gọi hệ phương trình mà ở mỗi phương trình vai trò của hai ẩn như nhau là hệ phương trình đối xứng loại I. Ta thường đặt tổng và tích của hai ẩn tương ứng là S, P với điều kiện là $S^2-4P \geq 0.$

Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Quảng Ngãi**: *Lê Tuấn Kiệt*, 9C, *Phạm Đình Tâm*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, *Nguyễn Hữu Nam*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Bắc Ninh**: *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS thị trấn Chờ, Yên Phong; **Phú Thọ**: *Nguyễn Công Hải, Đào Nhân Độ*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Nghệ An**: *Nguyễn Thiên Phúc Anh, Nguyễn Thang Nguyên, Nguyễn Cảnh Mạnh*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bến Tre**: *Ngô Quốc Bảo*, 8/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/485. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3(a+b)}{a^2+b^2}+\frac{b^3(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{c^3(c+a)}{c^2+a^2} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Lời giải. BĐT đầu bài tương đương với BĐT sau:

$$\frac{a^3(a+b)}{a^2+b^2}+\frac{b^3(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{c^3(c+a)}{c^2+a^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3b-a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^3c-b^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^3a-c^2a^2}{c^2+a^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^3b+b^3c+c^3a-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$
$$+[a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)] \geq 0.$$

Mà $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0$ (*) theo bài 6 kỳ thi Toán quốc tế 1983.

BĐT này chứng minh bằng cách đặt $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ (trong đó x, y, z là độ dài các cạnh bị chia ra bởi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên các cạnh). Khi đó BĐT (*) sẽ trở thành

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geq 0.$$

Khai triển thừa số, ta thu được BĐT tương đương $xy^3+yz^3+zx^3\geq xyz(x+y+z)$ là BĐT đúng do áp dụng BĐT Bunyakovsky

$$(xy^3+yz^3+zx^3)(z+x+y)\geq [\sqrt{xyz}(x+y+z)]^2.$$

Đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi $\frac{xy^3}{z}=\frac{yz^3}{x}=\frac{zx^3}{y}\Leftrightarrow x=y=z$, nghĩa là khi và chỉ khi $a=b=c$. Mặt khác, dễ kiểm tra thấy

$$2(a^3b+b^3c+c^3a-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$
$$=[a^2(b-c)^2(a+c-b)+b^2(c-a)^2(b+a-c)+c^2(a-b)^2(c+b-a)]\geq 0$$

(vì $a+c-b, b+a-c, c+b-a$ là các số dương do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác). ❒

➢***Nhận xét.*** Nhiều bạn giải sai bài toán này. Lỗi thường gặp là giả sử không mất tổng quát $a\geq b\geq c$ hoặc là giải ẩu (thừa nhận các BĐT khác với lý do là dễ dàng chứng minh chúng, tính toán nhầm với tổng cyclic, ...). Các bạn sau đây có lời giải tương đối chính xác, phân loại đúng các trường hợp có thể xảy ra: **Thanh Hóa**: *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống I; **Vĩnh Phúc**: *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 12 Toán 2, *Phan Trần Hướng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả, Đinh Xuân Hùng*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Lộc Ninh, Đồng Hới. **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Sơn*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn, Trực Ninh; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/485. *Cho hàm f(x) liên tục trên [a; b] và có đạo hàm trên (a; b). Chứng minh rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho*

$$f'(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a+b}.$$

Lời giải. Xét hàm số

$$g(x)=(x-a)(x-b)e^{f(x)-\frac{x}{a+b}},\quad x\in[a;b].$$

Khi đó $g(x)$ cũng liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$ và $g(a) = g(b) = 0$.

Ta có:

$$g'(x)=(x-b)e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}+(x-a)e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}+(x-a)(x-b)e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}\left(f'(x)-\frac{1}{a+b}\right)$$
$$=e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}\left[(x-a)+(x-b)+(x-a)(x-b)\left(f'(x)-\frac{1}{a+b}\right)\right].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c\in(a;b)$ để $g'(c)=0$. Suy ra

$$(c-a)+(c-b)+(c-a)(c-b)\left(f'(c)-\frac{1}{a+b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow f'(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a+b}.$$ ❒

➢***Nhận xét.*** 1) Cách giải trên đã sử dụng định lý Rolle, nội dung định lý Rolle như sau: *Cho hàm f(x) liên tục trên [a; b], có đạo hàm trên (a; b). Nếu f(a) = f(b) thì tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=0$.*

Ý nghĩa hình học của định lý Rolle là: Nếu các điều kiện của định lý Rolle được thỏa mãn thì trên đồ thị hàm $y = f(x), x\in(a;b)$, tồn tại điểm $M(c, f(c))$ mà tiếp tuyến với đồ thị tại M song song hoặc trùng với trục Ox.

Cần chú ý rằng nội dung của định lý Rolle chỉ là điều kiện đủ mà không là điều kiện cần, nghĩa là: Có những hàm f liên tục trên $[a; b]$, có đạo hàm trên $(a; b)$ và tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho $f'(c)=0$ nhưng điều kiện $f(a) = f(b)$ không thỏa mãn. Chẳng hạn: hàm $f(x)=x^3$ liên tục trên $[-1;1]$, có đạo hàm trên $(-1;1)$, có $f'(0)=0$ nhưng $f(-1)\neq f(1)$.

2) Bằng cách lấy lôgarit hai vế của hàm $g(x)$ trong cách giải trên, ta cũng có thể đặt hàm $g(x)$ là

$$g(x)=f(x)+\ln(x-a)+\ln(x-b)-\frac{x}{a+b}.$$

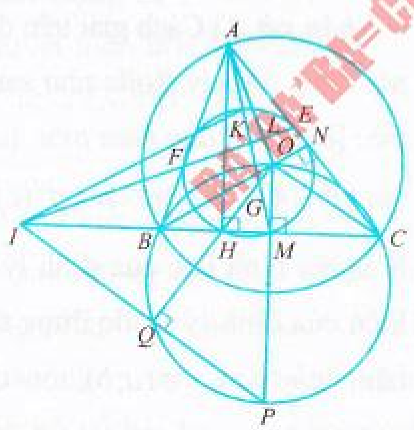
3) Các bạn tham gia giải bài này đều có lời giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là:

Thừa Thiên Huế: *Dương Đông Hưng*, 12 Toán 2; *Mai Thanh Hằng*, *Lê Thị Thu Sương*, 10 toán 2, *Nguyễn Viết Phước Thành*, 10H2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến tre; *Nguyễn Văn Cảnh*, Thành Thới A, Mỏ Cày Nam, Bến Tre. **Lâm Đồng**: *Võ Minh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/485. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH. Gọi M là trung điểm của BC. AM cắt OH tại G. Chứng minh rằng G nằm trên trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC và đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Lời giải. Gọi P và Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của OM và OH với đường tròn (BOC); E, F là chân các đường cao của ΔABC kẻ từ B, C tương ứng; (ω) là đường tròn Euler của ΔABC; d là trục đẳng phương của (ω) và (BOC). Xét ba đường tròn (ω), (BOC) và đường tròn đường kính BC (kí hiệu là (BC)) ta thấy: EF là trục đẳng phương của hai đường tròn (ω) và (BC); BC là trục đẳng phương của hai đường tròn (BC) và (BOC); d là trục đẳng phương của hai đường tròn (BOC) và (ω). Do đó EF, BC và d đồng quy tại I.



Rõ ràng OP là đường kính của đường tròn (BOC), nên $\widehat{HQP}=90^0 \Rightarrow H, M, P, Q$ cùng nằm trên một đường tròn. Xét ba đường tròn (BOC), (ω) và $(HMPQ)$ ta thấy PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (BOC) và $(HMPQ)$; HM là trục đẳng phương của hai đường tròn (ω) và $(HMPQ)$; d là trục đẳng phương của hai đường tròn (ω) và (BOC), suy ra PQ, HM, d đồng quy (tại I). Gọi K là giao điểm thứ hai của AM với (ω), N là trung điểm của AC. Dễ thấy OA vuông góc với EF tại L suy ra $ONEL$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \overline{AO}.\overline{AL}=\overline{AN}.\overline{AE}=\overline{AM}.\overline{AK} \Rightarrow KMOL$ là tứ giác nội tiếp. Mặt khác L, M, Q cùng nằm trên đường tròn đường kính OI nên tứ giác $KOMQ$ nội tiếp. Từ đó $\overline{GK}.\overline{GM}=\overline{GO}.\overline{GQ}$, suy ra G thuộc trục đẳng phương của đường tròn (BOC) và đường tròn (ω). ❐

➤***Nhận xét.*** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn sử dụng tính chất của *hàng điểm điều hòa* hoặc tính chất của *phép nghịch đảo* cũng đi đến kết quả bài toán.

2) Số bài giải gửi về Tòa soạn không nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thái Bình:** *Đặng Minh Đức*, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10 Toán 2, *Bùi Nhật Minh*, 12Toán 1, *Lê Nguyên Huyền* Châu, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Huy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/485. *Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P=\dfrac{(a^3+b^3+c^3+3abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

Lời giải. Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (BĐT) sau:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

với a, b, c là các số thực không âm bất kỳ (được gọi là BĐT Schur).

