NGUYỄN BẢO VƯƠNG

# 524 CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO

## ĐƯỢC TRÍCH HƠN 300 ĐỀ THI THỬ THPT

### Năm 2017 - 2018

Có đáp án chi tiết

# TOÁN


TỦ SÁCH LUYỆN THI

# Mục lục

## Chương 1. Lượng giác

**Câu 1:** Hàm số $y=\tan x+\cot x+\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$ không xác định trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $\left(k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. **B.** $\left(\pi+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$. **C.** $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$. **D.** $\left(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ta chọn $k=3\to x\neq\dfrac{3\pi}{2}$ nhưng điểm $\dfrac{3\pi}{2}$ thuộc khoảng $\left(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi\right)$.

Vậy hàm số không xác định trong khoảng $\left(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi\right)$.

**Câu 2:** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\sqrt{5+2\cot^2 x-\sin x}+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$.

**A.** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi và chỉ khi các điều kiện sau thỏa mãn đồng thời.

$5+2\cot^2 x-\sin x\geq 0$, $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ xác định và $\cot x$ xác định.

□ Ta có

$$\begin{cases}5+2\cot^2 x-\sin x\geq 0\\ 1-\sin 2x\geq 0\Rightarrow 5-\sin x\geq 0\end{cases}\Rightarrow 5+2\cot^2 x-\sin x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ xác định $\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\neq 0\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}+x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

□ $\cot x$ xác đinh $\Leftrightarrow \sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Do đó hàm số xác đinh $\begin{cases}x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Câu 3:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

**A.** $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Viết lại đáp án B $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$.

Kết quả được đáp án A là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.
Xét đáp án **D.**

- Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x\ge 0 \Leftrightarrow 2x\in[k2\pi;\pi+k2\pi] \Leftrightarrow x\in\left[k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$.

$\longrightarrow D=\left[k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]\ (k\in\mathbb{Z})$..

- Chọn $x=\frac{\pi}{4}\in$ D nhưng $-x=-\frac{\pi}{4}\notin$ D. Vậy $y=\sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ.

**Câu 4:** Số giờ có ánh sáng của một thành phố $A$ trong ngày thứ $t$ của năm $2017$ được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|+10$, với $t\in Z$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố $A$ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?.

**A.** 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Vì $\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|\le 1 \Rightarrow y=4\sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)+10\le 14\right|$.

Ngày có ánh nắng mặt trời chiếu nhiều nhất

$\Leftrightarrow y=14 \Leftrightarrow \sin\left|\frac{\pi}{178}(t-60)\right|=1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=149+356k$.

Mà $0<t\le 365 \Leftrightarrow 0<149+356k\le 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356}<k\le\frac{54}{89}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$.

Với $k=0 \Rightarrow t=149$ tức rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0<t\le 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

**Câu 5:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h$ (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm $t$ (giờ) trong một ngày bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{7=8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

**A.** $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

**Lời giải.**

**Chọn B.**

Mực nước của kênh cao nhất khi $h$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi$ với $0<t\le 24$ và $k\in\mathbb{Z}$.

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án $B$ thỏa mãn.

Vì với $t=14$ thì $\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=2\pi$ (đúng với $k=1\in\mathbb{Z}$).

**Câu 6:** Hàm số $y=4\cot^2 2x-\dfrac{\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

**A.** $0$. **B.** $3-2\sqrt{3}$. **C.** $2-2\sqrt{2}$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\cot 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$

Từ đó suy ra $y=3\cot^2 2x-\dfrac{2\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{2\tan x}=3\cot^2 2x-2\sqrt{3}\cot 2x$

$=\left(\sqrt{3}\cot 2x-1\right)^2-1\ge -1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $\min y=-1\Leftrightarrow \cot 2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 7:** Hàm số $y=2\cos x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là

**A.** $5-2\sqrt{2}$. **B.** $5+2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y=2\cos x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 2\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 2\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$.

Ta có $y^2\le\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\Leftrightarrow y^2\le 5+2\sqrt{2}$.

Do đó ta có $-\sqrt{5+2\sqrt{2}}\le y\le\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

**Câu 8:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x$ là

**A.** $\dfrac{9}{8}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x\Leftrightarrow y=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$.

$\Leftrightarrow y=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow y=1-\dfrac{1}{2}\left[\left(\sin 2x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]\Leftrightarrow y=\dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{2}\left(\sin 2x-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{9}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sin 2x=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 9:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}$ là

**A.** $0$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt[4]{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}\ge 2\sqrt{\sin x\cos x\sqrt{\sin x\cos x}}$

$\Leftrightarrow y\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}}\ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2x=0$.

**Câu 10:** Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y=\sqrt{1+\tan x.\tan y}+\sqrt{1+\tan y.\tan z}+\sqrt{1+\tan z.\tan x}$$

**A.** $y_{\max}=1+2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max}=3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max}=\sqrt{4}$. **D.** $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x+y+z=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-z\Rightarrow \tan(x+y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\Leftrightarrow\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{1}{\tan z}$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z=1-\tan x.\tan y \Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y=1$

Ta thấy $\tan x.\tan z$; $\tan y.\tan z$; $\tan x.\tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có:

$1.\sqrt{1+\tan x.\tan y}+1.\sqrt{1+\tan y.\tan z}+1.\sqrt{1+\tan z.\tan x}\le$

$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{1.\tan x.\tan z+1.\tan y.\tan z+1.\tan x.\tan y}=$

$=\sqrt{3}\sqrt{3+(\tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y)}=2\sqrt{3}$

Vậy $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

**Câu 11:** Phương trình $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$ tương đương với phương trình.

**A.** $\cot x=\sqrt{3}$. **B.** $\cot 3x=\sqrt{3}$. **C.** $\tan x=\sqrt{3}$. **D.** $\tan 3x=\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ne 0\\ \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\ne 0\end{cases}$

pt $\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin(2x+\pi)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{2\sin 2x}{\cos(2x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=3\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{4\sin 2x}{1-2\cos 2x}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{\sin x-2\sin x\cos 2x-4\sin 2x\cos x}{\cos x\left(1-2\cos 2x\right)}=3\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x-\sin 3x+\sin x-2\sin 3x-2\sin x}{\cos x-\cos x-\cos 3x}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow 3\tan 3x=3\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan 3x=\sqrt{3}$$

**Câu 12:** Phương trình $2\cot 2x-3\cot 3x=\tan 2x$ có nghiệm là:

**A.** $x=k\frac{\pi}{3}$. **B.** $x=k\pi$. **C.** $x=k2\pi$. **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Điều kiện của phương trình $\sin 2x\ne 0,\sin 3x\ne 0,\cos 2x\ne 0$.

Phương trình tương đương $2\cot 2x-\tan 2x=3\cot 3x$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\begin{cases}\sin 2x\ne 0\\ \cos 2x\ne 0\\ \sin 3x\ne 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\sin 2x.\cos 2x}=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\Leftrightarrow \frac{1+3\cos 4x}{\sin 4x}=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+3\sin 3x\cos 4x=3\cos 3x\sin 4x\Leftrightarrow \sin 3x=3\sin x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=3\sin x\Leftrightarrow \sin x=0$$

$\Leftrightarrow x=k\pi$ ( loại do $\sin 2x\ne 0$ )

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Câu 13:** Giải phương trình $\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x$.

**A.** $\left[\begin{array}{l}x=k3\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k3\pi\\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k3\pi\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=k3\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k3\pi\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=k3\pi\\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k3\pi\end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\cos\frac{4x}{3}=\cos^2 x\Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3}=\frac{1+\cos 2x}{2}\Leftrightarrow 2\cos 2.\frac{2x}{3}=1+\cos 3.\frac{2x}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[2\cos^2\frac{2x}{3}-1\right]=1+4\cos^3\frac{2x}{3}-3\cos\frac{2x}{3}\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{2x}{3}-4\cos^2\frac{2x}{3}-3\cos\frac{2x}{3}+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{2x}{3}=1\\ \cos\frac{2x}{3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\frac{2x}{3}=k2\pi\\ \frac{2x}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ \frac{2x}{3}=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k3\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{4}+k3\pi\\ x=\pm\frac{5\pi}{4}+k3\pi\end{array}\right..$$

**Câu 14:** Giải phương trình $\cos\dfrac{4x}{3}=\cos^2 x$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k3\pi \\ x=\pm\dfrac{5\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{5\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\dfrac{5\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$cos\frac{4x}{3}=cos^2x \Leftrightarrow cos\frac{4x}{3}=\frac{1+cos2x}{2} \Leftrightarrow 2cos2.\frac{2x}{3}=1+cos3.\frac{2x}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[2cos^2\frac{2x}{3}-1\right]=1+4cos^3\frac{2x}{3}-3cos\frac{2x}{3} \Leftrightarrow 4cos^3\frac{2x}{3}-4cos^2\frac{2x}{3}-3cos\frac{2x}{3}+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos\dfrac{2x}{3}=1 \\ cos\dfrac{2x}{3}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3}=k2\pi \\ \dfrac{2x}{3}=\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ \dfrac{2x}{3}=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k3\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k3\pi \\ x=\pm\dfrac{5\pi}{4}+k3\pi \end{array}\right. .$$

**Câu 15:** Hàm số $y=\dfrac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

**A.** 1.. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y=\dfrac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3} \Leftrightarrow (y-2)\sin 2x-(y+1)\cos 2x=-3y$..

Điều kiện để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (y-2)^2+(y+1)^2\ge(-3y)^2 \Leftrightarrow 7y^2+2y-5\le 0$.

$\Leftrightarrow -1\le y\le\dfrac{5}{7}\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{-1;0\}$ nên có $2$ giá trị nguyên.

**Câu 16:** Phương trình $\cos x+\sin x=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$ có nghiệm là:

**A.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi \\ x=k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi \\ x=k\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

ĐK $\sin 2x\neq 1$

$$\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}\Leftrightarrow \cos x+\sin x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=-\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}\Leftrightarrow \left(\cos x+\sin x\right)\left(1+\frac{1}{\sin x-\cos x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \sin x-\cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

**Câu 17:** Phương trình $2\sin 3x-\dfrac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\dfrac{1}{\cos x}$ có nghiệm là:

**A.** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$. **C.** $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$. **D.** $x=-\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐK $\sin 2x\neq 0$

$$2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow 2\left(\sin 3x-\cos 3x\right)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)-\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x+\cos x\right)\left[3-4\left(1-\sin x\cos x\right)\right]=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[6-8(1-\sin x\cos x)-\frac{1}{\sin x\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left[-2+8\sin x\cos x-\frac{1}{\sin x\cos x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[-2\sin x\cos x+8(\sin x\cos x)^2-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[2\sin^2 2x-\sin 2x-1\right]=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin 2x=1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. Không có đáp án nào đúng.

**Câu 18:** Để phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=a|\sin 2x|$ có nghiệm, điều kiện thích hợp cho tham số a là:

**A.** $0\le a<\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{8}<a<\frac{3}{8}$. **C.** $a<\frac{1}{4}$. **D.** $a\ge\frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a|\sin 2x|\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=a|\sin 2x|$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x-a|\sin 2x|=0\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+4a|\sin 2x|-4=0$$

Đặt $|\sin 2x|=t\left(t\in[0;1]\right)$. Khi đó ta có phương trình $3t^2+4t-4=0\ (1)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $(1)$ có nghiệm $t\in[0;1]\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4a^2+12>0\\ f(0)=-1<0\\ f(1)=4a-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow a\ge\frac{1}{4}$.

**Câu 19:** Cho phương trình: $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$, trong đó $m$ là tham số thực. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là:.

**A.** $-2\le m\le -\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\le m\le 1$. **C.** $1\le m\le\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\le m\le 1$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Đặt $\sin x + \cos x = t\left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$. Khi đó ta có phương trình

$$\frac{t^2-1}{2} - t + m = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2m - 1 = 0\,(*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $(*)$ có nghiệm

$$t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2 - 2m > 0 \\ -\sqrt{2} < \dfrac{s}{2} = 1 < \sqrt{2} \\ f\left(-\sqrt{2}\right) = 1 + 2\sqrt{2} + 2m \ge 0 \\ f\left(\sqrt{2}\right) = 1 - 2\sqrt{2} + 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ m \ge -\dfrac{1}{2} + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \sqrt{2} \le m \le 1.$$

**Câu 20:** Cho phương trình: $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 8\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 4\sin^2 4x = m$ trong đó m là tham số. Để phương trình là vô nghiệm, thì các giá trị thích hợp của m là:

**A.** $m < -4 \text{ hay } m > 0$. **B.** $-\dfrac{3}{2} \le m \le -1$. **C.** $-2 \le m \le -\dfrac{3}{2}$. **D.** $m < -2 \text{ hay } m > 0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Phương trình đã cho trở thành

$$4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) - 8\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - 16\sin^2 2x\cos^2 2x = m$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - 16\sin^2 2x\left(1 - \sin^2 2x\right) - 4 = m$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^4 2x - 12\sin^2 2x - 4 - m = 0$$

Đặt $\sin^2 2x = t\left(t \in [0;1]\right)$. Khi đó phương trình trở thành $16t^2 - 12t - m - 4 = 0\,(*)$

$(*)$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

TH1: $\Delta' = 100 + 16m < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{25}{4}$.

TH2: $\begin{cases} \Delta' = 100 + 16m \ge 0 \\ f(0)f(1) = m(m+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{25}{4} \le m < -4 \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị cần tìm $m < -4 \text{ hay } m > 0$. Không có đáp án đúng.

**Câu 21:** Cho phương trình: $\dfrac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=2m.\tan 2x$, trong đó m là tham số. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là:

**A.** $m\le -\dfrac{1}{8}$ *hay* $m\ge \dfrac{1}{8}$. **B.** $m<-\dfrac{1}{8}$ *hay* $m>\dfrac{1}{8}$. **C.** $m\le -\dfrac{1}{2}$ *hay* $m\ge \dfrac{1}{2}$. **D.** $m\le -1$ *hay* $m\ge 1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

ĐK: $\cos 2x\ne 0$

$$\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=2m.\tan 2x\Leftrightarrow \frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\cos 2x}=2m\tan 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}{\cos 2x}=2m\tan 2x\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=2m\sin 2x\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+8m\sin 2x-4=0.$$

Đặt $\sin 2x=t\left(t\in(-1;1)\right)$.Khi đó phương trình trở thành: $3t^2+8mt-4=0(*)$

Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in(-1;1)$

TH1: $(*)$ có 1 nghiệm $t\in(-1;1)\Leftrightarrow f(1)f(-1)<0\Leftrightarrow (8m-1)(-8m-1)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{1}{8}\\ m<-\frac{1}{8}\end{array}\right.$

.

TH2: $(*)$ có 2 nghiệm $t\in(-1;1)\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=16m^2+12>0\\ f(1)=8m-1>0\\ f(-1)=-8m-1>0\\ -1<\frac{S}{2}=-\frac{4m}{3}<1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{8}\\ m<-\frac{1}{8}\\ -\frac{3}{4}<m<\frac{3}{4}\end{cases}\quad (VN).$

**Câu 22:** Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\cos 4x+\dfrac{4\tan x}{1+\tan^2 x}=m$. Để phương trình vô nghiệm, các giá trị của tham số m phải thỏa mãn điều kiện:.

**A.** $-\dfrac{5}{2}\le m\le 0$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $1<m\le \dfrac{3}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{5}{2}$ *hay* $m>\dfrac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

ĐK: $\cos x\ne 0.$

$$\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{4\tan x}{1+\tan^2 x}=m\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x+\frac{4\tan x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=m\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x+4\sin x\cos x=m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 2x\right)+2\sin 2x=m\Leftrightarrow \sin^2 2x-2\sin 2x+m-\frac{1}{2}=0$$

Đặt $\sin 2x=t\left(t\in[-1;1]\right)$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2-2t+m-\dfrac{1}{2}=0(*)$

Phương trình $(*)$ vô nghiệm:

TH1: $\Delta' = \frac{3}{2} - m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

TH2: $\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ f(-1)f(1) = \left(m + \frac{5}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{5}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{5}{2}$.

**Câu 23:** Để phương trình: $4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ có nghiệm, tham số $a$ phải thỏa điều kiện:

**A.** $-1 \le a \le 1$. **B.** $-2 \le a \le 2$. **C.** $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}$. **D.** $-3 \le a \le 3$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình tương đương $2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{2}\right] = a^2 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right] = a^2 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right] = a^2 - 2$

$\Leftrightarrow 4.\cos 2x.\sin\frac{\pi}{6} = a^2 - 2$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{a^2 - 2}{2}$

Để phương trìnhcó nghiệm thì $-1 \le \frac{a^2 - 2}{2} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le a \le 2$.

**Câu 24:** Để phương trình $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}$ có nghiệm, tham số $a$ phải thỏa mãn điều kiện:

**A.** $|a| \ge 1$. **B.** $|a| \ge 2$. **C.** $|a| \ge 3$. **D.** $|a| > 1, a \ne \pm\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Điều kiện của phương trình $\cos x \ne 0, \cos 2x \ne 0, \tan^2 x \ne 1$

Phương trình tương đương $\frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{a^2 - 2}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{1 - \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{a^2 - 2}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$$\Leftrightarrow a^2 = \tan^2 x + (a^2 - 2)(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow (a^2 - 1)\tan^2 x = 2$$

• Nếu $a^2-1\le 0 \Leftrightarrow |a|\le 1 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

• Nếu $|a|>1:(1)\Leftrightarrow \tan^2 x=\dfrac{2}{a^2-1}$. Phương trình có nghiệm khi $\dfrac{2}{a^2-1}\ne 1\Leftrightarrow |a|\ne\sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $|a|>1, a\ne\pm\sqrt{3}$

**Câu 25:** Tìm m để phương trình $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

**A.** $-1<m\le 1$. **B.** $0<m\le\dfrac{1}{2}$. **C.** $-1<m\le-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m\le 1$.

**Lời giải**

**Chọn** **C.**

Ta có $(\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x+1)(\cos 2x-m\cos x)=m(1-\cos x)(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos 2x-m\cos x=m-m\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos 2x=m\end{array}\right.$

Với $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$ : không có nghiệm $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$.

Với $\cos 2x=m\Leftrightarrow\cos^2 x=\dfrac{m+1}{2}$.

Trên $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$, phương trình $\cos x=a$ có duy nhất 1 nghiệm với $a\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

Do đó, YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \dfrac{-1}{2}\le\sqrt{\dfrac{m+1}{2}}\le 1\\ \dfrac{-1}{2}\le-\sqrt{\dfrac{m+1}{2}}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \sqrt{\dfrac{m+1}{2}}\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ m\le-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\le-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 26:** Tìm m để phương trình $\cos 2x-(2m-1)\cos x-m+1=0$ có đúng 2 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

**A.** $-1<m\le 0$. **B.** $0\le m<1$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $-1<m<1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\cos 2x-(2m-1)\cos x-m+1=0\ (1)\Leftrightarrow 2cos^2x-(2m-1)cosx-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}cosx=-\dfrac{1}{2}.\\ \cos x=m\end{array}\right.$

Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $0\le cosx\le 1$. Do đó $cosx=-\dfrac{1}{2}$ (loại).

Vậy để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi $0\le cosx<1\Leftrightarrow 0\le m<1$.

**Câu 27:** Tìm m để phương trình $2\sin x+m\cos x=1-m$ có nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

**A.** $-3\le m\le 1$. **B.** $-2\le m\le 6$. **C.** $1\le m\le 3$ **D.** $-1\le m\le 3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}$, để $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $t\in[-1;1]$.

$$\text{pt}\Leftrightarrow 2\frac{2t}{1+t^2}+m\frac{1-t^2}{1+t^2}=1-m\Leftrightarrow 4t+m-mt^2=1-m+(1-m)t^2\Leftrightarrow t^2-4t+1=2m$$

Vậy để yêu cầu bài toán xảy ra thì $f(t)=t^2-4t+1$ trên $[-1;1]$

Ta có $f'(t)=2t-4; f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

| $t$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | - | |
| $f(t)$ | $6$ | $\searrow$ | $-2$ |

Vậy để yêu cầu bài toán xảy ra thì $-2\le 2m\le 6\Leftrightarrow -1\le m\le 3$

**Câu 28:** Gọi $x_0$ là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x-\cos x=2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$. **B.** $x_0\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$. **C.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$. **D.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1$.

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$.

Đặt $t=x-\frac{\pi}{6}\longrightarrow x=t+\frac{\pi}{6}\to 2x=2t+\frac{\pi}{3}\to 2x+\frac{\pi}{6}=2t+\frac{\pi}{2}$.

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)+\sin t=1\Leftrightarrow \cos 2t+\sin t=1$.

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t-\sin t=0\Leftrightarrow \sin t(2\sin t-1)=0$.

- $\sin t=0\Leftrightarrow t=k\pi\longrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\to x=\frac{\pi}{6}$.
- $\sin t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6}+k2\pi\longrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\to x=\frac{\pi}{3}. \\ t=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\longrightarrow x=\pi+k2\pi>0\Leftrightarrow k>-\frac{1}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\min}=0\to x=\pi. \end{array}\right.$.

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x=\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right]$.

**Câu 29:** Phương trình $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x}$ có nghiệm là:.

**A.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+2k\pi\\x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{24}+k\pi\\x=\frac{5\pi}{24}+k\pi\end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0\\4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x.\cos^2 2x\,(*)\end{cases}$$

$$(*)\Leftrightarrow 4\frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=1+8\sin 2x\frac{1+\cos 4x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(1+\sin 6x)=1+4\sin 2x+4\sin 2x\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 2+2\sin 6x=1+4\sin 2x+2(\sin 6x-\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\,(1)\\x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\,(2)\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

+ $k$ chẵn thì $(1)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+2n\pi\Rightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1>0$

+ $k$ lẻ thì $(1)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+(2n-1)\pi=-\frac{11\pi}{12}+2n\pi\Rightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1<0$

+ $k$ chẵn thì $(2)\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+2n\pi\Rightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-1<0$

+ $k$ lẻ thì $(2)\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+(2n-1)\pi=-\frac{7\pi}{12}+2n\pi\Rightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1>0$

Vậy tập nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+2k\pi\\x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\end{array}\right.$.

**Câu 30:** Phương trình: $4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1$ có các nghiệm là:

**A.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

$4\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos(2x+\pi)\right)+\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x\right)+\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow \sin x+\sin 3x+\sin(-x)+\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

**Câu 31:** Giải phương trình $\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}$.

**A.** $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. **B.** $x=\frac{k\pi}{2}$.

**C.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $4\cos^2 2x+\sin^2 2x=3\cos^2 2x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\cos^2 2x+\sin^2 2x}\Leftrightarrow\frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2+4\sin^2 x.\cos^2 x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{4}=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)}{4\left(\cos^4 x-\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sin^{10}x+\cos^{10}x=1\ \ (1).$$

Ta có $\begin{cases}\sin^{10}x\le\sin^2 x\\ \cos^{10}x\le\cos^2 x\end{cases}\Rightarrow \sin^{10}x+\cos^{10}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Do đó

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^{10}x=\sin^2 x\\ \cos^{10}x=\cos^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin^2 x=1\\ \sin^2 x=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos^2 x=1\\ \cos^2 x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin^2 x=0\\ \cos^2 x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}.$$

**Câu 32:** Cho phương trình: $\left(\sin x+\frac{\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\frac{3+\cos 2x}{5}$. Các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0;2\pi)$ là:

**A.** $\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Điều kiện: $1+2\sin 2x\neq 0$

Phương trình tương đương $5\left(\frac{\sin x+2\sin x\sin 2x+\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x+\cos x-\cos 3x+\sin 3x+\cos 3x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{(1+2\sin 2x)\cos x}{1+2\sin 2x}\right)=3+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 5\cos x=3+\cos 2x \quad \Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=2\ (loai)\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$$

Vì $x\in(0;2\pi)\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},x=\frac{5\pi}{3}$ (thỏa điều kiện).

## Chương 2. Tổ hợp

**Câu 33:** Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho $9$ mà mỗi số $2011$ chữ số và trong đó có ít nhất hai chữ số $9$.

**A.** $\frac{9^{2011}-2019.9^{2010}+8}{9}$ **B.** $\frac{9^{2011}-2.9^{2010}+8}{9}$ **C.** $\frac{9^{2011}-9^{2010}+8}{9}$ **D.** $\frac{9^{2011}-19.9^{2010}+8}{9}$

***Lời giải***

**Chọn A.**

Đặt $X$ là các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán.

$A=\{$ các số tự nhiên không vượt quá 2011 chữ số và chia hết cho 9$\}$

Với mỗi số thuộc A có $m$ chữ số $(m\le 2008)$ thì ta có thể bổ sung thêm $2011-m$ số $0$ vào phía trước thì số có được không đổi khi chia cho 9. Do đó ta xét các số thuộc A có dạng $\overline{a_1a_2...a_{2011}}$; $a_i\in\{0,1,2,3,...,9\}$

$A_0=\{a\in A\,|$ mà trong $a$ không có chữ số 9$\}$

$A_1=\{a\in A\,|$ mà trong $a$ có đúng 1 chữ số 9$\}$

- Ta thấy tập A có $1+\dfrac{9^{2011}-1}{9}$ phần tử

- Tính số phần tử của $A_0$

Với $x\in A_0\Rightarrow x=\overline{a_1...a_{2011}}; a_i\in\{0,1,2,...,8\}$ $i=\overline{1,2010}$ và $a_{2011}=9-r$ với $r\in[1;9], r\equiv\sum_{i=1}^{2010}a_i$. Từ đó ta suy ra $A_0$ có $9^{2010}$ phần tử

- Tính số phần tử của $A_1$

Để lập số của thuộc tập $A_1$ ta thực hiện liên tiếp hai bước sau

**Bước 1**: Lập một dãy gồm $2010$ chữ số thuộc tập $\{0,1,2...,8\}$ và tổng các chữ số chia hết cho 9. Số các dãy là $9^{2009}$

**Bước 2:** Với mỗi dãy vừa lập trên, ta bổ sung số 9 vào một vị trí bất kì ở dãy trên, ta có 2010 các bổ sung số 9

Do đó $A_1$ có $2010.9^{2009}$ phần tử.

Vậy số các số cần lập là: $1+\dfrac{9^{2011}-1}{9}-9^{2010}-2010.9^{2009}=\dfrac{9^{2011}-2019.9^{2010}+8}{9}$.

**Câu 34:** Từ các số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số đồng thời thỏa điều kiện: sáu số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 số sau một đơn vị.

**A.** 104 **B.** 106 **C.** 108 **D.** 112

***Lời giải***

**Chọn C.**

**Cách 1:** Gọi $x=\overline{a_1a_2...a_6}$, $a_i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ là số cần lập

Theo bài ra ta có: $a_1+a_2+a_3+1=a_4+a_5+a_6$ (1)

Mà $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\in\{1,2,3,4,5,6\}$ và đôi một khác nhau nên

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1+2+3+4+5+6=21$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $a_1 + a_2 + a_3 = 10$

Phương trình này có các bộ nghiệm là: $(a_1, a_2, a_3) = (1,3,6);\ (1,4,5);\ (2,3,5)$

Với mỗi bộ ta có $3!.3! = 36$ số.

Vậy có $3.36 = 108$ số cần lập.

**Cách 2:** Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số cần lập

Ta có: $\begin{cases} a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21 \\ a+b+c = d+e+f+1 \end{cases}$

$\Rightarrow a+b+c = 11$. Do $a, b, c \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Suy ra ta có các cặp sau: $(a,b,c) = (1,4,6);\ (2,3,6);\ (2,4,5)$

Với mỗi bộ như vậy ta có $3!$ cách chọn $a, b, c$ và $3!$ cách chọn $d, e, f$

Do đó có: $3.3!.3! = 108$ số thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 35:** Có $m$ nam và $n$ nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra $k$ người trong đó có ít nhất $a$ nam và ít nhất $b$ nữ ($k \le m, n; a+b < k; a, b \ge 1$) với $S_1$ là số cách chọn có ít hơn $a$ nam, $S_2$ là số cách chọn có ít hơn $b$ nữ.

**A.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - 2(S_1 + S_2)$.

**B.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $2C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

**C.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $3C_{m+n}^k - 2(S_1 + S_2)$.

**D.** Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Số cách chọn $k$ người trong $m+n$ người là: $C_{m+n}^k$.

*Số cách chọn có ít hơn $a$ nam là: $S_1 = \sum_{i=0}^{a-1} C_m^{a-i-1}.C_n^{k-a+i+1}$.

*Số cách chọn có ít hơn $b$ nữ là: $S_2 = \sum_{i=0}^{b-1} C_n^{b-i-1}.C_m^{k-b+i+1}$.

Số cách chọn thoả mãn điều kiện bài toán là: $C_{m+n}^k - (S_1 + S_2)$.

**Câu 36:** Nếu một đa giác đều có $44$ đường chéo, thì số cạnh của đa giác là:

**A.** $11$. **B.** $10$. **C.** $9$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Cứ hai đỉnh của đa giác $n$ $(n \in \mathbb{N}, n \ge 3)$ đỉnh tạo thành một đoạn thẳng (bao gồm cả cạnh đa giác và đường chéo).

Khi đó số đường chéo là: $C_n^2 - n = 44 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!.2!} - n = 44$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 88 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 11 \\ n = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 11$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

**Câu 37:** Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đa giác có $n$ cạnh $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$.

Số đường chéo trong đa giác là: $C_n^2 - n$.

Ta có: $C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!.2!} = 3n \Leftrightarrow n(n-1) = 6n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 7$.

**Câu 38:** Cho đa giác đều $n$ đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Tìm $n$ biết rằng đa giác đã cho có $135$ đường chéo.

**A.** $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi $n$ đỉnh là $C_n^2$, trong đó có $n$ cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

+ Đa giác đã cho có $135$ đường chéo nên $C_n^2 - n = 135$.

+ Giải PT: $\dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = 135$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \Leftrightarrow (n-1)n - 2n = 270 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 18\ (nhan) \\ n = -15\ (loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 18$.

**Câu 39:** Trong mặt phẳng cho $n$ điểm, trong đó không có $3$ điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi diểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi $2$ trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau là bao nhiêu?

**A.** $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$. **B.** $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - 2\left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

**C.** $3C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - 2\left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$. **D.** $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n(C_{n-1}^2 - 1) + 5C_n^3\right]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có $C_{n-1}^2$ đường thẳng nên sẽ có $C_{n-1}^2$ đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

Do đó có $nC_{n-1}^2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có

$C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau).

Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại:

* Qua một điểm có $C^2_{n-1}=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ nên ta phải trừ đi $n\left(C^2_{n-1}-1\right)$ điểm.

* Qua $A_1,A_2,A_3$ có 3 đường thẳng cùng vuông góc với $A_4A_5$ và 3 đường thẳng này song song với nhau, nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi: $3C^3_n$.

* Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C^3_n$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n(C^2_{n-1}-1)+5C^3_n\right]$.

**Câu 40:** Cho đa giác đều $n$ đỉnh, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Tìm $n$ biết rằng đa giác đã cho có $135$ đường chéo

**A.** $n=15$. **B.** $n=27$. **C.** $n=8$. **D.** $n=18$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi $n$ đỉnh là $C^2_n$, trong đó có $n$ cạnh, suy ra số đường chéo là $C^2_n-n$.

+ Đa giác đã cho có $135$ đường chéo nên $C^2_n-n=135$.

+ Giải PT: $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}-n=135$, $(n\in\mathbb{N},n\geq 2)\Leftrightarrow(n-1)n-2n=270\Leftrightarrow n^2-3n-270=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=18(nhan)\\ n=-15(loai)\end{array}\right.\Leftrightarrow n=18$.

**Câu 41:** Giá trị của $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn đẳng thức $C^6_n+3C^7_n+3C^8_n+C^9_n=2C^8_{n+2}$ là

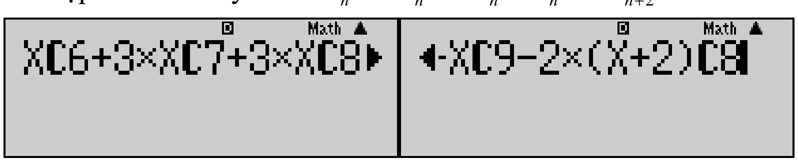
**A.** $n=18$. **B.** $n=16$. **C.** $n=15$. **D.** $n=14$.

**Lời giải**

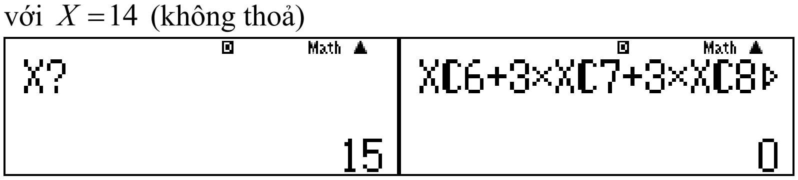
**Chọn C**

***PP sử dụng máy tính để chọn đáp số đúng (PP trắc nghiệm):***

+ Nhập PT vào máy tính: $C^6_n+3C^7_n+3C^8_n+C^9_n-2C^8_{n+2}=0$




+ Tính (CALC) lần lượt với $X=18$ (không thoả); với $X=16$ (không thoả); với $X=15$ (**thoả**), với $X=14$ (không thoả)




**Câu 42:** Cho đa giác đều $n$ đỉnh, $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 3$. Tìm $n$ biết rằng đa giác đã cho có $135$ đường chéo

**A.** $n = 15$. **B.** $n = 27$. **C.** $n = 8$. **D.** $n = 18$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

+ Tìm công thức tính số đường chéo: Số đoạn thẳng tạo bởi $n$ đỉnh là $C_n^2$, trong đó có $n$ cạnh, suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

+ Đa giác đã cho có $135$ đường chéo nên $C_n^2 - n = 135$.

+ Giải PT: $\dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = 135$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \Leftrightarrow (n-1)n - 2n = 270 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 270 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 18(nhan) \\ n = -15(loai) \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 18$.

**Câu 43:** Số hạng thứ 3 của khai triển $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$ không chứa $x$. Tìm $x$ biết rằng số hạng này bằng số hạng thứ hai của khai triển $\left(1 + x^3\right)^{30}$.

**A.** $-2$. **B.** $1$. **C.** $-1$. **D.** $2$.

**Lời giải.**

**Chọn D**

$\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.(2x)^{n-k}.\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k$.

Vì số hạng thứ ba của khai triển trên ứng với $k = 2$ nên số hạng thứ ba của khai triển là $C_n^2.2^{n-2}.x^{n-6}$.

Mà số hạng thứ ba của khai triển không chứa $x$ nên $n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$.

Số hạng thứ 2 của khai triển $\left(1 + x^3\right)^{30}$ là $C_{30}^1.x^3 = 30x^3$.

Khi đó ta có $C_6^2.2^4 = 30.x^3 \Leftrightarrow x = 2$.

**Câu 44:** Trong khai triển $(1+x)^n$ biết tổng các hệ số $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ..... + C_n^{n-1} = 126$. Hệ số của $x^3$ bằng

**A.** $15$. **B.** $21$. **C.** $35$. **D.** $20$.

**Lời giải.**

**Chọn C**

$(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k.x^k$.

Thay $x = 1$ vào khai triển ta được

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 1 + 126 + 1 = 128 \Leftrightarrow 2^n = 128 \Leftrightarrow n = 7$.

Hệ số của $x^3$ bằng $C_7^3 = 35$.

**Câu 45:** Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển $\left(\sqrt{10}+\sqrt[8]{3}\right)^{300}$ ?

**A.** $37$. **B.** $38$. **C.** $36$. **D.** $39$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

$\left(\sqrt{10}+\sqrt[8]{3}\right)^{300}=\sum\limits_{k=0}^{300}C_{300}^{k}\left(\sqrt{10}\right)^{300-k}.\left(\sqrt[8]{3}\right)^{k}$.

Các số hạng hữu tỉ sẽ thỏa mãn $\begin{cases}300-k\,⋮\,2\\ k\,⋮\,8\end{cases}\Leftrightarrow k\,⋮\,8$.

Từ $0$ đến $300$ có $38$ số chia hết cho $8$.

**Câu 46:** Cho khai triển $\left(1+2x\right)^{n}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm hệ số lớn nhất?

**A.** $1293600$. **B.** $126720$. **C.** $924$. **D.** $792$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(1+2x\right)^{n}$ là $C_n^k.2^k.x^k$, $0\le k\le n$, $k\in\mathbb{N}$. Vậy hệ số của số hạng chứa $x^k$ là $C_n^k.2^k\Rightarrow a_k=C_n^k.2^k$.

Khi đó, ta có

$a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096\Leftrightarrow C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=4096\Leftrightarrow\left(1+1\right)^n=4096\Leftrightarrow n=12$.

Dễ thấy $a_0$ và $a_n$ không phải hệ số lớn nhất. Giả sử $a_k$ $\left(0<k<n\right)$ là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0,\ a_1,a_2,...,a_n$.

Khi đó ta có

$$\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{12}^k.2^k\ge C_{12}^{k+1}.2^{k+1}\\ C_{12}^k.2^k\ge C_{12}^{k-1}.2^{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{12!}{k!.\left(12-k\right)!}\ge\dfrac{12!.2}{\left(k+1\right)!.\left(12-k-1\right)!}\\ \dfrac{12!}{k!.\left(12-k\right)!}\ge\dfrac{12!}{\left(k-1\right)!.\left(12-k+1\right)!}.\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{12-k}\ge\dfrac{2}{k+1}\\ \dfrac{2}{k}\ge\dfrac{1}{13-k}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k+1-2\left(12-k\right)\ge0\\ 26-3k\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge\dfrac{23}{3}\\ k\le\dfrac{26}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{23}{3}\le k\le\frac{26}{3}$$

Do $k\in\mathbb{N}\Rightarrow k=8$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8=C_{12}^8.2^8=126720$.

**Câu 47:** Cho khai triển $\left(1+2x\right)^{n}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và các hệ số thỏa mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+...+\frac{a_n}{2^n}=4096$. Tìm hệ số lớn nhất?

**A.** $1293600$. **B.** $126720$. **C.** $924$. **D.** $792$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Số hạng tổng quát trong khai triển $(1+2x)^n$ là $C_n^k.2^k.x^k$, $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$. Vậy hệ số của số hạng chứa $x^k$ là $C_n^k.2^k \Rightarrow a_k = C_n^k.2^k$.

Khi đó, ta có

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 4096$$

$$\Leftrightarrow (1+1)^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$$

Dễ thấy $a_0$ và $a_n$ không phải hệ số lớn nhất. Giả sử $a_k$ $(0 < k < n)$ là hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} a_k \ge a_{k+1} \\ a_k \ge a_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{12}^k.2^k \ge C_{12}^{k+1}.2^{k+1} \\ C_{12}^k.2^k \ge C_{12}^{k-1}.2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12!}{k!.(12-k)!} \ge \dfrac{12!.2}{(k+1)!.(12-k-1)!} \\ \dfrac{12!}{k!.(12-k)!} \ge \dfrac{12!}{(k-1)!.(12-k+1)!}.\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \\ \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{13-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+1-2(12-k) \ge 0 \\ 26-3k \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge \dfrac{23}{3} \\ k \le \dfrac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{23}{3} \le k \le \frac{26}{3}.$$

Do $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k = 8$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_8 = C_{12}^8.2^8 = 126720$.

**Câu 48:** Tính tổng $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$

**A.** $C_{2n}^n$. **B.** $C_{2n}^{n-1}$. **C.** $2C_{2n}^n$. **D.** $C_{2n-1}^{n-1}$

**Hướng dẫn giải:**

**Chọn A.**

Ta có: $(x+1)^n(1+x)^n = (x+1)^{2n}$.

Vế trái của hệ thức trên chính là:

$$\left(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + \ldots + C_n^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1x + \ldots + C_n^nx^n\right)$$

Và ta thấy hệ số của $x^n$ trong vế trái là

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$$

Còn hệ số của $x^n$ trong vế phải $(x+1)^{2n}$ là $C_{2n}^n$

Do đó $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

**Câu 49:** $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots.. + C_{2n}^{2n}$ bằng

**A.** $2^{n-2}$. **B.** $2^{n-1}$. **C.** $2^{2n-2}$. **D.** $2^{2n-1}$.

**Lời giải.**

**Chọn D**

Xét khai triển $\left(x+1\right)^{2n}=C_{2n}^{0}x^{2n}+C_{2n}^{1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2}x^{2n-2}+...+C_{2n}^{2n}$.

Thay $x=1$ vào khai triển ta được $2^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}+...+C_{2n}^{2n}$ $\quad(1)$.

Thay $x=-1$ vào khai triển ta được :

$0=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}+C_{2n}^{2}-...+C_{2n}^{2n}\Leftrightarrow C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+....C_{2n}^{2n-1}$ $\quad(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}+C_{2n}^{4}+.....+C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}$.

**Câu 50:** Giải bóng chuyền VTV Cup có $12$ đội tham gia trong đó có $9$ đội nước ngoài và $3$ đội củaViệt nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành $3$ bảng đấu $A,B,C$ mỗi bảng $4$ đội. Xác suất để $3$ đội Việt nam nằm ở $3$ bảng đấu là

**A.** $P=\dfrac{2C_{9}^{3}C_{6}^{3}}{C_{12}^{4}C_{8}^{4}}$. **B.** $P=\dfrac{6C_{9}^{3}C_{6}^{3}}{C_{12}^{4}C_{8}^{4}}$. **C.** $P=\dfrac{3C_{9}^{3}C_{6}^{3}}{C_{12}^{4}C_{8}^{4}}$. **D.** $P=\dfrac{C_{9}^{3}C_{6}^{3}}{C_{12}^{4}C_{8}^{4}}$

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right)=C_{12}^{4}.C_{8}^{4}.C_{4}^{4}.3!$.

*(bốc 4 đội từ 12 đội vào bảng A – bốc 4 đội từ 8 đội còn lại vào bảng B – bốc 4 đội từ 4 đội còn lại vào bảng C – hoán vị 3 bảng)*

Gọi $A$: “$3$ đội Việt Nam nằm ở $3$ bảng đấu”

Khi đó: $n\left(A\right)=C_{9}^{3}.C_{6}^{3}.C_{3}^{3}.3!.3!$.

*(bốc 3 đội NN từ 9 đội NN vào bảng A – bốc 3 đội NN từ 6 đội NN còn lại vào bảng B – bốc 3 đội NN từ 3 đội NN còn lại vào bảng C – hoán vị 3 bảng – bốc 1 đội VN vào mỗi vị trí còn lại của 3 bảng)*

Xác suất của biến cố $A$ là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{C_{9}^{3}.C_{6}^{3}.C_{3}^{3}.3!.3!}{C_{12}^{4}.C_{8}^{4}.C_{4}^{4}.3!}=\dfrac{6.C_{9}^{3}.C_{6}^{3}}{C_{12}^{4}.C_{8}^{4}}$.

**Câu 51:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có $4$ chữ số phân biệt. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$. Xác suất chọn được số lớn hơn $2500$ là

**A.** $P=\dfrac{13}{68}$. **B.** $P=\dfrac{55}{68}$. **C.** $P=\dfrac{68}{81}$. **D.** $P=\dfrac{13}{81}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số có $4$ chữ số có dạng: $\overline{abcd}$.

Số phần tử của không gian mẫu: $n\left(S\right)=9.9.8.7=4536$.

Gọi $A$: “ tập hợp các số tự nhiên có $4$ chữ số phân biệt và lớn hơn $2500$.”

**TH1.** $a>2$

Chọn $a$: có $7$ cách chọn.

Chọn $b$: có $9$ cách chọn.

Chọn $c$: có $8$ cách chọn.

Chọn $d$: có $7$ cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $7.9.8.7 = 3528$ (số).

**TH2.** $a = 2$, $b > 5$

Chọn $a$: có $1$ cách chọn.

Chọn $b$: có $4$ cách chọn.

Chọn $c$: có $8$ cách chọn.

Chọn $d$: có $7$ cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $1.4.8.7 = 224$ (số).

**TH3.** $a = 2$, $b = 5$, $\mathrm{c} > 0$

Chọn $a$: có $1$ cách chọn.

Chọn $b$: có $1$ cách chọn.

Chọn $c$: có $7$ cách chọn.

Chọn $d$: có $7$ cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $1.1.7.7 = 49$ (số).

**TH4.** $a = 2$, $b = 5$, $\mathrm{c} = 0$, $d > 0$

Chọn $a$: có $1$ cách chọn.

Chọn $b$: có $1$ cách chọn.

Chọn $c$: có $1$ cách chọn.

Chọn $d$: có $7$ cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $1.1.1.7 = 7$ (số).

Như vậy: $n\left(A\right) = 3528 + 224 + 49 + 7 = 3808$.

Suy ra: $P\left(A\right) = \dfrac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)} = \dfrac{3508}{4536} = \dfrac{68}{81}$.

**Câu 52:** Cho đa giác đều $12$ đỉnh. Chọn ngẫu nhiên $3$ đỉnh trong $12$ đỉnh của đa giác. Xác suất để $3$ đỉnh được chọn tạo thành tam giác đều là

**A.** $P = \dfrac{1}{55}$. **B.** $P = \dfrac{1}{220}$. **C.** $P = \dfrac{1}{4}$. **D.** $P = \dfrac{1}{14}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số phần tử không gian mẫu: $n\left(\Omega\right) = C_{12}^{3} = 220$.

*(chọn 3 đỉnh bất kì từ 12 đỉnh của đa giác ta được một tam giác)*

Gọi $A$: “3 đỉnh được chọn tạo thành tam giác đều ”.

*(Chia 12 đỉnh thành 3 phần. Mỗi phần gồm 4 đỉnh liên tiếp nhau. Mỗi đỉnh của tam giác đều ứng với một phần ở trên.Chỉ cần chọn 1 đỉnh thì 2 đỉnh còn lại xác định là duy nhất).*

Ta có: $n(A) = C_4^1 = 4$.

Khi đó: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{220} = \dfrac{1}{55}$.

**Câu 53:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$. Xác suất chọn được số lớn hơn 2500 là

**A.** $P = \dfrac{13}{68}$. **B.** $P = \dfrac{55}{68}$. **C.** $P = \dfrac{68}{81}$. **D.** $P = \dfrac{13}{81}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số có 4 chữ số có dạng: $\overline{abcd}$.

Số phần tử của không gian mẫu: $n(S) = 9.9.8.7 = 4536$.

Gọi $A$: “ tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt và lớn hơn 2500.”

**TH1.** $a > 2$

Chọn $a$: có 7 cách chọn.

Chọn $b$: có 9 cách chọn.

Chọn $c$: có 8 cách chọn.

Chọn $d$: có 7 cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $7.9.8.7 = 3528$ (số).

**TH2.** $a = 2$, $b > 5$

Chọn $a$: có 1 cách chọn.

Chọn $b$: có 4 cách chọn.

Chọn $c$: có 8 cách chọn.

Chọn $d$: có 7 cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $1.4.8.7 = 224$ (số).

**TH3.** $a = 2$, $b = 5$, $c > 0$

Chọn $a$: có 1 cách chọn.

Chọn $b$: có 1 cách chọn.

Chọn $c$: có 7 cách chọn.

Chọn $d$: có 7 cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $1.1.7.7 = 49$ (số).

**TH4.** $a = 2$, $b = 5$, $c = 0$, $d > 0$

Chọn $a$: có 1 cách chọn.

Chọn $b$: có 1 cách chọn.

Chọn $c$: có 1 cách chọn.

Chọn $d$: có 7 cách chọn.

Vậy trường hợp này có: $1.1.1.7 = 7$ (số).

Như vậy: $n(A) = 3528 + 224 + 49 + 7 = 3808$.

Suy ra: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3508}{4536} = \dfrac{68}{81}$.

**Câu 54:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt được lấy từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ $S$. Xác suất chọn được số chỉ chứa 3 số lẻ là

**A.** $P = \dfrac{16}{42}$. **B.** $P = \dfrac{16}{21}$. **C.** $P = \dfrac{10}{21}$. **D.** $P = \dfrac{23}{42}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$.

*(mỗi số tự nhiên $\overline{abcdef}$ thuộc $S$ là một chỉnh hợp chập 6 của 9- số phần tử của $S$ là số chỉnh hợp chập 6 của 9).*

Gọi $A$: "số được chọn chỉ chứa 3 số lẻ". Ta có: $n(A) = C_5^3.A_6^3.A_4^3 = 28800$.

*(bốc ra 3 số lẻ từ 5 số lẻ đã cho- chọn ra 3 vị trí từ 6 vị trí của số $\overline{abcdef}$ xếp thứ tự 3 số vừa chọn – bốc ra 3 số chẵn từ 4 số chẵn đã cho xếp thứ tự vào 3 vị trí còn lại của số $\overline{abcdef}$ )*

Khi đó: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{28800}{60480} = \dfrac{10}{21}$.

**Câu 55:** Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Gọi $P$ là xác suất để tổng số ghi trên 6 tấm thẻ ấy là một số lẻ. Khi đó $P$ bằng:

**A.** $\dfrac{100}{231}$. **B.** $\dfrac{115}{231}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{118}{231}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$n(\Omega) = C_{11}^6 = 462$. Gọi $A$:"tổng số ghi trên 6 tấm thẻ ấy là một số lẻ".

Từ 1 đến 11 có 6 số lẻ và 5 số chẵn. Để có tổng là một số lẻ ta có 3 trường hợp.

Trường hợp 1: Chọn được 1 thẻ mang số lẻ và 5 thẻ mang số chẵn có: $6.C_5^5 = 6$ cách.

Trường hợp 2: Chọn được $3$ thẻ mang số lẻ và $3$ thẻ mang số chẵn có: $C_6^3.C_5^3 = 200$ cách.

Trường hợp 2: Chọn được $5$ thẻ mang số lẻ và $1$ thẻ mang số chẵn có: $C_6^5.5 = 30$ cách.

Do đó $n(A) = 6 + 200 + 30 = 236$. Vậy $P(A) = \dfrac{236}{462} = \dfrac{118}{231}$.

**Câu 56:** Ba cầu thủ sút phạt đến 11m, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là $x$, $y$ và $0,6$ (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi ban là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

**A.** $P(C) = 0,452$. **B.** $P(C) = 0,435$. **C.** $P(C) = 0,4525$. **D.** $P(C) = 0,4245$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $A_i$ là biến cố "người thứ $i$ ghi bàn" với $i = 1,2,3$.

Ta có các $A_i$ độc lập với nhau và $P\left(A_1\right) = x,\ P\left(A_2\right) = y,\ P\left(A_3\right) = 0,6$.

Gọi A là biến cố: " Có ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn"

B: " Cả ba cầu thủ đều ghi bàn"

C: "Có đúng hai cầu thủ ghi bàn"

Ta có: $\overline{A} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3} \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{A_2}\right).P\left(\overline{A_3}\right) = 0,4(1-x)(1-y)$

Nên $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0,4(1-x)(1-y) = 0,976$

Suy ra $(1-x)(1-y) = \dfrac{3}{50} \Leftrightarrow xy - x - y = -\dfrac{47}{50}$ (1).

Tương tự: $B = A_1.A_2.A_3$, suy ra:

$P\left(B\right) = P\left(A_1\right).P\left(A_2\right).P\left(A_3\right) = 0,6xy = 0,336$ hay là $xy = \dfrac{14}{25}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} xy = \dfrac{14}{25} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, giải hệ này kết hợp với $x > y$ ta tìm được

$x = 0,8$ và $y = 0,7$.

Ta có: $C = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3}$

Nên $P(C) = (1-x)y.0,6 + x(1-y).0,6 + xy.0,4 = 0,452$.

**Câu 57:** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

**A.** $P(A) = 0,7124$. **B.** $P(A) = 0,7759$. **C.** $P(A) = 0,7336$. **D.** $P(A) = 0,783$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có xác suất để học sinh trả lời câu đúng là $\frac{1}{4}$ và xác suất trả lời câu sai là $\frac{3}{4}$.

Gọi $x$ là số câu trả lời đúng, khi đó số câu trả lời sai là $10-x$

Số điểm học sinh này đạt được là: $4x-2(10-x)=6x-20$

Nên học sinh này nhận điểm dưới 1 khi $6x-20<1 \Leftrightarrow x<\frac{21}{6}$

Mà $x$ nguyên nên $x$ nhận các giá trị: $0,1,2,3$.

Gọi $A_i$ ($i=0,1,2,3$) là biến cố: "Học sinh trả lời đúng $i$ câu"

A là biến cố: " Học sinh nhận điểm dưới 1"

Suy ra: $A=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3$ và $P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$

Mà: $P(A_i)=C_{10}^i.\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$ nên $P(A)=\sum_{i=0}^{3}C_{10}^i.\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}=0,7759$.

## Chương 3. Dãy số

**Câu 58:** Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0,1;0,01;0,001;0,0001;\ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

**A.** $u_n=\underbrace{0,00...01}_{n\text{ chữ số }0}$. **B.** $u_n=\underbrace{0,00...01}_{n-1\text{ chữ số }0}$. **C.** $u_n=\frac{1}{10^{n-1}}$. **D.** $u_n=\frac{1}{10^{n+1}}$.

**Hướng dẫn giải**

Chọn **A.**

Ta có:

Số hạng thứ 1 có 1 chữ số 0

Số hạng thứ 2 có 2 chữ số 0

Số hạng thứ 3 có 3 chữ số 0

……………………………

Suy ra $u_n$ có $n$ chữ số 0.

**Câu 59:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases}u_1=5\\u_{n+1}=u_n+n\end{cases}$.Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n=\frac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n=5+\frac{(n-1)n}{2}$.

**C.** $u_n=5+\frac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n=5+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

Chọn **B.**

Ta có $u_n = 5+1+2+3+...+n-1 = 5+\dfrac{n(n-1)}{2}$.

**Câu 60:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

**C.** $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 1+1^2+2^2+...+(n-1)^2 = 1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

**Câu 61:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n-1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 2+(n-1)^2$. **B.** $u_n = 2+n^2$. **C.** $u_n = 2+(n+1)^2$. **D.** $u_n = 2-(n-1)^2$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + 2n-3 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 2+1+3+5+...+(2n-3) = 2+(n-1)^2$.

**Câu 62:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2-\dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

**A.** $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có: $u_1 = -\dfrac{3}{2}; u_2 = -\dfrac{4}{3}; u_3 = -\dfrac{5}{4}; ...$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$.

**Câu 63:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

**A.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 \\ u_3 = u_2 - 2 \\ \ldots \\ u_n = u_{n-1} - 2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = \dfrac{1}{2} - 2 - 2 \ldots - 2 = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$.

**Câu 64:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 4; \ldots$

Dễ dàng dự đoán được $u_n = n$.

Thật vậy, ta chứng minh được $u_n = n \ (*)$ bằng phương pháp quy nạp như sau:

+ Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

+ Giả sử $(*)$ đúng với mọi $n = k \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$, ta có: $u_k = k$. Ta đi chứng minh $(*)$ cũng đúng với $n = k + 1$, tức là: $u_{k+1} = k + 1$

+ Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số $(u_n)$ ta có: $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$. Vậy $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

**Câu 65:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 2 - n$. **B.** $u_n$ không xác định.

**C.** $u_n = 1 - n$. **D.** $u_n = -n$ với mọi $n$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $u_2 = 0; u_3 = -1; u_4 = -2$ ,. Dễ dàng dự đoán được $u_n = 2 - n$.

**Câu 66:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

**C.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$.

Cộng hai vế ta được $u_n = 1 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = 1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

**Câu 67:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$. **C.** $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 3 \end{cases}$.

Cộng hai vế ta được $u_n = 2 + 1 + 3 + 5 + ... + (2n-3) = 2 + (n-1)^2$.

**Câu 68:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

**A.** $u_n = -\dfrac{n-1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $u_1 = -\dfrac{3}{2}; u_2 = -\dfrac{4}{3}; u_3 = -\dfrac{5}{4}; ...$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$.

**Câu 69:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

**A.** $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 \\ u_3 = u_2 - 2 \\ ... \\ u_n = u_{n-1} - 2 \end{cases}$.

Cộng hai vế ta được $u_n = \frac{1}{2} - 2 - 2 ... - 2 = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

**Câu 70:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

**A.** $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. **C.** $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. **D.** $u_n = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = \frac{u_1}{2} \\ u_3 = \frac{u_2}{2} \\ ... \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$.

Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = (-1).\frac{u_1.u_2.u_3...u_{n-1}}{\underbrace{2.2.2...2}_{n-1 \text{ lan}}} \Leftrightarrow u_n = (-1).\frac{1}{2^{n-1}} = (-1).\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

**Câu 71:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

**A.** $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ ... \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = 2.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$.

**Câu 72:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

**A.** $u_n = -2^{n-1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-1}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n = \dfrac{-1}{2^n}$. **D.** $u_n = 2^{n-2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ ... \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Nhân hai vế ta được $u_1.u_2.u_3...u_n = \dfrac{1}{2}.2^{n-1}.u_1.u_2...u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n-2}$.

**Câu 73:** Cho dãy số $(u_n)$ với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát $u_n$ của dãy số là số hạng nào dưới đây?

**A.** $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có: $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 4; ...$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = n$

Thật vậy, ta chứng minh được $u_n = n$ $(*)$ bằng phương pháp quy nạp như sau:

+ Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

+ Giả sử $(*)$ đúng với mọi $n = k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$, ta có: $u_k = k$. Ta đi chứng minh $(*)$ cũng đúng với $n = k + 1$, tức là: $u_{k+1} = k + 1$

+ Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số $(u_n)$ ta có: $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$. Vậy $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

**Câu 74:** Cho dãy số $(u_n)$ (un) có $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3}$. Khẳng định nào sau đây ***sai***?

**A.** Là cấp số cộng có $u_1 = \dfrac{1}{3}$; $d = \dfrac{2}{3}$.

**B.** Số hạng thứ n+1: $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)^2 - 1}{3}$.

**C.** Hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(2n+1)}{3}$.

**D.** Không phải là một cấp số cộng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)^2 - 1}{3} - \dfrac{2n^2 - 1}{3} = \dfrac{2(2n+1)}{3}$. Vậy dãy số trên không phải cấp số cộng.

**Câu 75:** Cho tam giác $ABC$ biết *3* góc của tam giác lập thành một cấp số cộng và có một góc bằng $25°$. Tìm *2* góc còn lại?

**A.** $65°, 90°$ **B.** $75°, 80°$. **C.** $60°, 95°$. **D.** $60°, 90°$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = 180 \Leftrightarrow 25 + 25 + d + 25 + 2d = 180 \Leftrightarrow d = 35$.

Vậy $u_2 = 60$; $u_3 = 90$.

**Câu 76:** Cho tứ giác $ABCD$ biết 4 góc của tứ giác lập thành một cấp số cộng và góc $A$ bằng 30º. Tìm các góc còn lại?

**A.** $75°, 120°, 65°$. **B.** $72°, 114°, 156°$. **C.** 70º; 110º; 150º. **D.** 80º; 110º; 135º.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360 \Leftrightarrow 30 + 30 + d + 30 + 2d + 30 + 3d = 360 \Leftrightarrow d = 40$.

Vậy $u_2 = 70$; $u_3 = 110$; $u_4 = 150$.

**Câu 77:** Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3$; $u_6 = 27$. Tìm $d$?

**A.** $d = 5$. **B.** $d = 7$. **C.** $d = 6$. **D.** $d = 8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $u_6 = 27 \Leftrightarrow u_1 + 5d = 27 \Leftrightarrow -3 + 5d = 27 \Leftrightarrow d = 6$.

**Câu 78:** Cho một cấp số cộng có $u_1 = \dfrac{1}{3}$; $u_8 = 26$ Tìm $d$?

**A.** $d = \dfrac{11}{3}$. **B.** $d = \dfrac{3}{11}$. **C.** $d = \dfrac{10}{3}$. **D.** $d = \dfrac{3}{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $u_8 = 26 \Leftrightarrow u_1 + 7d = 26 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} + 7d = 26 \Leftrightarrow d = \dfrac{11}{3}$.

**Câu 79:** Cho cấp số cộng $(u_n)$ có: $u_1 = -0,1;\ d = 0,1$. Số hạng thứ $7$ của cấp số cộng này là:

**A.** $1,6$. **B.** $6$. **C.** $0,5$. **D.** $0,6$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số hạng tổng quát của cấp số cộng $(u_n)$ là: $u_n = u_1 + (n-1).0,1 \Rightarrow u_7 = -0,1 + (7-1).0,1 = \dfrac{1}{2}$.

**Câu 80:** Cho một cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = 1$ và tổng $100$ số hạng đầu bằng $24850$. Tính $S = \dfrac{1}{u_1u_2} + \dfrac{1}{u_2u_3} + \ldots + \dfrac{1}{u_{49}u_{50}}$.

**A.** $S = \dfrac{9}{246}$. **B.** $S = \dfrac{4}{23}$. **C.** $S = 123$. **D.** $S = \dfrac{49}{246}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $d$ là công sai của cấp số đã cho

Ta có: $S_{100} = 50(2u_1 + 99d) = 24850 \Rightarrow d = \dfrac{497 - 2u_1}{99} = 5$

$$\Rightarrow 5S = \frac{5}{u_1u_2} + \frac{5}{u_2u_3} + \ldots + \frac{5}{u_{49}u_{50}}$$

$$= \frac{u_2 - u_1}{u_1u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2u_3} + \ldots + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49}u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_{48}} - \frac{1}{u_{49}} + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}}$$

$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + 49d} = \frac{245}{246}$$

$$\Rightarrow S = \frac{49}{246}.$$

**Câu 81:** Cho $a, b, c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đẳng thức nào sau đây là đúng?

**A.** $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$. **B.** $a^2 - c^2 = 2ab + 2bc - 2ac$.

**C.** $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc - 2ac$. **D.** $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc + 2ac$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$a, b, c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$b - a = c - b \Leftrightarrow (b-a)^2 = (c-b)^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2c^2 + 2ab - 2bc = 2ab + 2c(c-b)$$
$$= 2ab + 2c(b-a) = 2ab + 2bc - 2ac$$

**Câu 82:** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1=-1;\ q=\frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

**A.** Số hạng thứ $103$. **B.** Số hạng thứ $104$.
**C.** Số hạng thứ $105$. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow\frac{1}{10^{103}}=-1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}\Rightarrow n-1=103\Rightarrow n=104$.

**Câu 83:** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1=3;\ q=-2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

**A.** Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.
**C.** Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow 192=3.(-2)^{n-1}\Rightarrow(-2)^{n-1}=64\Rightarrow n-1=6\Rightarrow n=7$.

**Câu 84:** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1=3;\ q=\frac{-1}{2}$. Số 222 là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

**A.** Số hạng thứ 11. **B.** Số hạng thứ 12.
**C.** Số hạng thứ 9. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow 222=3.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=74$. Vậy $222$ không là số hạng của cấp số đã cho.

**Câu 85:** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1=-1;\ q=\frac{-1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

**A.** Số hạng thứ $103$. **B.** Số hạng thứ $104$.
**C.** Số hạng thứ $105$. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow\frac{1}{10^{103}}=-1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}\Rightarrow n-1=103\Rightarrow n=104$.

**Câu 86:** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1=3;\ q=-2$. Số $192$ là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

**A.** Số hạng thứ $5$. **B.** Số hạng thứ $6$.
**C.** Số hạng thứ $7$. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow 192=3.(-2)^{n-1}\Rightarrow(-2)^{n-1}=64\Rightarrow n-1=6\Rightarrow n=7$.

**Câu 87:** Cho cấp số nhân $(u_n)$ với $u_1 = 3;\ q = \frac{-1}{2}$. Số $222$ là số hạng thứ mấy của $(u_n)$?

**A.** Số hạng thứ $11$. **B.** Số hạng thứ $12$.
**C.** Số hạng thứ $9$. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow 222 = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 74$. Vậy $222$ không là số hạng của cấp số đã cho.

**Câu 88:** Cho dãy số $-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$. Chọn $b$ để dãy số đã cho lập thành cấp số nhân?

**A.** $b = -1$. **B.** $b = 1$.
**C.** $b = 2$. **D.** Không có giá trị nào của $b$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Dãy số đã cho lập thành cấp số nhân khi $\begin{cases} b \ge 0 \\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = -1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị nào của $b$.

## Chương 4. Giới hạn

**Câu 89:** Cho dãy $(x_k)$ được xác định như sau: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{k}{(k+1)!}$.

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ... + x_{2011}^n}$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $1 - \frac{1}{2012!}$. **D.** $1 + \frac{1}{2012!}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ nên $x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$.

Suy ra $x_k - x_{k+1} = \frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+1)!} < 0 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$.

Mà: $x_{2011} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + ... + x_{2011}^n} < \sqrt[n]{2011}x_{2011}$.

Mặt khác: $\lim x_{2011} = \lim \sqrt[n]{2011}x_{2011} = x_{2011} = 1 - \frac{1}{2012!}$.

Vậy $\lim u_n = 1 - \frac{1}{2012!}$.

**Câu 90:** Cho dãy số $(u_n)$ được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \end{cases}$. Tìm $\lim \frac{u_n^3}{n}$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta thấy $u_n > 0,\ \forall n$

Ta có: $u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \dfrac{3}{u_n^3} + \dfrac{1}{u_n^6}$ (1)

Suy ra: $u_n^3 > u_{n-1}^3 + 3 \Rightarrow u_n^3 > u_0^3 + 3n$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \dfrac{1}{u_0^3 + 3n} + \dfrac{1}{\left(u_0^3 + 3n\right)^2} < u_n^3 + 3 + \dfrac{1}{3n} + \dfrac{1}{9n^2}$.

Do đó: $u_n^3 < u_0^3 + 3n + \dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{9}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ (3)

Lại có: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} < 1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n} = 2 - \dfrac{1}{n} < 2$. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \le \sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}} < \sqrt{2n}$.

Nên: $u_0^3 + 3n < u_n^3 < u_0^3 + 3n + \dfrac{2}{9} + \dfrac{\sqrt{2n}}{3}$.

Hay $3 + \dfrac{u_0^3}{n} < \dfrac{u_n^3}{n} < 3 + \dfrac{u_0^3}{n} + \dfrac{2}{9n} + \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$.

Vậy $\lim\dfrac{u_n^3}{n} = 3$.

**Câu 91:** Cho $a,b \in \mathbb{N}^\star, (a,b) = 1; n \in \{ab+1, ab+2, ...\}$. Kí hiệu $r_n$ là số cặp số $(u,v) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ sao cho $n = au + bv$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{n} = \dfrac{1}{ab}$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{1}{ab}$. **D.** $ab-1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $\left[0;\dfrac{n-1}{n}\right]$ (1).

Gọi $(u_0, v_0)$ là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử $(u,v)$ là một nghiệm nguyên dương khác $(u_0, v_0)$ của (1).

Ta có $au_0 + bv_0 = n, au + bv = n$ suy ra $a(u-u_0) + b(v-v_0) = 0$ do đó tồn tại $k$ nguyên dương sao cho $u = u_0 + kb, v = v_0 - ka$. Do v là số nguyên dương nên $v_0 - ka \ge 1 \Leftrightarrow k \le \dfrac{v_0 - 1}{a}$. (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số $k$ nguyên dương cộng với 1. Do đó $r_n = \left[\dfrac{v_0-1}{a}\right] + 1 = \left[\dfrac{n}{ab} - \dfrac{u_0}{b} - \dfrac{1}{a}\right] + 1$.

Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau: $\dfrac{n}{ab} - \dfrac{u_0}{b} - \dfrac{1}{a} \le r_n \le \dfrac{n}{ab} - \dfrac{u_0}{b} - \dfrac{1}{a} + 1$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{1}{ab} - \dfrac{u_0}{nb} - \dfrac{1}{na} \le \dfrac{r_n}{n} \le \dfrac{1}{ab} - \dfrac{u_0}{nb} - \dfrac{1}{na} + \dfrac{1}{n}$.

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{n}=\dfrac{1}{ab}$.

**Câu 92:** Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ là:

**A.** Không tồn tại. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1:** $0\le\left|\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le 1\Leftrightarrow 0\le\left|x^2\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le x^2$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}=0$.

**Cách 2:** Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ + CACL + $x=10^{-9}$ $+n=10$ và so đáp án.

**Câu 93:** Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos 5x}{2x}$ là:

**A.** $-\infty$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1:** $0\le\left|\cos 5x\right|\le 1\Rightarrow 0\le\left|\dfrac{\cos 5x}{2x}\right|\le\dfrac{1}{\left|2x\right|},\forall x\ne 0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\left|2x\right|}=0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos 5x}{2x}=0$.

**Cách 2:** Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $\dfrac{\cos 5x}{2x}$ + CACL + $x=-10^9$ và so đáp án.

**Cách 3:** Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: chuyển chế độ Rad + $\lim\dfrac{\cos 5x}{2x}\Big|_{x\to-10^9}$ và so đáp án.

**Câu 94:** Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ là:

**A.** Không tồn tại. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1:** $0\le\left|\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le 1\Leftrightarrow 0\le\left|x^2\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le x^2$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{2}{nx} = 0$.

**Cách 2:** Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ + CACL + $x = 10^{-9}$ $+ n = 10$ và so đáp án.

**Câu 95:** Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\cos 5x}{2x}$ là:

**A.** $-\infty$. **B.** $0$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1:** $0 \le |\cos 5x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \left|\dfrac{\cos 5x}{2x}\right| \le \dfrac{1}{|2x|}, \forall x \ne 0$.

Mà $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{|2x|} = 0$ nên $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\cos 5x}{2x} = 0$.

**Cách 2:** Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $\dfrac{\cos 5x}{2x}$ + CACL + $x = -10^9$ và so đáp án.

**Cách 3:** Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: chuyển chế độ Rad + $\lim\dfrac{\cos 5x}{2x}\Big|_{x\to -10^9}$ và so đáp án.

**Câu 96:** Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, (a_0, b_0 \ne 0)$.

**A.** $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** Đáp án khác.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $A = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m})}$

- Nếu $m = n \Rightarrow A = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}} = \dfrac{a_0}{b_0}$.

- Nếu $m > n \Rightarrow A = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m})} = 0$

( Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

- Nếu $m<n$, ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n-m}(a_0+\dfrac{a_1}{x}+...+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{a_n}{x^n})}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+...+\dfrac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\dfrac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\ -\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}$.

**Câu 97:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}$ bằng:

**A.** $-\infty$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $+\infty$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2x^2+4}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}$.

Vì $-10\sin 2x+\cos 2x\le\sqrt{\left(10^2+1^2\right)\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)}=\sqrt{101}$ nên:

$0\le\left|\dfrac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}\right|\le\dfrac{\sqrt{101}}{2x^2+4}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{101}}{2x^2+4}=0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\sin 2x+\cos 2x}{2x^2+4}=0$.

**Câu 98:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & ,x\ne 0\wedge x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1$ hay $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)\ne f\left(0\right)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=0$.

**Câu 99:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2 & ,x\ge 1\\ \dfrac{2x^3}{1+x} & ,0\le x<1\\ x\sin x & ,x<0\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

**C.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$. **D.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0;1\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>1$ ta có hàm số $f\left(x\right)=x^2$ liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$. $\left(1\right)$

Với $0<x<1$ ta có hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3}{1+x}$ liên tục trên khoảng $\left(0;1\right)$. $\left(2\right)$

Với $x<0$ ta có $f\left(x\right)=x\sin x$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. $\left(3\right)$

Với $x=1$ ta có $f\left(1\right)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3}{1+x}=1$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=1=f\left(1\right)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^3}{1+x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x.\sin x\right)$ $=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2.\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=0$ suy ra $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=0=f\left(0\right)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$. $\left(4\right)$

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

**Câu 100:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & ,x\neq 0\wedge x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$ hay $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)\neq f\left(0\right)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=0$.

**Câu 101:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 & , x\ge 1 \\ \dfrac{2x^3}{1+x} & , 0\le x<1 \\ x\sin x \text{ , } x<0 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

**B.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

**C.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

**D.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0;1\right\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>1$ ta có hàm số $f\left(x\right)=x^2$ liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$. $\left(1\right)$

Với $0<x<1$ ta có hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3}{1+x}$ liên tục trên khoảng $\left(0;1\right)$. $\left(2\right)$

Với $x<0$ ta có $f\left(x\right)=x\sin x$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. $\left(3\right)$

Với $x=1$ ta có $f\left(1\right)=1$; $\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2=1$; $\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x^3}{1+x}=1$

Suy ra $\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=1=f\left(1\right)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=0$; $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^3}{1+x}=0$; $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x.\sin x\right)$ $=\lim\limits_{x\to0^-}x^2.\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=0$ suy ra $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=0=f\left(0\right)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$. $\left(4\right)$

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

## Chương 5. Đạo hàm

**Câu 102:** Tìm giới hạn sau $E=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{4-2x+x^2}-\sqrt[3]{4+2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$.

**A.** $\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$.

**B.** $-\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$.

**C.** $-\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

**D.** $1$.

**Lời giải:**

**Chọn B**

Xét hai hàm số $f(x)=\sqrt[3]{4-2x+x^2}-\sqrt[3]{4+2x+x^2}$

$g(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}$

Ta có: $E=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{2}}{3}$.

**Câu 103:** Nếu $y=\sin\dfrac{x}{2}$ thì $y^{(n)}$ bằng:

**A.** $\dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**C.** $2^n\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\pi\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$y'=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$y''=\dfrac{1}{2^2}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2^2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+2.\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$y'''=\dfrac{1}{2^3}\cos\left(\dfrac{x}{2}+3.\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2^3}\sin\left(\dfrac{x}{2}+3.\dfrac{\pi}{2}\right)$.

…

$y^{(n)}=\dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\pi\right)$.

**Câu 104:** Cho $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$ và $g(x)=3\sin^2 x.\cos^2 x$. Tổng $f'(x)+g'(x)$ bằng biểu thức nào sau đây?

**A.** $6(\sin^5 x+\cos^5 x+\sin x.\cos x)$. **B.** $6(\sin^5 x-\cos^5 x-\sin x.\cos x)$.

**C.** 6. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$f'(x)=6\sin^5 x.\cos x+6\cos^5 x.(-\sin x)=6\sin^5 x.\cos x-6\cos^5 x.\sin x$

$g'(x)=\left(\dfrac{3}{4}.\sin^2 2x\right)'=\dfrac{3}{2}\sin 2x.2.\cos 2x$

Suy ra:

$f'(x)+g'(x)=6.\sin x.\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+6\sin x.\cos x.(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow -6\sin x.\cos x.(\cos^2 x-\sin^2 x)+6\sin x.\cos x.(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$

**Câu 105:** Nếu $y=\sin\dfrac{x}{2}$ thì $y^{(n)}$ bằng:

**A.** $\dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**C.** $2^n\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\dfrac{1}{2^n}\sin\left(\dfrac{x}{2}+n\pi\right)$.

**Lời giải.**

**Chọn A**

Chứng minh bằng quy nạp $y^{(n)}=\frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)$ $(1)$

Với $n=1$ ta có $y'=\left(\sin\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

Giả sử $(1)$ đúng với $n=k,\quad k\in\mathbb{N}^*$ tức là ta có $y^{(k)}=\frac{1}{2^k}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)$ $(1)$

Chứng minh $(1)$ đúng với $n=k+1$ tức là cần chứng minh $y^{(k+1)}=\frac{1}{2^{k+1}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ $(2)$

Thật vậy, ta có

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\frac{1}{2^k}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=\frac{1}{2^k}.\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2^{k+1}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

**Câu 106:** Tính đạo hàm của hàm số sau $y=\sqrt{\sqrt{x^2+1}+2x-1}$

**A.** $y'=\frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+2x-1\right)}}$.

**B.** $y'=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+2x-1\right)}}$.

**C.** $y'=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+2x-1\right)}}$.

**D.** $y'=\frac{x+2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+2x-1\right)}}$.

**Lời giải:**

**Chọn D**

Ta có: $y'=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+2}{2\sqrt{\sqrt{x^2+1}+2x-1}}=\dfrac{x+2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+2x-1\right)}}$.

**Câu 107:** Biết với một điểm M tùy ý thuộc $(\mathrm{C}):y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$, tiếp tuyến tại M cắt $(\mathrm{C})$ tại hai điểm A,B tạo với $\mathrm{I}(-2;-1)$ một tam giác có diện tích không đổi, diện tích tam giác đó là?

**A.** 2 (đvdt ).
**B.** 4 (đvdt ).
**C.** 5 (đvdt ).
**D.** 7 (đvdt ).

**Lời giải**

**Chọn A**

$y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\frac{1}{x+2}$. Ta có: $y'=1-\frac{1}{(x+2)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0+1+\frac{1}{x_0+2}(*)$

Tiếp tuyến với $(C)$ tại $M$ là $\Delta: y=\left[1-\dfrac{1}{(x_0+2)^2}\right](x-x_0)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0+2}$

Nếu $\Delta \cap x=-2$ tại điểm $A$, thì $y_A=-\dfrac{x_0}{x_0+2} \Rightarrow A\left(-2;-\dfrac{x_0}{x_0+2}\right)$

Nếu $\Delta$ cắt tiệm cận xiên tại điểm $B$ thì

$$\left[1-\frac{1}{(x_0+2)^2}\right](x_B-x_0)+x_0+1+\frac{1}{x_0+2}=x_B+1 \Leftrightarrow x_B=2x_0+2 \Rightarrow y_B=x_B+1=2x_0+3$$

$\Rightarrow B(2x_0+2;2x_0+3)$

Nếu $I$ là giao hai tiệm cận, thì $I$ có tọa độ $\mathrm{I}(-2;-1)$.

Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $B$ trên tiệm cận đứng $x=-2$ suy ra $\mathrm{H}(-2;2x_0+3)$

Diện tích tam giác $\mathrm{AIB}: S=\dfrac{1}{2}AI.BH=\dfrac{1}{2}|y_A-y_I|.|x_B-x_H|=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{x_0}{x_0+2}+1\right||2x_0+2+2|$

Hay $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{|x_0+2|}.2|x_0+2|=2$ ( đvdt )

Chứng tỏ $S$ là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí của điểm $M$.

**Câu 108:** Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ có đồ thị là $(C)$. Tìm những điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị hàm số và trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

**A.** $M\left(-\dfrac{8}{27};0\right)$. **B.** $M\left(-\dfrac{28}{7};0\right)$. **C.** $M\left(-\dfrac{8}{7};0\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét điểm $M(m;0)\in Ox$.

**Cách 1:** Đường thẳng $d$ đi qua $M$, hệ số góc $k$ có phương trình: $y=k(x-m)$.

$d$ là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases}-x^3+3x+2=k(x-m)\\ -3x^2+3=k\end{cases}$ có nghiệm $x$

Thế $k$ vào phương trình thứ nhất, ta được:

$3(x^2-1)(x-m)-(x^3-3x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-3(1+m)x+3m)-(x+1)(x^2-x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)[2x^2-(3m+2)x+3m+2]=0 \ (1)$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $2x^2-(3m+2)x+3m+2=0\ (2)$

Để từ $M$ kẻ được ba tiếp tuyến thì $(1)$ phải có nghiệm $x$, đồng thời phải có $3$ giá trị $k$ khác nhau, khi đó $(2)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $-1$, đồng thời phải có $2$ giá trị $k$ khác nhau và khác $0$

$(2)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $-1$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta=(3m+2)(3m-6)>0\\3m+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{2}{3},\ m>2\\m\neq -1\end{cases}\ (3)$$

Với điều kiện $(3)$, gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của $(2)$, khi đó hệ số góc của ba tiếp tuyến là $k_1=-3x_1^2+3,\ k_2=-3x_2^2+3,\ k_3=0$.

Để hai trong ba tiếp tuyến này vuông góc với nhau $k_1.k_2=-1$ và $k_1\neq k_2$

$k_1.k_2=-1\Leftrightarrow 9(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2-9(x_1+x_2)^2+18x_1x_2+10=0\ (i)$

Mặt khác theo Định lí Viet $x_1+x_2=\dfrac{3m+2}{2};\ x_1x_2=\dfrac{3m+2}{2}$.

Do đó $(i)\Leftrightarrow 9(3m+2)+10=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{28}{27}$ thỏa điều kiện $(3)$, kiểm tra lại ta thấy $k_1\neq k_2$

Vậy, $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$ là điểm cần tìm.