Thật vậy, do vai trò của a, b, c trong BĐT là như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$. Do đó

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\\
&=(a+b)(a^2+b^2-ab)-ab(a+b)\\
&\qquad\qquad +c(c^2+3ab-b^2-a^2-bc-ca)\\
&=(a+b)(a-b)^2+c[(c-a)(c-b)-(a-b)^2]\\
&=(a+b-c)(a-b)^2+c(c-a)(c-b)\ge 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ và $c=a$ hoặc $c=0$. Áp dụng BĐT trên ta có:

$$\begin{aligned}
(a^3+b^3+c^3+3abc)^2 &\ge [ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]^2\\
&=[(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)]^2\\
&=[(a^2b+b^2c+c^2a)-(ab^2+bc^2+ca^2)]^2\\
&\quad +4(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\\
&\ge 4(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2). \quad (1)
\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
&(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\
&=(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)-\\
&\qquad (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(ab+bc+ca)\\
&=[a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+abc(a^3+b^3+c^3+3abc)]-\\
&\quad \{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+abc[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\}\\
&=abc[a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)\\
&\qquad -bc(b+c)-ca(c+a)]\ge 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $P=\dfrac{(a^3+b^3+c^3+3abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge 4.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc trong a, b, c có hai số bằng 1 và một số bằng 0. ❒

➢***Nhận xét.*** Bài toán BĐT trên là bài toán hay, có nhiều biến đổi đẹp. Hoan nghênh các bạn lớp 9, lớp 10 đã tham gia và có lời giải đúng: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thái Bình:** *Trần Lê Phương Thảo*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Bá Linh*, 10A1, THPT Quỳnh Lưu 3; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim Cả*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Quảng Ngãi:** *Trần Nguyễn Quy*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Phạm Trọng Nghĩa*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đăk Lăk:** *Lê Ngọc Đức*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, TP. Buôn Mê Thuật.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/485. *Tìm số nguyên dương $n \le 40$ và các số thực dương a, b, c thỏa mãn*

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=1\\ \sqrt[3]{a+n}+\sqrt[3]{b+n}+\sqrt[3]{c+n}\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Lời giải. (Của bạn *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Từ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=1 \Rightarrow 0<a,b,c\le 1 \Rightarrow \begin{cases}a<\sqrt[3]{a}\\ b<\sqrt[3]{b}\\ c<\sqrt[3]{c}\end{cases}$

Đặt $A=\sqrt[3]{a+n}+\sqrt[3]{b+n}+\sqrt[3]{c+n}=x+y+z.$

Áp dụng bất đẳng thức $\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3\le\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}$, ta có

$$\begin{aligned}A^3&\le 9(a+b+c+3n)=27n+9(a+b+c)\\ &\le 27n+9(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})=27n+9.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$A>\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}=3\sqrt[3]{n}\Rightarrow 27n<A^3<27n+9. \quad (1)$$

Chú ý rằng A^3 khi chia cho 27 có số dư là 0, 1, 8, 10, … nên từ (1) suy ra

$$A^3=27n+1 \text{ hoặc } A^3=27n+8.$$

• TH1: $A^3=27n+1$. Do $n\le 40$ nên $A\le 10$. Ta có $n=\dfrac{A^3-1}{27}\in\mathbb{N}^*$. Thử A = 1, 2, …, 10 ta thấy chỉ có A = 10 là thỏa mãn, khi đó n = 37. Ta có hệ PT:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=1\\ \sqrt[3]{a+37}+\sqrt[3]{b+37}+\sqrt[3]{c+37}=10\end{cases}$$

Đặt $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}\Rightarrow x+y+z=1$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt[3]{t^3+37}$. Ta có $f''(t)=\dfrac{74t}{\sqrt[3]{(t^3+37)^5}}>0$. Vậy hàm $f(t)$ là hàm lõm. Áp dụng BĐT Jensen ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a+37}+\sqrt[3]{b+37}+\sqrt[3]{c+37}&=\sqrt[3]{x^3+37}+\sqrt[3]{y^3+37}+\sqrt[3]{z^3+37}\\&=f(x)+f(y)+f(z)\\&\ge 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)=10.\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=b=c=\dfrac{1}{27}$.

• TH2: $A^3=27n+8\Rightarrow n=\dfrac{A^3-8}{27}\in\mathbb{N}^*$.

Vì $n\le 40\Rightarrow A\le 10$ nên từ A = 1, 2, …, 10 ta thấy không có giá trị nào để $n=\dfrac{A^3-8}{27}\in\mathbb{N}^*$.

Vậy n = 37 và $a=b=c=\dfrac{1}{27}$. □

➤***Nhận xét.*** Ngoài bạn *Hoa* thì bài này chỉ có thêm bạn *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** tham gia giải và có lời giải đúng gửi về Tạp chí.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/485. *Cho ba số nguyên dương a, b, c. Mỗi lần thực hiện, ta biến đổi bộ (a,b,c) thành bộ số $\left(\left[\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{b+c}{2}\right],\left[\frac{c+a}{2}\right]\right)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta sẽ thu được một bộ gồm ba số bằng nhau (kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).*

Lời giải. (Dựa theo ý tưởng của đa số các bạn).

Ký hiệu $M=\max\{a,b,c\}\in\mathbb{N}$. Ta chứng minh rằng nếu ba số a, b, c không cùng bằng nhau thì M sẽ giảm sau khi thực hiện phép biến đổi.

Giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Không mất tính tổng quát, coi $a\ge b\ge c$ và ba số a, b, c không cùng bằng nhau.

• Nếu a, b, c là ba số phân biệt hoặc $a>b=c$ thì

$$\left[\frac{a+b}{2}\right]\le\frac{a+b}{2}<a,\ \left[\frac{b+c}{2}\right]\le\frac{b+c}{2}<a,\ \left[\frac{c+a}{2}\right]\le\frac{c+a}{2}<a$$

nên $\max\left\{\left[\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{b+c}{2}\right],\left[\frac{c+a}{2}\right]\right\}<a.$

• Nếu $a=b>c$ thì sau bước biến đổi đầu tiên, ta thu được bộ ba số $\{a,x,x\}$ trong đó $x=\left[\frac{b+c}{2}\right]<a.$

Sau lần biến đổi tiếp ta thu được bộ ba số $\left\{\left[\frac{a+x}{2}\right],x,\left[\frac{x+a}{2}\right]\right\}$. Vì $x<a$ nên ta có:

$$\left[\frac{a+x}{2}\right]\le\frac{a+x}{2}<a\Rightarrow\max\left\{\left[\frac{a+x}{2}\right],x,\left[\frac{x+a}{2}\right]\right\}<a.$$

Kết luận: Nếu ba số a, b, c không cùng bằng nhau thì sau không quá hai phép biến đổi, M sẽ giảm đi ít nhất 1 đơn vị. Do M là một số tự nhiên nên chắc chắn sau hữu hạn bước ta thu được bộ ba số bằng nhau. □

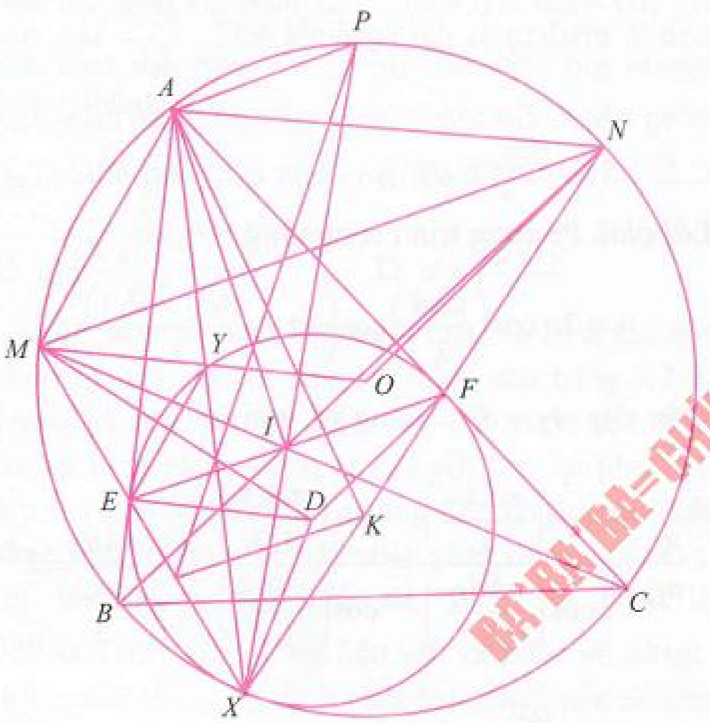
➤***Nhận xét.*** Xin chúc mừng các bạn sau đây có lời giải đúng: **TP. Hồ Chí Minh:** *Võ Tiến Dũng*, 11CT, THPT Nguyễn Thượng Hiền, TP. Hồ Chí Minh; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Quang Long*, *Nguyễn Tuấn Lộc*, 10T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh*, *Lê Ngọc Hoa*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/485. *Cho (D) là đường tròn tiếp xúc với các tia AB, AC của tam giác ABC và tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại X. J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XAB, XAC. P là điểm chính giữa của cung tròn BAC. Chứng minh: P(AXJK) là chùm điều hòa.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác ABC, (O), I theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác. AI cắt lại (O) tại M. Khi đó $MB = MC = MI$.



Phép chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, không trình bày ở đây.

Gọi R, r theo thứ tự là bán kính của (O) và (D); E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (D) và AB, AC; M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của XE, XF và (O); Y là giao điểm thứ hai của XA và (D); I là giao điểm của BN và CM.

Dễ thấy phép vị tự $V_X^{\frac{R}{r}}$ biến (D) thành (O) và theo thứ tự biến các điểm X, E, Y, F, D lần lượt thành X, M, A, N, O. (1)

Dễ thấy tứ giác $XEYF$ điều hòa. Kết hợp với (1) suy ra tứ giác $XMAN$ điều hòa. (2)

Vì (1) nên $EF \parallel MN$. Theo bổ đề trên, chú ý tới (2), ta có $\dfrac{MJ}{MX} = \dfrac{MA}{MX} = \dfrac{NA}{NX} = \dfrac{NK}{NX} \Rightarrow MN \parallel JK$.

Vậy $EF \parallel MN \parallel JK$. (3)

Vì (1) nên $OM \parallel DE; ON \parallel DF$. Kết hợp với $DE \perp AB; DF \perp AC$, suy ra $OM \perp AB; ON \perp AC$.

Nói cách khác BN, CM theo thứ tự là phân giác của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$.

Điều đó có nghĩa AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$. Kết hợp với $AE = AF$ suy ra $AI \perp EF$. (4)

Từ (3) và (4), chú ý rằng $AI \perp AP$ suy ra $AP \parallel MN \parallel JK$. (5)

Từ (2) và (5) suy ra XP đi qua trung điểm của MN và do đó XP đi qua trung điểm của JK. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $P(AXJK) = -1$. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này, đa số đều sử dụng định lí Pascal để chứng minh rằng I là trung điểm của EF.

2) Lời giải trên cho ta một cách chứng minh mới kết quả: X, I, P thẳng hàng.

3) Bạn *Đào Thu Huyền*, 11T0, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**, có một lời giải khá độc đáo dựa vào kết quả sau: *Nếu tứ giác ABCD nội tiếp và X, Y, Z, T theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC thì XYZT là hình chữ nhật.*

4) Xin nêu tên một vài bạn có lời giải tương đối tốt: **Nghệ An:** *Vũ Đức Vinh*, 10T1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, *Bùi Minh Nhật*, 12T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10T2, *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12T2, THPT

chuyên Quốc học Huế, TP. Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Vũ Duy*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Võ Hoàng Huy*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/485. *Đặt điện áp $u = U_0 \cos\omega t\ (V)$ vào hai đầu một đoạn mạch gồm tụ điện mắc nối tiếp với một cuộn dây. Biết điện áp giữa hai đầu tụ điện lệch pha $\frac{2\pi}{3}$ so với điện áp hai đầu đoạn mạch và lệch pha $\frac{5\pi}{6}$ so với điện áp giữa hai đầu cuộn dây, điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây bằng 120V. Tính điện áp hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện và giữa hai đầu đoạn mạch.*

Lời giải. Hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện lệch pha $\frac{2\pi}{3}$ so với hiệu điện thế hai đầu mạch và lệch pha $\frac{5\pi}{6}$ so với hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây nên dễ thấy hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch lệch pha $\frac{\pi}{6}$ so với dòng điện và hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn dây cũng nhanh pha hơn hiệu điện thế hai đầu mạch là $\frac{\pi}{6}$.

Vẽ giản đồ vectơ ta dễ dàng suy ra $U_C = U$ và sử dụng định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{U_d}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{U}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow U = 40\sqrt{3}\ (V).\ \square$$

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** *Lê Bá Quốc Minh*, 12 Toán 1, *Lê Cẩm Thanh Hà*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nam Định:** *Phạm Thị Ngọc Lan, Nguyễn Thanh Huyền*, 12 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Diễm Ly*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/485. *Trên mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp dao động đồng pha, phát đồng thời sóng có bước sóng bằng 1,2 cm. Hai điểm C và D thuộc cùng một elip trên mặt chất lỏng nhận A, B là hai tiêu điểm. Biết hiệu số khoảng cách từ hai nguồn tới C và D lần lượt là $AC - BC = 4{,}8\,\text{cm}$ và $AD - BD = 0{,}4\,\text{cm}$. Coi biên độ sóng do mỗi nguồn gửi đến mỗi điểm trên elip nói trên đều bằng nhau. Tại thời điểm t nào đó, li độ của điểm C là 1,5 mm thì li độ của điểm D là bao nhiêu?*

Lời giải. Phương trình sóng tổng hợp là:

$$u = 2a\cos\left(\frac{\pi\Delta d}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi(d_2 + d_1)}{\lambda}\right).$$

Trên elip $d_2 + d_1 =$ hằng số, nên:

$$\frac{u_C}{u_D} = \frac{\cos\left(\frac{\pi\Delta d_C}{\lambda}\right)}{\cos\left(\frac{\pi\Delta d_D}{\lambda}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi.4,8}{1,2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi.0,4}{1,2}\right)} = \frac{\cos 4\pi}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$$

$$\Rightarrow u_D = \frac{u_C}{2} = 0,75\,\text{mm}.\ \square$$

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Thừa Thiên Huế:** *Phan Trần Hướng*, *Lê Bá Quốc Minh*, 12T1, *Ngô Nguyễn Quỳnh* Mơ, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Nam Định:** *Nguyễn Thanh Huyền, Phạm Thị Ngọc Lan*, 12T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Diễm Ly*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Tân Tiến, Văn Giang; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 12A, THPT Nam Sách, Hải Dương.

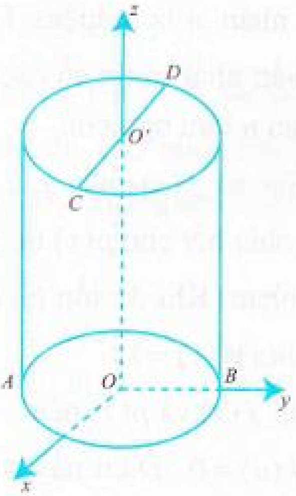
ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 30

Problem. Given a cylinder with the height 2 and the radius of the bases 1. Let AB and CD are two diameters on the bases which are perpendicular to each other. Compute the angle between the lines through AC and BD.

Solution. We choose the coordinates as in the picture. Then we have $A(0;-1;0), B(0;1;0), C(1;0;2)$, and $D(-1;0;2)$.



Then $\overrightarrow{AC}=(1;1;2)$, $\overrightarrow{DB}=(1;1;-2)$. Let α be the angle between $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$. Then

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{BD}|} = -\frac{1}{3}.$$

Hence $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.5^0$. Therefore the angle between the line through AC and BD is

$$180^0 - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 70.5^0.$$

Remark. The angle between two line is between 0 and 90 degrees. The angle between two vectors is between 0 and 180 degrees.

TỪ VỰNG

Cylinder : hình trụ

Base (of cylinder) : mặt đáy (của hình trụ)

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

Bài toán. *Chứng minh rằng đồ thị của hàm bậc ba sau:*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (*) \text{ với } a \neq 0$$

luôn có tâm đối xứng.

Lời giải. Đầu tiên, ta thấy rằng hàm số $g(x) = ax^3 + cx$ là hàm số lẻ nên đồ thị (C_1) của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Đồ thị (C_2) của hàm số $h(x) = ax^3 + cx + d$ nhận được từ (C_1) bằng cách tịnh tiến lên trên hoặc xuống dưới d đơn vị tùy thuộc vào dấu của d. Do đó (C_2) cũng có tâm đối xứng.

Bây giờ ta sẽ thực hiện phép đổi biến số để làm cho số hạng bx^2 trong (*) triệt tiêu. Để ý rằng, đổi biến số nghĩa là tịnh tiến đồ thị sang trái hoặc sang phải. Và như vậy, nếu đồ thị hàm số $h(x) = a'x^3 + c'x + d'$ có tâm đối xứng thì đồ thị hàm số có dạng (*) cũng có tâm đối xứng.

Cụ thể, ta có $a(x+r)^3 + b(x+r)^2 + \ldots = ax^3 + 3arx^2 + \ldots + bx^2 + \ldots$ Từ đó, nếu chọn $r = -\frac{b}{3a}$, thì có thể thu gọn hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ về dạng $h(x) = a'x^3 + c'x + d'$. Do đó, chúng ta có thể khẳng định rằng đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ luôn có tâm đối xứng. ❐

Lưu ý: Bằng phương pháp này, chúng ta có thể tìm được tọa độ tâm đối xứng của một đồ thị (bằng cách nào?)

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10Toán 2, *Bùi Nhật Minh, Nguyễn Thị Ngọc Mai*, 12 Toán 1, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC BẤT KHẢ QUI

TRẦN VĂN HẠNH

(Đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Đa thức bất khả qui là một khái niệm quan trọng trong lý thuyết phương trình đại số. Các bài toán về đa thức bất khả qui nói chung là khó, thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi trung học phổ thông. Trong bài viết này chúng tôi đúc kết hai vấn đề:

1) Tìm đa thức bất khả qui có bậc nhỏ nhất nhận một số thực cho trước làm nghiệm.

2) Phương pháp chứng minh một đa thức bất khả qui.

2. HỆ THỐNG MỘT SỐ KIẾN THỨC LIÊN QUAN

Định nghĩa: Đa thức $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ được gọi là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$ nếu nó không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với các hệ số nguyên.

Định lý 2.1. Nếu $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ có bậc $n>1$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$ thì nó cũng bất khả qui trên $\mathbb{Q}[x]$.

Định lý 2.2. (*Tiêu chuẩn Eisenstein*) Giả sử

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{Z}[x], n>0.$$

Nếu có số nguyên tố q sao cho $q|a_0, q|a_1, \ldots, q|a_{n-1}, q$ không là ước của a_n và q^2 không là ước của a_0 thì $p(x)$ bất khả qui trên $\mathbb{Q}[x]$.

Định lý 2.3. Giả sử $p(x)$ là đa thức bất khả qui thuộc vành $\mathbb{Z}[x]$. Nếu $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ thì $f(x)$ chia hết cho $p(x)$ hoặc nguyên tố cùng nhau với $p(x)$.

3. ĐA THỨC BẤT KHẢ QUI NHẬN MỘT SỐ THỰC CHO TRƯỚC LÀM NGHIỆM.

Để giải bài toán tìm đa thức bất khả qui nhận một số thực cho trước làm nghiệm, ta áp dụng định lý sau.

Định lý 3.1. Nếu $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ là một đa thức bất khả qui nhận số thực u là một nghiệm thì $p(x)$ là ước của mọi đa thức nhận u là nghiệm. Do đó $p(x)$ là đa thức có bậc thấp nhất trong số các đa thức khác 0 thuộc $\mathbb{Z}[x]$ nhận u làm nghiệm.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ nhận u là một nghiệm, nếu $f(x)$ không chia hết cho $p(x)$ thì $f(x)$ và $p(x)$ nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại $h(x),k(x)$ sao cho: $f(x)h(x)+p(x)k(x)=1.$ (1)

Vì u là nghiệmcủa $f(x)$ và $p(x)$ nên $f(u)h(u)+p(u)k(u)=0.$ Điều này mâu thuẫn (1). Do đó $f(x)$ chia hết cho $p(x)$.

Bài toán 3.1. *Tìm đa thức theo x có bậc nhỏ nhất với hệ số nguyên có một nghiệm là* $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

Lời giải. Đặt $u=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ thì $u(\sqrt[3]{2}+1)=3.$ Do đó $u\sqrt[3]{2}=3-u.$

Lập phương hai vế và biến đổi ta được:

$$u^3-3u^2+9u-9=0.$$

Suy ra u là nghiệm của đa thức

$$p(x)=x^3-3x^2+9x-9.$$

Ta chứng minh $p(x)$ là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$. Ta có $p(x+1)=x^3+6x-2.$ Theo tiêu chuẩn Eisenstein với $q=2$ thì $p(x+1)$ bất khả qui. Suy ra $p(x)$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

Vậy theo Định lý 3.1 thì đa thức $p(x)=x^3-3x^2+9x-9$ có bậc nhỏ nhất nhận u làm nghiệm.

Bài toán 3.2. (*VMO 1997*) *Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn*

$$f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}\,?$$

Lời giải. Đặt $u=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Nhận thấy rằng $(u+1)(1-\sqrt[3]{3})=1-3$. Suy ra $(u+1)\sqrt[3]{3}=u+3$.

Lập phương hai vế ta có:

$$(u+1)^3 3=(u+3)^3 \Leftrightarrow u^3-9u-12=0.$$

Do đó u là nghiệm của đa thức $p(x)=x^3-9x-12$.

Theo tiêu chuẩn Eisenstein với $p=3$ thì $p(x)$ là đa thức bất khả qui. Suy ra $p(x)=x^3-9x-12$ là đa thức có bậc nhỏ nhất nhận $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ làm nghiệm.

Giả sử tồn tại đa thức $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn bài toán. Lấy $f(x)$ chia cho $p(x)$ ta được

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

với $\deg r(x)<3$ (ký hiệu $\deg r(x)$ là bậc của $r(x)$).

Suy ra $f(u)=p(u)q(u)+r(u)=r(u)$.

Vì $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}$, nên ta có

$$r(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}.$$

Do $\deg r(x)<3$, ta xét hai trường hợp như sau:

TH1: $\deg r(x)=1$. Đặt $r(x)=ax+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Khi đó ta có $a(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})+b=3+\sqrt[3]{3}$

$$\Leftrightarrow (a-1)\sqrt[3]{3}+a\sqrt[3]{9}=3-b$$

Do $3-b\in\mathbb{Z}$, nên $\begin{cases}a-1=0\\ a=0\end{cases}$ (vô lý).