**Cách 2:** Gọi $N(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến $\Delta$ của $(C)$ tại $N$ có phương trình:
$y=\left(-3x_0^2+3\right)(x-x_0)+y_0$.

$\Delta$ đi qua $M\Leftrightarrow 0=\left(-3x_0^2+3\right)(m-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow 3(x_0-1)(x_0+1)(x_0-m)-(x_0+1)^2(x_0-2)=0$

$$\Leftrightarrow (x_0+1)\left[2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\2x_0^2-(3m+2)x_0+3m+2=0\quad\text{(a)}\end{array}\right.$$

Từ $M$ vẽ được đến $(C)$ ba tiếp tuyến $\Leftrightarrow(a)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1$, và có hai giá trị $k=-3x_0^2+3$ khác nhau và khác $0$ điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta=(3m+2)^2-8(3m+2)>0\\2+2(3m+2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3m+2)(3m-6)>0\\3m+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\m<-\dfrac{2}{3},m>2\end{cases}\ (b).$$

Vì tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-1$ có hệ số góc bằng 0 nên yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow (-3p^2+3)(-3q^2+3)=-1$ (trong đó $p,q$ là hai nghiệm của phương trình $(a)$)

$\Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p^2+q^2)+10=0 \Leftrightarrow 9p^2q^2-9(p+q)^2+18pq+10=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9(3m+2)^2}{4}-\dfrac{9(3m+2)^2}{4}+9(3m+2)+10=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{28}{27}$. Vậy $M\left(-\dfrac{28}{27};0\right)$.

**Câu 109:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là $(C)$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ sao cho tiếp tuyến này cắt các trục $Ox$, $Oy$ lần lượt tại các điểm $A$, $B$ thoả mãn $OA=4OB$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}\end{array}\right.$.
**B.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}\end{array}\right.$.
**C.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}\end{array}\right.$.
**D.** $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}\end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử tiếp tuyến $(d)$ của $(C)$ tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt $Ox$ tại $A$, $Oy$ tại $B$ sao cho $OA=4OB$.

Do $\Delta OAB$ vuông tại $O$ nên $\tan A=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của $(d)$ bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.

Hệ số góc của $(d)$ là $y'(x_0)=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}<0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \quad \left(y_0=\frac{3}{2}\right) \\ x_0=3 \quad \left(y_0=\frac{5}{2}\right)\end{array}\right.$$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}\end{array}\right.$.

**Câu 110:** Cho hàm số $y=x^3+1-m(x+1)$ có đồ thị là $(C_m)$. Có bao nhiêu giá trị $m$ để tiếp tuyến của $(C_m)$ tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $8$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $M(0;1-m)$ là giao điểm của $(C_m)$ với trục tung

$y'=3x^2-m \Rightarrow y'(0)=-m$

Phương trình tiếp tuyến với $(C_m)$ tại điểm $m$ là $y=-mx+1-m$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoanh và trục tung, ta có tọa độ $A\left(\dfrac{1-m}{m};0\right)$ và $B(0;1-m)$

Nếu $m=0$ thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này

Nếu $m\neq 0$ ta có

$$S_{OAB}=8\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB=8\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{1-m}{m}\right|\left|1-m\right|=8\Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|}=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9\pm 4\sqrt{5}\\ m=-7\pm 4\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy có 4 giá trị cần tìm.

**Câu 111:** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$.Tìm giá trị nhỏ nhất của $m$ sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M\in(C)$ mà tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d:y=2m-1$.

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến tại $M$: $y=\dfrac{-3}{(2x_0-1)^2}(x-x_0)+y_0$

Gọi $A$, $B$ là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung

$\Rightarrow y_B=\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}$.

Từ đó trọng tâm $G$ của $\Delta OAB$ có: $y_G=\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}$.

Vì $G\in d$ nên $\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}=2m-1$

Mặt khác: $\dfrac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}=\dfrac{6x_0^2-(2x_0-1)^2}{(2x_0-1)^2}=\dfrac{6x_0^2}{(2x_0-1)^2}-1\geq -1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm $M$ thỏa bài toán thì $2m-1\geq -\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow m\geq \dfrac{1}{3}$.

Vậy GTNN của $m$ là $\dfrac{1}{3}$.

**Câu 112:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+1}$, có đồ thị là $(C)$. Có bao nhiêu điểm $M$ thuộc $(C)$ sao cho tiếp tuyến tại

$M$ của $(C)$ cắt $Ox,\ Oy$ tại $A,\ B$ sao cho diện tích tam giác $OAB$ bằng $\frac{1}{4}$, $O$ là gốc tọa độ.

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0}{x_0+1}\Rightarrow y'_0=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến $(t)$ của $(C)$ tại $M$ là: $y_0=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$.

Tiếp tuyến $(t)$ cắt hai trục tọa độ $Ox,Oy$ tại hai điểm phân biệt $A(-x_0^2;0)$,

$B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$ sao cho diện tích tam giác $AOB$ có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ khi đó

$$\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{4}\Leftrightarrow OA.OB=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0^2.\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x_0^2-(x_0+1)^2=0$$

$$\left[\begin{array}{l}2x_0^2+x_0+1=0\\2x_0^2-x_0-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-2\right)\\x_0=1\Rightarrow M(1;1)\end{array}\right..$$

**Câu 113:** $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ $(C_m)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với $(C_m)$ tại hai điểm này vuông góc với nhau.

**A.** $m=\frac{2}{3}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\frac{2}{3},m=-1$. **D.** $m=0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và trục hoành:

$$\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}=0\Leftrightarrow x^2+2mx+2m^2-1=0,\ (x\neq1)\ (1)$$

Để $(C_m)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $A,B$ thì phương trình $(1)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $1$. Tức là ta phải có: $\begin{cases}\Delta'=m^2-2m^2+1>0\\1+2m+2m^2-1\neq0\end{cases}$ hay $\begin{cases}(1-m)(1+m)>0\\2m(m+1)\neq0\end{cases}$ tức $\begin{cases}-1<m<1\\m\neq0\end{cases}$ $(2)$.

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của $(1)$. Theo định lý Vi – ét, ta có: $x_1+x_2=-2m,\ x_1.x_2=2m^2-1$

Giả sử $I(x_0;0)$ là giao điểm của $(C_m)$ và trục hoành. Tiếp tuyến của $(C_m)$ tại điểm $I$ có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{(2x_0+2m)(x_0-1)-(x_0^2+2mx_0+2m^2-1)}{(x_0-1)^2}=\dfrac{2x_0+2m}{x_0-1}$

Như vậy, tiếp tuyến tại $A,B$ lần lượt có hệ số góc là $y'(x_1)=\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}$, $y'(x_2)=\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}$.

Tiếp tuyến tại $A,B$ vuông góc nhau khi và chỉ khi $y'(x_1)y'(x_2)=-1$ hay

$\left(\dfrac{2x_1+2m}{x_1-1}\right)\left(\dfrac{2x_2+2m}{x_2-1}\right)=-1 \Leftrightarrow 5x_1.x_2+(4m-1)(x_1+x_2)+4m^2+1=0$ tức $3m^2+m-2=0$

$\Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=\dfrac{2}{3}$. Đối chiếu điều kiện chỉ có $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn.

**Câu 114:** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$. Giá trị $m$ để đồ thị hàm số cắt trục $Ox$ tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ và trục hoành:

$$\frac{x^2-2mx+m}{x+m}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2mx+m=0 \ (*) \\ x\neq -m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+m}{x+m}$ cắt trục $Ox$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m>0 \\ 3m^2+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>1 \\ m\neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của đồ thị $(C)$ với trục hoành thì $y_0=x_0^2-2mx_0+m=0$ và hệ số góc của tiếp tuyến với $(C)$ tại $M$ là:

$$k=y'(x_0)=\frac{(2x_0-2m)(x_0-1)-(x_0^2-2mx_0+m)}{(x_0+m)^2}=\frac{2x_0-2m}{x_0+m}.$$

Vậy hệ số góc của hai tiếp tuyến với $(C)$ tại hai giao điểm với trục hoành là $k_1=\dfrac{2x_1-2m}{x_1+m}$, $k_2=\dfrac{2x_2-2m}{x_2+m}$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc $\Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2x_1-2m}{x_1+m}\right)\left(\dfrac{2x_2-2m}{x_2+m}\right)=-1$

$\Leftrightarrow 4\left[x_1x_2 - m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right] = -\left[x_1x_2 + m\left(x_1+x_2\right)+m^2\right]\left(**\right)$.

Ta lại có $\begin{cases} x_1x_2 = m \\ x_1+x_2 = 2m \end{cases}$, do đó $\left(**\right) \Leftrightarrow m^2-5m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=5 \end{array}\right.$. Nhận $m=5$.

**Câu 115:** Phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right): y=x^3$ biết nó đi qua điểm $M\left(2;\ 0\right)$ là:

**A.** $y=27x\pm 54$. **B.** $y=27x-9;\ y=27x-2$.

**C.** $y=27x\pm 27$. **D.** $y=0; y=27x-54$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$+\ y'=3x^2$.

+ Gọi $A(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. PTTT của $(C)$ tại $A(x_0;y_0)$ là:

$y=3x_0^2\left(x-x_0\right)+x_0^3 \quad (d)$.

+ Vì tiếp tuyến $(d)$ đi qua $M(2;0)$ nên ta có phương trình:

$3x_0^2\left(2-x_0\right)+x_0^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=3 \end{array}\right.$.

+ Với $x_0=0$ thay vào $(d)$ ta có tiếp tuyến $y=0$.

+ Với $x_0=3$ thay vào $(d)$ ta có tiếp tuyến $y=27x-54$.

**Câu 116:** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{4}-x+1$, có đồ thị $\left(C\right)$. Từ điểm $M\left(2;-1\right)$ kẻ đến $\left(C\right)$ hai tiếp tuyến phân biệt. Hai tiếp tuyến này có phương trình:

**A.** $y=-x+1$ và $y=x-3$. **B.** $y=2x-5$ và $y=-2x+3$.

**C.** $y=-x-1$ và $y=-x+3$. **D.** $y=x+1$ và $y=-x-3$.

**Lời giải.**

**Chọn A**

Gọi $N\left(x_0;\ y_0\right)$ là tiếp điểm; $y_0=\dfrac{{x_0}^2}{4}-x_0+1$; $f'\left(x_0\right)=\dfrac{x_0}{2}-1$

Phương trình tiếp tuyến tại $N$ là: $y=\left(\dfrac{x_0}{2}-1\right)\left(x-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2}{4}-x_0+1$

Mà tiếp tuyến đi qua $M\left(2;-1\right)$ $\Rightarrow -1=\left(\dfrac{x_0}{2}-1\right)\left(2-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2}{4}-x_0+1 \Leftrightarrow -\dfrac{{x_0}^2}{4}+x_0=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0;\ y_0=1;\ f'\left(0\right)=-1 \\ x_0=4;\ y_0=1;\ f'\left(4\right)=1 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến : $y=-x+1$ và $y=x-3$.

**Câu 117:** Tiếp tuyến của parabol $y=4-x^2$ tại điểm $(1;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó là:

**A.** $\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+ $y'=-2x\Rightarrow y'(1)=-2$.

+PTTT tại điểm có tọa độ $(1;3)$ là: $y=-2(x-1)+3\Leftrightarrow y=-2x+5\quad(d)$.

+ Ta có $(d)$ giao $Ox$ tại $A\left(\frac{5}{2};0\right)$, giao $Oy$ tại $B(0;5)$ khi đó $(d)$ tạo với hai trục tọa độ tam giác vuông $OAB$ vuông tại $O$.

Diện tích tam giác vuông $OAB$ là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{5}{2}.5=\frac{25}{4}$.

**Câu 118:** Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là $(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$, biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

**A.** $\Delta:y=-x+7;\Delta:y=-x-1$. **B.** $\Delta:y=-2x+7;\Delta:y=-x-11$.

**C.** $\Delta:y=-x+78;\Delta:y=-x-11$. **D.** $\Delta:y=-x+9;\Delta:y=-x-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định với mọi $x\neq 1$.

Ta có: $y'=\frac{-4}{(x-1)^2}$

Tiệm cận đứng: $x=1$; tiệm cận ngang: $y=2$; tâm đối xứng $I(1;2)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của $(C)$:

$$\Delta:y=\frac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+2}{x_0-1}.$$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\pm1$.

$$\frac{-4}{(x_0-1)^2}=\pm1\Leftrightarrow x_0=-1,x_0=3$$

* $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow\Delta:y=-x-1$.

* $x_0=3\Rightarrow y_0=4\Rightarrow\Delta:y=-x+7$.

**Câu 119:** Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị $(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$, biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{18}$.

**A.** $\Delta: y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{2};\Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{1}{9}$.

**B.** $\Delta: y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{31}{2};\Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{2}{9}$.

**C.** $\Delta: y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{2};\Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{4}{9}$.

**D.** $\Delta: y=\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{2};\Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{2}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định với mọi $x\neq -2$.

Ta có: $y'=\dfrac{4}{(x+2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến $\Delta$ của $(C)$ tại $M$ có phương trình

$$y=\frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+2}=\frac{4}{(x_0+2)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$$

Gọi $A,B$ lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến $\Delta$ với $Ox,Oy$

Suy ra $A:\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{4}{(x_0+2)^2}x+\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}x_0^2 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow A(-\dfrac{1}{2}x_0^2;0)$

$B:\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2} \end{cases}\Rightarrow B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right)$

Vì $A,B\neq O\Rightarrow x_0\neq 0$.

Tam giác AOB vuông tại O nên $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}\dfrac{x_0^4}{(x_0+2)^2}$

Suy ra $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{18}\Leftrightarrow \dfrac{x_0^4}{(x_0+2)^2}=9\Leftrightarrow 9x_0^4=(x_0+2)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0^2+x_0+2=0 \text{ (vn)} \\ 3x_0^2-x_0-2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

* $x_0=1\Rightarrow y_0=\dfrac{2}{3},\ y'(x_0)=\dfrac{4}{9}$. Phương trình $\Delta: y=\dfrac{4}{9}x+\dfrac{2}{9}$

$* \ x_0 = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow y_0 = -1,\ y'(x_0) = \dfrac{9}{4}$ Phương trình $\Delta : y = \dfrac{9}{4}(x + \dfrac{2}{3}) - 1 = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

**Câu 120:** Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Có bao nhiêu cặp điểm $A, B$ thuộc $(C)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có tâm đối xứng $I(1;1)$.

Lấy điểm tùy ý $A(x_0; y_0) \in (C)$.

Gọi $B$ là điểm đối xứng với $A$ qua $I$ suy ra $B(2 - x_0; 2 - y_0) \in (C)$. Ta có:

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $A$ là: $k_A = y'(x_0) = \dfrac{-2}{(x_0 - 1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $B$ là: $k_B = y'(2 - x_0) = \dfrac{-2}{(1 - x_0)^2}$.

Ta thấy $k_A = k_B$ nên có vô số cặp điểm $A, B$ thuộc $(C)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

**Câu 121:** Trên đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có điểm $M$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Tọa độ $M$ là:

**A.** $(2;1)$. **B.** $\left(4;\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{7}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{4};-4\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Lấy điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M$ là: $y = -\dfrac{1}{(x_0 - 1)^2}.(x - x_0) + \dfrac{1}{x_0 - 1}$ $(\Delta)$.

Giao với trục hoành: $(\Delta) \cap Ox = A(2x_0 - 1; 0)$.

Giao với trục tung: $(\Delta) \cap Oy = B\left(0; \dfrac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}\right)$

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB\Leftrightarrow 4=\left(\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)^2\Leftrightarrow x_0=\frac{3}{4}$. Vậy $M\left(\frac{3}{4};-4\right)$.

**Câu 122:** Định $m$ để đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+1$ tiếp xúc với đường thẳng $d:y=5$?

**A.** $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đường thẳng $y=x^3-mx^2+1$ và đồ thị hàm số $y=5$ tiếp xúc nhau

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-mx^2+1=5 & (1)\\ 3x^2-2mx=0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

$.(2)\Leftrightarrow x(3x-2m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{2m}{3}\end{array}\right.$.

+ Với $x=0$ thay vào $(1)$ không thỏa mãn.

+ Với $x=\frac{2m}{3}$ thay vào $(1)$ ta có: $m^3=-27\Leftrightarrow m=-3$.

## Chương 6. Phép biến hình

**Câu 123:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho đường tròn $(C)$ có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục $Oy$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;3)$ biến $(C)$ thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

**A.** $x^2+y^2=4$. **B.** $(x-2)^2+(y-6)^2=4$.

**C.** $(x-2)^2+(x-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Đường tròn $(C)$ có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=2$.

$Đ_{Oy}(I)=I'\Rightarrow I'(-1;-2)$.

$T_{\vec{v}}(I')=I''\Rightarrow\overrightarrow{I'I''}=\vec{v}\Rightarrow I''(1;1)$.

Đường tròn cần tìm nhận $I''(1;1)$ làm tâm và bán kính $R=2$.

**Câu 124:** Trong mặt phẳng $Oxy$ cho đường thẳng $d$ có phương trình $x+y-2=0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $O$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;2)$ biến đường thẳng $d$ thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

**A.** $3x+3y-2=0$. **B.** $x-y+2=0$.

**C.** $x+y+2=0$. **D.** $x+y-3=0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$$\begin{cases} Đ_O(d) = d' \\ T_{\vec{v}}(d') = d'' \end{cases} \Rightarrow d'' // d' // d.$$

Nên $d'' : x + y + c = 0 \, (c \neq -2)$. (1)

Ta có : $M(1;1) \in d$ và $Đ_O(M) = M' \Rightarrow M'(-1;-1) \in d'$

Tương tự : $M'(-1;-1) \in d'$ và $T_{\vec{v}}(M') = M'' \Rightarrow M''(2;1) \in d''$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $c = -3$. Vậy $d'' : x + y - 3 = 0$.

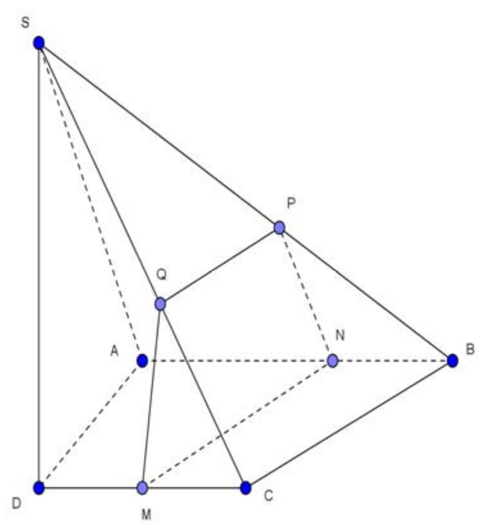
## Chương 7. Quan hệ song song

**Câu 125:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là $AB.$ $M$ là trung điểm $CD.$ Mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M$ song song với $BC$ và $SA.$ $(\alpha)$ cắt $AB, SB$ lần lượt tại $N$ và $P.$ Nói gì về thiết diện của mặt phẳng $(\alpha)$ với khối chóp $S.ABCD$?

**A.** Là một hình bình hành. **B.** Là một hình thang có đáy lớn là $MN$.

**C.** Là tam giác $MNP$. **D.** Là một hình thang có đáy lớn là $NP$.

**Lời giải**




**Chọn B**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua $M$ kẻ đường thẳng $MN \parallel BC \,(N \in BC)$. Khi đó, $MN \subset (\alpha)$.

Trong mặt phẳng $(SAB)$, qua $N$ kẻ đường thẳng $NP \parallel SA \,(P \in SB)$. Khi đó, $NP \subset (\alpha)$.

Vậy $(\alpha) \equiv (MNP)$.

Xét hai mặt phẳng $(MNP)$ và $(SBC)$ có

$\begin{cases} MN \subset (MNP) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \\ P \in (MNP), P \in (SBC) \end{cases}$ $\Rightarrow$ hai mặt phẳng cắt nhau theo một giao tuyến đi qua điểm $P$ và song song với $BC$.

Trong mặt phẳng $(SBC)$ kẻ $PQ \parallel BC\,(Q \in SC)$. Khi đó, $PQ$ là giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha)$ với mặt phẳng $(SBC)$. Vậy mặt phẳng $(\alpha)$ cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Tứ giác $MNBC$ có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MC \parallel NB \end{cases} \Rightarrow MNBC$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $MN = BC$.

Trong tam giác $SBC$ có $P$ thuộc đoạn $SB$, $Q$ thuộc đoạn $SC$ và $PQ \parallel BC$ nên $PQ < BC$.

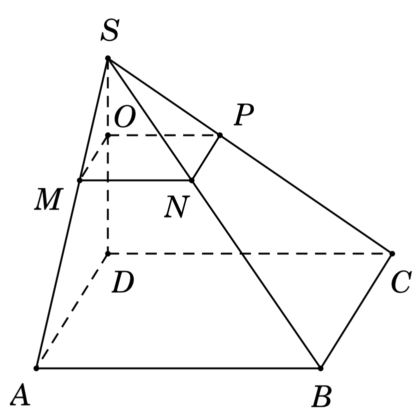
Tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ PQ < MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình thang có đáy lớn là $MN$.

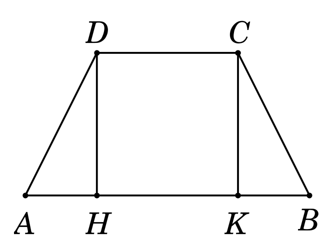
**Câu 126:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6$, $CD = 4$. Mặt phẳng $(P)$ song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh $SA$ tại $M$ sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của $(P)$ và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $2$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $D, C$ trên $AB$

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK;\ CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1$.

Tam giác $BCK$ vuông tại $K$, có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK.\dfrac{AB + CD}{2} = \sqrt{3}.\dfrac{4+6}{2} = 5\sqrt{3}$.

Gọi $N, P, Q$ lần lượt là giao điểm của $(P)$ và các cạnh $SB, SC, SD$.

Vì $(P) \,//\, (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{QM}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

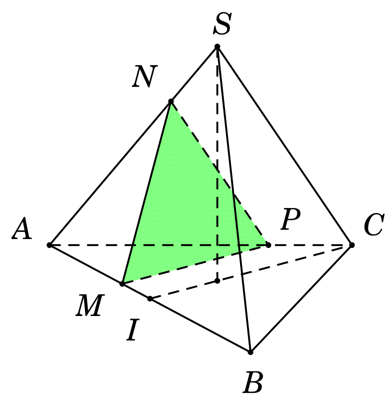
Khi đó $(P)$ cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

**Câu 127:** Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh bằng $a$. Gọi $I$ là trung điểm của đoạn $AB$, $M$ là điểm di động trên đoạn $AI$. Qua $M$ vẽ mặt phẳng $(\alpha)$ song song với $(SIC)$. Tính chu vi của thiết diện tạo bởi $(\alpha)$ với tứ diện $SABC$, biết $AM = x$.

**A.** $x(1+\sqrt{3})$. **B.** $2x(1+\sqrt{3})$. **C.** $3x(1+\sqrt{3})$. **D.** Không tính được.

**Lời giải**

**Chọn B**




Để ý hai tam giác $MNP$ và $SIC$ đồng dạng với tỉ số $\frac{AM}{AI} = \frac{2x}{a}$

$$\Rightarrow \frac{C_{MNP}}{C_{SIC}} = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow C_{MNP} = \frac{2x}{a}(SI + IC + SC) = \frac{2x}{a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + a\right) = 2x(\sqrt{3}+1).$$

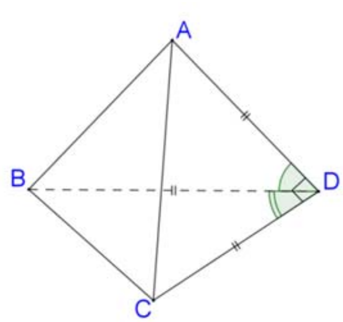
## Chương 8. Quan hệ vuông góc

**Câu 128:** Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC$ và $\widehat{BDA} = 60^0, \widehat{ADC} = 90^0, \widehat{BDC} = 120^0$. Trong các mặt của tứ diện đó:

**A.** Tam giác $ABD$ có diện tích lớn nhất. **B.** Tam giác $BCD$ có diện tích lớn nhất.
**C.** Tam giác $ACD$ có diện tích lớn nhất. **D.** Tam giác $ABC$ có diện tích lớn nhất.

**Lời giải**

**Chọn D**




Đặt $DA = DB = DC = a$

Tam giác $ABD$ đều cạnh $a$ nên diện tích $S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $ACD$ vuông tại $D$ nên diện tích $S_{ACD}=\frac{1}{2}DA.DC=\frac{a^2}{2}$.

Diện tích tam giác $BCD$ là $S_{BCD}=\frac{1}{2}DB.DC\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $ABC$ có $AB=a, AC=a\sqrt{2}, BC=a\sqrt{3}$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Diện tích tam giác $ABC$ là $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

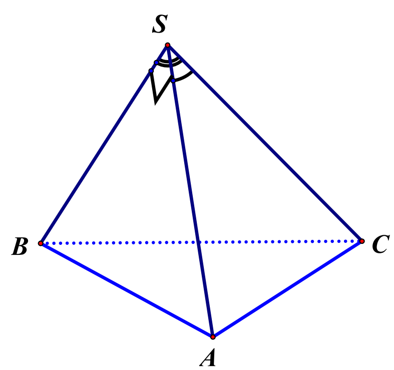
Vậy diện tích tam giác $ABC$ lớn nhất.

**Câu 129:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC}=120^0$, $\widehat{CSA}=60^0$, $\widehat{ASB}=90^0$, $SA=SB=SC$. Gọi $I$ là hình chiếu vuông góc của $S$ lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

**A.** $I$ là trung điểm $AB$. **B.** $I$ là trọng tâm tam giác $ABC$.
**C.** $I$ là trung điểm $AC$. **D.** $I$ là trung điểm $BC$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $SA=SB=SC=a$

Ta có : $\triangle SAC$ đều $\Rightarrow AC=SA=a$

$\triangle SAB$ vuông cân tại $S$ $\Rightarrow AB=a\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{SB^2+SC^2-2SB.SC.\cos\widehat{BSC}}=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC^2+AB^2=BC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A$

Gọi $I$ là trung điểm của $AC$ thì $I$ là tâm đường tròn

ngoại tiếp tam giác $ABC$. Gọi $d$ là trục của tam giác $ABC$ thì $d$ đi qua $I$ và $d\perp(ABC)$

Mặt khác : $SA=SB=SC$ nên $S\in d$. Vậy $SI\perp(ABC)$ nên $I$ là hình chiếu vuông góc của $S$ lên mặt phẳng $(ABC)$.

**Câu 130:** Cho tứ diện $OABC$ có $OA$, $OB$, $OC$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $H$ là hình chiếu của $O$ trên mặt phẳng $(ABC)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{BC^2}$.

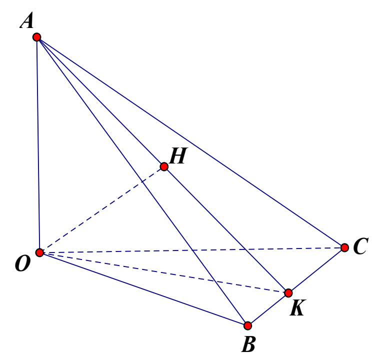
**B.** $\dfrac{1}{OA^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{BC^2}$.

**C.** $\dfrac{1}{OA^2}=\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}+\dfrac{1}{BC^2}$.

**D.** $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**




Ta có

$\left.\begin{matrix} OA\perp OB \\ OA\perp OC\end{matrix}\right\}\Rightarrow OA\perp (OBC)\Rightarrow OA\perp BC$.

Mà $OH\perp (OBC)\Rightarrow OH\perp BC$.

Vậy ta có: $\left.\begin{matrix} BC\perp OA \\ BC\perp OH\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (OAH)$.

Trong mặt phẳng $(ABC)$: $AH$ cắt $BC$ tại $K$

Ta suy ra $BC\perp OK$ (vì $BC\perp (OAH)$).

Tam giác $OBC$ vuông tại $O$ có:

$\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}\quad (1)$.

Có $OA\perp (OBC)\Rightarrow OA\perp OK$.

Tam giác $OAK$ vuông tại $O$ có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OK^2}\quad (2)$.

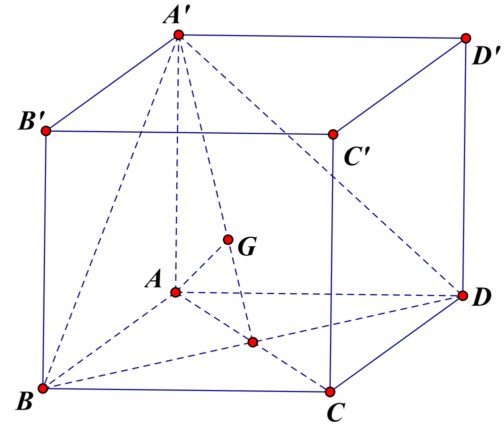
Từ $(1)$ và $(2)$ ta suy ra: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

**Câu 131:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$. $G$ là trọng tâm tam giác $A'BD$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BD)$?

**A.** $\overrightarrow{AA'}$.
**B.** $\overrightarrow{AC}$.
**C.** $\overrightarrow{AG}$.
**D.** Kết quả khác.

**Lời giải**

**Chọn C.**




Ta có tam giác $A'B = BD = DA'$ ( đường chéo của các hình vuông bằng nhau).
$\Rightarrow \Delta A'BD$ đều.

Ta có $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow A'A \perp BD$

Mà $A'G \perp BD$ (vì $\Delta A'BD$ đều).

Suy ra $BD \perp (A'AG) \Rightarrow BD \perp AG \quad (1)$.

Tương tự ta cũng chứng minh được:
$A'D \perp (ABG) \Rightarrow A'D \perp AG \quad (2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $AG \perp (A'BD)$.

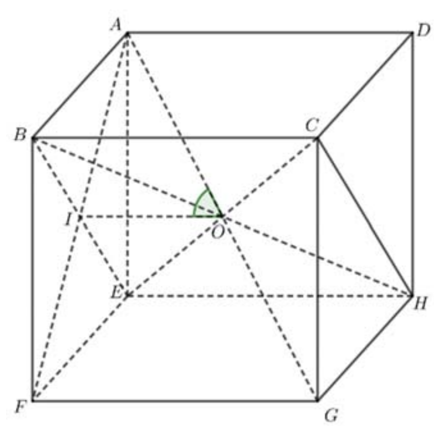
Suy ra $\overrightarrow{AG}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(A'BD)$.

**Câu 132:** *Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Gọi $\alpha$ là góc giữa đường thẳng $AG$ và mặt phẳng $(EBCH)$. Chọn khẳng định* ***đúng*** *trong các khẳng định sau:*

**A.** $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $O = CE \cap BH$. Khi đó $O$ là trung điểm của $AG$. Gọi $I = AF \cap BE$.

Ta có $BC \perp (ABFE) \Rightarrow BC \perp AI$. Lại có $AI \perp BE$ nên $AI \perp (EBCH)$ $\Rightarrow IO$ là hình chiếu của $AO$ trên $(EBCH) \Rightarrow \alpha = (AG,(EBCH)) = (AO,(EBCH)) = (AO, IO) = \widehat{AOI}$

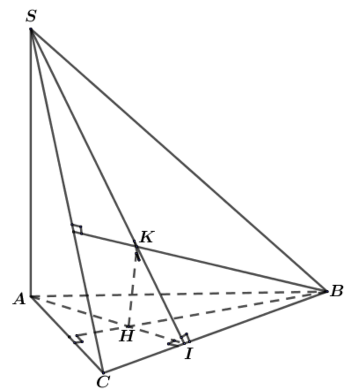
$AI = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a, IO = \dfrac{1}{2}FG = \dfrac{1}{2}a \Rightarrow \tan\widehat{AOI} = \dfrac{AI}{IO} = \sqrt{2}$. Vậy $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

**Câu 133:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với đáy và tam giác $ABC$ không vuông gọi $H,K$ lần lượt là trực tâm của tam giác $ABC$ và tam giác $SBC$. Tính số đó góc tạo bởi $HK$ và mặt phẳng $(SBC)$.

**A.** $45°$. **B.** $65°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi giao điểm của $AH$ và $CB$ là $I$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$, lại có $BC \perp AI$ nên $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI \Rightarrow HK \subset (SAI)$.

Vậy $HK \perp BC$.(1)

Mặt khác, có $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$, và $BK \perp SC$ nên $SC \perp (BHK)$.

Vậy $HK \perp SC$.(2)

Từ (1) và (2) ta có $HK \perp (SBC)$

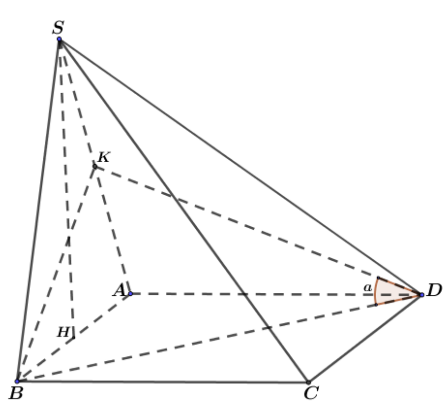
$\Rightarrow$ góc tạo bởi $HK$ và mặt phẳng $(SBC)$ bằng $90°$.

**Câu 134:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên $SAB$ là tam giác đều có đường cao $AH$ vuông góc với mp$(ABCD)$. Gọi $a$ là góc giữa $BD$ và mp$(SAD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

**A.** $\cos a = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **B.** $\sin a = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **C.** $a = 60°$. **D.** $a = 30°$.

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi $K$ là trung điểm của $SA$.

Ta có: $AD \perp (SAB)$ và $\Delta SAB$ đều nên $BK \perp (SAD)$.

Vậy $\left(\widehat{BD,(SAD)}\right) = \left(\widehat{BD,KD}\right) = \widehat{BDK} = a$.

Gọi cạnh của hình vuông $ABCD$ là $x$, thì $BD = x\sqrt{2}$ và $BK = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

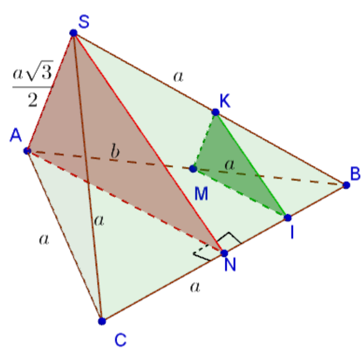
Xét trong tam giác vuông $BKD$ có $\sin a = \dfrac{BK}{BD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

**Câu 135:** Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt $(ABC)$ và $(SBC)$ là hai tam giác đều cạnh $a$, $SA = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $M$ là điểm trên $AB$ sao cho $AM = b$ $(0 < b < a)$. $(P)$ là mặt phẳng qua $M$ và vuông góc với $BC$. Thiết diện của $(P)$ và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng?

**A.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $N$ là trung điểm của $BC$.

$\begin{cases} SB = SC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SN \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN).$

Theo bài ra $BC \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ (P) // (SAN) \end{cases}$.

Kẻ $MI // AN, MK // SA \Rightarrow$ Thiết diện của $(P)$ và tứ diện $SABC$ là $\Delta KMI$.

$\begin{cases} \Delta ABC \\ \Delta SBC \end{cases}$ là hai tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AN = SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = SA \Rightarrow \Delta SAN$ là tam giác đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta KMI$ là tam giác đều cạnh $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a-b}{a} \Rightarrow S_{\Delta KMI} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}.\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

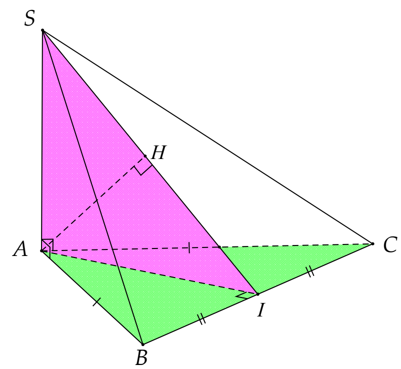
**Câu 136:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy $ABC$ là tam giác cân ở $A$. Gọi $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $(SBC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $H \in SB$. **B.** $H$ trùng với trọng tâm tam giác $SBC$.

**C.** $H \in SC$. **D.** $H \in SI$ ($I$ là trung điểm của $BC$).

**Lời giải**

**Chọn D**




Gọi $I$ là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Khi đó $H$ là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $(SBC)$. Suy ra $H \in SI$.

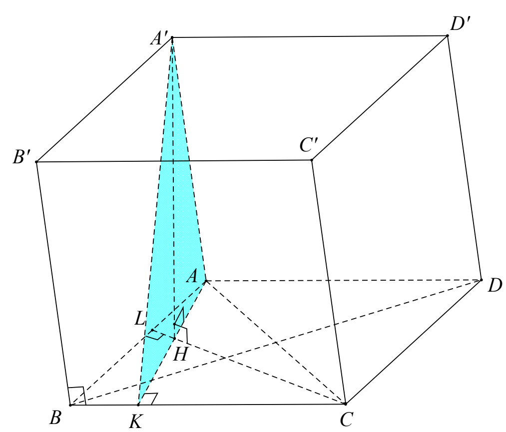
**Câu 137:** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên $(ABC)$ trùng với trực tâm $H$ của tam giác $ABC$. Khẳng định nào sau đây không đúng?

**A.** $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$. **B.** $(AA'H) \perp (A'B'C')$.

**C.** $BB'C'C$ là hình chữ nhật. **D.** $(BB'C'C) \perp (AA'H)$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của A lên $BC$

$\Rightarrow H \in AK, BC \perp AK, BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (AA'H)$

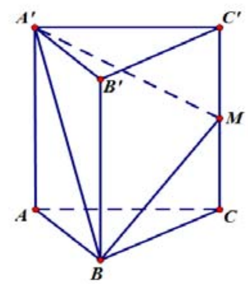
$\Rightarrow \begin{cases} (AA'H) \perp (A'B'C') \\ (BB'C'C) \perp (AA'H) \\ BC \perp BB' \end{cases}$ nên đáp án B,C,D đúng.

**Câu 138:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh $CC'$ thì $\widehat{BMA'} = 90^0$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BMA')$.

**A.** $\frac{a\sqrt{5}}{7}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D**




Áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$BC^2 = a^2 + 4a^2 - 2a.2a.\cos 120^0 = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$

Đặt $CC' = 2x$ .Ta có:

$A'M = \sqrt{A'C'^2 + C'M^2} = \sqrt{4a^2 + x^2}$
$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{7a^2 + x^2}$
$A'B = \sqrt{A'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{a^2 + 4x^2}$

Tam giác BMA' là tam giác vuông tại M nên

$MB^2 + MA'^2 = A'B^2$

Do đó $4a^2 + x^2 + 7a^2 + x^2 = a^2 + 4x^2 \Rightarrow x^2 = 5a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{5}$

$CC' // (ABB'A') \Rightarrow V_{A.A'BM} = V_{MAA'B} = V_{CAA'B} = V_{A'.ABC}$

$d(A,(A'BM)) = \dfrac{3V_{A.A'BM}}{S_{A'BM}}$

$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.2x.\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin 120^0 = \dfrac{\sqrt{15}}{3}a^3$

$s_{A'BM} = \dfrac{1}{2}.MA'.MB = 3\sqrt{3}a^2$

$d(A,(A'BM)) = \dfrac{\sqrt{15}a^3}{3\sqrt{3}a^2} = a\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

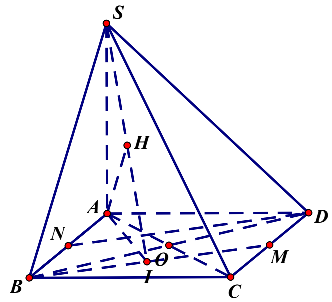
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BM) là $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

**Câu 139:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, SA = a. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng $30°$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm $CD$.

**A.** $\dfrac{a}{3}$ **B.** $\dfrac{2a}{3}$ **C.** $\dfrac{4a}{3}$ **D.** $\dfrac{5a}{3}$

**Lời giải**

**Chọn A.**




Chứng minh DB $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của DS lên (SAC) là SO, góc giữa SD và (SAC) là DSO = $30°$. Đặt DO = x, ta có SO = x$\sqrt{3}$ (O là giao điểm AC và BD)

Từ $SO^2 = AO^2 + SA^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Gọi N là trung điểm AB $\Rightarrow$DN // BM.

Suy ra d(D;(SBM)) = d(N;(SBM)) = $\dfrac{1}{2}$ d(A;(SBM))

Kẻ AI $\perp$ BM, AH$\perp$ SM.

Từ đó chứng minh được AH$\perp$(SBM) $\Rightarrow$ d(A;(SBM)) = AH.

Trong (ABCD): $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABCD} - S_{BCM} = \dfrac{a^2}{2}$

Mà $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AI.BM \Rightarrow AI = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

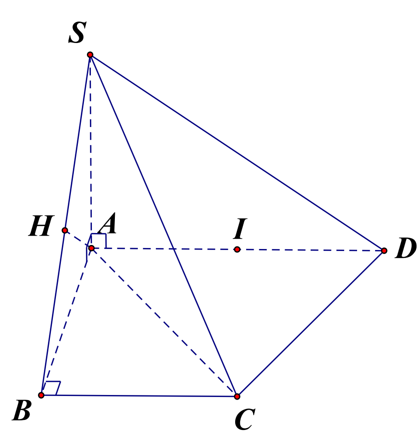
Khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow d(D;(SBM)) = \dfrac{a}{3}$

**Câu 140:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang. $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $SB$. Tính theo $a$ khoảng cách từ $H$ đến mặt phẳng $(SCD)$

**A.** $\dfrac{5a}{3}$. **B.** $\dfrac{4a}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

**Hướng dẫn giải**:

**Chọn D**



Gọi $I$ là trung điểm $AD$.

Ta có: $CI = IA = ID = \dfrac{AD}{2}$, suy ra $\Delta ACD$ vuông tại $C$

$\Rightarrow CD \perp AC$. Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ nên ta có $CD \perp SD$ hay $\Delta SCD$ vuông tại D .Gọi $d_1$, $d_2$ lần lượt là khoảng cách từ $B$, $H$ đến mặt phẳng $(SCD)$

Ta có: $\Delta SAB \approx \Delta SHA \Rightarrow \dfrac{SA}{SH} = \dfrac{SB}{SA}$

$\Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{2}{3}$

Mà $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \dfrac{2}{3}d_1$.

Thể tích khối tứ diện $S.BCD$:

$V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ (PB: SAI)

Ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$,

$CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a \Rightarrow S_{SCD} = \dfrac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2$

Ta có: $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}d_1.S_{\Delta SCD} \Rightarrow d_1 = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \dfrac{a}{2}$.

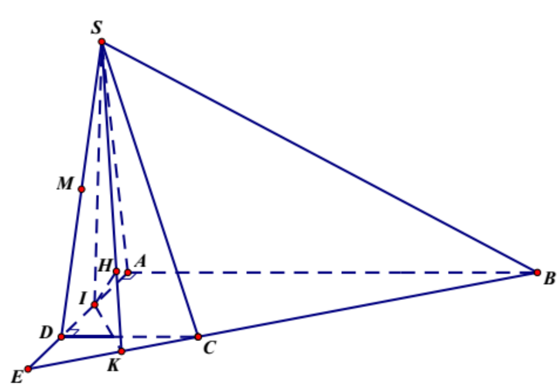
Vậy khoảng cách từ $H$ đến mặt phẳng $(SCD)$ là $d_2 = \dfrac{2}{3}d_1 = \dfrac{a}{3}$.

**Câu 141:** Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $AB = 3a, AD = DC = a$. Gọi I là trung điểm của AD, biết hai mặt phẳng $(SBI)$ và $(SCI)$ cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng $(SBC)$ tạo với đáy một góc $60^0$. Tính khoảng cách từ trung điểm cạnh SD đến mặt phẳng $(SBC)$.

**A.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Vẽ $IK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI}$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy nên $\widehat{SKI} = 60^0$. Vì

$S_{\Delta IDC} = \dfrac{1}{2}DI.DC = \dfrac{a^2}{4}, S_{\Delta IAB} = \dfrac{3a^2}{4}$

Suy ra $S_{\Delta BIC} = S_{ABCD} - (S_{\Delta ICD} + S_{\Delta IAB}) = a^2$.

Mặt khác $BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

và $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IK.BC$. Suy ra $IK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Trong tam giác vuông SIK ta có $SI = IK.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Gọi $M$ là trung điểm của $SD$, tính $d(M,(SBC))$.

Gọi $E$ là giao điểm của $AD$ với $BC$, ta có $\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow ED = \frac{1}{2}AD = ID$.

Do đó $d(M,(SBC)) = \frac{1}{2}d(D,(SBC)) = \frac{1}{4}d(I,(SBC))$

Gọi $H$ là hình chiếu của $I$ lên $SK$ ta có $d(I,(SBC)) = IH$.

Trong tam giác vuông $SIK$, ta có:

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{5}{12a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

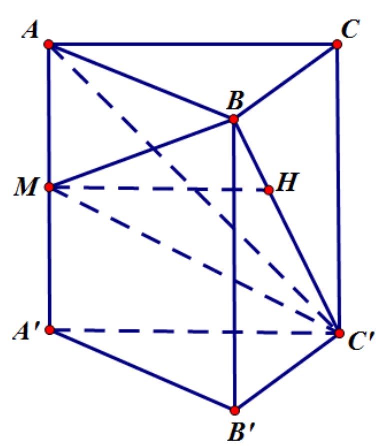
Vậy $d(M,(SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{20}$. **Vậy chọn đáp án** **B.**

**Câu 142:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm của cạnh AA', biết BM ⊥ AC'. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (BMC').

**A.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**




Ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'}$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC'} = (\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'})(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'})$

$= \overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{A'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{A'C'}$

$= BA.AC.\cos 120^0 + \frac{1}{2}BA.AA.\cos 0^0$

$= BA.AC.\cos 120^0 + \frac{1}{2}BB'.AA'.\cos 0^0$

$= a.a.(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}h.h = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}h^2$

Theo giả thiết:

$BM \perp AC' \Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC'} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow h = a$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vì AM//(BCC') nên $V_{M.BCC'} = V_{A.BCC'}$ hay $V_{M.BCC'} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

Gọi H là hình chiếu của M trên BC'. Ta có:

$MB = MC' = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad BC' = a\sqrt{2} \Rightarrow MH = \sqrt{MA'^2 - HC'^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_{MBC'} = \frac{1}{2}MH.BC' = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

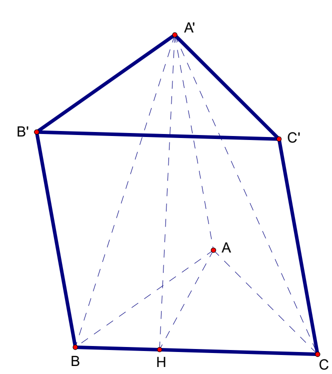
Vậy khoảng cách cần tìm là $d(C,(BMC')) = \frac{3V_{CBMC'}}{S_{MBC'}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ . **Vậy chọn đáp án B**

**Câu 143:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}, BC = 3a, \widehat{ACB} = 30^0$. Cạnh bên hợp với mặt đáy góc $60^0$ và mặt phẳng (A'BC) vuông góc với mặt phẳng (ABC).Điểm H trên cạnh BC sao cho HC=3HB và mặt phẳng (A'AH) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (A'AC)

**A.** $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{3\sqrt{3}a}{4}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{3a\sqrt{5}}{7}$

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**



$$\begin{cases}(A'BC)\perp(ABC)\\(A'\text{AH})\perp(ABC)\\A'H=(A'BC)\cap(A'\text{AH})\end{cases}\Rightarrow A'H\perp(ABC)$$

Suy ra $\widehat{A'AH}=60^0$.

$AH^2=AC^2+HC^2-2.\text{AC}.\text{HC}.\cos 30^0=a^2\Rightarrow AH=a$

$\Rightarrow A'H=AH.\tan 60^0=a\sqrt{3}$

$V_{ABC.A'B'C}=S_{ABC}.A'H=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3}=\dfrac{9a^3}{4}.$

Vì $AH^2+AC^2=HC^2\Rightarrow HA\perp \text{AC}\Rightarrow AA'\perp AC.$

$S_{A'\text{AC}}=\dfrac{1}{2}AC.A'A=\dfrac{1}{2}\text{a}\sqrt{3}.2\text{a}=a^2\sqrt{3}.$

$\Rightarrow d\left(B;(A'AC)\right)=\dfrac{3V_{A'ABC}}{S_{A'AC}}=\dfrac{\frac{9}{4}a^3}{a^2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}a}{4}.$

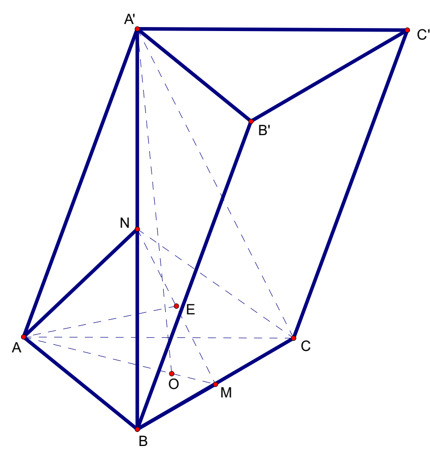
**Vậy chọn đáp án** **B.**

**Câu 144:** Cho hình lăng trụ AB**C.**A'B'C', $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng a, AA' = a và đỉnh A' cách đều A, B,**C.** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và A'**B.** Tính theo a khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN).

**A.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{23}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{33}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

**Lời giải**

**Chọn** **D.**




Gọi O là tâm tam giác đều ABC $\Rightarrow A'O\perp(ABC)$

Ta có $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AO=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$A'O=\sqrt{AA'^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3};$

Ta có:

$V_{NAMC}=\frac{1}{3}S_{\Delta AMC}.\mathrm{d}\left(N,\left(ABC\right)\right)$

$\Rightarrow \mathrm{d}\left(N,\left(ABC\right)\right)=\frac{3V_{NAMC}}{S_{\Delta AMC}}$

$S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8};\mathrm{d}\left(N,\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}A'\mathrm{O}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow V_{NAMC}=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8}.\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a^2\sqrt{2}}{48}$

Lại có: $AM=AN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên $\Delta AMN$ cân tại **A.**

Gọi E là trung điểm của MN, suy ra $AE\perp MN, MN=\frac{A'C}{2}=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow AE=\sqrt{AN^2-NE^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{16}}=\frac{a\sqrt{11}}{4};S_{AMN}=\frac{1}{2}MN.AE=\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$

$\Rightarrow d\left(C;\left(AMN\right)\right)=\frac{3a^2\sqrt{2}}{48}:\frac{a^2\sqrt{11}}{16}=\frac{a\sqrt{22}}{11}$ (đvđd)

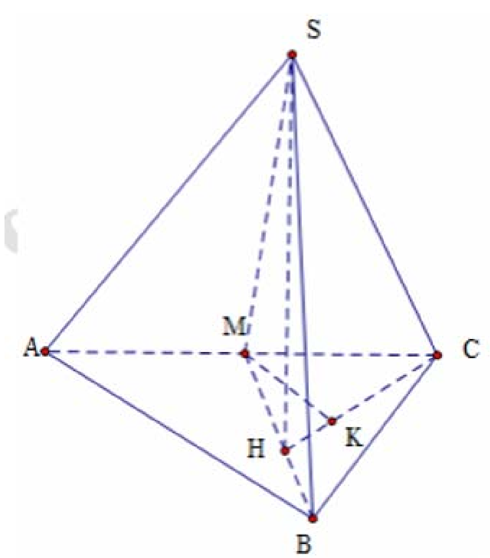
**Vậy chọn đáp án D.**

**Câu 145:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều có cạnh bằng $a$. Gọi $M$ là trung điểm của $AC$. Hình chiếu của $S$ trên mặt đáy là điểm $H$ thuộc đoạn $BM$ sao cho $HM=2HB$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $\left(SHC\right)$ bằng

**A.** $\frac{2a\sqrt{7}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$.

**Lời giải**

Chọn đáp án D




$d\left(A,\left(SCH\right)\right)=2d\left(M,\left(SHC\right)\right)$. Dựng $MK\perp CH$

Khi đó $d\left(A,\left(SCH\right)\right)=2MK$

Mặt khác $BM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MH=\frac{2}{3}BM=\frac{a\sqrt{3}}{3};MC=\frac{a}{2}$

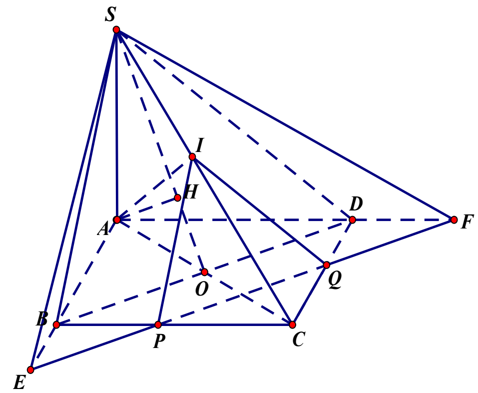
Suy ra $MK=\dfrac{MH.MC}{\sqrt{MH^2+MC^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{7}}$ do đó $d=2MK=\dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$

**Câu 146:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi I là hình chiếu của A lên $SC$. Từ I lần lượt vẽ các đường thẳng song song với SB, SD cắt BC, CD tại B, Q. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của PQ với $AB, AD$. Tính khoảng cách từ E đến (SBD).

**A.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{11}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{9}$ **C.** $\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

**Lời giải**

**Chọn C.**




Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Qua A dựng AH ⊥ SO. Dễ dàng chứng minh được AH ⊥ BD.

Khi đó AH = d(A;(SBD)). Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$$CI.SC=AC^2\Rightarrow\frac{IC}{SC}=\frac{AC^2}{SC^2}=\frac{AC^2}{SA^2+AC^2}=\frac{AB^2+BC^2}{SA^2+(AB^2+BC^2)}=\frac{2a^2}{2a^2+3a^2}=\frac{2}{5}$$

ΔCBS có IP//SB $\Rightarrow\dfrac{IP}{SB}=\dfrac{CP}{CB}=\dfrac{CI}{CS}\Rightarrow\dfrac{CP}{CB}=\dfrac{2}{5}$

Áp dụng định lý Talet:

$$\frac{PE}{CQ}=\frac{BP}{PC}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{BE}{CQ}=\frac{BC-CP}{PC}=\frac{3}{2}$$

Mà AB = CD = CQ + QP = CQ + BE = $\dfrac{5}{3}$ BE.

Do tam giác AEF vuông tại A nên:

$$S_{AEF}=\frac{1}{2}AE.AF=\frac{1}{2}AE^2=\frac{1}{2}\left(AB+BE\right)^2=\frac{32}{25}AB^2=\frac{32a^2}{25}\text{ (đvdt)}$$

$$\frac{DA}{DE}=\frac{5}{3}\Rightarrow d\left(E,\left(SBD\right)\right)=\frac{3}{5}d\left(A,\left(SBD\right)\right)$$

Tam giác $SAO$ vuông tại $A$, khi đó $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AO^2}\Rightarrow AH^2=\dfrac{3a^2}{7}$

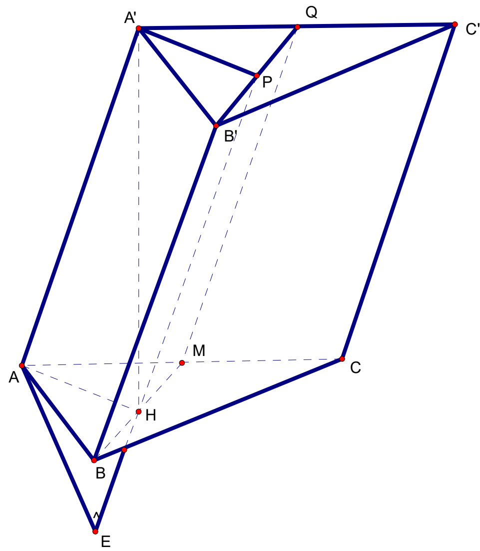
Vậy $d\left(E,\left(SBD\right)\right)=\dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$.

**Câu 147:** Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, ACB = $30^0$; M là trung điểm cạnh AC. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của lăng trụ bằng $60^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM. Tính theo a khoảng cách từ C' đến mặt phẳng (BMB').

**A.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**




$A'H\perp\left(ABC\right)\Rightarrow A'H$ là đường cao của hình lăng trụ.

AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC)

$\Rightarrow A'AH=60^0$

$V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}$

$AC=2a,\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=\mathrm{AB}=\mathrm{a}\Rightarrow\mathrm{AH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'H=\dfrac{3a}{2}$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

$d\left(C',\left(BMB'\right)\right)=d\left(C,\left(BMB'\right)\right)=d\left(\mathrm{A},\left(BMB'\right)\right)=\dfrac{3V_{A.BMB'}}{S_{BMB'}}$

$V_{A.BMB'}=V_{\mathrm{B'.AMB}}=\dfrac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Do $BM\perp\left(AHA'\right)$ nên $BM\perp AA'\Rightarrow BM\perp BB'\Rightarrow\Delta BMB'$ vuông tại **B.**

$\Rightarrow S_{BMB'}=\dfrac{1}{2}BB'.BM=\dfrac{1}{2}a\sqrt{3}.\mathrm{a}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $d\left(C';\left(BMB'\right)\right)=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}:\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3a}{4}$

(**Cách 2:** $d\left(\mathrm{A},\left(BMB'\right)\right)=AE=AH.\sin AHE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 60^0=\dfrac{3a}{4}$)

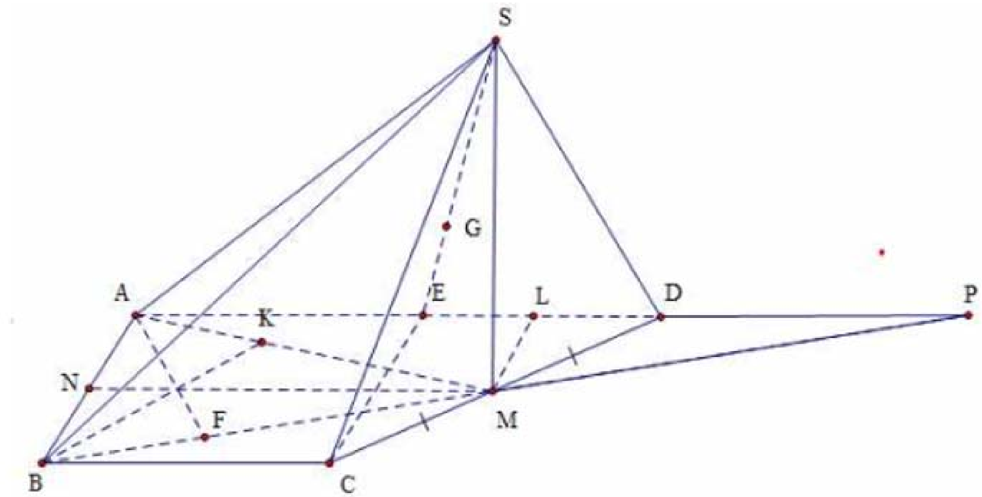
**Vậy chọn đáp án C.**

**Câu 148:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$, $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của $S$ trên mặt đáy là trung điểm $M$ của cạnh $CD$. Khoảng cách từ trọng tâm $G$ của tam giác $SAD$ đến mặt phẳng $(SBM)$ bằng

**A.** $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{10}}{15}$.

**Lời giải**

Chọn đáp án A




Gọi $E$ là trung điểm của $AD$ ta có $CE = AB = ED$. Có $CD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow CE = ED = 2a$

Do vậy $AD = 4a; BD = 2a$. Gọi $N$ là trung điểm của $AB$ suy ra $MN = 3a, S_{MAB} = \frac{1}{2}NM.AB = 3a^2$

$MA = \sqrt{AN^2 + NM^2} = a\sqrt{10} = MB$. Gọi $L$ là trung điểm của $DE$ ta có $LA = 3a$ và $L$ là trung điểm của $AP$.

Khi đó $LP = 3a \Rightarrow EP = 4a; PA = 6a.\frac{d(A,(SBM))}{d(E,(SBM))} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, d(E,(SBM)) = \frac{3}{2}d(G,(SMB))$

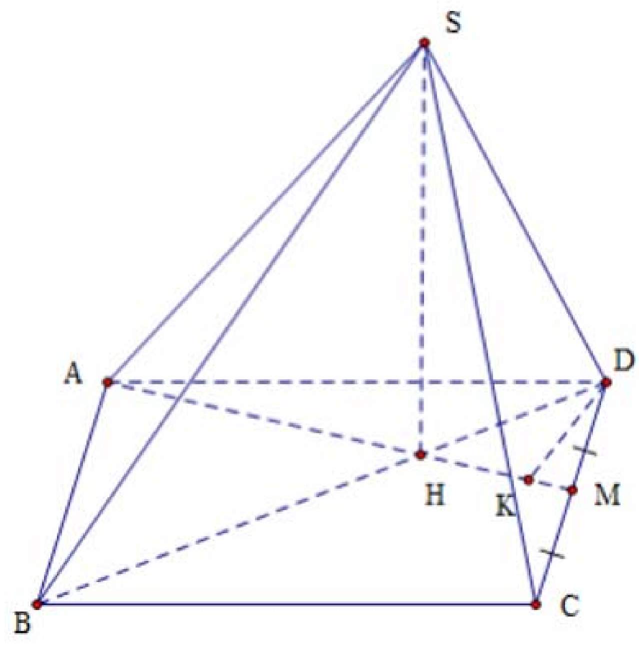
Do đó $d(G,(SBM)) = \frac{4}{9}d(A,(SMB)) = \frac{4}{9}AF = \frac{4}{9}.\frac{3a\sqrt{10}}{5} = \frac{4a\sqrt{10}}{15}$

**Câu 149:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $2a^2$, $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 2a$. Gọi $M$ là trung điểm của $CD$. Hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(SAM)$ cùng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm $B$ đến mặt phẳng $(SAM)$ bằng

**A.** $\frac{4a\sqrt{10}}{15}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{10}}{5}$.

**Lời giải**

Chọn đáp án C




Gọi $H = AM \cap BD$.

Ta có: $\begin{cases}(SBD)\perp(ABC)\\(SAM)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Lại có $\dfrac{HB}{HD} = \dfrac{AB}{DM} = 2 \Rightarrow d\left(D,(SAM)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(B,(SAM)\right)$

$S_{ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ADC} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{2}$.

Ta có: $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}AD.DM\sin D \Rightarrow \sin D = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{D} = 45°$

Do vậy $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2 - 2AD.DM\cos 45°} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}a$

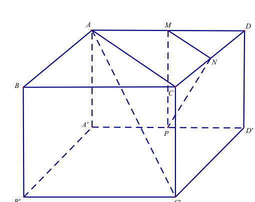
Do vậy $DK = \dfrac{2S_{ADM}}{AM} = \dfrac{2a}{\sqrt{10}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

**Câu 150:** Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $a$. Gọi $M,N,P$ lần lượt là trung điểm của $AD,DC,A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(MNP)$ và $(ACC')$.

**A.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**



Ta có: Trong tam giác $ACD$: $MN//AC$ (1).

Trong hình vuông $AA'D'D$: $\begin{cases} AM = A'P \\ AM//A'P \Rightarrow AMPA' \text{ là hình chữ nhật.} \\ AA' \perp AM \end{cases}$

$\Rightarrow MP//AA' \Rightarrow MP//CC'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $(MNP)//(ACC')$.

$\Rightarrow d((MNP),(ACC')) = d(I,(ACC'))$ (với $I$ là trung điểm $MN$).

Gọi $O = AC \cap BD$.

Mặt khác: $\begin{cases} IO \perp AC \\ IO \perp CC' \end{cases} \Rightarrow IO \perp (ACC') \Rightarrow d(I,(ACC')) = IO$.

Mà: $IO = \frac{1}{2}DO = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

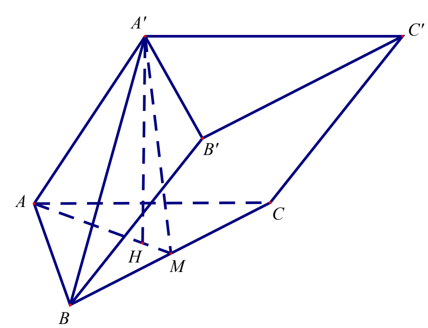
Suy ra: $d((MNP),(ACC')) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

**Câu 151:** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng $60^0$, đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$ và $A'$ cách đều $A,B,C$. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

**A.** $a$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**




Ta có: $(A'B'C')//(ABC) \Rightarrow d((A'B'C'),(ABC)) = d(A',(ABC))$.

Gọi $M$ là trung điểm $BC$. Gọi $H$ là trọng tâm tam giác $ABC$.

Tam giác $ABC$ đều, trọng tâm $H$ và $A'$ cách đều $A,B,C$.

Suy ra: $A'$ thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow d(A',(ABC)) = A'H$.

Mặt khác: góc giữa cạnh bên và đáy bằng $60^0 \Rightarrow \widehat{A'AH} = 60^0$.

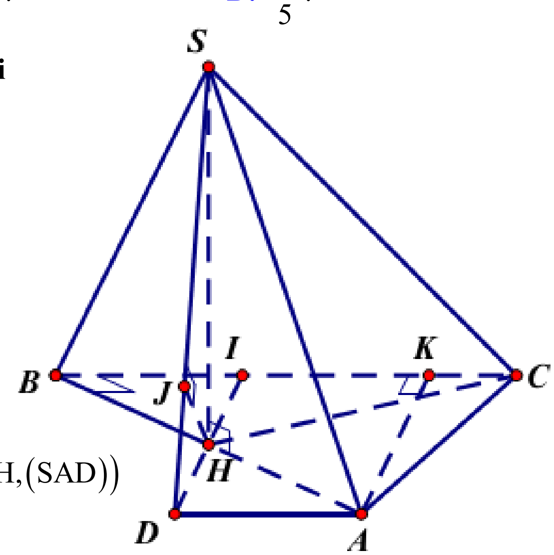
Trong tam giác $A'AM$: $\tan 60^0 = \frac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH.\tan 60^0 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a$.

Suy ra: $\Rightarrow d((A'B'C'),(ABC)) = a$.

**Câu 152:** Cho hình chóp S.ABC có $SC=\frac{a\sqrt{70}}{5}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=2a, AC=a$ và hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABC)$ là trung điểm cạnh AB. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA.

**A.** $\frac{3a}{5}$. **B.** $\frac{4a}{5}$. **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{2a}{5}$.

**Lời giải**




**Chọn B.**

Tam giác AHC vuông cân cạnh a nên $CH=a\sqrt{2}$

Tam giác SHC vuông tại H nên

$SH=\sqrt{SC^2-CH^2}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$

Dựng $AK\perp BC, HI\perp BC$. Đường thẳng qua A song song với BC cắt IH tại D

$\Rightarrow BC//(SAD)$

$\Rightarrow d(BC,SA)=d(BC,(SAD))=d(B,(SAD))=2d(H,(SAD))$

$AD\perp(SDH)\Rightarrow(SAD)\perp(SDH)$.

Kẻ $HJ\perp SD\Rightarrow HJ\perp(SAD)\Rightarrow d(H,(SAD))=HJ$

Ta có: $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\Rightarrow AK=\frac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow HD=\frac{a}{\sqrt{5}}$

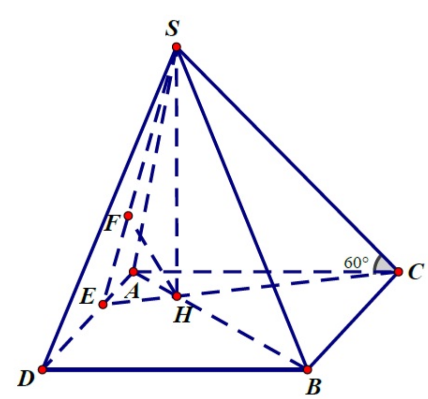
$\frac{1}{HJ^2}=\frac{1}{HD^2}+\frac{1}{HS^2}\Rightarrow HJ=\frac{2a}{5}$. Vậy $d(BC,SA)=\frac{4a}{5}$

**Vậy chọn đáp án B.**

**Câu 153:** Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng 3a. Chân đường cao hạ từ đỉnh S lên mặt phẳng $(ABC)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB=3AH$, góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABC)$ bằng $60^0$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

**A.** $\frac{a\sqrt{3}}{25}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{45}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

**Lời giải**




**Chọn A.**

Nhận thấy $SH\perp(ABC)\Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow\widehat{SCH}=60^\circ$ là góc giữa SC và mặt phẳng $(ABC)$

Ta có: $HC^2=AC^2+AH^2-2AC.AH.\cos60^\circ$

$=9a^2+a^2-2.3a.a\frac{1}{2}=7a^2$

$\Rightarrow HC=a\sqrt{7}\Rightarrow SH=HC.\tan60^\circ=a\sqrt{21}$

Dựng $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow AD//CB\Rightarrow BC//(SAD)$

$\Rightarrow d(SA;BC)=d(BC;(SAD))=d(B;(SAD))=3d(H;(SAD))$

Dựng $HE\perp AD$ tại $E\Rightarrow AD\perp(SHE)\Rightarrow(SAD)\perp(SHE)$ (theo giao tuyến SE)

Dựng $HF\perp(SE)$ tại $F\Rightarrow HF\perp(SAD)\Rightarrow HF=d(H;(SAD))$

Ta có; $HE = AH\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{21a^2} = \frac{29}{21a^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d\left(B;(SAD)\right) = \frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$$

Vậy $d\left(SA;BC\right) = \dfrac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **Vậy chọn đáp án** **A.**

**Câu 154:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a$, $BD = 4a$. Tính theo $a$ khoảng cách giữa hai đường thẳng $AD$ và $SC$.

**A.** $\dfrac{4a\sqrt{13}}{91}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{165}}{91}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{135}}{91}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Gọi $O = AC \cap BD, H$ là trung điểm của $AB,$ suy ra $SH \perp AB$.

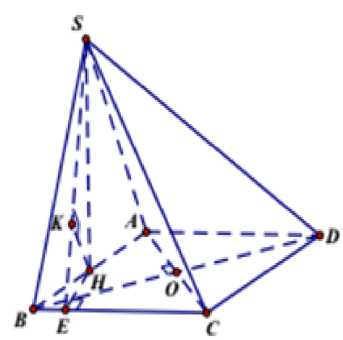
Do $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Ta có: $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

$OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{4a}{2} = 2a$

$\Rightarrow Ab = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$

$SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}; S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}2a.4a = 4a^2$




Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{15}}{2}4a^2 = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$

Ta có: $BC // AD \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(AD,SC) = d\left(AD;(SBC)\right) = d\left(A;(SBC)\right)$

Do $H$ là trung điểm của $AB$ và $B = AH \cap (SCB) \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = 2d\left(H;(SBC)\right)$

Kẻ $HE \perp BC, H \in BC$. Do $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHE)$.

Kẻ $HK \perp SE, K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d\left(H;(SBC)\right)$

$$HE = \frac{2S_{BCH}}{BC} = \frac{S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{2BC} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

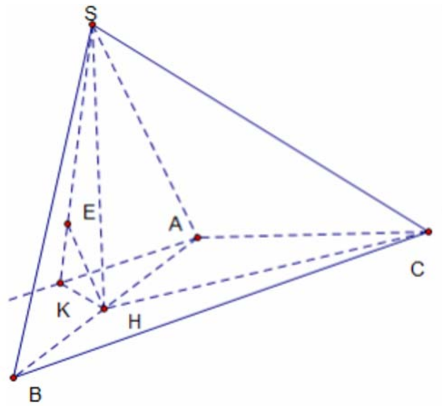
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{4}{15a^2} = \frac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \frac{2a\sqrt{1365}}{91}$$

Vậy $d(AD,SC) = 2HK = \dfrac{4a\sqrt{1365}}{91}$. **Vậy chọn đáp án** **C.**

**Câu 155:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$, $AB = AC = 2a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh $S$ lên mặt phẳng $(ABC)$ trùng với trung điểm $H$ của cạnh $AB$. Biết $SH = a$, khoảng cách giữa 2 đường thẳng $SA$ và $BC$ là

**A.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**




Chọn đáp án A

Dựng $Ax//BC \Rightarrow d\left(SA,BC\right)=d\left(B;SAx\right)$

Dựng $HK\perp Ax \Rightarrow \left(SHK\right)\perp Ax$

Dựng $HE\perp SK \Rightarrow d\left(B,SAx\right)=2d\left(H,SAx\right)$

Ta có: $HK = AH\sin\widehat{HAK} = a\sin 56^\circ = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

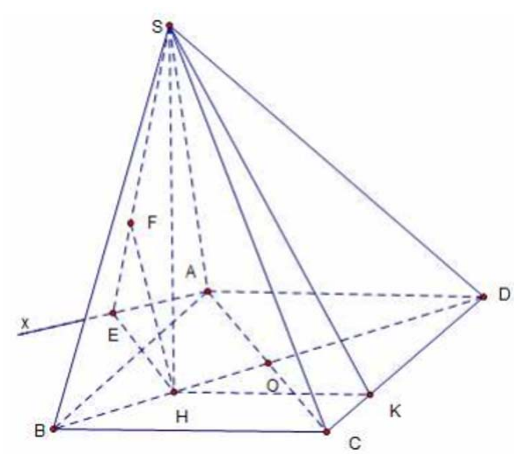
$d\left(H,SAx\right)=HE=\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Do đó $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

**Câu 156:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của $S$ trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là điểm $H$ thuộc đoạn $BD$ sao cho $HD=3HB$. Biết góc giữa mặt phẳng $\left(SCD\right)$ và mặt phẳng đáy bằng $45^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$ và $BD$ là

**A.** $\dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{51}}{13}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{38}}{17}$.

**Lời giải**




Chọn đáp án A

Dựng $HK\perp CD \Rightarrow CD\perp\left(SHK\right)$

do vậy $\widehat{(SCD, ABCD)} = \widehat{SKH} = 45°$.

Ta có: $\Delta HKD$ vuông cân tại $K$ do vậy

$HK = KD = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow SH = HK \tan 45° = \dfrac{3a}{2}$.

Dựng $Ax//BD$ ta có:

$d(SA, BD) = d(BD,(SAx)) = d(H,(SAx))$

Dựng $HE \perp Ax \Rightarrow HE = OA = a\sqrt{2}$

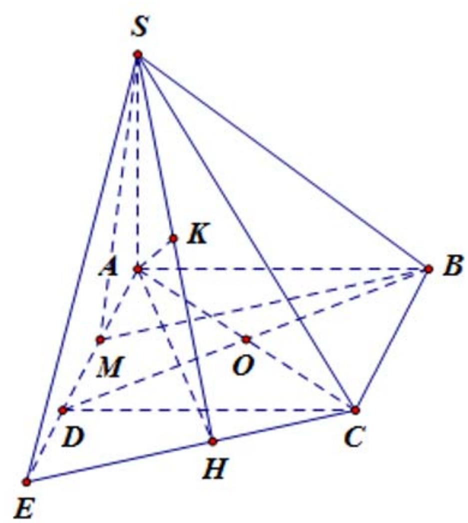
Dựng $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAx)$

Ta có: $HF = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a\sqrt{34}}{17}$

**Câu 157:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng $(SBD)$ tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Gọi $M$ là trung điểm của $AD$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $SC$ và $BM$.

**A.** $\dfrac{2a}{\sqrt{11}}$. **B.** $\dfrac{6a}{\sqrt{11}}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{11}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{11}}$.

**Lời giải**




Chọn đáp án A

Gọi $O$ là tâm của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow AO \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAO)$.

Do đó $\widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{SOA} = 60° \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Qua $C$ vẽ đường thẳng song song với $BM$ cắt $AD$ tại $E$.

Khi đó $BM//(SCE) \Rightarrow d(BM, SC) = d(M,(SCE))$

Mà $ME = \dfrac{2}{3}AE \Rightarrow d(M,(SCE)) = \dfrac{2}{3}d(A,(SCE))$

Kẻ $AH \perp CE$ tại $H$ suy ra $CE \perp (SAH)$ và $AH.CE = CD.AE$.

Kẻ $AK \perp SH$ tại $K$ suy ra $AK \perp (SCE) \Rightarrow d(A,(SCE)) = AK$.

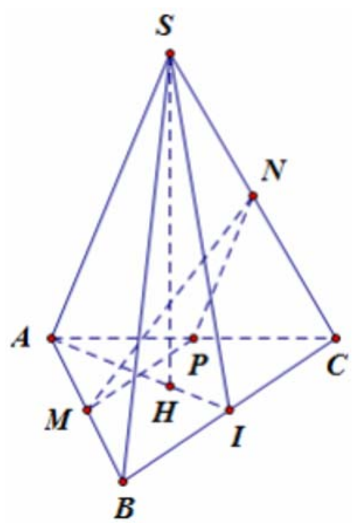
Mà $AH = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$ nên $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AK = \dfrac{3a}{\sqrt{11}}$.

Do đó $d(BM, SC) = \dfrac{2}{3}\dfrac{3a}{\sqrt{11}} = \dfrac{2a}{\sqrt{11}}$

**Câu 158:** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có độ dài đường cao từ đỉnh $S$ đến mặt phẳng đáy $(ABC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. Góc tạo bởi mặt bên với mặt phẳng đáy bằng $60°$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $SC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$, $MN$.

**A.** $\dfrac{9a\sqrt{3}}{42}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{3}}{42}$. **C.** $\dfrac{6a\sqrt{3}}{42}$. **D.** $\dfrac{12a\sqrt{3}}{42}$.

**Lời giải**




Chọn đáp án A

Gọi $H$ là tâm của tam giác $ABC, I$ là trung điểm của $BC$.

Suy ra $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SI, AI)} = \widehat{SIA} = 60°$.

Đặt $AB = x \Rightarrow HI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \tan 60°.HI = \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{7}$.

Gọi $P$ là trung điểm của $AC$ suy ra $NP // SA \Rightarrow SA // (MNP)$.

$\Rightarrow d(SA, MN) = d(SA,(MNP)) = d(A,(MNP)) = \dfrac{3V_{A.MNP}}{S_{\Delta MNP}}$.

• $3V_{A.MNP} = d(N,(ABC)) = S_{\Delta AMP} = \dfrac{9a^3\sqrt{7}}{392}$

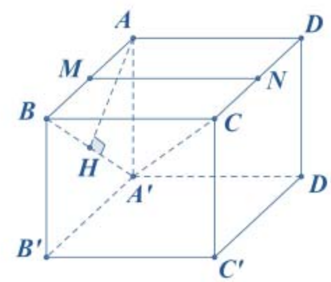
- $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}MP.NP=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{7}.\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{21}}{28}$.

Do đó $d\left(A,\left(MNP\right)\right)=\frac{9a\sqrt{3}}{42}\Rightarrow d\left(SA,MN\right)=\frac{9a\sqrt{3}}{42}$

**Câu 159:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng *a*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Khi đó, tỉ số $\frac{a^2.d\left(MN,A'C\right)}{V_{A.A'B'C'D'}}$ bằng

**A.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

***Lời giải***




Ta có: $V_{A.A'B'C'D'}=\frac{1}{3}AA'.S_{A'B'C'D'}=\frac{1}{3}.a.a^2=\frac{1}{3}a^3$.

Vì $MN//\left(A'BC\right)\Rightarrow d\left(MN,A'C\right)=d\left(MN,\left(A'BC\right)\right)=d\left(M,\left(A'BC\right)\right)$

Vì $AM\cap\left(A'BC\right)=\left\{B\right\}\Rightarrow\frac{d\left(M,\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A,\left(A'BC\right)\right)}=\frac{MB}{AB}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(A'BC\right)\right)$

Trong $\left(AA'B'B\right)$, kẻ $AH\perp A'B,\left(H\in A'B\right)$. Vì $\begin{cases}BC\perp\left(AA'B'B\right)\\AH\subset\left(AA'B'B\right)\end{cases}\Rightarrow BC\perp AH$.

Vì $\begin{cases}AH\perp A'B\\AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(A'BC\right)\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}$

Ta có: $BH=\frac{A'B}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow AH=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $d\left(MN,A'C\right)=d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}AH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $\frac{a^2.d\left(MN,A'C\right)}{V_{A.A'B'C'D'}}=\frac{a^2.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{3}a^3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

***Chọn đáp án C.***

## Chương 9. Ứng dụng đạo hàm – khảo sát hàm số

**Câu 160:** [THPT Nguyễn Thái Học(K.H)] Tìm $m$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\left(2m+1\right)x^2+2mx+1$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

**A.** $m>0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\leq 0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Điều kiện để hàm số đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ là $y' \geq 0, \forall x \in [0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow x^2 + 2(2m+1)x + 2m \geq 0, \forall x \geq 0$.

$\Leftrightarrow m \geq \dfrac{-x^2 - 2x}{4x+2} \Leftrightarrow m \geq \max\limits_{[0;+\infty)} g(x)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{-x^2 - 2x}{4x+2}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x) = \dfrac{-4x^2 - 4x - 4}{(4x+2)^2} < 0, \forall x \in [0;+\infty)$.

Do đó hàm số $g(x)$ luôn nghịch biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Suy ra $\max\limits_{[0;+\infty)} g(x) = g(0) = 0$.

Vậy $m \geq 0$.

**Câu 161:** **[Cụm 6 HCM]** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m^2+3m+3)x^2 + 3(m^2+1)^2 x + m + 2$.Gọi $S$ là tập các giá trị của tham số $m$ sao cho hàm số đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$. $S$ là tập hợp con của tập hợp nào sau đây?

**A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $y' = 3x^2 - 3\left(m^2+3m+3\right).2x + 3\left(m^2+1\right)^2$.

Khi đó: $\Delta' = 9\left(m^2+3m+3\right)^2 - 9.\left(m^2+1\right)^2 = 9\left(3m+2\right).\left(2m^2+3m+4\right)$.

TH1: Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{2}{3}$. Khi đó ta có $a = 3 > 0$ nên $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

TH2: Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{2}{3}$. Khi đó $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$.

Ta có $y' > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;x_1\right) \cup \left(x_2;+\infty\right)$ và $y' < 0 \Leftrightarrow x \in \left(x_1;x_2\right)$. Do đó để hàm số đã cho đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ thì $\left[1;+\infty\right) \subset \left(x_2;+\infty\right)$.

Ta có: $x_1 < x_2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2} < 1 \\ \left(x_1-1\right).\left(x_2-1\right) \leq 0 \end{cases}$.

Xét $\dfrac{x_1+x_2}{2} < 1 \Leftrightarrow m^2+3m+3 < 1 \Leftrightarrow m^2+3m+2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -1$ ( vô lý vì $m > -\dfrac{2}{3}$).

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ thì $m \leq -\dfrac{2}{3}$.

**Chú ý:** Sau khi giải trường hợp 1, ta được $m \le -\frac{2}{3}$. Do bài toán yêu cầu là tập các giá trị của tham số $m$ là tập con của tập nào là ta có thể chọn được đáp án $(-\infty;0)$.

**Câu 162:** [THPT Nguyễn Thái Học(K.H)] Giá trị của $m$ để hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$ là:

**A.** $-2 \le m \le 2$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $-2 \le m \le 1$. **D.** $-2 < m \le -1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(-\infty,1)$ là $y'<0, \forall x \in (-\infty;1)$.

$$\frac{m^2-4}{(x+m)^2}<0, \forall x<1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ -m \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ m \le -1 \end{cases} \Rightarrow -2<m \le -1.$$

**Câu 163:** **[Sở GD và ĐT Long An]** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$..

**A.** $m \ge \frac{1}{2}$. **B.** $m \le -\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại $m$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\left[\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2\right]'=\frac{2x}{x^2+1}-2m$.

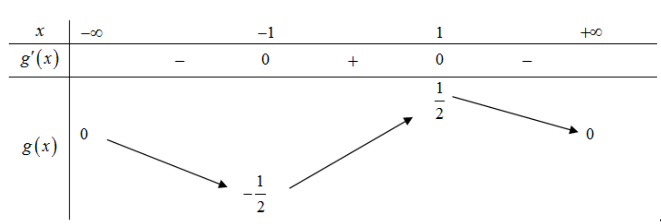
Để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

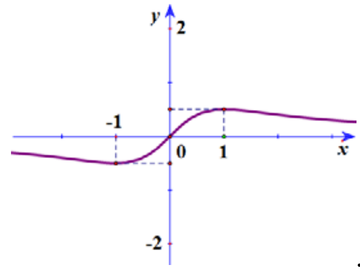
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}-2m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \ge m, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; $g'(x)=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$:






Theo bảng biến thiên trên thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ hay $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{1}{2}$.

**Câu 164:** **[THPT Lê Hồng Phong]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 1}{m\cot x - 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**A.** $m \in (-\infty;1)$. **B.** $m \in (-\infty;0)$.

**C.** $m \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. **D.** $m \in (1;+\infty)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có: $y' = \dfrac{-\left(1+\cot^2 x\right)(m\cot x - 1) + m\left(1+\cot^2 x\right)(\cot x - 1)}{(m\cot x - 1)^2} = \dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x - 1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\cot x - 1 \neq 0, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y' = \dfrac{\left(1+\cot^2 x\right)(1-m)}{(m\cot x - 1)^2} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \vee m \geq 1 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

**Câu 165:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Tìm tất cả các giá trị thực $m$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. **C.** $m \geq \sqrt{2}$. **D.** $m \leq -\sqrt{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + m$.

Vì $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m - \sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + m \leq m + \sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow m - \sqrt{2} \leq y' \leq m + \sqrt{2}$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $y' \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\ m-\sqrt{2}\ge 0\ \Leftrightarrow\ m\ge\sqrt{2}$.

**Câu 166:** **[Sở GDĐT Lâm Đồng lần 03]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=\dfrac{m-\cos x}{\sin^2 x}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**A.** $m\le\dfrac{5}{4}$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\le 2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $y=\dfrac{m-\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{m-\cos x}{1-\cos^2 x}$.

Đặt $t=\cos x,\ t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, xét hàm $g(t)=\dfrac{m-t}{1-t^2}$, $t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $g'(t)\le 0,\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2+1}{2t},\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét hàm $h(t)=\dfrac{t^2+1}{2t}$, $\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có $h'(t)=\dfrac{t^2-1}{2t^2}>0$, $\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lập bảng BBT trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có $m\le\dfrac{5}{4}$ thỏa YCBT.

**Câu 167:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Tìm tất cả các giá trị thực $m$ để hàm số $y=\sin x+\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. **C.** $m\ge\sqrt{2}$. **D.** $m\le-\sqrt{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có $y'=\cos x - \sin x+m=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+m$.

Vì $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ m-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+m\le m+\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow\ m-\sqrt{2}\le y'\le m+\sqrt{2}$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $y'\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m-\sqrt{2}\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \sqrt{2}$.

**Câu 168:** **[Sở GDĐT Lâm Đồng lần 07]** Tìm m để hàm số $y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

**A.** $m<0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\le 0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $t=\sin x, x \in (0;\frac{\pi}{2}) => t \in (0;1)$.

$f(t)=t^3+3t^2-mt-4, f'(t)=3t^2+6t-m=g(t), g'(t)=6t+6, g'(t)=0ót=-1.$.

$f(t)$ đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow g(t) \ge 0, \forall t\in(0;1)$.

Dựa vào BBT của $g(t)$, ta có $g(0)=-m \ge 0 \Leftrightarrow m\le 0$.

**Câu 169:** **[Sở GDĐT Lâm Đồng lần 07]** Tìm m để hàm số $y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

**A.** $m<0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\le 0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $t=\sin x, x \in (0;\frac{\pi}{2}) => t \in (0;1)$.

$f(t)=t^3+3t^2-mt-4, f'(t)=3t^2+6t-m=g(t), g'(t)=6t+6, g'(t)=0ót=-1.$.

$f(t)$ đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow g(t) \ge 0, \forall t\in(0;1)$.

Dựa vào BBT của $g(t)$, ta có $g(0)=-m \ge 0 \Leftrightarrow m\le 0$.

**Câu 170:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để hàm số $y=ax+\sqrt{x^2+1}$ có cực tiểu.

**A.** $-1<a<2$. **B.** $-1<a<1$. **C.** $0\le a<1$. **D.** $-2<a<0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=a+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

+ **ĐK cần**: Hàm số có cực trị khi phương trình $y'=0$ có nghiệm.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow a=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=f(x)$, với $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=-\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \searrow -1$ |

Do đó: Phương trình $y'=0$ có nghiệm thì có nghiệm duy nhất $x_0$ khi và chỉ khi $-1<a<1$.

+ **ĐK đủ**: Ta có: $y''=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0$ với mọi $x$. Suy ra: $y''\left(x_0\right)>0$ nên $x_0$ luôn là điểm cực tiểu với mọi $a\in\left(-1;1\right)$.

Vậy $-1<a<1$.

**Chú ý**:

+Ta có thể làm trắc nghiệm bằng phương pháp lần lượt thử với $a=0$, $a=-\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{3}{2}$ ta cũng được đáp án **A.**

+ Chỗ điều kiện đủ ta có thể dùng duy tắc 1 để kiểm tra $x_0$ là điểm cực tiểu như sau:

Hàm số có điểm cực tiểu $x_0$ khi $y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x_0$.

Ta có: $y'=\dfrac{x+a\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Vì $-1<a<1$ và $x+a\sqrt{x^2+1}\to x+a\left|x\right|=\left(1\pm a\right)x$ nên hệ số bậc cao nhất của $x+a\sqrt{x^2+1}$ là hệ số dương.

Suy ra: $y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x_0$.

Do đó: $x_0$ là điểm cực tiểu với mọi $a\in\left(-1;1\right)$.

**Câu 171:** **[THPT Trần Cao Vân - Khánh Hòa]** Với giá thực nào của tham số $m$ thì hàm số $y=mx^3+2x^2+\left(m+1\right)x-2$ có đúng 1 cực trị?

**A.** $m=0$. **B.** $m>0$. **C.** $m<0$. **D.** $m<1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Với $m=0$, hàm số trở thành: $y=2x^2+x-2$ có 1 cực trị. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Với $m\neq 0$, hàm số đã cho là hàm số bậc ba nên hoặc có hai cực trị, hoặc không có cực trị. Vậy $m\neq 0$ không thỏa mãn.

**Câu 172:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để hàm số $y=ax+\sqrt{x^2+1}$ có cực tiểu.

**A.** $-1<a<2$. **B.** $-1<a<1$. **C.** $0\le a<1$. **D.** $-2<a<0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=a+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

+ **ĐK cần**: Hàm số có cực trị khi phương trình $y'=0$ có nghiệm.

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=f\left(x\right)$, với $x\in\mathbb{R}$.

$f'\left(x\right)=-\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $1 \searrow -1$ |

Do đó: Phương trình $y'=0$ có nghiệm thì có nghiệm duy nhất $x_0$ khi và chỉ khi $-1<a<1$.

+ **ĐK đủ**: Ta có: $y''=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0$ với mọi $x$. Suy ra: $y''\left(x_0\right)>0$ nên $x_0$ luôn là điểm cực tiểu với mọi $a\in\left(-1;1\right)$.

Vậy $-1<a<1$.

**Chú ý**:

+Ta có thể làm trắc nghiệm bằng phương pháp lần lượt thử với $a=0$, $a=-\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{3}{2}$ ta cũng được đáp án **A.**

+ Chỗ điều kiện đủ ta có thể dùng duy tắc 1 để kiểm tra $x_0$ là điểm cực tiểu như sau:

Hàm số có điểm cực tiểu $x_0$ khi $y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x_0$.

Ta có: $y'=\dfrac{x+a\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Vì $-1<a<1$ và $x+a\sqrt{x^2+1}\to x+a\left|x\right|=\left(1\pm a\right)x$ nên hệ số bậc cao nhất của $x+a\sqrt{x^2+1}$ là hệ số dương.

Suy ra: $y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua nghiệm $x_0$.

Do đó: $x_0$ là điểm cực tiểu với mọi $a\in\left(-1;1\right)$.

**Câu 173:** **[THPT Ng.T.Minh Khai(K.H)]** Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $\left|x_{CĐ}+x_{CT}\right|=2$.

**A.** $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Ta có $y'=6x^2+6\left(m-1\right)x+6\left(m-2\right)=0\Leftrightarrow x^2+\left(m-1\right)x+m-2=0$.

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $\left|x_{CĐ}+x_{CT}\right|=2$ thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=2\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m-1\right)^2-4\left(m-2\right)>0\\ \left|-\dfrac{m-1}{2}\right|=2\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(m-1\right)^2-4\left(m-2\right)>0\\ \left|-\left(m-1\right)\right|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m+9>0\\ \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$$

**Câu 174:** **[BTN 162]** hàm số $y=-x^3+3\left(m+1\right)x^2-\left(3m^2+7m-1\right)x+m^2-1$. Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

**A.** $m<1$. **B.** $m<4$. **C.** $m\leq-\dfrac{4}{3}$. **D.** $m<0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}, y'=-3x^2+6(m+1)x-(3m^2+7m-1), \Delta'_y=12-3m$.

Theo YCBT suy ra phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ phân biệt thỏa $\left\{\begin{array}{l} x_1<x_2\le 1\,(1) \\ x_1<1<x_2\,(2) \end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \Delta'_y>0 \\ 3.y'(1)\ge 0 \\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=m+1<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} m<4 \\ m\le -\dfrac{4}{3}\vee m\ge 1 \\ m<0 \end{array}\right.\Leftrightarrow m\le -\dfrac{4}{3}$.

$(2)\Leftrightarrow -3.y'(1)<0\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}<m<1$.

Vậy $m<1$ thỏa mãn YCBT.

**Câu 175:** **[BTN 161]** Cho hàm số $y=x^4-2(m^2+1)x^2+1\ (1)$. Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $(1)$ có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $y'=4x^3-4(m^2+1)x$. Suy ra $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2+1} \end{array}\right.\Rightarrow$ Hàm số $(1)$ luôn có 3 điểm cực trị với mọi $m$.

Do hệ số $a=1>0$, nên $x_{CT}=\pm\sqrt{m^2+1}\Rightarrow$ giá trị cực tiểu $y_{CT}=-(m^2+1)^2+1$.

Vì $(m^2+1)^2\ge 1\Rightarrow y_{CT}\le 0$. Vậy $Max(y_{CT})=0\Leftrightarrow m^2+1=1\Leftrightarrow m=0$.

**Câu 176:** **[THPT Hùng Vương-PT]** Biết đồ thị của hàm số $y=x^3-3abx^2+bx+3$ có hai điểm cực trị và trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị đó thuộc đường thẳng $x=-1$. Khi đó.

**A.** $a.b^2>-3$. **B.** $a.b^2<3$. **C.** $a.b^2=-1$. **D.** $a.b^2=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $y'=3x^2-6abx+b$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$9a^2b^2-3b>0\ (1)$.

Gọi hai điểm cực trị của hàm số là $x_1,x_2$.

Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị đó thuộc đường thẳng $x=-1$.

$\Rightarrow -1=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{6ab}{6}=ab$.

Thay vào $(1)$ $\Rightarrow 9-3b>0 \Leftrightarrow b<3 \Rightarrow a.b^2>-3$.

**Câu 177: [THPT Lệ Thủy-Quảng Bình]** Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-2$ với giá trị nào của $m$ thì đồ thị hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: y=-\frac{1}{8}x+\frac{33}{4}$.

**A.** $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=\pm 2$. **D.** $m=\pm 4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có: $y'=-3x^2+6mx$.

$y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6mx=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2m.$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0.$.

Gọi tọa độ hai điểm cực trị là: $A(0;\ -3m-2)$, $B\left(2m;\ 4m^3-3m-2\right)$.

Trung điểm của AB là: $I\left(m;\ 2m^3-3m-2\right)$.

Vì $I\in d$ suy ra $2m^3-3m-2=-\frac{1}{8}m+\frac{33}{4} \Leftrightarrow m=2.$.

**Câu 178: [TT Hiếu Học Minh Châu]** Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$, ($m$ là tham số). Gọi $A,B$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Tổng tất cả các số $m$ để ba điểm $I,A,B$ tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là:

**A.** $\frac{4}{17}$. **B.** $-\frac{2}{17}$. **C.** $\frac{20}{17}$. **D.** $\frac{14}{17}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có $y'=3x^2-6mx+3m^2-3$. Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$.

Suy ra ta có hai điểm cực trị $A\left(m-1;-4m+2\right)$, $B\left(m+1;-4m-2\right)$.

Khi đó $IA=\sqrt{17m^2-38m+25}$ và $IB=\sqrt{17m^2-2m+1}$ và $AB=2\sqrt{5}$.

Tính. $S_{ABI}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AI}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20.(17m^2-38m+25)-\left(22-18m\right)^2}=2\left|m+1\right|$.

Ba điểm $I,A,B$ tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ khi chỉ khi.

$4.R.S=IA.IB.AB \Leftrightarrow 4.\sqrt{5}.2\left|m+1\right|=\sqrt{17m^2-38m+25}.\sqrt{17m^2-2m+1}.2\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow 289m^4-680m^3+502m^2-120m+9=0 \Leftrightarrow (m-1)(289m^3-391m^2+111m-9)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{3}{17} \end{array}\right.$. Vậy tổng cần tìm $\dfrac{20}{17}$.

**Câu 179:** **[208-BTN]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ $(C)$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

**A.** $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Ta có: $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall m\in\mathbb{R}$, hàm số luôn có CĐ, CT.

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1)$, $B(m+1;2m^3+3m^2)$.

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.

Do đó, tam giác $MAB$ có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ $M$ tới $AB$ nhỏ nhất.

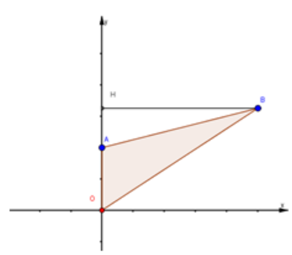
$d(M,AB)=\dfrac{|3m^2+1|}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi $m=0$.

**Câu 180:** **[THPT Nguyễn Khuyến –NĐ]** Tìm tất cả các giá trị tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị $A$, $B$ sao cho diện tích $\Delta OAB$ bằng $4$, $O$ là gốc tọa độ.

**A.** $m=\pm2$. **B.** $m=\pm1$. **C.** $m=2$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**



$y=x^3-3mx^2+2$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$. Đồ thị hàm số có hai điểm cự trị khi và chỉ khi $m\neq0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2m;-4m^3+2)$.

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.BH=\dfrac{1}{2}.2.|x_B|=4\Leftrightarrow|2m|=4\Leftrightarrow m=\pm2$.

**Câu 181:** **[THPT Ng.T.Minh Khai(K.H)]** Với giá trị nào của $m$ thì đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có ba cực trị tạo thành tam giác vuông cân?

**A.** $m=0$. **B.** $m=\pm2$. **C.** $m=\pm1$. **D.** $m=1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó đồ thị có 3 điểm cực trị là $A(0;1), B\left(m;-m^4+1\right), C\left(-m;-m^4+1\right)$ và tam giác $ABC$ cân tại $A$.

Do đó, tam giác $ABC$ vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array}\right.$.

Loại $m = 0$ ta được $m = \pm 1$.

**Câu 182:** **[Sở Hải Dương]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + \left(m^2 - m + 7\right)x + m - 5$ có hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{74}$.

**A.** $m = 3$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -2 \end{array}\right.$. **C.** $m = 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Có $y' = x^2 - 2(2m-1)x + m^2 - m + 7$.

Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - \left(m^2 - m + 7\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ 2 cực trị của hàm số. Điều kiện $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Theo Viet, ta có: $\left\{\begin{array}{l} S = x_1 + x_2 = 2(2m-1) \\ P = x_1.x_2 = m^2 - m + 7 \end{array}\right.$.

Để hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{74}$ $\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 74 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 74$.

$\Leftrightarrow 4(2m-1)^2 - 2\left(m^2 - m + 7\right) = 74 \Leftrightarrow 14m^2 - 14m - 84 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Do $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ nên $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow 2(2m-1) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 183:** **[Sở Bình Phước]** Với giá trị nào của tham số $m$ thì đồ thị hàm số.

$y=x^4-2\left(m-1\right)x^2+m^4-3m^2+2017$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $32$?

**A.** $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $y'=4x^3-4\left(m-1\right)x=4x\left(x^2-m+1\right)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m-1\end{array}\right.$.

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m-1>0\Leftrightarrow m>1\left(*\right)$.

Khi đó tọa độ ba cực trị là:

$$\begin{cases}A\left(0;m^4-3m^2+2017\right)\\B\left(-\sqrt{m-1};m^4-4m^2+2m+2016\right)\\C\left(\sqrt{m-1};m^4-4m^2+2m+2016\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=AC=\sqrt{m-1+\left(m-1\right)^4}\\BC=2\sqrt{m-1}\end{cases}.$$

Suy ra tam giác $ABC$ cân tại $A$, gọi $AH$ đường cao hạ từ đỉnh $A$ ta có $AH=\left(m-1\right)^2$.

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=\left(m-1\right)^2\sqrt{\left(m-1\right)}=32\Leftrightarrow\left(m-1\right)^5=1024\Leftrightarrow m-1=4\Leftrightarrow m=5$.

Kết hợp điều kiện $\left(*\right)\Rightarrow m=5$.

**Câu 184:** **[208-BTN]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ $(C)$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

**A.** $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow\forall m\in\mathbb{R}$, hàm số luôn có CĐ, CT.

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1)$, $B(m+1;2m^3+3m^2)$.

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB:x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.

Do đó, tam giác $MAB$ có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ $M$ tới $AB$ nhỏ nhất.

$d\left(M,AB\right)=\dfrac{\left|3m^2+1\right|}{\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Dấu "=" xảy ra khi $m=0$.

**Câu 185:** **[THPT Chuyên Quang Trung]** Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$. Gọi $M;N$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$. Khi đó tích $M.N$ là:

**A.** $2\sqrt{7}-4\ln 2$. **B.** $2\sqrt{7}+4\ln 2$. **C.** $2\sqrt{7}-4\ln 5$. **D.** $2\sqrt{7}+4\ln 5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-(\ln x+1)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x$.

Do $\sqrt{x^2+3}>|x|\Rightarrow x-\sqrt{x^2+3}<x-|x|\le 0\Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}<0$.

Và $x\ge 1\Rightarrow \ln x\ge 0\Rightarrow -\ln x\le 0$.

Do đó $y'=\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x<0$. Nên hàm số nghịch biến trên $[1;2]$.

Khi đó $M=y(1)=2;N=y(2)=\sqrt{7}-2\ln 2$.

Vậy $M.N=2\sqrt{7}-4\ln 2$.

**Câu 186:** **[THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**A.** $m\le 0$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m>-1$. **D.** $m=5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Xét hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $m\notin(0;1)$.

$$y'=\frac{2\cos x(\sin x-m)-\cos x(2\sin x-1)}{(\sin x-m)^2}=\frac{-2m\cos x+\cos x}{(\sin x-m)^2}=(-2m+1)\frac{\cos x}{(\sin x-m)^2}.$$

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\dfrac{\cos x}{(\sin x-m)^2}>0\forall m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi.

$$\begin{cases} m\notin(0;1) \\ -2m+1>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\notin(0;1) \\ m<\dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow m\le 0.$$

**Câu 187:** [THPT Chuyên LHP] Tính tổng tất cả các số nguyên $m$ thỏa mãn phương trình $x-m\sqrt{x}+1=0$ có nghiệm $x\in[4;\,16]$.

**A.** $6$. **B.** $9$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

PT $x-m\sqrt{x}+1=0$. Đặt $t=\sqrt{x}$, với $x\in[4;\,16]\Rightarrow t\in[2;4]$.

PT $\Leftrightarrow t^2-mt+1=0\Leftrightarrow m=t+\frac{1}{t}=g(t)$. Xét hàm số $g(t)=t+\frac{1}{t}$ trên đoạn $[2;4]$.

$g'(t)=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}>0\ \forall t\in[2;4]$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min\limits_{[2;4]} g(t)\le m\le \max\limits_{[2;4]} g(t)\Leftrightarrow g(2)\le m\le g(4)\Leftrightarrow \frac{5}{2}\le m\le\frac{17}{4}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{3;\,4\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị $m$ bằng $7$.

**Câu 188:** [THPT CHUYÊN VINH] Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy$ là.

**A.** $\min P=-91$. **B.** $\min P=-63$. **C.** $\min P=-80$. **D.** $\min P=-83$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $x\ge 3;\, y\ge -3\Rightarrow x+y\ge 0$

$x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow (x+y)^2=4(x+y)+8\sqrt{x-3}.\sqrt{y+3}\ge 4(x+y)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y\ge 4\\ x+y\le 0\end{array}\right.$.

Xét $x+y\ge 4$.

Mặt khác $x+y=2\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}\right)\le 2\sqrt{2(x+y)}\Leftrightarrow x+y\le 8\Rightarrow x+y\in[4;8]$.

Xét biểu thức $P=4\left(x^2+y^2\right)+15xy=4(x+y)^2+7xy\ge 16(x+y)+7xy=7x(y+3)+16y-5x$.

Do $4(x+y)^2=4(x+y).(x+y)\ge 16(x+y)$.

Mà $\begin{cases}y+3\ge 0\\ y\ge 4-x\end{cases}\Rightarrow P\ge 16(4-x)-5x=64-21x$, kết hợp với

$x+y\ge 4\Rightarrow x\in[3;7]\Rightarrow 64-21x\ge -83$.

Xét $x+y=0\Rightarrow x=3;\, y=-3\Rightarrow P=-63$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P$ là $-83$.

**Câu 189:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ khi $x=-1$ bằng $5$.

**A.** $\left(-4;3\right)$. **B.** $\left(-6;-3\right)\cup\left(0;2\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-5;-2\right)\cup\left(0;3\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $t=x^2-2x+1=\left(x-1\right)^2$ với $x\in\left[-1;2\right]\Rightarrow t\in\left[0;4\right]$. Ta có $y=f\left(t\right)=\left|t+m-1\right|$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y\Leftrightarrow \max\limits_{t\in[0;4]} f\left(t\right)=\max\limits_{t\in[0;4]}\left\{f\left(0\right),\,f\left(4\right)\right\}=\max\limits_{t\in[0;4]}\left\{\left|m-1\right|,\,\left|m+3\right|\right\}$.

**TH1.** Với $\max\limits_{[-1;2]} y=\left|m-1\right|$, ta được $\begin{cases}\left|m-1\right|\ge\left|m+3\right|\\ \left|m-1\right|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m-1\right|\ge\left|m+3\right|\\ m=-4\vee m=6\end{cases}\Leftrightarrow m=-4$.

**TH2.** Với $\max\limits_{[-1;2]} y=\left|m+3\right|$, ta được $\begin{cases}\left|m+3\right|\ge\left|m-1\right|\\ \left|m+3\right|=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|m+3\right|\ge\left|m-1\right|\\ m=2\vee m=-8\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Vậy các giá trị $m$ tìm được thỏa mãn tập hợp $\left(-5;-2\right)\cup\left(0;3\right)$.

**Câu 190:** **[BTN 162]** Cho hàm số $y=\left|x^2+2x+a-4\right|$. Tìm $a$ để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $a=2$. **B.** $a=1$. **C.** Một giá trị khác. **D.** $a=3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $y=\left|x^2+2x+a-4\right|=\left|\left(x+1\right)^2+a-5\right|$. Đặt $u=\left(x+1\right)^2$ khi đó $\forall x\in\left[-2;1\right]$ thì $u\in\left[0;4\right]$ Ta được hàm số $f\left(u\right)=\left|u+a-5\right|$. Khi đó.

$\max\limits_{x\in[-2;1]} y=\max\limits_{u\in[0;4]} f\left(u\right)=\max\left\{f\left(0\right),f\left(4\right)\right\}=\max\left\{\left|a-5\right|;\left|a-1\right|\right\}$.

Trường hợp 1: $\left|a-5\right|\ge\left|a-1\right|\Leftrightarrow a\le 3\Rightarrow \max\limits_{u\in[0;4]} f\left(u\right)=5-a\ge 2\Leftrightarrow a=3$.

Trường hợp 2: $\left|a-5\right|\le\left|a-1\right|\Leftrightarrow a\ge 3\Rightarrow \max\limits_{u\in[0;4]} f\left(u\right)=a-1\ge 2\Leftrightarrow a=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{x\in[-2;1]} y=2\Leftrightarrow a=3$.

**Câu 191:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Tập hợp nào dưới đây chứa tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ khi $x=-1$ bằng $5$.

**A.** $\left(-4;3\right)$. **B.** $\left(-6;-3\right)\cup\left(0;2\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(-5;-2\right)\cup\left(0;3\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ với $x \in [-1;2] \Rightarrow t \in [0;4]$. Ta có $y = f(t) = |t + m - 1|$.

Khi đó $\max\limits_{[-1;2]} y \Leftrightarrow \max\limits_{t\in[0;4]} f(t) = \max\limits_{t\in[0;4]} \{f(0), f(4)\} = \max\limits_{t\in[0;4]} \{|m-1|, |m+3|\}$.

**TH1.** Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m-1|$, ta được $\begin{cases} |m-1| \ge |m+3| \\ |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-1| \ge |m+3| \\ m = -4 \vee m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$.

**TH2.** Với $\max\limits_{[-1;2]} y = |m+3|$, ta được $\begin{cases} |m+3| \ge |m-1| \\ |m+3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+3| \ge |m-1| \\ m = 2 \vee m = -8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy các giá trị $m$ tìm được thỏa mãn tập hợp $(-5;-2) \cup (0;3)$.

**Câu 192:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Cho $x$, $y$ là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M + m$ bằng.

**A.** $41$. **B.** $42$. **C.** $43$. **D.** $44$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

$P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-x-y}$.

Đặt $t = x + y \Rightarrow P = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$.

Theo giả thiết $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$.

$\Leftrightarrow (x+y)^2 = x + 2y + 1 + 2\sqrt{2(x-1)(y+1)} \le x + 2y + 1 + 2(x-1) + y + 1 = 3(x+y)$.

$\Rightarrow t \le 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 3$.

Xét $f(t) = t^2 + 2t + 2 + 8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$.

$f'(t) = 2t + 2 - \dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (2t+2)\sqrt{4-t} = 4 \Leftrightarrow (t+1)\sqrt{4-t} = 2$.

$$\Leftrightarrow (t^2 + 2t + 1)(4-t) = 4 \Leftrightarrow -t^3 + 2t^2 + 7t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \notin [0;3] \\ t = 1 - 2\sqrt{2} \notin [0;3] \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = 18$; $f(3) = 25 \Rightarrow \min P = 18$, $\max(P) = 25$.

Vậy $M + m = 25 + 18 = 43$.

**Câu 193:** [THPT Chuyên LHP] Xét $a$, $b$, $c \in (1;2]$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \log_{bc}(2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca}(4b^2 + 16b - 16) + \log_{ab}(c^2 + 4c - 4).$$

**A.** $P_{\min}=4$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$. **C.** $P_{\min}=\log_3\dfrac{289}{2}+\log_{\frac{9}{4}}8$. **D.** $P_{\min}=6$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $a\in(1;2]\Rightarrow(a+2)(a-2)(a-1)\le 0\Leftrightarrow a^3-a^2-4a+4\le 0\Leftrightarrow a^2+4a-4\ge a^3$

Tương tự $b^2+4b-4\ge b^3, c^2+4c-4\ge c^3$ Suy ra $P\ge\log_{bc}(2a^3)+\log_{ca}(4b^3)+\log_{ab}c^3$

$\Rightarrow P\ge\log_{bc}2+\log_{ca}4+3(\log_{bc}a+\log_{ca}b+\log_{ab}c)$

Lại có $bc\le 4, ac\le 4\Rightarrow\log_{bc}2\ge\log_4 2=\dfrac{1}{2},\log_{ca}4\ge 1$

Suy ra $P\ge\dfrac{3}{2}+3\left(\dfrac{\ln a}{\ln(bc)}+\dfrac{\ln b}{\ln(ca)}+\dfrac{\ln c}{\ln(ab)}\right)=\dfrac{3}{2}+3\left(\dfrac{\ln a}{\ln b+\ln c}+\dfrac{\ln b}{\ln c+\ln a}+\dfrac{\ln c}{\ln a+\ln b}\right)$

Đặt $x=\ln a, y=\ln b, z=\ln c\Rightarrow x,y,x>0$

Ta có $P\ge\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+y}+\dfrac{z}{x+y}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+y}+\dfrac{z}{x+y}\right)\ge\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=6$

$\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge\dfrac{3}{2}\forall x,y,z>0\right)$, Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}b=2\\c=2\\a=2\\x=y=z\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2\Rightarrow\min P=6$

.

**Câu 194:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Cho $x$, $y$ là các số thực thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi $M$, $m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Khi đó, giá trị của $M+m$ bằng.

**A.** $41$. **B.** $42$. **C.** $43$. **D.** $44$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

$P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}=(x+y)^2+2(x+y)+2+8\sqrt{4-x-y}$.

Đặt $t=x+y\Rightarrow P=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$.

Theo giả thiết $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$.

$\Leftrightarrow(x+y)^2=x+2y+1+2\sqrt{2(x-1)(y+1)}\le x+2y+1+2(x-1)+y+1=3(x+y)$.

$\Rightarrow t\le 3t\Leftrightarrow t^2-3t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 3$.

Xét $f(t)=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$ trên $[0;3]$.

$f'(t)=2t+2-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow(2t+2)\sqrt{4-t}=4\Leftrightarrow(t+1)\sqrt{4-t}=2$.

$\Leftrightarrow(t^2+2t+1)(4-t)=4\Leftrightarrow -t^3+2t^2+7t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1+2\sqrt{2}\notin[0;3]\\t=1-2\sqrt{2}\notin[0;3]\end{array}\right.$.

Ta có $f(0)=18$; $f(3)=25\Rightarrow\min P=18$, $\max(P)=25$.

Vậy $M+m=25+18=43$.

**Câu 195:** **[THPT Kim Liên-HN]** Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2-y$.

**A.** $P_{\min}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **B.** $P_{\min}=2+\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=2\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{191}{50}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Áp dụng bất đẳng thức MinCopxki ta có.

$P\geq\sqrt{(1-x+1-x)^2+(2y)^2}+2-y=2\sqrt{1+y^2}+2-y$.

Xét hàm số $f(y)=2\sqrt{1+y^2}+2-y$. Ta có $f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}-1$. $f'(y)=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

| $y$ | $-\infty$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(y)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(y)$ | $+\infty \searrow$ | $2+\sqrt{3}$ | $\nearrow +\infty$ |

Ta thấy $\min f(y)=2+\sqrt{3}$. Do đó $P_{\min}=2+\sqrt{3}$.

**Câu 196:** **[THPT Chuyên KHTN]** Với $a,b>0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+ab=1$, giá trị nhỏ nhất của $P=a^4+b^4$ bằng.

**A.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)^4$. **B.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$. **C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^4$. **D.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

$P=a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(a.b)^2=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2(ab)^2$.

$\Rightarrow P=\left[(1-ab)^2-2ab\right]-2(ab)^2=\left(1-4x+x^2\right)^2-2x^2$ với $ab=x\Rightarrow x>0$.

$\Rightarrow P=x^4+16x^2+1+2x^2-8x^3-8x-2x^2=x^4-8x^3+16x^2-8x+1$.

Ta có $a+b=1-ab\geq2\sqrt{ab}$.

$\Rightarrow x+2\sqrt{x}-1\leq0\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{x}\leq\sqrt{2}-1\Rightarrow 0\leq x\leq 3-2\sqrt{2}$.

$P'=4x^3-24x^2+32x-1$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $0$ | $3-2\sqrt{3}$ |
|---|---|---|
| $P'$ | $-$ | |
| $P$ | $P(0)$ $\searrow$ | $P\left(3-2\sqrt{2}\right)$ |

.

$\min P = P\left(3-2\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)^4$.

**Câu 197:** **[THPT Ngô Sĩ Liên lần 3]** Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí $A$ cách bờ $5km$, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí $C$ cách $B$ một khoảng $7km$. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ $A$ đến $M$ trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ từ $M$ đến $C$ với vận tốc $6km/h$. Xác định độ dài đoạn $BM$ để người đó đi từ $A$ đến C nhanh nhất.

**A.** $3\sqrt{2}\,km$. **B.** $\frac{7}{3}km$. **C.** $\frac{7}{2}km$. **D.** $2\sqrt{5}$ km.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $BM = x\ (km)$, $0 \le x \le 7$. Khi đó: $AM = \sqrt{25+x^2}$ và $MC = 7-x$.

Theo đề bài ta có: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$.

$f'(x) = \dfrac{3x-2\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$.

Khi đó: $f(0) = \dfrac{29}{12}$, $f(7) = \dfrac{\sqrt{74}}{4}$ và $f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14-\sqrt{5}}{12}$.

Vậy $\min\limits_{x\in[0;7]} f(x) = f\left(2\sqrt{5}\right) = \dfrac{14-\sqrt{5}}{12}$.

**Câu 198:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở $A$ đến một hòn đảo ở $C$ như hình vẽ. Khoảng cách từ $C$ đến $B$ là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ $A$ đến $B$ với khoảng cách là 4 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên(làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

**A.** $114,64$ triệu đồng. **B.** $164,92$ triệu đồng.

**C.** $106,25$ triệu đồng. **D.** $120$ triệu đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi $M$ là điểm trên đoạn $AB$ để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm $C$.

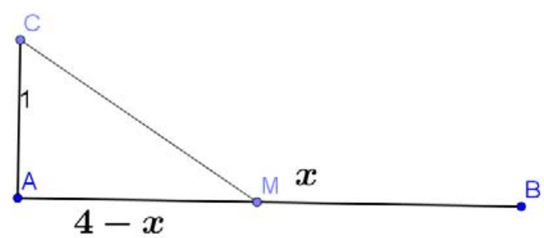
Đặt $BM = x \Rightarrow AM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1 + (4-x)^2} = \sqrt{17 - 8x + x^2}, x \in [0;4]$.

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là: $y = x.20 + 40\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ đơn vị là triệu đồng.

$$y' = 20 + 40.\frac{x-4}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 20.\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17} + 2(x-4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 17} = 2(4-x) \Leftrightarrow x = \frac{12 - \sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $y\left(\frac{12-\sqrt{3}}{3}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120$.




**Câu 199:** [Sở GDĐT Lâm Đồng lần 06] Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc của dòng nước là $6km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

**A.** 9km/h. **B.** 6km/h. **C.** 15km/h. **D.** 12km/h.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Giải.

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v - 6$ ( km/h).

Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách 300km là $t = \frac{300}{v-6}$.

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là:

$$E(v) = cv^3.\frac{300}{v-6} = 300c.\frac{v^3}{v-6}(jun), v > 6.$$

| V | 6 | 9 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $E'(v)$ | - | + | |
| E(v) | $\searrow$ | E(9) | $\nearrow$ |

$$E'(v)=600cv^2\frac{v-9}{(v-6)^2}\Leftrightarrow E'(v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0(loai)\\ v=9\end{array}\right..$$

**Câu 200:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Một người nuôi cá thì nghiệm trong hồ.Người đó thấy rằng nếu mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có $n$ con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(\text{n})=480-20\text{n}(\text{gam})$.Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

**A.** $14$. **B.** $18$. **C.** $10$. **D.** $12$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Cách 1: Thế đáp án:

| Số cá trên mỗi đơn vị diện tích | 12 | 14 | 10 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| Số cân nặng: $(480-20\text{n})\text{n}(\text{gam})$ | 2880 | 2800 | 2800 | 2160 |

Vậy chọn đáp án **A.**

Cách 2:

Số cân nặng của $n$ con cá là:

$$f(\text{n})=(480-20\text{n})\text{n}=-20n^2+480n=-20(\text{n}-12)^2+2880\le 2880.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(\text{n})$ là $2880$ đạt được khi $n=12$.

**Câu 201:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở $x$ hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ $(USD)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

**A.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $135$ $(USD)$.

**B.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $160$ $(USD)$.

**C.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

**D.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Số tiền thu được là: $y = x\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 \Rightarrow y' = 9 - \frac{3}{10}x + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = 120 \end{array}\right.$ $0 \le x \le 60$.

$\Rightarrow y_{\max} = 160 \Leftrightarrow x = 40$.

**Câu 202:** **[BTN 164]** Một con cá hồi bơi ngược dòng ( từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách $300km$ (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là $6km/h$. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v$ $km/h$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong $t$ giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó $c$ là hằng số cho trước. $E$ tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng:

**A.** 10 $km/h$. **B.** 9 $km/h$. **C.** 12 $km/h$. **D.** 8 $km/h$.

**Hướng dẫn giải**

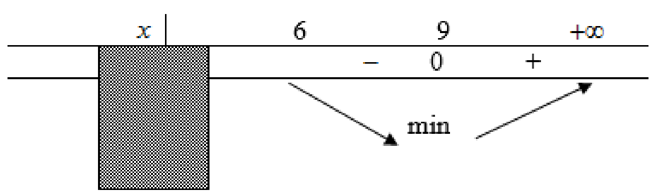
**Chọn B.**

Thời gian cá bơi: $t = \frac{300}{v-6} \Rightarrow E = cv^3t = cv^3.\frac{300}{v-6}$.

Xét hàm số $E(v) = cv^3.\frac{300}{v-6}$ với $v \in (6;+\infty)$.

$E'(v) = \frac{-300.c.v^3}{(v-6)^2} + \frac{900cv^2}{v-6} = 0 \Rightarrow v = 9$.

Dựa vào bảng biến thiên:




$\Rightarrow E_{\min} \Leftrightarrow v = 9$.

**Câu 203:** **[BTN 164]** Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích 1000 lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đạt giá trị nhỏ nhất:

**A.** $R = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$. **B.** $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. **C.** $R = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$. **D.** $R = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $h$ và $R$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy (đơn vị: mét).

Ta có: $V = h\pi R^2 = 1 \rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$.

$S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R\frac{1}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \frac{2}{R}(R > 0)$.

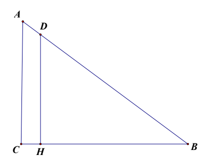
**Cách 1:** Khảo sát hàm số, thu được $f\left(R\right)_{\min} \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \Rightarrow h=\frac{1}{\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}}$.

**Cách 2:** Dùng bất đẳng thức:

$$S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R\frac{1}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\ge 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\frac{1}{R}.\frac{1}{R}}=3\sqrt[3]{2\pi}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $R^3=\frac{1}{2\pi}$.

**Câu 204:** **[BTN 163]** Chiều dài bé nhất của cái thang $AB$ để nó có thể tựa vào tường $AC$ và mặt đất $BC$, ngang qua một cột đỡ $DH$ cao $4m$ song song và cách tường $CH=0,5m$ là:



.

**A.** Xấp xỉ $5,602$. **B.** Xấp xỉ $6,5902$. **C.** Xấp xỉ $5,4902$. **D.** Xấp xỉ $5,5902$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $CB=x, CA=y$ khi đó ta có hệ thức:

$$\frac{1}{2x}+\frac{4}{y}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{y}=\frac{2x-1}{2x} \Leftrightarrow y=\frac{8x}{2x-1}.$$

Ta có: $AB=x^2+y^2$.

Bài toán quy về tìm min của $A=x^2+y^2=x^2+\left(\frac{8x}{2x-1}\right)^2$.

Khảo sát hàm số và lập bảng biến thiên ta thấy GTNN đạt tại $x=\frac{5}{2}; y=5$.

hay $AB \ \min=\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 205:** **[BTN 163]** Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là $h$ và bán kính đáy là $r$ để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của $r$ là:

**A.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **B.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **C.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **D.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Thể tích của cốc: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=27 \Rightarrow r^2h=\frac{81}{\pi} \Rightarrow h=\frac{81}{\pi}.\frac{1}{r^2}$.

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi r\sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r\sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^4}} = 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2}}.$$

$$= 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}} \geq 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}}.$$

$$= 2\sqrt{3}\pi\sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}}$$ (theo BĐT Cauchy).

$S_{xq}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow r^4 = \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \frac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

**Câu 206:** **[BTN 173]** Một công ty bất động sản có $50$ căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2000.000$ đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ $100.000$ đồng mỗi tháng thì có thể $2$ căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

**A.** $2.350.000$. **B.** $2.450.000$. **C.** $2.250.000$. **D.** $2.550.000$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi $x$ là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ, ($x$ – đồng; $x \geq 2000.000$ đồng ).

Số căn hộ cho thuê được ứng với giá cho thuê:

$$50 - \frac{1}{50000}(x - 2000000) = -\frac{1}{50.000}x + 90, (1).$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có $F(x) = \left(-\frac{1}{50.000}x + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90\text{x}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90\text{x}$ với điều kiện $x \geq 2000.000$.

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000.$$

Ta lập bảng biến thiên:

| x | 2000.000 | | 2.250.000 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $F(x)$ | | $\nearrow$ | $F_{max}$ | $\searrow$ | |

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$.

Vậy công ty phải cho thuê với giá $2.250.000$ đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

***Nhận xét:*** Làm sao ta có thể tìm được hệ số $\frac{1}{50000}$ trong biểu thức $(1)$?

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: Số căn hộ cho thuê mỗi tháng ứng với số tiền cho thuê; $50 - m(x - 2000.000)x = 2.000.000$ thì số căn hộ được thuê là $50$. Nếu số tiền cho thuê tăng lên là $x = 2.100.000$ thì có $2$ căn hộ để trống, nghĩa là có $48$ người thuê. Ta có:

$$50 - m(2.100.000 - 2.000.000) = 48 \Leftrightarrow m = \frac{1}{50000}.$$

**Câu 207:** **[BTN 169]** Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành $70000$ VNĐ/m$^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành $100000$ VNĐ/m$^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

**A.** $32000$ VNĐ. **B.** $83200$ VNĐ. **C.** $320000$ VNĐ. **D.** $832000$ VNĐ.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $x, y(m)$ $(x > 0, y > 0)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể, khi đó theo đề ta suy ra $0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \frac{0,16}{x}$. Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6\left(x + \frac{0,16}{x}\right).70000 + 100000x\frac{0,16}{x} \Leftrightarrow f(x) = 84000\left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000 \text{ (VNĐ)}.$$

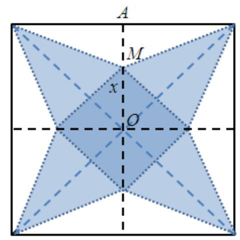
$$f'(x) = 84000\left(1 - \frac{0,16}{x^2}\right), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

| $x$ | 0 | | 0,4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(0,4)$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200$ VNĐ.

**Câu 208:** **[THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT]** Cắt một miếng giấy hình vuông ở hình 1 và xếp thành một hình chóp tứ giác đều như hình 2. Biết cạnh hình vuông bằng $20cm$, $OM = x\left(cm\right)$. Tìm $x$ để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất?

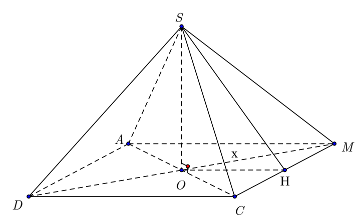



.

**A.** $x = 6cm$. **B.** $x = 8cm$. **C.** $x = 7cm$. **D.** $x = 9cm$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**




.

Ta có: $OM = x \Rightarrow AC = 2x$, $AM = \sqrt{2}x$.

Suy ra: $OH = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $MH = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $SH = 10\sqrt{2} - \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

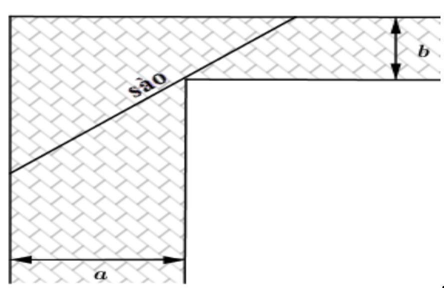
$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{20\left(10 - x\right)}.$$

$$V = \frac{1}{3}SO.S_{đáy} = \frac{1}{3}\sqrt{20\left(10-x\right)}.2x^2 = \frac{\sqrt{20}}{3}\sqrt{40-4x}.x^2.$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\sqrt{20}}{3}\sqrt{\left(40-4x\right).x.x.x.} \le \frac{\sqrt{20}}{3}\sqrt{\left(\frac{40-4x+x+x+x+x}{5}\right)^5} = \frac{\sqrt{20}}{3}.2^{\frac{15}{2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $40 - 4x = x \Leftrightarrow x = 8$.

**Câu 209:** **[THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa]** Để chặn đường hành lang hình chữ $L$ người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết rằng $a = 24$ và $b = 3$, hỏi cái sào thỏa mãn điều trên có chiều dài $l$ tối thiểu là bao nhiêu?

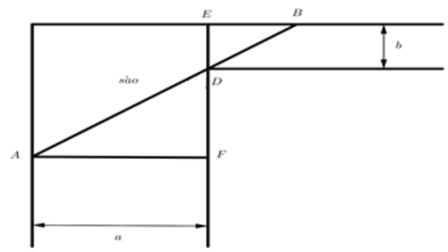



.

**A.** $27\sqrt{5}$. **B.** $15\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{51\sqrt{5}}{2}$. **D.** $11\sqrt{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**




.

Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$. Ta có $\Delta ADF$ đồng dạng với $\Delta BDE$ nên $\dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \dfrac{ab}{x}$.

$l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \dfrac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$,.

$f'(x) = 2(x+b) - 2\dfrac{ab}{x^2}\left(a + \dfrac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \dfrac{a^2b}{x^3}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $0$ | | $12$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1125$ | $\nearrow$ | |

.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $l$ là $\sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$.

**Câu 210:** [Sở GDĐT Lâm Đồng lần 06] Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc của dòng nước là $6km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

**A.** 9km/h. **B.** 6km/h. **C.** 15km/h. **D.** 12km/h.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Giải.

Vận tốc của cá bơi khi ngược dòng là: $v-6$ ( km/h).

Thời gian để cá bơi vượt khoảng cách 300km là $t=\dfrac{300}{v-6}$.

Năng lượng tiêu hao của cá để vượt khoảng cách đó là**:**

$$E\left(v\right)=cv^3.\frac{300}{v-6}=300c.\frac{v^3}{v-6}\left(jun\right),v>6.$$

| V | 6 | | 9 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E'\left(v\right)$ | | - | | + | |
| E(v) | | ↘ | E(9) | ↗ | |

$$E'\left(v\right)=600cv^2\frac{v-9}{\left(v-6\right)^2}\Leftrightarrow E'\left(v\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=0\left(loai\right)\\v=9\end{array}\right..$$

**Câu 211:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Một người nuôi cá thì nghiệm trong hồ.Người đó thấy rằng nếu mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có $n$ con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(\text{n})=480-20\,\text{n(gam)}$.Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

**A.** $14$. **B.** $18$. **C.** $10$. **D.** $12$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Cách 1: Thế đáp án:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Số cá trên mỗi đơn vị diện tích | 12 | 14 | 10 | 18 |
| Số cân nặng: $\left(480-20\,\text{n}\right)\text{n(gam)}$ | 2880 | 2800 | 2800 | 2160 |

Vậy chọn đáp án **A.**

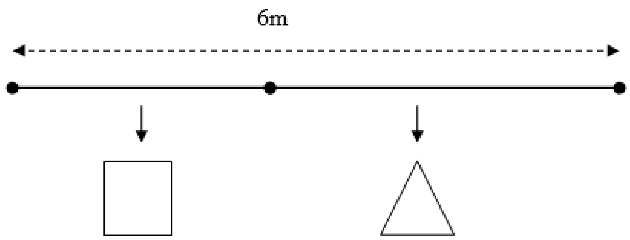
Cách 2:

Số cân nặng của $n$ con cá là:

$$f(\text{n})=\left(480-20\,\text{n}\right)\text{n}=-20n^2+480n=-20(\text{n}-12)^2+2880\le 2880\ .$$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(\text{n})$ là $2880$ đạt được khi $n=12$.

**Câu 212:** **[TTGDTX Vạn Ninh - Khánh Hòa]** Một sợi dây có chiều dài $6m$, được chia thành hai phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất?




**A.** $\dfrac{12}{9+4\sqrt{3}}(m)$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}(m)$. **C.** $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}(m)$. **D.** $\dfrac{36\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}(m)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Giả sử cạnh tam giác có độ dài bằng $x$, $x\in(0;2)$. Vậy cạnh hình vuông có độ dài $\dfrac{6-3x}{4}$.

Ta có $S_{\Delta}=\dfrac{1}{2}x^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$; $S_{\square}=\dfrac{(6-3x)^2}{16}$. $\Rightarrow S_{\Delta}+S_{\square}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{(6-3x)^2}{16}$.

Đặt: $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{(6-3x)^2}{16}$; $f'(x)=\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{(6-3x)^2}{16}\right]'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3(6-3x)}{8}=\dfrac{(4\sqrt{3}+9)x-18}{8}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{18}{(4\sqrt{3}+9)}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{18}{4\sqrt{3}+9}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy tổng diện tích hai hình là nhỏ nhất nếu độ dài cạnh tam giác bằng $\dfrac{18}{9+4\sqrt{3}}(m)$.

**Câu 213:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở $x$ hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ $(USD)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

**A.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $135$ $(USD)$.

**B.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $160$ $(USD)$.

**C.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

**D.** Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.

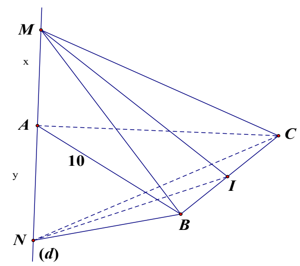
**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Số tiền thu được là: $y = x\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2 \Rightarrow y' = 9 - \frac{3}{10}x + \frac{3x^2}{1600} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = 120 \end{array}\right.$ $0 \le x \le 60$.

$\Rightarrow y_{\max} = 160 \Leftrightarrow x = 40$.

**Câu 214:** **[BTN 165]** Một ngôi nhà có nền dạng tam giác đều $ABC$ cạnh dài $10(m)$ được đặt song song và cách mặt đất $h(m)$. Nhà có 3 trụ tại $A, B, C$ vuông góc với $(ABC)$. Trên trụ $A$ người ta lấy hai điểm $M, N$ sao cho $AM = x, AN = y$ và góc giữa $(MBC)$ và $(NBC)$ bằng $90°$ để là mái và phần chứa đồ bên dưới. Xác định chiều cao thấp nhất của ngôi nhà.




**A.** $12$. **B.** $10$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Để nhà có chiều cao thấp nhất ta phải chọn $N$ nằm trên mặt đất. Chiều cao của nhà là $NM = x + y$ .

Gọi $I$ là trung điểm của $BC$. Ta có $\Delta ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$, vì $MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp BC$, từ đó suy ra $\Rightarrow BC \perp (MNI) \Rightarrow \begin{cases} MI \perp BC \\ NI \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^0$.

$\Delta IMN$ vuông tại $I$ nhận $AI$ là đường cao nên $\Rightarrow AM.AN = AI^2 \Rightarrow xy = \left(\frac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 75$.

Theo bất đẳng thức Côsi: $x + y \ge 2\sqrt{xy} = 2.\sqrt{75} = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow x = y = 5\sqrt{3}$.

Do đó chiều cao thấp nhất của nhà là $10\sqrt{3}$..

**Câu 215:** **[BTN 164]** Một con cá hồi bơi ngược dòng ( từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách $300km$ (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là $6km/h$. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v$ $km/h$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong $t$ giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó $c$ là hằng số cho trước. $E$ tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng:

**A.** $10$ $km/h$. **B.** $9$ $km/h$. **C.** $12$ $km/h$. **D.** $8$ $km/h$.

**Hướng dẫn giải**

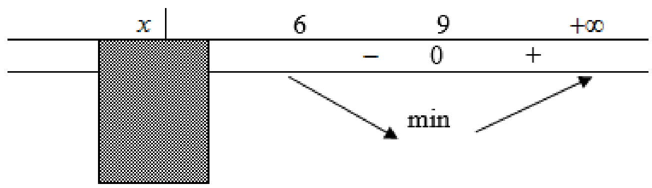
**Chọn B.**

Thời gian cá bơi: $t=\dfrac{300}{v-6}\Rightarrow E=cv^3t=cv^3.\dfrac{300}{v-6}$.

Xét hàm số $E\left(v\right)=cv^3.\dfrac{300}{v-6}$ với $v\in\left(6;+\infty\right)$.

$E'\left(v\right)=\dfrac{-300.c.v^3}{\left(v-6\right)^2}+\dfrac{900cv^2}{v-6}=0\Rightarrow v=9$.

Dựa vào bảng biến thiên:




.

$\Rightarrow E_{\min}\Leftrightarrow v=9$.

**Câu 216:** **[BTN 164]** Người ta cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có thể tích $1000$ lít bằng inox để chứa nước, tính bán kính R của hình trụ đó sao cho diện tích toàn phần của bồn chứa đạt giá trị nhỏ nhất:

**A.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2\pi}}$. **B.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$. **C.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$. **D.** $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $h$ và $R$ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy (đơn vị: mét).

Ta có: $V=h\pi R^2=1\to h=\dfrac{1}{\pi R^2}$.

$S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R\dfrac{1}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{2}{R}\left(R>0\right)$.

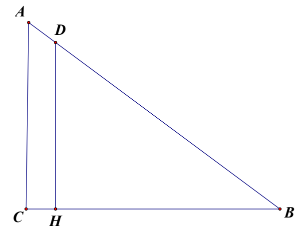
**Cách 1:** Khảo sát hàm số, thu được $f\left(R\right)_{\min}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}\Rightarrow h=\dfrac{1}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{1}{4\pi^2}}}$.

**Cách 2:** Dùng bất đẳng thức:

$S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R\dfrac{1}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R}\geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{1}{R}.\dfrac{1}{R}}=3\sqrt[3]{2\pi}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $R^3=\dfrac{1}{2\pi}$.

**Câu 217:** **[BTN 163]** Chiều dài bé nhất của cái thang $AB$ để nó có thể tựa vào tường $AC$ và mặt đất $BC$, ngang qua một cột đỡ $DH$ cao $4m$ song song và cách tường $CH=0,5m$ là:




**A.** Xấp xỉ $5,602$. **B.** Xấp xỉ $6,5902$. **C.** Xấp xỉ $5,4902$. **D.** Xấp xỉ $5,5902$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $CB = x, CA = y$ khi đó ta có hệ thức:

$$\frac{1}{2x} + \frac{4}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{y} = \frac{2x-1}{2x} \Leftrightarrow y = \frac{8x}{2x-1}.$$

Ta có: $AB = x^2 + y^2$.

Bài toán quy về tìm min của $A = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{8x}{2x-1}\right)^2$.

Khảo sát hàm số và lập bảng biến thiên ta thấy GTNN đạt tại $x = \frac{5}{2}; y = 5$.

hay $AB \ \min = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 218:** **[BTN 163]** Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là $h$ và bán kính đáy là $r$ để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của $r$ là:

**A.** $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **B.** $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **C.** $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **D.** $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Thể tích của cốc: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Rightarrow r^2 h = \frac{81}{\pi} \Rightarrow h = \frac{81}{\pi}.\frac{1}{r^2}$.

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

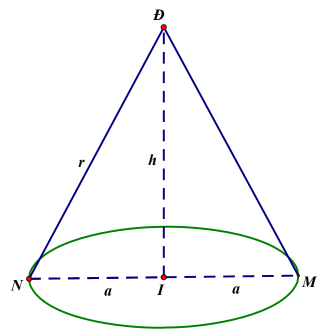
$$S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi r\sqrt{r^2 + h^2} = 2\pi r\sqrt{r^2 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^4}} = 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2}}.$$

$$= 2\pi\sqrt{r^4 + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2} + \frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}} \geq 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}}.$$

$$= 2\sqrt{3}\pi\sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}}$$ (theo BĐT Cauchy).

$S_{xq}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow r^4 = \dfrac{81^2}{2\pi^2}\dfrac{1}{r^2} \Leftrightarrow r^6 = \dfrac{3^8}{2\pi^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}$.

**Câu 219:** **[BTN 162]** Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính $a$. Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng $C$ được biểu thị bởi công thức $C = k\dfrac{\sin\alpha}{r^2}$ ($\alpha$ là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, $k$ là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).



.

**A.** $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $h = \dfrac{a}{2}$. **D.** $h = \dfrac{3a}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Ta có: $r = a^2 + h^2$ (Định lý Py-ta-go).

$\sin\alpha = \dfrac{h}{R} = \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

$\Rightarrow C = k.\dfrac{\sin\alpha}{R^2} = k\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}\left(a^2+h^2\right)}$.

Xét hàm $f(h) = \dfrac{h}{\left(\sqrt{a^2+h^2}\right)^3}\,(h>0)$, ta có:

$f'(h) = \dfrac{\sqrt{\left(a^2+h^2\right)^3} - 2h^2.\dfrac{3}{2}\sqrt{a^2+h^2}}{\left(a^2+h^2\right)^3}$.

$f'(h) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(h^2+a^2\right)^3} = 3.h^2.\sqrt{a^2+h^2}$.

$\Leftrightarrow h^2 + a^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên:

| $h$ | $0$ | | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(h)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(h)$ | | | | | |

Từ bảng biến thiên suy ra: $f(h)_{\max} \Leftrightarrow h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = k.f(h)_{\max} \Leftrightarrow h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 220:** **[BTN 161]** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nhiên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng $V$ và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì nhà thiết kế phải thiết kế hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu?

**A.** $\sqrt{\dfrac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Gọi hình trụ có chiều cao $h$, độ dài đường sinh $l$, bán kính đáy $r$.

Ta có: $S_{tp} = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rl \quad (1)$. Mặt khác $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} \Rightarrow l = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

Thay vào công thức $(1)$ ta được: $S_{tp} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 4\pi x - \dfrac{2V}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Hay $S_{tp}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

**Câu 221:** **[BTN 174]** Một thợ xây muốn sử dụng 1 tấm sắt có chiều dài là $4m$, chiều rộng $1m$ để uốn thành $2m$ khung đúc bê tông, 1 khung hình trụ có đáy là hình vuông và 1 khung hình trụ có đáy là hình tròn. Hỏi phải chia tấm sắt thành $2$ phần (theo chiều dài) như thế nào để tổng thể tích $2$ khung là nhỏ nhất?

**A.** Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\dfrac{4\pi+14}{\pi+4}, \dfrac{2}{\pi+4}$.

**B.** Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\dfrac{2}{\pi+4}, \dfrac{4\pi+14}{\pi+4}$.

**C.** Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\dfrac{2}{\pi+4}, \dfrac{4\pi}{\pi+4}$.

**D.** Khung có đáy là hình vuông, khung có đáy là hình tròn lần lượt có chiều dài là $\dfrac{4}{\pi+4}, \dfrac{2}{\pi+4}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $V_1, V_2$ lần lượt là thể tích của khung hình trụ có đáy là hình vuông và khung hình trụ có đáy là hình tròn. Gọi $a$ là chiều dài của cạnh hình vuông và $r$ là bán kính của hình tròn. Ta có:
$V_1 + V_2 = a^2 + \pi r^2$ (đơn vị thể tích).

Mà $4a + 2\pi r = 4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}(2 - \pi r), 0 < r < \frac{2}{\pi}$. Suy ra $V(r) = V_1 + V_2 = \pi r^2 + \frac{1}{4}(2 - \pi r)^2$.

$V'(r) = 2\pi r - \frac{1}{4}\pi(2 - \pi r)$, $V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{(\pi + 4)}$. Lập bảng biến thiên suy ra $V_{\min} = \left(\frac{4}{\pi + 4}\right)$.

Vậy, phải chia tấm sắt thành $2$ phần: phần làm lăng trụ có đáy là hình vuông là $\frac{4\pi}{(\pi + 4)}(m)$.

**Câu 222:** **[BTN 173]** Một công ty bất động sản có $50$ căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2000.000$ đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ $100.000$ đồng mỗi tháng thì có thể $2$ căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

**A.** $2.350.000$. **B.** $2.450.000$. **C.** $2.250.000$. **D.** $2.550.000$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Gọi $x$ là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ, ($x$ – đồng; $x \geq 2000.000$ đồng ).

Số căn hộ cho thuê được ứng với giá cho thuê:

$$50 - \frac{1}{50000}(x - 2000000) = -\frac{1}{50.000}x + 90, (1).$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

Ta có $F(x) = \left(-\frac{1}{50.000}x + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90\text{x}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90\text{x}$ với điều kiện $x \geq 2000.000$.

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000.$$

Ta lập bảng biến thiên:

| x | 2000.000 | | 2.250.000 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | + | 0 | $-$ | |
| $F(x)$ | | $\nearrow$ | $F_{max}$ | $\searrow$ | |

.

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$.

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

***Nhận xét:*** Làm sao ta có thể tìm được hệ số $\frac{1}{50000}$ trong biểu thức $(1)$?

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: Số căn hộ cho thuê mỗi tháng ứng với số tiền cho thuê;
$50 - m(x - 2000.000)x = 2.000.000$ thì số căn hộ được thuê là $50$. Nếu số tiền cho thuê tăng lên là $x = 2.100.000$ thì có $2$ căn hộ để trống, nghĩa là có $48$ người thuê. Ta có:

$$50 - m(2.100.000 - 2.000.000) = 48 \Leftrightarrow m = \frac{1}{50000}.$$

**Câu 223:** **[BTN 169]** Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành $70000$ VNĐ/m$^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành $100000$ VNĐ/m$^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

**A.** $32000$ VNĐ. **B.** $83200$ VNĐ. **C.** $320000$ VNĐ. **D.** $832000$ VNĐ.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $x, y(m)$ $(x > 0, y > 0)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể, khi đó theo đề ta suy ra $0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \frac{0,16}{x}$. Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2.0,6\left(x + \frac{0,16}{x}\right).70000 + 100000x\frac{0,16}{x} \Leftrightarrow f(x) = 84000\left(x + \frac{0,16}{x}\right) + 16000 \text{ (VNĐ)}.$$

$$f'(x) = 84000\left(1 - \frac{0,16}{x^2}\right), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

| $x$ | 0 | | 0,4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(0,4)$ | $\nearrow$ | |

.

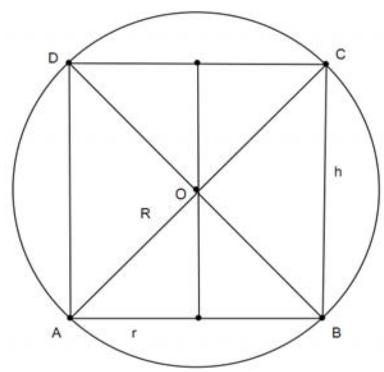
Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200$ VNĐ.

**Câu 224:** **[BTN 166]** Người ta cần chế tạo một ly dạng hình cầu tâm $O$, đường kính $2R$. Trong hình cầu có một hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Nước chỉ chứa được trong hình trụ. Hãy tìm bán kính đáy $r$ của hình trụ để ly chứa được nhiều nước nhất.

**A.** $r=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. **B.** $r=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. **C.** $r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2R}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Gọi $h$ và $r$ là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Bài toán quy về việc tính $h$ và $r$ phụ thuộc theo $R$ khi hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong hình tròn $(O,R)$ thay đổi về $V=\pi r^2 h$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $AC^2=AB^2+BC^2 \Leftrightarrow 4R^2=4r^2+h^2$.

$$V=\pi\left(R^2-\frac{1}{4}h^2\right)h=\pi\left(-\frac{1}{4}h^3+R^2h\right)\ \left(0<h<2\mathrm{R}\right).$$

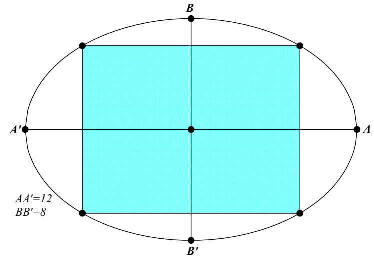
$$V'=\pi\left(-\frac{3}{4}h^2+R^2\right)\Leftrightarrow h=\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\mathrm{R}}{\sqrt{3}}$ | | $2\mathrm{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | | | | | |

Vậy $V=V_{\max}=\dfrac{4}{9}\pi R^3\sqrt{3}\Leftrightarrow h=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Lúc đó $r^2=R^2-\dfrac{1}{4}.\dfrac{4\mathrm{R}^2}{3}=\dfrac{2\mathrm{R}^2}{3}\Rightarrow r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

**Câu 225:** **[THPT Chuyên Bình Long]** Một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng $12\,\mathrm{m}$, độ dài trục bé bằng $8\mathrm{m}$. Người ta dự định trồng hoa trong một hình chữ nhật nội tiếp của elip như hình vẽ. Hỏi diện tích trồng hoa lớn nhất có thể là?

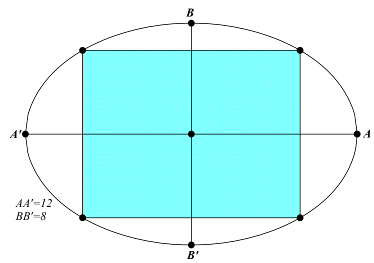



.

**A.** $\dfrac{576}{13}\,\text{m}^2$. **B.** $48\,\text{m}^2$. **C.** $62\,\text{m}^2$. **D.** $46\,\text{m}^2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




.

Đặt phương trình chính tắc của $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có $2a = 12 \Rightarrow a = 6$, $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Suy ra $(E): \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Chọn $A(x_A; y_A)$ là đỉnh hình chữ nhật và $x_A > 0$, $y_A > 0$.

$\Rightarrow \dfrac{x_A^2}{36} + \dfrac{y_A^2}{16} = 1$;

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4x_Ay_A = 48.2.\dfrac{x_A}{6}.\dfrac{y_A}{4} \le 48\left(\dfrac{x_A^2}{36} + \dfrac{y_A^2}{16}\right) = 48$.

**Câu 226:** **[THPT Chuyên Phan Bội Châu]** Doanh nghiệp Alibaba cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy $A$ và $B$. Máy $A$ làm việc trong $x$ ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy $B$ làm việc trong $y$ ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp Alibaba cần sử dụng máy $A$ trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy $A$ và $B$ không đồng thời làm việc, máy $B$ làm việc không quá 6 ngày).

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $6$. **D.** $9$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Theo đề ta có $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$ (1).
Và $0 < y \le 6 \Rightarrow 4 \le x < 10$.
Số tiền lãi $f(x) = x^3 + 2x + 326(10 - x) - 27(10 - x)^3$ (thay (1) vào).
$\Leftrightarrow f(x) = 28x^3 - 810x^2 + 7776x - 23740$ với $x \in [4;10)$.

Ta có $f'(x)=84x^2-1620x+7776$. $f'(x)=0\Leftrightarrow 84x^2-1620x+7776=0\Leftrightarrow x=9\vee x=\dfrac{72}{7}$.

Chỉ có $x=9\in[4;10)$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $4$ | | $9$ | | $\frac{72}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $f(4)$ | $\nearrow$ | $f(9)$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{72}{7}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Câu 227:** **[THPT Ngô Quyền]** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá $30.000$ đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình $3000$ chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá $30.000$ đồng mà cứ tăng giá thêm $1000$ đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn $100$ chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là $18.000$. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

**A.** $43.000$ đồng. **B.** $40.000$ đồng. **C.** $39.000$ đồng. **D.** $42.000$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

**Hướng dẫn giải**.

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là $x$ (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm $1$ (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100$ chiếc nên tăng $x$ (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiế**c.** Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000-100x$ chiế**c.**

Lúc đầu bán với giá $30$ (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi $12$ (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12+x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $f(x)=-100x^2+1800x+36000=-100(x-9)^2+44100\le 44100$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=9$.

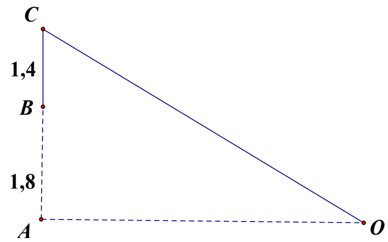
Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là $9.000$ đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là $39.000$ đồng.

**Câu 228:** **[BTN 170]** Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4m$ và đặt ở độ cao $1,4m$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.

**A.** $AO=2,4m$. **B.** $AO=2,6m$. **C.** $AO=2m$. **D.** $AO=3m$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**




Đặt độ dài cạnh $AO = x(m), (x > 0)$.

Suy ra $BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$.

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác $OBC$ ta có:

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}.$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ nên bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \dfrac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$. Suy ra $F(t) = \dfrac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \dfrac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$.

Ta đi tìm t để F(t) đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} = \frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right).$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right) = \frac{1}{25}\left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right).$$

$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$.

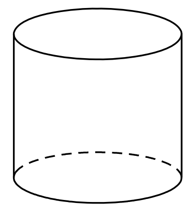
Bảng biến thiên.

| $t$ | $3,24$ | | $9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F'(t)$ | | - | $0$ | + | |
| $F(t)$ | ↘ | | $F_{\min}$ | ↗ | |

Thay vào đặt ta có: $(3,24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4\,\text{m}$.

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4m$.

**Câu 229:** **[BTN 168]** Một người thợ xây, muốn xây dựng một bồn chứa thóc hình trụ tròn với thể tích là $150m^3$ (như hình vẽ bên). Đáy làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn và nắp bể làm bằng nhôm. Tính chi phí thấp nhất để bồn chứa thóc (làm tròn đến hàng nghìn). Biết giá thành các vật liệu như sau: bê tông 100 nghìn đồng một $m^2$, tôn 90 nghìn một $m^2$ và nhôm 120 nghìn đồng một $m^2$.



**A.** 15037000 đồng. **B.** 15039000 đồng. **C.** 15040000 đồng. **D.** 15038000 đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $r,h\left(m^2\right)\left(r>0,h>0\right)$ lần lượt là bán kính đường tròn đáy và đường cao của hình trụ theo đề ta có $\pi r^2 h = 150 \Leftrightarrow h = \dfrac{150}{\pi r^2}$.

Khi đó chi phí làm nên bồn chứa thóc được xác định theo hàm số:

$$f\left(r\right) = 220\pi r^2 + 90.2\pi r.\frac{150}{\pi r^2} = 220\pi r^2 + \frac{2700}{r} \text{ (nghìn đồng).}$$

$$f'\left(r\right) = 440\pi r - \frac{27000}{r^2}, f'\left(r\right) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}} = a.$$

BBT:

| $r$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(r)$ | | $\searrow$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | |

Dựa vào BBT ta suy ra chi phí thấp nhất là $f\left(a\right) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}\right) \approx 15038,38797$ nghìn đồng.

**Câu 230:** **[BTN 168]** Anh Phong có một cái ao với diện tích $50m^2$ để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ $20\text{con}/m^2$ và thu được $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi $8$ con$/m^2$ thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5kg$. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

**A.** 342 con. **B.** 488 con. **C.** 512 con. **D.** 658 con.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Số cá anh Phong thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000$ (con).

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần là $\frac{1500}{1000} = 1,5kg / con$.

Gọi $x > 0$ là số cá anh cần thả ít đi cho vụ tới nên sẽ tăng $0,0625x$ kg/con.

Ta có phương trình tổng khối lượng cá thu được $T = f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -0,125x + 61 = 0 \Rightarrow x = 488 \\ f''(x) = -0,125 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) = 16384 \Leftrightarrow x = 488.$$

Vậy ở vụ sau anh chỉ cần thả $1000 - 488 = 512$ con cá giống.

**Câu 231: [THPT Trần Phú-HP]** Tập hợp các giá trị thực của $m$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là.

**A.** $\{0\}$.
**B.** $(-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.
**C.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
**D.** $\varnothing$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

+ Với $m = 0$, hàm số có dạng: $y = \frac{-1}{4x^2 + 1}$. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang $y = 0$.

+ Với $m \neq 0$,.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{(mx^2 - 2x + 1)(4x^2 + 4mx + 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{\left(m - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(4 + \frac{4m}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Để thị hàm số có đúng một tiệm cận thì $\begin{cases} 1 - m < 0 \\ 4m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$ ( Không tồn tại m).

Vậy $m = 0$ thì đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận.

**Câu 232:** **[THPT Chuyên Bình Long]** Với giá trị nào của $m$, đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 3x}}{x^2 + (m+1)x - m - 2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

**A.** $m \in \mathbb{R}$.
**B.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \\ m \neq -3 \end{cases}$.
**C.** $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$.
**D.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

$y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$. Hàm số xác định khi: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 0\end{array}\right.\\ x\ne 1\\ x\ne -m-2\end{cases}$.

Ta có

$y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}=\dfrac{-x+1}{(x-1)(x+m+2)\left(x+1+\sqrt{x^2+3x}\right)}=\dfrac{-1}{(x+m+2)\left(x+1+\sqrt{x^2+3x}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang.

Hàm số có hai tiệm cận khi có một tiệm cận đứng $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m-2\le -3\\ -m-2\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -2\end{array}\right.$.

**Câu 233:** **[CHUYÊN SƠN LA]** Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ $(C)$. Gọi $d$ là khoảng cách từ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị đến một tiếp tuyến của $(C)$. Giá trị lớn nhất mà $d$ có thể đạt được là:

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có: $y'(x)=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$ $\forall x\ne 2$. Gọi $I$ là giao của hai tiệm cận $\Rightarrow I(2;1)$.

Gọi $M(x_0;y_0)=M\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\right)\in(C)$.

Khi đó tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ có phương trình:

$\Delta: y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-3}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\Leftrightarrow\dfrac{-3}{(x_0-2)^2}.x-y+\dfrac{3x_0}{(x_0-2)^2}+\dfrac{x_0+1}{x_0-2}=0$.

Khi đó ta có: $d(I;\Delta)=\dfrac{\left|\dfrac{-6}{(x_0-2)^2}-1+\dfrac{3x_0}{(x_0-2)^2}+\dfrac{x_0+1}{x_0-2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{9}{(x_0-2)^4}}}$.

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)=\dfrac{|6x_0-12|}{\sqrt{(x_0-2)^4+9}}$.

Áp dụng BĐT: $a^2+b^2\ge 2ab$ $\forall a,b$.

Ta có: $9+(x_0-2)^4 \ge 2.3.(x_0-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{9+(x_0-2)^4} \ge \sqrt{6(x_0-2)^2}$

$\Rightarrow d(I;\Delta) \le \dfrac{|6x_0-12|}{\sqrt{(x_0-2)^4+9}} \le \dfrac{|6x_0-12|}{\sqrt{6(x_0-2)^2}} = \sqrt{6}$.

Vậy giá trị lớn nhất mà $d$ có thể đạt được là: $\sqrt{6}$.

**Câu 234:** **[208-BTN]** Cho hàm số $(C): y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. Gọi $M$ là một điểm thuộc đồ thị và $d$ là tổng khoảng cách từ $M$ đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số $(C)$. Giá trị nhỏ nhất của $d$ có thể đạt được là:

**A.** 2. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-1}\right)\in(C)$, ta có.

$d=|a-1|+\left|\dfrac{2a-3}{a-1}-2\right|=|a-1|+\dfrac{1}{|a-1|}\ge 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $d$ bằng 2.

**Câu 235:** **[THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Gọi $M$ là điểm bất kì thuộc đồ thị $(C)$ của hàm số $y=\dfrac{9}{x+2}$. Tổng khoảng cách từ $M$ đến hai tiệm cận của $(C)$ đạt giá trị nhỏ nhất là.

**A.** 9. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Hàm số $y=\dfrac{9}{x+2}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Tiệm cận đứng $x=-2$; Tiệm cận ngang $y=0$.

$M$ là điểm bất kì thuộc đồ thị $(C)$ của hàm số $y=\dfrac{9}{x+2}\Rightarrow M\left(x;\dfrac{9}{x+2}\right)$.

Tổng khoảng cách từ $M$ đến hai tiệm cận của $(C)$ là.