TH2: $\deg r(x)=2$. Đặt $r(x)=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$a(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})^2+b(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})+c=3+\sqrt[3]{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\sqrt[3]{9}+(3a+b)\sqrt[3]{3}+6a+c=3+\sqrt[3]{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=0\\ 3a+b=1\\ 6a+c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1/2\\ b=-1/2\\ c=0\end{cases}$$

Suy ra $r(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x\notin\mathbb{Z}[x]$. Vậy không tồn tại đa thức hệ số nguyên $f(x)$ mà $f(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})=3+\sqrt[3]{3}$.

Dùng cách giải của hai bài toán trên, ta giải bài toán sau đây.

Bài toán 3.3. (*VMO* 2017) *Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn*

$$\begin{cases}f(1+\sqrt[3]{2})=1+\sqrt[3]{2}\\ f(1+\sqrt{5})=2+3\sqrt{5}\end{cases}?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại đa thức $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó, ta đặt $u=1+\sqrt[3]{2}\Rightarrow u-1=\sqrt[3]{2}$. Lập phương hai vế ta được

$$u^3-3u^2+3u-3=0.$$

Dễ dàng nhận thấy u là nghiệm của đa thức $p(x)=x^3-3x^2+3x-3$ và $p(x)$ là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$. (theo tiêu chuẩn Eisenstein với $q=3$).

Lấy $f(x)$ chia cho $p(x)$ ta được

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x) \text{ với } \deg r(x)\le 2.$$

Vì $p(u)=0$ với $u=1+\sqrt[3]{2}$ nên ta có

$$f(1+\sqrt[3]{2})=r(1+\sqrt[3]{2})=1+\sqrt[3]{2}. \qquad (1)$$

Ta xét hai trường hợp của $r(x)$ như sau:

TH1: $\deg r(x)=2$. Ta thấy không tồn tại đa thức bậc hai $r(x)$ thỏa mãn (1).

TH2: $\deg r(x)=1$. Ta dễ dàng tìm được đa thức $r(x)=x$. Do đó, ta có

$$f(x)=(x^3-3x^2+3x-3)q(x)+x. \qquad (*)$$

Hoàn toàn tương tự như trên, ta đặt $v=1+\sqrt{5}$, suy ra v là nghiệm của đa thức bất khả qui

$$p'(x)=x^2-2x-4\in\mathbb{Z}[x].$$

Lấy $f(x)$ chia cho $p'(x)$ ta được

$$f(x)=p'(x)q'(x)+r'(x) \text{ với } \deg r'(x)\le 1.$$

Vì $p'(v)=0$ với $v=1+\sqrt{5}$ nên ta có

$$f(1+\sqrt{5})=r'(1+\sqrt{5})=2+3\sqrt{5}.$$

Từ đó ta tìm được $r'(x)=3x-1$. Do đó, ta có

$$f(x)=(x^2-2x-4)q'(x)+3x-1. \qquad (**)$$

Từ phương trình (*) và (**) suy ra

$$p(x)q(x)-p'(x)q'(x)=2x-1.$$

Điều này vô lý vì $(p(x),p'(x))=1$ do $p(x)$ và $p'(x)$ là hai đa thức bất khả qui. Vậy không tồn tại đa thức $f(x)$ thỏa yêu cầu bài toán.

4. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐA THỨC BẤT KHẢ QUI

Ngoài tiêu chuẩn bất khả qui của Eisenstein ta có thêm phương pháp chứng minh phản chứng được minh họa qua các bài toán sau.

Bài toán 4.1. *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số nguyên khác nhau đôi một. Chứng minh rằng đa thức*

$$p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) - 1$$

bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

Lời giải. Giả sử $p(x) = g(x)h(x)$; $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g, \deg h \in [1; n)$. Ta có $p(a_i) = g(a_i)h(a_i) = -1$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Vì $g(a_i), h(a_i) \in \mathbb{Z}$ nên ta có

$$\begin{cases} g(a_i) = 1 \\ h(a_i) = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} g(a_i) = -1 \\ h(a_i) = 1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $g(a_i) + h(a_i) = 0\ \forall i = 1, \ldots, n$. Điều này cũng có nghĩa là đa thức $f(x) = g(x) + h(x)$ có n nghiệm phân biệt. Tuy nhiên, vì $\deg g$, $\deg h \in [1, n)$ nên suy ra $f(x) \equiv 0$. Do đó ta có

$$g(x) = -h(x).$$

Khi đó: $p(x) = g(x).h(x) = -h(x)^2$. Điều này mâu thuẫn vì hệ số cao nhất của $p(x)$ là 1. Vậy $p(x)$ là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài toán 4.2. *Cho số nguyên dương n. Chứng minh đa thức $p(x) = (x+1^2)(x+2^2)\ldots(x+n^2)+1$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.*

Lời giải. Giả sử $p(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g, \deg h \in [1, n)$. Do $p(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1 nên giả sử hệ số cao nhất của $g(x)$, $h(x)$ cũng là 1. Ta có $p(-k^2) = 1$ với mọi $k = 1, \ldots, n$. Do đó suy ra $g(-k^2)h(-k^2) = 1$. Vì $g(-k^2), h(-k^2) \in \mathbb{Z}$ nên ta có hai trường hợp:

$$\begin{cases} g(-k^2) = 1 \\ h(-k^2) = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} g(-k^2) = -1 \\ h(-k^2) = -1 \end{cases}$$

Đặt $f(x) = g(x) - h(x)$. Nhận thấy rằng $f(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, có bậc nhỏ hơn n và có n nghiệm phân biệt $-1, \ldots, -n^2$ nên suy ra $f(x) \equiv 0 \Rightarrow g(x) = h(x)$.

Xét $x = 0$, ta có $p(0) = g(0).h(0) = h(0)^2 \in \mathbb{Z}$ là số chính phương. Mặt khác ta lại có $p(0) = (n!)^2 + 1$. Suy ra $(n!)^2 + 1$ là số chính phương. Điều này vô lý. Vậy $p(x)$ là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài toán 4.3. *Cho $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Chứng minh rằng đa thức $p(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.*

Lời giải. Với $n = 2$, ta có $p(x) = x^2 + 5x + 3$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

Xét $n \geq 3$. Giả sử $p(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg g, \deg h \in [1, n)$.

Do $\deg g + \deg h = n \geq 3$ nên trong hai số $\deg g$ và $\deg h$ có một số lớn hơn 1.

Giả sử $g(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k$ với $k > 1$. Ta có $p(0) = 3 = g(0)h(0)$. Do $g(0), h(0) \in \mathbb{Z}$, nên suy ra $|g(0)| = 1$ hoặc $|g(0)| = 3$. Gọi $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ là các nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_k)$.

Xét trường hợp $|g(0)| = 1$, ta suy ra $|a_1 \ldots a_k| = 1$. Mặt khác, do $g(a_i) = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, k$, nên ta có $p(a_i) = a_i^n + 5a_i^{n-1} + 3 = 0$ hay $a_i^{n-1}(a_i + 5) = -3$. Suy ra $|a_1 \ldots a_k|^{n-1} |(a_1+5)\ldots(a_k+5)| = 3^k$ hay $|(a_1+5)\ldots(a_k+5)| = 3^k$.

Ta có: $|g(-5)| = |(a_1+5)\ldots(a_k+5)| = 3^k$ (*)

Mặt khác ta có $p(-5) = g(-5)h(-5) = 3$. Điều này có nghĩa $|g(-5)| = 3$ hoặc $|g(-5)| = 1$. Điều này mâu thuẫn với (*).

Tương tự với trường hợp $|g(0)| = 3$ ta cũng suy ra điều mâu thuẫn như trên. Vậy $p(x)$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

5. KẾT LUẬN

Bài viết là một chuỗi liệt kê các kết quả trong các bài toán đa thức bất khả qui thông qua nhiều bài toán có cách tiếp cận khác nhau. Mỗi cách cho chúng ta một trải nghiệm và khám phá thú vị. Qua bài viết tác giả hy vọng bạn đọc sẽ phần nào thấy được độ khó của các bài toán loại này.

5. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tìm đa thức của x có bậc nhỏ nhất với hệ số nguyên và có một nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

2. Giả sử $a_1, \ldots, a_n$ là n số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng đa thức

$$p(x) = (x-a_1)^2 \ldots (x-a_n)^2 + 1$$

bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

3. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng đa thức $p(x) = (x^2+1^2)\ldots(x^2+n^2)+1$ bất khả qui trên $\mathbb{Z}[x]$.

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2018 – MÔN TOÁN

LÊ ANH VINH (*Viện KHGD Việt Nam*)
LÊ PHÚC LỮ (*Công ty FPT, TP. Hồ Chí Minh*)

Kỳ thi chọn Học sinh giỏi Quốc gia THPT năm học 2017 - 2018 đã được tổ chức trong các ngày 11, 12 và 13/1/2018 cho 12 môn học (ngày 13/1 là ngày thi thực hành cho các môn Vật lý, Hóa học và Sinh học). Dưới đây là đề chính thức của môn Toán.

1. Đề thi

Ngày thi thứ nhất (11/1/2018)

Bài 1. (*5 điểm*) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}$ với $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n, chứng minh rằng $n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n+1$.

Bài 2. (*5 điểm*) Cho tam giác nhọn không cân ABC và D là một điểm trên cạnh BC. Lấy điểm E trên cạnh AB và lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $\widehat{DEB} = \widehat{DFC}$. Các đường thẳng DF, DE lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Gọi $(I_1), (I_2)$ tương ứng là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DEM, DFN. Kí hiệu (J_1) là đường tròn tiếp xúc trong với (I_1) tại D và tiếp xúc với AB tại K, (J_2) là đường tròn tiếp xúc trong với (I_2) tại D và tiếp xúc với AC tại H, P là giao điểm của (I_1) và (I_2), Q là giao điểm của (J_1) và (J_2) (P, Q khác D).

a) Chứng minh rằng D, P, Q thẳng hàng.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK và AQ lần lượt tại G và L (G, L khác A). Chứng minh rằng tiếp tuyến tại D của đường tròn ngoại tiếp tam giác DQG cắt đường thẳng EF tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DLG.

Bài 3. (*5 điểm*) Một nhà đầu tư có hai mảnh đất hình chữ nhật cùng kích thước $120m \times 100m$.

a) Trên mảnh đất thứ nhất, nhà đầu tư muốn xây một ngôi nhà có nền hình chữ nhật có kích thước $25m \times 35m$ và xây bên ngoài 9 bồn hoa hình tròn đường kính $5m$. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở đâu thì trên phần đất còn lại vẫn đủ chỗ xây ngôi nhà đó.

b) Trên mảnh đất thứ hai, nhà đầu tư muốn xây một hồ cá hình đa giác lồi sao cho từ một điểm bất kì trên phần đất còn lại có thể đi không quá $5m$ thì đến bờ hồ. Chứng minh rằng chu vi của hồ không nhỏ hơn $(440 - 20\sqrt{2})m$.

Bài 4. (*5 điểm*) Trong mặt phẳng Oxy, cho (C) là đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$. Một đường thẳng (d) thay đổi sao cho (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng

a) $\sqrt[3]{\dfrac{x_1x_2}{x_3^2}} + \sqrt[3]{\dfrac{x_2x_3}{x_1^2}} + \sqrt[3]{\dfrac{x_3x_1}{x_2^2}}$ là một hằng số.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{x_1^2}{x_2x_3}} + \sqrt[3]{\dfrac{x_2^2}{x_3x_1}} + \sqrt[3]{\dfrac{x_3^2}{x_1x_2}} < -\dfrac{15}{4}$.

Ngày thi thứ hai (12/1/2018)

Bài 5. (*6 điểm*) Cho các số nguyên dương n và d. Xét tập hợp $S_n(d)$ gồm tất cả các bộ số có thứ tự $(x_1; ...; x_d)$ thỏa mãn điều kiện sau:

i) $x_i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq d$;

ii) $x_i \neq x_{i+1}$ với mọi chỉ số $1 \leq i \leq d-1$;

iii) không tồn tại các chỉ số $1 \leq i < j < k < l \leq d$ sao cho $x_i = x_k$ và $x_j = x_l$.

a) Tính số phần tử của tập hợp $S_3(5)$.

b) Chứng minh rằng tập hợp $S_n(d)$ khác rỗng khi và chỉ khi $d \leq 2n-1$.

Bài 6. (*7 điểm*) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 2, x_1 = 1$ và $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ với mọi $n \geq 0$.

a) Với $n \geq 1$, chứng minh rằng nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (m, n) sao cho x_n chia hết cho x_m.

Bài 7. (*7 điểm*) Cho tam giác nhọn không cân ABC có trọng tâm G nội tiếp đường tròn (O). Gọi

AH_a, BH_b, CH_c là các đường cao của tam giác ABC và D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Các tia GH_a, GH_b, GH_c lần lượt cắt (O) tại các điểm X, Y, Z.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XCE đi qua trung điểm đoạn thẳng BH.

b) Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng AX, BY, CZ. Chứng minh rằng các đường thẳng DM, EN, FP đồng quy.

2. Kết quả chấm thi và Giải thưởng

Điểm số cao nhất của kì thi là 32/40 đạt được bởi em *Vương Đình Ân*, trường THPT Chuyên Bắc Giang, tỉnh **Bắc Giang**.

Theo Quy chế thi chọn HSGQG THPT hiện hành và căn cứ kết quả chấm thi, Lãnh đạo Bộ GD&ĐT đã quyết định mức điểm cho mỗi loại giải như sau:

- ***Giải Nhất***: từ 27,5 điểm đến 40 điểm;
- ***Giải Nhì***: từ 21 điểm đến 27 điểm;
- ***Giải Ba***: từ 16 điểm đến 20,5 điểm;
- ***Giải Khuyến khích***: từ 12 điểm đến 15,5 điểm.

Theo đó, có **238** thí sinh được trao giải; gồm **7** thí sinh được trao Giải Nhất, **48** thí sinh được trao Giải Nhì, **82** thí sinh được trao Giải Ba và **101** thí sinh được trao Giải Khuyến khích.

Trong số 7 thí sinh được trao Giải Nhất năm nay, có *Nguyễn Nguyễn* là học sinh lớp 11 trường PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh; 6 thí sinh còn lại đều đạt giải cao tại kỳ thi HSGQG năm trước. Dưới đây là danh sách các thí sinh được trao giải.

• ***Giải Nhất***: *Vương Đình Ân* (THPT Chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**), *Phan Văn Đức Nhật* (THPT Chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**), *Trần Việt Hoàng* (THPT Chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**), *Nguyễn Đức Bảo* (THPT Chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**), *Nguyễn Tiến Đạt* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**), *Lê Tường Khanh* (THPT Chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**), *Nguyễn Nguyễn* (PTNK, ĐHQG **TP. Hồ Chí Minh**).

• ***Giải Nhì***: *Đinh Quang Trường* (THPT Chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**); *Trà Trần Quý Thiên* (THPT Tăng Bạt Hổ, **Bình Định**); *Phạm Tuấn Kiệt, Nguyễn Thượng Long Hoàng, Võ Văn Nghĩa* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Đỗ Hoàng Việt* (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**); *Phạm Quỳnh Anh* (THPT Chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Phạm Minh Đức, Nguyễn Đăng Khôi* (THPT Chuyên Hà Nội Amsterdam, **Hà Nội**); *Nguyễn Văn Dũng, Trần Hữu Hiếu, Trần Danh Quyết, Nguyễn Thị Tố Uyên* (THPT Chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); *Trịnh Khánh Hiệp, Trịnh Văn Hoàn* (THPT Chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Vũ Minh Hiếu* (THPT Chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**); *Nguyễn Hoàng Huy, Đoàn Ngọc Khánh* (THPT Chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Nguyễn Văn Mạnh, Nguyễn Trọng Bằng* (THPT Chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Tạ Anh Dũng* (THPT Chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Lê Thành Lâm* (THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên); *Hoàng Nhật Tuấn, Lê Hoàng Long, Lê Đình Hải* (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); *Trương Nhật Nguyên Bảo* (THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**); *Đỗ Minh Nhật, Hoàng Huy Phan, Nguyễn Việt Dũng* (THPT Chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Nguyễn Minh Hải, Lê Viết Thanh Long* (THPT Chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**); *Vương Tùng Dương, Nguyễn Thị Hồng Ngọc, Lê Anh Dũng* (THPT Chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); *Nguyễn Quang Bin, Nguyễn Minh Đức, Nguyễn Khả Nhật Long, Nguyễn Trọng Phúc, Cao Tiến Thành, Trương Mạnh Tuấn* (THPT Chuyên KHTN, **ĐHQG Hà Nội**); *Lâm Hữu Phúc, Đỗ Hoàng Tùng, Nguyễn Minh Châu, Tiêu Phát Đạt* (PTNK, **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Ngô Thị Huệ, Phạm Đình Nghĩa, Hoàng Duy* (THPT Chuyên **ĐHSP Hà Nội**); *Phan Việt Hoàng* (THPT Chuyên **ĐH Vinh**).

• ***Giải Ba***: *Phạm Thành Danh, Lê Trần Trung Hiếu* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**); *Đinh Bình Dương, Lê Long Vũ* (THPT Chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**); *Hồ Trung Kiên, Nguyễn Hoàng Ngân, Lê Bá Thành* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Huỳnh Bách Khoa* (THPT Chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); *Đỗ Trung Đức* (THPT Chuyên Lý Tự Trọng, **Cần Thơ**); *Hồ Như Hoàng* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); *Phan Quốc Vượng* (THPT Chuyên Nguyễn Du, **Đăk Lăk**); *Lê Thanh Tú* (THPT Chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); *Nguyễn Tấn Đạt* (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành, **Đắk Nông**); *Nguyễn Ngọc Anh Khoa* (THPT Chuyên Hùng Vương, **Gia Lai**); *Phạm Thị Duyên, Nguyễn Thành Việt, Nguyễn Đức Tuân* (THPT Chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Nguyễn Tuấn Anh* (THPT Chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); *Hoàng Tùng* (THPT Chuyên Hà Nội Amsterdam, **Hà Nội**); *Nguyễn Thị Linh Chi, Nguyễn Phi Phúc, Phan Đình Minh Quân, Trương Tuấn Sang* (THPT Chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**); *Nguyễn Quang Đức, Trần Xuân Bách, Tạ Hữu Bình* (THPT Chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Lại Ngọc Tân, Phạm Quốc Việt, Nguyễn Thuận Hưng* (THPT Chuyên Trần Phú, **Hải**

Phòng); *Nguyễn Thanh Long, Nguyễn Quang Trung* (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); *Vũ Thị Vân Anh, Nguyễn Văn Hiển, Trần Doãn Hiệp* (THPT Chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**); *Nguyễn Tuấn Kiệt, Đặng Thiên Hùng* (THPT Chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Đỗ Hương Giang, Nguyễn Minh Hiệu* (THPT Chuyên Lào Cai, **Lào Cai**); *Mẫn Đào Sơn Tùng* (THPT Chuyên Chu Văn An, **Lạng Sơn**); *Phạm Trần Anh, Hoàng Văn Nam, Võ Việt Anh, Lê Quang Quân, Lê Hoàng Anh* (THPT Chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Phùng Đình Minh Tú* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**); *Trần Minh Hiếu, Nguyễn Tiến Long, Nguyễn Hoàng Phi, Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Hải Dương, Lê Nguyễn Quỳnh Trang, Dương Gia Huy, Bùi Ngọc Tân* (THPT Chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); *Nguyễn Hưng Quang Khải* (THPT Chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); *Nguyễn Phi Hùng* (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); *Lê Thảo Huyền* (THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**); *Phạm Đình Kha, Nguyễn Lê Minh Triết* (THPT Chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); *Nguyễn Tiến Mạnh* (THPT Chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Bùi Thanh Bình, Đặng Thị Huế, Đoàn Ngọc Phú* (THPT Chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); *Trương Hải Long, Trịnh Tùng Dương, Hồ Bích Huyền, Nguyễn Trần Đức Tài, Võ Đức [illegible] Anh* (THPT Chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**); *Tống Ngọc Chung, Đặng Nguyễn Xuân Nam, Đinh Hữu Nhật* (THPT Chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**); *Hà Ngọc Hùng, Trần Quốc Khánh* (THPT Chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**); *Bùi Anh Vũ, Đỗ Trung Phương, Kiều Hùng Cường, Vũ Ngọc Duy, Nguyễn Lê Sơn* (THPT Chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); *Nguyễn Hồng Sơn* (THPT Chuyên KHTN, **ĐHQG Hà Nội**); *Nguyễn Tiến Hoàng, Trần Gia Phong* (PTNK, **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Nguyễn Minh Hiếu* (THPT Chuyên, **ĐHSP Hà Nội**); *Thái Phi Hoàng* (THPT Chuyên, **ĐH Vinh**);