$d=|x+2|+\left|\dfrac{9}{x+2}\right|\ge 2\sqrt{|x+2|\left|\dfrac{9}{x+2}\right|}\Rightarrow d\ge 6$.

Vậy tổng khoảng cách từ $M$ đến hai tiệm cận của $(C)$ đạt giá trị nhỏ nhất là 6.

**Câu 236:** **[BTN 162]** Có bao nhiêu điểm $M$ thỏa mãn: điểm $M$ thuộc đồ thị $(C)$ của hàm số $y=\dfrac{1}{1+x}$ sao cho tổng khoảng cách từ $M$ đến hai đường tiệm cận của hàm số là nhỏ nhất.

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{1}{1+a}\right)\in(C)\left(a\neq -1\right)$. Đồ thị $(C)$ có TCN là: $y=0$, TCĐ là: $x=-1$.

Khi đó $d_{(M,TCD)}+d_{(M,TCN)}=|a+1|+\left|\dfrac{1}{1+a}\right|\geq 2\Leftrightarrow |a+1|=1\Leftrightarrow a=0\vee a=-2$.

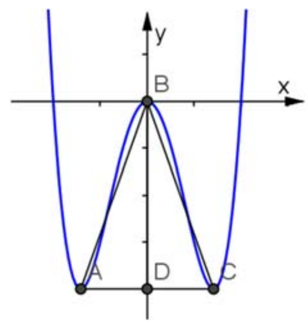
Vậy có 2 điểm thỏa mãn.

**Câu 237:** [THPT Quoc Gia 2017] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

**A.** $0<m<1$. **B.** $m>0$. **C.** $m<1$. **D.** $0<m<\sqrt[3]{4}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**




Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là $m>0$..

$$y'=4x^3-4mx\,;\,y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=-\sqrt{m}\\x_3=\sqrt{m}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_1=0\\y_2=-m^2\\y_3=-m^2\end{array}\right..$$

Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân có đáy bằng $2\sqrt{m}$, đường cao bằng $m^2$. (như hình minh họa).

Ta được $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BD=\sqrt{m}.m^2$. Để tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 thì

$\sqrt{m}.m^2<1\Leftrightarrow 0<m<1$..

**Câu 238:** **[208-BTN]** Cho hàm số $(C):y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. Gọi $M$ là một điểm thuộc đồ thị và $d$ là tổng khoảng cách từ $M$ đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số $(C)$. Giá trị nhỏ nhất của $d$ có thể đạt được là:

**A.** 2. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a-3}{a-1}\right)\in(C)$, ta có.

$d=|a-1|+\left|\dfrac{2a-3}{a-1}-2\right|=|a-1|+\dfrac{1}{|a-1|}\geq 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $d$ bằng 2.

**Câu 239:** **[THPT Chuyên KHTN]** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$, điểm trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó lập với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất thì có hoành độ bằng.

**A.** $2\pm\sqrt[4]{8}$. **B.** $2\pm\sqrt[4]{6}$. **C.** $2\pm\sqrt[4]{10}$. **D.** $2\pm\sqrt[4]{12}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2 \Leftrightarrow x-2=0$.

Gọi tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có dạng $y=ax+b$.

Khi đó $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=1$.

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{x-2}=3$.

Vậy tiệm cận xiên: $y=x+3$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị hàm số.

$y=\frac{x^2+x-2}{x-2}\Rightarrow y'=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0;y_0)$ là.

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=\frac{x_0^2-4x_0}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0^2+x_0-2}{x_0-2}$.

Gọi $A$ là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng $\Rightarrow A\left(2;\frac{5x_0-2}{x_0-2}\right)$.

Gọi $B$ là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận xiên $\Rightarrow B(2x-2;2x_0+1)$.

Giao của hai tiệm cận $I(2;5)$.

Ta có $IA=\frac{8}{|x_0-2|}, IB=2\sqrt{2}|x_0-2|, AB=\sqrt{(2x_0-4)^2+\left(\frac{2x_0^2-8x_0}{x_0-2}\right)^2}$.

Chu vi $P=IA+AB+IB=\frac{8}{|x_0-2|}+2\sqrt{2}|x_0-2|+\sqrt{(2x_0-4)^2+\left(\frac{2x_0^2-8x_0}{x_0-2}\right)^2}\geq 8\sqrt{2}+2\sqrt{32\sqrt{2}-32}$

.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt[4]{8}$.

**Câu 240:** **[THPT Chuyên KHTN]** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ điểm trên đồ thị mà khoảng cách từ giao của hai tiệm cận đến tiếp tuyến tại đó lớn nhất có hoành độ bằng.

**A.** $1\pm\sqrt[4]{8}$. **B.** $2\pm\sqrt[4]{6}$. **C.** $2\pm\sqrt[4]{8}$. **D.** $3\pm\sqrt[4]{8}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

$$y=\frac{x^2+x-2}{x-2}=x+3+\frac{4}{x-2}.$$

Hàm số có hai đường tiệm cận đứng và xiên lần lượt có phương trình là.

$x=2$ và $y=x+3\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của hai tiệm cân la điểm $I(2;5)$.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a^2+a-2}{a-2}\right)$ là tiếp điểm của đồ thị hàm số và tiếp tuyến $(d)$.

Tiếp tuyến $(d)$ tại: $y=y'(a)(x-a)+\dfrac{a^2+a-2}{a-2}$.

$\Leftrightarrow\left(a^2-4a\right)x-(a-2)^2y+3a^2-4a+4=0\ (\Delta)$.

$$d(A;\Delta)=\frac{8|a-2|}{\sqrt{\left(a^2-4a\right)^2+(a-2)^4}}=\frac{8|a-2|}{\sqrt{\left[a(a-4)\right]^2+(a-2)^4}}.$$

Đặt $a-2=t$.

$$\Rightarrow d(A;\Delta)=\frac{8|t|}{\sqrt{\left[(t+2)(t-2)\right]+t^4}}=\frac{8|t|}{\sqrt{2t^4-8t^2+16}}=\frac{8}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{t^2}{t^4-8t^2+16}}.$$

Để $d(A;\Delta)$ max thì $f(t)=\dfrac{t^2}{t^4-8t^2+16}$ $max$.

$$f'(t)=\frac{-2t^5+16t}{\left(t^4-8t^2+16\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\pm\sqrt[4]{8}\end{array}\right.\text{CĐ.}$$

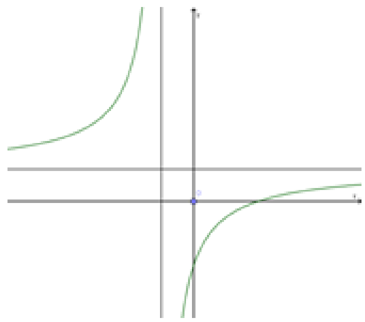
Bảng biến thiên.

| $t$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\sqrt[4]{8}$ | | $0$ | | $\sqrt[4]{8}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | | | $y\left(-\sqrt[4]{8}\right)$ | $\searrow$ | $y(0)$ | $\nearrow$ | $y\left(\sqrt[4]{8}\right)$ | $\searrow$ | | | $0$ |

Suy ra $f(t)$max tại $t=\pm\sqrt[4]{8}\Rightarrow a-2=\pm\sqrt[4]{8}\Leftrightarrow a=2\pm\sqrt[4]{8}$.

**Câu 241:** **[THPT Nguyễn Khuyến –NĐ]** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là **đúng**?

$ad>0$, $bc<0$.



**A.** .  **B.** $ad<0$, $bc>0$.
**C.** $cd<0$, $bd>0$.  **D.** $ac>0$, $ab>0$.

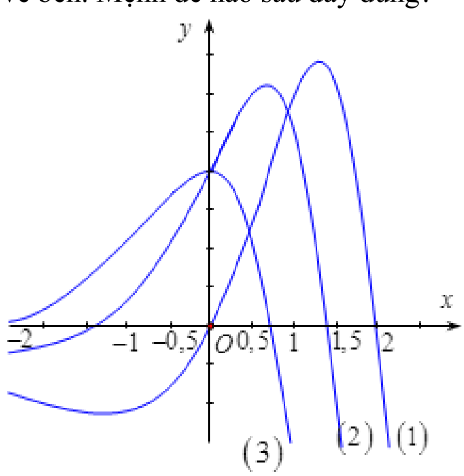
**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Quan sát đồ thị ta có: TCĐ $x=-\dfrac{d}{c}<0\Rightarrow\dfrac{d}{c}>0\Rightarrow c$, $d$ cùng dấu. Lại có TCN $y=\dfrac{a}{c}>0\Rightarrow a$, $c$ cùng dấu. Suy ra $a$, $c$, $d$ cùng dấu. Lại có $x=0\Rightarrow y=\dfrac{b}{d}<0$, suy ra $b$, $d$ trái dấu.

Suy ra: $ad>0$, $bc<0$.

**Câu 242:** **[TT Tân Hồng Phong]** Cho 3 hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)=f'(x)$, $y=h(x)=g'(x)$ có đồ thị là 3 đường cong trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?




.

**A.** $g(-1)>h(-1)>f(-1)$.  **B.** $f(-1)>g(-1)>h(-1)$.
**C.** $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.  **D.** $h(-1)>f(-1)>g(-1)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Nếu $(1)$ là đồ thị hàm số $y=h(x)=g'(x)$ thì $g'(x)>0\ \forall x\in(0;2)\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;2)$, trong hai đồ thị còn lại không có đồ thị nào thoả mãn là đồ thị hàm số $y=g(x)=f'(x)$.

Nếu $(2)$ là đồ thị hàm số $y=h(x)=g'(x)$ thì $g'(x)>0\forall x\in(-1,5;1,5)\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-1,5;1,5)$, $(1)$ là đồ thị hàm số $y=g(x)=f'(x)$ thì $f'(x)>0\forall x\in(0;2)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$, nhưng $(3)$ không thoả mãn là đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Nếu $(3)$ là đồ thị hàm số $y=h(x)=g'(x)$ thì $g'(x)>0\forall x\in(-\infty;1)\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$, vậy $(2)$ là đồ thị hàm số $y=g(x)=f'(x)$ và $(1)$ là đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Dựa vào đồ thị ta có $h(-1)>g(-1)>f(-1)$.

**Câu 243:** **[THPT chuyên Thái Bình]** Phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trong $[-5\pi;2017\pi]$?
vô nghiệm.

**A.** $2022$. **B.** $2017$. **C.** $2023$. **D.** $2000$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Ta có hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2\pi$.

Xét hàm số $y=2017^{\sin x}-\sin x-\sqrt{2-\cos^2 x}$ trên $[0;2\pi]$.

Ta có.

$$y'=\cos x.2017^{\sin x}.\ln 2017-\cos x-\frac{2\sin x.\cos x}{2\sqrt{2-\cos^2 x}}=\cos x.\left(2017^{\sin x}.\ln 2017-1-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right).$$

Do vậy trên $[0;2\pi]$, $y'=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3\pi}{2}$.

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2017-1-\sqrt{2}>0$; $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2017}-1-\sqrt{2}<0$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | $\searrow$ | $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $0$ |

Vậy trên $[0;2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ta có $y(\pi)=0$, nên trên $[0;2\pi]$ phương trình $2017^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có ba nghiệm phân biệt là $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Suy ra trên $[-5\pi;2017\pi]$ phương trình có đúng $2017-(-5)+1=2023$ nghiệm.

**Câu 244:** **[TTGDTX Nha Trang - Khánh Hòa]** Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $x^3-6x^2+9x-3-m=0$ có ba nghiệm thực phân biệt trong đó hai nghiệm lớn hơn $2$.

**A.** $-1<m<1$. **B.** $m>0$. **C.** $-3<m<-1$. **D.** $-3<m<1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

$x^3-6x^2+9x-3-m=0 \Leftrightarrow m=x^3-6x^2+9x-3$.

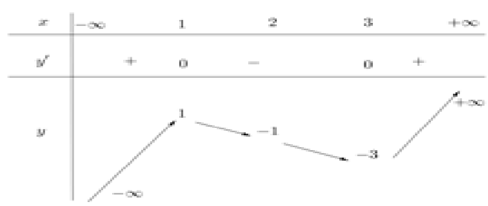
Khảo sát hàm số $y=x^3-6x^2+9x-3$.

Có $y'=3x^2-12x+9$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=3 \Rightarrow y=-3 \end{array}\right.$.

Lại có $x=2 \Rightarrow y=-1$.

Lập bảng biến thiên.

Từ bảng biến thiên. Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow m\in(-3;-1)$.




**Câu 245:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Biết đường thẳng $y=(3m-1)x+6m+3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại ba điểm phân biệt sao cho một giao điểm cách đều hai giao điểm còn lại. Khi đó $m$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(\frac{3}{2};2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;\frac{3}{2})$. **D.** $(0;1)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

$x^3-3x^2+1=(3m-1)x+6m+3 \Leftrightarrow x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$.

Giả sử phương trình $x^3-3x^2-(3m-1)x-6m-2=0$ có ba nghiệm $x_1,x_2,x_3$ thỏa mãn

$x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}$ $(1)$.

Mặt khác theo viet ta có $x_1+x_2+x_3=3$ $(2)$. Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $x_2=1$. Tức $x=1$ là một nghiệm của phương trình trên. Thay $x=1$ vào phương trình ta được $m=-\dfrac{1}{3}$.

Thử lại $m=-\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 246:** **[THPT chuyên Biên Hòa lần 2]** Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}$. Phương trình $\dfrac{f\left(f\left(x\right)\right)}{2f\left(x\right)-1}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

**A.** 6 nghiệm. **B.** 9 nghiệm. **C.** 4 nghiệm. **D.** 5 nghiệm.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Cách 1:

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-6x+1$.

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\Rightarrow f\left(x_1\right)=\dfrac{9+8\sqrt{6}}{18}\\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\Rightarrow f\left(x_2\right)=\dfrac{9-8\sqrt{6}}{18}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | $f(x_1)$ | $\searrow$ | $f(x_2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(x_1)$ | $\searrow$ | $f(x_2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

.

Xét phương trình $\dfrac{f\left(f\left(x\right)\right)}{2f\left(x\right)-1}=1$.

Đặt $t=f\left(x\right)$. Khi đó phương trình trở thành.

$$\frac{f\left(t\right)}{2t-1}=1\Leftrightarrow f\left(t\right)=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2+t+\frac{3}{2}=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2-t+\frac{5}{2}=0\left(*\right).$$

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^3-3t^2-t+\dfrac{5}{2}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $g\left(3\right).g\left(4\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right).\dfrac{29}{2}<0$ nên phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm $t=t_1\in\left(3;4\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f\left(x\right)=t_1$ với $t_1>3>f\left(x_1\right)=\dfrac{9+8\sqrt{6}}{18}$ có một nghiệm.

+ Ta có $g\left(1\right).g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right).\dfrac{11}{8}<0$ nên phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm $t=t_2\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f\left(x\right)=t_2$ với

$f\left(x_2\right)=\dfrac{9-8\sqrt{6}}{18}<\dfrac{1}{2}<t_2<1<f\left(x_1\right)=\dfrac{9+8\sqrt{6}}{18}$ có ba nghiệm phân biệt.

+ Ta có $g\left(-\dfrac{4}{5}\right).g\left(-1\right)=\dfrac{217}{250}.\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$ nên phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm $t=t_3\in\left(-1;-\dfrac{4}{5}\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f\left(x\right)=t_3$ với $t_3<-\dfrac{4}{5}<f\left(x_2\right)=\dfrac{9-8\sqrt{6}}{18}$ có một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có $5$ nghiệm thực.

Cách 2:

Đặt $t=f\left(x\right)$. Khi đó phương trình trở thành.

$\dfrac{f\left(t\right)}{2t-1}=1\Leftrightarrow f\left(t\right)=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2+t+\dfrac{3}{2}=2t-1\Leftrightarrow t^3-3t^2-t+\dfrac{5}{2}=0\left(*\right)$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1\approx 3,05979197\\ t_2\approx 0,8745059057\\ t_3\approx -0,9342978758\end{array}\right.$.

+ Xét phương trình $x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}=t_1\approx 3.05979197$. Bấm máy tính ta được $1$ nghiệm.

+ Xét phương trình $x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}=t_2\approx 0,8745059057$. Bấm máy tính ta được $3$ nghiệm.

+ Xét phương trình $x^3-3x^2+x+\dfrac{3}{2}=t_3\approx -0,9342978758$. Bấm máy tính ta được $1$ nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có $5$ nghiệm thực.

**Câu 247:** **[THPT CHUYÊN BẾN TRE]** Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ có đồ thị $\left(C_m\right)$ và điểm $I\left(1;3\right)$. Tìm $m$ để đường thẳng $\mathrm{d}: y=x+4$ cắt $\left(C_m\right)$ tại $3$ điểm phân biệt $A\left(0;4\right)$, $B,C$ sao cho tam giác $IBC$ có diện tích bằng $4$.

**A.** $m>0$. **B.** $m<3$. **C.** $m=0$. **D.** $m=3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

**Cách 1:**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_m)$ và $d: x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4 \quad (1)$.

$\Leftrightarrow x(x^2+2mx+m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2mx+m+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$.

$(1)$ có $3$ nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có $2$ nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-m-2>0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m\neq -2 \end{cases} \quad (*)$.

Khi đó $x_B, x_C$ là các nghiệm của (2) nên $\begin{cases} x_B+x_C=-2m \\ x_B.x_C=m+2 \end{cases}$ ( Định lí Vi-et).

$S_{\Delta IBC}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(I;d).BC=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x_B-x_C)^2}=4 \Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_B.x_C-16=0$.

$\Leftrightarrow m^2-m-6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=3 \end{array}\right.$. Kết hợp ĐK (*) ta được $m=3$. Vậy chọn **A.**

**Cách 2:** Dùng CASIO.

Thử với $m=0$, bấm máy thấy pt $(1)$ chỉ có 1 nghiệm $x=0$. Loại đáp án **A**, **B.**

Thử với $m=1$, bấm máy thấy pt $(1)$ chỉ có 1 nghiệm $x=0$. Loại đáp án **C.** Vậy chọn **D.**

**Câu 248:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=\frac{2mx+m-2}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): y=x+3$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho tam giác $IAB$ có diện tích bằng 3 , với $I(-1;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $-10$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{2mx+m-2}{x+1}=x+3 \Leftrightarrow f(x)=x^2+(4-2m)x+5-m=0$ $(x\neq -1)$. Đồ thị $(C)$ của hàm số $y=\frac{2mx+m-2}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): y=x+3$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta'_f>0 \\ f(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-1>0 \\ m\neq -2 \end{cases} \quad (*)$. $(C)$ cắt $d$ tại $A$, $B$ suy ra $x_A$, $x_B$ là nghiệm của phương trình $f(x)=0$, theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_A+x_B=2m-4 \\ x_Ax_B=5-m \end{cases}$.

$A(x_A; x_A+3)$, $B(x_B; x_B+3)$ suy ra.

$AB=\sqrt{2\left(x_A-x_B\right)^2}=\sqrt{2\left(x_A+x_B\right)^2-4x_Ax_B}=\sqrt{8m^2-28m+12}$. Ta có $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}d_{(I;d)}.AB=3$

$\Leftrightarrow AB^2=72\Leftrightarrow 8m^2-28m-60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{3}{2}\\m=5\end{array}\right.$, kết hợp với $(*)$ suy ra $\left[\begin{array}{l}m=-\frac{3}{2}\\m=5\end{array}\right.$ thỏa suy ra tổng các phần tử của $S$ là $\frac{7}{2}$.

**Câu 249:** **[THPT Trần Cao Vân - Khánh Hòa]** Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $d$ là khoảng cách từ giao điểm $I$ của hai tiệm cận của đồ thị $(C)$ đến một tiếp tuyến tùy ý của đồ thị $(C)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $d$ có thể đạt được là:

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có $I(-1;1)$. $y'=\frac{-1}{(x+1)^2}$.

Giả sử $M\left(x_0;\frac{x_0+2}{x_0+1}\right)$ là một điểm thuộc $(C), x_0\neq -1$. Suy ra: $y'(x_0)=\frac{-1}{(x_0+1)^2}$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $M$ là:

$$y=\frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0+1}\Leftrightarrow\frac{x}{(x_0+1)^2}+y-\frac{x_0^{\,2}+4x_0+2}{(x_0+1)^2}=0.$$

$$\Leftrightarrow x+y(x_0+1)^2-\left(x_0^{\,2}+4x_0+2\right)=0\ \ (d).$$

Suy ra: $d_{(I;d)}=\frac{\left|-1+(x_0+1)^2-\left(x_0^{\,2}+4x_0+2\right)\right|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}=\frac{\left|-2(x_0+1)\right|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}=\frac{2|x_0+1|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si: $1+(x_0+1)^4\geq 2\sqrt{1.(x_0+1)^4}=2(x_0+1)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $1=(x_0+1)^4\Leftrightarrow x_0=0$.

Suy ra: $d_{(I;d)}\leq\frac{2|x_0+1|}{\sqrt{2(x_0+1)^2}}=\sqrt{2}$. Vậy $\max d_{(I;d)}=\sqrt{2}$ khi $x_0=0; y_0=2$.

**Câu 250:** [THPT Nguyễn Thái Học(K.H)] Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d_m: y=-x+m$ Đường thẳng $d_m$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của $m$ là:

**A.** $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** Không tồn tại $m$. **D.** $m=2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d: x^2 - mx + m - 2 = 0$.

Điều kiện để $d$ cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$; $B$ là $m^2 - 4m + 8 > 0, \forall m$.

Tức là $d$ luôn cắt $(C)$ tại hai điểm phân biệt $A$; $B$.

Khi đó gọi $A(a; m-a)$ và $B(b; b-m)$ là giao điểm của $(C)$ và $d$.

Vì $AB = \sqrt{2(m-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}$ nên độ dài $AB$ nhỏ nhất là $2\sqrt{2}$ khi $m = 2$.

**Câu 251:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2mx + m - 2}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): y = x + 3$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho tam giác $IAB$ có diện tích bằng 3, với $I(-1; 1)$. Tính tổng tất cả các phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $-10$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2mx + m - 2}{x+1} = x + 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + (4 - 2m)x + 5 - m = 0$ $(x \neq -1)$. Đồ thị $(C)$ của hàm số $y = \dfrac{2mx + m - 2}{x+1}$ cắt đường thẳng $(d): y = x + 3$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta'_f > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 1 > 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$ $(*)$. $(C)$ cắt $d$ tại $A$, $B$ suy ra $x_A$, $x_B$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2m - 4 \\ x_A x_B = 5 - m \end{cases}$.

$A(x_A; x_A + 3)$, $B(x_B; x_B + 3)$ suy ra.

$AB = \sqrt{2(x_A - x_B)^2} = \sqrt{2(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} = \sqrt{8m^2 - 28m + 12}$. Ta có $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2} d_{(I;d)}.AB = 3$

$\Leftrightarrow AB^2 = 72 \Leftrightarrow 8m^2 - 28m - 60 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{3}{2} \\ m = 5 \end{array}\right.$, kết hợp với $(*)$ suy ra $\left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{3}{2} \\ m = 5 \end{array}\right.$ thỏa suy ra tổng các phần tử của $S$ là $\dfrac{7}{2}$.

**Câu 252:** **[THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị $(C)$. Gọi $A$, $B$ là hai điểm phân biệt trên đồ thị $(C)$ có hoành độ $x_1$, $x_2$ thỏa $x_1 < 1 < x_2$. Giá trị nhỏ nhất của $AB$ là:

**A.** $\sqrt{8\sqrt{2} + 8}$. **B.** $12\sqrt[3]{4}$. **C.** $8\sqrt{2} - 8$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x-1}$. Giả sử $A\left(x_1; x_1 + \dfrac{1}{x_1 - 1}\right)$, $B\left(x_2; x_2 + \dfrac{1}{x_2 - 1}\right)$ với $x_1 < 1 < x_2$.

Đặt $\begin{cases} x_1 = 1 - a\left(a > 0\right) \\ x_2 = 1 + b\left(b > 0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - a - \dfrac{1}{a} \\ y_2 = 1 + b + \dfrac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(b + a; b + a + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}\right)$.

$$AB^2 = \left(a+b\right)^2 + \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(a+b\right)^2\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \overset{\text{Cosi}}{\geq} 4ab\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

$= 8ab + \dfrac{4}{ab} + 8 \overset{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{8ab.\dfrac{4}{ab}} + 8 = 8\sqrt{2} + 8$. Vậy $AB_{min} = \sqrt{8\sqrt{2} + 8}$.

**Câu 253:** **[THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi $A$, $B$ là hai điểm phân biệt trên đồ thị $\left(C\right)$ có hoành độ $x_1$, $x_2$ thỏa $x_1 < 1 < x_2$. Giá trị nhỏ nhất của $AB$ là:

**A.** $\sqrt{8\sqrt{2} + 8}$. **B.** $12\sqrt[3]{4}$. **C.** $8\sqrt{2} - 8$. **D.** $2\sqrt{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x - 1}$. Giả sử $A\left(x_1;\, x_1 + \dfrac{1}{x_1 - 1}\right)$, $B\left(x_2;\, x_2 + \dfrac{1}{x_2 - 1}\right)$ với $x_1 < 1 < x_2$.

Đặt $\begin{cases} x_1 = 1 - a\left(a > 0\right) \\ x_2 = 1 + b\left(b > 0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 - a - \dfrac{1}{a} \\ y_2 = 1 + b + \dfrac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(b + a; b + a + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a}\right)$.

$$AB^2 = \left(a+b\right)^2 + \left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = \left(a+b\right)^2\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \overset{\text{Cosi}}{\geq} 4ab\left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

$= 8ab + \dfrac{4}{ab} + 8 \overset{\text{Cosi}}{\geq} 2\sqrt{8ab.\dfrac{4}{ab}} + 8 = 8\sqrt{2} + 8$. Vậy $AB_{min} = \sqrt{8\sqrt{2} + 8}$.

## Chương 10. Mũ – Logarit

**Câu 254:** **[Sở Hải Dương]** Cho $m = \log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)$, với $a > 1$, $b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16\log_b a$. Tìm m sao cho $P$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $m = \dfrac{1}{2}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Cách 1: Tự luận.

Ta có $m = \log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\log_a b \Rightarrow \log_a b = 3m - 1;\ \log_b a = \dfrac{1}{3m - 1}$.

Do đó $P=\log_a^2 b+16\log_b a=(3m-1)^2+\dfrac{16}{3m-1}$.

Xét hàm số $f(m)=(3m-1)^2+\dfrac{16}{3m-1}$ $\Rightarrow f'(m)=18m-6-\dfrac{48}{(3m-1)^2}$.

$f'(m)=0\Leftrightarrow 3m-1=2\Leftrightarrow m=1$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ là $12$ tại $m=1$.

Cách 2: Trắc nghiệm.

Ta có $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\log_a b\Rightarrow \log_a b=3m-1;\ \log_b a=\dfrac{1}{3m-1}$.

Do đó $P=\log_a^2 b+16\log_b a=(3m-1)^2+\dfrac{16}{3m-1}$.

Thay các đáp án, nhận được đáp án A thỏa mãn yêu cầu $P=12, m=1$.

**Câu 255:** **[TTLT ĐH Diệu Hiền]** Giả sử $p,q$ là các số thực dương sao cho $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Tìm giá trị của $\dfrac{p}{q}$..

**A.** $\dfrac{8}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Đặt $t=\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$. Từ đó suy ra $\begin{cases} p=9^t \\ q=12^t \\ p+q=16^t \end{cases} \Rightarrow 9^t+12^t=16^t$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $16^t\neq 0$ ta được phương trình:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{4}\right)^t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Mặt khác $\dfrac{p}{q}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^t\Rightarrow \dfrac{p}{q}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 256:** **[THPT Yên Lạc-VP]** Cho hai số thực $a, b$ thỏa mãn $\frac{1}{3}<b<a<1$ và biểu thức: $P=\log_a\left(\frac{3b-1}{4a^3}\right)+12\log^2_{\frac{b}{a}} a$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $\frac{b}{a}$.

**A.** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có: $4b^3-3b+1=(b+1)(2b-1)^2\geq 0,\ \forall b\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Suy ra: $3b-1\leq 4b^3 \Rightarrow \log_a\left(\frac{3b-1}{4a^3}\right)\geq \log_a\left(\frac{4b^3}{4a^3}\right)$, do $a\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

$$\Rightarrow P\geq 3\log_a\left(\frac{b}{a}\right)+12\log^2_{\frac{b}{a}} a=3\left[\frac{1}{2}log_a\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}log_a\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{4}{\log^2_a\left(\frac{b}{a}\right)}\right].$$

$$\geq 3.3.\sqrt[3]{\frac{1}{2}log_a\left(\frac{b}{a}\right).\frac{1}{2}log_a\left(\frac{b}{a}\right).\frac{4}{\log^2_a\left(\frac{b}{a}\right)}}=9.$$

Vậy $P_{\min}=9 \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}log_a\left(\frac{b}{a}\right)=4\frac{4}{\log^2_a\left(\frac{b}{a}\right)} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ log_a\left(\frac{b}{a}\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ \frac{b}{a}=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ \frac{b}{a}=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}.$$

Vậy $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

**Câu 257:** **[BTN 161]** Số $p=2^{756839}-1$ là một số nguyên tố. Hỏi số $p$ có bao nhiêu chữ số?

**A.** 227834 chữ số. **B.** 227835 chữ số. **C.** 227832 chữ số. **D.** 227831 chữ số.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có: $p=2^{756839}-1 \Leftrightarrow \log(p+1)=\log 2^{756839} \Leftrightarrow \log(p+1)=756839.\log 2\approx 227831,24$.

Vậy số $p$ này có 227832 chữ số.

**Câu 258:** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

**A.** $9$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2>1 \\ 2x+y\ge x^2+2y^2 \end{cases} (I),\quad \begin{cases} 0<x^2+2y^2<1 \\ 0<2x+y\le x^2+2y^2 \end{cases} (II)$.

Xét T=$2x+y$.

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0<T=2x+y\le x^2+2y^2<1$.

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2+2y^2\le 2x+y \Leftrightarrow (x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\le\frac{9}{8}$. Khi đó.

$$2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})+\frac{9}{4}\le\sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]}+\frac{9}{4}\le\sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}.$$

Suy ra: $\max T=\frac{9}{2}\Leftrightarrow (x;y)=(2;\frac{1}{2})$.

**Câu 259:** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

**A.** $9$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2>1 \\ 2x+y\ge x^2+2y^2 \end{cases} (I),\quad \begin{cases} 0<x^2+2y^2<1 \\ 0<2x+y\le x^2+2y^2 \end{cases} (II)$.

Xét T=$2x+y$.

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0<T=2x+y\le x^2+2y^2<1$.

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2+2y^2\le 2x+y \Leftrightarrow (x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\le\frac{9}{8}$. Khi đó.

$$2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})+\frac{9}{4}\le\sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]}+\frac{9}{4}\le\sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}.$$

Suy ra: $\max T=\frac{9}{2}\Leftrightarrow (x;y)=(2;\frac{1}{2})$.

**Câu 260:** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học $A$ nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền $T$ (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền $T$ hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

**A.** 309604 đồng. **B.** 232518 đồng. **C.** 232289 đồng. **D.** 215456 đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$s = 3000000\left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%)\right] = 12927407,43$.

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là $12.927.407,43$ đồng,.

số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức:

$$\Rightarrow \mathrm{T} = \frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407,4(1+0,0025)^{60}.0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} \approx 232289.$$

**Câu 261:** **[THPT Ngô Sĩ Liên lần 3]** Biết thể tích khí $CO_2$ năm 1998 là $V\left(m^3\right)$. 10 năm tiếp theo, thể tích $CO_2$ tăng $a\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích $CO_2$ tăng $n\%$. Thể tích khí $CO_2$ năm 2016 là.

**A.** $V_{2016} = V + V.(1+a+n)^{18}\left(m^3\right)$.

**B.** $V_{2016} = V.\dfrac{(100+a)^{10}.(100+n)^8}{10^{36}}\left(m^3\right)$.

**C.** $V_{2016} = V.\dfrac{\left((100+a)(100+n)\right)^{10}}{10^{20}}\left(m^3\right)$.

**D.** $V_{2016} = V.(1+a+n)^{18}\left(m^3\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Sau 10 năm thể tích khí $CO_2$ là $V_{2008} = V\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{10} = V\dfrac{(100+a)^{10}}{10^{20}}$.

Do đó, 8 năm tiếp theo thể tích khí $CO_2$ là.

$$V_{2016} = V_{2008}\left(1+\frac{n}{100}\right)^8 = V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}\left(1+\frac{n}{100}\right)^8$$
$$= V\frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}\frac{(100+n)^8}{10^{16}} = V\frac{(100+a)^{10}.(100+n)^8}{10^{36}}.$$

**Câu 262:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương $40\%$. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

**A.** 768,37 triệu. **B.** 726,74 triệu. **C.** 858,72 triệu. **D.** 71674 triệu.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

**Hướng dẫn giải**

| Mức lương 3 năm đầu: 1 triệu | Tổng lương 3 năm đầu: 36. 1 |
|---|---|
| Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)$ | Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)$ |
| Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^2$ | Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^2$ |
| Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^3$ | Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^3$ |
| Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^4$ | Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^4$ |
| Mức lương 3 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^5$ | Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36\left(1+\frac{2}{5}\right)^5$ |
| Mức lương 2 năm tiếp theo: $1.\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$ | Tổng lương 2 năm tiếp theo: $24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$ |

Tổng lương sau tròn 20 năm là.

$$S=36\left[1+\left(1+\frac{2}{5}\right)+\left(1+\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{2}{5}\right)^5\right]+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6$$

$$=36.\frac{1\left[1-\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\right]}{1-\left(1+\frac{2}{5}\right)}+24\left(1+\frac{2}{5}\right)^6\approx 768,37$$

**Câu 263:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm $O$ có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm $M$ cách $O$ một khoảng $R$ được tính bởi công thức $L_M=\log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với $k$ là hằng số. Biết điểm $O$ thuộc đoạn thẳng $AB$ và mức cường độ âm tại $A$ và $B$ lần lượt là $L_A=3$ (Ben) và $L_B=5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm $AB$ (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

**A.** $4$ (Ben). **B.** $3,69$ (Ben). **C.** $3,59$ (Ben). **D.** $3,06$ (Ben).

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có: $L_A<L_B\Rightarrow OA>OB$.

Gọi $I$ là trung điểm $AB$. Ta có:

$$L_A=\log\frac{k}{OA^2}\Rightarrow\frac{k}{OA^2}=10^{L_A}\Rightarrow OA=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10^{L_A}}}.$$

$$L_B=\log\frac{k}{OB^2}\Rightarrow\frac{k}{OB^2}=10^{L_B}\Rightarrow OB=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10^{L_B}}}.$$

$$L_I=\log\frac{k}{OI^2}\Rightarrow\frac{k}{OI^2}=10^{L_I}\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10^{L_I}}}.$$

Ta có: $OI = \frac{1}{2}(OA - OB) \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}^{L_I}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)$.

$\Rightarrow L_I = -2\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\right] \Rightarrow L_I \approx 3,69$.

**Câu 264:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó $A$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r$ là tỉ lệ tăng trưởng, $t$ là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

**A.** $900$. **B.** $1000$. **C.** $800$. **D.** $850$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5} \approx 0,219$.

Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $21,97\%$ mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.0,2197} \approx 900$ con.

**Câu 265:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Ông Nam gởi $100$ triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn $1$ năm với lãi suất là $12\%$ một năm. Sau $n$ năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn $40$ triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi).

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi $T_n$ là tiền vốn lẫn lãi sau $t$ tháng, $a$ là số tiền ban đầu.

Tháng 1 $(t=1)$: $T_1 = a(1+r)$.

Tháng 2 $(t=2)$: $T_2 = a(1+r)^2$.

……………….

Tháng $n(t=n): T_n = a(1+r)^t$.

$$T_n = a(1+r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\frac{140}{100}}{\ln(1+1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}.$$

Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì $n > \frac{t}{12} \approx 2,818$.

Vậy $n = 3$..

**Câu 266:** **[BTN 164]** Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó $A$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r$ là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, $t$ là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau 100 giờ có bao nhiêu con?

**A.** 700 con. **B.** 900 con. **C.** 800 con. **D.** 1000 con.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Theo đề ta có $100.e^{5r} = 300 \Rightarrow \ln\left(e^{5r}\right) = \ln 3 \Rightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \frac{1}{5}\ln 3$.

Sau 10 giờ từ 100 con vi khuẩn sẽ có: $n = 100.e^{\left(\frac{1}{5}\ln 3\right)10} = 100.e^{\ln 9} = 900$.

**Câu 267:** **[BTN 169]** Anh Bách có 400 triệu đồng vì không đủ tiền để mua nhà, nên anh ta quyết định gửi tiền vào ngân hàng vào ngày 1/1/2017 để sau đó mua nhà với giá 700 triệu đồng. Hỏi nhanh nhất đến năm nào anh Bách để đủ tiền mua nhà. Biết rằng anh Bách chọn hình thức gửi theo năm với lãi suất $7,5\%$ một năm (lãi suất này không đổi trong các năm gửi), tiền lãi sau một năm được nhập vào vốn tính thành vốn gửi mới nếu anh Bách không đến rút và ngân hàng chỉ trả tiền cho anh Bách vào ngày 1/1 hàng năm nếu anh Bách muốn rút tiền.

**A.** 2025. **B.** 2023. **C.** 2026. **D.** 2024.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Số tiền có được vào ngày 1/1/2018 là $400(1+7,5\%)$ triệu đồng.

Số tiền có được vào ngày 1/1/2019 là $\left[400(1+7,5\%)\right].(1+7,5\%) = 400(1+7,5\%)^2$ triệu đồng.

Suy ra số tiền sau n năm gửi là $400(1+7,5\%)^n$ triệu đồng. Vì cần 700 triệu mua nhà nên ta có phương trình $400(1+7,5\%)^n = 700 \Leftrightarrow n = \log_{1,075}\left(\frac{7}{4}\right) \approx 7,74$. Vậy sau 8 năm anh Bách có thể mua được nhà tức là nhanh nhất đến năm 2025 anh Bách có thể mua được nhà.

**Câu 268:** **[TT Tân Hồng Phong]** Một người vay ngân hàng 1000000000 ( một tỉ) đồng và trả góp trong 60 tháng. Biết rằng lãi suất vay là $0,6\%/1$ tháng và không đổi trong suốt thời gian vay. Người đó vay vào ngày $1/1/2017$ và bắt đầu trả góp vào ngày $1/2/2017$. Hỏi người đó phải trả mỗi tháng một số tiền không đổi là bao nhiêu ( làm tròn đến hàng ngàn)?

**A.** 13813000 ( đồng). **B.** 13896000 ( đồng).

**C.** 17865000 ( đồng). **D.** 19896000 ( đồng).

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $A$ là số tiền vay; $n$ là số tháng; $r$ là lãi suất trên một tháng; $a$ là số tiền trả góp mỗi tháng.

Cuối tháng 1 số tiền nợ là: $A(1+r)$.

Đầu tháng 2 số tiền nợ là: $A(1+r)-a$; cuối tháng 2 số tiền nợ là $A(1+r)^2 - a(1+r)$.

Đầu tháng $3$ số tiền nợ là: $A(1+r)^2-a(1+r)-a$.

cuối tháng $3$ số tiền nợ là $A(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)$.

….

Cuối tháng $60$ số tiền nợ là: $A(1+r)^{60}-a(1+r)^{59}-a(1+r)^{58}-...-a(1+r)$.

$$A(1+r)^{60}-a(1+r)^{59}-a(1+r)^{58}-...-a(1+r)=A(1+r)^{60}-a(1+r)\left[(1+r)^{58}+(1+r)^{57}+...+1\right]$$
$$=A(1+r)^{60}-a(1+r)\frac{(1+r)^{59}-1}{r}.$$

Đầu tháng $61$: $A(1+r)^{60}-a(1+r)\dfrac{(1+r)^{59}-1}{r}-a$.

Theo yêu cầu bài toán:

$$A(1+r)^{60}-a(1+r)\frac{(1+r)^{59}-1}{r}-a=0\Leftrightarrow a=\frac{A(1+r)^{60}}{(1+r)\dfrac{(1+r)^{59}-1}{r}+1}=19895694,2.$$

**Câu 269:** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học $A$ nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền $T$ (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền $T$ hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

**A.** $309604$ đồng. **B.** $232518$ đồng. **C.** $232289$ đồng. **D.** $215456$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:
$$s=3000000\left[(1+3\%)^4+(1+3\%)^3+(1+3\%)^2+(1+3\%)\right]=12927407,43.$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là $12.927.407,43$ đồng,.

số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức:

$$\Rightarrow \text{T}=\frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}=\frac{12927407,4(1+0,0025)^{60}.0,0025}{(1+0,0025)^{60}-1}\approx 232289.$$

**Câu 270:** **[THPT Nguyễn Khuyến –NĐ]** Bạn $A$ trúng tuyển vào trường đại học $B$ nhưng vì không đủ tiền nộp học phí nên $A$ quyết định vay ngân hàng trong $4$ năm mỗi năm vay $3.000.000$ đồng để nộp học phí với lãi suất $3\%/$năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn $A$ phải trả góp hàng tháng số tiền $T$ (không đổi) cùng với lãi suất $0,25\%/$ tháng trong vòng $5$ năm. Tính số tiền $T$ hàng tháng mà bạn $A$ phải trả ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**A.** $232518$ đồng. **B.** $215456$ đồng. **C.** $309604$ đồng. **D.** $2232289$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Tổng số tiền bạn $A$ nợ ngân hàng cuối năm thứ 4 là.

$$S = 3000000(1+0,03)^4 + 3000000(1+0,03)^3 + 3000000(1+0,03)^2 + 3000000(1+0,03)$$

$$= 3000000\left[(1+0,03)^4 + (1+0,03)^3 + (1+0,03)^2 + (1+0,03)\right].$$

$$= 3000000\left[\frac{(1+0,03)(1-(1+0,03)^4)}{1-(1+0,03)}\right] = 12,927,407$$

Lúc này ta coi như bạn $A$ nợ ngân hàng khoảng tiền ban đầu là $12.927.407$ đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong $5$ năm.

Gọi $x$ là số tiền trả góp hàng tháng.

Số tiền còn nợ cuối tháng 1 là $T_1 = S(1+r) - x$.

Số tiền còn nợ cuối tháng 2 là $T_2 = T_1(1+r) - x = \left[S(1+r) - x\right](1+r) - x = S(1+r)^2 - x(1+r) - x$.

**....**

Số tiền còn nợ cuối tháng thứ 60 là.

$$T_{60} = S(1+r)^{60} - x(1+r)^{59} - x(1+r)^{58} - \ldots - x(1+r) - x$$

$$= S(1+r)^{60} - x\left[(1+r)^{59} + (1+r)^{58} + \ldots + (1+r) + 1\right] = S(1+r)^{60} - \left[\frac{1-(1+r)^{60})}{1-(1+r)}\right].$$

Mà $T_{60} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{S(1+r)^{60} r}{(1+r)^{60} - 1} = 232288$.

**Câu 271:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó $A$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r$ là tỉ lệ tăng trưởng, $t$ là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là $100$ con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

**A.** $900$. **B.** $1000$. **C.** $800$. **D.** $850$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \dfrac{\ln 3}{5} \approx 0,219$.

Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $21,97\%$ mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.0,2197} \approx 900$ con.

**Câu 272:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Ông Nam gởi $100$ triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn $1$ năm với lãi suất là $12\%$ một năm. Sau $n$ năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn $40$ triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi).

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi $T_n$ là tiền vốn lẫn lãi sau $t$ tháng, $a$ là số tiền ban đầu.

Tháng 1 $(t=1)$: $T_1 = a(1+r)$.

Tháng 2 $(t=2)$: $T_2 = a(1+r)^2$.

………………

Tháng $n(t=n)$: $T_n = a(1+r)^t$.

$$T_n = a(1+r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{T_n}{a}}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\frac{140}{100}}{\ln(1+1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}.$$

Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì $n > \frac{t}{12} \approx 2,818$.

Vậy $n = 3$..

**Câu 273:** **[BTN 164]** Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó $A$ là số lượng vi khuẩn ban đầu, $r$ là tỉ lệ tăng trưởng $(r>0)$, $t$ là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau 100 giờ có bao nhiêu con?

**A.** 700 con. **B.** 900 con. **C.** 800 con. **D.** 1000 con.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Theo đề ta có $100.e^{5r} = 300 \Rightarrow \ln\left(e^{5r}\right) = \ln 3 \Rightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \frac{1}{5}\ln 3$.

Sau 10 giờ từ 100 con vi khuẩn sẽ có: $\mathrm{n} = 100.\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{5}\ln 3\right)10} = 100.e^{\ln 9} = 900$.

**Câu 274:** **[THPT Thanh Thủy]** Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng người này tiết kiệm một số tiền cố định là $X$ đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kì hạn một tháng với lãi suất $0,8\%$/tháng. Tìm $X$ để sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên người đó có được tổng số tiền là 500 triệu đồng.

**A.** $X = \frac{4.10^6}{1,008^{37}-1}$. **B.** $X = \frac{4.10^6}{1-0,008^{37}}$.

**C.** $X = \frac{4.10^6}{1,008\left(1,008^{36}-1\right)}$. **D.** $X = \frac{4.10^6}{1,008^{36}-1}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Đặt $r = 0,8\% = 0,008$.

Sau tháng 1 người đó có số tiền là : $T_1 = X + X.r = X(1+r)$.

Sau tháng 2 người đó có số tiền là : $T_2 = \left(X(1+r)+X\right)(1+r) = X\left[(1+r)^2+(1+r)\right]$.

Sau tháng 3 người đó có số tiền là : $T_3 = X\left[(1+r)^2+(1+r)+1\right](1+r)$.

$=X\left[(1+r)^3+(1+r)^2+(1+r)\right]$.

……………………………………………………………………………

Sau tháng n người đó có số tiền là : $T_n = X\left[(1+r)^n+(1+r)^{n-1}+...+(1+r)^2+(1+r)\right]$.

$=\dfrac{X(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}$.

Theo đề bài ta có $5.10^8=\dfrac{X(1.008)\left[(1.008)^{36}-1\right]}{0,008} \Rightarrow X=\dfrac{5.10^8.0,008}{1,008.\left(1,008^{36}-1\right)}$.

$\Rightarrow X=\dfrac{4.10^6}{1,008.\left(1,008^{36}-1\right)}$.

**Câu 275:** **[THPT Nguyễn Huệ-Huế]** Lãi suất gửi tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác An gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất $0,7\%/\,tháng$. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên $0,9\%/\,tháng$. Đến tháng thứ 10 sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống $0,6\%/\,tháng$ và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác An không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi đó là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác An rút được số tiền là bao nhiêu? (biết trong khoảng thời gian này bác An không rút tiền ra).

**A.** $5452771,729$ đồng. **B.** $5452733,453$ đồng.

**C.** $5436521,164$ đồng. **D.** $5436566,169$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

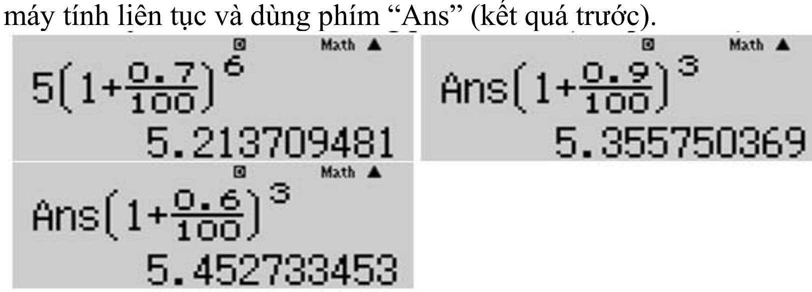
Công thức lãi kép $T_n = A(1+r)^n$, trong đó $n$: kỳ tính lãy (tháng hoặc quý hoặc năm.), $A$: số tiền gửi, $r$: lãi suất.

+ Sau 6 tháng: $A=5\left(1+\dfrac{0,7}{100}\right)^6$ (triệu đồng).

+ Đến tháng thứ 10 (hiểu là hết tháng thứ 9): $B=A\left(1+\dfrac{0,9}{100}\right)^3$ (triệu đồng).

+ Sau 1 năm (12 tháng): $B\left(1+\dfrac{0,6}{100}\right)^3=5,452733453$ (triệu đồng) = $5452733,453$ đồng.

Quy trình bấm máy tính liên tục và dùng phím "Ans" (kết quả trước).




.

**Câu 276:** **[BTN 175]** Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon $14$ (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây bị chết thì hiện tượng quang hợp của nó cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon $14$ nữa. Lượng cacbon $14$ của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ $14$. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon $14$ còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ $t$ năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức: $P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\ (\%)$. Lượng cacbon $14$ còn lại trong mẫu gỗ là $65\%$. Hỏi mẫu gỗ bị chết bao nhiêu năm rồi?

**A.** $3574$ năm. **B.** $6136$ năm. **C.** $4000$ năm. **D.** $41776$ năm.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Lượng cacbon $14$ còn lại trong mẫu gỗ là $65\%$ nên ta có:

$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}=65 \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}}=0,65$.

Log cơ số $\frac{1}{2}$ hai vế ta được: $\log_{\frac{1}{2}}(0,5)^{\frac{t}{5750}}=\log_{\frac{1}{2}}0,65 \Leftrightarrow \frac{t}{5750}=\log_{\frac{1}{2}}0,65$.

$\Leftrightarrow t=5750\log_{\frac{1}{2}}0,65\approx 3574$ năm.

**Câu 277:** **[BTN 169]** Anh Bách có $400$ triệu đồng vì không đủ tiền để mua nhà, nên anh ta quyết định gửi tiền vào ngân hàng vào ngày 1/1/2017 để sau đó mua nhà với giá $700$ triệu đồng. Hỏi nhanh nhất đến năm nào anh Bách để đủ tiền mua nhà. Biết rằng anh Bách chọn hình thức gửi theo năm với lãi suất $7,5\%$ một năm (lãi suất này không đổi trong các năm gửi), tiền lãi sau một năm được nhập vào vốn tính thành vốn gửi mới nếu anh Bách không đến rút và ngân hàng chỉ trả tiền cho anh Bách vào ngày 1/1 hàng năm nếu anh Bách muốn rút tiền.

**A.** $2025$. **B.** $2023$. **C.** $2026$. **D.** $2024$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Số tiền có được vào ngày 1/1/2018 là $400(1+7,5\%)$ triệu đồng.

Số tiền có được vào ngày 1/1/2019 là $\left[400(1+7,5\%)\right].(1+7,5\%)=400(1+7,5\%)^2$ triệu đồng.

Suy ra số tiền sau n năm gửi là $400(1+7,5\%)^n$ triệu đồng. Vì cần 700 triệu mua nhà nên ta có phương trình $400(1+7,5\%)^n=700 \Leftrightarrow n=\log_{1,075}\left(\frac{7}{4}\right)\approx 7,74$. Vậy sau 8 năm anh Bách có thể mua được nhà tức là nhanh nhất đến năm $2025$ anh Bách có thể mua được nhà.

**Câu 278:** **[BTN 167]** Một người cần thanh toán các khoản nợ sau:

- 30 triệu đồng thanh toán sau 1 năm (khoản nợ 1).

- 40 triệu đồng thanh toán sau 1 năm 6 tháng (khoản nợ 2).

- 20 triệu đồng thanh toán sau 3 năm 3 tháng (khoản nợ 3).

Chủ nợ của người này đồng ý cho thanh toán một lần duy nhất $A$ triệu đồng sau 3 năm (khoản nợ này có tiền nợ ban đầu bằng tổng tiền nợ ban đầu của ba khoản nợ trên). Biết rằng lãi suất 4%/năm, giá trị của $A$ gần với con số nào sau đây nhất:

**A.** $95$ triệu. **B.** $97$ triệu. **C.** $94$ triệu. **D.** $96$ triệu.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi $V_1,V_2,V_3$ lần lượt là tiền nợ ban đầu của các khoản nợ 1, 2, 3 và $X$ là tiền nợ ban đầu nếu thanh toán một lần duy nhất $A$ triệu đồng sau 3 năm.

$$\begin{array}{l} 30=V_1.1,04^1\Rightarrow V_1=30.1,04^{-1}\\ 40=V_2.1,04^{1,5}\Rightarrow V_2=40.1,04^{-1,5}\\ 20=V_3.1,04^{3,25}\Rightarrow V_3=20.1,04^{-3,25}\\ A=X.1,04^3\Rightarrow X=A.1,04^{-3}\end{array}.$$

Mà: $V_1+V_2+V_3=X\Leftrightarrow 30.1,04^{-1}+40.1,04^{-1,5}+20.1,04^{-3,25}=A.1,04^{-3}$ (đồng).

$\Leftrightarrow A=94676700\approx 95$ (triệu đồng).

**Câu 279:** **[THPT Lệ Thủy-Quảng Bình]** Một hộ nông dân được ngân hành cho vay mỗi năm $10$ triệu đồng theo diện chính sách để đầu tư trồng cây ăn quả (được vay trong $4$ năm đầu theo thủ tục vay một năm $1$ lần vào thời điểm đầu năm dương lịch). Trong $4$ năm đầu, khi vườn cây chưa cho thu hoạch thì ngân hàng tính lãi suất bằng $3\%/$ năm. Bắt đầu từ năm thứ $5$, đã có thu hoạch từ vườn cây nên ngân hàng dừng cho vay và tính lãi $8\%/$ năm. Tính tổng số tiền hộ nông dân đó nợ ngân hàng trong $5$ năm?

**A.** $46188667$ đồng. **B.** $43091358$ đồng. **C.** $46538667$ đồng. **D.** $48621980$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Số tiền nợ trong năm thứ nhất là: $10.\left(1+3\%\right)$.

Số tiền nợ trong năm thứ hai là: $\left[10.\left(1+3\%\right)+10\right]\left(1+3\%\right)=10\left[\left(1+3\%\right)^2+\left(1+3\%\right)\right]$.

Số tiền nợ trong năm thứ tư là: $10\left[\left(1+3\%\right)^4+\left(1+3\%\right)^3+\left(1+3\%\right)^2+\left(1+3\%\right)\right]$.

Số tiền nợ trong năm thứ năm là: $S=10\left[\left(1+3\%\right)^4+\left(1+3\%\right)^3+\left(1+3\%\right)^2+\left(1+3\%\right)\right].\left(1+8\%\right)$.

Vậy $S=46,538667$ (triệu đồng) $=46538667$ đồng.

**Câu 280:** **[TTLT ĐH Diệu Hiền]** Một người có số tiền là $20.000.000$ đồng đem gửi tiết kiệm loại kỳ hạn $6$ tháng vào ngân hàng với lãi suất $8,5\%/$ năm. Vậy sau thời gian $5$ năm $8$ tháng, người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến $100$ đồng). Biết rằng người đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn $0,01\%$ một ngày. ($1$ tháng tính $30$ ngày).

**A.** $31.802.700$ đồng. **B.** $33.802.700$ đồng. **C.** $30.802.700$ đồng. **D.** $32.802.700$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Lãi suất $8,5\%$ / năm tương ứng với $\frac{8,5}{2}\%/6$ tháng.

Đổi $5$ năm $8$ tháng bằng $11\text{x}6$ tháng $+2$ tháng. Áp dụng công thức tính lãi suất $P_n = P(1+r)^n$.

Số tiền được lĩnh sau $5$ năm $6$ tháng là $P_{11} = 20.000.000\left(1+\frac{8.5}{200}\right)^{11} = 31.613.071.66$ đồng.

Do hai tháng còn lại rút trước hạn nên lãi suất là 0,01% một ngày.

Suy ra số tiền được lĩnh là $T = P_{11} + P_{11}.\frac{0.01}{100}.60 \approx 31.802.700$ đồng.

**Câu 281:** **[Cụm 6 HCM]** Ông A vay ngân hàng T(triệu đồng) với lãi suất $12\%$ năm. Ông A thỏa thuận với ngân hàng cách thức trả nợ như sau: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng. Nhưng cuối tháng thứ ba kể từ lúc vay ông A mới hoàn nợ lần thứ nhất, cuối tháng thứ tư ông A hoàn nợ lần thứ hai, cuối tháng thứ năm ông A hoàn nợ lần thứ ba ( hoàn hết nợ). Biết rằng số tiền hoàn nợ lần thứ hai gấp đôi số tiền hoàn nợ lần thứ nhất và số tiền hoàn nợ lần thứ ba bằng tổng số tiền hoàn nợ của hai lần trước. Tính số tiền ông A đã hoàn nợ ngân hàng lần thứ nhất.

**A.** $\frac{T(1+\frac{5}{100})}{6}$.  **B.** $\frac{T(1+0.01)^5}{6}$.  **C.** $\frac{T(1+0.01)^5}{(1.01)^2+5}$.  **D.** $\frac{T(1+0.01)^5}{(2.01)^2+2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Số tiền nợ của ông A sau hai tháng vay là: $A_2 = T.(1+1\%)^2 = T.(1,01)^2$.

Số tiền nợ của ông A sau $3$ tháng vay là: $A_3 = A_2.(1,01) - m$.

Số tiền nợ của ông A sau $4$ tháng vay là: $A_4 = A_3.(1,01) - 2m$.

Số tiền nợ của ông A sau $5$ tháng vay là: $A_5 = A_4.(1,01) - 3m$.

Theo giả thiết bài toán ta có: $A_5 = 0 \Leftrightarrow ((A_2.1,01 - m).1,01 - 2m).1,01 - 3m = 0$.

$$\Leftrightarrow A_2.1,01^3 - m.(1,01^2 + 2.1,01 + 3) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{A_2.1,01^3}{(1,01^2 + 2.1,01 + 1) + 2} \Leftrightarrow m = \frac{T.1,01^5}{(2,01)^2 + 2}.$$

**Câu 282:** **[208-BTN]** Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, …) cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền $x$, theo công thức $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, trong đó $I_0$ là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và $\mu$ là hệ số hấp thu của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thu $\mu = 1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu $2\,\text{m}$ xuống đến độ sâu $20\,\text{m}$ thì cường độ ánh sáng giảm $l.10^{10}$ lần. Số nguyên nào sau đây gần với $l$ nhất?

**A.** $8$.  **B.** $9$.  **C.** $90$.  **D.** $10$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có.

Ở độ sâu 2 m: $I(2)=I_0e^{-2,8}$.
Ở độ sâu 20 m: $I(20)=I_0e^{-28}$.
Theo giả thiết $I(20)=l.10^{10}.I(2) \Leftrightarrow e^{-28}=l.10^{10}.e^{-2,8}$.

$\Leftrightarrow l=10^{-10}.e^{25,2}\approx 8,79$.

**Câu 283:** **[208-BTN]** Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, …) cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền $x$, theo công thức $I(x)=I_0e^{-\mu x}$, trong đó $I_0$ là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và $\mu$ là hệ số hấp thu của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thu $\mu=1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu $2\,\text{m}$ xuống đến độ sâu $20\,\text{m}$ thì cường độ ánh sáng giảm $l.10^{10}$ lần. Số nguyên nào sau đây gần với $l$ nhất?

**A.** $8$. **B.** $9$. **C.** $90$. **D.** $10$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có**.**

Ở độ sâu 2 m: $I(2)=I_0e^{-2,8}$.
Ở độ sâu 20 m: $I(20)=I_0e^{-28}$.
Theo giả thiết $I(20)=l.10^{10}.I(2) \Leftrightarrow e^{-28}=l.10^{10}.e^{-2,8}$.

$\Leftrightarrow l=10^{-10}.e^{25,2}\approx 8,79$.

**Câu 284:** **[TT Tân Hồng Phong]** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$.

**A.** $6$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Đặt: $\begin{cases} u=2x^2-15x+100 \\ v=x^2+10x-50 \end{cases} \Rightarrow u-v=x^2-25x+150$.

$2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0 \Leftrightarrow 2^u-2^v+u-v<0 \Leftrightarrow 2^u+u<2^v+v$.

Xét hàm $f(u)=2^u+u \Rightarrow f'(u)=2^u.\ln 2+1>0, \forall u\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm $f(u)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Tương tự ta có hàm $f(v)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(u)<f(v)$ nên $u<v$.

Suy ra $2x^2-15x+100<x^2+10x-50 \Leftrightarrow x^2-25x+150<0 \Leftrightarrow 10<x<15$.

Vì $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=1,2,3,4$.

**Câu 285:** **[THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)^2.2^x = 2x(x^2-1)+4(2^{x-1}-x^2)$ bằng.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

$(x-1)^2.2^x = 2x(x^2-1)+4(2^{x-1}-x^2) \Leftrightarrow (x-1)^2.2^x = 2x(x^2-1)+2.2^x-4x^2$.

$\Leftrightarrow 2^x(x^2-2x+1)-2.2^x = 2x(x^2-1-2x) \Leftrightarrow 2^x(x^2-2x-1) = 2x(x^2-2x-1)$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-2x-1=0 & (1) \\ 2^x = 2x & (2) \end{array}\right.$.

PT$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

PT$(2)$: $2^x = 2x \Leftrightarrow f(x) = 2^x-2x = 0$.

Xét hàm số $f(x)=2^x-2x$.

$f'(x)=2^x\ln 2-2$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2^x\ln 2-2=0 \Leftrightarrow x=\log_2\left(\dfrac{2}{\ln 2}\right)$ có 1 nghiệm.

$f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm. Mà nhẩm thấy $x=1, x=2$ là 2 nghiệm của PT $f(x)=0$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là: $1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1+2=5$.

**Câu 286:** **[THPT Trần Cao Vân - Khánh Hòa]** Số nghiệm thực của hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = 4^x+1 \\ 2^{x+1}+y-1=0 \end{cases}$ là:

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

$$\begin{cases} y^2=4^x+1 \\ 2^{x+1}+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2^{x+1})^2-4^x-1=0 \\ y=1-2^{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.4^x-4.2^x=0 \\ y=1-2.2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x=0\,(VN) \\ 2^x=\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ y=1-2.2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x=\dfrac{4}{3} \\ y=1-2.2^x \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm.

**Câu 287:** **[TTGDTX Cam Lâm - Khánh Hòa]** Hệ phương trình sau có mấy nghiệm $(x;y)$?

$$\begin{cases} 2016^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+2017}{y^2+2017} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases}.$$

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có $\begin{cases} 2016^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+2017}{y^2+2017} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$.

Điều kiện $\begin{cases} x+2y+6>0 \\ x+y+2>0 \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_{2016} 2016^{y^2-x^2} = \log_{2016}\frac{x^2+2017}{y^2+2017}$$

$$\Leftrightarrow y^2-x^2 = \log_{2016}\left(x^2+2017\right)-\log_{2016}\left(y^2+2017\right).$$

$$\Leftrightarrow y^2+\log_{2016}\left(y^2+2017\right) = x^2+\log_{2016}\left(x^2+2017\right) \ (3)$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+\log_{2016}\left(t^2+2017\right)$ trên $[0,+\infty)$. Ta có.

$$f'(t)=2t+\frac{2t}{\left(t^2+2017\right)\ln 2016} \geq 0, \forall t\in[0,+\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0,+\infty)$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow y^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$.

***Với** $y=x$ **thay vào phương trình** $(2)$ **ta được.***

$$3\log_3(3x+6)=2\log_2(2x+2)+1.$$

$$\Leftrightarrow 3\left[1+\log_3(x+2)\right]=2\left[1+\log_2(x+1)\right]+1 \Leftrightarrow 3\log_3(x+2)=2\log_2(x+1).$$

Đặt $\begin{cases} t=3\log_3(x+2) \\ t=2\log_2(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3^{\frac{t}{3}} \\ x+1=2^{\frac{t}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\left(\sqrt[3]{3}\right)^t & (4) \\ x+1=\left(\sqrt{2}\right)^t & (5) \end{cases}$.

Lấy $(5)$ thay vào $(4)$, ta được $\left(\sqrt{2}\right)^t+1=\left(\sqrt[3]{3}\right)^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}\right)^t+\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^t=1 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t=6$. Suy ra phương trình có nghiệm $x=7$. Suy ra nghiệm của hệ phương trình là $(7;7)$.

***Với** $y=-x$ **thay vào phương trình** $(2)$ **ta được.***

$3\log_3(y+6)=3 \Leftrightarrow \log_3(y+6)=1 \Rightarrow y=-3, x=3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(3;-3)$, $(7;7)$.

**Câu 288:** **[THPT Lê Hồng Phong]** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $4^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x} \leq m.7^{\cos^2 x}$ có nghiệm.

**A.** $m \geq \frac{6}{7}$. **B.** $m < \frac{6}{7}$. **C.** $m \geq -\frac{6}{7}$. **D.** $m < -\frac{6}{7}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m.7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4\cdot\left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m$.

Đặt $t = \cos^2 x, t \in [0;1]$ thì BPT trở thành: $4\cdot\left(\frac{1}{28}\right)^t + \left(\frac{5}{7}\right)^t \leq m$.

Xét $f(t) = 4.\left(\frac{1}{28}\right)^t + \left(\frac{5}{7}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$.

Suy ra: $f(1) \leq f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq f(t) \leq 5$.

Từ đó BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7}$.

**Câu 289:** **[THPT Tiên Lãng]** Với giá trị nào của $m$ để bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$?.

**A.** $m \in \varnothing$. **B.** $m \neq 2$. **C.** $m < -\frac{3}{2}$. **D.** $m \leq -\frac{3}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

$9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$.

Đặt $t = 3^x > 0$. Bất phương trình trở thành: $t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0, \forall t > 0$.

$\Leftrightarrow t^2 - 2mt - 2t - 3 - 2m > 0, \forall t > 3$.

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 > 2m(t+1), \forall t > 0$.

$\Leftrightarrow m < \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t+1)}$ vì $t + 1 > 0, \ \forall t > 0$.

$\Leftrightarrow m < \frac{t-3}{2}, \forall t > 0$ (*).

Xét hàm số $g(t) = \frac{t-3}{2}$ trên $(0;+\infty)$.

$g'(t) = \frac{1}{2} > 0$. Suy ra hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$g(0) = -\dfrac{3}{2}$..

Do đó: $(*) \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}$..

**Câu 290: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Tìm tất cả các tham số $m$ để phương trình $2^x = mx + 1$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $\begin{cases} m > 0 \\ m \ne \ln 2 \end{cases}$. **B.** $m \in \mathbb{R}$. **C.** $m \ge \ln 2$. **D.** $0 < m < \ln 2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $2^x = mx + 1$ $(1)$.

+ Nếu $x = 0$ thỏa $(1)$, suy ra $x = 0$ là một nghiệm.

+ Nếu $x \ne 0$ pt $(1) \Leftrightarrow m = \dfrac{2^x - 1}{x} = g(x)(2)$.

$g'(x) = \dfrac{x.2^x \ln 2 - 2^x + 1}{x^2} > 0 \, \forall x \ne 0$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln 2$ \|\| $\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(2)$ có một nghiệm khác $0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \ne \ln 2 \end{array}\right.$.

**Câu 291: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình: $6^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \ge m.5^{\cos^2 x}$ có nghiệm.

**A.** $8$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $t = \cos^2 x$, $t \in [0;\ 1]$.Ta có: $6^{1-t} + 4^t \ge m.5^t \Leftrightarrow m \le \dfrac{6^{1-t} + 4^t}{5^t}$ với $t \in [0;\ 1]$.

Xét $f(t)=\dfrac{6^{1-t}+4^t}{5^t}=\dfrac{6}{30^t}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t$; $f'(t)=6\dfrac{1}{30^t}\ln\dfrac{1}{30}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\ln\dfrac{4}{5}<0,\ \forall t\in[0;\ 1]$.

$f(1)=7$ ; $f(1)=1$ nên $m\le f(0)=7$.

**Câu 292:** **[TTGDTX Cam Ranh - Khánh Hòa]** Với giá trị nào của $m$ để bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x$.

**A.** $m\in\varnothing$. **B.** $m\ne -2$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\le -\dfrac{3}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Đặt $t=3^x>0$. Bất phương trình trở thành: $t^2-2(m+1)t-3-2m\ge 0$ $(1)$.

Để $(1)$ đúng với mọi $t>0$ thì $\Delta'=(m+1)^2+3+2m\le 0\Leftrightarrow m^2+4m+4\le 0\Leftrightarrow m=-2$.

**Câu 293:** **[THPT Nguyễn Huệ-Huế]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_3 5]$.

**A.** $m\ge 2\sqrt{2}$. **B.** $m\le 4$. **C.** $m\ge 4$. **D.** $m\le 2\sqrt{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

**Cách 1:**

Đặt $t=3^x$, với $t\in(0;5]$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$, với $t\in(0;5]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}+\dfrac{-1}{2\sqrt{5-t}}=\dfrac{\sqrt{5-t}-\sqrt{t+3}}{2\sqrt{t+3}.\sqrt{5-t}}$. $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $2\sqrt{2}$ |

.

Suy ra: $f(t)\le f(1)=4$, với $t\in(0;5]$.

Để bất phương trình $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_3 5]$ thì $4\le m$.

**Cách 2.** Áp dụng BĐT Bunhiaxcopki.

$\left(\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\right)^2\le\left((3^x+3)+(5-3^x)\right)(1+1)=16\Rightarrow\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le 4$.

Để bất phương trình $\sqrt{3^x+3}+\sqrt{5-3^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_3 5]$ thì $4\le m$.

**Câu 294: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Tìm tất cả các tham số $m$ để phương trình $2^x=mx+1$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $\begin{cases} m>0 \\ m\ne \ln 2 \end{cases}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\ge \ln 2$. **D.** $0<m<\ln 2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $2^x=mx+1\ (1)$.

+ Nếu $x=0$ thỏa $(1)$, suy ra $x=0$ là một nghiệm.

+ Nếu $x\ne 0$ pt $(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{2^x-1}{x}=g(x)(2)$.

$g'(x)=\dfrac{x.2^x\ln 2-2^x+1}{x^2}>0\,\forall x\ne 0$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\ln 2$ \|\| $\ln 2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(2)$ có một nghiệm khác $0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\ne \ln 2 \end{array}\right.$.

**Câu 295: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình: $6^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\ge m.5^{\cos^2 x}$ có nghiệm.

**A.** $8$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $7$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $t=\cos^2 x,\ t\in[0;\ 1]$.Ta có: $6^{1-t}+4^t\ge m.5^t\Leftrightarrow m\le\dfrac{6^{1-t}+4^t}{5^t}$ với $t\in[0;\ 1]$.

Xét $f(t)=\dfrac{6^{1-t}+4^t}{5^t}=\dfrac{6}{30^t}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t$; $f'(t)=6\dfrac{1}{30^t}\ln\dfrac{1}{30}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\ln\dfrac{4}{5}<0,\ \forall t\in[0;\ 1]$.

$f(1)=7$ ; $f(1)=1$ nên $m\le f(0)=7$.

**Câu 296:** **[TTLT ĐH Diệu Hiền]** Cho phương trình $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m$. Tìm $m$ để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

**A.** $m\in(0,2)\setminus\{2;3\}$. **B.** $m\in(0;2)$.

**C.** $m\in(0,2)\setminus\{-3;-8\}$. **D.** $m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $m.2^{x^2-5x+6}+2^{1-x^2}=2.2^{6-5x}+m \Leftrightarrow m.2^{x^2-5x+6}-2^{7-5x}+2^{1-x^2}-m=0$.

$\Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6}(m-2^{1-x^2})+2^{1-x^2}-m=0 \Leftrightarrow (m-2^{1-x^2})\left(2^{x^2-5x+6}-1\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=m\\ 2^{x^2-5x+6}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=m\\ x^2-5x+6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{1-x^2}=m\\ x=2;x=3\end{array}\right..$$

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình $2^{1-x^2}=m$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x\neq 2;x\neq 3$ hay

$$\begin{cases}m>0\\ 1-x^2=\log_2 m\\ x\neq 2;x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ x^2=1-\log_2 m=\log_2\dfrac{2}{m}>0\\ x\neq 2;x\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ \dfrac{2}{m}>1\\ \dfrac{2}{m}\neq 2^4;\dfrac{2}{m}\neq 2^9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>0\\ 0<m<2\\ m\neq\dfrac{1}{8};m\neq\dfrac{1}{256}\end{cases}.$$

Vậy $m\in(0;2)\setminus\left\{\frac{1}{8};\frac{1}{256}\right\}$.

**Câu 297:** **[THPT Trần Phú-HP]** Phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};2\pi\right)$?

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Điều kiện: $\begin{cases}\cot x>0\\ \cos x>0\end{cases}$. Kết hợp giả thiết $x\in\left(-\frac{\pi}{6};2\pi\right)\Rightarrow x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Đặt $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)=t$, ta có hệ $\begin{cases}\cot^2 x=3^t\\ \cos x=2^t\end{cases}$.

Áp dụng công thức: $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, ta có phương trình: $1+3^t=\dfrac{1}{4^t}\Leftrightarrow 4^t+12^t-1=0\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=4^t+12^t-1$ liên tục trên R và có $f'(t)=4^t\ln 4+12^t\ln 12>0\ \forall x\in\mathbb{R}$..

Suy ra $f(t)=4^t+12^t-1$ là hàm đồng biến trên R.

Nên phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm.

Lại có $f(-1).f(0)=-\dfrac{2}{3}<0$ , suy ra phương trình (*) có nghiệm t duy nhất trong khoảng $(-1;0)$

$\Rightarrow 2^t \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Khi đó hệ phương trình $\begin{cases}\cot^2 x=3^t\\ \cos x=2^t\end{cases}$ có nghiệm duy nhất trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $2\log_3(\cot x)=\log_2(\cos x)$ chỉ có đúng một nghiệm trên $\left(-\dfrac{\pi}{6};2\pi\right)$.

**Câu 298:** **[THPT Lê Hồng Phong]** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\infty)$..

**A.** $m\in[-3;3]$.. **B.** $m\in(-\infty;-3]$.. **C.** $m\in(-\infty;-3)$.. **D.** $m\in[3;+\infty)$..

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $y=\ln(16x^2+1)-(m+1)x+m+2$.

$y'=\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

**Cách 1**: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 32x-(m+1)(16x^2+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow -16(m+1)x^2+32x-(m+1)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}-16(m+1)<0\\ \Delta'=16^2-16(m+1)^2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ -16m^2-32m+240\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-1\\ \left[\begin{array}{l}m\le -5\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 3.$.

**Cách 2**: $\dfrac{32x}{16x^2+1}-(m+1)\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{32x}{16x^2+1}\le m+1,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m+1\ge \max\limits_{\mathbb{R}} g(x)$, với $g(x)=\dfrac{32x}{16x^2+1}$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{-512x^2+32}{(16x^2+1)^2}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0; g\left(\frac{1}{4}\right)=4; g\left(-\frac{1}{4}\right)=-4$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ |

.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=4$.

Do đó: $m+1\ge 4 \Leftrightarrow m\ge 3$..

**Câu 299:** **[THPT NGUYỄN QUANG DIÊU]** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để phương trình sau có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{4};4\right]$.

$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$.

**A.** $-3\le m\le \frac{7}{3}$. **B.** $-3<m<\frac{7}{3}$. **C.** $m<-3$. **D.** $m>\frac{7}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

ĐK: $x>2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 4(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)-4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+4m-4=0$.

$x\in\left[\frac{5}{4};4\right]\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le x-2\le 2$, kết hợp đk $x>2$ ta được $\frac{1}{x-2}\le 1$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\Rightarrow t\in(-\infty;1]$. Phương trình trở thành: $4(m-1)t^2-4(m-5)t+4m-4=0$.

**TH1:** $m=1\Rightarrow 16t=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=3\,(\text{t/m})$.

**TH2:** $m\ne 1\Rightarrow pt\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$.

Xét hàm $f(t)=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}, t\in[-1;1]\Rightarrow f'(t)=\frac{4t^2-4}{\left(t^2-t+1\right)^2}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $1$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\frac{7}{3}$ | $\searrow$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $1$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\frac{7}{3}$ | $\searrow$ | |
| | | | $-3$ | | | | $1$ |

Phương trình $m=f(t)$ có nghiệm $t\le 1$ khi và chỉ khi $-3\le m\le \frac{7}{3}$.

**Câu 300:** Cho phương trình $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $m<\frac{1}{2}$ hoặc $m>\frac{3}{2}$. **B.** $m>-\frac{1}{2}$.

**C.** $m<\frac{3}{2}$. **D.** $m<-\frac{3}{2}$ hoặc $m>-\frac{1}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

$4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|}\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{-x^2+2x}\log_2\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow \dfrac{\log_2\left(x^2-2x+3\right)}{2^{3-\left(x^2-2x+3\right)}}=\dfrac{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}{2^{3-\left(2+2|x-m|\right)}}$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{\log_2 u}{2^{3-u}}=\dfrac{2^u\log_2 u}{8}$ với $u\ge 2$. Ta có $f'(u)=\dfrac{1}{8}\left(2^u.\log_2 u.\ln 2+\dfrac{2^u}{u.\ln 2}\right)>0$, $\forall u\ge 2$. Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên $f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+1+2m=0 & (1)\\ x^2+1-2m=0 & (2)\end{array}\right.$. Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

TH1: Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt, phương trình $(2)$ vô nghiệm, suy ra $\begin{cases}3-2m>0\\ 2m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$. Suy ra $m<\frac{1}{2}$ thỏa $(1^*)$.

TH2: Phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt, phương trình $(1)$ vô nghiệm, suy ra $\begin{cases}3-2m<0\\ 2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$. Suy ra $m>\frac{3}{2}$ thỏa $(2^*)$.

TH3: Phương trình $(1)$ có nghiệm kép suy ra $m=\frac{3}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình $(1)$ là $x=2$, nghiệm của phương trình $(2)$ là $x=\pm\sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra $m=\frac{3}{2}$ không thỏa $(3*)$.

TH4: Phương trình $(2)$ có nghiệm kép suy ra $m=\frac{1}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình $(2)$ là $x=0$, nghiệm của phương trình $(1)$ là $x=2\pm\sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra $m=\frac{1}{2}$ không thỏa $(4*)$.

TH5: Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt, phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt nhưng hai phương trình này có nghiệm giống nhau.

Khi đó $\begin{cases}3-2m>0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$.

Gọi $a$, $b$ $(b\neq a)$ là hai nghiệm của phương trình $(1)$, theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases}a+b=4\\a.b=2m+1\end{cases}$ $(3)$.

Vì $a$, $b$ cũng là nghiệm của phương trình $(2)$ nên $\begin{cases}a+b=0\\a.b=-2m+1\end{cases}$ $(4)$, từ $(3)$ và $(4)$ ta suy ra $m\in\varnothing$ $(5*)$.

Từ $(1*)$, $(2*)$, $(3*)$, $(4*)$ và $(5*)$ suy ra $m<\frac{1}{2}$ hoặc $m>\frac{3}{2}$ thỏa.

**Câu 301:** [THPT Chuyên Thái Nguyên] **Cho phương trình:** $\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)+\log_{3-2\sqrt{2}}(mx+x^2)=0$. **Tìm** $m$ **để phương trình có nghiệm thực duy nhất.**

**A.** $\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$. **B.** $m>1$. **C.** $-3<m<1$. **D.** $m=1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1\Rightarrow(3-2\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^{-1}$ nên phương trình tương đương với.

$\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)-\log_{3+2\sqrt{2}}(mx+x^2)=0\Leftrightarrow\log_{3+2\sqrt{2}}(x+m-1)=\log_{3+2\sqrt{2}}(mx+x^2)$.

Điều kiện $x+m-1>0\Leftrightarrow x>1-m\Leftrightarrow x+m-1=x^2+mx\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+1-m=0$ $(*)$.

Để phương trình có nghiệm thực duy nhất thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất hoặc có 2 nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1<1-m<x_2$, tức là:

TH 1: $\Delta=0\Leftrightarrow(1-m)(-m-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=1\end{array}\right.$.

Với $m=1$ ta có $(*)\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow x+m-1=0$ ( loại ).