• ***Giải Khuyến khích***: *Vũ Minh Quang, Ngô Trần Anh Thư* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**); *Lý Thị Kiều Diễm, Nguyễn Danh Tiến* (THPT Chuyên Bắc Giang, **Bắc Giang**); *Nguyễn Hữu Hiển, Lê Tuấn Kiệt* (THPT Chuyên Bắc Ninh, Bắc Ninh); *Trần Đình Vĩnh Thụy* (THPT Chuyên Bến Tre, **Bến Tre**); *Trần Minh Hoàng* (THPT Số 1 Phù Cát, **Bình Định**); *Võ Hùng Hữu* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**); *Đặng Ngọc Dương* (THPT Chuyên Hùng Vương, **Bình Dương**); *Nguyễn Lê Phi Long, Nguyễn Đình Thịnh, Lưu Trí Cường* (THPT Chuyên Bình Long, **Bình Phước**); *Trịnh Hoàng Hiệp* (THPT Chuyên Quang Trung, **Bình Phước**); *Nguyễn Trường Hải, Nguyễn Phú Quốc* (THPT Chuyên Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**); *Lê Minh Huy, Nguyễn Đức Thắng* (THPT Chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**); *Hoàng Phúc Hưng* (THPT Chuyên Cao Bằng, **Cao Bằng**); *Lê Đỗ Thanh Bình* (THPT Chuyên Nguyễn Du, **Đắk Lắk**); *Nguyễn Ngọc Kim Ngân, Quách Minh Tuấn* (THPT Chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**); *Phạm Huy Bình* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Điện Biên**); *Nguyễn Lê Minh* (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, **Đồng Tháp**); *Nguyễn Thị Huyền, Nguyễn Bùi Nam Trường* (THPT Chuyên Biên Hòa, **Hà Nam**); *Hà Trung Kiên* (THPT Chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Nội**); *Nguyễn Văn Dũng* (THPT Ngọc Tảo, **Hà Nội**); *Văn Đức Mạnh, Phạm Quốc Việt, Nguyễn Hoàng Tùng Lâm* (THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**); *Phạm Đình Phong, Nguyễn Đình Sơn, Nguyễn Thị Hồng Thu, Dương Ngân Hà, Trịnh Quang Hùng* (THPT Chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); *Phùng Quang Minh, Trần Phương Thảo* (THPT Chuyên Trần Phú, **Hải Phòng**); *Bùi Việt Anh, Vũ Quang Trường* (THPT Chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**); *Phan Quí Lộc, Nguyễn Thị Ngân Trúc* (THPT Chuyên Long An, **Long An**); *Vũ Tuấn Trường, Đào Trọng Tuấn, Vũ Văn Nghĩa, Bùi Trần Hiển* (THPT Chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**); *Trần Khánh Duy* (THPT Chuyên Lào Cai, **Lào Cai**); *Nghiêm Việt Thắng, Hoàng Giang Đức* (THPT Chuyên Chu Văn An, **Lạng Sơn**); *Nguyễn Huỳnh Tuyên, Võ Minh Quân* (THPT Chuyên Thăng Long, **Lâm Đồng**); *Nguyễn Ngọc Khánh Như, Nguyễn Thành Lưu* (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành, **Kon Tum**); *Cao Việt Hải Nam, Ngô Trí Nguyên* (THPT Chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**); *Vũ Hoàng Long, Ninh Văn Nghĩa, Phạm Văn Đức, Nguyễn Khánh Trường, Lê Quang Anh* (THPT Chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); *Trần Cao Nhật Minh* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Ninh Thuận**); *Nguyễn Lê Kim* (THPT Chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); *Mai Quốc Tuấn, Lê Xuân Tùng, Trần Trung Tuấn* (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**); *Phạm Lý Nhật Duy, Trần Thiện Thu Uyên* (THPT Chuyên Lê Thánh Tông, **Quảng Nam**); *Trần Văn Tình, Phạm Trần Nha* (THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**); ☞

XÁC ĐỊNH MIỀN GIÁ TRỊ ...

(Tiếp theo trang 23)

$$P \geq 2(a^4+b^4+c^4)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$+\frac{4}{a^2+b^2+c^2}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)^2+\frac{4}{a^2+b^2+c^2}.$$

Theo Thí dụ 1 ta có $0<a^2+b^2+c^2 \leq 1$, ta đặt $t=a^2+b^2+c^2$ khi đó $0<t\leq 1$ và $P\geq 2t^2+\frac{4}{t}$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2+\frac{4}{t}$, $t\in(0;1]$ ta có:

$$f'(t)=4t-\frac{4}{t^2}=\frac{4(t^3-1)}{t^2}, f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Bảng biến thiên:

t	0		1
$f'(t)$		$-$	0
$f(t)$		$\searrow$	6

Suy ra: $\min\limits_{t\in(0;1]} f(t)=f(1)=6$

Vậy min $P=6$ đạt được khi $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

BÀI TẬP

1. Cho a, b là các số không âm thỏa mãn điều kiện $a^3+b^3=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P=a+b$.

2. Cho x, y là các số không âm thỏa mãn điều kiện $x^4+y^4=1$. Tìm GTNN của biểu thức:
$$P=x^3+y^3+3(x+y)(xy-1)+1.$$

3. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $1\leq x\leq y\leq 4$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức
$$P=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}.$$

4. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $0\leq x\leq y\leq 5$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức:
$$P=x^2+y^2-2(x-y+xy)+8.$$

5. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2\leq 3xy$. Tìm GTNN của biểu thức:
$$P=\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}-\frac{15}{4}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

☞ *Phan Văn Phát* (THPT Chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**); *Nguyễn Phụng Nguyên* (THPT Chuyên Hạ Long, **Quảng Ninh**); *Võ Thúc Khánh Huyền, Lê Hồng Minh* (THPT Chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**); *Huỳnh Gia Bảo* (THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, **Sóc Trăng**); *Giang Chí Dần* (THPT Chuyên Sơn La, **Sơn La**); *Phạm Nguyễn Đức Anh, Nguyễn Thị Kiều Trang, Trần Thị Thanh Tươi* (THPT Chuyên Thái Bình, **Thái Bình**); *Lê Anh Tuấn, Nguyễn Hoàng Nam, Lư Thương Thương* (THPT Chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); *Mạc Trần Thiên Sơn, Nguyễn Duy Khang* (THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa, **TP. Hồ Chí Minh**); *Nguyễn Thị Xuân Hương* (THPT Chuyên Tiền Giang, **Tiền Giang**); *Nguyễn Duy Tiến* (THPT Chuyên Tuyên Quang, **Tuyên Quang**); *Đỗ Minh Hiệp* (THPT Chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**); *Phạm Tiến Trường, Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Minh* (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**); *Thịnh Thanh Bình, Đỗ Xuân Long, Trương Trần Minh Trí* (THPT Chuyên KHTN, **ĐHQG Hà Nội**); *Vũ Thế Việt, Phạm Anh Tuấn, Trần Minh Nguyên* (PTNK, **ĐHQG TP. Hồ Chí Minh**); *Trương Đình Nghĩa, Phạm Xuân Quý, Nguyễn Thị Thanh Loan* (THPT Chuyên, **ĐHSP Hà Nội**); *Trần Tiến Mạnh, Nguyễn Đình Chiến Thắng, Lê Đình Hiếu* (THPT Chuyên, **ĐH Vinh**).

3. Tuyển chọn học sinh tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi Olympic Toán học Quốc tế năm 2018 (IMO 2018)

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành và kết quả kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT môn Toán, Bộ GD&ĐT quyết định triệu tập học sinh *Phạm Nam Khánh* (lớp 12, Trường THPT Chuyên Amsterdam Hà Nội, thành viên đội tuyển học sinh Việt Nam dự thi IMO 2017) và 48 học sinh đạt từ 21,5 điểm trở lên trong kỳ thi HSG QG để tham dự kỳ thi chọn học sinh dự thi IMO 2018, được tổ chức vào cuối tháng 3 này tại Hà Nội.

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÀN

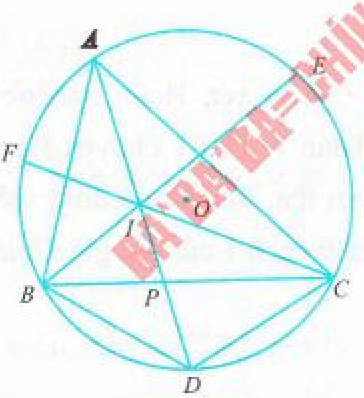
BÀI TOÁN 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ cắt (O) lần lượt tại D, E, F ($D \neq A; E \neq B; F \neq C$). Chứng minh rằng:*

$$AD + BE + CF > AB + BC + CA.$$

LỜI GIẢI.

ĐỊNH HƯỚNG 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Sử dụng BĐT tam giác giữa các đoạn IA, IB, IC, $DI = DB = DC$, $EI = EC = EA$, $FI = FA = FB$ với các cạnh của ΔABC.

Cách giải **1.** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có kết quả quen thuộc



$DI = DB = DC \Rightarrow$
$2DI = DB + DC > BC.$

Tương tự

$2EI > CA, 2FI > AB.$

Mặt khác:

$$IA + IB > AB, IB + IC > BC, IC + IA > CA.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2(DI + IA + EI + IB + FI + IC) > 2(AB + BC + CA).$$

$$\Rightarrow AD + BE + CF > AB + BC + CA. \quad \square$$

ĐỊNH HƯỚNG 2. Ta tìm bất đẳng thức giữa độ dài đoạn thẳng AD với các cạnh ΔABC bằng cách tạo ra hai tam giác bằng nhau và sử dụng bất đẳng thức tam giác. Sử dụng phép tương tự cho các đoạn thẳng BE, CF.

Cách giải 2. Trên tia đối của các tia CA lấy điểm G sao cho $CG = AB$. Lại có $BD = CD$, $\widehat{ABD} = \widehat{GCD}$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp) nên $\Delta ABD = \Delta GCD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = GD$, suy ra

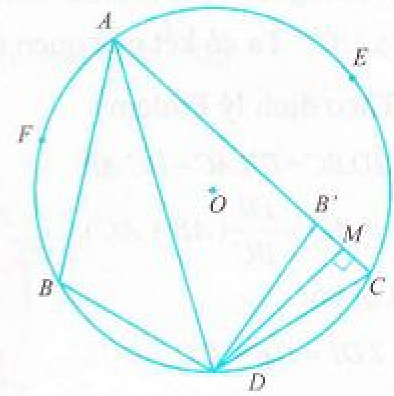
$$2AD = AD + GD > AG = AC + AB$$

Tương tự $2BE > BC + BA$, $2CF > CA + CB$. Do đó:

$$AD + BE + CF > AB + BC + CA.$$

ĐỊNH HƯỚNG 3. Tìm bất đẳng thức giữa AD với các cạnh của ΔABC bằng cách tạo ra hai tam giác bằng nhau rồi chứng minh độ dài AD lớn hơn độ dài đoạn thẳng trung gian có liên quan tới cạnh của ΔABC.