Với $m=-3$ ta có $(*)\Leftrightarrow x=2\Rightarrow x+m-1<0$ ( loại).

TH 2 : $\begin{cases}\Delta > 0 \\ x_1 + m - 1 < 0 < x_2 + m - 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0 \\ (x_1 + m - 1)(x_2 + m - 1) < 0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1\end{array}\right. \\ x_1x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) + (m-1)^2 < 0 \ (**)\end{cases}$.

Giải $(**)$ ta có $(1-m) - (m-1)(m-1) + (m-1)^2 < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Kết hợp điều kiện ta có $m > 1$.

*Cách khác*: Trắc nghiệm.

Thay trực tiếp $m = 1, m = -3$ vào ta loại hai đáp án $m = 1$ và đáp án $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1\end{array}\right.$.

Thay $m = 0$ loại đáp án $-3 < m < 1$.

**Câu 302:** **[Sở Hải Dương]** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{m\ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên $(e^2; +\infty)$.

**A.** $m \le -2$ hoặc $m = 1$. **B.** $m < -2$.
**C.** $m < -2$ hoặc $m = 1$. **D.** $m < -2$ hoặc $m > 1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \ln x$ vậy $x \in (e^2; +\infty) \Rightarrow t \in (2; +\infty)$.

Hàm số có dạng: $y_t = \dfrac{mt - 2}{t - m - 1}$.

Hàm số $y = \dfrac{m\ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên $(e^2; +\infty)$.

$\Leftrightarrow y_t = \dfrac{mt - 2}{t - m - 1}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Ta có: $y_t' = \dfrac{-m^2 - m + 2}{(t - m - 1)^2}$.

$y_t = \dfrac{mt - 2}{t - m - 1}$ nghịch biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow \dfrac{-m^2 - m + 2}{(t - m - 1)^2} < 0, \forall t \in (2; +\infty)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ m + 1 \notin (2; +\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2\end{array}\right. \\ m + 1 \le 2\end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

**Câu 303:** Cho phương trình $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $m<\frac{1}{2}$ hoặc $m>\frac{3}{2}$. **B.** $m>-\frac{1}{2}$.

**C.** $m<\frac{3}{2}$. **D.** $m<-\frac{3}{2}$ hoặc $m>-\frac{1}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

$4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|}\log_2\left(x^2-2x+3\right)=2^{-x^2+2x}\log_2\left(2|x-m|+2\right)\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(x^2-2x+3\right)}{2^{3-\left(x^2-2x+3\right)}}=\frac{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}{2^{3-\left(2+2|x-m|\right)}}$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{\log_2 u}{2^{3-u}}=\frac{2^u\log_2 u}{8}$ với $u\ge 2$. Ta có $f'(u)=\frac{1}{8}\left(2^u.\log_2 u.\ln 2+\frac{2^u}{u.\ln 2}\right)>0$, $\forall u\ge 2$. Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ nên $f\left(x^2-2x+3\right)=f\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+1+2m=0 & (1)\\ x^2+1-2m=0 & (2)\end{array}\right.$. Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

TH1: Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt, phương trình $(2)$ vô nghiệm, suy ra $\begin{cases}3-2m>0\\2m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$. Suy ra $m<\frac{1}{2}$ thỏa $(1*)$.

TH2: Phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt, phương trình $(1)$ vô nghiệm, suy ra $\begin{cases}3-2m<0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{3}{2}$. Suy ra $m>\frac{3}{2}$ thỏa $(2*)$.

TH3: Phương trình $(1)$ có nghiệm kép suy ra $m=\frac{3}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình $(1)$ là $x=2$, nghiệm của phương trình $(2)$ là $x=\pm\sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra $m=\frac{3}{2}$ không thỏa $(3*)$.

TH4: Phương trình $(2)$ có nghiệm kép suy ra $m=\frac{1}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình $(2)$ là $x=0$, nghiệm của phương trình $(1)$ là $x=2\pm\sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra $m=\frac{1}{2}$ không thỏa $(4*)$.

TH5: Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt, phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt nhưng hai phương trình này có nghiệm giống nhau.

Khi đó $\begin{cases}3-2m>0\\2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$.

Gọi $a$, $b$ $(b \neq a)$ là hai nghiệm của phương trình $(1)$, theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} a+b=4 \\ a.b=2m+1 \end{cases}$ $(3)$.

Vì $a$, $b$ cũng là nghiệm của phương trình $(2)$ nên $\begin{cases} a+b=0 \\ a.b=-2m+1 \end{cases}$ $(4)$, từ $(3)$ và $(4)$ ta suy ra $m \in \varnothing$ $(5^*)$.

Từ $(1^*)$, $(2^*)$, $(3^*)$, $(4^*)$ và $(5^*)$ suy ra $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{3}{2}$ thỏa.

**Câu 304:** **[THPT Chuyên Quang Trung]** Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$. Tìm $m$ để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

**A.** $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

**C.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ và $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6 \leq 0$ $(1)$.

Giả sử $M(x;y)$ thỏa mãn pt $(1)$, khi đó tập hợp điểm $M$ là hình tròn $(C_1)$ tâm $I(2;2)$ bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Các đáp án đề cho đều ứng với $m>0$. Nên dễ thấy $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$ là phương trình đường tròn $(C_2)$ tâm $J(-1;1)$ bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

Vậy để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa đề khi chỉ khi $(C_1)$ và $(C_2)$ tiếp xúc ngoài.

$\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10}=\sqrt{m}+\sqrt{2} \Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

## Chương 11. Nguyên hàm – tích phân

**Câu 305:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho hàm số $f(x)=\frac{a}{\pi}+\cos^2 x$. Tìm tất cả các giá trị của $a$ để $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{4}, F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

**A.** $\frac{\pi}{2}-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}-2$. **C.** $\pi-2$. **D.** $\pi-1$.

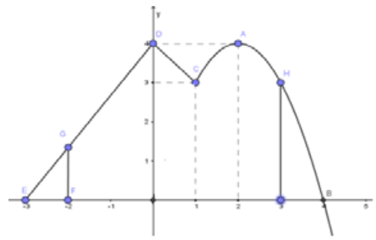
**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{a}{\pi}+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\left[\frac{a}{\pi}+\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]\mathrm{d}x=\left(\frac{a}{\pi}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

Theo giả thiết $\begin{cases} F(0)=\frac{1}{4} \\ F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{4} \\ \left(\frac{a}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{4} \\ a=\frac{\pi}{2}-2 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{\pi}{2}-2$.

**Câu 306: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;5\right]$ như hình vẽ dưới đây(phầnc cong của đồ thị là một phần cảu Parabol $y=ax^2+bx+c$). Tính $I=\int\limits_{-2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

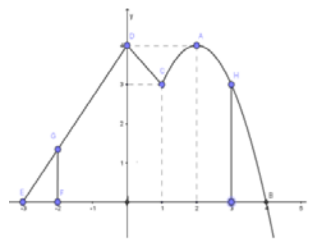


.

**A.** $I=\dfrac{53}{3}$. **B.** $I=\dfrac{97}{6}$. **C.** $I=\dfrac{43}{2}$. **D.** $I=\dfrac{95}{6}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**



.

Ta có $I=\int\limits_{-2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta_1$, $\Delta_2$, Parabol $\left(P\right)$, $x=-2$, $x=3$.

Với $\Delta_1$ qua $E\left(-3;0\right)$, $D\left(0;4\right)$ nên có pt: $y=\dfrac{4}{3}x+4$; $\Delta_2$ qua $D\left(0;4\right)$, $C\left(1;3\right)$ nên có phương trình: $y=-x+4$; $\left(P\right):y=ax^2+bx+c$ qua $C\left(1;3\right)$ và có đỉnh $A\left(2;4\right)$ nên

$$\begin{cases}a+b+c=3\\ \dfrac{-b}{2a}=2\\ 4a+2b+c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\\ c=0\end{cases}\Rightarrow y=-x^2+4x.$$

Vậy $I=\int\limits_{-2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(\dfrac{4}{3}x+4\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left(-x+4\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left(-x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{97}{6}$.

**Câu 307: [TT Tân Hồng Phong]** Cho $f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(1\right)=1$ và $\int\limits_{0}^{1}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}$, tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$.

**A.** $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=-\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Đặt $\sin x=t\Rightarrow f\left(\sin x\right)=f\left(t\right)\Rightarrow \cos x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=f'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

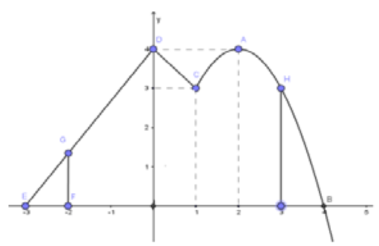
Đổi cận: khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.\cos x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1 t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t.$$

Đặt: $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'\left(t\right)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f\left(t\right)\end{cases}$.

$$I=2\left[\left(t.f\left(t\right)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

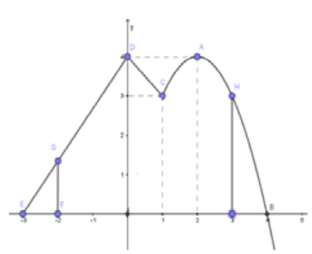
**Câu 308: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;5\right]$ như hình vẽ dưới đây(phầnc cong của đồ thị là một phần cảu Parabol $y=ax^2+bx+c$). Tính $I=\int_{-2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.



**A.** $I=\frac{53}{3}$. **B.** $I=\frac{97}{6}$. **C.** $I=\frac{43}{2}$. **D.** $I=\frac{95}{6}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**



Ta có $I=\int_{-2}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\Delta_1$, $\Delta_2$, Parabol $\left(P\right)$, $x=-2$, $x=3$.

Với $\Delta_1$ qua $E(-3;0)$, $D(0;4)$ nên có pt: $y=\frac{4}{3}x+4$; $\Delta_2$ qua $D(0;4)$, $C(1;3)$ nên có phương trình: $y=-x+4$; $(P): y=ax^2+bx+c$ qua $C(1;3)$ và có đỉnh $A(2;4)$ nên

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ \frac{-b}{2a}=2 \\ 4a+2b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2+4x.$$

Vậy $I=\int\limits_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{4}{3}x+4\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(-x+4)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}(-x^2+4x)\mathrm{d}x=\frac{97}{6}$.

**Câu 309:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho $(E)$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=7$. Để diện tích elip $(E)$ gấp 7 lần diện tích hình tròn $(C)$ khi đó.

**A.** $ab=7\sqrt{7}$. **B.** $ab=49$. **C.** $ab=\sqrt{7}$. **D.** $ab=7$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)\Rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Diện tích $(E)$ là.

$S_{(E)}=4\int\limits_0^a \frac{b\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x}{a}=4\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $x=a\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$S_{(E)}=4\frac{b}{a}\int\limits_0^a a^2.\cos^2 t\mathrm{d}t=2ab\int\limits_0^a(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\pi ab$.

Mà ta có $S_{(C)}=\pi.R^2=7\pi$..

Theo giả thiết ta có $S_{(E)}=7.S_{(C)}\Leftrightarrow \pi ab=49\pi\Leftrightarrow ab=49$..

**Câu 310:** **[THPT Chuyên Bình Long]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Tính tích phân: $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$..

**A.** $I=13$. **B.** $I=12$. **C.** $I=7$. **D.** $I=17$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

$I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$; Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^2 t.f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}xf(x)\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

$=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8-1=7$.

**Câu 311:** Biết $I=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+2e^{-x}-3}=3\ln a-\ln b$ với $a$, $b$ là các số nguyên dương. Tính $P=ab$..

**A.** $P=-10$. **B.** $P=15$. **C.** $P=20$. **D.** $P=10$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $I=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+2e^{-x}-3}=\int_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^{2x}-3e^x+2}$.

Đặt: $t=e^x\Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=\ln 3\Rightarrow t=3$, $x=\ln 6\Rightarrow t=6$.

Khi đó $I=\int_3^6\frac{1}{t^2-3t+2}\mathrm{d}t=\int_3^6\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{t-2}{t-1}\Big|_3^6=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{8}{5}=3\ln 2-\ln 5$.

Suy ra $a=2$, $b=5$. Vậy, $P=ab=10$.

**Câu 312:** **[THPT Chuyên SPHN]** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồng thời thỏa mãn:

$f(x)+f(-x)=\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

☑ Tính tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x)\mathrm{d}x$.

• Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

• Đổi cận: $x=-\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$.

• Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} f(t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x$.

☑ Ta có $f(x)+f(-x)=\cos x \Rightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$.

**Câu 313:** **[Sở GDĐT Lâm Đồng lần 2]** Kết quả của $F=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ là:

**A.** $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

$F=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\tan x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x$.

Với $x=0 \Rightarrow t=0$, với $x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$F=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}.\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

**Câu 314:** **[Cụm 1 HCM]** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=3-2\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khi đó, giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

**A.** $I=\frac{\pi-1}{3}$. **B.** $I=\frac{3\pi}{2}-2$. **C.** $I=\frac{\pi}{2}+2$. **D.** $I=\frac{\pi+1}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$. Suy ra: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t$.

Mặt khác: $f(t) + f(-t) = 3 - 2\cos t$ (thay $x = t$).

Ta có: $2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(t) + f(-t)\right]\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - \cos t)\,\mathrm{dt}$. Suy ra: $I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos t)\,\mathrm{dt}$.

$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos t)\,\mathrm{dt} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos t)\,\mathrm{dt}$. (Do $3 - 2\cos t$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

$= (3t - 2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - 2$.

**Câu 315:** **[Cụm 1 HCM]** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 3 - 2\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, giá trị của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

**A.** $I = \frac{\pi - 1}{3}$. **B.** $I = \frac{3\pi}{2} - 2$. **C.** $I = \frac{\pi}{2} + 2$. **D.** $I = \frac{\pi + 1}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$. Suy ra: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t$.

Mặt khác: $f(t) + f(-t) = 3 - 2\cos t$ (thay $x = t$).

Ta có: $2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[f(t) + f(-t)\right]\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - \cos t)\,\mathrm{dt}$. Suy ra: $I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos t)\,\mathrm{dt}$.

$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos t)\,\mathrm{dt} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\cos t)\,\mathrm{dt}$. (Do $3 - 2\cos t$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$).

$= \left(3t - 2\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3\pi}{2} - 2$.

**Câu 316:** **[THPT Hùng Vương-PT]** Cho $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với $a$, $b$ là các số hữu tỉ. Tính $P = a + 4b$.

**A.** $P = 1$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = -3$. **D.** $P = 3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$.

Khi đó $I = -\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\Big|_1^2 + \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$.

$= \dfrac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \left(\ln x - \ln(1+x)\right)\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}\ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = \dfrac{1}{2}\ln 3 + \ln 2$.

Suy ra $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$. Vậy, $P = a + 4b = 3$.

**Câu 317:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Biết $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x = 4 + a\ln 2 + b\ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

**A.** $S = -3$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 9$. **D.** $S = 11$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có $|x-2| = \begin{cases} x - 2.\ \text{Khi } x \ge 2 \\ 2 - x.\ \text{Khi } x \le 2 \end{cases}$.

Do đó $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

$= \displaystyle\int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x$.

$= \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2\right)\mathrm{d}x + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$.

$= \left(5\ln x - 2x\right)\Big|_1^2 + \left(2x - 5\ln x\right)\Big|_2^5$.

$=4+8\ln 2-3\ln 5$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow S=a+b=5$.

**Câu 318:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Biết $I=\int\limits_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$.

**A.** $S=-3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=9$. **D.** $S=11$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có $|x-2|=\begin{cases} x-2.\text{ Khi } x\ge 2 \\ 2-x.\text{ Khi } x\le 2 \end{cases}$.

Do đó $I=\int\limits_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$=\int\limits_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x}\,\mathrm{d}x$.

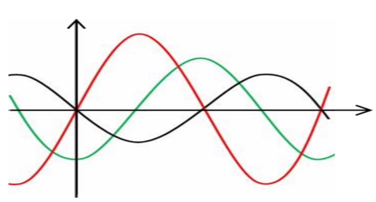
$=\int\limits_1^2 \left(\frac{5}{x}-2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 \left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$.

$=(5\ln x-2x)\Big|_1^2+(2x-5\ln x)\Big|_2^5$.

$=4+8\ln 2-3\ln 5$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow S=a+b=5$.

**Câu 319:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho đồ thị của ba hàm số $y=f(x), y=f'(x), y=\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ở hình dưới. Xác định xem $(C_1),(C_2),(C_3)$ tương ứng là đồ thị hàm số nào?


.

**A.** $y=f(x), y=\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t, y=f'(x)$. **B.** $y=f(x), y=\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t, y=f'(x)$.

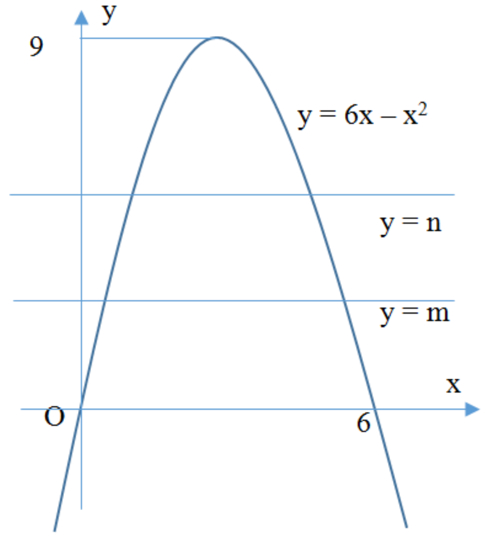
**C.** $y=f'(x), y=f(x), y=\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$. **D.** $y=\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t, y=f'(x), y=f(x)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Dựa vào đồ thị ta có: $(C_3)$ là đạo hàm của $(C_1)$.

**Câu 320:** **[Cụm 6 HCM]** Gọi $(H)$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P)$ của hàm số $y=6x-x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m, y=n$ chia hình $(H)$ thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $P=(9-m)^3+(9-n)^3$.




**A.** $P=407$. **B.** $P=405$. **C.** $P=403$. **D.** $P=409$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:** (Dùng công thức diện tích theo biến $y$).

$+$ Gọi $(H):\begin{cases}(P): y=6x-x^2\\ Ox: y=0\\ x=0, x=6\end{cases}$. Suy ra: $S=S_H=\int\limits_0^6\left(6x-x^2\right)dx=36$.

Ta có: $y=6x-x^2 \Leftrightarrow (x-3)^2=9-y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=3+\sqrt{9-y} & (P_1)\\ x=3-\sqrt{9-y} & (P_2)\end{array}\right.$.

$+$ Gọi $(H_1):\begin{cases}(P_1): x=3+\sqrt{9-y}\\ (P_2): x=3-\sqrt{9-y}\\ y=n, y=9\end{cases}$.

Suy ra: $S_1=S_{H_1}=\int\limits_n^9\left(3+\sqrt{9-y}-3+\sqrt{9-y}\right)dy=2\int\limits_n^9\sqrt{9-y}\,dy=\frac{4}{3}\left(\sqrt{9-n}\right)^3$.

Mà $S_1 = \dfrac{S}{3} = 12$ nên $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{9-n}\right)^3 = 12 \Leftrightarrow (9-n)^3 = 81$.

+ Gọi $(H_2): \begin{cases} (P_1): x = 3 + \sqrt{9-y} \\ (P_2): x = 3 - +\sqrt{9-y} \\ y = m, y = 9 \end{cases}$.

Suy ra: $S_2 = S_{H_2} = 2\int\limits_m^9 \sqrt{9-y}\,\mathrm{d}y = \dfrac{4}{3}\left(\sqrt{9-m}\right)^3$.

Mà $S_2 = \dfrac{2S}{3} = 24$ nên $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{9-n}\right)^3 = 24 \Leftrightarrow (9-n)^3 = 324$.

Vậy $P = 81 + 324 = 405$.

**Cách 2**: (Dùng công thức diện tích theo biến $x$).

Từ điều kiện bài toán ta có : $0 < m, n < 9$.

Xét các phương trình hoành độ giao điểm : $6x - x^2 = 0$.

$$6x - x^2 = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{9-m} \\ x = 3 + \sqrt{9-m} \end{array}\right. \text{ và } 6x - x^2 = n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{9-n} \\ x = 3 + \sqrt{9-n} \end{array}\right..$$

Gọi $D\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ Ox \\ x = 0; x = 6 \end{cases}$ ; $D_M\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = m \\ x = 3 - \sqrt{9-m}; x = 3 + \sqrt{9+m} \end{cases}$ ; $D_N\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = n \\ x = 3 - \sqrt{9-n}; x = 3 + \sqrt{9+n} \end{cases}$.

Khi đó ta có :

$$S_D = \int\limits_0^6 \left(6x - x^2\right)\mathrm{d}x = 36.$$

$$S_{D_M} = \int\limits_{3-\sqrt{9-m}}^{3+\sqrt{9-m}} \left(6x - x^2 - m\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{3-\sqrt{9-m}}^{3+\sqrt{9-m}} \left((9-m) - (x-3)^2\right)\mathrm{d}x = \left.\left((9-m)x - \frac{(x-3)^3}{3}\right)\right|_{3-\sqrt{9-m}}^{3+\sqrt{9-m}}.$$

$= = \dfrac{4}{3}.\left(\sqrt{9-m}\right)^3$.

Chứng minh tương tự ta có : $S_{D_N} = \dfrac{4}{3}.\left(\sqrt{9-n}\right)^3$.

Theo bài ra ta có : $S_{D_M} = \dfrac{2}{3}.36 = 24$ và $S_{D_N} = \dfrac{1}{3}.36 = 12$.

Do đó $(9-m)^3 = 324$ và $(9-n)^3 = 81$.

Vậy $P = 324 + 81 = 405$.

**Câu 321:** **[THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành 2 phần. Tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào?

**A.** $(0,5;0,6)$. **B.** $(0,4;0,5)$. **C.** $(0,7;0,8)$. **D.** $(0,6;0,7)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Phương trình đường tròn có tâm $O$, bán kính $2\sqrt{2}$ là $x^2+y^2=8$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường tròn:

$$x^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=8 \Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0 \Leftrightarrow x=\pm 2.$$

Diện tích phần giới hạn bởi phần lõm parabol và nửa trên đường tròn là.

$$S_1=\int_{-2}^{2}\left|\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right|\mathrm{d}x \approx 7,616518641.$$

Diện tích hình tròn là $8\pi$.

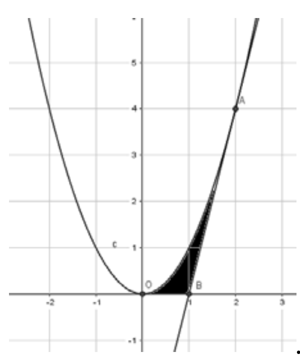
Vậy tỉ số diện tích cần tìm là $\dfrac{S_1}{8\pi-S_1}\approx 0,43$..

**Câu 322:** Tìm diện tích $S$ của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=x^2$, tiếp tuyến $d$ của $(C)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ và trục hoành.

**A.** $S=\dfrac{2}{3}$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=\dfrac{8}{3}$. **D.** $S=\dfrac{4}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**


.

Ta có $(C): y=x^2$; $y'=2x$; $x=2\Rightarrow y=4$; $y'(2)=4$.

Phương trình tiếp tuyến $d$: $y=4(x-2)+4=4x-4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $Ox$ là: $x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ và $d$ là: $x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $Ox$ và $d$ là: $4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

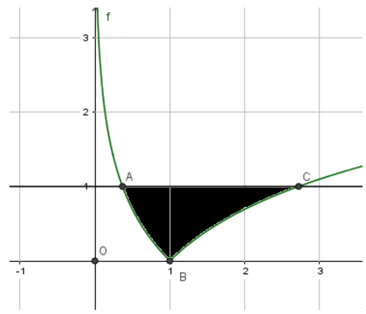
Vậy diện tích cần tìm là: $S = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

**Câu 323:** Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |\ln x|$ và $y = 1$ là $S = ae + \frac{b}{e} + c$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Tính $P = a + b + c$..

**A.** $P = -2$. **B.** $P = 3$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$|\ln x| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 1 \\ \ln x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e \\ x = \frac{1}{e} \end{array}\right..$$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(1 - |\ln x|\right) \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(1 + \ln x\right) \mathrm{d}x + \int_1^e \left(1 - \ln x\right) \mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

Tính $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(1 + \ln x\right) \mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = 1 + \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_1 = x\left(1 + \ln x\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \mathrm{d}x = 1 - x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}.$$

Tính $I_2 = \int_1^e \left(1 - \ln x\right) \mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = 1 - \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$.

$$\Rightarrow I_2 = x\left(1 - \ln x\right)\Big|_1^e + \int_1^e \mathrm{d}x = -1 + x\Big|_1^e = -1 + \left(e - 1\right) = e - 2.$$

Suy ra $S=e+\frac{1}{e}-2=ae+\frac{b}{e}+c\Rightarrow a=1$, $b=1$, $c=-2$.

Vậy, $P=a+b+c=0$.

**Câu 324:** **[THPT Hai Bà Trưng- Huế]** Hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2;y=4x^2;y=4$ có diện tích bằng.

$\frac{16}{3}(đvdt)$..

**A.** .
**B.** $\frac{13}{4}(đvdt)$..
**C.** $\frac{8}{3}(đvdt)$..
**D.** $\frac{17}{3}(đvdt)$..

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm.

$x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.;\ 4x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ đvdt.

Diện tích hình phẳng là $S=\int_{-2}^{2}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left|4x^2-4\right|\mathrm{d}x=\frac{16}{3}(đvdt)$.

**Câu 325:** **[THPT Lê Hồng Phong]** Cho phần vật thể $B$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $B$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 2\right)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích của phần vật thể $B$..

**A.** $V=4\sqrt{3}$.
**B.** $V=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
**C.** $V=\sqrt{3}$.
**D.** $V=\frac{4}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

$$V=\int_0^2\frac{\left(x\sqrt{2-x}\right)^2\sqrt{3}}{4}dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2\left(2-x\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}..$$

**Câu 326:** **[THPT Chuyên SPHN]** Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục $Ox$ của hình phẳng giới hạn bởi các trục tọa độ và các đường $y=\sqrt{x-1}$, $y=2$ là.

**A.** $9\pi$.
**B.** $15\pi$.
**C.** $16\pi$.
**D.** $12\pi$.

**Hướng dẫn giải**

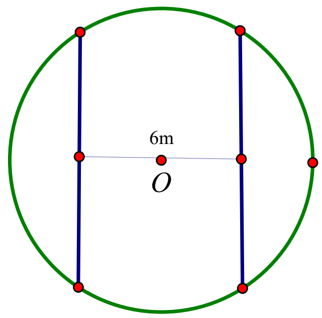
**Chọn D.**

Giải phương trình $\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x=5$.
Dựa vào đồ thị hàm số ta có thể tích cần tìm là.

$V=\pi\int\limits_0^1 2^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_1^5\left[\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2\right]\mathrm{d}x$.

$V=12\pi$.

**Câu 327:** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận $O$ làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).




**A.** $4821232$ đồng. **B.** $8412322$ đồng. **C.** $8142232$ đồng. **D.** $4821322$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là.

$x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục $Ox$ có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$ Khi đó diện tích $S$ của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị.

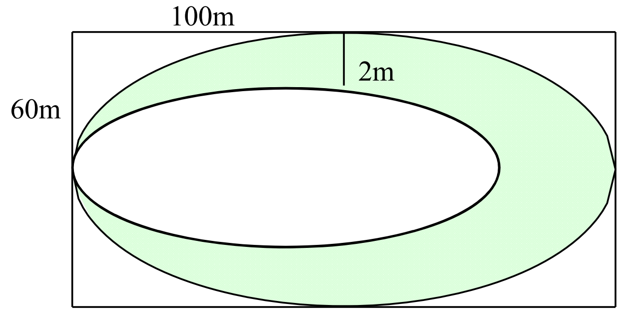
$y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;\ x=3\Rightarrow S=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=6\sin t\Rightarrow dx=6\cos tdt$. Đổi cận : $x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$ ; $x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S=2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 tdt=36\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,\mathrm{d}t=18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi.$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S\approx 4821322$ đồng.

**Câu 328:** **[THPT Hà Huy Tập]** Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (Như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi $m^2$ làm đường $600.000$ đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).




**A.** $283904000$. **B.** $283604000$. **C.** $293904000$. **D.** $293804000$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét hệ trục tọa độ $Oxy$ đặt gốc tọa độ $O$ vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1): \frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của $(E_1)$ nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2): \frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của $(E_2)$ nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi $S_1$ là diện tích của $(E_1)$ và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_1(x)$. Gọi $S_2$ là diện tích của $(E_2)$ và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_2(x)$.

Gọi $S$ là diện tích con đường. Khi đó.

$$S=S_1-S_2=2\int_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}\mathrm{d}x-2\int_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}\mathrm{d}x.$$

Tính tích phân $I=2\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x,\left(a,b\in\mathbb{R}^+\right)$.

Đặt $x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}; x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,\mathrm{d}t = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$.

$= ab\left(t+\dfrac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$.

Do đó $S = S_1 - S_2 = 50.30\pi - 48.28\pi = 156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S = 600000.156\pi \approx 294053000$ (đồng).

**Câu 329:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

**A.** $\dfrac{43}{3}\pi(dm^3)$. **B.** $41\pi(dm^3)$. **C.** $\dfrac{100}{3}\pi(dm^3)$. **D.** $132\pi(dm^3)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của $(C)$ quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi nửa trên trục Ox của $(C)$, trục Ox, hai đường thẳng x = 0, x = 2 quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài. Ta có $(x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-(x-5)^2}$.

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của $(C)$ có phương trình $y = \sqrt{25-(x-5)^2} = \sqrt{10x-x^2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho $(H)$ quay quanh Ox là:

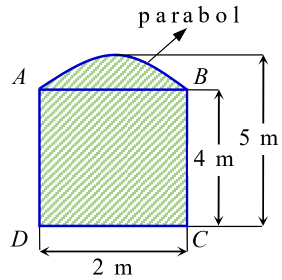
$$V_1 = \pi\int_0^2 \left(10x - x^2\right)dx = \pi\left(5x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{52\pi}{3}.$$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi.5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$.

Thể tích cần tìm: $V = V_2 - 2V_1 = \dfrac{500\pi}{3} - 2.\dfrac{52\pi}{3} = 132\pi(dm^3)$.

**Câu 330:** **[Cụm 1 HCM]** Ông A muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên. Biết đường cong phía trên là parabol, tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và giá thành là $900\,000$ đồng trên 1 m² thành phẩm. Hỏi ông A phải trả bao nhiêu tiền để làm cánh cửa đó?

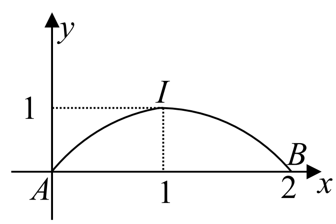
$8\,400\,000$ đồng.




**A.** $6\,000\,000$ đồng. **B.** . **C.** $6\,600\,000$ đồng. **D.** $8\,160\,000$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




.

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

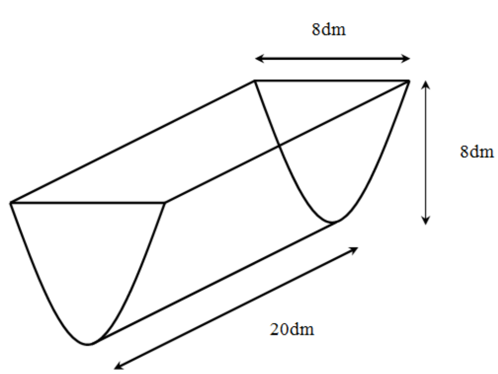
Vì $(P)$ đi qua điểm $A(0;0); B(2;0)$ và có đỉnh $I(1;1)$ nên.

$(P): y = -x^2 + 2x$.

Diện tích cánh cửa là $S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x + S_{ABCD} = \frac{4}{3} + 8 = \frac{28}{3}$.

Số tiền ông A phải trả là $\frac{28}{3} \times 900\,000 = 8\,400\,000$.

**Câu 331:** **[208-BTN]** Một bồn nước được thiết kế với chiều cao $8$ dm, ngang $8$ dm, dài $2$ m, bề mặt cong đều nhau với mặt cắt ngang là một hình parabol như hình vẽ bên dưới. Bồn chứa được tối đa bao nhiêu lít nước.



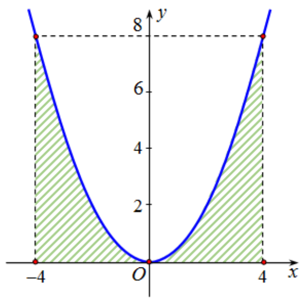

.

**A.** $\frac{1280}{3}$ (lít). **B.** $1280\pi$ (lít). **C.** $\frac{2560}{3}$ (lít). **D.** $1280$ (lít).

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét mặt cắt parabol, chọn hệ trục như hình vẽ. Ta thấy Parabol đi qua các điểm $A\left(-4;4\right)$, $B\left(4;4\right)$, $C\left(0;0\right)$ nên có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2$. Diện tích phần mặt cắt tính như sau:

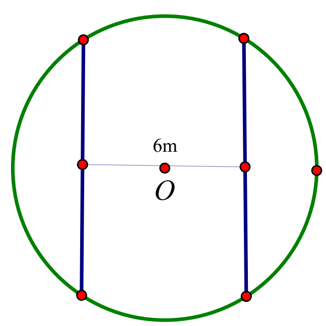



$$S=S_{hv}-\int_{-4}^{4}\frac{1}{2}x^2dx=64-\frac{64}{3}=\frac{128}{3}\left(\text{dm}^2\right).$$

Do đó thể tích của bồn.

$$V=\int_0^{20}S\text{d}x=\int_0^{20}\frac{128}{3}\text{d}x=\frac{2560}{3}\left(\text{dm}^3\right).$$

**Câu 332:** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Một mảnh vườn hình tròn tâm $O$ bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận $O$ làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là $70000$ đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).




**A.** $4821232$ đồng. **B.** $8412322$ đồng. **C.** $8142232$ đồng. **D.** $4821322$ đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là.

$\text{x}^2+\text{y}^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục $Ox$ có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(\text{x})$ Khi đó diện tích $S$ của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị.

$y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;\ x=3 \Rightarrow S=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,dx$.

Đặt $x=6\sin t \Rightarrow dx=6\cos tdt$. Đổi cận : $x=-3 \Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}$ ; $x=3 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S=2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 tdt=36\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\,dt=18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi.$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng.

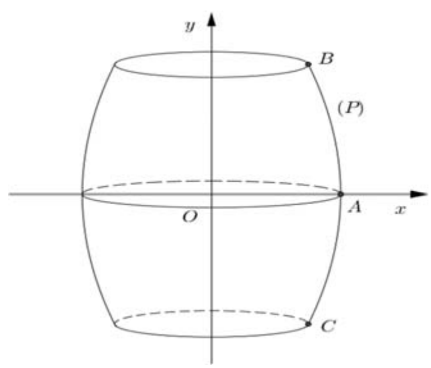
**Câu 333:** **[THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa]** Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu ( đơn vị lít) là bao nhiêu ?

.

**A.** $425162$ lít. **B.** $212581$ lít. **C.** $212,6$ lít. **D.** $425,2$ lít.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




.

Đơn vị tính là $dm$.

Gọi $(P): x=ay^2+by+c$ qua $A(4;0)$, $B(3;5)$, $C(3;-5)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0 \\ c=-\dfrac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow (P): x=-\frac{1}{25}y^2+4.$$

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(-\frac{1}{25}y^2+4\right)^2 dy \simeq 425,2\ dm^3=425,2(l).$$

**Câu 334:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

**A.** $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$. **B.** $41\pi(dm^3)$. **C.** $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$. **D.** $132\pi(dm^3)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của $(C)$ quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi nửa trên trục Ox của $(C)$, trục Ox, hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài. Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$.

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của $(C)$ có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho $(H)$ quay quanh Ox là:

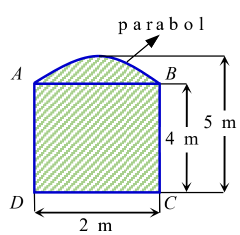
$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)dx=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{52\pi}{3}.$$

Thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$.

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi(dm^3)$.

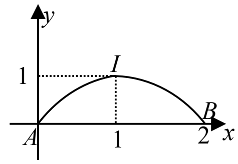
**Câu 335:** **[Cụm 1 HCM]** Ông A muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên. Biết đường cong phía trên là parabol, tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và giá thành là $900\,000$ đồng trên 1 m² thành phẩm. Hỏi ông A phải trả bao nhiêu tiền để làm cánh cửa đó?

$8\,400\,000$ đồng.




**A.** $6\,000\,000$ đồng. **B.** . **C.** $6\,600\,000$ đồng. **D.** $8\,160\,000$ đồng.

**Hướng dẫn giải**




**Chọn D.**

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

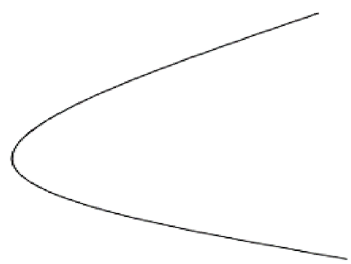
Vì $(P)$ đi qua điểm $A(0;0); B(2;0)$ và có đỉnh $I(1;1)$ nên.

$(P): y = -x^2 + 2x$.

Diện tích cánh cửa là $S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x + S_{ABCD} = \frac{4}{3} + 8 = \frac{28}{3}$.

Số tiền ông A phải trả là $\frac{28}{3} \times 900\,000 = 8\,400\,000$.

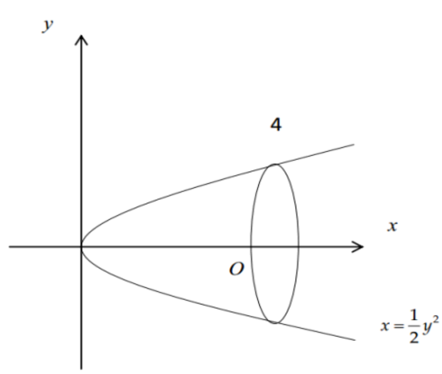
**Câu 336:** **[2D3-3.5-4]** **[BTN 166]** Một cái chuông có dạng như hình vẽ. Giả sử khi cắt chuông bởi mặt phẳng qua trục của chuông, được thiết diện có đường viền là một phần parabol ( hình vẽ ). Biết chuông cao $4m$, và bán kính của miệng chuông là $2\sqrt{2}$. Tính thể tích chuông?



**A.** $16\pi$. **B.** $6\pi$. **C.** $2\pi^3$. **D.** $12\pi$.

**Hướng dẫn giải**

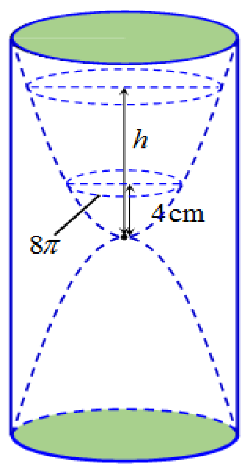
**Chọn A.**



Xét hệ trục như hình vẽ, dễ thấy parabol đi qua ba điểm $(0;0),\left(4;2\sqrt{2}\right),\left(4;-2\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình $x=\dfrac{y^2}{2}$. Thể tích của chuông là thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng $y=\sqrt{2x}, x=0, x=4$ quay quanh trục $Ox$. Do đó.

Ta có $V=\pi\int\limits_0^4 2x\mathrm{d}x=\left(\pi x^2\right)\Big|_0^4=16\pi$.

**Câu 337:** **[2D3-3.5-4]** **[THPT Hoàng Văn Thụ (Hòa Bình)]** Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao $h$ của mực cát bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao của bên đó (xem hình). Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đổi $2,90\text{ cm}^3$/ phút. Khi chiều cao của cát còn $4\text{ cm}$ thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn chu vi $8\pi\text{ cm}$ (xem hình). Biết sau 30 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài là bao nhiêu $\text{cm}$? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

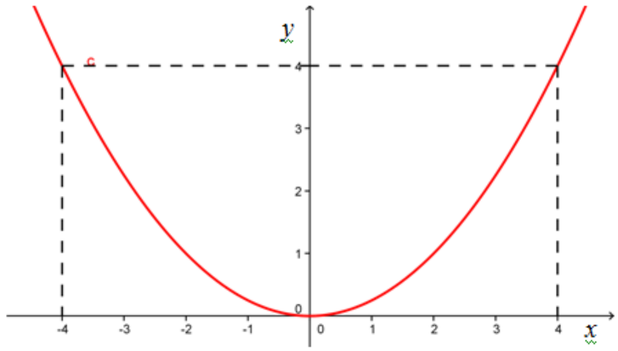



**A.** $8\text{ cm}$. **B.** $12\text{ cm}$. **C.** $10\text{ cm}$. **D.** $9\text{ cm}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét thiết diện chứa trục của đồng hồ cát, ta có parabol đi qua các điểm $(0;0)$, $(4;4)$, $(-4;4)$ nên có hàm số là $y=\dfrac{x^2}{4}$ như hình vẽ.

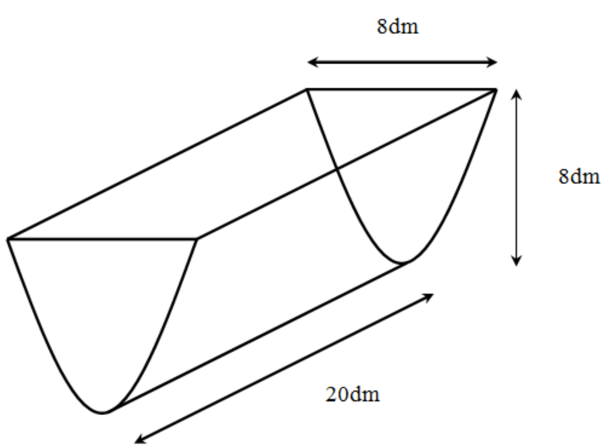



Thể tích phần cát ban đầu bằng thể tích khối tròn xoay sinh ra khi ta quay nhánh bên phải của parabol trên quanh trục $Oy$ và bằng lượng cát đã chảy trong 30 phút.

Ta có: $\pi\int\limits_0^h \left(2\sqrt{y}\right)^2 \mathrm{d}y = 2,9.30 = 87 \Leftrightarrow 2y^2\pi\Big|_0^h = 87 \Leftrightarrow 2h^2\pi = 87 \Leftrightarrow h = \sqrt{\dfrac{87}{2\pi}}$.

Vậy chiều cao của hình trụ bên ngoài bằng: $2.\dfrac{4}{3}.h = 2.\dfrac{4}{3}.\sqrt{\dfrac{87}{2\pi}} \approx 10\,\text{cm}$.

**Câu 338:** **[2D3-3.5-4]** **[208-BTN]** Một bồn nước được thiết kế với chiều cao $8\text{ dm}$, ngang $8\text{ dm}$, dài $2\text{ m}$, bề mặt cong đều nhau với mặt cắt ngang là một hình parabol như hình vẽ bên dưới. Bồn chứa được tối đa bao nhiêu lít nước.

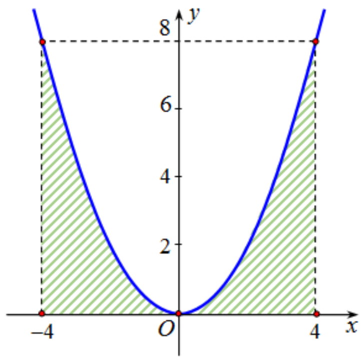



**A.** $\dfrac{1280}{3}$ (lít). **B.** $1280\pi$ (lít). **C.** $\dfrac{2560}{3}$ (lít). **D.** $1280$ (lít).

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét mặt cắt parabol, chọn hệ trục như hình vẽ. Ta thấy Parabol đi qua các điểm $A(-4;4)$, $B(4;4)$, $C(0;0)$ nên có phương trình $y = \dfrac{1}{2}x^2$. Diện tích phần mặt cắt tính như sau:



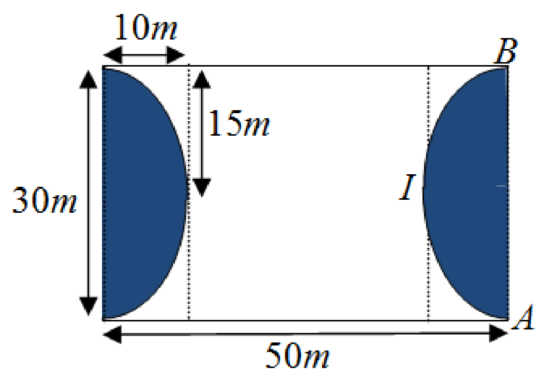

.

$$S = S_{hv} - \int_{-4}^{4} \frac{1}{2}x^2 dx = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}\left(\mathrm{dm}^2\right).$$

Do đó thể tích của bồn.

$$V = \int_0^{20} S\mathrm{d}x = \int_0^{20} \frac{128}{3}\mathrm{d}x = \frac{2560}{3}\left(\mathrm{dm}^3\right).$$

**Câu 339:** **[2D3-3.5-4]** **[Sở GD và ĐT Long An]** Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30m và chiều dài $50\,\mathrm{m}$. Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ.




.

- Phần tô màu gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong $AIB$ là một parabol có đỉnh $I$..

- Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá 130 nghìn đồng/$\mathrm{m}^2$ và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá 90 nghìn đồng/$\mathrm{m}^2$.

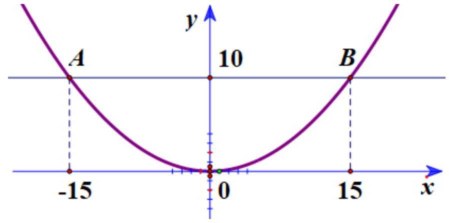
Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng?

**A.** 165 triệu đồng. **B.** 151 triệu đồng. **C.** 195 triệu đồng. **D.** 135 triệu đồng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $O \equiv I$.




.

Khi đó, đường cong $AIB$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y=\dfrac{2}{45}x^2$ và đường thẳng $y=10$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{2}{45}x^2=10 \Leftrightarrow x=\pm 15$.

Diện tích phần tô màu là: $S_1=2\int\limits_{-15}^{15}\left|\dfrac{2}{45}x^2-10\right|\mathrm{d}x=400\left(\mathrm{m}^2\right)$.

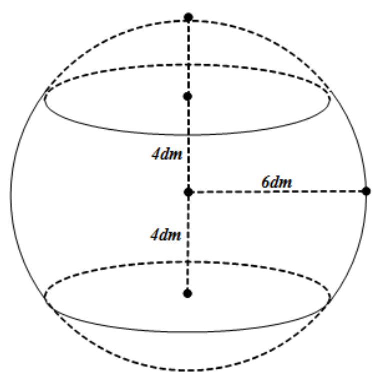
Mặt khác diện tích sân bóng đá mini hình chữ nhật là $S=30.50=1500\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Phần không tô màu có diện tích là: $S_2=S-S_1=1100\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Số tiền để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng:

$$S_1.130000+S_2.90000=400.130000+1100.90000=151000000.$$

**Câu 340:** **[2D3-3.5-4]** **[Sở GD và ĐT Long An]** Một hình cầu có bán kính $6\,\mathrm{dm}$, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích $V$ mà chiếc lu chứa được biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu $4\,\mathrm{dm}$..




.

**A.** $V=192\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

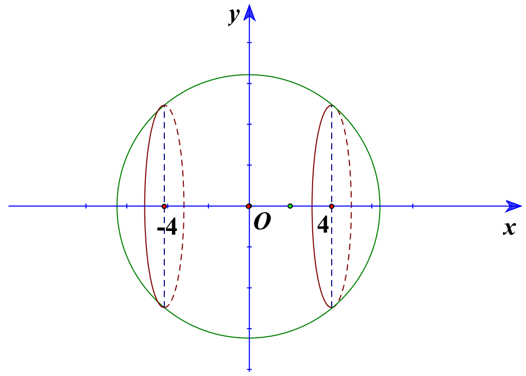
**B.** $V=\dfrac{736}{3}\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

**C.** $V=288\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

**D.** $V=\dfrac{368}{3}\pi\left(\mathrm{dm}^3\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




.

Trong hệ trục tọa độ $Oxy$, xét đường tròn $(C)$ có phương trình $x^2+y^2=36$. Khi đó nửa phần trên trục hoành của $(C)$ quay quanh trục hoành tạo ra mặt cầu tâm $O$ bán kính bằng $6$. Mặt khác ta tạo hình phẳng $(H)$ giới hạn bởi nửa phần trên trục hoành của $(C)$, trục $Ox$ và các đường thẳng $x=-4, x=4$; sau đó quay $(H)$ quanh trục $Ox$ ta được khối tròn xoay chính là chiếc lu trong đề bài.

Ta có $x^2+y^2=36 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{36-x^2} \Rightarrow$ nửa phần trên trục hoành của $(C)$ là $y=\sqrt{36-x^2}$.

Thể tích $V$ của chiếc lu được tính bởi công thức:

$$V=\pi\int_{-4}^{4}\left(\sqrt{36-x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi\int_{-4}^{4}\left(36-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(36x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{4}=\frac{736}{3}\pi\ \left(\mathrm{dm}^3\right).$$

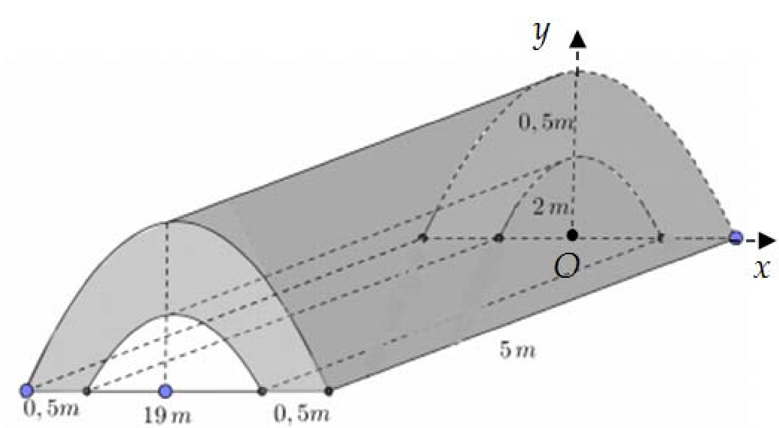
**Câu 341:** **[2D3-3.5-4]** **[THPT Chuyên Quang Trung]** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

**A.** $21m^3$. **B.** $18m^3$. **C.** $40m^3$. **D.** $19m^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Chọn hệ trục $Oxy$ như hình vẽ.




.

Ta có.

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$.

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$.

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$.

**Câu 342:** **[2D3-3.6-4]** **[THPT chuyên Hưng Yên lần 2]** Cho parabol $(P): y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Biết rằng tồn tại $m$ để diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và $d$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích nhỏ nhất đó.

**A.** $S = 4$. **B.** $S = \frac{4}{3}$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $d$ là $x^2 + 1 = mx + 2 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0 \ (*)$.

Ta có $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Nên phương trình $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x = a$ và $x = b \ (a < b)$. Do đó $(P)$ luôn cắt $d$ tại 2 điểm phân biệt $A(a;ma+2)$ và $B(b;mb+2)$..

Với mọi $m$, đường thẳng $d$ luôn đi qua điểm $M(0;2)$. Mà $y_{CT} = 1$..

Suy ra $mx + 2 \ge x^2 + 1, \forall x \in [a;b]$..

Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P)$ và $d$ là.

$$S = \int_a^b \left(mx + 2 - (x^2+1)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(mx + 1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{mx}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b$$

$$= (b-a)\left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)\right] = (b-a)\left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab\right].$$

$$\Rightarrow S^2 = (b-a)^2\left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab\right]^2$$

$$= \left[(b+a)^2 - 4ab\right]\left[\frac{m}{2}(b+a) + 1 - \frac{1}{3}(a+b)^2 + \frac{1}{3}ab\right]^2$$

Vì $a,b$ là nghiệm của phương trình $(*)$ nên ta có $\begin{cases} a+b=m \\ ab=-1 \end{cases}$..

Khi đó $S^2=\left(m^2+4\right)\left(\dfrac{m^2}{6}+\dfrac{2}{3}\right)^2 \geq 4.\dfrac{4}{9}=\dfrac{16}{9}$..

Đẳng thức xảy ra khi $m=0$. Vậy $S_{\min}=\dfrac{4}{3}$..

**Câu 343:** **[2D3-3.6-4]** **[THPT Ngô Quyền]** Gọi $S$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2$, $mx=\dfrac{1}{2}y^2$, $(m>0)$. Tìm giá trị của $m$ để $S=3$.

**A.** $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\dfrac{3}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

**Hướng dẫn giải.**

Ta có $2my=x^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2m}x^2>0$ (do $m>0$).

và $mx=\dfrac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow y^2=2mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{2mx}\geq 0 \\ y=-\sqrt{2mx}<0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $2my=x^2$ và $mx=\dfrac{1}{2}y^2$ ta có.

$\dfrac{1}{2m}x^2=\sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^2=2m\sqrt{2mx} \Leftrightarrow x^4-8m^3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Khi đó $S=\displaystyle\int_0^{2m}\left|\frac{1}{2m}x^2-\sqrt{2mx}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^{2m}\left(\frac{1}{2m}x^2-\sqrt{2mx}\right)\mathrm{d}x\right|$.

$=\left|\left.\left(\dfrac{1}{2m}.\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2\sqrt{2m}}{3}x\sqrt{x}\right)\right|_0^{2m}\right|=\dfrac{4m^2}{3}$.

Để $S=3 \Leftrightarrow \dfrac{4m^2}{3}=3 \Leftrightarrow m^2=\dfrac{9}{4} \Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (do $m>0$).

**Câu 344:** **[2D3-3.7-4]** **[THPT Ngô Sĩ Liên lần 3]** Một người lái xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\ m/s$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào ngăn đường ở phía trước cách $45m$ (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào) vì vậy, người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\ (m/s)$, trong đó $t$ là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh.

Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe ô tô còn cách hàng rào ngăn cách bao nhiêu mét (tính từ vị trí đầu xe đến hàng rào)?

**A.** $4\ m$. **B.** $6\ m$. **C.** $3\ m$. **D.** $5\ m$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Xe đang chạy với vận tốc $v = 20\ m/s$ tương ứng với thời điểm $t = 0(s)$.

Xe đừng lại tương ứng với thời điểm $t = 4(s)$.

Quảng đường xe đã đi là $S = \int\limits_0^4 (-5t + 20)\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right)\Big|_0^4 = 40(m)$.

Vậy ô tô cách hàng rào một đoạn $45 - 40 = 5(m)$.

**Câu 345:** **[2D3-3.7-4]** [BTN 163] Một vật chuyển động với vận tốc là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}(m/s)$. Gọi $S_1$ là quãng đường vật đó đi trong $2$ giây đầu và $S_2$ là quãng đường đi từ giây thứ $3$ đến giây thứ $5$. Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.** $S_1 < S_2$. **B.** $S_2 = 2S_1$. **C.** $S_1 > S_2$. **D.** $S_1 = S_2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có: $S_1 = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\mathrm{d}t \approx 0,35318(m), S_2 = \int\limits_3^5 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right)\mathrm{d}t \approx 0,45675(m)$.

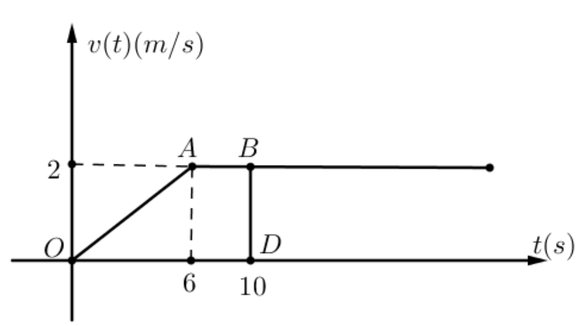
Vậy $S_2 > S_1$.

**Câu 346:** **[2D3-3.7-4]** [THPT Chuyên LHP] Một chất điểm $M$ chuyển động nhanh dần đều trên một đường thẳng với vận tốc $v(t) = \frac{t}{3}$ (m/s), trong đó $t$ là khoảng thời gian bằng giây tính từ lúc $M$ bắt đầu chuyển động. Sau $6$ giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động thì $M$ giữ nguyên vận tốc và chuyển sang trạng thái chuyển động thẳng đều, trạng thái này được duy trì trong 1 phút. Tính quãng đường mà $M$ dịch chuyển được trong $10$ giây đầu tiên.

**A.** $14$ m. **B.** $16$ m. **C.** $6$ m. **D.** $10$ m.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




.

Giả sử ta có hệ trục tọa độ biểu diễn chuyển động như hình vẽ.

Vận tốc của vật sau $6$ giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động là $v\left(6\right)=2$.

Ta có $S\left(t\right)=\int v\left(t\right)\mathrm{d}t$, và $S\left(t\right)$ bằng diện tích hình thang $OABC$.

Mà $S_{OABC}=\dfrac{\left(AB+OC\right)BC}{2}=\dfrac{\left(4+10\right).2}{2}=14$.

**Câu 347:** **[2D3-3.7-4]** **[SỞ GD-ĐT HÀ TĨNH L2]** Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h=h(t)$ trong đó $h$ tính bằng cm, $t$ tính bằng giây. Biết rằng $h'\left(t\right)=\sqrt[3]{2t+1}$ và. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là.

**A.** $\dfrac{243}{8}$ cm. **B.** $\dfrac{243}{4}$ cm. **C.** $30$ cm. **D.** $60$ cm.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có : $h(t)=\int\sqrt[3]{2t+1}dt=\dfrac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1}+C$.

Lúc đầu $\left(t=0\right)$ bể không có nước $\Rightarrow h\left(0\right)=0$ $\Rightarrow C=-\dfrac{3}{8}$ $\Rightarrow h(t)=\dfrac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1}-\dfrac{3}{8}$.

$\Rightarrow h(13)=30$.

**Câu 348:** **[2D3-3.7-4]** **[BTN 163]** Một vật chuyển động với vận tốc là $v\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{\sin\left(\pi t\right)}{\pi}\left(m/s\right)$. Gọi $S_1$ là quãng đường vật đó đi trong $2$ giây đầu và $S_2$ là quãng đường đi từ giây thứ $3$ đến giây thứ $5$. Kết luận nào sau đây là đúng?

**A.** $S_1<S_2$. **B.** $S_2=2S_1$. **C.** $S_1>S_2$. **D.** $S_1=S_2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có: $S_1=\displaystyle\int_0^2\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin\left(\pi t\right)}{\pi}\right)\mathrm{d}t\approx 0,35318\left(m\right), S_2=\int_3^5\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin\left(\pi t\right)}{\pi}\right)\mathrm{d}t\approx 0,45675\left(m\right)$.

Vậy $S_2>S_1$.

**Câu 349:** **[2D3-3.7-4]** **[THPT Kim Liên-HN]** Một ô tô đang chạy với vận tốc $v_0\left(m/s\right)$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đã đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-6t\left(m/s^2\right)$ trong đó $t$ là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được $16m$. Tính $v_0$?

**A.** $4$. **B.** $12$. **C.** $16$. **D.** $8$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có : $v=\int a\mathrm{d}t=\int -6t\mathrm{d}t=-3t^2+C$.

Tại thời điểm $t=0\Rightarrow v=C=v_0 \Rightarrow v=v_0-3t^2$.

Khi xe dừng hẳn $\Rightarrow v=0\Leftrightarrow v_0-3t^2=0\Leftrightarrow t=\sqrt{\dfrac{v_0}{3}}$.

Quảng đường vật đi được đến lúc dừng hẳn là :

$$16=\int_0^{\sqrt{\frac{v_0}{3}}} v\mathrm{d}t=\int_0^{\sqrt{\frac{v_0}{3}}}\left(v_0-3t^2\right)\mathrm{d}t=\left(v_0t-t^3\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{v_0}{3}}}.$$

$$\Leftrightarrow v_0\sqrt{\frac{v_0}{3}}-\frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{v_0}{3}}=16\Leftrightarrow v_0\sqrt{\frac{v_0}{3}}=24\Leftrightarrow v_0=12 \text{ (m/s)}.$$

## Chương 12. Số phức

**Câu 350:** **[BTN 171]**Người ta chứng minh được nếu $z=\cos\alpha+i\sin\alpha\left(\alpha\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow z^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Cho $z=i^3\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

**A.** $z=-i.2^9$. **B.** $z=-i.2^{18}$. **C.** $z=i.2^{18}$. **D.** $z=i.2^9$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét số phức $z=i^3\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}$.

Ta có: $i^3=i.\left(i^2\right)=i\left(-1\right)=-i$.

Đặt $x=\sqrt{3}+i$. Ta có $x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Áp dụng công thức đề bài ta có $x^{18}=2^{18}\left(\cos\dfrac{18\pi}{6}+i\sin\dfrac{18\pi}{6}\right)=2^{18}\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right)=-2^{18}$.

Cuối cùng $z=x^{18}.i^3=-2^{18}.\left(-i\right)=i.2^{18}$.

**Câu 351:** **[THPT Hai Bà Trưng- Huế]** Tính $S=1009+i+2i^2+3i^3+...+2017i^{2017}$ trên đoạn $\left[2,4\right]$..

**A.** $1008+1009i$. **B.** $1009+2017i$. **C.** $2017+1009i$. **D.** $2017-1009i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có.

$$\begin{aligned}S &= 1008 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + 2017i^{2017} \\ &= 1009 + \left(4i^4 + 8i^8 + \ldots + 2016i^{2016}\right) + \left(i + 5i^5 + 9i^9 + \ldots + 2017i^{2017}\right) + \\ &\quad + \left(2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + \ldots 2014i^{2014}\right) + \left(3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + \ldots + 2015i^{2015}\right) \\ &= 1009 + \sum_{n=1}^{504}(4n) + i\sum_{n=1}^{505}(4n-3) - \sum_{n=1}^{504}(4n-2) - i\sum_{n=1}^{504}(4n-1) \\ &= 1009 + 509040 + 509545i - 508032 - 508536i \\ &= 2017 + 1009i\end{aligned}.$$

**Câu 352: [Cụm 6 HCM]** Cho số phức $z = x + yi; x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z-2)^2 + (4-z)^2$.

**A.** $0$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có:

$z^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)i = 18 + 26i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xt^2x^2 = 18 \\ 3x^2tx - t^3x^3 = 26 \end{cases} \left(y = tx, t \in \mathbb{Q}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3\left(1-3t^2\right) = 18 \\ x^3\left(3t - t^3\right) = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-3t^2}{3t-t^3} = \dfrac{9}{13} \\ x^3\left(1-3t^2\right) = 18 \end{cases}.$$

($x = 0; y = 0$ không là nghiệm).

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-3t^2}{3t-t^3} = \dfrac{9}{13} \\ x^3\left(1-3t^2\right) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9t^2 - 39t^2 - 27t + 13 = 0 \\ x^3\left(1-3t^2\right) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9t^2 - 39t^2 - 27t + 13 = 0 \\ x^3\left(1-3t^2\right) = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ x = 3\left(do\ x; y \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow z = 3 + i \Rightarrow T = (1+i)^2 + (1-i)^2 = 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 = 0. \\ y = 1 \end{cases}$$

**Câu 353: [THPT chuyên KHTN lần 1]** Cho $z_1, z_2, z_3$ là các số phức thõa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. **B.** $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

**C.** $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$. **D.** $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Rightarrow \overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1}, \overline{z_2} = \dfrac{1}{z_2}, \overline{z_3} = \dfrac{1}{z_3}$.

Mặt khác ta có.

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \left|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = \left|\frac{z_2z_3 + z_1z_2 + z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|.$$

**Câu 354:** Cho hai số phức $z_1$ và $z_2$ thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$, $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\frac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$.

**A.** $|b|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\frac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\frac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $|b|=\frac{3}{8}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đặt $z_1=x+yi$, $z_2=c+di$ $(x,y,c,d\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z_1|=3\Rightarrow x^2+y^2=9$; $|z_2|=4\Rightarrow c^2+d^2=16$;
$|z_1-z_2|=\sqrt{37}\Rightarrow(x-c)^2+(y-d)^2=37\Leftrightarrow x^2+y^2+c^2+d^2-2xc-2yd=37\Leftrightarrow xc+yd=-6$.

Lại có: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x+yi}{c+di}=\frac{(x+yi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{xc+yd+(yc-xd)i}{c^2+d^2}=\frac{xc+yd}{c^2+d^2}+\frac{yc-xd}{c^2+d^2}i=a+bi$.

$=-\frac{3}{8}+bi$.

Mà $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{3}{4}=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\frac{9}{16}\Rightarrow b^2=\frac{9}{16}-\left(-\frac{3}{8}\right)^2=\frac{27}{64}\Rightarrow b=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy: $|b|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

**Câu 355:** **[THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa]** Cho số phức $z$ có mođun bằng $2017$ và $w$ là số phức thỏa biểu thức $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$. Mođun của số phức $w$ là:

**A.** $2016$. **B.** $2017$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

$\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}\Leftrightarrow(z+w)^2=zw\Leftrightarrow z^2+zw+w^2=0$.

$\Leftrightarrow w=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z\Rightarrow|w|=\left|\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z\right|=|z|=2017$.

**Câu 356:** [THPT Chuyên Thái Nguyên] **Cho số phức** $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ **thỏa mãn phương trình** $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{\bar{z}}}=i$. **Tính** $a^2+b^2$.

**A.** $3+2\sqrt{2}$. **B.** $4$. **C.** $3-2\sqrt{2}$. **D.** $2+2\sqrt{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\overline{z}}}=i \Leftrightarrow \dfrac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{z.\overline{z}-1}=i \Leftrightarrow \dfrac{(|z|-1)(1+iz)\overline{z}}{|z|^2-1}=i\ (1)$.

Điều kiện: $|z|^2-1\neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\neq 1$.

$(1)\Leftrightarrow (1+iz)\overline{z}=i(|z|+1)\Leftrightarrow \overline{z}+i|z|^2=i(|z|+1)\Leftrightarrow a-bi+i(a^2+b^2)=\left(\sqrt{a^2+b^2}+1\right)i$

$\Leftrightarrow a+(a^2+b^2-b)i=\left(\sqrt{a^2+b^2}+1\right)i$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2+b^2-b=\sqrt{a^2+b^2}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b^2-b=|b|+1,\ (2) \end{cases}$

Với $b>0$ suy ra $(2)\Leftrightarrow b^2-2b-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1+\sqrt{2} \\ b=1-\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow b=1+\sqrt{2}$.

Với $b>0$ suy ra $(2)\Leftrightarrow b^2=1$ loại vì $a^2+b^2=1$.

Vậy $a^2+b^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$.

**Câu 357:** Cho hai số phức $z_1$ và $z_2$ thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_2|=4$, $|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$.

**A.** $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **D.** $|b|=\dfrac{3}{8}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đặt $z_1=x+yi$, $z_2=c+di$ $(x,y,c,d\in\mathbb{R})$. Ta có: $|z_1|=3\Rightarrow x^2+y^2=9$; $|z_2|=4\Rightarrow c^2+d^2=16$;

$|z_1-z_2|=\sqrt{37}\Rightarrow (x-c)^2+(y-d)^2=37\Leftrightarrow x^2+y^2+c^2+d^2-2xc-2yd=37\Leftrightarrow xc+yd=-6$.

Lại có: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x+yi}{c+di}=\dfrac{(x+yi)(c-di)}{c^2+d^2}=\dfrac{xc+yd+(yc-xd)i}{c^2+d^2}=\dfrac{xc+yd}{c^2+d^2}+\dfrac{yc-xd}{c^2+d^2}i=a+bi$.

$=-\dfrac{3}{8}+bi$.

Mà $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{3}{4}=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\dfrac{9}{16}\Rightarrow b^2=\dfrac{9}{16}-\left(-\dfrac{3}{8}\right)^2=\dfrac{27}{64}\Rightarrow b=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy: $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

**Câu 358:** **[TTLT ĐH Diệu Hiền]** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm $H$ và $A,B,C,D,H$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $a,b,c,d,h$. Biết $a=-2+i$; $h=1+3i$ và số phức $b$ có phần ảo dương. Khi đó, mô-đun của số phức $b$ là.

**A.** $\sqrt{37}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{26}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Do $ABCD$ là hình vuông và $H$ là tâm hình vuông nên ta có $HB \perp AH, HB = AH$.

Do điểm $A$ biểu diễn bởi số phức $a = -2 + i \Rightarrow A(-2;1)$, Điểm H biểu diễn bởi $h = 1 + 3i \Rightarrow H(1;3)$.

Đường thẳng $BH$ nhận $\overrightarrow{AH}(3;2)$ làm VTPT nên có phương trình là:

$3(x-1) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 9 = 0$.

Do $B \in BH \Rightarrow B\left(\dfrac{9-2m}{3};m\right), m > 0$.

Ta có: $AH^2 = BH^2 \Leftrightarrow 3^2 + 2^2 = \left(\dfrac{9-2m}{3} - 1\right)^2 + (m-3)^2$.

$\Leftrightarrow 13m^2 - 78m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 6 \end{array}\right. \Rightarrow m = 6$.

Vậy $b = -1 + 6i$, suy ra mô-đun của số phức $b$ là: $\sqrt{37}$.

**Câu 359:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho ba số phức $z_1$, $z_2$, $z_3$ thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** $\left|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right| > \left|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right|$.. **B.** $\left|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right| < \left|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right|$..

**C.** $\left|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right| \neq \left|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right|$.. **D.** $\left|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right| = \left|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right|$..

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

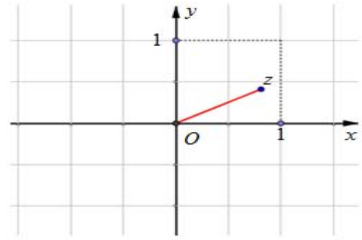
**Hướng dẫn giải**.

Do $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên các điểm biểu diễn của $z_1$, $z_2$, $z_3$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là A,B,C đều thuộc đường tròn đơn vị và ABC tạo thành tam giác đều.

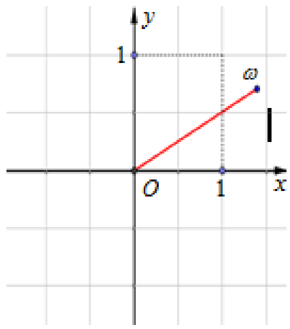
Do các phép toán cộng và nhân số phức phụ thuộc vào vị trí tương đối của các điểm biểu diễn nên ta có thể cho: $z_1 = 1$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

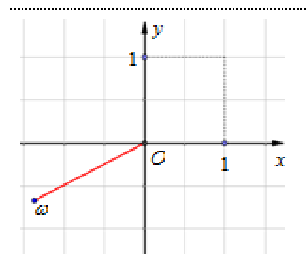
Thay vào ta được $\left|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2\right| = 0$ và $\left|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1\right| = 0$.

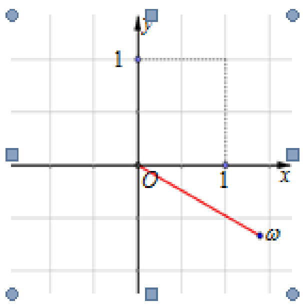
**Câu 360:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Số phức $z$ được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ:

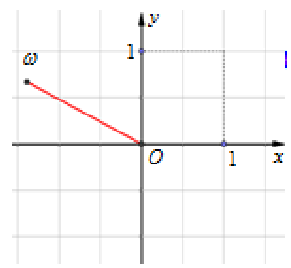



Hỏi hình nào biểu diễn cho số phức $\varpi = \dfrac{i}{z}$?

**A.** 


**B.** 


**C.** 


**D.** 


**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$..
Từ giả thiết điểm biểu diễn số phức $z$ nằm ở góc phần tư thứ nhất nên $a, b > 0$.

Ta có $\varpi = \dfrac{i}{z} = \dfrac{i}{a - bi} = \dfrac{i(a + bi)}{a^2 + b^2} = -\dfrac{b}{a^2 + b^2} + \dfrac{a}{a^2 + b^2}i$.

Do $a, b > 0$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{a^2 + b^2} < 0 \\ \dfrac{a}{a^2 + b^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ điểm biểu diễn số phức $\omega$ nằm ở góc phần tư thứ hai.

**Câu 361:** [THPT Nguyễn Thái Học(K.H)] Cho số phức $w = (1 + i)z + 2$ biết $|1 + iz| = |z - 2i|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

**A.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng.
**B.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w$ trên mặt phẳng phức là 2 điểm.
**C.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w$ trên mặt phẳng phức là một đường elip.
**D.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w$ trên mặt phẳng phức là một đường tròn.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi $z=a+bi$, với $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|1+iz|=|z-2i|\Leftrightarrow|(1-b)+ai|=|a+(b-2)i|$.

$\Leftrightarrow(1-b)^2+a^2=a^2+(b-2)^2\Leftrightarrow b=\frac{3}{2}\Rightarrow z=a+\frac{3}{2}i$.

Khi đó $w=(1+i)z+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(a+\frac{3}{2}\right)i$ có điểm biểu diễn là $\left(a+\frac{1}{2};a+\frac{3}{2}\right)$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w$ trên mặt phẳng phức là đường thẳng $y=x+1$.

**Câu 362:** **[THPT Lê Hồng Phong]** Cho các số phức $z$ thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

**A.** $r=25$. **B.** $r=4$. **C.** $r=9$. **D.** $r=16$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có:

$w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\Leftrightarrow w-\left(1+i\sqrt{3}\right)-2=\left(1+i\sqrt{3}\right)(z-1)\Leftrightarrow\left|w-\left(3+i\sqrt{3}\right)\right|=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)(z-1)\right|$.

$\Leftrightarrow\left|w-\left(3+i\sqrt{3}\right)\right|=4$. Vậy số phức $w$ nằm trên đường tròn có bán kính $r=4$.

**Câu 363:** **[Cụm 4 HCM]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1-i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

**A.** $r=4$. **B.** $r=\sqrt{2}$. **C.** $r=2\sqrt{2}$. **D.** $r=2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

$w=(1-i)z+i\Leftrightarrow z=\frac{w-i}{1-i}$; đặt $w=x+yi$ ; $x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow z=\frac{x+yi-i}{1-i}$. Ta có $|z-2|=2\Leftrightarrow\Rightarrow\left|\frac{x+yi-i}{1-i}-2\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right|=2$.

$\Leftrightarrow\left|\frac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right|=2\Leftrightarrow|x+xi+yi-y-i+1-4|=4\Leftrightarrow|x-y-3+(x+y-1)i|=4$

$\Leftrightarrow(x-y-3)^2+(x+y-1)^2=16\Leftrightarrow x^2+y^2+9-2xy+6y-6x+x^2+y^2+1+2xy-2y-2x=16$.

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+4y-6=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Đường tròn có bán kính là $R=\sqrt{2^2+1^2+3}=2\sqrt{2}$.

**Câu 364:** **[TTGDTX Vạn Ninh - Khánh Hòa]** Cho các số phức $z$ thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

**A.** $r=6$. **B.** $r=\sqrt{6}$. **C.** $r=20$. **D.** $r=\sqrt{20}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $w=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $w=3-2i+\left(2-i\right)z\Rightarrow z=\dfrac{w-3+2i}{2-i}$.

Theo đề bài ta có:

$|z|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-3+2i}{2-i}\right|=2\Leftrightarrow\dfrac{|w-3+2i|}{|2-i|}=2\Leftrightarrow\dfrac{|w-3+2i|}{\sqrt{5}}=2\Leftrightarrow|w-3+2i|=2\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow\left|x-3+\left(y+2\right)i\right|=10\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(y+2\right)^2}=10\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y+2\right)^2=20$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w$ là đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R=\sqrt{20}$.

**Câu 365:** [THPT Chuyên Thái Nguyên] **Tập hợp các số phức $w=\left(1+i\right)z+1$ với $z$ là số phức thỏa mãn $|z-1|\le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.**

**A.** $2\pi$. **B.** $\pi$. **C.** $3\pi$. **D.** $4\pi$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi $w=x+yi;x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $w=\left(1+i\right)z+1\Leftrightarrow z=\dfrac{w-1}{1+i}$.

Do đó $|z-1|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-1}{1+i}-1\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-2-i}{1+i}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{\left(x-2\right)+\left(y-1\right)i}{1+i}\right|\le 1$.

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{\left(x-2\right)+\left(y-1\right)i}{1+i}\right|\le 1\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 2$.

Vậy diện tích hình tròn đó là $S=2\pi$.

**Câu 366:** [Cụm 4 HCM] Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-2|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1-i\right)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

**A.** $r=4$. **B.** $r=\sqrt{2}$. **C.** $r=2\sqrt{2}$. **D.** $r=2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

$w=\left(1-i\right)z+i\Leftrightarrow z=\dfrac{w-i}{1-i}$; đặt $w=x+yi$ ; $x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow z=\dfrac{x+yi-i}{1-i}$. Ta có $|z-2|=2\Leftrightarrow\Rightarrow\left|\dfrac{x+yi-i}{1-i}-2\right|=2\Leftrightarrow\left|\dfrac{\left(x+yi-i\right)\left(1+i\right)}{2}-2\right|=2$.

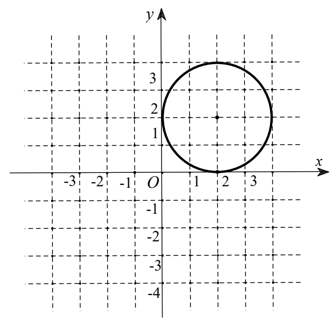
$$\Leftrightarrow \left|\frac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right| = 2 \Leftrightarrow |x+xi+yi-y-i+1-4| = 4 \Leftrightarrow |x-y-3+(x+y-1)i| = 4$$

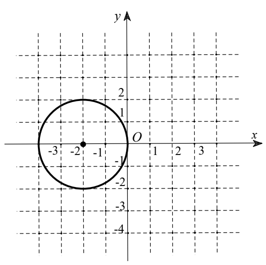
$$\Leftrightarrow (x-y-3)^2+(x+y-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2+y^2+9-2xy+6y-6x+x^2+y^2+1+2xy-2y-2x = 16.$$

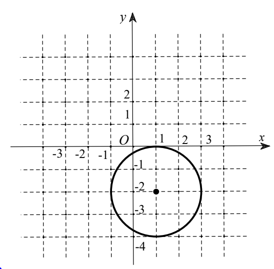
$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+4y-6=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-3=0$$

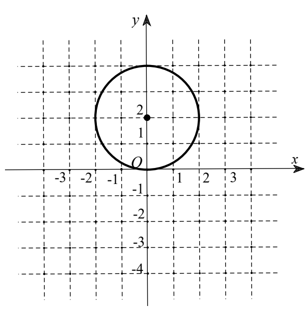
Đường tròn có bán kính là $R=\sqrt{2^2+1^2+3}=2\sqrt{2}$.

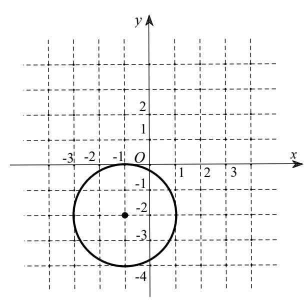
**Câu 367:** **[208-BTN]** Biết tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z$ là đường tròn cho bởi hình vẽ bên. Hỏi tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z-3-4i$ được thể hiện bởi đường tròn trong hình vẽ nào trong bốn hình vẽ dưới đây?


.

**A.** 
.

**B.** 
.

**C.** 
.

**D.** 
.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Dựa vào hình vẽ, tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z$ trên mặt phẳng tọa độ là đường tròn có phương trình: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Ta có: $z-3-4i=(x-3)+(y-4)i$ có điểm $M'(x-3;y-4)$ biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ.

Ta biểu diễn: $(x-2)^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow [(x-3)+1]^2+[(y-4)+2]^2=4$.

$\Rightarrow M' \in (C'):(x+1)^2+(y+2)^2=4$.

Với phương trình như vậy, ta thấy đáp án B thỏa mãn.

**Câu 368:** **[THPT Chuyên Quang Trung]** Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3-4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn $I$, bán kính $R$. Khi đó.

**A.** $I(-1;-2), R = \sqrt{5}$. **B.** $I(-1;2), R = 5$. **C.** $I(1;2), R = \sqrt{5}$. **D.** $I(1;-2), R = 5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Đặt $z = a + bi$ và $|z| = c > 0$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Lại có $w = (3-4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w+1-2i}{3-4i}$.

Gọi $w = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $|z| = c \Rightarrow \left|\frac{w+1-2i}{3-4i}\right| = c \Leftrightarrow \frac{|w+1-2i|}{|3-4i|} = c \Leftrightarrow |x+yi+1-2i| = 5c$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 5c \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25c^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w$ là đường tròn $I(-1;2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R = 5 \Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$.
Thử $c = 1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn.

**Câu 369:** **[BTN 172]** Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3+4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính $r$ của đường tròn đó.

**A.** $r = 20$. **B.** $r = 4$. **C.** $r = 5$. **D.** $r = 22$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó, điểm $M$ biểu diễn số phức $w$ có tọa độ là $M(x; y)$.

Ta có: $w = (3+4i)z + i$.

$$\Leftrightarrow z = \frac{w-i}{3+4i} = \frac{[x+(y-1)i](3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3x+4(y-1)+[3(y-1)-4x]i}{25}.$$

Giả thiết bài toán: $|z| = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\frac{3x+4(y-1)}{25}\right]^2 + \left[\frac{3(y-1)-4x}{25}\right]^2 = 16$.

$$\Leftrightarrow \left[\frac{3x+4(y-1)}{25}\right]^2 + \left[\frac{3(y-1)-4x}{25}\right]^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\frac{-3x+4y-4}{25}\right] + \left[\frac{3y-3-4x}{25}\right] = 16.$$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 + 16 + 24xy - 32y - 24x + 9y^2 + 9 + 16x^2 - 18y + 24x - 24xy = 100^2$.

$\Leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 + 16 + 9y^2 + 9 + 16x^2 = 100^2$.

$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 - 50y + 25 = 100^2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=400$.

$\Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=20^2$.

$\Rightarrow M\left(x;y\right)$ thuộc đường tròn tâm $I\left(0;1\right)$ và có bán kính $r=20$.

**Câu 370:** **[THPT CHUYÊN VINH]** Gọi $M$ là điểm biểu diễn của số phức $z$ thỏa mãn $3\left|z+i\right|=\left|2\overline{z}+-z+3i\right|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm $M$ như vậy.

**A.** Một parabol. **B.** Một elip. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường thẳng.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn là $M\left(x,y\right)$ trên mặt phẳng tọa độ:

Theo đề bài ta có: $3\left|z+i\right|=\left|2\overline{z}-z+3i\right|\Leftrightarrow\left|3(x+yi)+3i\right|=\left|2(x-yi)-(x+yi)+3i\right|\Leftrightarrow$.

$\left|3x+(3y+3)i\right|=\left|x+(3-3y)\right|\Leftrightarrow\sqrt{9x^2+(3y+3)^2}=\sqrt{x^2+(3-3y)^2}\Leftrightarrow$.

$9x^2+(3y+3)^2=x^2+(3-3y)^2\Leftrightarrow 8x^2+36y=0\Rightarrow y=-\dfrac{2}{9}x^2$.

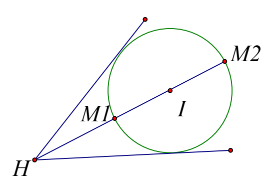
Vậy tập hợp các điểm $M\left(x,y\right)$ biểu diễn số phức z theo yêu cầu của đề bài là Một parabol $y=-\dfrac{2}{9}x^2$.

**Câu 371:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Giá trị lớn nhất của $\left|\overline{z}+1+i\right|$ là.

**A.** $4$. **B.** $\sqrt{13}+1$. **C.** $\sqrt{13}+2$. **D.** $6$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**




.

Gọi $z=x+yi$ ta có $z-2-3i=x+yi-2-3i=x-2+\left(y-3\right)i$.

Theo giả thiết $\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$ nên điểm $M$ biểu diễn cho số phức $z$ nằm trên đường tròn tâm $I\left(2;3\right)$ bán kính $R=1$.

Ta có $\left|\overline{z}+1+i\right|=\left|x-yi+1+i\right|=\left|x+1+\left(1-y\right)i\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}$.

Gọi $M\left(x;y\right)$ và $H\left(-1;1\right)$ thì $HM=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2}$.

Do $M$ chạy trên đường tròn, $H$ cố định nên $MH$ lớn nhất khi $M$ là giao của $HI$ với đường tròn.

Phương trình $HI:\begin{cases}x=2+3t\\ y=3+2t\end{cases}$, giao của $HI$ và đường tròn ứng với $t$ thỏa mãn:

$9t^2+4t^2=1\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$ nên $M\left(2+\frac{3}{\sqrt{13}};3+\frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2-\frac{3}{\sqrt{13}};3-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Tính độ dài $MH$ ta lấy kết quả $HM=\sqrt{13}+1$.

**Câu 372:** [Sở GDĐT Lâm Đồng lần 06] Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

**A.** $z=-2+2i$. **B.** $z=-1+i$. **C.** $z=3+2i$. **D.** $z=2+2i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

BG: Giả sử z = x + yi ta có:

$|z-2-4i|=|z-2i| => x+y=4 => |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$=\sqrt{2(x-2)^2+8}\ge 2\sqrt{2}\Rightarrow z=2+2i$

**Câu 373:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Tìm số phức $z$ sao cho $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $z=5+5i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=2+2i$. **D.** $z=4+3i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

$|z-(3+4i)|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=5$.

Đặt $\begin{cases}x-3=\sqrt{5}\sin t\Leftrightarrow x=3+\sqrt{5}\sin t\\ y-4=\sqrt{5}\cos t\Leftrightarrow y=4+\sqrt{5}\cos t\end{cases}$.

$P=|z+2|^2-|z-i|^2=4x+2y+3=4\left(3+\sqrt{5}\sin t\right)+2\left(4+\sqrt{5}\cos t\right)+3$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\sin t+2\sqrt{5}\cos t=P-23$.

Theo điều kiện có nghiệm phương trình lượng giác.

$\Rightarrow\left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2\ge (P-23)^2\Leftrightarrow P^2-46P+429\le 0\Leftrightarrow 13\le P\le 33$.

Vậy GTLN của $P$ là 33 $\Rightarrow z=5+5i$.

**Câu 374:** **[TT Hiếu Học Minh Châu]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $z$ không phải số thực và $w=\frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$ là.

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $2$. **C.** $8$. **D.** $\sqrt{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

**Cách 1.** Xét $z \neq 0$ suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z}$. Gọi $z = a + bi, b \neq 0$.

Suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z} = \left(\frac{2a}{a^2+b^2} + a\right) - b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right)i$.

Vì $\frac{1}{w} \in \mathbb{R}$ nên $b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{array}\right.$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ trên mặt phẳng $Oxy$ là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

Xét điểm $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = -1 + i$ suy ra $P = MA \Rightarrow \max P = OA + r = 2\sqrt{2}$.

Với $r$ là bán kính đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

**Cách 2.** $w = \frac{z}{2+z^2} \Leftrightarrow w\left(2+z^2\right) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{w}z + 2 = 0$ $(*)$. $(*)$ là phương trình bậc hai với hệ số thực $\left(\frac{1}{w} \in \mathbb{R}\right)$. Vì $z$ thỏa $(*)$ nên $z$ là nghiệm phương trình $(*)$. Gọi $z_1, z_2$ là hai nghiệm của $(*)$ suy ra $z_1.z_2 = 2 \Rightarrow |z_1.z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1||z_2| = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$. Suy ra

$P = |z + 1 - i| \leq |z| + |1 - i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $z = 1 - i$.

**Câu 375:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $z$ không phải số thực và $w = \frac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$ là?

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $8$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

**Cách 1.**

Xét $z = 0$ suy ra $w = 0$ suy ra $P = |z + 1 - i| = \sqrt{2}$.

Xét $z \neq 0$ suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z}$.

Gọi $z = a + bi, b \neq 0$ suy ra $\frac{1}{w} = z + \frac{2}{z} = \left(\frac{2a}{a^2+b^2} + a\right) - b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right)i$.

Vì $\frac{1}{w} \in \mathbb{R}$ nên $b\left(\frac{2}{a^2+b^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{array}\right.$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ là đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.

Xét điểm $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0 = -1 + i$, suy ra $P = MA$.

$\Rightarrow MaxP = OA + r = 2\sqrt{2}$. (Với $r$ là **bán** kính đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$.).

**Cách 2.**

$w=\dfrac{z}{2+z^2}\Leftrightarrow w\left(2+z^2\right)=z\Leftrightarrow z^2-\dfrac{1}{w}z+2=0\ (*),(*)$ là phương trình bậc hai với hệ số thực $\left(\dfrac{1}{w}\in\mathbb{R}\right)$. Vì $z$ thỏa $(*)$ nên $z$ là nghiệm phương trình $(*)$.

Gọi $z_1,z_2$ là hai nghiệm của $(*)$ suy ra $z_1.z_2=2\Rightarrow\left|z_1.z_2\right|=2\Leftrightarrow\left|z_1\right|\left|z_2\right|=2\Rightarrow|z|=\sqrt{2}$.

Suy ra $P=|z+1-i|\le|z|+|1-i|=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

**Câu 376:** **[Cụm 1 HCM]** Cho số phức $z$ thỏa điều kiện $\left|z^2+4\right|=|z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng ?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Giả sử $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

$$\left|z^2+4\right|=|z(z+2i)|\Leftrightarrow\left|z^2-(2i)^2\right|=|z(z+2i)|\Leftrightarrow|(z-2i)(z+2i)|=|z(z+2i)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}z+2i=0 & (1)\\ |z-2i|=|z| & (2)\end{array}\right..$$

(1) $\Leftrightarrow z=-2i$. Suy ra $|z+i|=|-2i+i|=|-i|=1$.

(2) $\Leftrightarrow|x+yi-2i|=|x+yi|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=x^2+y^2\Leftrightarrow y=1$.

Suy ra $|z+i|=|x+yi+i|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+4}\ge2,\forall x\in\mathbb{R}$.

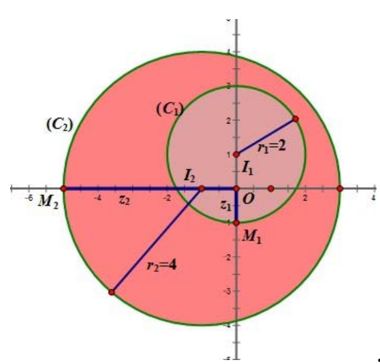
Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1.

**Câu 377:** **[SỞ GD-ĐT HÀ TĨNH L2]** Gọi $T$ là tập hợp tất cả các số phức $z$ thõa mãn $|z-i|\ge2$ và $|z+1|\le4$. Gọi $z_1,\ z_2\in T$ lần lượt là các số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất trong $T$. Khi đó $z_1-z_2$ bằng:

**A.** $-5$. **B.** $4-i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5+i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Đặt $z=x+yi$ khi đó ta có:

$$\begin{cases} |z-i| \ge 2 \\ |z+1| \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+(y-1)i| \ge 2 \\ |(x+1)+yi| \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \ge 4 \\ (x+1)^2+y^2 \le 16 \end{cases}.$$

Vậy $T$ là phần mặt phẳng giữa hai đường tròn $(C_1)$ tâm $I_1(0;1)$ bán kính $r_1 = 2$ và đường tròn $(C_2)$ tâm $I_2(-1;0)$ bán kính $r_2 = 4$.

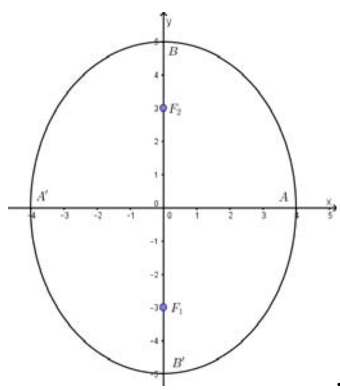
Dựa vào hình vẽ ta thấy $z_1 = 0 - i$, $z_2 = -5$ là hai số phức có điểm biểu diễn lần lượt là $M_1(0;-1)$, $M(-5;0)$ có mô-đun nhỏ nhất và lớn nhất. Do đó $z_1 - z_2 = -i - (5) = 5 - i$.

**Câu 378: [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z+3i|+|z-3i| = 10$. Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z$ có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Gọi $M$ là trung điểm của $M_1M_2$, $M(a;b)$ biểu diễn số phức $w$, tổng $|a|+|b|$ nhận giá trị nào sau đây?

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi , . Theo giả thiết, ta có $|z+3i|+|z-3i| = 10$.

$\Leftrightarrow |x+(y+3)i|+|x+(y+3)i| = 10$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 10 \quad (*)$.

Gọi $E(x;y)$, $F_1(0;-3)$ và $F_2(0;3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10 > F_1F_2 = 6$ nên tập hợp các điểm $E$ là đường elip có hai tiêu điểm $F_1$ và $F_2$. Và độ dài trục lớn bằng $10$.

Ta có $c = 3$; $2b = 10 \Leftrightarrow b = 5$ và $a^2 = b^2 - c^2 = 16$.

Do đó, phương trình chính tắc của là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25} = 1$.

Vậy $\max|z| = OB = OB' = 5$ khi $z = \pm 5i$ có điểm biểu diễn là $M_1(0;\pm 5)$.

và $\min|z| = OA = OA' = 4$ khi $z = \pm 4$ có điểm biểu diễn là $M_2(\pm 4;0)$.

Tọa độ trung điểm của $M_1M_2$ là $M\left(\pm 2;\pm\frac{5}{2}\right)$.

Vậy $|a|+|b| = 2+\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$.

**Câu 379:** [Sở GDĐT Lâm Đồng lần 06] Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

**A.** $z = -2+2i$. **B.** $z = -1+i$. **C.** $z = 3+2i$. **D.** $z = 2+2i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

BG: Giả sử z = x + yi ta có:

$|z-2-4i| = |z-2i| => x+y=4 => |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{2(x-2)^2+8} \ge 2\sqrt{2} \Rightarrow z = 2+2i$

**Câu 380:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Tìm số phức $z$ sao cho $|z-(3+4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $z = 5+5i$. **B.** $z = 2+i$. **C.** $z = 2+2i$. **D.** $z = 4+3i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đặt $z = x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

$|z-(3+4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2 = 5$.

Đặt $\begin{cases} x-3 = \sqrt{5}\sin t \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{5}\sin t \\ y-4 = \sqrt{5}\cos t \Leftrightarrow y = 4+\sqrt{5}\cos t \end{cases}$.

$P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = 4x+2y+3 = 4\left(3+\sqrt{5}\sin t\right)+2\left(4+\sqrt{5}\cos t\right)+3$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\sin t + 2\sqrt{5}\cos t = P-23$.

Theo điều kiện có nghiệm phương trình lượng giác.

$\Rightarrow \left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2 \ge (P-23)^2 \Leftrightarrow P^2-46P+429 \le 0 \Leftrightarrow 13 \le P \le 33$.

Vậy GTLN của $P$ là $33 \Rightarrow z = 5+5i$.

**Câu 381:** **[THPT Thanh Thủy]** Trong mặt phẳng tọa độ, hãy tìm số phức $z$ có môđun nhỏ nhất, biết rằng số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = \sqrt{5}$.

**A.** $z = 1+2i$. **B.** $z = 1-2i$. **C.** $z = -1+2i$. **D.** $z = -1-2i$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Gọi $z = a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|a+bi-2-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(a-2)+(b-4)i|=\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-4)^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-4)^2=5$.

Ta có: $|z-(2+4i)|=\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ Tập hợp các số phức là đường tròn $(C)$ tâm $I(2;4)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

.

Gọi $M$ là điểm biểu diễn của số phức $z$. Ta có: $|z|=|z-0|=OM$.

$OM$ nhỏ nhất $\Rightarrow I,O,M$ thẳng hàng.

Ta có: $(IM): y=2x$.

$M$ là giao điểm của $IM$ và $(C)$ $\Rightarrow M(1;2)\vee M(3;6)$ $\Rightarrow z=1+2i\vee z=3+6i$.

Ta có: $|1+2i|=\sqrt{5}$, $|3+6i|=3\sqrt{5}$. Chọn $z=1+2i$.

**Câu 382:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $z$ không phải số thực và $w=\dfrac{z}{2+z^2}$ là số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1-i|$ là?

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $8$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

**Cách 1.**

Xét $z=0$ suy ra $w=0$ suy ra $P=|z+1-i|=\sqrt{2}$.

Xét $z\neq 0$ suy ra $\dfrac{1}{w}=z+\dfrac{2}{z}$.

Gọi $z=a+bi, b\neq 0$ suy ra $\dfrac{1}{w}=z+\dfrac{2}{z}=\left(\dfrac{2a}{a^2+b^2}+a\right)-b\left(\dfrac{2}{a^2+b^2}-1\right)i$.

Vì $\dfrac{1}{w}\in\mathbb{R}$ nên $b\left(\dfrac{2}{a^2+b^2}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\a^2+b^2=2\end{array}\right.$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức $z$ là đường tròn $(C): x^2+y^2=2$.

Xét điểm $A(-1;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_0=-1+i$, suy ra $P=MA$.

$\Rightarrow MaxP=OA+r=2\sqrt{2}$. (Với $r$ là **bán** kính đường tròn $(C): x^2+y^2=2$.).

**Cách 2.** $w=\dfrac{z}{2+z^2}\Leftrightarrow w(2+z^2)=z\Leftrightarrow z^2-\dfrac{1}{w}z+2=0$ $(*)$, $(*)$ là phương trình bậc hai với hệ số thực $\left(\dfrac{1}{w}\in\mathbb{R}\right)$. Vì $z$ thỏa $(*)$ nên $z$ là nghiệm phương trình $(*)$.

Gọi $z_1, z_2$ là hai nghiệm của $(*)$ suy ra $z_1.z_2 = 2 \Rightarrow |z_1.z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_1||z_2| = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$.

Suy ra $P = |z+1-i| \le |z| + |1-i| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

**Câu 383:** **[Cụm 1 HCM]** Cho số phức $z$ thỏa điều kiện $|z^2+4| = |z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng ?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Giả sử $z = x + yi \ (x,\ y \in \mathbb{R})$.

$$|z^2+4| = |z(z+2i)| \Leftrightarrow |z^2-(2i)^2| = |z(z+2i)| \Leftrightarrow |(z-2i)(z+2i)| = |z(z+2i)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z+2i=0 & (1) \\ |z-2i| = |z| & (2) \end{array}\right.$$.

(1) $\Leftrightarrow z = -2i$. Suy ra $|z+i| = |-2i+i| = |-i| = 1$.

(2) $\Leftrightarrow |x+yi-2i| = |x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4 = x^2+y^2 \Leftrightarrow y = 1$.

Suy ra $|z+i| = |x+yi+i| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+4} \ge 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng 1.

**Câu 384:** **[Sở Hải Dương]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z^3+3z+\overline{z}| - |z+\overline{z}|$.

**A.** $\dfrac{15}{4}$. **B.** $3$. **C.** $\dfrac{13}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $z = a + bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z+\overline{z} = 2a$; $z.\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Khi đó $P = |z^3+3z+\overline{z}| - |z+\overline{z}| = \left|z\left(z^2+3+\dfrac{\overline{z}}{z}\right)\right| - |z+\overline{z}|$.

$$P = |z|.\left|z^2+3+\frac{\overline{z}^2}{|z|^2}\right| - |z+\overline{z}| = |z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2+1| - |z+\overline{z}|.$$

$$P = |(z+\overline{z})^2+1| - |z+\overline{z}| = |4a^2+1| - 2|a| = 4a^2+1-2|a| = \left(2|a|-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}.$$ Vậy $P_{\min} = \dfrac{3}{4}$.

**Câu 385:** **[BTN 175]** Cho số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left|\frac{z+i}{z}\right|$.

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $1 - \left|\frac{i}{z}\right| \leq \left|1 + \frac{i}{z}\right| \leq 1 + \left|\frac{i}{z}\right| \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} \leq \left|1 + \frac{i}{z}\right| \leq 1 + \frac{1}{|z|}$. Mặt khác $|z| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}$. Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P$ là $2$.

**Câu 386:** **[THPT Hoàng Văn Thụ (Hòa Bình)]** Cho $z_1$, $z_2$ là hai nghiệm của phương trình $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i|$, thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1 + z_2|$ bằng.

**A.** $\frac{31}{5}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $5$. **D.** $\frac{56}{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đặt $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 8b + 24 = 0$.

$$\Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 1 \Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1 - (3+4i)| = 1 \\ |z_2 - (3+4i)| = 1 \end{cases}.$$

Ta lại có: $2\left[\left|z_1 - (3+4i)\right|^2 + \left(z_2 - (3+4i)\right)^2\right] \overset{hbh}{=} |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2 - (6+8i)|^2$.

$$\Leftrightarrow 2(1+1) = \frac{64}{25} + \left|z_1 + z_2 - (6+8i)^2\right| \Leftrightarrow |z_1 + z_2 - (6+8i)|^2 = \frac{6}{5}.$$

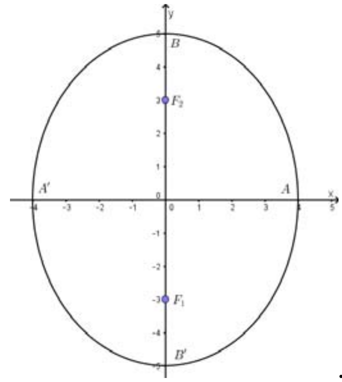
Ta có: $|z_1 + z_2| = |z_1 + z_2 - (6+8i) + (6+8i)| \leq |z_1 + z_2 - (6+8i)| + |6+8i| \leq \frac{6}{5} + 10 = \frac{56}{5}$.

**Câu 387:** **[THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z + 3i| + |z - 3i| = 10$. Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z$ có môđun lớn nhất và nhỏ nhất. Gọi $M$ là trung điểm của $M_1M_2$, $M(a;b)$ biểu diễn số phức $w$, tổng $|a| + |b|$ nhận giá trị nào sau đây?

**A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $5$. **C.** $4$. **D.** $\frac{9}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi , . Theo giả thiết, ta có $|z+3i|+|z-3i|=10$.

$\Leftrightarrow |x+(y+3)i|+|x+(y+3)i|=10$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10 \quad (*)$.

Gọi $E(x;y)$, $F_1(0;-3)$ và $F_2(0;3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=10>F_1F_2=6$ nên tập hợp các điểm $E$ là đường elip có hai tiêu điểm $F_1$ và $F_2$. Và độ dài trục lớn bằng $10$.

Ta có $c=3$; $2b=10 \Leftrightarrow b=5$ và $a^2=b^2-c^2=16$.

Do đó, phương trình chính tắc của là $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

Vậy $\max|z|=OB=OB'=5$ khi $z=\pm5i$ có điểm biểu diễn là $M_1(0;\pm5)$.

và $\min|z|=OA=OA'=4$ khi $z=\pm4$ có điểm biểu diễn là $M_2(\pm4;0)$.

Tọa độ trung điểm của $M_1M_2$ là $M\left(\pm2;\pm\frac{5}{2}\right)$.

Vậy $|a|+|b|=2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$.

**Câu 388:** **[Cụm 6 HCM]** Cho số phức $z$ thỏa mãn $|z-3|=2|z|$ và $\max|z-1+2i|=a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$.

**A.** $4\sqrt{2}$. **B.** $3$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $4$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

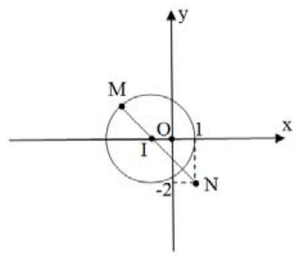
Khi đó $|z-3|=2|z| \Leftrightarrow |(x-3)+yi|=2|x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$.

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4(x^2+y^2) \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=2^2$.

Suy ra tập hợp các điểm $M$ biểu diễn $z$ chính là đường tròn tâm $I(-1;0), R=2$.

Ta có $|z-1+2i| = |z-(1-2i)| = MN,\ N(1;-2)$. Dựa vào hình vẽ nhận thấy $MN$ lớn nhất khi đi qua tâm. Khi đó $MN = NI + IM = 2\sqrt{2} + R = 2\sqrt{2}+2$. Suy ra $a=2,\ b=2$.

Do đó $a+b=2+2=4$.




.

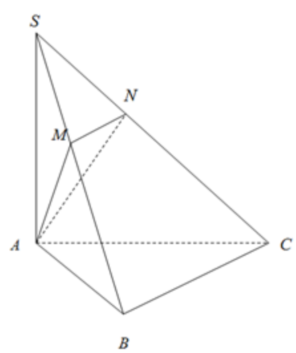
### Chương 13. Khối đa diện

**Câu 389:** **[THPT Trần Cao Vân - Khánh Hòa]** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$ với $SA$ vuông góc với đáy và $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua $A$ và vuông góc với $SB$. Diện tích của thiết diện khi cắt hình chóp bởi $(P)$ là:

**A.** $\dfrac{8a^2\sqrt{10}}{25}$. **B.** $\dfrac{4a^2\sqrt{10}}{25}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{4a^2\sqrt{6}}{15}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




.

Trong $(SAB)$, dựng $AM \perp SB \Rightarrow M \in (P)$.

Lại có: $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$, suy ra $BC$ song song với $(P)$.

Trong $(SBC)$, dựng $MN$ song song với $BC, (N \in SC)$, khi đó $N \in (P)$.

Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi $(P)$ là tam giác $AMN$ vuông tại $M$ (vì $AM \perp (SBC)$).

Ta có: $AM = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}; SM = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}; SB = a\sqrt{5}$.

Mà $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{SM}{SB}\Rightarrow MN=\dfrac{4a\sqrt{2}}{5}$.

Suy ra: $S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4a\sqrt{2}}{5}.\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4a^2\sqrt{10}}{25}$.

**Câu 390:** **[THPT Nguyễn Chí Thanh - Khánh Hòa]** Với một tấm bìa hình vuông, người ta cắt bỏ ở mỗi góc tấm bìa một hình vuông cạnh $12\text{ cm}$ rồi gấp lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Nếu dung tích của cái hộp đó là $4800\text{ cm}^3$ thì cạnh tấm bìa có độ dài là.

**A.** $42\text{ cm}$. **B.** $38\text{ cm}$. **C.** $36\text{ cm}$. **D.** $44\text{ cm}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Gọi $x$ là độ dài cạnh hình vuông $(x>0)$ ( đơn vị $\text{cm}$).

Vậy thể tích hình hộp chữ nhật được tạo thành là.

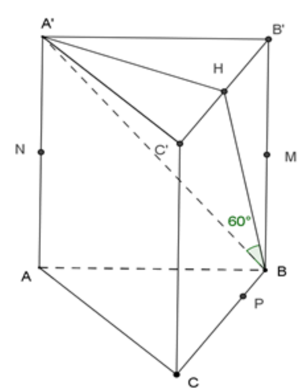
$(x-24)^2.12=4800\Leftrightarrow x-24=20\Leftrightarrow x=44$.

**Câu 391:** **[THPT Chuyên KHTN]** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=2a$, $BC=a$, góc giữa $BA'$ và $mp(BCC'B')$ bằng $60^0$. Gọi $M$, $N$ là trung điểm $BB'$ và $AA'$. $P$ nằm trên đoạn $BC$ sao cho $BP=\dfrac{1}{4}BC$. Hỏi các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $MN\perp CP$. **B.** $CM\perp NP$. **C.** $CN\perp PM$. **D.** $CM\perp AB$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




.

$A'H\perp(BCC'B')\Rightarrow\left[A'B;\ (BCC'B')\right]=\widehat{A'BH}=60^0$..

$BB'=x$, $\overrightarrow{AC}=\vec{w}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{v}$.

$\cos60^0=\dfrac{BH}{A'B}=\dfrac{\sqrt{x^2+\dfrac{a^2}{4}}}{\sqrt{4a^2+x^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=a$.

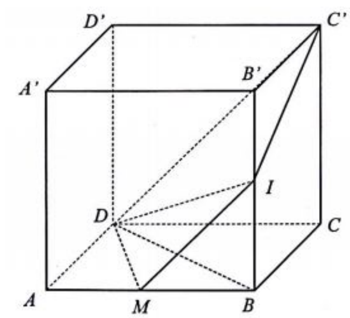
$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{NP}=\left(\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}\right).\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{NC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{NB}\right)$.

$=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)\left(-2\vec{v}+\vec{w}+3\left(\vec{w}+\vec{u}\right)\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)\left(-2\vec{v}+4\vec{w}+3\vec{u}\right)=\frac{1}{4}\left(4\vec{u}\vec{w}+3\vec{u}^2-\vec{v}^2\right)=\frac{1}{4}\left(4\vec{u}\left(\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\vec{u}\right)+3\vec{u}^2-\vec{v}^2\right)$.

$=\frac{1}{4}\left(\vec{u}^2-\vec{v}^2\right)=0$.

**Câu 392:** **[THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. $I$ là trung điểm $BB'$. Mặt phẳng $(DIC')$ chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng.




**A.** $\frac{7}{17}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Coi như khối lập phương có cạnh bằng 1.

Để giải bài toán này, ta phải xác định đúng thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(DIC')$.

Lấy $M$ là trung điểm $AB$ thì $IM$ là đường trung bình tam giác $ABB'$ nên $IM//AB'//DC'$.

Suy ra bốn điểm $I,M,C',D$ cùng thuộc một mặt phẳng $(C'ID)$.

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(DIC')$ là tứ giác $C'DMI$.

Phần có thể tích nhỏ hơn là khối đa diện $C'IBMDC$.

Để thuận tiện tính toán ta chia khối trên thành 2 phần là tứ diện $IMBD$ và hình chóp $DIBCC'$.

$V_{IMBD}=\frac{1}{3}.IB.S_{BDM}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.IB.DA.MB=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.

$V_{D.IBCC'}=\frac{1}{3}.DC.S_{IBCC'}=\frac{1}{3}.DC.\frac{1}{2}.(IB+CC').BC=\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+1\right).1.\frac{1}{4}$.

Suy ra thể tích khối có thể tích nhỏ hơn là $V_n=V_{IMBD}+V_{DIBCC'}=\frac{1}{24}+\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$.

Thể tích phần lớn hơn là $V_l = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_n = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

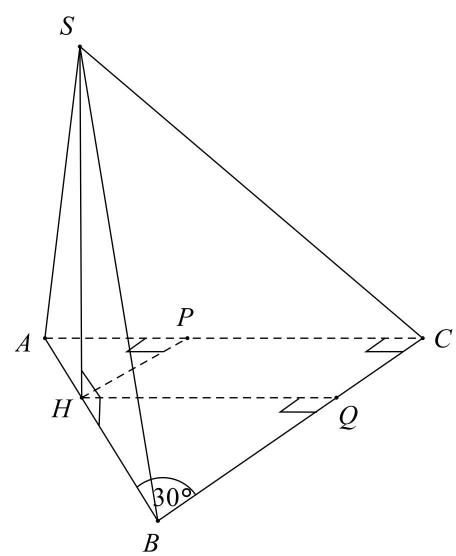
Vậy tỉ lệ cần tìm là $V_n : V_l = 7:17$.

**Câu 393:** **[THPT chuyên Thái Bình]** Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác $SAB$ nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABC)$, tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có $AC = a, \widehat{ABC} = 30°$. Mặt bên $(SAC)$ và $(SBC)$ cùng tạo với đáy góc bằng nhau và bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo $a$ là:

**A.** $V = \frac{a^3}{2(1+\sqrt{5})}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2(1+\sqrt{3})}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{1+\sqrt{3}}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2(1+\sqrt{2})}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




+ Theo đề $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $AB$. Dựng $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (SAB)$.

+ $\Delta ABC$ vuông nên $\tan 30° = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (1).

+ Dựng $HP \perp AC, HQ \perp BC \Rightarrow \widehat{SPH} = \widehat{SQH} = \widehat{((SAC),(ABC))} = \widehat{((SBC),(ABC))} = 60^0$.

$\Rightarrow \Delta SPH = \Delta SQH \Rightarrow HP = HQ$.

$\Rightarrow HPCQ$ là hình vuông. Đặt $HQ = x, 0 < x < a\sqrt{3} \Rightarrow QB = a\sqrt{3} - x$.

$\Delta HQB$ vuông nên $\tan 60° = \frac{QB}{HQ} \Rightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} - x \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = HQ$.

$\Delta SHQ$ vuông nên $\tan 60° = \frac{SH}{HQ} \Rightarrow SH = \frac{3a}{\sqrt{3}+1}$ (2).

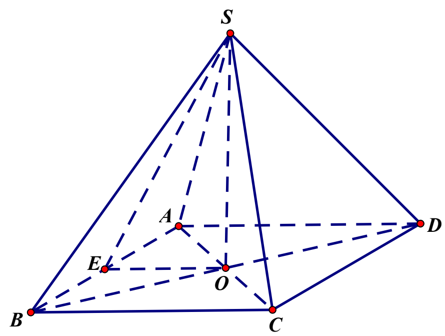
Từ (1) và (2): $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$.

**Câu 394:** **[Sở Hải Dương]** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy hợp với mặt bên một góc $45°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**A.** $\dfrac{128\sqrt{2}}{81}$. **B.** $\dfrac{32\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\dfrac{64\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\dfrac{64\sqrt{2}}{81}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Đặt $AB = a$. Gọi $O$ là tâm $ABCD$, $E$ là trung điểm $AB$. Khi đó $\left(SAB, ABCD\right) = SEO = 45°$.

Suy ra $SO = OE = \dfrac{a}{2}$ và $SA = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $R_{S.ABCD} = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4}}{2.\dfrac{a}{2}} = \dfrac{3a}{4} = \sqrt{2} \Rightarrow a = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{32}{9} = \dfrac{64\sqrt{2}}{81}$.

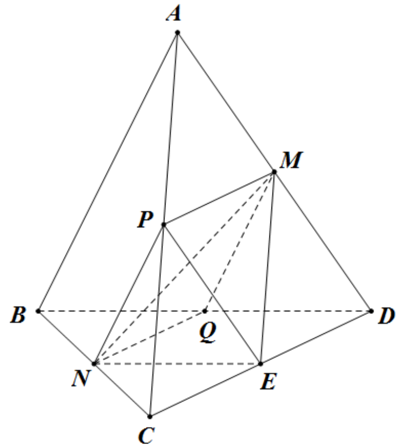
**Câu 395:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AD$, $BC$. Biết $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ và $d\left(AB, CD\right) = a$. Khi đó độ dài $MN$ là.

**A.** $MN = \dfrac{a}{2}$ hoặc $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $MN = a\sqrt{2}$ hoặc $MN = a\sqrt{6}$.

**C.** $MN = a$ hoặc $MN = a\sqrt{2}$. **D.** $MN = a\sqrt{2}$ hoặc $MN = a\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Gọi $P$, $Q$, $E$ lần lượt là trung điểm của $AC$, $BD$, $CD$. Ta có tứ giác $MQNP$ là hình thoi cạnh $\frac{a}{2}$. Ta chứng minh được $V_{CDMQNP}=\frac{1}{2}V_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ (dựa vào $AB$€$CD$€$\left(MQNP\right)$ và $AB$, $CD$ chéo nhau).

Mặt khác: $V_{C.PNE}=V_{D.QME}=\frac{1}{8}V_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}\Rightarrow V_{E.MQNP}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}-2.\frac{a^3\sqrt{3}}{96}=\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Vì $AB$, $CD$ chéo nhau và $d\left(AB,CD\right)=a$ nên $d\left(CD,\left(MQNP\right)\right)=\frac{a}{2}$ (thật vậy, gọi $\Delta$ là đường vuông góc chung của $AB$, $CD$ thì $\Delta\perp\left(MQNP\right)$ vì $\Delta\perp NP,\ \Delta\perp NQ$).

Suy ra $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}=V_{E.MQNP}=\frac{1}{3}d\left(CD,\left(MQNP\right)\right).S_{MQNP}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.S_{MQNP}$.

$\Rightarrow S_{MQNP}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

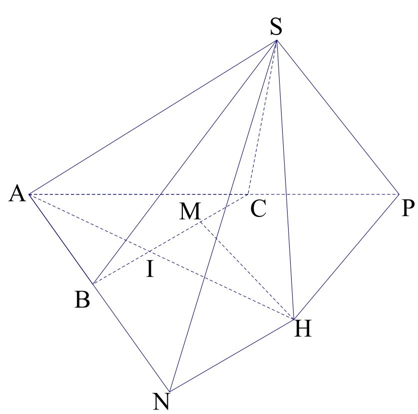
$$\Leftrightarrow MQ.NQ.\sin\widehat{NQP}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\Rightarrow\sin\widehat{NQP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\widehat{NQP}=60^0\Rightarrow MN=\frac{a}{2}\\ \widehat{NQP}=120^0\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}\end{array}\right..$$

**Câu 396:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=3,BC=4,AC=5$. Các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ đều cùng hợp với mặt đáy $(ABC)$ một góc $60^\circ$ và hình chiếu $H$ của $S$ lên $(ABC)$ nằm khác phía với $A$ đối với đường thẳng $BC$. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

**A.** $V_{S.ABC}=6\sqrt{3}$. **B.** $V_{S.ABC}=12\sqrt{3}$. **C.** $V_{S.ABC}=2\sqrt{3}$. **D.** $V_{S.ABC}=4\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**



Gọi $M, N, P$ là hình chiếu của $H$ lên $CB, BA, AC$.

Ta có $\Delta SHM = \Delta SHN = \Delta SHP \Rightarrow HM = HN = HP$.

Theo bài ra ta có $H$ là tâm đường tròn bàng tiếp $\Delta ABC$.

Ta có $\Delta ABC$ vuông tại $B \Rightarrow BMHN$ là hình vuông.

Gọi $I = AH \cap BC$.

$\frac{BI}{IC} = \frac{3}{5} \Rightarrow BI = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{BI}{AB} = \frac{NH}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow B$ là trung điểm của $AN \Rightarrow HN = AB = 3$.

$\Rightarrow SH = HN.\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

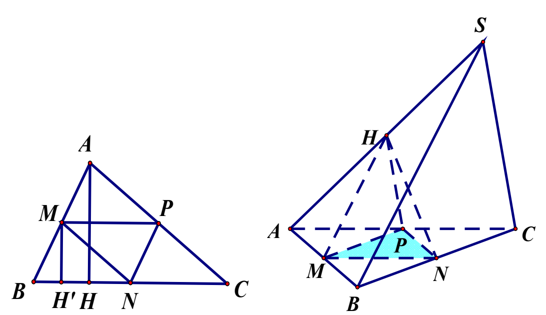
$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 6 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = 6\sqrt{3}$.

**Câu 397:** **[THPT chuyên Lương Thế Vinh]** Cho tứ diện $S.ABC$ có thể tích $V$. Gọi $H, M, N, P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA$, $AB, BC, CA$. Thể tích khối chóp $H.MNP$ là:

**A.** $\frac{3}{8}V$. **B.** $\frac{1}{12}V$. **C.** $\frac{1}{8}V$. **D.** $\frac{1}{16}V$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**




Ta có: $d\left(H,(ABC)\right) = \frac{1}{2}d\left(S,(ABC)\right)$.

$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MH'.MP = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AH.\frac{1}{2}BC$.

$= \frac{1}{4}.S_{\Delta ABC}$.

Vậy $V_{H.MNP} = \frac{1}{3}S_{\Delta MNP}.d\left(H,(MNP)\right). = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.\frac{1}{2}d\left(S,(ABC)\right). = \frac{1}{8}.V$.

**Câu 398:** **[Cụm 1 HCM]** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $SA = SB = 1$, $SC = 3$. Gọi $M$ là điểm trên cạnh $SC$ sao cho $SM = \frac{1}{3}SC$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABM$.

**A.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{36}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}}{36}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

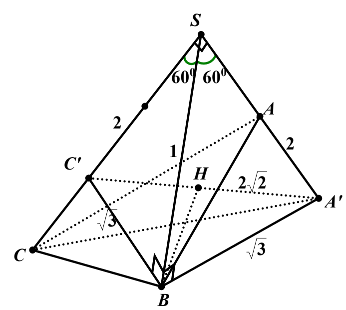
**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

**Cách 1:** Áp dụng công thức $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}.abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$.

Ta có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}.1.1.3\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-0}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{S.ABM}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

**Cách 2:**




Gọi $A'$, $C'$ lần lượt là các điểm trên $SA$ và $SC$ sao cho $SA'=SC'=2$. Khi đó $\widehat{SBA'}=\widehat{SBC'}=90°$ hay $SB\perp(A'BC')$.

Tam giác $A'BC'$ cân tại $B$, gọi $H$ là hình chiếu của $B$ trên $A'C'$ ta có: $A'C'=2\sqrt{2}$, $BH=1$.

$$V_{S.A'BC'}=\frac{1}{3}.SB.\frac{1}{2}.BH.AC=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}.1.2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'BC'}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

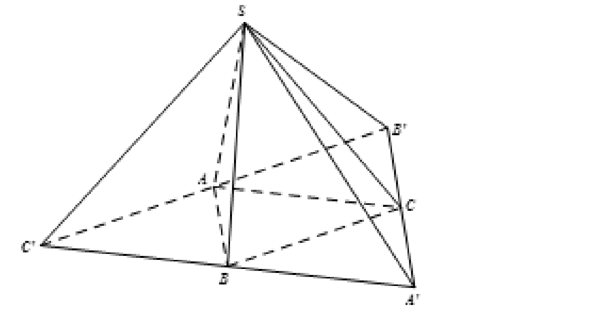
$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.ABM}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

**Câu 399:** **[THPT Nguyễn Khuyến –NĐ]** Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=BC=5, SB=AC=6, SC=AB=7$.

**A.** $V=2\sqrt{95}$. **B.** $V=\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{35}{2}$. **D.** $V=2\sqrt{105}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**




Dựng tam giác $A'B'C'$ sao cho $A,\ B,\ C$ lần lượt là trung điểm của $B'C',\ A'C',\ A'B'$.

Ta có $SA = BC = \dfrac{1}{2}B'C'$ nên tam giác $SB'C'$ vuông tại $S$.

Tương tự các tam giác $SA'B',\ SA'C'$ là các tam giác vuông tại $S$.

Hay $S.A'B'C'$ là tứ diện có ba cạnh đôi một vuông góc.

$V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}SA'.S_{SB'C'} = \dfrac{1}{3}SA'.\dfrac{1}{2}SB'.SC' = \dfrac{1}{6}SA'.SB'.SC'$.

$$\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = A'B'^2 = (2AB)^2 = 196 \\ SB'^2 + SC'^2 = B'C'^2 = (2BC)^2 = 100 \\ SA'^2 + SC'^2 = A'C'^2 = (2AC)^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SA'^2 = 120 \\ SB'^2 = 76 \\ SC'^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SA' = 2\sqrt{30} \\ SB' = 2\sqrt{19} \\ SC' = 2\sqrt{6} \end{cases}.$$

$V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}SA'.S_{SB'C'} = \dfrac{1}{3}SA'.\dfrac{1}{2}SB'.SC' = \dfrac{1}{6}SA'.SB'.SC' = \dfrac{1}{6}.2\sqrt{30}.2\sqrt{19}.2\sqrt{6} = 8\sqrt{95}$.

$V_{SABC} = \dfrac{1}{4}V_{SA'B'C'} = \dfrac{1}{4}.8\sqrt{95} = 2\sqrt{95}$.

**Câu 400:** **[THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi $M, N$ lần lượt thuộc các cạnh bên $AA', CC'$ sao cho $MA = MA'$ và $NC = 4NC'$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Trong bốn khối tứ diện $G'AB'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

**A.** Khối $BB'MN$.. **B.** Khối $A'BCN$.. **C.** Khối $ABB'C'$.. **D.** Khối $GA'B'C'$..

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $h$ là đường cao của lăng trụ, $S$ là diện tích đáy của lăng trụ.

Ta có: $V_{GA'B'C'} = \dfrac{1}{3}h.S$, $V_{B.AB'C'} = V_{A'.AB'C'} = \dfrac{1}{3}h.S$ ( vì $d\left[A';\left(AB'C'\right)\right] = d\left[B;\left(AB'C'\right)\right]$).

từ đó suy ra: $V_{GA'B'C'} = V_{ABB'C'}$, vậy loại B và **C.**

$V_{BB'MN} = \dfrac{1}{3}d\left[M,\left(BB'C'C\right)\right].S_{BB'N}$, $V_{A'BCN} = \dfrac{1}{3}d\left[A',\left(BB'C'C\right)\right].S_{BCN}$.

Mà $S_{BB'N} < S_{BCN}$, $d\left[M,\left(BB'C'C\right)\right] = d\left[A',\left(BB'C'C\right)\right]$ nên $V_{A'BCN} < V_{BB'MN}$.

**Câu 401:** **[Cụm 1 HCM]** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{CSB}=60°$, $\widehat{ASC}=90°$, $SA=SB=1$, $SC=3$. Gọi $M$ là điểm trên cạnh $SC$ sao cho $SM=\frac{1}{3}SC$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABM$.

**A.** $V=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{36}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}}{36}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

**Hướng dẫn giải**

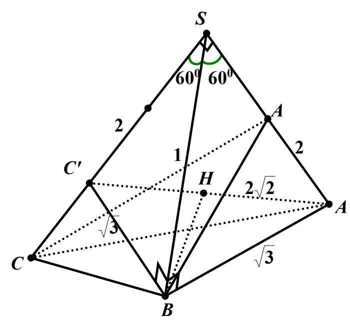
**Chọn D.**

**Cách 1:** Áp dụng công thức $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$.

Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.1.1.3\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-0}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.ABM}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

**Cách 2:**




Gọi $A'$, $C'$ lần lượt là các điểm trên $SA$ và $SC$ sao cho $SA'=SC'=2$. Khi đó $\widehat{SBA'}=\widehat{SBC'}=90°$ hay $SB\perp(A'BC')$.

Tam giác $A'BC'$ cân tại $B$, gọi $H$ là hình chiếu của $B$ trên $A'C'$ ta có: $A'C'=2\sqrt{2}$, $BH=1$.

$V_{S.A'BC'}=\frac{1}{3}.SB.\frac{1}{2}.BH.AC=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}.1.2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'BC'}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{3}{4}.\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

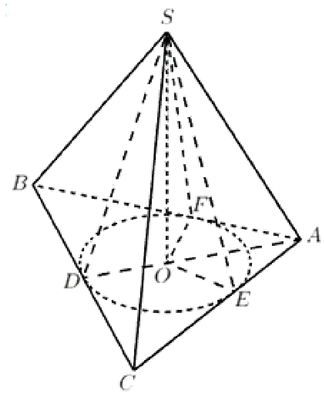
$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.ABM}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

**Câu 402:** **[BTN 171]** Cho khối chóp $S.ABC$ có các cạnh đáy $AB=AC=5a, BC=6a$ và các mặt bên tạo với đáy một góc $60^0$. Hãy tính thể tích $V$ của khối chóp đó.

**A.** $V=6a^3\sqrt{3}$. **B.** $V=2a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=12a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=18a^3\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**




Kẻ $SO \perp (ABC)$ và $OD, OE, OF$ lần lượt vuông góc với $AC, CA, AB$. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $SD \perp BC, SE \perp AC, SF \perp AB$ (như hình vẽ).

Từ đó suy ra $\angle SDO = \angle SEO = \angle SFO = 60^0$. Do đó các tam giác vuông $SDO; SEO; SFO$ bằng nhau. Từ đó suy ra $OD = OE = OF$. Vậy $O$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Vì tam giác $ABC$ cân tại $A$ nên $OA$ vừa là đường phân giác, vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến. Suy ra $A, O, D$ thẳng hàng.

Suy ra $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16a^2} = 4a$.

Gọi $p$ là nửa chu vi tam giác $ABC$, $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}6a.4a = 12a^2 = pr = 8ar$ với $r = \dfrac{3}{2}a$.

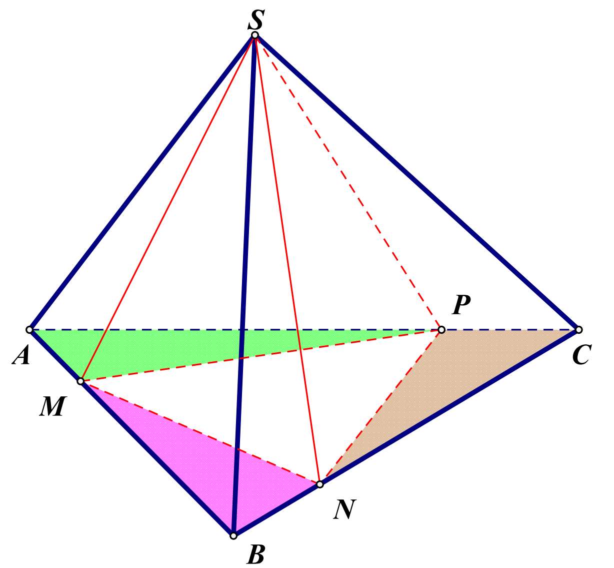
Do đó $SO = OD.\tan 60^0 = \dfrac{3\sqrt{3}a}{2}$.

**Câu 403:** **[Cụm 6 HCM]** Cho hình chóp $SABC$, $SA = 4$, $SB = 5$, $SC = 6$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 45°$, $\widehat{CSA} = 60°$. Các điểm $M$, $N$, $P$ thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{CP}$. Tính thể tích chóp $S.MNP$.

**A.** $\dfrac{35\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{245}{32}$. **C.** $\dfrac{35}{8}$. **D.** $\dfrac{128\sqrt{2}}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**




☑ $V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$.

$V_{S.ABC}=\frac{4.5.6}{6}\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}=10$.

$S_{\Delta MNP}=S-S_{\Delta AMP}-S_{\Delta MBN}-S_{\Delta NCP}=S-S.\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\right)=\frac{7}{16}S$, $S=S_{\Delta ABC}$.

**Mà** $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{7}{16}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{35}{8}$.

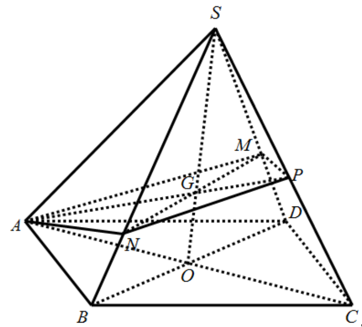
**Chú ý:** $\frac{S_{\Delta AMP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}.AM.AP.\sin\left(\widehat{MAP}\right)}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin\left(\widehat{BAC}\right)}=\frac{1}{4}.\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.

**Câu 404:** **[TTLT ĐH Diệu Hiền]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là $V$. Điểm $P$ là trung điểm của $SC$, một mặt phẳng qua $AP$ cắt hai cạnh $SD$ và $SB$ lần lượt tại $M$ và $N$. Gọi $V_1$ là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Gọi $O$ là tâm của hình bình hành $ABCD$. G là trọng tâm tam giác $SAC$.

Ta có $M,G,N$ thẳng hàng. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ADC}=V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có: $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SD}.\frac{SP}{SC}\Leftrightarrow\frac{V_{S.AMP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{SM}{SD}\Leftrightarrow\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\frac{SM}{SD}$.

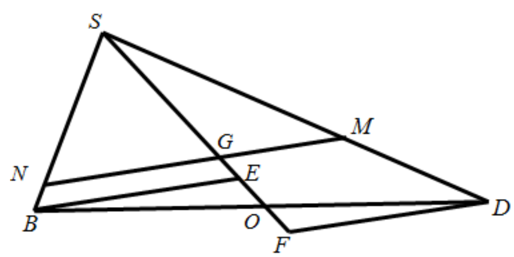
Tương tự $\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}\Leftrightarrow\frac{V_{S.ANP}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{SN}{SB}\Leftrightarrow\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\frac{SN}{SB}$.

Từ đó suy ra $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)\Rightarrow\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$.

Hay $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=3$.

Thậy vậy, qua $B,D$ kẻ các đường song song với $MN$ cắt $SO$ lần lượt tại $E,F$.




Ta có: $\frac{SD}{SM}=\frac{SF}{SG};\frac{SB}{SN}=\frac{SE}{SG}\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{SE+SF}{SG}$.

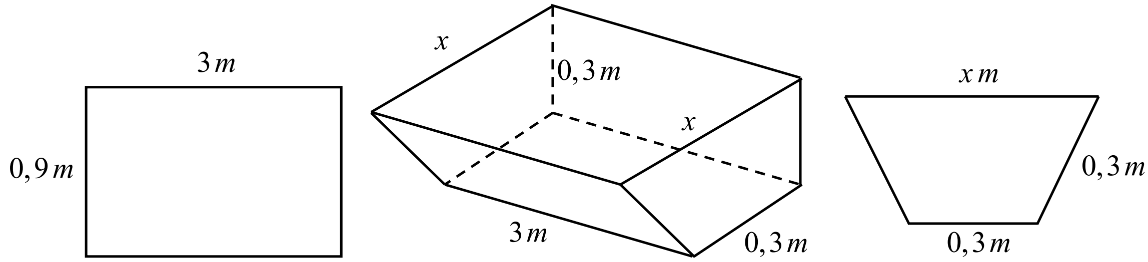
$\Rightarrow\frac{SD}{SM}+\frac{SB}{SN}=\frac{2SO}{SG}=2.\frac{3}{2}=3$.

Đặt $\frac{SD}{SM}=x;\frac{SB}{SN}=y$. Ta có $x+y=3$.

Mặt khác $\frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SD}+\frac{SN}{SB}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x+y}{4xy}=\frac{3}{4xy}\geq\frac{3}{(x+y)^2}=\frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{V_1}{V}$ nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

**Câu 405:** **[THPT chuyên Lương Thế Vinh]** Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9m\times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới biết mặt cắt của máng xối (bởi mặt phẳng song song với hai mặt đáy) là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ có chiều cao bằng chiều dài của tấm tôn. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?




(a) Tấm tôn (b) Máng xối (c) Mặt cắt .

**A.** $x=0,6m$ . **B.** $x=0,65m$ . **C.** $x=0,4m$ . **D.** $x=0,5m$ .

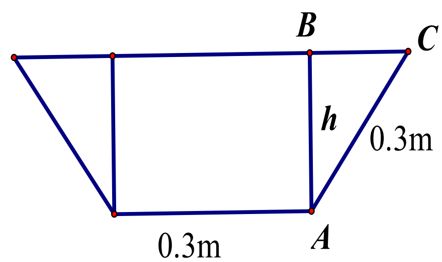
**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân (mặt cắt) lớn nhất.

Ta có $S=\frac{h}{2}\left(x+0,3\right)$.

$$BC=\frac{x-0,3}{2}\Rightarrow h=\sqrt{\left(0,3\right)^2-\frac{\left(x-0,3\right)^2}{4}}\Rightarrow S=\frac{\left(x+0,3\right)}{2}.\sqrt{\left(0,3\right)^2-\frac{\left(x-0,3\right)^2}{4}}.$$




$$S=\frac{1}{4}\left(x+0,3\right)\sqrt{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2}.$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(x+0,3\right)\sqrt{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2}$.

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\sqrt{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2}+\left(x+0,3\right)\frac{-2\left(x-0,3\right)}{\sqrt{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2}}.$$

$$=\frac{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2-\left(x+0,3\right)\left(x-0,3\right)}{\sqrt{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2}}=\frac{0,36-2x\left(x-0,3\right)}{\sqrt{4.\left(0,3\right)^2-\left(x-0,3\right)^2}}.$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -x^2+0,3x+0,18=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-0,3\\x=0,6\end{array}\right..$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(x\right)$ lớn nhất khi $x=0,6$.

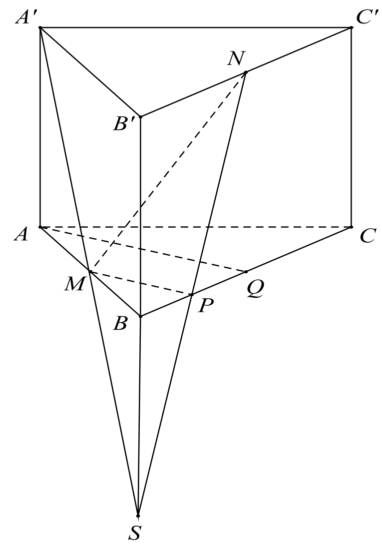
Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x=0,6m$.

**Câu 406:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$ và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh $BC$ tại $P$. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng.

**A.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{68}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Gọi $Q$ là trung điểm của $BC$. Suy ra $AQ \parallel A'N \Rightarrow MP \parallel AQ \Rightarrow P$ là trung điểm của $BQ$.

Ta có $BB', A'M, NP$ đồng quy tại $S$ và $B$ là trung điểm của $B'S \Rightarrow SB' = 2a$.

$S_{A'B'N} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

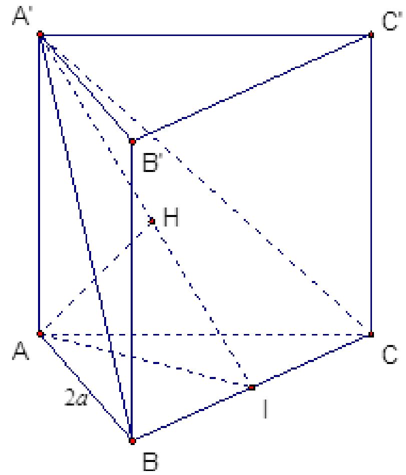
$V_{SMNP} = \frac{1}{8}V_{SA'B'N} \Rightarrow V_{MBPA'B'N} = \frac{7}{8}V_{SA'B'N} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

**Câu 407:** **[THPT Nguyễn Chí Thanh - Khánh Hòa]** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó thể tích lăng trụ bằng.

**A.** $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $V = \frac{4}{3}a^3$. **C.** $V = 3a^3$. **D.** $V = a^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Gọi I là trung điểm $BC$. $H$ là hình chiếu của $A$ lên $A'I$.

$$\left.\begin{array}{l} AI \perp BC \\ AA' \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'I) \Rightarrow \left(A'BC\right) \perp (AA'I) \text{ theo giao tuyế'n } A'I$$

$AH \perp A'I;\ AH \subset (AA'I)$

$\Rightarrow AH \perp (A'BC)$

$$\Rightarrow d(A;(A'BC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$\Delta A'AI$ vuông tại $A$:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AA'^2}3. \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$$

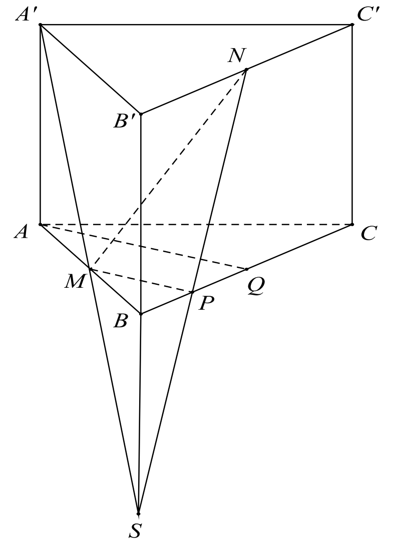
$$V = S_{ABC}.AA' = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = 3a^3.$$

**Câu 408:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$ và $B'C'$. Mặt phẳng $\left(A'MN\right)$ cắt cạnh $BC$ tại $P$. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng.

**A.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{68}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**




Gọi $Q$ là trung điểm của $BC$. Suy ra $AQ \parallel A'N \Rightarrow MP \parallel AQ \Rightarrow P$ là trung điểm của $BQ$.

Ta có $BB', A'M, NP$ đồng quy tại $S$ và $B$ là trung điểm của $B'S \Rightarrow SB' = 2a$.

$$S_{A'B'N} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

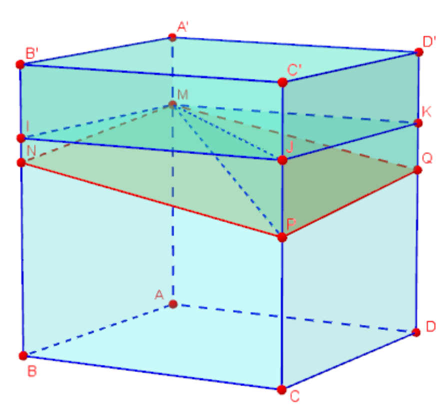
$$V_{SMNP} = \frac{1}{8}V_{SA'B'N} \Rightarrow V_{MBPA'B'N} = \frac{7}{8}V_{SA'B'N} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}.$$

**Câu 409: [208-BTN]** Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$. Trên các cạnh $A'A,\ B'B,\ C'C$ lấy các điểm $M,\ N,\ P$ sao cho: $A'M = \frac{1}{4}A'A,\ B'M = \frac{1}{3}B'B,\ C'P = \frac{1}{2}C'C$. Mặt phẳng $(MNP)$ chia khối lập phương trên thành 2 khối đa diện, khối đa diện thứ nhất chứa điểm $D'$ có thể tích $V_1$ và khối đa diện thứ hai chứa điểm $D$ có thể tích $V_2$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

**A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**



Gọi $Q=(MNP)\cap D'D$. Chúng ta dễ thấy rằng $MN//PQ, NP//MQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}}$.

Dựng mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M$, vuông góc với $A'A$ và cắt $B'B$, $C'C$, $D'D$ lần lượt tại $I$, $J$, $K$.

Để đơn giản trong việc tính toán, chọn $a=12$. Khi đó $A'M=3,\ B'N=4,\ C'P=6$. Từ đó suy ra:

$IN=1,\ JP=3,\ KQ=\sqrt{MQ^2-MK^2}=\sqrt{NP^2-MK^2}=2$.

Ta có: $V_{A'B'C'D'.MNPQ}=V_{A'B'C'D'.MIJK}+V_{M.IJPN}+V_{M.JKQP}$.

- $V_{A'B'C'D'.MIJK}=12.12.3=432$.
- $V_{M.IJPN}=\dfrac{1}{3}MI.S_{IJPN}=\dfrac{1}{3}.MI.\dfrac{(IN+JP)IJ}{2}=\dfrac{1}{3}.12.\dfrac{(1+3)12}{2}=96$.
- $V_{M.JKQP}=\dfrac{1}{3}MK.S_{JKQP}=\dfrac{1}{3}.MK.\dfrac{(KQ+JP).KJ}{2}=\dfrac{1}{3}.12.\dfrac{(2+3)12}{2}=120$.

Suy ra $V_{A'B'C'D'.MNPQ}=432+96+120=648$.

Mặt khác, ta có $V_{ABCD.MNPQ}=V_{ABCD.A'B'C'D'}-V_{A'B'C'D'.MNPQ}=12^3-648=1080$.

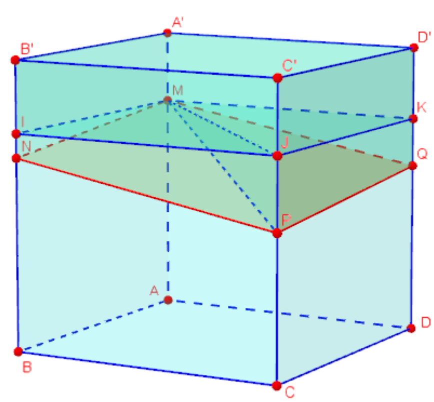
Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}}=\dfrac{648}{1080}=\dfrac{3}{5}$.

**Câu 410: [208-BTN]** Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$. Trên các cạnh $A'A,\ B'B,\ C'C$ lấy các điểm $M$, $N$, $P$ sao cho: $A'M=\dfrac{1}{4}A'A,\ B'M=\dfrac{1}{3}B'B,\ C'P=\dfrac{1}{2}C'C.$ Mặt phẳng $(MNP)$ chia khối lập phương trên thành 2 khối đa diện, khối đa diện thứ nhất chứa điểm $D'$ có thể tích $V_1$ và khối đa diện thứ hai chứa điểm $D$ có thể tích $V_2$. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$.

**A.** $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Gọi $Q=(MNP)\cap D'D$. Chúng ta dễ thấy rằng $MN//PQ, NP//MQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Ta có $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}}$.

Dựng mặt phẳng $(\alpha)$ qua $M$, vuông góc với $A'A$ và cắt $B'B$, $C'C$, $D'D$ lần lượt tại $I$, $J$, $K$.

Để đơn giản trong việc tính toán, chọn $a=12$. Khi đó $A'M=3,\ B'N=4,\ C'P=6$. Từ đó suy ra:

$IN=1,\ JP=3,\ KQ=\sqrt{MQ^2-MK^2}=\sqrt{NP^2-MK^2}=2$.

Ta có: $V_{A'B'C'D'.MNPQ}=V_{A'B'C'D'.MIJK}+V_{M.IJPN}+V_{M.JKQP}$.

- $V_{A'B'C'D'.MIJK}=12.12.3=432$.
- $V_{M.IJPN}=\frac{1}{3}MI.S_{IJPN}=\frac{1}{3}.MI.\frac{(IN+JP)IJ}{2}=\frac{1}{3}.12.\frac{(1+3)12}{2}=96$.
- $V_{M.JKQP}=\frac{1}{3}MK.S_{JKQP}=\frac{1}{3}.MK.\frac{(KQ+JP).KJ}{2}=\frac{1}{3}.12.\frac{(2+3)12}{2}=120$.

Suy ra $V_{A'B'C'D'.MNPQ}=432+96+120=648$.

Mặt khác, ta có $V_{ABCD.MNPQ}=V_{ABCD.A'B'C'D'}-V_{A'B'C'D'.MNPQ}=12^3-648=1080$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_{A'B'C'D'.MNPQ}}{V_{ABCD.MNPQ}}=\frac{648}{1080}=\frac{3}{5}$.

**Câu 411: [THPT Trần Phú-HP]** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $A'ABC$ là tứ diện đều, khoảng cách giữa 2 đường thẳng $A'C$ và $BC'$ là $a$. Thể tích khối lăng trụ đó bằng.

**A.** $2\sqrt{2}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

.

Từ giả thiết $A'ABC$ là tứ diện đều, suy ra chân đường vuông góc hạ từ A’ xuống mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác đều ABC.

Lấy E đối xứng với A qua C, ta có $mp(A'CM)\parallel mp(BC'E)$.

Lại có: $\begin{cases} BM\perp CM \\ BM\perp A'G \end{cases}\Rightarrow BM\perp(A'CM)$.

Từ đó ta có khoảng cách giữa 2 đường thẳng $A'C$ và $BC'$ bằng khoảng cách giữa hai mp $(A'CM)$ và $(BC'E)$. Hay $BM=a$.

Khi đó $AB=2.BM=2a$. Do $A'ABC$ là tứ diện đều nên $A'AB$ là tam giác đều cạnh $2a$.

$\Rightarrow A'M=AA'.\sin 60^\circ=a\sqrt{3}\ \Rightarrow A'G=\sqrt{A'M^2-MG^2}=\sqrt{3a^2-\left(\frac{1}{3}CM\right)^2}=\sqrt{3a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$.

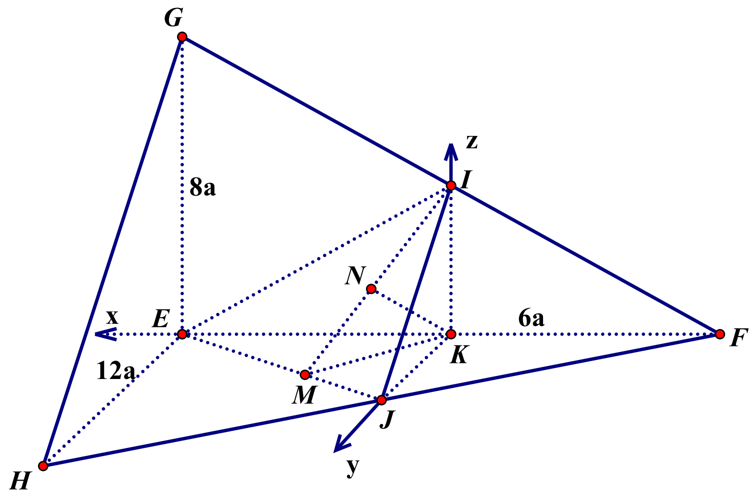
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V=A'G.S_{\Delta ABC}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.\frac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2=2\sqrt{2}a^3$.

**Câu 412: [SỞ GD-ĐT ĐỒNG NAI]** Cho hình tứ diện $EFGH$ có $EF$ vuông góc với $EG$, $EG$ vuông góc với $EH$, $EH$ vuông góc với $EF$; biết $EF=6a$, $EG=8a$, $EH=12a$, với $a>0, a\in\mathbb{R}$. Gọi $I$, $J$ tương ứng là trung điểm của hai cạnh $FG$, $FH$. Tính khoảng cách $d$ từ điểm $F$ đến mặt phẳng $(EIJ)$ theo $a$.

**A.** $d=\dfrac{24\sqrt{29}.a}{29}$. **B.** $d=\dfrac{12\sqrt{29}.a}{29}$. **C.** $d=\dfrac{6\sqrt{29}.a}{29}$. **D.** $d=\dfrac{8\sqrt{29}.a}{29}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




**Cách 1:** Vì $EF$ vuông góc với $EG$, $EG$ vuông góc với $EH$ nên $EG\perp(EFH)$. Gọi K là trung điểm của $EF$ suy ra $IK\perp(EFH)$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là hình chiếu của $K$ trên $EJ$ và $IM$ ta có $d\left(K,\left(EIJ\right)\right)=KN$. Ta có: $d=\left(F,\left(EIJ\right)\right)=2d\left(K,\left(EIJ\right)\right)=2KN$.

Trong tam giác $EKJ$ vuông tại $K$ và tam giác $IKM$ vuông tại $K$ ta có:

$$\frac{1}{KN^2}=\frac{1}{KM^2}+\frac{1}{KI^2}=\frac{1}{KJ^2}+\frac{1}{KE^2}+\frac{1}{KI^2}=\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{36a^2}=\frac{29}{144a^2}\Rightarrow KN=\frac{12\sqrt{29}}{29}a.$$

Vậy $d=\dfrac{24\sqrt{29}.a}{29}$..

**Cách 2:** Vì $EF$ vuông góc với $EG$, $EG$ vuông góc với $EH$ nên $EG\perp(EFH)$. Gọi $K$ là trung điểm của $EF$ suy ra $IK\perp(EFH)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ ta có:

$K\left(0;0;0\right),I\left(0;0;4a\right),E\left(3a;0;0\right),J\left(0;6a;0\right)$.

Phương trình mặt phẳng $\left(EIJ\right):\dfrac{x}{3a}+\dfrac{y}{6a}+\dfrac{z}{4a}=1\Leftrightarrow 4x+2y+3z-12a=0$.

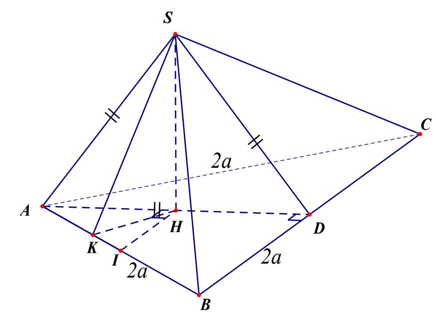
$$d=\left(F,\left(EIJ\right)\right)=2d\left(K,\left(EIJ\right)\right)=2\frac{12a}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{24a}{\sqrt{29}}=\frac{24\sqrt{29}a}{29}.$$

**Câu 413:** **[THPT Nguyễn Huệ-Huế]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $D$ là trung điểm $BC$. Biết $SAD$ là tam giác đều và mặt phẳng $(SAD)$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Tính khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(SAB)$.

**A.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{7}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{13}a}{13}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{13}a}{7}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(SAB)$ là $d\left(C,(SAB)\right)$.

Ta có công thức thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}S_{SAB}.d\left(C,(SAB)\right)$ do đó $d\left(C,(SAB)\right)=\frac{3V}{S_{SAB}}$.

* Tính $V$:

+ Gọi $H$ là trung điểm $AD$, $\Delta SAD$ đều $\Rightarrow SH\perp AD$ mà $(SAD)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AD $\Rightarrow$ $SH\perp(ABC)$.

+ $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ (vì $SH=AD.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{2}$).

* Tính $S_{SAB}$:

+ Đoạn $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}=2a$.

+ Áp dụng công thức Hê-rông $S_{SAB}=\sqrt{p(p-SA)(p-AB)(p-SB)}$.

(với $p=\frac{SA+AB+SB}{2}=\frac{a\sqrt{3}+2a+2a}{2}=\frac{\left(4+\sqrt{3}\right)a}{2}$, $SA=a\sqrt{3}$, $AB=2a$, $SB=2a$) ta được

$\sqrt{\frac{\left(4+\sqrt{3}\right)a}{2}.\frac{\left(4-\sqrt{3}\right)a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}.\sqrt{13}}{4}$.

* Vậy khoảng cách $d\left(C,(SAB)\right)=\frac{3V}{S_{SAB}}=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}\sqrt{13}}{4}}=\frac{6a}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.

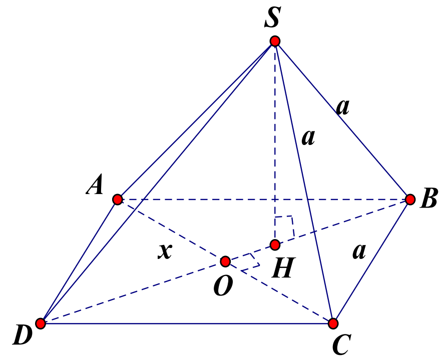
**Câu 414:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a$. $SA=SB=SC=a$, Cạnh $SD$ thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

**A.** $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

**Chọn D.**




Khi $SD$ thay đổi thi $AC$ thay đổi. Đặt $AC = x$ .Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $SA = SB = SC$ nên chân đường cao $SH$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

$\Rightarrow H \in BO$.

Ta có $OB = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}OB.AC = \frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}.$$

$$HB = R = \frac{a.a.x}{4S_{ABC}} = \frac{a^2x}{4.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}.$$

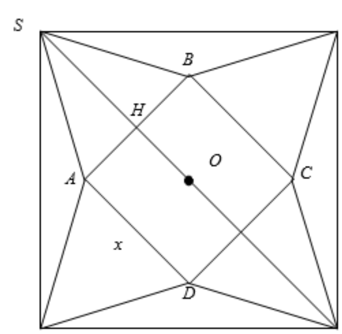
$$= \frac{1}{3}a\left(x.\sqrt{3a^2 - x^2}\right) \le \frac{1}{3}a\left(\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2}\right) = \frac{a^3}{2}.$$

**Câu 415:** **[TTGDTX Cam Ranh - Khánh Hòa]** Người ta cắt một tờ giấy hìnhvuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp.Tính cạnh đáy của khối chóp để thể tích lớn nhất.

**A.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**




Từ giả thiết ta có hình vẽ.

Gọi $S.ABCD$ là hình chóp thoả yêu cầu bài.

Gọi $H$ là trung điể m $AB$, $O$ là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta đặt $AB = x, x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]. \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}-x}{2}$, $OH = \frac{x}{2}$.

Ta có: $SO = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1-x\sqrt{2}}{2}}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-x\sqrt{2}}{2}}.\frac{x^2}{4} = \frac{1}{12}.\sqrt{\frac{x^4 - x^5\sqrt{2}}{2}}$.

$V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$ đạt giá trị lớn nhất trong $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$f'(x) = 4x^3 - 5x^4\sqrt{2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$.

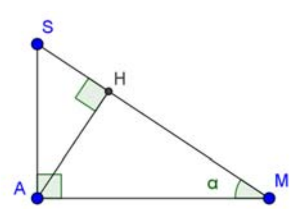
$f(0) = 0$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{64}{3125}$.Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

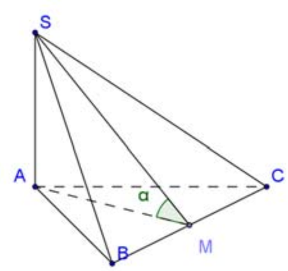
**Câu 416:** [THPT Quoc Gia 2017] Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A$, $SA$ vuông góc với đáy, khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $3$. Gọi $\alpha$ là góc giữa mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$, tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

**A.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Gọi $M$ là trung điểm $BC$, $H$ là giao điểm của đường thẳng qua $A$ và vuông góc với $SM$. Ta được:

Góc giữa mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ là $\widehat{SMA}$.

$AM \frac{3}{\sin\alpha}$; $SA = \frac{3}{\cos\alpha}$; $AM = \frac{1}{2}BC$..

Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.AM^2.SA = \frac{9}{\sin^2\alpha.\cos\alpha}$.

Thể tích khối chóp nhỏ nhất khi $\sin^2\alpha.\cos\alpha$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x)=\sin^2 x.\cos x=\cos x-\cos^3 x$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

$f'(x)=-\sin x+3\cos x.\sin x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Suy ra $\sin^2\alpha.\cos\alpha$ lớn nhất khi $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$..

**Câu 417:** **[THPT Chuyên SPHN]** Tháp Eiffel ở Pháp cao $300\,\text{m}$, được làm hoàn toàn bằng sắt và nặng khoảng $8.000.000\,\text{kg}$. Người ta làm một mô hình thu nhỏ của tháp với cùng chất liệu và cân nặng khoảng $1\,\text{kg}$. Hỏi chiều cao của mô hình là bao nhiêu?

**A.** $1,5\,\text{m}$. **B.** $2\,\text{m}$. **C.** $3\,\text{m}$. **D.** $0,5\,\text{m}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

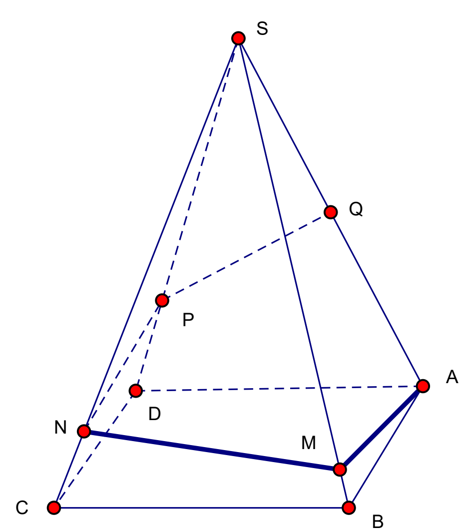
Xét phép vị tự với tâm là đỉnh của tháp và tỉ số vị tự $k$. Giả sử phép vị tự biến tháp thành mô hình như đề bài. Gọi $V_1$, $V_2$ lần lượt là thể tích của tháp và thể tích mô hình.

Ta có: $\dfrac{1}{8000000}=\dfrac{V_2}{V_1}=k^3$ (do cùng một loại sắt nên cùng khối lượng riêng).

$\Rightarrow k=\dfrac{1}{200}$.

Do chiều cao của tháp là $300\,\text{m}$ nên mô hình có chiều cao $h=300.\dfrac{1}{200}=1,5\,\text{m}$.

**Câu 418:** **[Cụm 6 HCM]** Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một ngọn tháp đèn lộng lẫy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA=600$ mét, $\widehat{ASB}=15^\circ$. Do có sự cố đường dây điện tại điểm $Q$ (là trung điểm của $SA$) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ $A$ đến $Q$ gồm bốn đoạn thẳng: $AM$, $MN$, $NP$, $PQ$ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ $A$ đến $Q$ ngắn nhất. Tính tỷ số $k=\dfrac{AM+MN}{NP+PQ}$.



**A.** $k=\frac{5}{3}$. **B.** $k=\frac{3}{2}$. **C.** $k=\frac{4}{3}$. **D.** $k=2$.

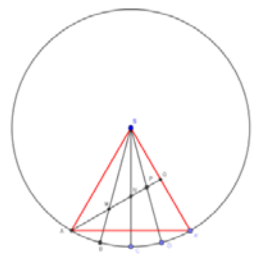
**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Giả sử trải các mặt hình chóp đều trên đường tròn tâm $S$ và bán kính $R=SA$. Ta có $\Delta SAA'$ có $\widehat{ASA'}=15^\circ.4=60^\circ \Rightarrow \Delta SAA'$ đều.