Cách giải **3.**



• Nếu $AB = AC$ thì do $BD = DC$ nên AD là đường kính suy ra

$AD > AB, AD > AC$

$$\Rightarrow AD > \frac{AB + AC}{2}.$$

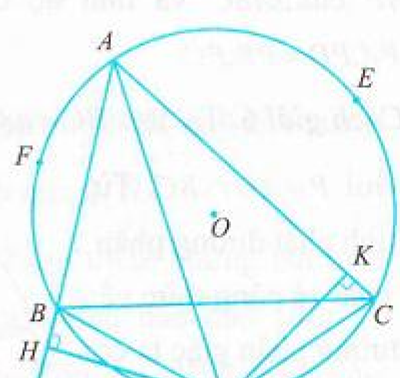
• Nếu $AB < AC$, khi đó tồn tại điểm B' trên đoạn AC sao cho $AB' = AB \Rightarrow \Delta AB'D = \Delta ABD (c.g.c) \Rightarrow DB' = DB = DC.$

Lấy M là trung điểm của CB' thì $DM \perp B'C$ suy ra $AD > AM = \dfrac{AB' + AC}{2} = \dfrac{AB + AC}{2}.$

Tương tự $BE > \dfrac{BC + BA}{2}$ và $CF > \dfrac{CA + CB}{2}.$

$$\Rightarrow AD + BE + CF > AB + BC + CA. \quad \square$$

ĐỊNH HƯỚNG 4. Chứng minh độ dài AD lớn hơn độ dài hai đoạn thẳng trung gian có liên quan tới các cạnh của ΔABC.



Cách giải **4.**

• Nếu $AB = AC$, theo lời giải 3 thì

$$2AD > AB + AC.$$

• Nếu $AB < AC$ thì kẻ $DH \perp AB, DK \perp AC$, mà ta có

$$DB = DC,\ \widehat{DBH} = \widehat{DCK}$$

(tứ giác $ABDC$ nội tiếp) nên

$$\Delta DBH = \Delta DCK \Rightarrow BH = CK.$$

Ta có: $AD > AH$ và $AD > AK$ nên

$$2AD > AH + AK = AB + BH + AC - CK = AB + AC.$$

Tương tự $2BE > BC + BA, 2CF > CA + CB.$

$$\Rightarrow AD + BE + CF > AB + BC + CA.$$ ❒

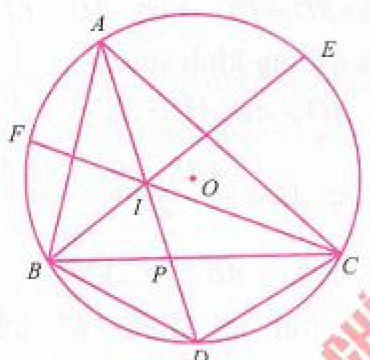
ĐỊNH HƯỚNG 5. Sử dụng định lý Ptolemy để tìm mối quan hệ giữa độ dài các đoạn thẳng AD và DI (I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC) rồi sử dụng bất đẳng thức giữa $DI = DB = DC$ với các cạnh ΔABC.

***Cách giải* 5.** Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Ta có kết quả quen thuộc $DI = DB = DC$.

Theo định lý Ptolemy

$$AD.BC = DB.AC + DC.AB$$

$$\Rightarrow AD = \frac{DI}{BC}(AB + AC).$$



Lại có:

$$2DI = DB + DC > BC,$$

suy ra

$$\frac{DI}{BC} > \frac{1}{2} \Rightarrow AD > \frac{AB + AC}{2}.$$

Tương tự $BE > \dfrac{BC + BA}{2}, CF > \dfrac{CA + CB}{2}$. Suy ra

$$AD + BE + CF > AB + BC + CA.$$ ❒

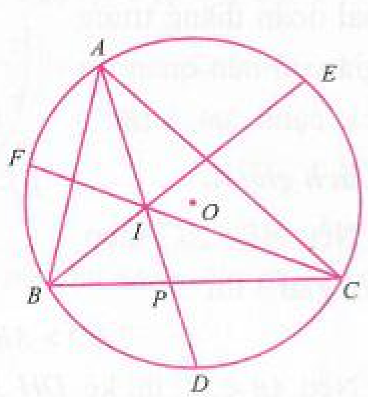
ĐỊNH HƯỚNG 6. Tính độ dài AD theo các cạnh của ΔABC bằng cách tính độ dài đường phân giác AP của ΔABC và tính độ dài PD theo hệ thức $PA.PD = PB.PC$.

***Cách giải* 6.** Ta đặt: $BC = a, CA = b, AB = b.$

Gọi $P = AD \cap BC$. Từ tính chất đường phân giác và công thức về đường phân giác ta có:

$$PB = \frac{ca}{b+c}, PC = \frac{ab}{b+c}$$

và



$$AP = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$$ mà $PA.PD = PB.PC$

(do $\Delta APB \backsim \Delta CPD$) nên

$$PD = \frac{PB.PC}{PA} = \frac{a^2\sqrt{bc}}{(b+c)\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}$$

$$\Rightarrow AD = AP + PD = \frac{\sqrt{bc}[(b+c)^2 - a^2 + a^2]}{(b+c)\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}$$

$$= \frac{\sqrt{bc}(b+c)}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}.$$

Ta chứng minh $\dfrac{\sqrt{bc}(b+c)}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}} > \dfrac{b+c}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{bc} > \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)} \Leftrightarrow 4bc > (b+c)^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (b-c)^2 > 0 \Leftrightarrow (a+b-c)(a-b+c) > 0$$ (đúng)

Vậy $AD > \dfrac{b+c}{2}$. Tương tự $BE > \dfrac{c+a}{2}, CF > \dfrac{a+b}{2}$.

Do đó $AD + BE + CF > a + b + c.$ ❒

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

➤***Nhận xét.*** Hoan nghênh bạn *Bùi Văn Quyến*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên và một bạn không ghi tên, địa chỉ đã đóng góp một cách giải tương tự như cách 1 của tác giả *Thái Nhật Phượng*.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn thử sức và gửi lời giải Bài toán 12 sau đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 30.4.2018.

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC có BC < BA, đường phân giác trong BE và đường trung tuyến BD (E, D thuộc AC). Qua C kẻ đường vuông góc với BE tại F, cắt BD tại G. Chứng minh rằng: GE // BC.*

ĐẬU CÔNG NHO

(*GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An*)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở Tạp chí TH&TT số 487, T1.2018.

Bài 17 (*Iran 1998*). *Giả sử a, b là các số tự nhiên sao cho* $p=\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ *là số nguyên tố. Giá trị lớn nhất có thể có của p là bao nhiêu?*

Lời giải. Nếu b là lẻ thì $2a-b$ là lẻ và vì vậy $\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ không thể là số nguyên. Vậy b là số chẵn (dễ thấy $b\neq 0$). Có hai trường hợp:

$$b=4k,\ k\in\mathbb{N}^* \text{ và } b=2m,\ m \text{ lẻ}.$$

• TH1: $b=4k$. Ta có: $p=k\sqrt{\frac{2a-4k}{2a+4k}}=k\sqrt{\frac{a-2k}{a+2k}}$

$$\Rightarrow\left(\frac{p}{k}\right)^2=\frac{a-2k}{a+2k}\Rightarrow p^2a+2p^2k=k^2a-2k^3$$

$$\Rightarrow a(k^2-p^2)=2k(k^2+p^2)\Rightarrow a=\frac{2k(k^2+p^2)}{k^2-p^2}.$$

+ Xét trường hợp $p|k$ hay $k=mp,\ m\in\mathbb{N}^*$. Ta có: $a=\frac{2mp(m^2p^2+p^2)}{m^2p^2-p^2}=\frac{2mp(m^2+1)}{m^2-1}.$

Do $(m,m^2-1)=1$ và $a\in\mathbb{N}$ nên ta phải có:

$$\frac{2mp(m^2+1)}{m^2-1}=2p\left(1+\frac{2}{m^2-1}\right)\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{4p}{m^2-1}\in\mathbb{N}.$$

- Khi m chẵn ta phải có

$$(m^2-1)|p\Rightarrow p=m^2-1=(m-1)(m+1).$$

Vì vậy $m-1=1$, ta tìm được $(p,m)=(3,2)$.

- Khi m lẻ ta phải có $\frac{m^2-1}{4}|p$, suy ra:

$$\frac{m^2-1}{2}=p \text{ hoặc } \frac{m^2-1}{4}=p.$$

Trường hợp $\frac{m^2-1}{2}=p$ vô nghiệm, trường hợp $\frac{m^2-1}{4}=p$ cho ta $(p,m)=(2,3)$.

Với $(p,m)=(2,3)$ ta được $(a,b,p)=(15,24,2)$.

Với $(p,m)=(3,2)$ ta được $(a,b,p)=(20,24,3)$.

+ Xét trường hợp $p\nmid k$. Do $(k,k^2-p^2)=1$ nên

$$\frac{2(k^2+p^2)}{k^2-p^2}=2+\frac{4p^2}{k^2-p^2}\in\mathbb{N}$$

và do $(p^2,k^2-p^2)=1$ nên $\frac{4}{k^2-p^2}\in\mathbb{N}$. Tuy nhiên các phương trình $k^2-p^2=1,\ k^2-p^2=2,\ k^2-p^2=4$ không có nghiệm (k,p) với p dương.

• TH2: $b=2m$ với m lẻ. Ta có:

$$p=\frac{m}{2}=\sqrt{\frac{a-m}{a+m}}\Rightarrow\left(\frac{2p}{k}\right)^2=\frac{a-m}{a+m}$$

$$\Rightarrow 4p^2a+2p^2m=am^2-m^3$$

$$\Rightarrow a(m^2-4p^2)=m(4p^2+m^2)\Rightarrow a=\frac{m(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$$

với $n=2p$. Do $(m,2)=1$ nên ta có hai trường hợp: $(m,n)=1$ và $p\,|\,m$.

Với $(m, n) = 1$ ta có

$$\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} = 1 + \frac{2n^2}{m^2-n^2} \in \mathbb{N}.$$

Lại do $(n^2, m^2-n^2) = 1$ nên $\frac{2}{m^2-n^2} \in \mathbb{N}$. Suy ra $m^2 - n^2 = 1, m^2 - n^2 = 2$. Các phương trình này vô nghiệm.