Mà đoạn đường $AQ$ ngắn nhất khi $A$, $M$, $N$, $P$, $Q$ thẳng hàng.Khi đó $N$ là trọng tâm $\Delta SAA'$.

Suy ra $k=\frac{AM+MN}{NP+PQ}=\frac{AN}{NQ}=2$.

.

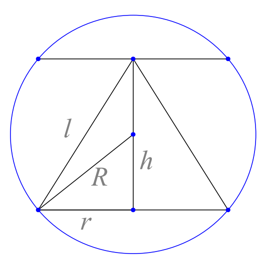
## Chương 14. Khối tròn xoay

**Câu 419:** **[Sở Hải Dương]** Cho hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ song song với nhau và cắt một mặt cầu tâm $O$ bán kính $R$ tạo thành hai đường tròn có cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai đường tròn và đáy trùng với đường tròn còn lại. Tính khoảng cách giữa $(P)$ và $(Q)$ để diện tích xung quanh hính nón đó là lớn nhất.

**A.** $R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $2R\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**



.

Ta có $r=\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}$, $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{R^2+\frac{3h^2}{4}}$.

$S_{xq}=\pi rl=\pi\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}\sqrt{R^2+\frac{3h^2}{4}}=\pi\sqrt{-\frac{3}{16}h^4+\frac{R^2}{2}h^2+R^4}$ .

Xét $f(h)=-\frac{3}{16}h^4+\frac{R^2}{2}h^2+R^4$ $(0<h<2R)$.

Ta có $f'(h)=-\frac{3}{4}h^3+R^2h,\ f'(h)=0\Leftrightarrow h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

| $h$ | $0$ | | $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ | | $2R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(h)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(h)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

.

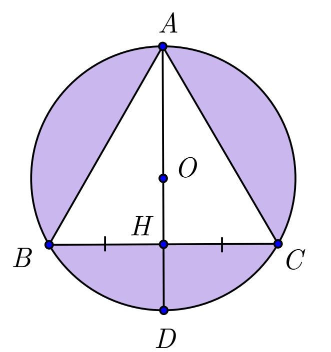
Khi đó $f(h)$ đạt giá trị lớn nhất tại $h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Do đó $S_{xq}$ đạt giá trị lớn nhất khi $h=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 420: [2H2-1.3-4] [Sở GD&ĐT Bình Phước]** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$ và nội tiếp trong đường tròn tâm $y=e^{\sin 2x}$., $AD$ là đường kính của đường tròn tâm $O$.Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên dưới) quy quanh đường thẳng $AD$ bằng.

**A.** $\frac{23\pi a^3\sqrt{3}}{126}$. **B.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




.

Khi quay tam giác $ABC$ quanh trục $AD$ được khối nón có thể tích là:

$$N=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi.HC^2.AH=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Khi quay đường tròn tâm $O$ quanh trục $AD$ được khối cầu có thể tích là:

$$V=\frac{4}{3}\pi.R^3=\frac{4}{3}\pi.AO^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}.$$

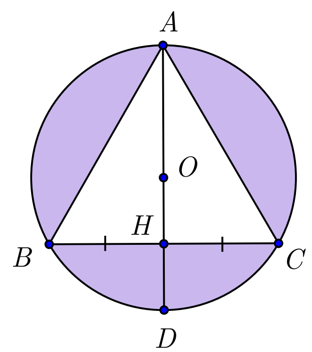
**Thể** tích khối tròn xoay cần tìm: $(S)\Leftrightarrow d\left(I;(ABC)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$..

**Câu 421: [2H2-1.3-4] [Sở GD&ĐT Bình Phước]** Cho tam giác $ABC$ đều cạnh $a$ và nội tiếp trong đường tròn tâm $y=e^{\sin 2x}$., $AD$ là đường kính của đường tròn tâm $O$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên dưới) quy quanh đường thẳng $AD$ bằng.

**A.** $\frac{23\pi a^3\sqrt{3}}{126}$. **B.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




.

Khi quay tam giác $ABC$ quanh trục $AD$ được khối nón có thể tích là:

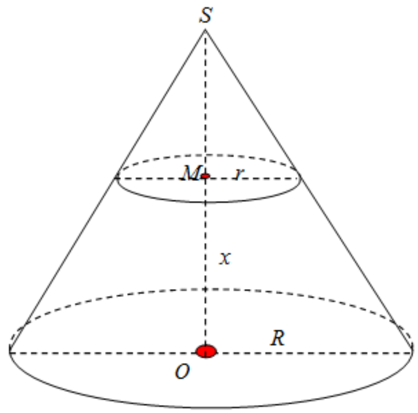
$$N=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi.HC^2.AH=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}.$$

Khi quay đường tròn tâm $O$ quanh trục $AD$ được khối cầu có thể tích là:

$$V=\frac{4}{3}\pi.R^3=\frac{4}{3}\pi.AO^3=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}.$$

**Thể** tích khối tròn xoay cần tìm: $(S)\Leftrightarrow d\left(I;(ABC)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$..

**Câu 422: [2H2-1.3-4] [THPT Lệ Thủy-Quảng Bình]** Gọi $V_1$ là thể tích hình nón $(N_1)$ có đỉnh $S$, đường cao $SO=h$ và đáy là hình tròn $(O;R)$. Trên đoạn $SO$ lấy điểm $M$ sao cho $OM=x(0<x<h)$. Mặt phẳng $(P)$ qua $M$ và vuông góc với $SO$ cắt hình nón $(N_1)$ theo một đường tròn $(M;r)$. Gọi $V_2$ là thể tích hình nón đỉnh $O$ với đáy là hình tròn $(M;r)$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$.




**A.** $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{4}{81}$. **B.** $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{8}{27}$. **C.** $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{4}{27}$. **D.** $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{16}{81}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có $V_1=\dfrac{1}{3}h\pi R^2$.

Mặt khác $\dfrac{r}{R}=\dfrac{h-x}{h}\Rightarrow r=\dfrac{R(h-x)}{h}$ nên $V_2=\dfrac{1}{3}x\pi\dfrac{R^2(h-x)^2}{h^2}$.

$\Rightarrow\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\dfrac{1}{3}x\pi\dfrac{R^2(h-x)^2}{h^2}}{\dfrac{1}{3}h\pi R^2}=\dfrac{x(h-x)^2}{h^3}$.

Mà ta có $x(h-x)^2=\dfrac{1}{2}2x(h-x)(h-x)\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x+h-x+h-x}{3}\right)^3=\dfrac{1}{2}\dfrac{8h^3}{27}=\dfrac{4h^3}{27}$.

Dấu bằng xảy ra khi $2x=h-x\Leftrightarrow x=\dfrac{h}{3}$.

Khi đó tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{4}{27}$.

Chú ý: Đề này sai khi yêu cầu tính giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V_2}$ do $V_2$ tiến tới $0$ khi $x$ dần tới $0$ thì $\dfrac{V_1}{V_2}$ dần đến vô cùng. Câu này "vận dụng khó"(trên mức vận dụng cao) vì còn phải sửa đề.

**Câu 423: [2H2-2.1-4] [THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Một chiếc hộp hình trụ được dùng để chứa 1 lít dầu. Kích thước hình trụ thỏa điều kiện gì để chi phí về kim loại dùng để sản xuất vỏ hộp là tối thiểu.

**A.** Chiều cao gấp hai lần đường kính đáy. **B.** Chiều cao gấp ba lần bán kính đáy.

**C.** Chiều cao gấp hai lần bán kính đáy. **D.** Chiều cao gấp ba lần đường kính đáy.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi bán kính đáy và chiều cao của chiếc hộp hình trụ lần lượt là $R,h$ điều kiện $R,h>0$.

Chi phí sản xuất hộp phụ thuộc vào diện tích bề mặt của vỏ hộp phải sử dụng. Chi phí nhỏ nhất khi diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đ} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp hình trụ bằng 1 lít nên ta có: $\pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

$\Rightarrow S_{tp} = 2\pi R.\dfrac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \dfrac{2}{R} + 2\pi R^2$.

$S_{tp}{}' = -\dfrac{2}{R^2} + 4\pi R = \dfrac{4\pi R^3 - 2}{R^2}$, Cho $S_{tp}{}' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

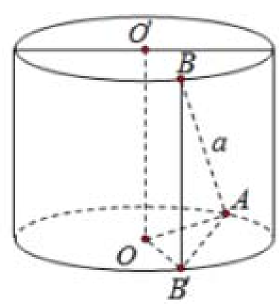
| $R$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_{tp}{}'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S_{tp}$ | $0$ | $\searrow$ | $S_{tp\min}$ | $\nearrow$ | |

.

Vậy $S_{tp}$ nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}} \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2} \Rightarrow \dfrac{h}{R} = \dfrac{1}{\pi R^3} = \dfrac{1}{\pi.\dfrac{1}{2\pi}} = 2 \Rightarrow h = 2R$.

**Câu 424: [2H2-2.1-4] [THPT Hoàng Văn Thụ - Khánh Hòa]** Cho hình trụ $T$ có trục $OO'$. Trên hai đường tròn đáy $(O)$ và $(O')$ lần lượt lấy 2 điểm $A$ và $B$ sao cho $AB = a$ và đường thẳng $AB$ tạo với đáy hình trụ góc $60^o$. Gọi hình chiếu của $B$ trên mặt phẳng đáy chứa đường tròn $(O)$ là $B'$. Biết rằng $\widehat{AOB} = 120^o$. Tính khoảng cách $d$ giữa hai đường thẳng $AB$ và $OO'$..

$d = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$..




**A.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$..

**B.** .

**C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{16}$..

**D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$..

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Xét tam giác $BB'A$ vuông tại $B'$ có: $BB' = AB.\sin\widehat{BAB'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AB = \dfrac{a}{2}$.

Mặt phẳng $(ABB')$ chứa $AB$ và song song $OO'$, nên $d(AB,O'O) = d(O,(ABB')) = d(O,AB)$.

Xét tam giác $OAB'$ cân tại $O$, có góc $\widehat{AOB'} = 120^o$, áp dụng định lý cos ta có:

$AB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 120^o = 3R^2 \Rightarrow OA = R = \dfrac{a\sqrt{12}}{12}$.

Gọi $M$ là trung điểm $AB$, thì $OM = \sqrt{OA^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{12} = d$.

**Câu 425:** **[2H2-2.1-4]** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Một chiếc hộp hình trụ được dùng để chứa 1 lít dầu. Kích thước hình trụ thỏa điều kiện gì để chi phí về kim loại dùng để sản xuất vỏ hộp là tối thiểu.

**A.** Chiều cao gấp hai lần đường kính đáy. **B.** Chiều cao gấp ba lần bán kính đáy.

**C.** Chiều cao gấp hai lần bán kính đáy. **D.** Chiều cao gấp ba lần đường kính đáy.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi bán kính đáy và chiều cao của chiếc hộp hình trụ lần lượt là $R, h$ điều kiện $R, h > 0$.

Chi phí sản xuất hộp phụ thuộc vào diện tích bề mặt của vỏ hộp phải sử dụng. Chi phí nhỏ nhất khi diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

Theo giả thiết thể tích chiếc hộp hình trụ bằng 1 lít nên ta có: $\pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

$\Rightarrow S_{tp} = 2\pi R.\dfrac{1}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \dfrac{2}{R} + 2\pi R^2$.

$S_{tp}' = -\dfrac{2}{R^2} + 4\pi R = \dfrac{4\pi R^3 - 2}{R^2}$, Cho $S_{tp}' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$.

| $R$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_{tp}'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $S_{tp}$ | $0$ | $\searrow$ | $S_{tp\min}$ | $\nearrow$ | |

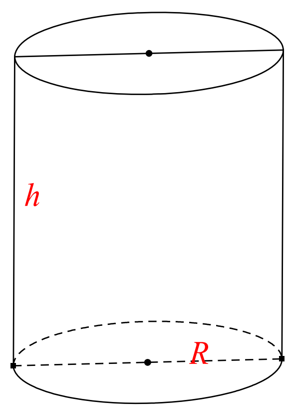
Vậy $S_{tp}$ nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}} \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi R^2} \Rightarrow \dfrac{h}{R} = \dfrac{1}{\pi R^3} = \dfrac{1}{\pi.\dfrac{1}{2\pi}} = 2 \Rightarrow h = 2R$.

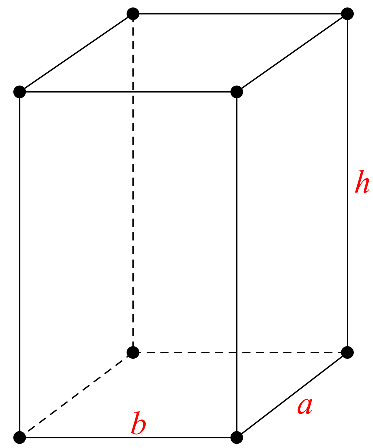
**Câu 426:** **[2H2-2.2-4]** **[THPT chuyên Thái Bình]** Một nhà sản xuất sữa có hai phương án làm hộp sữa. Hộp sữa có dạng khối hộp chữ nhật hoặc hộp sữa có dạng khối trụ. Nhà sản xuất muốn chi phí bao bì càng thấp càng tốt(tức diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất), nhưng vẫn phải chứa được một thể tích xác định là $V$ cho trước. Khi đó diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất trong hai phương án là.

**A.** $3\sqrt[3]{6V^2}$. **B.** $\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **C.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **D.** $6\sqrt[3]{V^2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Trường hợp 1: Hộp sữa hình trụ.

Thể tích không đổi $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi R^2}, S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \dfrac{2V}{R}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bộ ba số dương $2\pi R^2, \dfrac{V}{R}, \dfrac{V}{R}$.

Ta có $S_{tp} = 2\pi R^2 + \dfrac{V}{R} + \dfrac{V}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{V}{R}.\dfrac{V}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (*).

Trường hợp 2: Hộp sữa hình hộp chữ nhật.

Thể tích không đổi .

$$V = abh \Rightarrow h = \frac{V}{ab}; S_{tp} = 2ab + 2(a+b)h = 2ab + 2a.\frac{V}{ab} + 2b.\frac{V}{ab} = 2\left(ab + \frac{V}{b} + \frac{V}{a}\right).$$

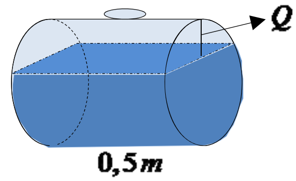
Áp dụng bất đẳng thức Cau chy cho bộ ba số dương $ab; \dfrac{V}{a}; \dfrac{V}{b}$.

Ta có $S_{tp} \geq 2.3\sqrt[3]{ab.\dfrac{V}{a}.\dfrac{V}{b}} = 6\sqrt[3]{V^2}$ (**).

Xét hai kết quả ta thấy (*) nhỏ hơn.

Vậy diện tích toàn phần của hộp sữa bé nhất là $S_{tp} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (đvdt).

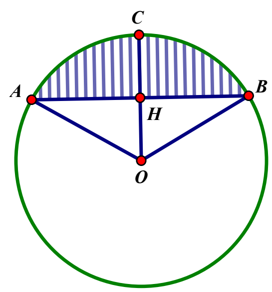
**Câu 427:** **[2H2-2.3-4]** **[THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT]** Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị $m^3$).




**A.** $12,637m^3$. **B.** $8,307m^3$. **C.** $11,781m^3$. **D.** $114,923m^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Nhận xét $OH = CH = 0,5 = \frac{R}{22} = \frac{OB}{2}$ suy ra $\Delta OHB$ là tam giác nửa đều.

$\Rightarrow \widehat{HOB} = 60° \Rightarrow \widehat{AOB} = 120°$.

Suy ra diện tích hình quạt $OAB$ là: $S = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi$.

Mặt khác: $S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta HOB} = S_{\Delta BOC} = \frac{OB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ($\Delta BOC$ đều).

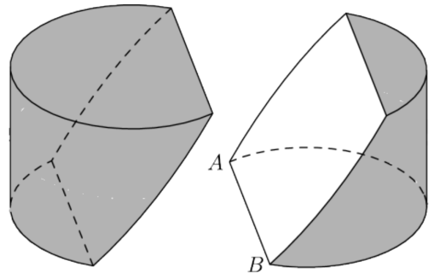
Vậy diện tích hình viên phân cung AB là $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích dầu được rút ra: $V_1 = 5.\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Thể tích dầu ban đầu: $V = 5.\pi.1^2 = 5\pi$.

Vậy thể tích còn lại: $V_2 = V - V_1 \simeq 12,637m^3$.

**Câu 428:** **[2H2-2.4-4]** **[THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5]** Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm $A,B$ sao cho cung $AB$ có số đo $120^0$. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua $A,B$ và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Tính diện tích $S$ của thiết diện thu được.




**A.** $S=20\pi$. **B.** $S=20\pi+30\sqrt{3}$. **C.** $S=12\pi+18\sqrt{3}$. **D.** $S=20\pi+25\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi giao tuyến của mặt phẳng cắt với đáy còn lại là đoạn $CD$.

Kẻ các đường sinh $CC', DD'$. Khi đó $ABD'C'$ là hình chữ nhật.

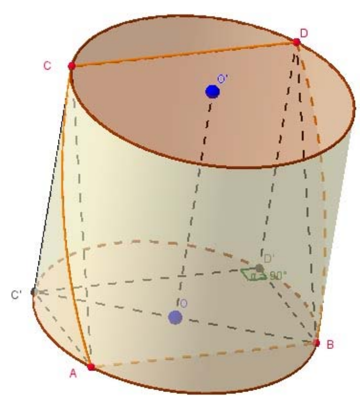
Góc $OC'D'=120^0 \Rightarrow C'D'=6\sqrt{3}$; $BD'=6$; $\widehat{AOC'}=60^o$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa mặt cắt và mặt đáy.

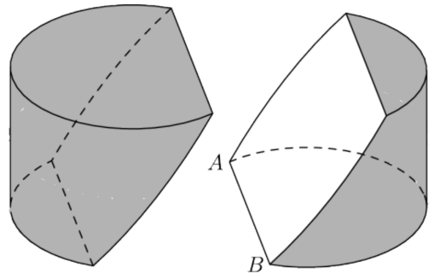
$$\cos\varphi=\cos\widehat{DBD'}=\frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{3}{5}.$$

Thiết diện cần tìm có hình chiếu xuống đường tròn đáy tâm $O$ là phần hình nằm giữa cung $C'D'$ và cung $AB$. Áp dụng công thức hình chiếu $S=\dfrac{S_{HChieu}}{\cos\alpha}$; Và

$$S_{HChieu}=2\left(S_{AOB}+S_{\widehat{AOC'}}\right)=2\left(\frac{1}{2}.6.6.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{60}{360}.\pi.36\right)=18\sqrt{3}+12\pi$$. Do đó $S=20\pi+30\sqrt{3}$..




**Câu 429: [2H2-2.4-4] [THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5]** Một khối gỗ có hình trụ với bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 8. Trên một đường tròn đáy nào đó ta lấy hai điểm $A,B$ sao cho cung $AB$ có số đo $120^0$. Người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua $A,B$ và tâm của hình trụ (tâm của hình trụ là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy) để được thiết diện như hình vẽ. Tính diện tích $S$ của thiết diện thu được.




**A.** $S = 20\pi$. **B.** $S = 20\pi + 30\sqrt{3}$. **C.** $S = 12\pi + 18\sqrt{3}$. **D.** $S = 20\pi + 25\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi giao tuyến của mặt phẳng cắt với đáy còn lại là đoạn $CD$.

Kẻ các đường sinh $CC', DD'$. Khi đó $ABD'C'$ là hình chữ nhật.

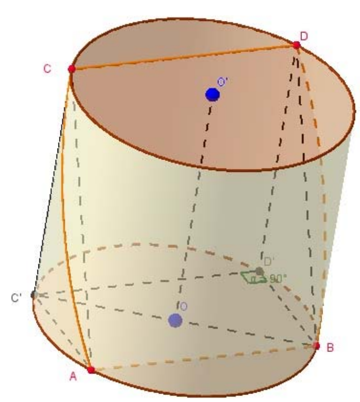
Góc $OC'D' = 120^0 \Rightarrow C'D' = 6\sqrt{3}$; $BD' = 6$; $\widehat{AOC'} = 60^o$.

Gọi $\varphi$ là góc giữa mặt cắt và mặt đáy.

$$\cos\varphi = \cos\widehat{DBD'} = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{3}{5}.$$

Thiết diện cần tìm có hình chiếu xuống đường tròn đáy tâm $O$ là phần hình nằm giữa cung $C'D'$ và cung $AB$. Áp dụng công thức hình chiếu $S = \frac{S_{HChieu}}{\cos\alpha}$; Và

$S_{HChieu} = 2\left(S_{AOB} + S_{\widehat{AOC'}}\right) = 2\left(\frac{1}{2}.6.6.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{60}{360}.\pi.36\right) = 18\sqrt{3} + 12\pi$. Do đó $S = 20\pi + 30\sqrt{3}$..



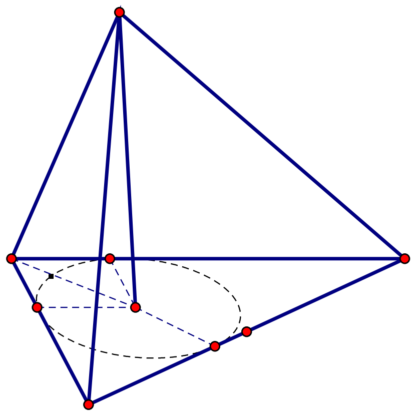

**Câu 430: [2H2-3.1-4] [THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$ với $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình chiếu $H$ của $S$ trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là.

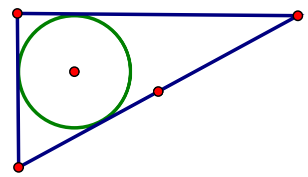
**A.** $R = a.\frac{\sqrt{118}}{2}$. **B.** $R = a.\frac{\sqrt{118}}{8}$. **C.** $R = a.\sqrt{118}$. **D.** $R = a.\frac{\sqrt{118}}{4}$.

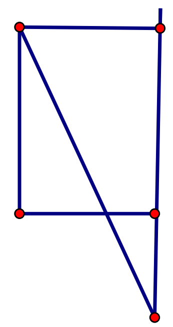
**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

**Hướng dẫn giải.**







Gọi $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. Tính được $r = \dfrac{AB.AC}{AB + AC + BC} = a$.

Tính được $AH = a\sqrt{2}$ và $MH = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác $SAH$ vuông tại $H$ suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$..

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$ và $\Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Gọi $O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Suy ra $O \in \Delta$.

Ta có:

$OC^2 = OS^2 \Leftrightarrow OM^2 + MC^2 = SK^2 + OK^2$.

$\Leftrightarrow OM^2 + \dfrac{25a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} + (OM + a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow OM = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$.

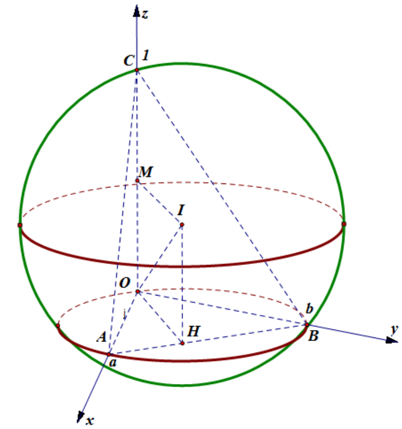
Suy ra $R = OC = \dfrac{\sqrt{118}}{4}a$.

**Câu 431: [2H2-3.1-4] [THPT Đặng Thúc Hứa]** Cho ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $C$ là điểm cố định trên $Oz$, đặt $OC = 1$, các điểm $A$, $B$ thay đổi trên $Ox$, $Oy$ sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$..

**A.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a,b>0$. Vì $OA+OB=OC \Leftrightarrow a+b=1$.

Gọi $(I;R)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ và $H$ là hình chiếu của $I$ lên mặt phẳng $Oxy$. Khi đó, $H$ cách đều ba đỉnh $O,A,B$ nên nó là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB$.

Áp dụng định lý hàm số Sin cho $OAB$, có.

$$\begin{cases} OH = \dfrac{AB}{2\sin\widehat{AOB}} = \dfrac{AB}{2\sin 90^\circ} = \dfrac{AB}{2} \\ AB = \sqrt{OA^2+OB^2} = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Gọi $M$ là trung điểm của $SC$. Vì $IO=IC$ nên $\Delta IOC$ cân tại $I$.

$\Rightarrow IM \perp OC \Rightarrow IMOH$ là hình chữ nhật.

Do đó $R=\sqrt{IM^2+OM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{a^2+b^2}{4}}$ (Do $OH=IM$).

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)} \overset{BCS}{\geq} \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $\text{Min } R = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

**Câu 432:** **[2H2-3.1-4]** **[THPT chuyên Lương Thế Vinh]** Một hình hộp chữ nhật $P$ nội tiếp trong một hình cầu có bán kính $R$. Tổng diện tích các mặt của $P$ là $384$ và tổng độ dài các cạnh của $P$ là $112$. Bán kính $R$ của hình cầu là.

**A.** $14$. **B.** $10$. **C.** $12$. **D.** $8$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi chiều dài, rộng, cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là $a,b,c$.

Đường chéo hình hộp chữ nhật bằng: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Tổng diện tích các mặt của $P$ là $384$ nên $2ab+2ac+2bc=384$.

Tổng độ dài các cạnh của $P$ là $112$ nên $4a+4b+4c=112 \Rightarrow a+b+c=28$.

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}=\sqrt{28^2-384}=20$.

Vậy bán kính mặt cầu bằng $10$.

**Câu 433:** **[2H2-3.1-4]** **[THPT chuyên Hưng Yên lần 2]** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AC=b$, $AB=c$, $\widehat{BAC}=\alpha$. Gọi $B'$, $C'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$ lên $SB$, $SC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ theo $b$, $c$, $\alpha$..

**A.** $R=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

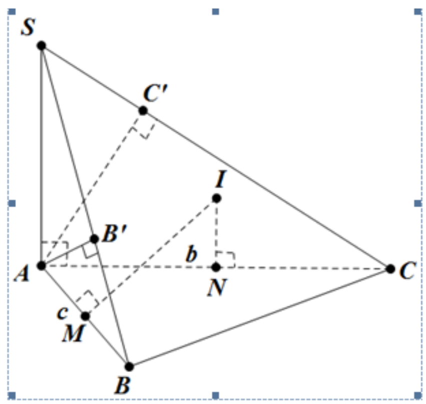
**B.** $R=2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$.

**C.** $R=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

**D.** $R=\dfrac{2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Gọi $M,N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $AC$.

Tam giác $ABB'$ vuông tại $B'$ nên $M$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABB'$, suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABB'$ chính là đường trung trực $\Delta$ của $AB$ (xét trong mp $(ABC)$).

Tam giác $ACC'$ vuông tại $C'$ nên $N$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ACC'$, suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ACC'$ chính là đường trung trực $\Delta_1$ của $AC$ (xét trong mp $(ABC)$).

Gọi $I=\Delta\cap\Delta_1$ thì $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ và $I$ cách đều các điểm $A,B,C,B',C'$ nên $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$.

Gọi $R$ là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$ thì $R$ chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

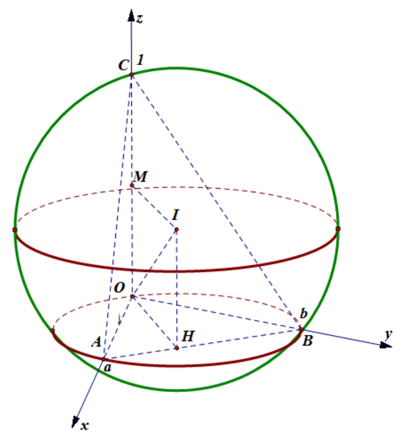
Ta có $R=\dfrac{AB.AC.BC}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{c.b.BC}{4.\frac{1}{2}bc.\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc.\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

**Câu 434:** **[2H2-3.1-4]** **[THPT Đặng Thúc Hứa]** Cho ba tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $C$ là điểm cố định trên $Oz$, đặt $OC=1$, các điểm $A$, $B$ thay đổi trên $Ox$, $Oy$ sao cho $OA+OB=OC$. Tìm giá trị bé nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$..

**A.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Đặt $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a,b>0$. Vì $OA+OB=OC \Leftrightarrow a+b=1$.

Gọi $(I;R)$ là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ và $H$ là hình chiếu của $I$ lên mặt phẳng $Oxy$. Khi đó, $H$ cách đều ba đỉnh $O,A,B$ nên nó là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta OAB$.

Áp dụng định lý hàm số Sin cho $OAB$, có.

$$\begin{cases} OH=\dfrac{AB}{2\sin\widehat{AOB}}=\dfrac{AB}{2\sin 90^\circ}=\dfrac{AB}{2} \\ AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow OH=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Gọi $M$ là trung điểm của $SC$. Vì $IO=IC$ nên $\Delta IOC$ cân tại $I$.

$\Rightarrow IM\perp OC \Rightarrow IMOH$ là hình chữ nhật.

Do đó $R=\sqrt{IM^2+OM^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{a^2+b^2}{4}}$ (Do $OH=IM$).

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)}\overset{BCS}{\geq}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b)}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

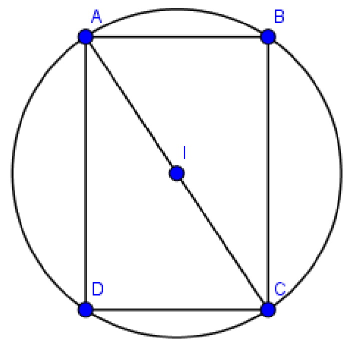
Vậy $\text{Min } R=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

**Câu 435:** **[2H2-3.2-4]** Cho mặt cầu $(S)$ có bán kính $R=a\sqrt{3}$. Gọi $(T)$ là hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên $(S)$ và có thiết diện qua trục của $(T)$ lớn nhất. Tính diện tích toàn phần $S_{tp}$ của $(T)$..

**A.** $S_{tp}=6\pi a^2$. **B.** $S_{tp}=9\pi a^2$. **C.** $S_{tp}=6\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $S_{tp}=9\pi a^2\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Hình vẽ thiết diện qua trục như sau:

Ta có: $AC = 2R = 2a\sqrt{3}$..

Đặt $AD = x,$ ta có: $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{12a^2 - x^2}$ .

Vì thiết diện qua trục là lớn nhất nên $AD.CD$ lớn nhất.

Xét hàm số: $f(x) = x.\sqrt{12a^2 - x^2}, x \in \left[-2a\sqrt{3}; 2a\sqrt{3}\right]$..

Ta có: $f'(x) = \sqrt{12a^2 - x^2} + x.\dfrac{-2x}{2\sqrt{12a^2 - x^2}} = \dfrac{12a^2 - 2x^2}{\sqrt{12a^2 - x^2}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{12a^2 - 2x^2}{\sqrt{12a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$.

Ta có: $f\left(a\sqrt{6}\right) = a\sqrt{6}.\sqrt{12a^2 - \left(a\sqrt{6}\right)^2} = a\sqrt{6}.a\sqrt{6} = 6a^2$.

$f\left(\pm 2a\sqrt{3}\right) = 0$.

Vậy hình trụ có: bán kính đáy $R = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; chiều cao $h = AD = a\sqrt{6}$.

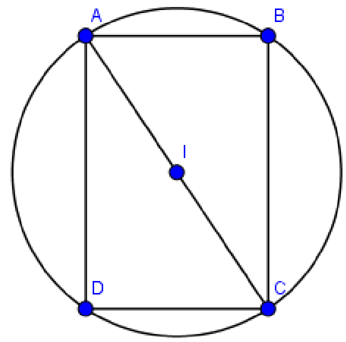
$S_{tp} = 2\pi r(r+h) = 2\pi.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2} + a\sqrt{6}\right) = 9\pi a^2$.

**Câu 436:** **[2H2-3.2-4]** Cho mặt cầu $(S)$ có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Gọi $(T)$ là hình trụ có hai đường tròn đáy nằm trên $(S)$ và có thiết diện qua trục của $(T)$ lớn nhất. Tính diện tích toàn phần $S_{tp}$ của $(T)$..

**A.** $S_{tp} = 6\pi a^2$. **B.** $S_{tp} = 9\pi a^2$. **C.** $S_{tp} = 6\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $S_{tp} = 9\pi a^2\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Hình vẽ thiết diện qua trục như sau:

Ta có: $AC = 2R = 2a\sqrt{3}$..

Đặt $AD = x$, ta có: $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{12a^2 - x^2}$.

Vì thiết diện qua trục là lớn nhất nên $AD.CD$ lớn nhất.

Xét hàm số: $f(x) = x.\sqrt{12a^2 - x^2}, x \in \left[-2a\sqrt{3}; 2a\sqrt{3}\right]$..

Ta có: $f'(x) = \sqrt{12a^2 - x^2} + x.\dfrac{-2x}{2\sqrt{12a^2 - x^2}} = \dfrac{12a^2 - 2x^2}{\sqrt{12a^2 - x^2}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{12a^2 - 2x^2}{\sqrt{12a^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$.

Ta có: $f\left(a\sqrt{6}\right) = a\sqrt{6}.\sqrt{12a^2 - \left(a\sqrt{6}\right)^2} = a\sqrt{6}.a\sqrt{6} = 6a^2$.

$f\left(\pm 2a\sqrt{3}\right) = 0$.

Vậy hình trụ có: bán kính đáy $R = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; chiều cao $h = AD = a\sqrt{6}$.

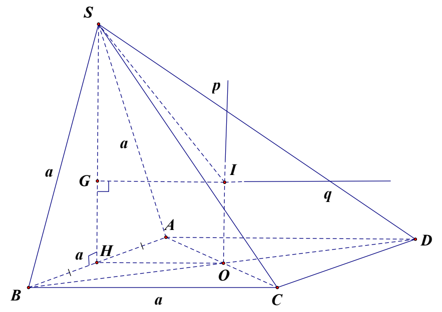
$S_{tp} = 2\pi r(r + h) = 2\pi.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2} + a\sqrt{6}\right) = 9\pi a^2$.

**Câu 437:** **[2H2-3.5-4]** **[BTN 173]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích $V$ của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

**A.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **B.** $V = \dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $V = \dfrac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi $O = AC \cap BD$.

Dựng đường thẳng p đi qua điểm $O$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

=> $p$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi $G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $SAB$.

Dựng đường thẳng $q$ đi qua $G$ và vuông góc với mặt phẳng $(SAB)$ cắt $p$ tại $I$.

=> $q$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $SAB$.

Khi đó, $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Thật vậy, $I \in p \Rightarrow IA = IB = IC = ID(1)$.

$I \in q \Rightarrow IA = IB = IS(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $IA = IB = IC = ID =$ nên $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$OH$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ nên $OH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} = GI$.

Vì $G$ là trọng tâm của tam giác $SAC$ nên $SG = \frac{2}{3}SH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác $SGI$ vuông tại $G$ nên $SI^2 = SG^2 + IG^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{12} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

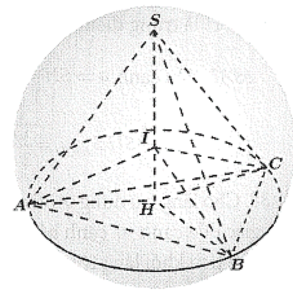
Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

**Câu 438: [2H2-3.5-4]** [BTN 169] Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 4$, đường cao $SH = 3$. Tính bán kính $r$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

**A.** $r = 3$. **B.** $r = 2$. **C.** $r = \frac{7}{3}$. **D.** $r = \frac{8}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi các điểm như hình vẽ bên. Trong đó $H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều suy ra $SH \perp (ABC)$, và $HA = HB = HC = \sqrt{7}$. Điểm $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Trong tam giác vuông $IHB$ ta có $IH = \sqrt{r^2 - 7}$.

Khi đó.

$$SH = SI + IH = r + \sqrt{r^2 - 7} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - r > 0 \\ r^2 - 7 = r^2 - 6r + 9 \end{cases}.$$

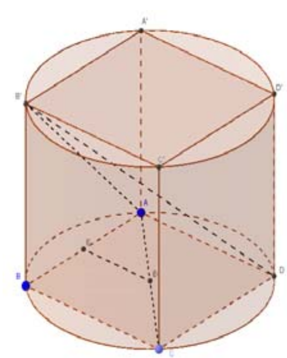
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r < 3 \\ r = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{8}{3}.$$

**Câu 439:** **[2H2-3.5-4]** **[THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp hình trụ cho trước, khoảng cách từ tâm hình trụ đến $(ABB'A')$ là $3$, góc giữa $DB'$ và $(ABB'A')$ bằng $30^\circ$. Biết bán kính hình trụ bằng $5$, tỉ số thể tích khối hộp và khối cầu ngoại tiếp hình hộp là?

**A.** $\dfrac{\sqrt{12}}{3\pi}$. **B.** $\dfrac{10}{3\pi}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{3\pi}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**



Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp trong hình trụ nên là hình hộp chữ nhật. Gọi $O$ là tâm $ABCD$, $E$ là trung điểm $AB$.

Ta có: $OE = 3$, $OA = 5 \Rightarrow AD = 6$.

Xét $\Delta AEO$ vuông tạo $E$, có: $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

Vì $AD \perp (ABB'A')$ nên $AB'$ là hình chiếu vuông góc của $DB'$ lên $(ABB'A') \Rightarrow \widehat{DB'A} = 60^\circ$.

Xét tam giác $AB'D$ vuông tại $A$ có: $AB' = AD\tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$, $B'D = \sqrt{AD^2 + AB'^2} = 12$.

Xét tam giác $ABB'$ vuông tại $B$ có: $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2\sqrt{11}$.

Thể tích khối hộp là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB'.S_{ABCD} = 2\sqrt{11}.8.6 = 96\sqrt{11}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $R = \dfrac{B'D}{2} = 6$.

Thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi$.

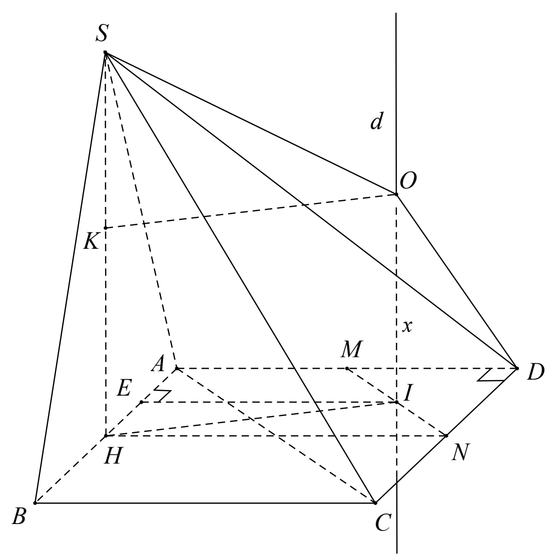
Vậy tỉ số thể tích khối hộp và khối cầu ngoại tiếp hình hộp là $\dfrac{\sqrt{11}}{3\pi}$.

**Câu 440: [2H2-3.5-4]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AD, DC$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

**A.** $R = \dfrac{a\sqrt{102}}{6}$. **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{31}}{4}$. **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$. **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




.

Gọi $I$ là trung điểm của $MN$. Suy ra $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$..

$d$ là đường thẳng qua $I$ và vuông góc với mặt đáy.

$E$ là hình chiếu của $I$ lên $AB$..

$O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. $K$ là hình chiếu của $O$ lên $SH$..

Đặt $OI = x$.

Ta có $DI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. Suy ra $OD = \sqrt{ID^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16} + x^2}$..

$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI$.

$EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}$.

$HI = \sqrt{EI^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{37}}{4}$..

Suy ra $SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2}$.

Vì $O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên: $\begin{array}{l} SO = DO \Rightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = x^2 + 5a \Rightarrow x = \frac{a11}{4\sqrt{3}} \\ \Rightarrow R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}. \end{array}$.

**Câu 441:** **[2H2-3.5-4]** **[TT Tân Hồng Phong]** Cho hình chóp $S.ABCD$ nội tiếp mặt cầu bán kính $R$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng: $T = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 + AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2$.

**A.** $12R^2$. **B.** $20R^2$. **C.** $25R^2$. **D.** $24R^2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi $I$ là tâm mặt cầu $\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R$.

Ta có: $T = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 + AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2$.

$$\begin{array}{l} = \left(\overrightarrow{IS} - \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IS} - \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IS} - \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IS} - \overrightarrow{ID}\right)^2 \\ + \left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{ID}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB}\right)^2 \end{array}.$$

$= 5\left(IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2\right) - \left(\overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)^2$.

$\le 5\left(IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2\right) = 25R^2$.

**Câu 442:** **[2H2-3.5-4]** **[BTN 162]** Cho tứ diện $SABC$, đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $B$ với $AB = 3,\ BC = 4$. Hai mặt bên $(SAB)$ và $(SAC)$ cùng vuông góc với $(ABC)$ và $SC$ hợp với $(ABC)$ góc $45°$. Thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ là:

**A.** $V = \frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** $V = \frac{5\pi\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \frac{25\pi\sqrt{2}}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

**Đáp án D.**

$\Delta ABC:\text{AC}=\sqrt{9+16}=5$.

$(SAB)\perp(ABC),(SAC)\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp(ABC)$.

$\Rightarrow \widehat{SAC}=45^\circ\Rightarrow SA=SC=5$.

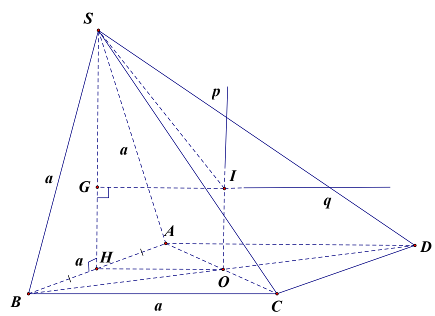
$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{SC}{2}\right)^3=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}.$$

**Câu 443: [2H2-3.5-4] [BTN 173]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích $V$ của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

**A.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **B.** $V=\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$. **D.** $V=\frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi $O=AC\cap BD$.

Dựng đường thẳng p đi qua điểm $O$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

=> $p$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi $G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $SAB$.

Dựng đường thẳng $q$ đi qua $G$ và vuông góc với mặt phẳng $(SAB)$ cắt $p$ tại $I$.

=> $q$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $SAB$.

Khi đó, $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Thật vậy, $I\in p\Rightarrow IA=IB=IC=ID\,(1)$.

$I\in q\Rightarrow IA=IB=IS\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $IA=IB=IC=ID=$ nên $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$OH$ là đường trung bình của tam giác $ABC$ nên $OH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} = GI$.

Vì $G$ là trọng tâm của tam giác $SAC$ nên $SG = \frac{2}{3}SH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác $SGI$ vuông tại $G$ nên $SI^2 = SG^2 + IG^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{12} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

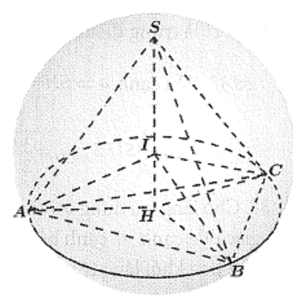
Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

**Câu 444: [2H2-3.5-4]** **[BTN 169]** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 4$, đường cao $SH = 3$. Tính bán kính $r$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

**A.** $r = 3$. **B.** $r = 2$. **C.** $r = \frac{7}{3}$. **D.** $r = \frac{8}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Gọi các điểm như hình vẽ bên. Trong đó $H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều suy ra $SH \perp (ABC)$, và $HA = HB = HC = \sqrt{7}$. Điểm $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Trong tam giác vuông $IHB$ ta có $IH = \sqrt{r^2 - 7}$.

Khi đó.

$$SH = SI + IH = r + \sqrt{r^2 - 7} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - r > 0 \\ r^2 - 7 = r^2 - 6r + 9 \end{cases}.$$

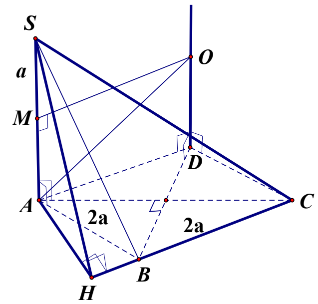
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r < 3 \\ r = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow r = \frac{8}{3}.$$

**Câu 445: [2H2-3.5-4]** **[BTN 167]** CHo hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$; $AB = BC = 2a$; $\widehat{ABC} = 120°$ và cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo $a$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

**A.** $\frac{a\sqrt{17}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Trong $(ABC)$, gọi $D$ là điểm đối xứng của $B$ qua $AC$. Do tam giác $ABC$ cân tại $B$ và $\widehat{ABC} = 120°$ nên các tam giác $ABD$, $DBC$ là các tam giác đều.

Suy ra: $DA = DB = DC = 2a$. Do đó $D$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$..

* Dựng đường thẳng $\Delta$ qua $D$ và song song $SA$ $\Rightarrow \Delta \perp (ABC) \Rightarrow \Delta$ là trục của đường tròn là ngoại tiếp tam giác $ABC$..

Gọi $M$ là trung điểm của $SA$, trong $(SA, \Delta)$, kẻ đường thẳng $d$ qua $M$ và song song $AD$, suy ra $d \perp SA \Rightarrow d$ là trung trực của đoạn $SA$..

Trong $(SA, \Delta)$, gọi $O = d \cap \Delta$. Suy ra $O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$..

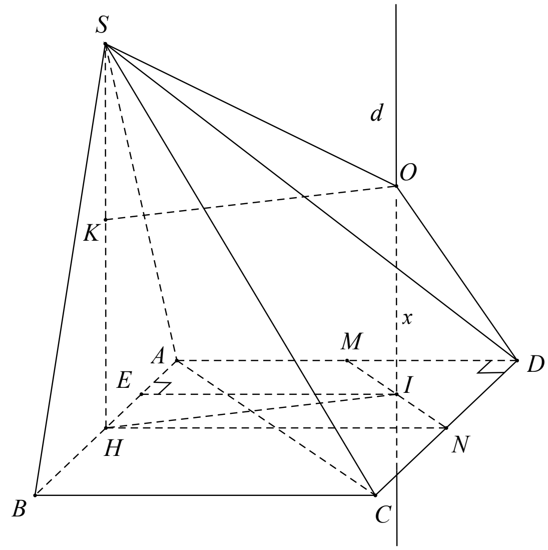
Xét tam giác $OAD$, ta có $R = OA = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} - = \frac{a\sqrt{17}}{2}$..

**Câu 446:** **[2H2-3.5-4]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm các cạnh $AD, DC$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.DMN$.

**A.** $R = \frac{a\sqrt{102}}{6}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{31}}{4}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{39}}{6}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Gọi $I$ là trung điểm của $MN$. Suy ra $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$..

$d$ là đường thẳng qua $I$ và vuông góc với mặt đáy.

$E$ là hình chiếu của $I$ lên $AB$..

$O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.DMN$. $K$ là hình chiếu của $O$ lên $SH$..

Đặt $OI = x$.

Ta có $DI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. Suy ra $OD = \sqrt{ID^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{16} + x^2}$..

$SK = SH - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x; KO = HI$.

$EI = \frac{AM + HN}{2} = \frac{3a}{2}$.

$HI = \sqrt{EI^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{37}}{4}$..

Suy ra $SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2}$.

Vì $O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp nên:

$SO = DO \Rightarrow \frac{49a^2}{16} - a\sqrt{3}x + x^2 = x^2 + 5a \Rightarrow x = \frac{a11}{4\sqrt{3}}$.

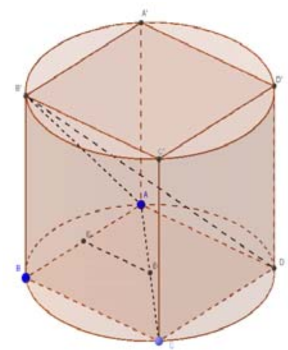
$\Rightarrow R = OD = \frac{a\sqrt{102}}{6}$.

**Câu 447: [2H2-3.5-4] [THPT Chuyên Hà Tĩnh]** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp hình trụ cho trước, khoảng cách từ tâm hình trụ đến $\left(ABB'A'\right)$ là $3$, góc giữa $DB'$ và $\left(ABB'A'\right)$ bằng $30^\circ$. Biết bán kính hình trụ bằng $5$, tỉ số thể tích khối hộp và khối cầu ngoại tiếp hình hộp là?

**A.** $\dfrac{\sqrt{12}}{3\pi}$. **B.** $\dfrac{10}{3\pi}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{3\pi}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{3\pi}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**



Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp trong hình trụ nên là hình hộp chữ nhật. Gọi $O$ là tâm $ABCD$, $E$ là trung điểm $AB$.

Ta có: $OE = 3$, $OA = 5 \Rightarrow AD = 6$.

Xét $\Delta AEO$ vuông tạo $E$, có: $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = 4 \Rightarrow AB = 8$.

Vì $AD \perp (ABB'A')$ nên $AB'$ là hình chiếu vuông góc của $DB'$ lên $(ABB'A') \Rightarrow \widehat{DB'A} = 60^\circ$.

Xét tam giác $AB'D$ vuông tại $A$ có: $AB' = AD\tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$, $B'D = \sqrt{AD^2 + AB'^2} = 12$.

Xét tam giác $ABB'$ vuông tại $B$ có: $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2\sqrt{11}$.

Thể tích khối hộp là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB'.S_{ABCD} = 2\sqrt{11}.8.6 = 96\sqrt{11}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $R = \dfrac{B'D}{2} = 6$.

Thể tích khối cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi$.

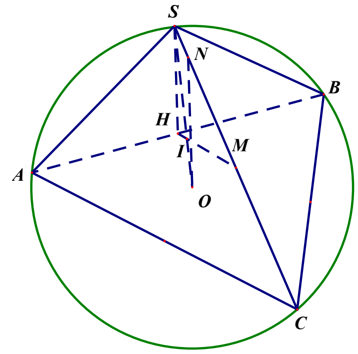
Vậy tỉ số thể tích khối hộp và khối cầu ngoại tiếp hình hộp là $\dfrac{\sqrt{11}}{3\pi}$.

**Câu 448: [2H2-3.5-4] [BTN 172]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên $SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích $V$ của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

**A.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V = \dfrac{5\pi}{3}$. **C.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Gọi $O$ là tâm đường tròn tam giác $ABC$ suy ra $O$ là trọng tâm, $H$ là trung điểm $AB$, kẻ đường thẳng qua $O$ song song $SH$ cắt $SC$ tại $N$ ta được $NO \perp (ABC)$, gọi $M$ là trung điểm $SC$, $HM$ cắt $NO$ tại $I$..

Ta có $HS = HC$ nên $HM \perp SC \Rightarrow IS = IC = IA = IB = r$.

$\angle NIM = \angle HCS = 45^0, \frac{CN}{CS} = \frac{CO}{CH} = \frac{2}{3} \Rightarrow CN = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{6}}{4}, SN = \frac{1}{\sqrt{6}}$ Suy ra

$NM = SM - SN = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Ta có $\Delta NMI$ vuông tại $M$ $\tan 45^0 = \frac{NM}{IM} \Rightarrow IM = NM = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

Suy ra $r = IC = \sqrt{IM^2 + MC^2} = \sqrt{\frac{5}{12}}$.

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Cách khác:
Gọi $P$, $Q$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $SAB$ và $ABC$.

Do các tam giác $SAB$ và $ABC$ là các tam giác đều cạnh bằng 1 nên $P$, $Q$ lần lượt tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

+ Qua $P$ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(SAB)$, qua $O$ dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Hai trục này cắt nhau tại $I$, suy ra $IA = IB = IC = IS$. Vậy $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = IC$.

+ Xét $\Delta IQC$ : $\text{IC} = \sqrt{IG^2 + GC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

**Câu 449:** **[2H2-4.1-4]** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Khi cắt mặt cầu $S(O, R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R=1$ ,tính bán kính đáy $r$ và chiều cao $h$ của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

**A.** $r=\frac{\sqrt{3}}{3},\ h=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{3}}{2},\ h=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{6}}{3},\ h=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{6}}{2},\ h=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

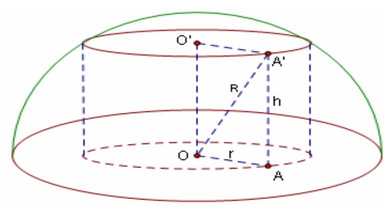
Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của.

O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy.

dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu.Ta có: $h^2+r^2=R^2\ \left(0<h\le R=1\right)\Rightarrow r^2=1-h^2$

.

Thể tích khối trụ là: $V=\pi r^2h=\pi(1-\mathrm{h}^2)\mathrm{h}=f(\mathrm{h})\ \Rightarrow f'(\mathrm{h})=\pi(1-3\mathrm{h}^2)=0\Leftrightarrow \mathrm{h}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



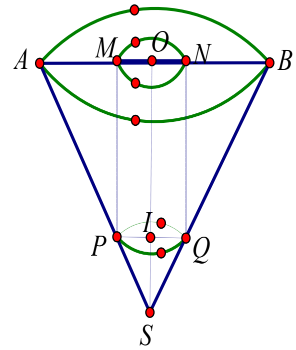

.

| $h$ | 0 | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(h) | | + | 0 | − | |
| f(h) | 0 | ↗ | $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | 0 |

.

Vậy: $\underset{(0;1]}{Max}V=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$ và $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 450:** **[2H2-4.1-4]** **[THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nướ.C. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo dược thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh $S_{xq}$ của bình nước là:




**A.** $S_{xq} = \frac{3\pi}{2}\, dm^2$.

**B.** $S_{xq} = 4\pi\, dm^2$.

**C.** $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}\ dm^2$.

**D.** $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2} dm^2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét hình nón : $h = SO = 3r$ , $r = OB$, $l = SA$ . Xét hình trụ : $h_1 = 2r = NQ$ , $r_1 = ON = QI$ .

$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow$ Thể tích khối trụ là :

$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10}\ dm^2$ .

**Câu 451: [2H2-4.1-4] [THPT Ngô Sĩ Liên lần 3]** Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục $AB$ là.

**A.** $\frac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

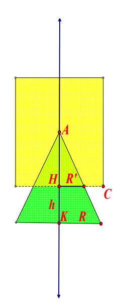
**B.** $\frac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$.

**C.** $\frac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

**D.** $\frac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**




Khi xoay quanh trục AB thì :

Phần hình vuông phía trên trở thành lăng trụ có bán kính R = 2, chiều cao h = 4.

$\rightarrow$ $V_1 = \pi 2^2 .4 = 16\pi$ .Phần dưới trở thành hình nón cụt với.

$h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2\left(\sqrt{3}-1\right); R = 2$

$\dfrac{R'}{R} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \to R' = \dfrac{R}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Áp dụng $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + R'^2 + RR'\right) = ...... = \left(\dfrac{24\sqrt{3}-8}{9}\right)\pi$.

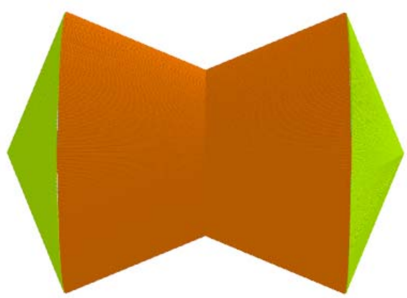
Vậy $V = V_1 + V_2 = \left(\dfrac{24\sqrt{3}+136}{9}\right)\pi$.

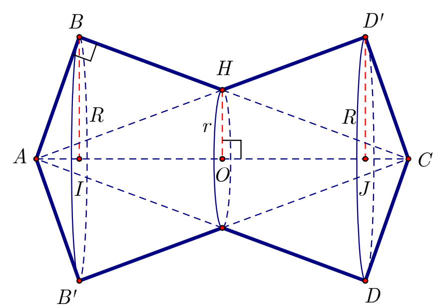
**Câu 452: [2H2-4.1-4] [208-BTN]** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6, AD = 8$ (như hình vẽ). Tính thể tích $V$ của vật thể tròn xoay được tạo thành khi cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh trục $AC$.

**A.** $V = 110,525\pi$. **B.** $V = 106,725\pi$. **C.** $V = 100,425\pi$. **D.** $V = 105,625\pi$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**






• Khi quay hình chữ nhật quanh trục $AC$, ta thấy vật thể tròn xoay được tạo thành gồm hai khối nón có thể tích bằng nhau và hai khối nón cụt có thể tích bằng nhau (như hình vẽ trên). Gọi $V_1$ là thể tích của mỗi hình nón và $V_2$ là thể tích của mỗi hình nón cụt thì ta có thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = 2\left(V_1 + V_2\right)$.

• Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6, AD = 8$ nên $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10$.

+ Xét tam giác vuông $ABC$ có $IB$ là đường cao nên ta có:

$$\frac{1}{IB^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{25}{576} \Rightarrow IB = \frac{24}{5}.$$

+ Vì tam giác $\Delta ABC = \Delta AD'C \Rightarrow \Delta HAC$ cân tại $H$ nên $HO \perp AC$ ($O$ là trung điểm của $AC$).

suy ra $OA = OC = \dfrac{AC}{2} = 5$.

+ Xét $\Delta ABC$ có $AB^2 = AI.AC \Rightarrow AI = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{6^2}{10} = \dfrac{18}{5}$ nên $OI = OA - AI = 5 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{7}{5}; IC = \dfrac{32}{5}$.

+ Dễ thấy hai tam giác vuông $COH$, $CIB$ đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OH}{IB} = \frac{OC}{IC} \Rightarrow OH = \frac{IB.OC}{IC} = \frac{\frac{24}{5}.5}{\frac{32}{5}} = \frac{15}{4}.$$

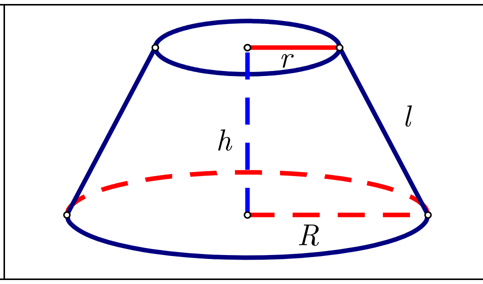
• Thể tích của mỗi hình nón là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.IB^2.AI = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{24}{5}\right)^2.\dfrac{18}{5} = 27,648\pi$ (đvtt).

Và thể tích của mỗi hình nón cụt là $V_2 = \frac{1}{3}\pi.OI.\left(IB^2 + OH^2 + IB.OH\right)$.

$$= \frac{1}{3}\pi.\frac{7}{5}.\left[\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 + \frac{24}{5}.\frac{15}{4}\right] = 25,7145\pi \text{ (đvtt).}$$

• Vậy thể tích cần tìm là $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = 2\left(27,648\pi + 25,7145\pi\right) = 106,725\pi$ (đvtt).

✍ *Ghi nhớ:*

| | | |
|---|---|---|
| **Thể tích khối nón cụt** |  | $\begin{cases} S_{xq} = \pi l\left(R + r\right) \\ V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right) \end{cases}$ |

**Câu 453: [2H2-4.1-4] [THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Khi cắt mặt cầu $S\left(O,R\right)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S\left(O,R\right)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R = 1$ ,tính bán kính đáy $r$ và chiều cao $h$ của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S\left(O,R\right)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

**A.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3},\ h = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{3}}{2},\ h = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{6}}{3},\ h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{6}}{2},\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

## Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

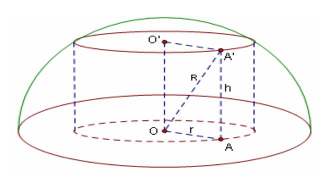
Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của.

O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy.

dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu.Ta có: $h^2 + r^2 = R^2$ $\left(0 < h \le R = 1\right) \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$

.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi(1 - \mathrm{h}^2)\mathrm{h} = f(\mathrm{h}) \ \Rightarrow f'(\mathrm{h}) = \pi(1 - 3\mathrm{h}^2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



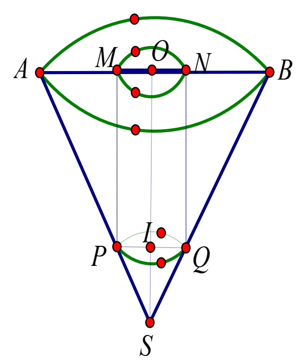

.

| $h$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(h) | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| f(h) | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $0$ |

.

Vậy: $\underset{(0;1]}{Max}\,V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 454: [2H2-4.1-4] [THPT Quảng Xương 1 lần 2]** Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nướ.C. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo dược thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh $S_{xq}$ của bình nước là:




.

**A.** $S_{xq} = \frac{3\pi}{2}\,dm^2$.

**B.** $S_{xq} = 4\pi\,dm^2$.

**C.** $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}\,dm^2$.

**D.** $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2}dm^2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Xét hình nón : $h = SO = 3r$, $r = OB$, $l = SA$. Xét hình trụ : $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$.

$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \frac{QI}{BO} = \frac{SI}{SO} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3} \Rightarrow$ Thể tích khối trụ là :

$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \frac{2\pi r^3}{9} = \frac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10} \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10}\,dm^2$.

**Câu 455: [2H2-4.1-4] [THPT Chuyên SPHN]** Cho hình nón có đáy là hình tròn tâm $O$, bán kính $R$ và có chiều cao $h$. Hãy tính chiều cao của hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón đã cho.

**A.** $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h}{3}$. **C.** $\frac{3h}{4}$. **D.** $\frac{h}{4}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Đặt $h'$, $r\left(0<h'<h, 0<r<R\right)$ lần lượt là chiều cao và bán kính hình trụ.

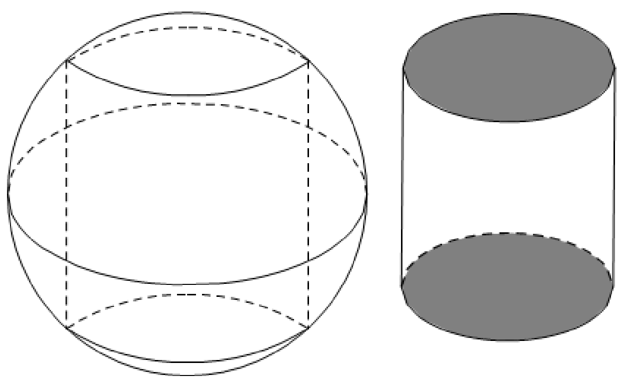
Ta có thể tích khối trụ là $V=h'.\pi r^2$.

Lại có $\Delta NPB$ đồng dạng $\Delta SOB$ nên: $\frac{h'}{h}=\frac{R-r}{R}\Rightarrow h'=h-\frac{hr}{R}$.

Ta được $V=h'.\pi r^2=\pi r^2\left(h-\frac{hr}{R}\right)=\frac{4\pi h}{R}.\frac{r}{2}.\frac{r}{2}\left(R-r\right)\overset{\text{Cos}i}{\le}\frac{4\pi h}{R}.\left(\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+R-r}{3}\right)^3=\frac{4\pi hR^2}{27}$.

Vậy $V_{\max}=\frac{4\pi hR^2}{27}$ đạt được khi $\frac{r}{2}=R-r\Leftrightarrow r=\frac{2}{3}R\Rightarrow h'=\frac{1}{3}h$.

**Câu 456:** **[2H2-4.2-4]** **[THPT Hà Huy Tập]** Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính $R$, người thợ thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện.

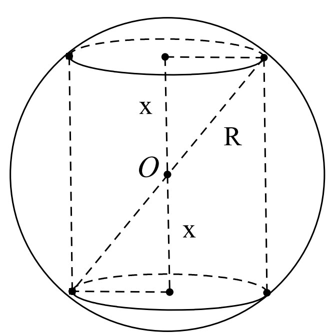


**A.** $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ $(0<x<R)$ (xem hình vẽ).



Bán kính của khối trụ là $r=\sqrt{R^2-x^2}$. Thể tích khối trụ là: $V=\pi(R^2-x^2)2x$.

Xét hàm số $V(x)=\pi(R^2-x^2)2x,\ 0<x<R$, có $V'(x)=2\pi(R^2-3x^2)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

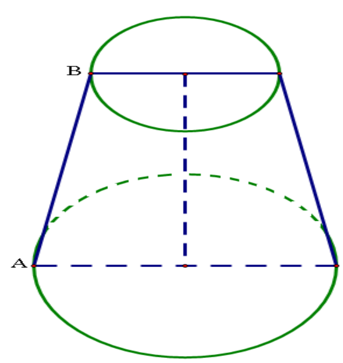
Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ | | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$ | $\searrow$ | $0$ |

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$;

$V_{\max}=\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

**Câu 457:** **[2H2-4.2-4]** **[THPT chuyên Nguyễn trãi lần 2]** Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20\,cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm $A$ của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm $B$. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

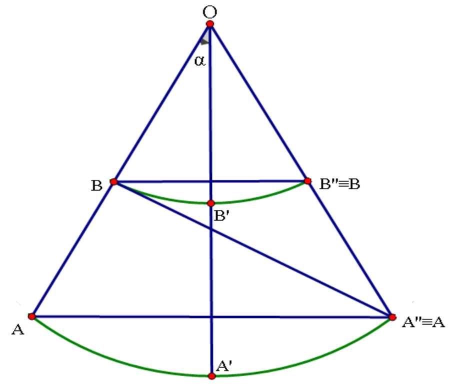



**A.** $58,80\,cm$.  **B.** $58,67\,cm$.  **C.** $59,93\,cm$.  **D.** $59,98\,cm$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đặt $b,a,h$ lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB''=4\pi b$ và cung lớn $AA''=4\pi a$.




.

Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA″. Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$l=\sqrt{BO^2+OA''^2-2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (1)..

$B''A''=AB=\sqrt{(a-b)^2+h^2}$.

$\frac{a}{b}=\frac{4\pi a}{4\pi b}=\frac{l(\overset{\frown}{BB''})}{l(\overset{\frown}{AA''})}=\frac{OA}{OB}=\frac{OB+AB}{OB}=1+\frac{AB}{\frac{2\pi b}{\alpha}}=1+\frac{AB.\alpha}{2\pi b}$.

$\Rightarrow \alpha=\frac{2\pi(a-b)}{AB}=\frac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+h^2}}$ $(a)$. $\frac{AB}{OB}=\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}\Rightarrow OB=\frac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}$ $(b)$

.

$OA''=OB+BA=\frac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}+\sqrt{(a-b)^2+h^2}$ $(c)$..

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được $l$..

$l\approx 58,79609cm\approx 58,80$.

***Ghi chú.*** *Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA″ phải không cắt cung* $\overset{\frown}{BB''}$ *tại điểm nào khác B, tức là BA″ nằm dưới tiếp tuyến của* $\overset{\frown}{BB''}$ *tại B. Điều này tương đương với* $2\alpha<\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$. *Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).*

**Câu 458:** **[2H2-4.2-4]** **[THPT chuyên Lương Thế Vinh]** Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật. Mỗi quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và nền của căn nhà đó. Trên bề mặt của mỗi quả bóng, tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là 9, 10, 13. Tổng độ dài mỗi đường kính của hai quả bóng đó là:

**A.** 64. **B.** 16. **C.** 32. **D.** 34.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ gắn với góc tường và các trục là các cạnh góc nhà. Do hai quả cầu đều tiếp xúc với các bức tường và nền nhà nên tương ứng tiếp xúc với ba mặt phẳng toạ độ, vậy tâm cầu sẽ có toạ độ là $I(a;a;a)$ với $a>0$ và có bán kính $R=a$.

Do tồn tại một điểm trên quả bóng có khoảng cách đến các bức tường và nền nhà lần lượt là 9, 10, 11 nên nói cách khác điểm $A(9;10;13)$ thuộc mặt cầu. Từ đó ta có phương trình:

**Câu 1:** $(9-a)^2+(10-a)^2+(13-a)^2=a^2$.

Giải phương trình ta được nghiệm $a=7$ hoặc $a=25$.

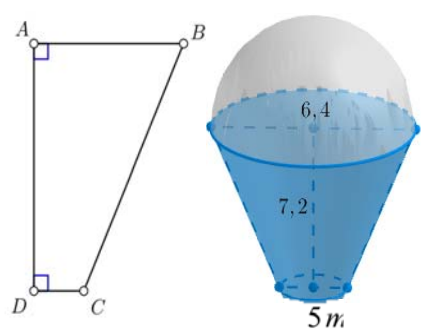
Vậy có 2 mặt cầu thoả mãn bài toán và tổng độ dài đường kính là $2(7+25)=64$.

**Câu 459: [2H2-4.2-4] [Chuyên ĐH Vinh]** Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm $1000$ chiếc kem giống nhau theo đơn đặt hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$ xung quanh trục $AD$ (xem hình vẽ). Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao $7,2$ cm; đường kính miệng cốc bằng $6,4$ cm; đường kính đáy cốc bằng $1,6$ cm. Kem được bỏ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Cơ sở đó cần dùng lượng kem gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

**A.** $132\text{ dm}^3$. **B.** $954\text{ dm}^3$. **C.** $293\text{ dm}^3$. **D.** $170\text{ dm}^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**




Thể tích của một chiếc kem cần tính bao gồm.

+) Thể tích của hình nón cụt có bán kính đáy lớn $R_1=3,2$ cm, bán kính đáy nhỏ.
$r_1=0,8$ cm và chiều cao $h=7,2$ cm.

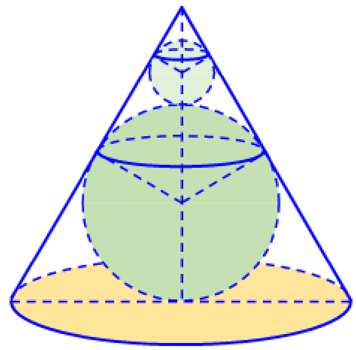
+) Thể tích của nửa khối cầu có bán kính $R=3,7$ cm.

Suy ra $V=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1r_1+r_1^2\right)+\frac{2}{3}\pi R^3$.

$=\frac{1}{3}\pi.7,2\left(3,2^2+3,2.0,8+0,8^2\right)+\frac{2}{3}\pi.3,2^3=\frac{20288\pi}{375}\approx 170\text{ cm}^3$.

Vậy thể tích của $1000$ chiếc kem là $170.10^3\text{ cm}^3=170\text{ dm}^3$.

**Câu 460: [2H2-4.2-4] [Cụm 4 HCM]** Người ta chế tạo ra một món đồ chơi cho trẻ em theo các công đoạn như sau: Trước tiên, chế tạo tra một mặt nón tròn xoay có góc ở đỉnh là $2\beta=60°$ bằng thủy tinh trong suốt. Sau đó đặt hai quả cầu nhỏ bằng thủy tinh có bán kính lớn, nhỏ khác nhau sao cho 2 mặt cầu tiếp xúc với nhau và đều tiếp xúc với mặt nón. Quả cầu lớn tiếp xúc với cả mặt đáy của mặt nón. Cho biết chiều cao của mặt nón bằng $9\text{ cm}$. Bỏ qua bề dày của những lớp vỏ thủy tinh, hãy tính tổng thể tích của hai khối cầu.

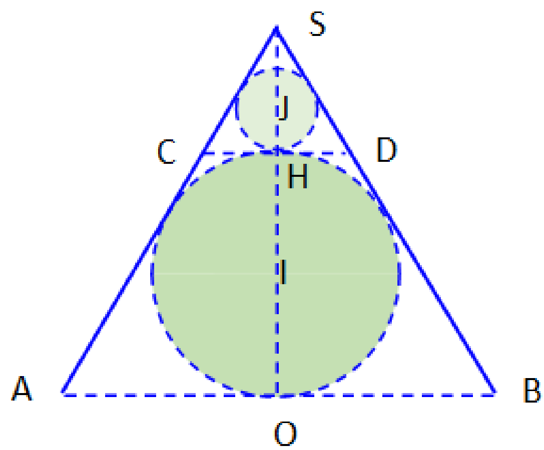


.

**A.** $\dfrac{40}{3}\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $\dfrac{25}{3}\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $\dfrac{112}{3}\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $\dfrac{10}{3}\pi\left(cm^3\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




.

Gọi $R$ là bán kính của hình nón. $r_1$, $r_2$ lần lượt là bán kính quả cầu lớn và quả cầu nhỏ.

Thiết diện qua trục của hình nón như sau:

$SAB$ là tam giác đều nên $SO = AB.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{2SO}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$.

Gọi $I$ là tâm tam giác $SAB$, $r_1 = \dfrac{SO}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Tam giác $SCD$ có chiều cao là $SH = \dfrac{SO}{3} = 3$.

Gọi $J$ là tâm tam giác $SCD$, $r_2 = \dfrac{SH}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$.

Tổng thể tích hai quả cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi r_1^3 + \dfrac{4}{3}\pi r_2^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(r_1^3 + r_2^3\right) = \dfrac{4}{3}\pi\left(27+1\right) = \dfrac{112}{3}\pi$.

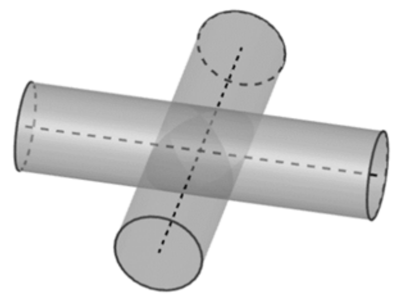
**Tính chất cần nhớ:**

Đối với tam giác đều:

+ Bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{2}{3}$ trung tuyến tương ứng.

+ Bán kính đường tròn nội tiếp là $\frac{1}{3}$ trung tuyến tương ứng.

**Câu 461:** **[2H2-4.2-4]** Cho hai mặt trụ có cùng bán kính bằng $4$ được đặt lồng vào nhau như hình vẽ. Tính thể tích phần chung của chúng biết hai trục của hai mặt trụ vuông góc và cắt nhau.

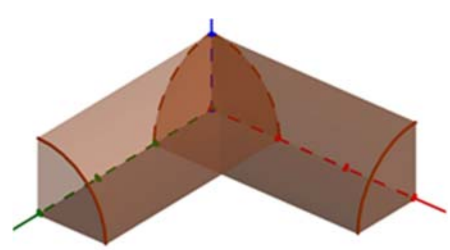

.

**A.** $256\pi$ . **B.** $512$. **C.** $\frac{256}{3}\pi$ . **D.** $\frac{1024}{3}$.

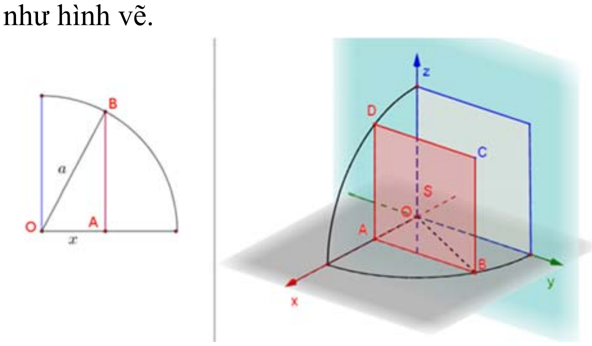
**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

***Cách 1.*** Ta xét $\frac{1}{8}$ phần giao của hai trụ như hình.


.

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



.

Khi đó phần giao $(H)$ là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm $O$ bán kính $4$, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục $Ox$ là một hình vuông có diện tích $S(x) = 4^2 - x^2$.

Thể tích khối $(H)$ là $\int_0^4 S(x)dx = \int_0^4 (16 - x^2)dx = \frac{128}{3}$. Vậy thể tích phần giao là $\frac{1024}{3}$.

***Cách 2.*** Dùng công thức tổng quát giao hai trụ $V = \frac{16}{3}R^3 = \frac{1024}{3}$.

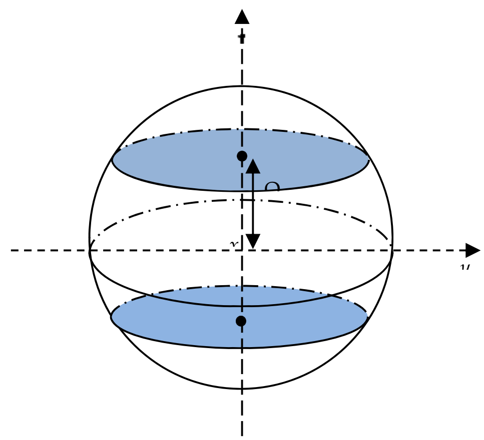
**Câu 462: [2H2-4.2-4] [TTGDTX Cam Ranh - Khánh Hòa]** Một khối cầu có bán kính $5\ dm$, người ta cắt bỏ hai phần phía trên và phía dưới khối cầu bằng hai mặt phẳng vuông góc với bán kính và cách tâm bằng $3\ dm$ để làm chiếc lu đựng nước. Thể tích chiếc lu đựng nước là:

**A.** $43\pi(dm^3)$. **B.** $41\pi\left(dm^3\right)$. **C.** $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$. **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:**



Trong mặt phẳng $Oxy$ ,cho đường tròn $\left(C\right): x^2+y^2=25$, xét $\left(T\right)$ $y=\sqrt{25-x^2}$, khi đó $\left(T\right)$ là nửa đường tròn. Nếu xoay $\left(T\right)$ quanh trục $Ox$ ta được hình cầu có bán kính là $5$.

Thể tích cái lu cần tìm chính là thể tích hình giới hạn bởi trục $Ox$, $\left(T\right)$ và hai đường thẳng $x=-3$, $x=3$ khi quay quanh trục $Ox$.

Vậy $V=\pi\int\limits_{-3}^{3}\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=132\pi\ \left(dm^3\right)$.

**Cách 2:**

Sử dụng công thức $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$ để tính thể tích phần thể tích chỏm cầu.

Với bài này, $h=2\,dm$. $\Rightarrow V=\pi.2^2\left(5-\frac{2}{3}\right)=\frac{52\pi}{3}\left(dm^3\right)$.

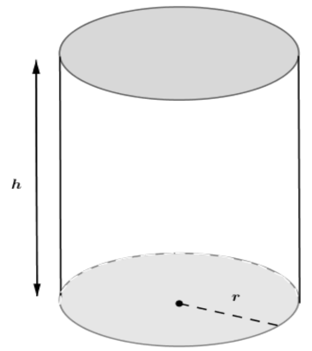
Vậy $V_{\text{lu}}=V_{(S)}-2.V=\pi.R^3-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\ \left(dm^3\right)$.

**Câu 463: [2H2-4.2-4] [THPT Thanh Thủy]** Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếc thùng phi với thể tích là $2000\pi$ lít mỗi chiếc. Hỏi bán kính đáy và chiều cao của thùng lần lượt bằng bao nhiêu để tiết kiệm nguyên liệu nhất.

**A.** $1cm$ và $2cm$. **B.** $1m$ và $1m$. **C.** $1m$ và $2m$. **D.** $1dm$ và $2dm$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




.

Gọi $r,\ h>0$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của thùng phi.

Thể tích thùng phi:

$$V=\pi r^2h=2000\pi\left(lít\right)=2000\pi\ \left(dm^3\right)\Rightarrow h=\frac{2000}{r^2}\left(dm^3\right).$$

Diện tích toàn phần của thùng phi:

$$S_{tp}=2\left(\pi r^2\right)+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{4000\pi}{r}=2\pi\left(r^2+\frac{2000}{r}\right).$$

Đặt $f(r)=r^2+\dfrac{2000}{r}\ \left(r>0\right)\Rightarrow f'(r)=2r-\dfrac{2000}{r^2}=\dfrac{2r^3-2000}{r^2}$ ;

$f'(r)=0\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{1000}=10\left(dm\right)$.

Bảng biến thiên:

| $r$ | $0$ | | $10$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(r)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\min\limits_{(0;+\infty)} f(r)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

.

Để tiết kiệm nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Khi đó: $S_{tp}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $f\left(r\right)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow r=10\ dm=1\ m\Rightarrow h=20\ dm=2\ m$.

**Câu 464:** **[2H2-4.2-4]** **[THPT Nguyễn Huệ-Huế]** Một đại lý xăng dầu cần làm một bồn chứa dầu hình trụ có đáy và nắp đậy bằng tôn với thể tích $16\pi\left(m^3\right)$. Biết rằng giá thành (cả vật liệu và tiền công) được tính theo mét vuông, tìm đường kính đáy của bồn để đại lý phải trả ít chi phí nhất.

**A.** $8\left(m\right)$. **B.** $4\left(m\right)$. **C.** $1\left(m\right)$. **D.** $2\left(m\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi bán kính đáy là $r\ (m)$.

Từ thể tích bồn là $16\pi\ (m^3)$: $16\pi = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \dfrac{16}{r^2}$.

Diện tích toàn phần hình trụ $S_{tp} = 2S_{đáy} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \dfrac{32\pi}{r}$.

Chi phí nhỏ nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Đặt $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{32\pi}{r}$, với $r > 0$.

$f'(r) = 4\pi r - \dfrac{32\pi}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 32\pi}{r^2}$, $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

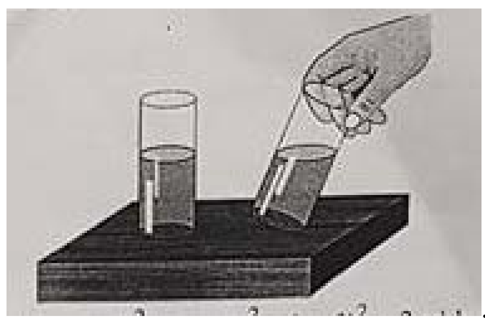
Bảng biến thiên:

| $r$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(r)$ | $\searrow$ | | GTNN | | $\nearrow$ |

.

Vậy chi phí nhỏ nhất khi đường kính đáy bồn bằng $4\ (m)$.

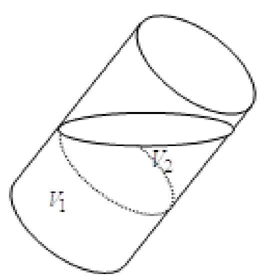
**Câu 465:** **[2H2-4.2-4]** **[THPT Kim Liên-HN]** Nghiêng một cốc nước hình trụ có đựng nước, người ta thấy bề mặt nước là hình Elip có độ dài trục lớn là $10\,cm$, khoảng cách từ hai đỉnh trên trục lớn của Elip đến đáy cốc lần lượt là $5\,cm$ và $11\,cm$. Tính thể tích nước trong cốc.

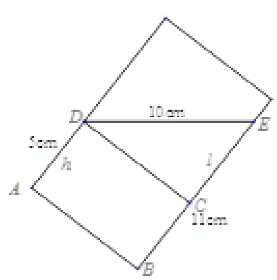


**A.** $96\pi\,cm^3$. **B.** $100\pi\,cm^3$. **C.** $128\pi\,cm^3$. **D.** $172\pi\,cm^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




.

Ta có $V = V_1 + V_2$.

Xét mặt cắt như hình vẽ. Ta có $CE = 6cm$, $CD = \sqrt{DE^2 - CE^2} = 8cm$.

Do đó bán kính đáy hình trụ $r = 4cm$.

$V_1 = \pi r^2 h = \pi.4^2.5 = 80\pi\,cm^3$, $V_2 = \dfrac{1}{2}\pi r^2 l = \dfrac{1}{2}\pi.4^2.6 = 48\pi\,cm^3$.

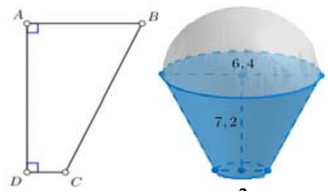
Vậy $V = 128\pi\,cm^3$.

**Câu 466:** **[2H2-4.2-4]** **[Chuyên ĐH Vinh]** Một cơ sở sản xuất kem chuẩn bị làm $1000$ chiếc kem giống nhau theo đơn đặt hàng. Cốc đựng kem có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang $ABCD$ vuông tại $A$ và $D$ xung quanh trục $AD$ (xem hình vẽ). Chiếc cốc có bề dày không đáng kể, chiều cao $7,2$ cm; đường kính miệng cốc bằng $6,4$ cm; đường kính đáy cốc bằng $1,6$ cm. Kem được bỏ đầy cốc và dư ra phía ngoài một lượng có dạng nửa hình cầu, có bán kính bằng bán kính miệng cốc. Cơ sở đó cần dùng lượng kem gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

**A.** $132$ dm$^3$. **B.** $954$ dm$^3$. **C.** $293$ dm$^3$. **D.** $170$ dm$^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**



.

Thể tích của một chiếc kem cần tính bao gồm.

+) Thể tích của hình nón cụt có bán kính đáy lớn $R_1 = 3,2$ cm, bán kính đáy nhỏ.

$r_1 = 0,8$ cm và chiều cao $h = 7,2$ cm.

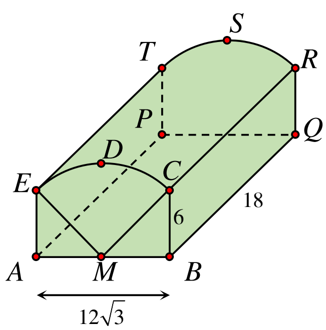
+) Thể tích của nửa khối cầu có bán kính $R = 3,7$ cm.

Suy ra $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_1 r_1 + r_1^2\right) + \dfrac{2}{3}\pi R^3$.

$= \dfrac{1}{3}\pi.7,2\left(3,2^2 + 3,2.0,8 + 0,8^2\right) + \dfrac{2}{3}\pi.3,2^3 = \dfrac{20288\pi}{375} \approx 170$ cm$^3$.

Vậy thể tích của $1000$ chiếc kem là $170.10^3$ cm$^3$ $= 170$ dm$^3$.

**Câu 467:** **[2H2-4.2-4]** **[Sở Bình Phước]** Một hộp nữ trang (xem hình vẽ) có mặt bên $ABCDE$ với $ABCE$ là hình chữ nhật, cạnh cong $CDE$ là một cung của đường tròn có tâm là trung điểm $M$ của đoạn thẳng $AB$. Biết $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm và $BQ = 18$ cm. Hãy tính thể tích của hộp nữ trang.



.

**A.** $216\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$cm$^3$. **B.** $261\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$cm$^3$.

**C.** $261\left(3\sqrt{3} + 4\pi\right)$cm$^3$. **D.** $216\left(3\sqrt{3} + 4\pi\right)$cm$^3$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $V = BQ.S_{ABCDE}$.

Trong đó $S_{ABCDE} = S_{ABCE} + S_{CDE} = S_{ABCE} + \left(S_{MCDE} - S_{\Delta MCE}\right)$.

$$= 6.12\sqrt{3} + \left(\frac{\pi.12^2.120}{360} - \frac{1}{2}.6.12\sqrt{3}\right) = 12\left(3\sqrt{3} + 4\pi\right).$$

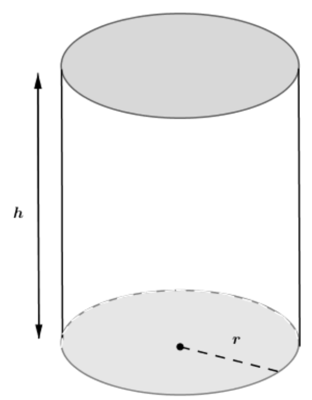
Thể tích hộp nữ trang là $V = 18.12\left(3\sqrt{3} + 4\pi\right) = 216\left(3\sqrt{3} + 4\pi\right)cm^3$.

**Câu 468:** **[2H2-4.2-4]** **[THPT Chuyên Phan Bội Châu]** Ông An dự định làm một cái bể chứa nước hình trụ bằng inốc có nắp đậy với thể tích là $k\ m^3$ $(k > 0)$. Chi phí mỗi $m^2$ đáy là $600$ nghìn đồng, mỗi $m^2$ nắp là $200$ nghìn đồng và mỗi $m^2$ mặt bên là $400$ nghìn đồng. Hỏi ông An cần chọn bán kính đáy của bể là bao nhiêu để chi phí làm bể là ít nhất? (Biết bề dày vỏ inốc không đáng kể).

**A.** $\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{2\pi}{k}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{k}{\pi}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**




Gọi $r, h$ $(r > 0, h > 0)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ.

+ Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = k \Rightarrow h = \frac{k}{\pi r^2}$..

+ Diện tích đáy và nắp là $S_đ = S_n = \pi r^2$; diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi rh$..

+ Khi đó chi phí làm bể là:

$$C = (600 + 200)\pi r^2 + 400.2\pi rh = 800\pi r^2 + 800\pi r\frac{k}{\pi r^2} = 800\left(\pi r^2 + \frac{k}{r}\right).$$

+ Đặt $f(r) = \pi r^2 + \frac{k}{r},\ r > 0 \Rightarrow f'(r) = 2\pi r - \frac{k}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - k}{r^2};\ f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}},\ (k > 0)$.

+ Bảng biến thiên:

| $r$ | $0$ | | $\sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(r)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(r)$ | $\Vert$ $+\infty$ | $\searrow$ | $\min\limits_{(0;+\infty)} f(r)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy: Chi phí làm bể ít nhất $\Leftrightarrow f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2\pi}}$.

**Câu 469:** **[2H2-4.2-4]** **[Sở GD và ĐT Long An]** Một công ty thiết kế các bồn chứa nước hình trụ bằng nhựa có thể tích $V$ không đổi, chiều cao $h$ và bán kính đáy $R$. Tính tỉ số $k=\dfrac{h}{R}$ để nguyên vật liệu làm bồn nước là ít tốn kém nhất.

**A.** $k=\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=\dfrac{3}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=\dfrac{2}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Ta có: $V=\pi hR^2 \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

Nguyên liệu làm bồn nước ít tốn kém nhất khi $S_{tp}$ bé nhất.

$$S_{tp}=2\pi hR+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2=\frac{V}{R}+\frac{V}{R}+2\pi R^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{V}{R}.\frac{V}{R}.2\pi R^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Suy ra $S_{tp}$ bé nhất bằng $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ khi $\dfrac{V}{R}=2\pi R^2 \Rightarrow V=2\pi R^3 \Rightarrow 2\pi R^3=\pi hR^2 \Rightarrow \dfrac{h}{R}=2$.

## Chương 15. Không gian Oxyz

**Câu 470:** **[THPT Tiên Lãng]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(2;1;-1)$, $C(0;4;6)$. Điểm $M$ di chuyển trên trục $Ox$. Tìm tọa độ $M$ để $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

**A.** $(1;0;0)$. **B.** $(-1;0;0)$. **C.** $(2;0;0)$. **D.** $(-2;0;0)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Gọi $M(x;0;0)\in Ox,(x\in\mathbb{R})$.

Khi đó $\overrightarrow{MA}=(1-x;1;1),\overrightarrow{MB}=(2-x;1;-1),\overrightarrow{MC}=(-x;4;6)$.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(3-3x;6;6\right)$.

$P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\sqrt{\left(3-3x\right)^2+6^2+6^2}=\sqrt{9x^2-18x+81}=\sqrt{9\left(x-1\right)^2+72}\ge\sqrt{72}$.

để $P=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x=1$.

Vậy tọa độ $M\left(1;0;0\right)$.

**Câu 471:** **[BTN 176]** Cho ba điểm $A\left(3;1;0\right),B\left(0;-1;0\right),C\left(0;0;-6\right)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

**A.** $\left(1;0;-2\right)$. **B.** $\left(3;-2;0\right)$. **C.** $\left(2;-3;0\right)$. **D.** $\left(3;-2;1\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi $G$, $G'$ theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$, $A'B'C'$. Với mọi điểm $T$ trong không gian có:

$\left(1\right):\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{TA}-\overrightarrow{TA'}\right)+\left(\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TB'}\right)+\left(\overrightarrow{TC}-\overrightarrow{TC'}\right)=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}\qquad\left(2\right)$.

Hệ thức $\left(2\right)$ chứng tỏ. Nếu $T\equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}=\vec{0}$ hay $T\equiv G'$ hay $\left(1\right)$ là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC$, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của $G$ là: $G=\left(\dfrac{3+0+0}{3};\dfrac{1-1+0}{3};\dfrac{0+0-6}{3}\right)=\left(1;0;-2\right)$.

Đó cũng là tọa độ trọng tâm $G'$ của $\Delta A'B'C'$.

* Cách diễn đạt thứ hai:

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}\ \left(1\right)$.

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$.

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}\right)+3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}\ \left(2\right)$.

Nếu $G$, $G'$ theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC$, $A'B'C'$' nghĩa là.

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}$ thì $\left(2\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{G'G}=\vec{0}\Leftrightarrow G'\equiv G$.

Tóm lại $\left(2\right)$ là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC$, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của $G$ là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$. Đó cũng là tọa độ trọng tâm $G$' của $\Delta A'B'C'$.

**Câu 472:** **[BTN 165]** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Điểm $D$ trong mặt phẳng $(Oyz)$ có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(Oxy)$ bằng 1 có thể là:

**A.** $D(0;-3;-1)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(0;3;-1)$. **D.** $D(0;1;-1)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Do $D\in(Oyz)\longrightarrow D(0;b;c)$ với $c<0$.

Theo giả thiết: $d\left[D,(Oxy)\right]=1\Leftrightarrow |c|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1(loai)\\ c=-1\end{array}\right.\longrightarrow D(0;b;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2),\overrightarrow{AC}=(-4;2;2),\overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2)\longrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=6b-6$.

Cũng theo giả thiết, ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=|b-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\ b=-1\end{array}\right.$.

Đối chiếu các đáp án chỉ có D thỏa mãn.

**Câu 473:** **[THPT Chuyen LHP Nam Dinh]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;1)$, $B(0;2;-1)$, $C(2;-3;1)$. Điểm $M$ thỏa mãn $T=MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Tính giá trị của $P=x_M^2+2y_M^2+3z_M^2$..

**A.** $P=114$. **B.** $P=134$. **C.** $P=162$. **D.** $P=101$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Giả sử $M(x;y;z)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(x-1;y+2;z-1)\\ \overrightarrow{BM}=(x;y-2;z+1)\\ \overrightarrow{CM}=(x-2;y+3;z-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AM^2=(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2\\ BM^2=x^2+(y-2)^2+(z+1)^2\\ CM^2=(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2\end{cases}$.

$\Rightarrow T=\left[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2\right]-\left[x^2+(y-2)^2+(z+1)^2\right]+\left[(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2\right]$

$=\left[(x-1)^2-x^2+(x-2)^2\right]+\left[(y+2)^2-(y-2)^2+(y+3)^2\right]+\left[(z-1)^2-(z+1)^2+(z-1)^2\right]$.

$=(x^2-6x+5)+(y^2+14y+17)+(z^2-6z+1)$.

$=(x-3)^2-4+(y+7)^2-32+(z-3)^2-8\ge-4-32-8=-44$..

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=3,\ y=-7,\ z=3.$.

Khi đó $M(3;-7;3) \Rightarrow P = x_M^2 + 2y_M^2 + 3z_M^2 = 134.$.

**Câu 474: [208-BTN]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các tia $Ox, Oy, Oz$ tại $A, B, C$ sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào dưới đây?

**A.** $(12;0;0)$. **B.** $(6;0;0)$. **C.** $(0;6;0)$. **D.** $(0;0;12)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox$, $B(0;b;0) \in Oy$, $C(0;0;c) \in Oz$ và $(a,b,c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(1;4;9) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c) = \left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right) \ge (1+2+3)^2$$

$\Rightarrow a+b+c \ge (1+2+3)^2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi: $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c} \\ a+b+c=(1+2+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=18 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$ (Thỏa ).

**Câu 475: [208-BTN]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các tia $Ox, Oy, Oz$ tại $A, B, C$ sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào dưới đây?

**A.** $(12;0;0)$. **B.** $(6;0;0)$. **C.** $(0;6;0)$. **D.** $(0;0;12)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox$, $B(0;b;0) \in Oy$, $C(0;0;c) \in Oz$ và $(a,b,c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(1;4;9) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$.

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\geq(1+2+3)^2$$

$$\Rightarrow a+b+c\geq(1+2+3)^2.$$

Dấu " = " xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ a+b+c=(1+2+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}\Rightarrow(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$ (Thỏa ).

**Câu 476:** **[Cụm 4 HCM]** Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+6y+6z-3=0$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất là?

**A.** $4x-11y+7z=0$. **B.** $6x-y-5z=0$.

**C.** $-4x+11y+7z=0$. **D.** $6x-y+5z=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;-3;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-3)^2+3}=5$.

Gọi $H$ là hình chiếu của tâm $I$ lên đường thẳng. Khi đó, mặt phẳng cần tìm sẽ vuông góc với $IH$ tại $H$.

Gọi $H(t;t;-t)\in d$. Ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Leftrightarrow(t-2;t+3;-t+3).(1;1;-1)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Mặt phẳng $(P)$ cần tìm qua $H\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IH}=\left(-\frac{4}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy $(P):-4\left(x-\frac{2}{3}\right)+11\left(y-\frac{2}{3}\right)+7\left(z+\frac{2}{3}\right)=0$ $(P):-4x+11y+7z=0$.

**Câu 477:** **[Cụm 4 HCM]** Phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+6y+6z-3=0$ theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất là?

**A.** $4x-11y+7z=0$. **B.** $6x-y-5z=0$.

**C.** $-4x+11y+7z=0$. **D.** $6x-y+5z=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(2;-3;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-3)^2+3}=5$.

Gọi $H$ là hình chiếu của tâm $I$ lên đường thẳng. Khi đó, mặt phẳng cần tìm sẽ vuông góc với $IH$ tại $H$.

Gọi $H(t;t;-t)\in d$. Ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_{\Delta}}=0\Leftrightarrow(t-2;t+3;-t+3).(1;1;-1)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Mặt phẳng $(P)$ cần tìm qua $H\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IH}=\left(-\frac{4}{3};\frac{11}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy $(P):-4\left(x-\frac{2}{3}\right)+11\left(y-\frac{2}{3}\right)+7\left(z+\frac{2}{3}\right)=0$ $(P):-4x+11y+7z=0$.

**Câu 478:** **[TTGDTX Cam Lâm - Khánh Hòa]** Cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a,b,c$ là các số dương thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2017$. Mặt phẳng $(ABC)$ luôn đi qua một điểm cố định có tọa độ là.

**A.** $(1;1;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$.

**C.** $(0;0;0)$. **D.** $(2017;2017;2017)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2017\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2017}}{a}+\frac{\frac{1}{2017}}{b}+\frac{\frac{1}{2017}}{c}=1$ nên điểm $M\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)\in(ABC)$.

Vậy mặt phẳng $(ABC)$ luôn đi qua điểm $M\left(\frac{1}{2017};\frac{1}{2017};\frac{1}{2017}\right)$.

**Câu 479:** **[Cụm 6 HCM]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P)$ qua hai điểm $M(1;8;0)$, $C(0;0;3)$ cắt các nửa trục dương $Ox$, $Oy$ lần lượt tại $A$, $B$ sao cho $OG$ nhỏ nhất ($G$ là trọng tâm tam giác $ABC$). Biết $G(a;b;c)$, tính $P=a+b+c$.

**A.** $7$. **B.** $12$. **C.** $3$. **D.** $6$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Gọi $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$ mà $C(0;0;3)$ nên $G\left(\frac{m}{3};\frac{n}{3};1\right)$ và $OG^2=\frac{1}{9}(m^2+n^2)+1$.

$(P):\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{3}=1$. $(P)$ qua hai điểm $M(1;8;0)$ nên $\frac{1}{m}+\frac{8}{n}=1$.

Ta có $1=\frac{1}{m}+\frac{8}{n}=\frac{1}{m}+\frac{16}{2n}\geq\frac{(1+4)^2}{m+2n}\Rightarrow m+2n\geq 25$.

Suy ra $25\leq m+2n\leq\sqrt{5(m^2+n^2)}\Leftrightarrow m^2+n^2\geq 125\Rightarrow OG^2\geq\frac{134}{9}$.

Dấu bằng khi $\begin{cases} \dfrac{1}{m}+\dfrac{8}{n}=1 \\ \dfrac{m}{1}=\dfrac{n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=10 \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3};1\right)$.

**Câu 480:** **[SỞ GD-ĐT HÀ TĨNH L2]** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Tìm tọa độ điểm $M$ trên mặt phẳng $(Oxy)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

**A.** $\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};0\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Dễ thấy bốn điểm $A,B,C,D$ không đồng phẳng.

Gọi $G$ là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ và $G\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta thấy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)\right|=4MG$ nên.

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên mặt phẳng $(Oxy)$. Vậy $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

**Câu 481:** **[SỞ GD-ĐT HÀ TĨNH L2]** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(2;1;1)$, $C(1;1;2)$, tập hợp tất cả các điểm $M$ trên mặt phẳng $(\alpha):3x+6y-6z-1=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0$ là:

**A.** một mặt phẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một mặt cầu. **D.** một điểm.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Gọi $G$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Khi đó.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=0 \Leftrightarrow 3MG^2+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=0 \Leftrightarrow MG=\dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, ta có $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ nên $d\left(G,(\alpha)\right)=\dfrac{1}{3}$, suy ra $M$ là hình chiếu vuông góc của $G$ trên mặt phẳng $(\alpha)$. Vậy tập hợp cần tìm là một điểm.

**Câu 482:** **[Sở GDĐT Lâm Đồng lần 05].** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;3;2),B(-9;4;9)$. Tìm điểm $M$ trên $(P)$ sao cho $(MA+MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $M(-1;2;3)$. **B.** $M(-1;2;-3)$. **C.** $M(1;-2;3)$. **D.** $M(-1;2;-3)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Ta có $A,B$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng $(P)$..

Gọi $A'$ là điểm đối xứng của A qua $(P)$, ta có: $MA' = MA$..

Do đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B \Rightarrow \min(MA + MB) = A'B$ khi $M$ là giao điểm của $A'B$ và $(P)$..

+ Tìm được $A'(3;1;0)$. Phương trình đường thẳng $A'B$ : $\begin{cases} x = 3 - 12t \\ y = 1 + 3t \\ z = 9t \end{cases}$.

+ $M(-1;2;3)$..

**Câu 483:** **[THPT Nguyễn Huệ-Huế]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ sao cho $S = MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $M(1;1;3)$. **B.** $M(0;2;1)$. **C.** $M(2;1;2)$. **D.** $M\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $I$ là trung điểm đoạn $AB$, suy ra $I(0;2;1)$.

$\overrightarrow{IA} = (1;-1;-1) \Rightarrow IA = \sqrt{3}$. $\overrightarrow{IB} = (-1;1;1) \Rightarrow IB = \sqrt{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2$$
$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 6.$$

Do đó $S$ nhỏ nhất khi $MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên mặt phẳng $(\alpha)$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $I$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$, $\Delta$ nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Tọa độ $M$ là nghiệm hệ $\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+t \\ x-y+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \\ z=\dfrac{7}{3} \\ t=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{3}\right)$.

**Câu 484:** **[Cụm 7-TPHCM]** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(9;-3;5)$, $B(a;b;c)$. Gọi $M$, $N$, $P$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng $AB$ với các mặt phẳng toạ độ $(Oxy)$, $(Oxz)$ và $(Oyz)$. Biết $M$, $N$, $P$ nằm trên đoạn $AB$ sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a+b+c$ là:

**A.** $-15$. **B.** $15$. **C.** $-21$. **D.** $21$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Đường thẳng $AB:\begin{cases} x=9+(9-a)t \\ y=-3+(-3-b)t \\ z=5+(5-c)t \end{cases}$.

Từ dữ kiện $M,N,P \in AB$ và $AM = MN = NP = PB$.

$\Rightarrow N, M, P$ lần lượt là trung điểm của $AB$, $AN$ và $BN$.

$\Rightarrow N\left(\dfrac{9+a}{2};\dfrac{-3+b}{2};\dfrac{5+c}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{9+\frac{9+a}{2}}{2};\dfrac{-3+\frac{-3+b}{2}}{2};\dfrac{5+\frac{5+c}{2}}{2}\right)$,.

$P\left(\dfrac{\frac{9+a}{2}+a}{2};\dfrac{\frac{-3+b}{2}+b}{2};\dfrac{\frac{5+c}{2}+c}{2}\right)$.

Mà $\begin{cases} M\in(Oxy) \\ N\in(Oxz) \\ P\in(Oyz) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5+\frac{5+c}{2}}{2}=0 \\ \dfrac{-3+b}{2}=0 \\ \dfrac{\frac{9+a}{2}+a}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-15 \\ b=3 \\ a=-3 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=-15$.

**Câu 485:** **[THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=1-t \\ y=1+t \\ z=m+1+t \end{cases}$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $d$ cắt $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho các mặt phẳng tiếp diện của $(S)$ tại $A$ và $B$ tạo với nhau góc lớn nhất. Tìm trung bình cộng của các phần tử trong $T$..

**A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Đường thẳng $d$ cắt $(S)$ tại 2 điểm phân biệt $A(1-t_1;1+t_1;m+1+t_1)$, $B(1-t_2;1+t_2;m+1+t_2)$ với $t_1,t_2$ là nghiệm của $t^2+(1+t)^2+(m+3+t)^2=4 \Leftrightarrow 3t^2+(8+2m)t+m^2+6m+6=0$ với $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}<m<\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$.

Hai mặt phẳng tiếp diện của $(S)$ tại $A$ và $B$ tạo với nhau góc lớn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$.

$\Leftrightarrow 4m^2+20m+16=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=-4$ (thỏa) $\Rightarrow T=\frac{-5}{2}$.

**Câu 486:** **[THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 5]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=m+1+t\end{cases}$. Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để $d$ cắt $(S)$ tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ sao cho các mặt phẳng tiếp diện của $(S)$ tại $A$ và $B$ tạo với nhau góc lớn nhất. Tìm trung bình cộng của các phần tử trong $T$..

**A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Đường thẳng $d$ cắt $(S)$ tại 2 điểm phân biệt $A(1-t_1;1+t_1;m+1+t_1)$, $B(1-t_2;1+t_2;m+1+t_2)$ với $t_1,t_2$ là nghiệm của $t^2+(1+t)^2+(m+3+t)^2=4 \Leftrightarrow 3t^2+(8+2m)t+m^2+6m+6=0$ với $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}<m<\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$.

Hai mặt phẳng tiếp diện của $(S)$ tại $A$ và $B$ tạo với nhau góc lớn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$.

$\Leftrightarrow 4m^2+20m+16=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=-4$ (thỏa) $\Rightarrow T=\frac{-5}{2}$.

**Câu 487:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\left(-1;\sqrt{3};0\right)$, $B\left(1;\sqrt{3};0\right)$, $C\left(0;0;\sqrt{3}\right)$ và điểm $M\in Oz$ sao cho hai mặt phẳng $(MAB)$ và $(ABC)$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(OAB)$..

**A.** $15^0$. **B.** $60^0$. **C.** $30^0$. **D.** $45^0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(2;0;0\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(1;-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left(0;-2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$.

$M\in Oz\Rightarrow M\left(0;0;z\right)$ và $\overrightarrow{AM}=\left(1;-\sqrt{3};z\right)$.

Mặt khác: $\overrightarrow{n_{(MAB)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\left(0;-2z;-2\sqrt{3}\right)$.

Vì: $\left(MAB\right)\perp\left(ABC\right)$ nên $\overrightarrow{n_{(ABC)}}.\overrightarrow{n_{(MAB)}}=0\Leftrightarrow z=-\sqrt{3}$.

Vậy: $\overrightarrow{n_{(MAB)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\left(0;2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=\left(-1;\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{OB}\left(1;\sqrt{3};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(OAB)}}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\left(0;0;-2\sqrt{3}\right)$.

$$\cos\left(\widehat{\left(\mathrm{MAB}\right),\left(\mathrm{OAB}\right)}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_{(MAB)}}.\overrightarrow{n_{(OAB)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(MAB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(OAB)}}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\widehat{\left(\mathrm{MAB}\right),\left(\mathrm{OAB}\right)}\right)=45^0.$$

**Câu 488:** [THPT Chuyên Thái Nguyên] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(1;2;-1\right),B\left(0;4;0\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ có phương trình $2x-y-2z+2017=0$. Gọi $\left(Q\right)$ là mặt phẳng đi qua hai điểm $A,B$ và tạo với mặt phẳng $\left(P\right)$ góc nhỏ nhất bằng $\alpha$. Tính $\cos\alpha$..

**A.** $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc mặt phẳng $\left(P\right)$. Vậy vecto chỉ phương đường thẳng $d$ là $\overrightarrow{u_d}=\left(2;-1;-2\right)$.

Trên đường thẳng $d$ lấy điểm $C$. Gọi $H,K$ lần lượt là hình chiếu của $C$ lên mặt phẳng $\left(Q\right)$ và đường thẳng $AB$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $\left(Q\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$ là góc tạo bởi hai đường thẳng $d$ và $CH$, tức là góc $\widehat{ACH}=\alpha$.

Vì tam giác $CHA$ vuông tại $H$ nên ta có $\sin\widehat{ACH}=\frac{AH}{AC}\geq\frac{AK}{AC}$. Vậy để góc $\alpha$ nhỏ nhất thì $H$ trùng với $K$ hay $CK\perp\left(Q\right)$.

Vậy $\left(CAK\right)\perp\left(Q\right)$. Nên ta có $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{n_{(CAB)}};\overrightarrow{AB}\right]$. Vì $\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AB}\right]=\left(3;0;3\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(CAB)}}=\left(1;0;1\right)$.

Vậy $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(1;1;-1)$ và $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}.\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(Q)}}\right|\left|\overrightarrow{n_{(P)}}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 489:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A\left(-1;\sqrt{3};0\right)$, $B\left(1;\sqrt{3};0\right)$, $C\left(0;0;\sqrt{3}\right)$ và điểm $M\in Oz$ sao cho hai mặt phẳng $(MAB)$ và $(ABC)$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(OAB)$..

**A.** $15^0$. **B.** $60^0$. **C.** $30^0$. **D.** $45^0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;0;0)$, $\overrightarrow{AC}=\left(1;-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\left(0;-2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$. $M\in Oz\Rightarrow M(0;0;z)$ và $\overrightarrow{AM}=\left(1;-\sqrt{3};z\right)$.

Mặt khác: $\overrightarrow{n_{(MAB)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\left(0;-2z;-2\sqrt{3}\right)$.Vì: $(MAB)\perp(ABC)$ nên $\overrightarrow{n_{(ABC)}}.\overrightarrow{n_{(MAB)}}=0\Leftrightarrow z=-\sqrt{3}$.

Vậy: $\overrightarrow{n_{(MAB)}}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\left(0;2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=\left(-1;\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{OB}\left(1;\sqrt{3};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(OAB)}}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\left(0;0;-2\sqrt{3}\right)$.

$$\cos\left(\widehat{(\mathrm{MAB}),(\mathrm{OAB})}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_{(MAB)}}.\overrightarrow{n_{(OAB)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(MAB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(OAB)}}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\widehat{(\mathrm{MAB}),(\mathrm{OAB})}\right)=45^0\cdot$$

**Câu 490:** **[THPT Nguyễn Khuyến –NĐ]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c),D\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$. Trong đó $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=3$. Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(ABC)$ có giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Mặt phẳng $(ABC)$ có phương trình $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có $\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=3\Leftrightarrow\dfrac{2}{3a}+\dfrac{2}{3b}+\dfrac{1}{3c}=1$.

Nên $(ABC)$luôn đi qua điểm $I\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Gọi $H$ là hình chiếu của $D$ lên mp $(ABC)$.

Ta có $d\left(D,(ABC)\right)=DH\le DI$, suy ra trị lớn nhất của $d\left(D,(ABC)\right)$bằng $DI=1$.

**Câu 491:** **[THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2)$, $B(3;-1;-4)$, $C(-2;2;0)$. Điểm $D$ trong mặt phẳng $(Oyz)$ có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng $2$ và khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(Oxy)$ bằng $1$ có thể là:

**A.** $D(0;1;-1)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(0;-3;-1)$. **D.** $D(0;3;-1)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

$D\in(Oyz)\Rightarrow D(0;y;z), z<0$.

$d(D;(Oxy))=1\Leftrightarrow |z|=1\Leftrightarrow z=\pm1\Rightarrow z=-1\ (z<0)\Rightarrow D(0;y;-1)$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=2\Leftrightarrow |y-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=3\Rightarrow D(0;3;-1)\\ y=-1\Rightarrow D(0;-1;-1)\end{array}\right..$$

**Câu 492:** **[THPT TH Cao Nguyên]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;6)$, $D(1;1;1)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng đi qua $D$ và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm $A$, $B$, $C$ đến $\Delta$ là lớn nhất. Hỏi $\Delta$ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

**A.** $M(3;4;3)$. **B.** $M(-1;-2;1)$. **C.** $M(-3;-5;-1)$. **D.** $M(7;13;5)$.

**Hướng dẫn giải**

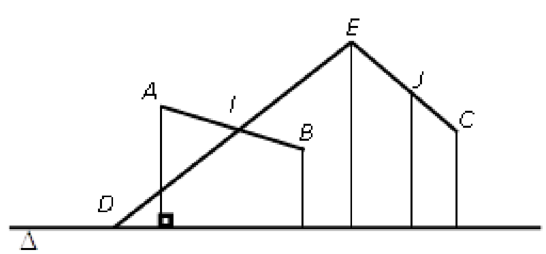
**Chọn C.**

Nhận thấy *A, B, C, D* đồng phẳng, cùng thuộc mặt phẳng $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$.

Trường hợp 1: *A, B, C* cùng phía với đường thẳng $\Delta$ qua d: $I\left(\frac{3}{2};1;0\right)$ là trung điểm của ***AB.***

$\Rightarrow d_{(A;\Delta)}+d_{(B;\Delta)}+d_{(C;\Delta)}=2d_{(I;\Delta)}+d_{(C;\Delta)}=d_{(E;\Delta)}+d_{(C;\Delta)}=2d_{(J;\Delta)}$ với *E* là điểm đối xứng của *D* qua *I*; *J* là trung điểm của ***EC.***

Lúc này ta có $E(2;1;-1)$; $J\left(1;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{DJ}=\left(0;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.




Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $d_{(J;\Delta)}$ max và $\Delta$ đi qua *D*. Tức là đường thẳng $\Delta$ qua $D(1;1;1)$ và vuông góc với *DJ*.

Ta lần lượt thử các trường hợp xem $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{DJ}$ hay không thì ta thấy $M(-3;-5;-1)$, $M(7;13;5)$ thỏa mãn. Lúc này thử tổng khoảng cách từ *A, B, C* đến $\Delta$ là lớn nhất. Vậy ta chọn $M(-3;-5;-1)$.

**Cách khác**.

Dề dàng có phương trình mp$(ABC)$ là $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$ và có $D \in (ABC)$.

Do $d(A,\Delta) \le AD$; $d(B,\Delta) \le BD$; $d(C,\Delta) \le CD$; và dấu bằng của 3 bất đẳng thức đạt được khi $\Delta \perp (ABC)$.

Vậy vtcp của $\Delta$ là vtpt của mp$(ABC)$ là $\vec{u}=(2;3;1)$.

Phương trình $\Delta : \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$.

Vậy $M(-3;-5;-1) \in \Delta$.

**Câu 493:** **[THPT Ngô Sĩ Liên lần 3]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua $M(2;1;2)$ đồng thời cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$ sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng $(\alpha)$ là.

**A.** $2x+y-2z-1=0$. **B.** $2x+y+z-7=0$. **C.** $x+2y+z-6=0$. **D.** $x+2y+z-1=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ với $a>0, b>0, c>0$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Do $M \in (\alpha)$ nên $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=1$. Suy ra $1=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c} \ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{2}{a}.\dfrac{1}{b}.\dfrac{2}{c}} \Rightarrow abc \ge 108$.

Ta có: $V_{ABC}=\dfrac{1}{6}abc \ge \dfrac{1}{6}.108=18$. Đẳng thức xảy ra khi $a=c=6; b=3$.

Vậy phương trình $(\alpha): \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1$ hay $(\alpha): x+2y+z-6=0$.

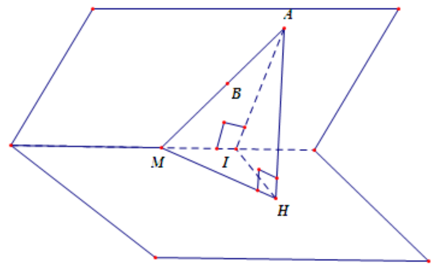
**Câu 494:** **[THPT Lê Hồng Phong]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(0;4;0)$, mặt phẳng $(P)$ có phương trình $2x-y-2z+2017=0$. Viết phương trình mặt phẳng $(Q)$ đi qua hai điểm $A,B$ và tạo với mặt phẳng $(P)$ một góc nhỏ nhất.

**A.** $x+y-z+4=0$. **B.** $2x+y-3z-4=0$.

**C.** $x+y-z-4=0$. **D.** $2x-y-z-4=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**




**Cách 1**: Đáp án A, B và C loại do mặt phẳng không đi qua điểm **A.**

**Cách 2:** Gọi $M$ là giao điểm của $AB$ và mặt phẳng $(P)$, $H$ là hình chiếu của $A$ trên mặt phẳng $(P)$. Ta có $\widehat{AMH}=\alpha$ là góc tạo bởi $AB$ và mặt phẳng $(P)$.

Kẻ $AI$ vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$. Ta có $\widehat{AIH}=\beta$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$.Ta dễ dàng chứng minh, góc tạo bởi giữa hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ nhỏ nhất bằng $\widehat{AMH}$ là góc tạo bởi $AB$ và mặt phẳng $(P)$.

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Gọi $\vec{n}(a;b;c)$ là VTPT của mặt phẳng $(Q)$, khi đó:

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+2b+c=0 & (1)\\ \dfrac{|2a-b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} & (2)\end{cases}.$$

Từ $(1)\Rightarrow c=a-2b$. Thay vào $(2)$ ta được $a^2-2ab+b^2=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow c=-a$.

Khi đó $\vec{n}(a;a;-a)=a(1;1;-1)$. Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x+y-z-4=0$.

**Câu 495:** **[THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng $(P)$ thay đổi đi qua $M$ lần lượt cắt các tia $Ox,Oy,Oz$ tại $A,B,C$ khác $O$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

**A.** 18.. **B.** 9.. **C.** 6.. **D.** 54..

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0,0,c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng $(P)$: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì: $M\in(P)\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{1}{c}}$.

Hay $1\ge 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}}\Leftrightarrow 1\ge \frac{54}{abc}$.

Suy ra: $abc\ge 54\Leftrightarrow \frac{1}{6}abc\ge 9$.

Vậy: $V_{OABC}\ge 9$.

**Câu 496:** **[THPT Nguyễn Trãi Lần 1]** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta$ có phương trình $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $\left(P\right):2x-y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng $\left(Q\right)$ chứa $\Delta$ và tạo với $\left(P\right)$ một góc nhỏ nhất.

**A.** $2x-y+2z-1=0$.

**B.** $-x+6y+4z+5=0.$.

**C.** $10x-7y+13z+3=0$.

**D.** $2x+y-z=0.$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

☑ Gọi VTPT của mặt phẳng $\left(Q\right)$ là $\vec{n}=\left(a,b,c\right)\ne\vec{0}$, do mặt phẳng $\left(Q\right)$ chứa $\Delta$ nên $\left(Q\right)$ chứa.

$M\left(3;1;-2\right)$ và $M_0\left(1;0;-1\right)$.

□ $\left(Q\right):a.\left(x-3\right)+b\left(y-1\right)+c\left(z+2\right)=0\Leftrightarrow a.x+by+cz-3a-b+2c=0$.

□ $\left(Q\right)$ chứa $M_0\left(1;0;-1\right)$: $-2a-b+c=0\Leftrightarrow c=2a+b$.

□Vậy $\left(Q\right):a.x+by+\left(2a+b\right)z+a+b=0$.

□Góc giữa $\left(Q\right)$ với $\left(P\right)$ một góc nhỏ nhất:

$$\cos\left(\widehat{\left(P\right),\left(Q\right)}\right)=\frac{\left|6a+b\right|}{3\sqrt{5a^2+2b^2+4ab}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{36a^2+12ab+b^2}{5a^2+2b^2+4ab}}.$$

Nếu $b=0\Rightarrow\cos\left(\widehat{\left(P\right),\left(Q\right)}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\left(\widehat{\left(P\right),\left(Q\right)}\right)\approx 26^\circ$.

Nếu $b\ne 0\Rightarrow\cos\left(\widehat{\left(P\right),\left(Q\right)}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{36\left(\frac{a}{b}\right)^2+12\frac{a}{b}+1}{5\left(\frac{a}{b}\right)^2+4\frac{a}{b}+2}}$.

$$\Rightarrow y=\frac{36t^2+12t+1}{5t^2+4t+2}\Rightarrow 0\le y\le\frac{53}{6},\ y\left(-\frac{1}{6}\right)=0;\ y\left(-\frac{10}{7}\right)=\frac{53}{6}.$$

Suy ra $0\le\cos\left(\widehat{\left(P\right),\left(Q\right)}\right)\le\frac{\sqrt{318}}{18}\Rightarrow 7^\circ\le\left(\widehat{\left(P\right),\left(Q\right)}\right)\le 90^\circ$. Vậy.

□Góc giữa $(Q)$ với $(P)$ một góc nhỏ nhất gần bằng $7°$. Khi đó $\frac{a}{b}=\frac{-10}{7}\Rightarrow a=10,b=-7$..

Suy ra $(Q): 10x-7y+13z+3=0$.

**Cách làm trắc nghiệm.**

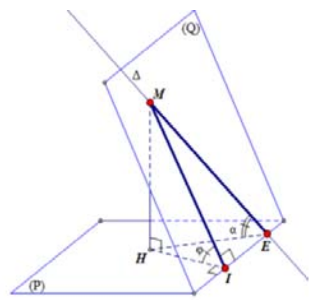
☑ Lấy hai điểm $M(3;1;-2)$ và $M_0(1;0;-1)$ thay vào bốn đáp án. Loại A, **C.**

☑ Tính góc tạo bởi mặt phẳng của đáp án B với $(P)$ và góc tạo bởi đáp án D với $(P)$ kết quả nào có góc nhỏ nhất ta chọn.

**Nếu muốn bắt buộc học sinh phải giải ta có thể cho đáp án dạng.**

$(Q): ax-by+cz+d=0$ **với** $a,b,c,d\in\mathbb{N};(a,b,c,d)=1$**. Tính** $a^2+b^2+c^2+d^2$**?**

**Cách 2: Theo thầy Trần Trọng Trí.**




☑ Ta có tam giác $MEI$ vuông tại $I\Rightarrow ME\ge MI\Rightarrow\frac{MH}{ME}\le\frac{MH}{MI}\Rightarrow\sin\alpha\le\sin\varphi$.

Mà $\alpha,\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\alpha\le\varphi$ hay $\left(\widehat{\Delta,(P)}\right)\le\left(\widehat{(Q),(P)}\right)$. Vậy $\left(\widehat{(Q),(P)}\right)_{\min}=\left(\widehat{\Delta,(P)}\right)$.

☑ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi.

$E\equiv I\Leftrightarrow\Delta\perp d=(P)\cap(Q)\Rightarrow VTCP\ \overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(1;-6;-4)$.

Mặt phẳng $(Q):\begin{cases}d\subset(Q)\\\Delta\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow(Q):\begin{cases}M_0=(1;0;-1)\in(Q)\\VTVP\ \vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(10;-7;13)\end{cases}$.

$\Rightarrow(Q):10x-7y+13z+3=0$.

**Câu 497:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Trong không gian cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d:\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua $\Delta$ và tạo với đường thẳng $d$ một góc lớn nhất.

**A.** $31x-8y-5z+91=0$. **B.** $19x-17y-20z+34=0$.

**C.** $31x-8y-5z-98=0$. **D.** $19x-17y-20z-77=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

**Hướng dẫn giải**.

Đường thẳng $d$ có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Đường thẳng $\Delta$ đi qua điểm $M(3;0;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;2;3)$.

Do $\Delta\subset(P)$ nên $M\in(P)$. Giả sử VTPT của $(P)$ là $\vec{n}=(A;B;C),(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.

Phương trình $(P)$ có dạng $A(x-3)+By+C(z+1)=0$.

Do $\Delta\subset(P)$ nên $\vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow A+2B+3C=0\Leftrightarrow A=-2B-3C$.

Gọi $\alpha$ là góc giữa $d$ và $(P)$. Ta có.

$$sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|3A+B+2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3(-2B-3C)+B+2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{(-2B-3C)^2+B^2+C^2}}.$$

$$=\frac{|5B+7C|}{\sqrt{14}.\sqrt{5B^2 12BC+10C^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5B+7C)^2}{5B^2+12BC+10C^2}}.$$

TH1: Với $C=0$ thì $sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{14}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

TH2: Với $C\neq 0$ đặt $t=\frac{B}{C}$ ta có $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\frac{-50t^2+10t+112}{(5t^2+12t+10)^2}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow -50t^2+10t+112=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{5}\Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{75}{14}\\ t=-\frac{7}{5}\Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right)=0\end{array}\right..$$

Và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(t)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}=5$.

Bảng biến thiên.

| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{5}$ | | $\frac{8}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $5$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{75}{14}$ | $\searrow$ | $5$ |

.


| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{5}$ | | $\frac{8}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $5$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{75}{14}$ | $\searrow$ | $5$. |


Từ đó ta có $Maxf(t)=\frac{75}{14}$ khi $t=\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$. Khi đó $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}.\sqrt{f\left(\frac{8}{5}\right)}=\frac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và Th2 ta có $sin\alpha$ lớn nhất là $sin\alpha=\frac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$.

Chọn $B=-8\Rightarrow C=-5\Rightarrow A=31$.

Phương trình $(P)$ là $31(x-3)-8y-5(z+1)=0\Leftrightarrow 31x-8y-5z-98=0$.

**Câu 498: [THPT chuyên ĐHKH Huế]** Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ qua $A$ tiếp xúc với $(S)$ sao cho khoảng cách từ $B$ đến $(P)$ là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của $(P)$. Lúc đó.

**A.** $m.n=-4$. **B.** $m.n=4$. **C.** $m.n=2$. **D.** $m.n=-2$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

**Hướng dẫn giải.**

Mặt phẳng $(P)$ qua $A$ có dạng $a(x-0)+b(y-8)+c(z-2)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-8b-2c=0$
.

Điều kiện tiếp xúc:

$d(I;(P))=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|5a-3b+7c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}$. (*).

Mà $d(B;(P))=\frac{|9a-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|9a-15b+21c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

$=\frac{|5a-11b+5c+4(a-b+4c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leq$.

$\leq \dfrac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+4\dfrac{|a-b+4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq 6\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=18\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{4}$. Chọn $a=1;b=-1;c=4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P): x-y+4z=0$. Suy ra $m=-1;n=4$. Suy ra: $m.n=-4$..

**Câu 499:** **[THPT chuyên ĐHKH Huế]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$, vuông góc với đường thẳng $d$ đồng thời cách điểm $A$ một khoảng lớn nhất.

**A.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{u}=(4;-5;-2)$. **C.** $\vec{u}=(8;-7;2)$. **D.** $\vec{u}=(1;1;-4)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

$\overrightarrow{AM}=(-3;-4;4)$. Gọi $\overrightarrow{u_d}$ là vectơ chỉ phương của $d$ $\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$.

Do $M\in\Delta \Rightarrow d[A;\Delta]\leq AM$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AM\perp\Delta$.

Khi đó chọn $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{AM}\right]=(4;-5;-2)$.

**Câu 500:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $a,\ b,\ c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng $(ABC)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng?

**A.** $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

**Cách 1**.

Ta có $(ABC):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$..

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$..

Mặt phẳng $(ABC)$ tiếp xúc **với** $(S) \Leftrightarrow d(I;(ABC))=R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$..

Mà $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7 \Rightarrow \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{2}$..

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có.

$$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=7^2\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}..$$

**Dấu** $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{a}}=\dfrac{2}{\frac{1}{b}}=\dfrac{3}{\frac{1}{c}}\\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7\end{cases}\Leftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=\dfrac{2}{3}$, khi đó $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{2}{9}$. **Chọn** **A.**

**Cách 2**.

Ta có $\left(ABC\right):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$ mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3), R=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$.

Ta có $\left(ABC\right)$ tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow\dfrac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\dfrac{72}{7}}$.

$$\Leftrightarrow\frac{\left|7-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7-\frac{7}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

$\Rightarrow V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{2}{9}$. Chọn phương án **A.**

**Cách 3**.

Giống **Cách 2** khi đến $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

Ta có $7^2=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\right)^2=\left(1.\dfrac{1}{a}+2.\dfrac{1}{b}+3.\dfrac{1}{c}\right)^2\le\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge\dfrac{7}{2}$.

Mà $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\dfrac{\frac{1}{a}}{1}=\dfrac{\frac{1}{b}}{2}=\dfrac{\frac{1}{c}}{3}$, kết hợp với giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$.

Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{2}{9}$. Chọn phương án **A.**

**Câu 501:** **[THPT Nguyễn Tất Thành]** Tìm phương trình của mặt phẳng $(\alpha)$ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt 3 tia $\text{Ox}, Oy, Oz$ lần lượt tại 3 điểm $A,B,C$ sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.

**A.** $6x+3y+2z-18=0$. **B.** $6x+3y-2z-18=0$.

**C.** $6x+3y+2z-8=0$. **D.** $6x+3y+2z+18=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Gọi $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ với $a,b,c>0$.

Ta có phương trình của mặt phẳng $(\alpha)$: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Có $M\in(\alpha)\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=1$ (1).

Thể tích khối tứ diện: $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có:

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}} \Leftrightarrow 1\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}}$ Hay $\dfrac{1}{abc}\le\dfrac{1}{6.27}$ hay $V_{OABC}\le\dfrac{1}{972}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c}$ Hay $b=2a, c=3a$.

Từ (1) suy ra: $a=3, b=6, c=9$.

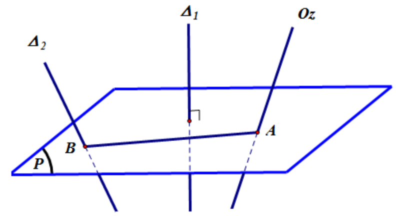
Từ đó, phương trình mp $(\alpha)$: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{9}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-18=0.$.

**Câu 502:** **[THPT Đặng Thúc Hứa]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{1}$. Một mặt phẳng $(P)$ vuông góc với $\Delta_1$, cắt trục $Oz$ tại $A$ và cắt $\Delta_2$ tại $B$. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn $AB$..

**A.** $\dfrac{2\sqrt{31}}{5}$. **B.** $\dfrac{24}{5}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**




Vì $(P) \perp \Delta_1 \Rightarrow (P)$ có dạng: $2x - y + z + D = 0$.

Vì $(P) \cap Oz = A \Rightarrow A(0;0;-D)$.

Vì $(P) \cap \Delta_2 = B \Rightarrow B(1-D;-2D;-2-D)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1-D;-2D;-2)$.

$\Rightarrow AB = \sqrt{(1-D)^2 + 4D^2 + 4}$.

$= \sqrt{5D^2 - 2D + 5}$.

$= \sqrt{5\left(D - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{24}{5}} \geq \sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$.

**Câu 503:** **[THPT chuyên Lê Thánh Tông]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M$ trên mặt cầu $(S)$ sao cho khoảng cách từ $M$ đến trục $Ox$ là lớn nhất.

**A.** $M(1;-3;3)$. **B.** $M(0;-3;2)$. **C.** $M(2;-2;3)$. **D.** $M(1;-1;1)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính là $R = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2 - 7} = \sqrt{2}$.

Gọi $A(a;0;0)$ thuộc trục $Ox$; $\overrightarrow{AI}(1-a;-2;2)$.

Mặt khác: $\overrightarrow{AI}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ nên $A(1;0;0)$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $I(1;-2;2)$ và $A(1;0;0) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases}$.

Gọi $M = \Delta \cap (S)$ nên tọa độ $M$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = 2t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = 2t \\ 1 + 4t^2 + 4t^2 - 2 - 8t - 8t + 7 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2t\\z=2t\\8t^2-16t+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=1\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=-3\\z=3\\t=\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Với $M(1;-1;1)\Rightarrow MA=\sqrt{2}$.

Với $M(1;-3;3)\Rightarrow MA=3\sqrt{2}$ nên lấy $M(1;-3;3)$.

**Câu 504:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$ và $D(1;1;1)$ với $m,n>0;m+n=1$. Biết khi $m,n$ thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với $(ABC)$ và đi qua điểm $D$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu đó.

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

$(P):\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{1}=1\Leftrightarrow nx+my+mnz-mn=0$.

$\Leftrightarrow(1-m)x+my+m(1-m)z-m(1-m)=0$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu cố định.

$\Rightarrow d(I,(P))=k$ ( hằng số ).

$$\Leftrightarrow\frac{\left|(1-m)a+mb+m(1-m)c-m(1-m)\right|}{\sqrt{(1-m)^2+m^2+m^2(1-m)^2}}=k.$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|m^2(1-c)+m(-a+b+c-1)+a\right|}{\sqrt{(m^2-m+1)^2}}=k.$$

Do $k$ là hằng số $\forall m\in\mathbb{R}$ nên $\dfrac{1-c}{1}=\dfrac{-a+b+c-1}{-1}=\dfrac{a}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-c\\b=1-c\end{cases}$.

Ta lại có $R=d(I,(P))=ID=k$.

$$\Leftrightarrow|a|=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2}\Leftrightarrow c=9\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}.$$

$\Rightarrow R=1$.

**Câu 505:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$ (khác gốc tọa độ) sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ có giá trị lớn nhất.

**A.** $(P): x+y+3z-12=0$. **B.** $(P): x+2y+3z-14=0$.

**C.** $(P): x+2y+3z-11=0$. **D.** $(P): x+2y+z-14=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$.

Ta có $M(1;2;3)\in P \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$. Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$.

Theo BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(1^2+2^2+3^2\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{14}..$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=\frac{14}{2} \\ c=\frac{14}{3} \end{cases}$. Vậy $(P): x+2y+3z-14=0.$.

**Câu 506:** **[THPT chuyên Lam Sơn lần 2]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z-15=0$. Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$ là điểm trên mặt phẳng $(P)$ sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=x_M-y_M+3z_M$.

**A.** $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=4$. **D.** $T=5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$.

Khi đó $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-x)-(1-x)+(1-x)=0 \\ 2(2-y)-(-1-y)+(-1-y)=0 \\ 2(0-z)-(3-z)+(-1-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow I(1;2;-2).$.

$$2MA^2-MB^2+MC^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=2MI^2+2IA^2-IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\left(2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=2MI^2+2IA^2-IB^2+IC^2$$

Do đó $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ lên $(P)$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua qua $I(1;2;-2)$ và nhận $\overrightarrow{n_P}=(3;-3;2)$ là một vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số $\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=2-3t\\z=2-2t\end{cases}\Rightarrow M(1+3t;2-3t;2-2t)$..

Điểm $M\in(P)\Rightarrow 3(1+3t)-3(2-3t)+2(2-2t)-15=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(4;-1;0)$.

Vậy $T=x_M-y_M+3z_M=5$.

**Câu 507:** **[Minh Họa Lần 2]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0;n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi $m$, $n$ thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng $(ABC)$ và đi qua $d$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu đó?

**A.** $R=\frac{3}{2}$. **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=1$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

□***Cách 1:***

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của $D$ lên mặt phẳng $(Oxy)$.

Ta có:

Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng $(ABC)$ là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+z=1$.

Suy ra phương trình tổng quát của $(ABC)$ là $nx+my+mnz-mn=0$.

Mặt khác $d(I,(ABC))=\frac{|1-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=1$ (vì $m+n=1$) và $ID=1=d(I,(ABC))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm $I$ (là hình chiếu vuông góc của $D$ lên mặt phẳng $Oxy$) tiếp xúc với $(ABC)$ và đi qua $D$.

Khi đó $R=1$.

**Câu 508:** **[CHUYÊN VÕ NGUYÊN GIÁP]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a$, $b$, $c$ dương thỏa mãn $a+b+c=4$. Biết rằng khi $a$, $b$, $c$ thay đổi thì tâm $I$ mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng $(P)$ cố định. Tính khoảng cách $d$ từ $M(1;1;-1)$ tới mặt phẳng $(P)$.

**A.** $d=\sqrt{3}$. **B.** $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d=0$. **D.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Vì $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a$, $b$, $c$ dương $\Rightarrow$ $OABC$ là tam diện vuông.

Gọi $I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ $\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$.

Theo giả thiết $a+b+c=4$ $\Leftrightarrow$ $2.\frac{a}{2}+2.\frac{b}{2}+2.\frac{c}{2}=4$.

$\Leftrightarrow$ $2x_I+2y_I+2z_I=4$.

$\Leftrightarrow$ $x_I+y_I+z_I=2$.

$\Rightarrow$ Tâm $I$ nằm trên mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$.

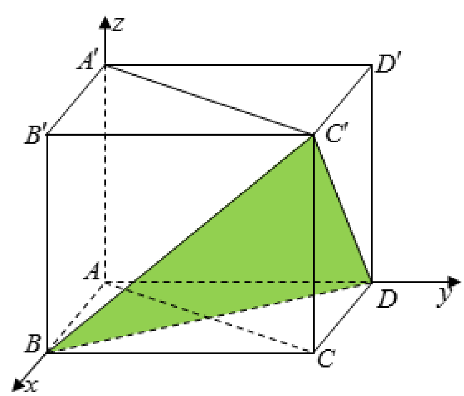
Vậy $d=d\left(M,(P)\right)=\frac{|1+1-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 509:** **[THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình lập phương $ABCD.A'BC'D'$ biết rằng $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Phương trình mặt phẳng $(P)$ chứa đường thẳng $BC'$ và tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc lớn nhất là.

**A.** $x+y-z-1=0$. **B.** $x+y+z-1=0$. **C.** $x-y+z-1=0$. **D.** $-x-y+z-1=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **A.**




Góc giữa hai mặt phẳng lớn nhất bằng $90^0$.

Nên góc lớn nhất giữa $(P)$ và $(ACC'A')$ bằng $90^0$ hay $(P)\perp(ACC'A')$.

Mà $(BDC')\perp(ACC'A')\Rightarrow(P)\equiv(BDC')$.

Ta có $C'(1;1;1)$.

VTPT của $(P)$: $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC'}\right]=(1;1;-1)$.

$\Rightarrow(P): x+y-z-1=0$.

**Câu 510:** **[CHUYÊN SƠN LA]** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;1;2)$, $B(-3;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+3z-14=0$. Điểm $M$ thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $\Delta MAB$ vuông tại $M$. Tính khoảng cách từ điểm $M$ đến mặt phẳng $Oxy$.

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $1$. **D.** $5$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-6;-2;-2)\Rightarrow AB=2\sqrt{11}$.

Xét: $(x_A+y_A+3z_A-14).(x_B+y_B+3z_B-14)$.

$=(3+1+3.2-14).(-3-1+3.0-14)=(-4)(-28)>0$.

Suy ra hai điểm $A,B$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng $(P)$ như hình vẽ.

Gọi $I$ là trung điểm của đoạn $AB \Leftrightarrow I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Suy ra: $I(0;0;1)$; $d\left(I;(P)\right)=\frac{|3.1-14|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\sqrt{11}=\frac{1}{2}AB$.

Mặt khác: $M$ là điểm thuộc mặt phẳng $(P)$ sao cho $\Delta MAB$ vuông tại $M\Rightarrow MI=\frac{1}{2}AB$.

Suy ra $IM=d\left(I;(P)\right)\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của $I$ trên mặt phẳng $(P)$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $I(0;0;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P)$.

Suy ra $\Delta$ qua $I(0;0;1)$ và nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P)$ làm véctơ chỉ phương.

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Ta thấy: $M\in\Delta\Rightarrow M(t;t;1+3t)$.

$M\in(P)\Leftrightarrow t+t+3(1+3t)-14=0\Leftrightarrow 11.t=11\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;1;4)$. $Oxy: z=0$ .Suy ra:

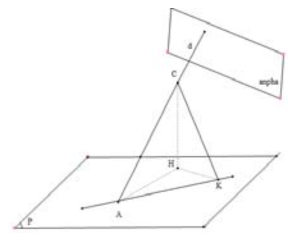
$d(M;Oxy)=\frac{|4|}{\sqrt{1}}=4$.

**Câu 511:** **[THPT chuyên Biên Hòa lần 2]** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+2z-5=0$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa $\Delta$ và tạo với $(\alpha)$ một góc nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng $ax+by+cz+d=0$ ($a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ và $a,b,c,d<5$). Khi đó tích $a.b.c.d$ bằng bao nhiêu?

**A.** $-60$. **B.** $120$. **C.** $60$. **D.** $-120$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**



Hình minh họa.

Trên đường thẳng $\Delta$ lấy điểm $A(1;1;0)$. Gọi $d$ là đường thẳng đi qua $A$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha)$. Ta có $\vec{u}_d = (1;-2;2)$.

Trên đường thẳng $d$ lấy điểm $C$ bất kì khác điểm $A$.

Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $C$ lên mặt phẳng $(P)$ và đường thẳng $\Delta$.

Lúc này, ta có $((P);(\alpha)) = (CH;d) = \widehat{HCA}$.

Xét tam giác $HCA$ ta có $\sin\widehat{HCA} = \dfrac{AH}{AC}$, mà tam giác $AHK$ vuông tại $K$ nên ta có $\dfrac{AH}{AC} \geq \dfrac{AK}{AC}$ (không đổi). Nên để góc $\widehat{HCA}$ nhỏ nhất khi $H$ trùng với $K$ hay $CK \perp (P)$.

Ta có $(ACK)$ đi qua $d$ và $\Delta$. Vì $\left[\vec{u}_d;\vec{u}_\Delta\right] = (-8;0;4)$ nên chọn $\vec{n}_{(ACK)} = (-2;0;1)$.

Mặt khác ta có $(P)$ đi qua $\Delta$, vuông góc mặt phẳng $(ACK)$ và $\left[\vec{n}_{(ACK)};\vec{u}_\Delta\right] = (-2;5;-4)$.

Nên $\vec{n}_{(P)} = (-2;5;-4)$. Vậy phương trình mặt phẳng $(P)$ là :

$-2(x-1)+5(y-1)-4z=0 \Leftrightarrow -2x+5y-4z-3=0 \Leftrightarrow 2x-5y+4z+3=0$.

**Câu 512:** **[TT Hiếu Học Minh Châu]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho biết đường cong $(\omega)$ là tập hợp tâm của các mặt cầu đi qua điểm $A(1;1;1)$ đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$ và $(\beta): x+y+z+6=0$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(\omega)$ bằng.

**A.** $3\sqrt{5}$. **B.** $3$. **C.** $45\pi$. **D.** $9\pi$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Gọi $(S)$ là một mặt cầu thỏa đề bài, với tâm $I(x;y;z)$. Theo bài ra, ta có $IA = d(I;(\alpha)) = d(I;(\beta))$. Mà.

$$d\left(I;(\alpha)\right)=d\left(I;(\beta)\right)\Leftrightarrow |x+y+z-6|=|x+y+z+6|$$
$$\Leftrightarrow x+y+z=0.$$

Vậy tâm của các mặt cầu thỏa đề bài sẽ nằm trên mặt phẳng $(P): x+y+z=0$.

Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên $IA=\dfrac{d\left((\alpha);(\beta)\right)}{2}=2\sqrt{3}$. Từ đó $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$. Vậy điểm $I(x;y;z)$ thuộc mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$..

$\Rightarrow$ Tập hợp tâm của mặt cầu $(S)$ là giao tuyến của mặt cầu $(S_1)$ và mặt phẳng $(P)$ hay chính là đường tròn có bán kính $R=\sqrt{R^2_{(S_1)}-d^2\left(A;(P)\right)}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=3$..

Vậy diện tích của hình phẳng cần tính là $S=\pi R^2=9\pi$.

**Câu 513:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+ay+bz-1=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Biết rằng $(\alpha)//\Delta$ và $(\alpha)$ tạo với các trục $Ox$, $Oz$ các góc giống nhau. Tìm giá trị của $a$.

**A.** $a=2$. **B.** $a=-1$ hoặc $a=1$.
**C.** $a=2$ hoặc $a=0$. **D.** $a=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $\begin{cases}\vec{u}_\Delta=(1;-1;-1)\\ \vec{n}_{(\alpha)}=(1;a;b)\end{cases}$ mà $(\alpha)//\Delta$ nên $\Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow 1-a-b=0\Leftrightarrow a+b=1\ (*)$.

Mặt khác $(\alpha)$ tạo với các trục $Ox$, $Oz$ suy ra $\sin\left(\vec{n}_{(\alpha)};\vec{i}\right)=\sin\left(\vec{n}_{(\alpha)};\vec{k}\right)$ với $\begin{cases}\vec{i}=(1;0;0)\\ \vec{k}=(0;0;1)\end{cases}$.

$\Rightarrow \dfrac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|\left|\vec{i}\right|}=\dfrac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|\left|\vec{k}\right|}\Leftrightarrow \dfrac{1}{1}=\dfrac{|b|}{1}\Leftrightarrow b=\pm1$, thế vào $(*)$ ta được $\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=0\end{array}\right.$.

Tuy nhiên khi $a=0\Rightarrow(\alpha): x+z-1=0$ chứa đường thẳng $\Delta$ suy ra nhận $a=2$.

**Câu 514:** **[THPT CHUYÊN VINH]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng $\Delta$ đi qua $M$, vuông góc với đường thẳng $d$ đồng thời cách điểm $A$ một khoảng bé nhất.

**A.** $\vec{u}=(3;4;-4)$. **B.** $\vec{u}=(2;2;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(2;1;6)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Gọi $(P)$ là mặt phẳng qua $M$ và vuông góc với $d$. Phương trình của $(P): 2x+2y-z+9=0$.

Gọi $H,K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M$ trên $\Delta,(P)$.

Ta có $K(-3;-2;-1), d(M,\Delta)=MH\geq MK$..

Vậy khoảng cách từ $M$ đến $\Delta$ bé nhất khi $\Delta$ đi qua $M,K$. $\Delta$ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;2)$.

**Câu 515:** **[THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa]** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;-3)$, $C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu $(S)$ có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$. Tìm tọa độ điểm $D$ trên mặt cầu $(S)$ sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất:

**A.** $D(1;-1;0)$. **B.** $D(1;0;1)$. **C.** $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $D\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Mp$(ABC)$ qua $A(0;1;1)$, chọn VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)//(2;-2;1)$.

$\Rightarrow (ABC): 2x-2y+z+1=0$.

Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=2$.

Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua $I$ và vuông góc với $(ABC)$ $\Rightarrow VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_{(ABC)}}=(2;-2;1)$.

$$\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2t\\ z=-1+t\end{cases}.$$

Gọi $D$ là điểm thuộc mặt cầu $(S)$ sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất $\Rightarrow D\in\Delta\cap(S)$.

Xét hệ: $\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2t\\ z=-1+t\\ x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)\\ t=-\frac{2}{3}\Rightarrow D_2\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)\end{array}\right.$.

Ta có $d\left[D_1;(ABC)\right]=\frac{8}{3}$, $d\left[D_2;(ABC)\right]=\frac{4}{3}$.

Vậy $D_1$ là điểm cần tìm.

**Câu 516:** **[Sở GD&ĐT Bình Phước]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với $a$, $b$, $c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng $(ABC)$ tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng?

**A.** $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1**.

Ta có $\left(ABC\right):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$..

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;2;3\right)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$..

Mặt phẳng $\left(ABC\right)$ tiếp xúc **với** $\left(S\right)\Leftrightarrow d\left(I;\left(ABC\right)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$..

Mà $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$..

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có.

$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=7^2\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}$..

**Dấu** "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{\frac{1}{a}}=\frac{2}{\frac{1}{b}}=\frac{3}{\frac{1}{c}}\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\end{cases}\Leftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=\frac{2}{3}$, khi đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$. **Chọn** **A.**

**Cách 2**.

Ta có $\left(ABC\right):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3),R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Ta có $\left(ABC\right)$ tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

$$\Leftrightarrow\frac{\left|7-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7-\frac{7}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\frac{2}{3}\end{cases}.$$

$\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$. Chọn phương án **A.**

**Cách 3**.

Giống **Cách 2** khi đến $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

Ta có $7^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=\left(1.\frac{1}{a}+2.\frac{1}{b}+3.\frac{1}{c}\right)^2\le\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}$.

Mà $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\frac{\frac{1}{a}}{1}=\frac{\frac{1}{b}}{2}=\frac{\frac{1}{c}}{3}$, kết hợp với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$.

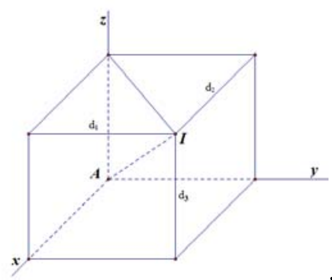
Ta có $\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$. Chọn phương án **A.**

**Câu 517: [TTGDTX Cam Lâm - Khánh Hòa]** Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua $A$ đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn tương ứng là.

**A.** $4\pi$. **B.** $11\pi$. **C.** $10\pi$. **D.** $\pi$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B.**




Mặt cầu $(S)$ có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$.

Giả sử các mặt phẳng $(Axy)$, $(Axz)$, $(Ayz)$ đôi một vuông góc nhau và cùng đi qua điểm $A$ như hình vẽ.

Gọi $d_1$, $d_2$, $d_3$ lần lượt là khoảng cách từ tâm $I$ đến các mặt phẳng $(Axz)$, $(Azy)$ và $(Axy)$. Khi đó, $d_1^2+d_2^2+d_3^2=IA^2=1$.

Bán kính đường tròn giao tuyến của $(Axz)$ với mặt cầu $(S)$ là $R_1=\sqrt{R^2-d_1^2}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến của $(Ayz)$ với mặt cầu $(S)$ là $R_2=\sqrt{R^2-d_2^2}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến của $(Axz)$ với mặt cầu $(S)$ là $R_3=\sqrt{R^2-d_3^2}$.

Tổng diện tích ba hình tròn là.

$\pi R_1^2+\pi R_2^2+\pi R_3^2=\pi\left(R_1^2+R_2^2+R_3^2\right)=\pi\left[3R^2-\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)\right]=\pi\left[3.2^2-1\right]=11\pi$

**Câu 518:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$ và $D(1;1;1)$ với $m,n>0; m+n=1$. Biết khi $m,n$ thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với $(ABC)$ và đi qua điểm $D$. Tính bán kính $R$ của mặt cầu đó.

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **C.**

$(P): \frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow nx+my+mnz-mn=0$.

$\Leftrightarrow (1-m)x+my+m(1-m)z-m(1-m)=0$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu cố định.

$\Rightarrow d(I,(P))=k$ ( hằng số ).

$$\Leftrightarrow \frac{|(1-m)a+mb+m(1-m)c-m(1-m)|}{\sqrt{(1-m)^2+m^2+m^2(1-m)^2}}=k. \Leftrightarrow \frac{|m^2(1-c)+m(-a+b+c-1)+a|}{\sqrt{(m^2-m+1)^2}}=k.$$

Do $k$ là hằng số $\forall m\in\mathbb{R}$ nên $\frac{1-c}{1}=\frac{-a+b+c-1}{-1}=\frac{a}{1}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-c \\ b=1-c \end{cases}$.

Ta lại có $R=d(I,(P))=ID=k$.

$$\Leftrightarrow |a|=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2}\Leftrightarrow c=9\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow R=1$.

**Câu 519:** **[THPT chuyên Lê Quý Đôn]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các tia $Ox$, $Oy$, $Oz$ lần lượt tại $A$, $B$, $C$ (khác gốc tọa độ) sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ có giá trị lớn nhất.

**A.** $(P): x+y+3z-12=0$. **B.** $(P): x+2y+3z-14=0$.

**C.** $(P): x+2y+3z-11=0$. **D.** $(P): x+2y+z-14=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

Phương trình mặt phẳng $(P)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$..

Ta có $M(1;2;3)\in P\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$. Ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$..

Theo BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2 \le \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(1^2+2^2+3^2\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{14}..$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \\ \frac{1}{a}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=\frac{14}{2} \\ c=\frac{14}{3} \end{cases}$. Vậy $(P): x+2y+3z-14=0$..

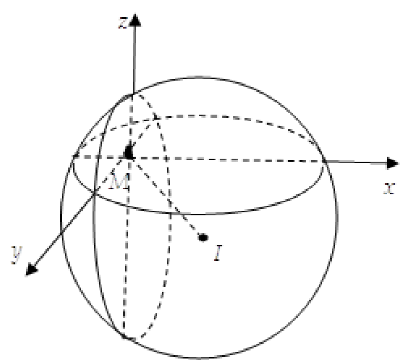
**Câu 520:** **[THPT TH Cao Nguyên]** Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ và điểm $M(2;-1;-3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua $M$ và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu $(S)$ theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng bình phương của ba bán kính ba đường tròn tương ứng là.

**A.** $10$. **B.** $11$. **C.** $4$. **D.** $1$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **B.**

**Cách 1:**




Ta có mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(2;-1;-2)$.

và bán kính $R=2$.

Tịnh tiến hệ trục tọa độ lấy $M$ là gốc và trong tọa độ này $I(a;b;c)$.

Khi đó $1=IM \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$.

Khoảng cách từ $I$ đến ba mặt đôi 1 vuông góc là $|a|,|b|,|c|$.

Do đó tổng bình phương của ba bán kính ba đường tròn tương ứng là.

$$R^2-|a|^2+R^2-|b|^2+R^2-|c|^2=3R^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=11.$$

**Cách 2:**

Gọi $\alpha$ là mặt phẳng đi qua $M, I$, khi đó $\alpha$ và $(S)$ cắt nhau tạo thành đường tròn bán kính:

$r_\alpha=\sqrt{R_S-IM^2}=\sqrt{3}$.

Gọi $\beta$ là mặt phẳng đi qua $MI$ và vuông góc với $\alpha$, khi đó $\beta$ và $(S)$ cắt nhau tạo thành đường tròn bán kính: $r_\beta = R_S = \sqrt{4} = 2$.

Gọi $\gamma$ là mặt phẳng đi qua $MI$ và $\gamma$ vuông góc với $\alpha$, $\gamma$ vuông góc với $\beta$, khi đó $\gamma$ và $(S)$ cắt nhau tạo thành đường tròn bán kính: $r_\gamma = R_S = \sqrt{4} = 2$.

Vậy tổng bình phương các bán kính của ba đường tròn: $r_\alpha{}^2 + r_\beta{}^2 + r_\gamma{}^2 = 11$.

**Câu 521:** **[THPT Kim Liên-HN]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)$: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$ và hai điểm $A(1;0;4)$, $B(0;1;4)$. Các mặt phẳng $(P_1)$, $(P_2)$ chứa đường thẳng $AB$ và lần lượt tiếp xúc với mặt cầu $(S)$ tại các điểm $H_1$, $H_2$. Viết phương trình đường thẳng $H_1H_2$.

**A.** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+t \\ y=\dfrac{1}{2}+t \\ z=4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=4 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=2 \end{cases}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Ta có $(S)$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Đường thẳng $\Delta$ đi qua hai điểm $A$, $B$ có phương trình $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}$.

$(IH_1H_2)$ đi qua $I$ và vuông góc với $AB$ nên có phương trình $-x+y-3=0$.

Gọi $H$ là giao điểm của $AB$ và $(IH_1H_2)$. Khi đó $H(-1;2;4)$.

Gọi $M$ là giao điểm của $H_1H_2$ và $IH$. Khi đó $H_1M \perp IH$.

Ta có $\dfrac{IM}{IH} = \dfrac{IM.IH}{IH^2} = \dfrac{R^2}{IH^2} = \dfrac{1}{3}$ nên $\overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IH}$. Do đó $M(-1;2;2)$.

$H_1H_2$ vuông góc với $IH$, $AB$ nên có vtcp $\vec{u} = -\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{AB}\right] = (1;1;0)$.

Phương trình $H_1H_2$ : $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \\ z=2 \end{cases}$.

**Câu 522:** **[Chuyên ĐH Vinh]** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+ay+bz-1=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$. Biết rằng $(\alpha) \,//\, \Delta$ và $(\alpha)$ tạo với các trục $Ox$, $Oz$ các góc giống nhau. Tìm giá trị của $a$.

**A.** $a=2$. **B.** $a=-1$ hoặc $a=1$.

**C.** $a=2$ hoặc $a=0$. **D.** $a=0$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn A.**

Ta có $\begin{cases} \vec{u}_\Delta = (1;-1;-1) \\ \vec{n}_{(\alpha)} = (1;a;b) \end{cases}$ mà $(\alpha) // \Delta$ nên $\Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 1-a-b=0 \Leftrightarrow a+b=1$ $(*)$.

Mặt khác $(\alpha)$ tạo với các trục $Ox$, $Oz$ suy ra $\sin\left(\vec{n}_{(\alpha)};\vec{i}\right) = \sin\left(\vec{n}_{(\alpha)};\vec{k}\right)$ với $\begin{cases} \vec{i} = (1;0;0) \\ \vec{k} = (0;0;1) \end{cases}$.

$\Rightarrow \dfrac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|\left|\vec{i}\right|} = \dfrac{\left|\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|\left|\vec{k}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{|b|}{1} \Leftrightarrow b = \pm 1$, thế vào $(*)$ ta được $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=0 \end{array}\right.$.

Tuy nhiên khi $a=0 \Rightarrow (\alpha): x+z-1=0$ chứa đường thẳng $\Delta$ suy ra nhận $a=2$.

**Câu 523:** **[Sở Hải Dương]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Viết phương trình đường thẳng $d$ nằm trong mặt phẳng $(P)$ sao cho mọi điểm thuộc đường thẳng $d$ luôn cách đều 2 điểm $A$ và $B$.

**A.** $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**

Lấy điểm $M$ bất kỳ thuộc đường thẳng $d$ do $M$ cách đều $A$ và $B$ nên $M$ thuộc mặt phẳng trung trực của $AB$. Gọi $I$ là trung điểm của đoạn thẳng $AB$. Ta có mặt phẳng trung trực $(Q)$ của $AB$ đi qua $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2};1\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;0)$ nên phương trình tổng quát của mặt phẳng $(Q)$ là $-3\left(x-\dfrac{3}{2}\right) - 1\left(y-\dfrac{5}{2}\right) + 0(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x+y-7=0$.

Do đó đường thẳng $d$ là giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z-7=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases}$.

Cho $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=7 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C(0;7;0) \in d$.

Cho $x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow D(1;4;2) \in d$.

Đường thẳng đi qua $C(0;7;0)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{CD} = (1;-3;2)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình tham số đường thẳng là $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

**Câu 524:** **[Sở Bình Phước]** Hai quả bóng hình cầu có kích thước khác nhau được đặt ở hai góc của một căn nhà hình hộp chữ nhật. Mỗi quả bóng tiếp xúc với hai bức tường và nền của căn nhà đó. Trên bề mặt của mỗi quả bóng, tồn tại một điểm có khoảng cách đến hai bức tường quả bóng tiếp xúc và đến nền nhà lần lượt là $9,10,13$. Tổng độ dài các đường kính của hai quả bóng đó là?

**A.** $34$. **B.** $16$. **C.** $32$. **D.** $64$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn** **D.**

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ gắn với góc tường và các trục là các cạnh góc nhà. Do hai quả cầu đều tiếp xúc với các bức tường và nền nhà nên tương ứng tiếp xúc với ba mặt phẳng toạ độ, vậy tâm cầu sẽ có toạ độ là $I\left(a;a;a\right)$ với $a>0$ và có bán kính $R=a$.

Do tồn tại một điểm trên quả bóng có khoảng cách đến các bức tường và nền nhà lần lượt là 9, 10, 11 nên nói cách khác điểm $A\left(9;10;13\right)$ thuộc mặt cầu.

Từ đó ta có phương trình: $\left(9-a\right)^2+\left(10-a\right)^2+\left(13-a\right)^2=a^2$.

Giải phương trình ta được nghiệm $a=7$ hoặc $a=25$.

Vậy có 2 mặt cầu thoả mãn bài toán và tổng độ dài đường kính là $2\left(7+25\right)=64$.