Với $p \mid m$. Đặt $m = pk$. Ta có:

$$a = \frac{pk(p^2k^2+4p^2)}{p^2(k^2-4)} = \frac{pk(k^2+4)}{k^2-4}.$$

Do k lẻ nên $(k(4+k^2), k^2-4) = 1$ nên $\frac{p}{k^2-4} \in \mathbb{N}$ hay $(k^2-4) \mid p$. Do p nguyên tố nên $k^2 - 4 = p$.

Kết luận: Vậy giá trị lớn nhất của p là 5.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy thử giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.4.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 20. *Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p, q, r) sao cho $p \mid q^r + 1$, $q \mid r^p + 1$, $r \mid p^q + 1$.*

TRẦN HỮU NAM (*Hà Nội*)

PROBLEMS ...

(*Tiếp theo trang 25*)

a) Show that the system always has a positive solution.

b) Solve the system when $a = 2, b = 5, c = 10$.

Bài T8/489. Suppose that a, b, c are the lengths of 3 sides of a triangle. Prove that

$$\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{bc}{b^2+c^2} + \frac{ca}{c^2+a^2} \ge \frac{1}{2} + \frac{2r}{R}$$

with R, r respectively are the inradius and the circumradius of the triangle.

Bài T9/489. For any integer n which is greater than 3, let

$$P = \sqrt[60]{3}.\sqrt[120]{4}\ldots\sqrt[(n^3-n)]{n-1}.$$

Show that

$$\sqrt[(24n^2+24n)]{3^{n^2+n-12}} \le P < \sqrt[8]{3}.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Bài T10/489. Find natural numbers n so that $4^m + 2^n + 29$ cannot be a perfect square for any natural number m.

Bài T11/489. The sequence (a_n) is given as follows: $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \frac{(a_n - 1)^2}{2 - a_n}$, $n = 1, 2, \ldots.$

a) Find $\lim a_n$.

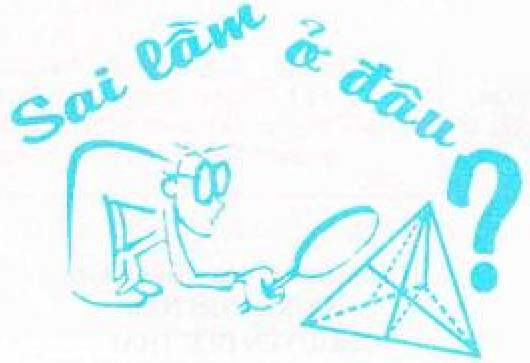
b) Show that $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ for $n = 1, 2, \ldots.$

Bài T12/489. Given a triangle ABC inscribed in a cirle (O). A point P varies on (O) but is different from A, B, and C. Choose M, N respectively on PB, PC so that $AMPN$ is a parallelogram.

a) Prove that there exists a fixed point which is equidistant from M and N.

b) Prove that the Euler line of AMN always goes through a fixed point.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)



GIẢI ĐÁP: *A CÓ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT KHÔNG !*

(Đề đăng trên TH&TT số 485, tháng 11 năm 2017)

Phân tích. 1) Sai lầm của bạn *Diệu Linh* ở chỗ khi đặt $t = x^2 - 4x + 3$ đã không đặt điều kiện cho t. Tức là bạn đã sai khi chuyển Bài toán từ biến x sang biến t mà không tìm miền xác định của t, đã mặc nhiên coi miền xác định của t là $\mathbb{R}$, dẫn đến biểu thức A theo biến t không có tập xác định chính xác, nên việc việc kết luận A không có GTNN là sai.

Vậy điều cần chú ý trong bài toán này là cần tránh sai lầm trong việc sử dụng định nghĩa GTNN của hàm số trên tập (khoảng) D: Nếu $f(x) \geq m, \forall x \in D$ và $f(x) = m$ có nghiệm trên D thì $f(x)$ đạt GTNN là m trên D, còn nếu $f(x) \geq m, \forall x \in D$ và $f(x) = m$ **không** có nghiệm trên D thì **không** kết luận được $f(x)$ **không** đạt GTNN trên D.

Lời giải đúng.

Ta có $A = (x-1)(x-3)(x^2-4x+7)$

$$= (x^2-4x+3)(x^2-4x+7).$$

Đặt $t = x^2 - 4x + 3$, ta có $t = (x-2)^2 - 1 \geq -1, \forall x$.

Khi đó $A = t(t+4) = t^2 + 4t$ với $t \geq -1$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 4t$.

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	-4	↗ -3	↗ $+\infty$

Suy ra $A \geq -3, \forall t \geq -1$, đẳng thức xảy ra khi $t = -1$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy biểu thức A đạt GTNN là -3 khi $x = 2$.

Nhận xét. Tất cả các bạn gửi về đều tìm đúng sai lầm. Hoan nghênh các bạn sau có những phân tích đúng và gửi bài đến Tòa soạn sớm: **Thái Bình:** *Bùi Sang Minh*, 11A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy. **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị Trấn Chờ, Yên Phong. **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Đinh Bảo Anh*, 11A1, THPT Hồ Xuân Hương, số 1, Nguyễn Quý Đức, Q. Thanh Xuân. **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Mai Anh*, 9D, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh; *Tăng Văn Minh Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương. **Hưng Yên:** *Bùi Thị Thùy Trang, Nguyễn Tiến Thành, Nguyễn Minh Khoa, Đoàn Phú Thành, Nguyễn Thị Hoa, Trần Thị Phương Linh, Chu Ngọc Chiến, Nguyễn Thành Trung*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10 Toán 2; *Cao Thị Linh, Bùi Nhật Minh, Phan Trần Hướng*, 12 Toán 1, *Lê Cẩm Thanh Hà*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Phương Trang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên. **Vĩnh Long:** *Lê Nữ Hoàng Kim*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Cần Thơ:** *Trần Danh Nhân*, 8A5, THCS Đoàn Thị Điểm, Q. Ninh Kiều, TP. Cần Thơ. **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

KIHIVI

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM !

Bài toán. *Giải bất phương trình*

$$x^2 + 2\sqrt{x^2.\log_2 y} + \log_2 y + 1 \leq 0.$$

Lời giải. ĐK: $x^2.\log_2 y \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$.

BPT tương đương với

$$\left(\sqrt{x^2}\right)^2 + 2\sqrt{x^2}.\sqrt{\log_2 y} + \left(\sqrt{\log_2 y}\right)^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{\log_2 y}\right)^2 + 1 \leq 0.$$

Vì $y \geq 1$ nên $\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{\log_2 y}\right)^2 + 1 > 0$. Do đó BPT đã cho vô nghiệm.

Theo bạn lời giải trên đúng hay sai? Cách giải của bạn thế nào!

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 489 (3.2018)

Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

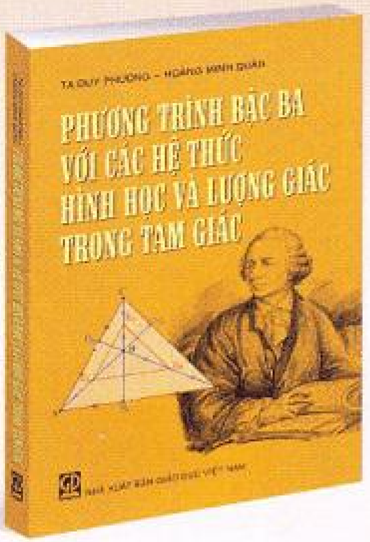
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách mới

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC VÀ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

của tác giả PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG và Thầy giáo HOÀNG MINH QUÂN

Sách dày 448 trang, khổ 16x24cm, giá bìa 80.000 đồng.



Nội dung cơ bản của cuốn sách dựa trên kết quả: Các yếu tố của tam giác (ba cạnh, ba đường cao, bán kính của ba đường tròn bàng tiếp, các hàm số lượng giác của ba góc,...) *có thể được coi là ba nghiệm của một phương trình bậc ba* với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản là p, R, r, trong đó p là nửa chu vi, còn R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và vận dụng các bất đẳng thức quen thuộc, sách trình bày khoảng 600 hệ thức có liên quan đến các yếu tố hình học và lượng giác trong tam giác. Qua cuốn sách chúng ta sẽ thấy mối quan hệ hữu cơ giữa Đại số (phương trình và hàm số bậc ba) với Hình học và Lượng giác (các hệ thức trong tam giác). Đây chính là điểm mới và khác biệt của cuốn sách này so với các sách đã có về hệ thức trong tam giác.

Cuốn sách gồm năm chương.

Chương 1 tập hợp những kiến thức cơ bản về tam giác và các công thức lượng giác, các bất đẳng thức đại số quan trọng cần thiết cho các chương sau.

Chương 2 trình bày các tính chất của hàm số và phương trình bậc ba, trong đó đặc biệt lưu ý đến tính chất nghiệm của phương trình bậc ba.

Chương 3 và **Chương 4** chỉ ra rằng, các yếu tố hình học và lượng giác của tam giác (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp, sin, côsin của các góc, ...) chính là nghiệm của các phương trình bậc ba với các hệ số chứa ba yếu tố cơ bản của tam giác (tức là ba yếu tố p, R, r). Và như là các hệ quả, nhờ sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba và các bất đẳng thức đại số như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunyakovsky, bất đẳng thức Schwarz, . . . các tác giả đã đưa ra và chứng minh khoảng 600 hệ thức hình học và lượng giác trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức là mới hoặc chỉ mới gặp trên các tạp chí và còn ít được biết đến trong các sách hiện nay. Ngoài các bất đẳng thức mới hoặc còn ít được phổ biến, nhiều bài thi đại học, thi học sinh giỏi, thi Olympic của các nước, nhiều hệ thức hình học và lượng giác quen biết trong tam giác cũng được chứng minh lại trong Chương 3 và Chương 4 theo cách mới, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, mà ít dùng đến cách biến đổi lượng giác hoặc những cách chứng minh thông thường.

Chương 5 (Phụ lục) tập hợp một số mục dưới dạng các chuyên đề liên quan đến phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức trong tam giác.

Cũng cần lưu ý thêm rằng, từ các hệ thức nêu trong cuốn sách này, ta có thể suy ra khá nhiều hệ thức khác nữa, chưa được khai thác trong cuốn sách. Đây là một gợi ý tốt để bạn đọc có thể tìm cách chứng minh mới cho các hệ thức cũ hoặc tìm ra các hệ thức mới. Ngoài ra, cách chứng minh mới hoặc cải biên những hệ thức đã có còn có thể giúp các thầy cô giáo trong việc thiết kế các bài tập và đề thi mới.

Cuốn sách không chỉ có ích cho các học sinh, các bạn yêu toán, các thầy cô dạy toán phổ thông, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho các sinh viên và giảng viên đại học, cao đẳng ngành toán, cũng như các phụ huynh mong muốn giúp con em mình học tốt môn toán.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax - phát hành: 024.35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT3M8
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2018
Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng