PHẠM TRỌNG THƯ

TOÁN NÂNG CAO
LƯỢNG GIÁC
PHẦN PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

- BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ GIỎI LỚP **10, 11, 12**
- LUYỆN THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẦN I. MỘT SỐ DẠNG THƯỜNG GẶP

Chủ đề 1: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhóm 1: Phương trình lượng giác cơ bản

Dạng	Cách giải
$\sin X = m$	• Nếu $\lvert m\rvert > 1$ thì phương trình vô nghiệm • Nếu $\lvert m\rvert \le 1$:Ta có: $\sin X = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \alpha + k2\pi \\ X = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ với $\sin\alpha = m$ $\left(\text{có thể lấy } \alpha = \arcsin m, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$
$\cos X = m$	• Nếu $\lvert m\rvert > 1$ thì phương trình vô nghiệm • Nếu $\lvert m\rvert \le 1$:Ta có: $\cos X = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \alpha + k2\pi \\ X = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ với $\cos\alpha = m$ (có thể lấy $\alpha = \arccos m, \alpha \in [0; \pi]$)
$\tan X = m$	Ta có: $\tan X = m \Leftrightarrow X = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\tan\alpha = m$ $\left(\text{có thể lấy } \alpha = \arctan m, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$
$\cot X = m$	Ta có : $\cot X = m \Leftrightarrow X = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\cot\alpha = m$ (có thể lấy $\alpha = \text{arccot}\, m, \alpha \in (0; \pi)$)

Lưu ý:

• Trong bài toán, đơn vị cung (góc) cần thống nhất

Ví dụ: $x = 60^0 + k.180^0$ là cách viết đúng, còn $x = \frac{\pi}{3} + k.180^0$ là cách viết sai.

• Khi giải phương trình lượng giác có chứa hàm tang hoặc hàm côtang ta phải đặt điều kiện, chẳng hạn $\cot u$ xác định khi $u \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $\tan u$ xác định khi $u \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• Khi giải phương trình lượng giác ta luôn luôn chú ý đặt điều kiện tồn tại bài toán.

Trường hợp đặc biệt :

$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$	$\sin u = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
$\cot u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$	$\tan u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Nhóm 2 : **Tuỳ theo phương trình lượng giác đã cho mà ta thực hiện các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa phương trình cần giải về dạng cơ bản ở nhóm 1 hoặc về dạng có cách giải dễ hơn.**

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin 3x = \frac{1}{2}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \cos 2x = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\tan\frac{x}{3} = 2$ (*).

Giải

Điều kiện : $\frac{x}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$(*) \Leftrightarrow x = 3\arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = 3\arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Chú ý : $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$; $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$
$-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$; $-\cot\alpha = \cot(-\alpha)$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\cot(x + 30^0) = \cot\frac{x}{2}$ (*).

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x + 30^0 \neq k.180^0 \\ \frac{x}{2} \neq n.180^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -30^0 + k.180^0 \\ x \neq n.360^0 \end{cases}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

$(*) \Leftrightarrow x + 30^0 = \frac{x}{2} + k.180^0 \Leftrightarrow 2x + 60^0 = x + k.360^0$

$\Leftrightarrow x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sin 2x - \sin 2x\cos x = 0$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow \sin 2x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Giải và biện luận phương trình $\sin x = 2m - 1$ (*).

Giải

•***Trường hợp 1*:** $|2m - 1| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 1 > 1 \\ 2m - 1 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

Phương trình (*) vô nghiệm.

•***Trường hợp 2*:** $|2m - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$.

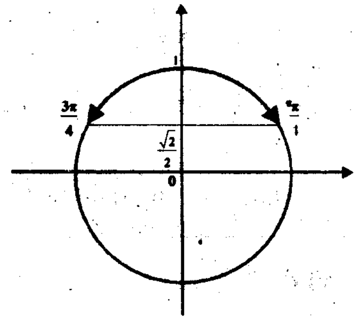
Phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(2m - 1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(2m - 1) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

***Tóm lại*:**

- Nếu $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$ thì phương trình (*) vô nghiệm.
- Nếu $0 \leq m \leq 1$ thì phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(2m - 1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(2m - 1) + k2\pi. \end{array}\right.$

Ví dụ 8. Tìm m để phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Giải



• Vì $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$$

• Phương trình đã cho có nghiệm

$x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{m}{\sqrt{2}}\le 1$

$\Leftrightarrow 1<m\le\sqrt{2}$.

Nhóm 2

Ví dụ 9. Giải phương trình $\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ (*).

Giải

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}\Leftrightarrow 2(1+\cos 2x)=\sqrt{3}+2$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\ \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sin x\cos 2x=\sin 2x\cos 3x$ (*).

Giải

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)\Leftrightarrow\sin 5x=\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=3x+k2\pi\\5x=\pi-3x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sin 2x=\cos 3x$ (*).

Giải

$$(*)\Leftrightarrow\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\3x=-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5}\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5};\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$ (*).

Giải

Đặt $a=\sin^2\dfrac{x}{2}$ và $b=\cos^2\dfrac{x}{2}\Rightarrow a+b=1$

$\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-\dfrac{1}{2}\sin^2x$

$(*)\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sin^2x=1\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 13. Giải phương trình :

$$\cos 10x+2\cos^2 4x+6\cos 3x\cos x=\cos x+8\cos x\cos^3 3x\ (*).$$

Giải

$(*)\Leftrightarrow\cos 10x+1+\cos 8x=\cos x+2\cos x(4\cos^3 3x-3\cos 3x)$

$\Leftrightarrow\cos 10x+1+\cos 8x=\cos x+2\cos x\cos 9x$

$\Leftrightarrow\cos 10x+1+\cos 8x=\cos x+\cos 10x+\cos 8x$

$\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 14. Giải $\dfrac{(2-\sqrt{3})\cos x-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1$ (*).

Giải

Điều kiện : $\cos x\neq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

$(*)\Leftrightarrow(2-\sqrt{3})\cos x-\left[1-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=2\cos x-1$

$\Leftrightarrow(2-\sqrt{3})\cos x-(1-\sin x)=2\cos x-1\Leftrightarrow-\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow\tan x=\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow$ (*) có nghiệm là $x=-\dfrac{2\pi}{3}+n2\pi,n\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 15. Xác định m để phương trình:

$$m\cos\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)+(2m-1)\sin(7\pi-x)+5m-7=2\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\ (*)$$

có đúng một nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$.

Giải

Phương trình (*) viết lại

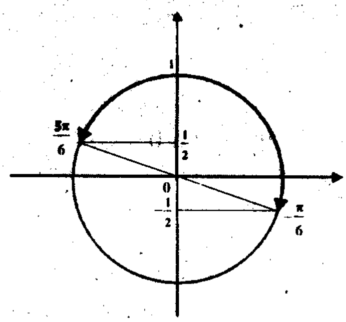
$m\sin x+(2m-1)\sin x+5m-7=2\sin x$

$\Leftrightarrow 3(m-1)\sin x=7-5m$ (1)

- **Nếu** $m=1$: (1) $\Leftrightarrow 0\sin x=2$

  Phương trình(*) vô nghiệm

- **Nếu** $m\neq 1$: (1) $\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{7-5m}{3(m-1)}$ (2)



Đặt $t=\sin x$, (2) viết lại : $t=\dfrac{7-5m}{3(m-1)}$. Với $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]\Rightarrow t\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Nhìn vào đường tròn lượng giác:

- **Nếu** $t\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ hoặc $t=1$ thì phương trình $\sin x=t$ có đúng một nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$.

- **Nếu** $t\in\left[\frac{1}{2};1\right)$ thì phương trình $\sin x=t$ có đúng hai nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.

Theo yêu cầu bài toán thì $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq 1\\ \dfrac{7-5m}{3m-3}=1\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq 1\\ -\dfrac{1}{2}\le\dfrac{7-5m}{3m-3}<\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\neq 1\\ m=\dfrac{5}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}m\neq 1\\ \dfrac{7m-11}{m-1}\le 0\\ \dfrac{13m-17}{m-1}>0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{4}$ hoặc $\dfrac{17}{13}<m\le\dfrac{11}{7}$.

Vậy $m=\dfrac{5}{4}$ hoặc $\dfrac{17}{13}<m\le\dfrac{11}{7}$ thì (*) có đúng một nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan(x-30^0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a) $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \cot x = 0$ b) $\sin^2 4x - \sin^2\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

c) $2\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \sqrt{2} = 0$ d) $\tan x^2 = -1$.

Bài tập 3. Giải và biện luận các phương trình:

a) $(2m-1)\cos x = m\cos x - 5$ b) $4\tan x - m = (m+1)\tan x$.

Bài tập 4.

a) Tìm m để phương trình $\cos 2x = m - 1$ có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$

b) Tìm m để $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 3m - 1$ (*) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Nhóm 2

Bài tập 5. Giải các phương trình :

a) $\cos x\cos 7x = \cos 3x\cos 5x$ b) $|\cos x| = \frac{1}{2}$

c) $\sin^2 x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ d) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$

e) $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos^2 2x + \frac{1}{4}$ f) $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

g) $\cos^3 x\ \cos 3x + \sin^3 x\ \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ h) $\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

k) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 6. Xác định m để phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = m$ có nghiệm.

Bài tập 7. Giải các phương trình:

a) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$ b) $\frac{3(\sin x + \tan x)}{\tan x - \sin x} - 2\cos x = 2$

c) $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$ d) $\frac{1}{\tan x + \cot x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$

e) $\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3}$ f) $\frac{1+\cos^2 x}{2(1-\sin x)} - \tan^2 x\sin x = \frac{1+\sin x}{2} + \tan^2 x$.

Bài tập 8. Giải biện luận phương trình $(3m-2)\cos 2x + 4m\sin^2 x + m = 0$.

Bài tập 9. Cho phương trình

$$(2+m)\sin\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)-(3m+2)\cos(2\pi-x)+m-2=0 \quad (*)$$

a) Xác định m để (*) có nghiệm

b) Xác định m để (*) có đúng ba nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$

b) $(*) \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

c) Điều kiện: $x \neq 120^0 + k.180^0, k \in \mathbf{Z}$

Ta có: $\tan(x-30^0) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^0 \Leftrightarrow x = 60^0 + k.180^0, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 2. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi$; $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$(*) \Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + x + k\pi$

$\Leftrightarrow 0x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm.

b) $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin 4x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) & (1) \\ \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) & (2) \end{array}\right.$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 3x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \pi - \left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{21} + \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{21} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{21} + \frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbf{Z}$.

c) $$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + 4k & (1) \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + 4k & (2) \end{array}\right.$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \frac{1}{2} + 4k \le 1 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0$

Lúc đó: (1) $\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + n2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{12} + n2\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$).

Lý luận giống (1) $\Rightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow k = 0$

Lúc đó :(2) $\Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{12} + n2\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{12} + n2\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$)

Vậy (*) có nghiệm $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$; $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

d) $\tan x^2 = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Do $x^2 \ge 0 \Rightarrow k \ge \frac{1}{4}$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k \in \{1, 2, ..., n, ...\}$

Vậy $x = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{4} + k\pi}$, $k = 1, 2, ...$

Bài tập 3.

a) Ta có: $(2m-1)\cos x = m\cos x - 5 \Leftrightarrow (m-1)\cos x = -5$ (*)

- $m = 1$: (*) vô nghiệm.
- $m \ne 1$:

Trường hợp 1: $\left|-\frac{5}{m-1}\right| > 1 \Leftrightarrow |m-1| < 5 \Leftrightarrow -4 < m < 6$ thì (*) vô nghiệm

Trường hợp 2: $\left|-\frac{5}{m-1}\right| \le 1 \Leftrightarrow |m-1| \ge 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 \ge 5 \\ m-1 \le -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le -4 \end{array}\right.$

Đặt $-\frac{5}{m-1} = \cos\varphi$, phương trình (*) $\Leftrightarrow x = \pm\varphi + k2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

Tóm lại **:**

- $-4 < m < 6$ thì (*) vô nghiệm.
- $m \le -4$ hoặc $m \ge 6$ thì (*) có nghiệm $x = \pm\varphi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) Ta có: $4\tan x - m = (m+1)\tan x \Leftrightarrow (3-m)\tan x = m$ (*)

- $m = 3$:(*) vô nghiệm.
- $m \ne 3$:(*) $\Leftrightarrow \tan x = \dfrac{m}{3-m}$, đặt $\dfrac{m}{3-m} = \tan\varphi$

Ta có: (*) $\Leftrightarrow x = \varphi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 4. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Ta có : $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -1 \le \cos 2x < 0$

(*) có nghiệm $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$ khi $-1 \le m-1 < 0 \Leftrightarrow 0 \le m < 1$

b) Ta có : $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{4} \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

(*) có nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ khi $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le 3m - 1 \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}+2}{6} \le m \le \dfrac{2}{3}$.

Nhóm 2

Bài tập 5. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) = \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow 6x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$$

b) $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$

c) $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

d) Ta có: $\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$

(*) trở thành $a^3 + b^3 = \dfrac{7}{16} \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = \dfrac{7}{16}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{7}{16} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

e) Cách giải tương tự câu c . Đáp số $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

f) $(*) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 3x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\pi + 3x + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} - k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

g) Thế $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$; $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ vào phương trình đã cho và rút gọn lại ta được $3\cos 2x + \cos 6x = \sqrt{2}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 3\cos 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos^3 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

h) $(*) \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

k) $(*) \Leftrightarrow 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{12} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Bài tập 6.

- $m = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{8m - 5}{3}$
- Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le \frac{8m - 5}{3} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le m \le 1.$

Bài tập 7. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

$(*) \Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

b) Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3\left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} = 2(1+\cos x) \Leftrightarrow \frac{3\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)}{\frac{1}{\cos x} - 1} = 2(1+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1+\cos x)}{1-\cos x} = 2(1+\cos x) \Leftrightarrow \frac{3}{1-\cos x} = 2 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

c) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \sin x = 0 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

d) Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0; \cos x \neq 0 \\ \tan x + \cot x \neq 0; \cot x \neq 1 \end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\sin x\cos x}} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1} \Leftrightarrow \sin x\cos x = \sqrt{2}\sin x$$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\cos x = \sqrt{2}$ (loại)

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

e) Điều kiện: $\cos 2x \neq \cos x$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -(x + \frac{\pi}{6}) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \ \text{(loại)} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

f) Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1+\cos^2 x}{2(1-\sin x)} = \frac{1+\sin x}{2} + \tan^2 x(1+\sin x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos^2 x = 1 - \sin^2 x + 2\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot(1 - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 8. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow (3m-2)\cos 2x + 4m\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + m = 0 \Leftrightarrow (2-m)\cos 2x = 3m$$

- Giải tương tự Bài tập 3a
- Đáp số:

 + $m < -1$ hoặc $m > \frac{1}{2}$ thì (*) vô nghiệm.

 + $-1 \le m \le \frac{1}{2}$ thì (*) có nghiệm $x = \pm\varphi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ $\left(\text{với } \cos 2\varphi = \frac{3m}{2-m}\right)$.

Bài tập 9. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow -(2+m)\cos x - (3m+2)\cos x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4(m+1)\cos x = m - 2 \ (1)$

- $m = -1 : (1) \Leftrightarrow 0.\cos x = -3 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.
- $m \ne -1 : (1) \Leftrightarrow \cos x = \frac{m-2}{4(m+1)} \ (2)$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le \frac{m-2}{4(m+1)} \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge -\frac{2}{5} \end{array}\right.$

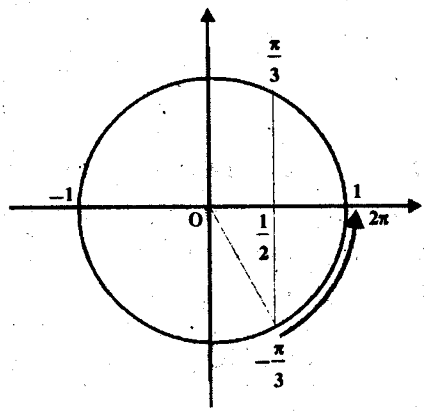
b) Đặt $t = \cos x$.

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Nhìn đường tròn lượng giác ta thấy :

(*) có đúng 3 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ khi

$$\begin{cases} m \ne -1 \\ \frac{1}{2} \le t = \frac{m-2}{4(m+1)} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m < -2.$$



Chủ đề 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhóm 1: **Phương trình lượng giác bậc hai đối với một hàm số lượng giác**

Dạng	Cách giải
$a\sin^2X + b\sin X + c = 0\ (a \neq 0)$	• Đặt $t = \sin X, \lvert t\rvert \le 1$ • Ta có: $at^2 + bt + c = 0\ (1)$, giải (1) tìm nghiệm t (nếu có), suy ra nghiệm X.
$a\cos^2X + b\cos X + c = 0\ (a \neq 0)$	• Đặt $t = \cos X,\ \lvert t\rvert \le 1$. • Ta có: $at^2 + bt + c = 0$ (2), giải (2) tìm nghiệm t (nếu có), suy ra nghiệm X.
$a\tan^2X + b\tan X + c = 0\ (a \neq 0)$	• Đặt $t = \tan X, t \in \mathbb{R}$. • Ta có: $at^2 + bt + c = 0\ (3)$, giải (3) tìm nghiệm t (nếu có), suy ra nghiệm X.
$a\cot^2X + b\cot X + c = 0\ (a \neq 0)$	• Đặt $t = \cot X, t \in \mathbb{R}$. • Ta có: $at^2 + bt + c = 0\ (4)$, giải (4) tìm nghiệm t (nếu có), suy ra nghiệm X.

Nhóm 2 : **Tuỳ theo phương trình lượng giác đã cho mà ta thực hiện các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa phương trình cần giải về dạng ở nhóm 1 hoặc về dạng có cách giải dễ hơn (chú ý đặt điều kiện nếu có) .**

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin^2x + \sin x = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$ (*).

Giải

Đặt $t = \sin 2x, |t| \le 1$. Ta có:

Phương trình (*) trở thành $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -2 < -1$ (loại)

$\Rightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cot^2 x + \cot x - 6 = 0$ (*).

Giải

Điều kiện: $x \ne k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Đặt $t = \cot x, t \in \mathbf{R}$.

Phương trình (*) trở thành $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 2 \\ \cot x = -3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arccot} 2 + k\pi \\ x = \operatorname{arccot}(-3) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$.

Giải

Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$.

Tacó: $4t^2 - 2(1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0$ (1), $\Delta' = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$(1) \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 5. Xác định m để phương trình $\cos^2 x - 2m\cos x + 6m - 9 = 0$ (*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Đặt $t = \cos x$. Với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t \le 1$.

Ta có: $t^2 - 2mt + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 2m - 3$ hoặc $t = 3 > 1$ (loại)

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < 2m - 3 \le 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \le 2$.

Ví dụ 6. Xác định m để phương trình $2\cos^2 x - (m + 2)\cos x + m = 0$ (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$. Với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Ta có: $2t^2 - (m+2)t + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \in [0; 1] \\ t = \frac{m}{2} \end{array}\right.$

Để (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\frac{m}{2} \in [0; 1) \Leftrightarrow m \in [0; 2)$.

Ví dụ 7. Xác định m để phương trình $2\sin^2 2x - 3\sin 2x + m - 1 = 0$ (*) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Giải

Đặt $t = \sin 2x$.

Với $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Phương trình (*) có thể viết lại $-2t^2 + 3t + 1 = m$ (1).

(*) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng hai nghiệm $t \in [0; 1]$

- Xét hàm số $g(t) = -2t^2 + 3t + 1$ trên đoạn $[0; 1]$
- $g'(t) = -4t + 3$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$
- Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{3}{4}$		1
g'(t)		+	0	−	
g(t)	1	↗	$\frac{17}{8}$	↘	2

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $2 \le m < \frac{17}{8}$ thỏa mãn đề bài.

Chú ý: Bài giải Ví dụ 7 được sử dụng *phương pháp xét chiều biến thiên*, để sử dụng được phương pháp này thành thạo ta **cần học nhớ :**

+ Cách xét tính đơn điệu của hàm số, cách tìm cực trị của hàm số.

+ Cách tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x)$ trên tập xác định **D** $(\max\limits_{x \in D} f(x))$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x)$ trên tập xác định **D** $(\min\limits_{x \in D} f(x))$.

Định lí : Cho f(x) xác định và liên tục trên D, giả sử tồn tại $\max\limits_{x\in D} f(x), \min\limits_{x\in D} f(x)$

Ta có:

Phương trình $f(x) = \alpha$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le \alpha \le \max\limits_{x\in D} f(x)$.

(Độc giả tìm đọc quyển sách MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC & TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ ĐẠI SỐ tác giả PHẠM TRỌNG THƯ)

Nhóm 2

Ví dụ 8. Giải phương trình $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Ví dụ 9. Tìm nghiệm của phương trình

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x \ (*),\ x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right).$$

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{5\pi}{2} - 2\pi\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2} + 4\pi\right) = 1 + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ 2\sin x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < k < 2 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + n2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + m2\pi \end{array}\right.$$

$$\text{Vì } x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} n \in \left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{11}{12}\right) \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{7}{12}\right) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pi$; $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ (*).

Giải

$$\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)$$

$$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow 4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{4} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow (1 + \cos 6x)\cos 2x - (1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x - 1 + \cos 4x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \text{ hoặc } \cos 4x = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 2x + \dfrac{1}{16}$ (*).

Giải

Đặt $\begin{cases} a = \sin^2 x \\ b = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$

$$VT = a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - 3ab = 1 - \frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x$$

$(*) \Leftrightarrow 12\cos^2 2x - 16\cos 2x + 3 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{8-\sqrt{28}}{12} = \cos 2\varphi$

$\Leftrightarrow 2x = \pm 2\varphi + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \pm\varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\cos 2\varphi = \dfrac{8-\sqrt{28}}{12}$.

Ví dụ 13. Xác định của m để phương trình

$4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$ (*) có nghiệm.

Giải

$(*) \Leftrightarrow 4\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right) - 4\left(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \sin^2 4x = m$

$\Leftrightarrow 4 - 2\sin^2 2x - 4 + 3\sin^2 2x - (2\sin 2x\cos 2x)^2 = m$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 4\sin^2 2x(1 - \sin^2 2x) = m$

$\Leftrightarrow 4\sin^4 2x - 3\sin^2 2x - m = 0$ (1)

Đặt $t = \sin^2 2x, t \in [0; 1]$.

Phương trình (1) trở thành: $4t^2 - 3t = m$ (2)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 1]$.

- Xét hàm số $g(t) = 4t^2 - 3t$ trên đoạn [0; 1]
- $g'(t) = 8t - 3, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{8}$
- Bảng biến thiên :

t	0		$\frac{3}{8}$		1
g'(t)		−	0	+	
g(t)	0	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	1

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $-\dfrac{9}{16} \le m \le 1$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 14. Giải phương trình $5\sin x - 2 = 3\tan^2 x(1 - \sin x)$ (*).

Giải

Điều kiện : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$(*) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \dfrac{3\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}\cdot(1 - \sin x) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \dfrac{3\sin^2 x}{1 + \sin x}$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -2 < -1 \text{ (loaùi)} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vaọy nghieọm cuỷa phửụng trỡnh (*) laứ $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$ (*).

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\sin x.\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4(1 - \cos^2 2x) = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \text{ hoặc } \cos 2x = 1 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 16. Cho phương trình $\sin^4 x + (\sin x - 1)^4 = m$

a) Giải phương trình (*) khi $m = \frac{1}{8}$

b) Xác định m để (*) có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

Đặt $t = \sin x - \frac{1}{2}$

Phương trình (*) trở thành $\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = m$

Khai triển và rút gọn ta được: $2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} = m$ (1)

a) Khi $m = \frac{1}{8}$: $2t^4 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Với $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

- Xét hàm số $g(t) = 2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8}$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

- $g'(t) = 2t(4t^2 + 3)$

  $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	0	$\frac{1}{2}$	[redacted]
$g'(t)$		$+$		
$g(t)$		$\frac{1}{8}$ $\nearrow$	1	

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $\frac{1}{8} \le m \le 1$ thỏa mãn đề bài.

Chú ý: Gặp dạng phương trình $(X+a)^4 + (X+b)^4 = c$ ta đặt $t = X + \frac{a+b}{2}$.

Ví dụ 17. Giải phương trình $4\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) - 7 = 0 (*)$.

Giải

Điều kiện: $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, $|t| \ge 2 \Rightarrow t^2 = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + 2$

(*) trở thành $4(t^2 - 2) + 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} < 2 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$

+ Với $t = -\frac{5}{2} \Rightarrow \sin x + \frac{1}{\sin x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -2 < -1 \text{ (loại)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 18. Xác định của m để phương trình

$\cos^2 x + (m-4)\cos x - 2m + 4 = 0$ (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$

Giải

(*) $\Leftrightarrow (\cos x - 2)(\cos x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2 - m$ hoặc $\cos x = 2 > 1$ (loại)

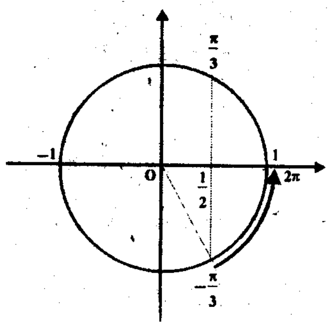
Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right] \Rightarrow t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

Nhìn đường tròn lượng giác ta thấy:

(*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ -1 < t < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - m = 1 \\ -1 < 2 - m < \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ \frac{3}{2} < m < 3 \end{array}\right.$



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

b) $\cot^2 x - 2\cot x + 1 = 0$

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$

d) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0$

e) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\cos x - \sqrt{3} = 0.$

Bài tập 2. Giải và biện luận $(m-1)\tan^2 x - (m-3)\tan x - m - 3 = 0.$

Bài tập 3. Cho phương trình $\cos^2 x + (1-m)\cos x + 2m - 6 = 0$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình $\cos^2 x - (3m+1)\cos x + 6m - 2 = 0$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Bài tập 5. Cho $4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 - 3m = 0$ (*). Tìm m để (*) có nghiệm.

Nhóm 2

Bài tập 6. Giải các phương trình:

a) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

b) $\cos x - \cos 2x = \frac{1}{2}$

c) $\cos 2x = 1 + \cos 4x$

d) $\cos\frac{8x}{3} = \cos^2\frac{2x}{3}$

e) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$

f) $\cos 5x\cos x = \cos 4x\cos 2x + 4 - 3\sin^2 x$

g) $2\cos x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$ h) $\sin 3x + \cos 2x = 2(\sin 2x\cos x - 1)$

k) $2(\cos^4 2x - \sin^4 2x) + \cos 8x - \cos 4x = 0$.

Bài tập 7. Giải các phương trình:

a) $2\cos(2\pi - 2x) + \cos^2\frac{x}{2} - 10\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - \frac{17}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$

b) $4\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$ c) $\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2} = \frac{5}{2} - 2\sin x$

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}\sin 2x$ e) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$.

Bài tập 8. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{3\sin^2 2x + 8\sin^2 x - 11 - 3\cos 2x}{\sin 2x} = 0$ b) $\dfrac{\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) + 2\sin^2 x - 3}{1 + \sin 2x} = 1$

c) $\dfrac{\sin x + 2}{1 + \cos 2x} = 1$ d) $\cot x = \tan x + \dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

e) $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$ f) $\dfrac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

(Đề thi Đại học khối A năm 2006)

g) $\dfrac{\cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2$ h) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5\sin 2x} = \dfrac{1}{2}\cot 2x - \dfrac{1}{8\sin 2x}$

k) $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x\left(1 + \tan x\tan\frac{x}{2}\right)$

i) $\dfrac{\sin^4\frac{x}{2} + \cos^4\frac{x}{2}}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 x$

j) $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3,\ x \in (0; 2\pi)$.

Bài tập 9. Cho phương trình $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x + m = 0$ (*).

Xác định m để (*) có ít nhất một nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài tập 10. Tìm a để phương trình $1 + 3\cos^2 2x = 4a\sin 2x$ (*) có nghiệm.

Bài tập 11. Cho phương trình $3 + 2\cos 2x - 8\cos^2\frac{x}{2} = 3k$ (*). Tìm tất cả các giá trị nguyên dương k để (*) có nghiệm.

Bài tập 12. Cho phương trình $\cos 2x + m\cos x + 2m + 1 = 0$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm.

Bài tập 13. Xác định a để hai phương trình sau **tương đương**:

$\sin 2x = 4\sin x$ (1)

$\cos 2x - \sin^2 x + a\sin x = \sin x + 1$ (2)

Bài tập 14. Cho phương trình $4(3m+2)\sin\frac{x}{2}-(m-1)\cos x+m-7=0\,(*)$.

Xác định m để (*) có đúng hai nghiệm $x\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Bài tập 15. Cho phương trình $\cos 2x+2(1+2m)\sin x=4m+3$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm $x\in\left[-\frac{3\pi}{4};\ \frac{\pi}{6}\right]$.

Bài tập 16. Cho phương trình $\sin 2(x-\pi)-\sin(3x-5\pi)=a\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)(*)$.

xác định a để (*) có nghiệm $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Bài tập 17. Giải các phương trình :

a) $\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$

b) $\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}=2\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)+1$

c) $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1.

a) Đặt $t=\cos x,\ |t|\le 1$.

Ta có: $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}$.

b) Đặt $t=\cot x, t\in\mathbf{R}$.

Ta có : $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\cot x=\cot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

c) Điều kiện : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Phương trình đã cho có dạng : $a\tan^2x+b\tan x+c=0$

Ta thấy : $a+b+c=\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})+1=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

d) Đặt $t = \sin x$, $|t| \le 1$.

Ta có: $4t^2 - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})t - \sqrt{6} = 0$ (1)

$$\Delta' = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbf{Z}.$$

e) Cách giải tương tự Bài tập 1d. Đáp số $\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 2. Đặt $t = \tan x$, $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ta có phương trình $(m-1)t^2 - (m-3)t - m - 3 = 0$ (1)

•Nếu $m = 1$:(1) $\Leftrightarrow t = 2 = \tan\varphi \Leftrightarrow x = \varphi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

•Nếu $m \ne 1$: Biệt số $\Delta = 5m^2 + 2m - 3$

+ (*) có nghiệm khi $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \le -1$ hoặc $m \ge \dfrac{3}{5}$.

Suy ra :Nghiệm của (*) là $\left[\begin{array}{l} x = \alpha + n\pi \\ x = \beta + n\pi \end{array}\right.$, $n \in \mathbf{Z}$

$$\left(\tan\alpha = \frac{m - 3 - \sqrt{5m^2 + 2m - 3}}{2(m-1)}; \tan\beta = \frac{m - 3 + \sqrt{5m^2 + 2m - 3}}{2(m-1)}\right).$$

+ Phương trình (*) vô nghiệm khi $-1 < m < \dfrac{3}{5}$.

Bài tập 3. Phương trình có nghiệm khi $2 \le m \le 4$.

Bài tập 4. Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$.

Ta có: $t^2 - (3m+1)t + 6m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3m - 1 \\ t = 2 > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$.

Với $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in [-1; 0)$.

Do đó : Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le 3m - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 \le m < \dfrac{1}{3}$.

Bài tập 5.

Đặt $t = \cos 2x$, $|t| \le 1$.

Phương trình (*) có thể viết lại $4t^2 - 4t - 3 = 3m$ (1).

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

• Xét hàm số $g(t) = 4t^2 - 4t - 3$ trên đoạn $[-1; 1]$

• $g'(t) = 8t - 4$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

• Lập bảng biến thiên và dựa vào bảng ta được kết quả $-\frac{4}{3} \le m \le \frac{5}{3}$.

Nhóm 2

Bài tập 6. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\sin x = 2 > 1$ (loại) $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) $(*) \Leftrightarrow 2\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \cos\alpha \\ \cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\alpha + k2\pi \\ x = \pm\beta + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

c) $(*) \Leftrightarrow \cos 2x = 2\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

d) $(*) \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{4x}{3} - 1 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{4x}{3}\right) \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{4x}{3} - \cos\frac{4x}{3} - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{4x}{3} = 1 \\ \cos\frac{4x}{3} = -\frac{3}{4} = \cos\varphi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k3\pi}{2} \\ x = \pm\frac{3\varphi}{4} + \frac{k3\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

e) $(*) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 2(1 + \cos x) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 3 > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

f) $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) + 4 - 3\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 4\cos 2x + 5 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = 4\cos 2x + 5$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 4\cos 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -1$ hoặc $\cos 2x = 3 > 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

g) (*) $\Leftrightarrow \cos3x + \cos x = 1 + \cos2x + \cos3x \Leftrightarrow \cos x = 2\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hoặc } \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

h) (*) $\Leftrightarrow \sin3x + 1 - 2\sin^2 x = \sin3x + \sin x - 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ hoặc } \sin x = -\frac{3}{2} < -1 \text{ (loại)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

k) (*) $\Leftrightarrow 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x).\ 1 + 2\cos^2 4x - 1 - \cos4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos4x + 2\cos^2 4x - 1 - \cos4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos4x = -1 \text{ hoặc } \cos4x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \pi + k2\pi \\ 4x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 7. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) (*) $\Leftrightarrow 2\cos2x + \dfrac{1 + \cos x}{2} - 10\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \dfrac{17}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow 4(1 - 2\sin^2 x) + 1 + \cos x - 20\sin x - 17 = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x + 20\sin x + 12 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) (*) $\Leftrightarrow 4\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + 1 - 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow 8\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2 - 4\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 5 \quad \left(\text{do } \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} - k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

c) (*) $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x = \dfrac{5}{2} - 2\sin x \Leftrightarrow \sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = 3 > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

d) (*) $\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\sin 2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x=1$ hoặc $\sin 2x=-\frac{4}{3}<-1$ (loại) $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z.$

e) Đặt $\begin{cases} a=\sin^2 x \\ b=\cos^2 x \end{cases} \Rightarrow a+b=1$

$VT=a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2$

$=(1-2ab)^2-2a^2b^2=2a^2b^2-4ab+1$

$=\frac{1}{8}[(2\sin x\cos x)^2]^2-(2\sin x\cos x)^2+1=\frac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1$

(*) $\Leftrightarrow \sin^4 2x-8\sin^2 2x+7=0$

Đặt $t=\sin^2 2x, 0\le t\le 1.$

Ta có : $t^2-8t+7=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}=1$

$\Leftrightarrow \cos 4x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$

Bài tập 8. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $\sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow \cos 2x\ne \pm 1.$

(*) $\Leftrightarrow 3(1-\cos^2 2x)+4(1-\cos 2x)-11-3\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x+7\cos 2x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=-1 \quad \text{(loại)} \\ \cos 2x=-\frac{4}{3} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

b) Điều kiện: $\sin 2x\ne -1 \Leftrightarrow x\ne -\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$

(*) $\Leftrightarrow \sin 2x+3\sqrt{2}\cos x+2(1-\cos^2 x)-3=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\sqrt{2}\cos x+2=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\cos x=\sqrt{2}>1$ (loại)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in Z.$

c) Điều kiện : $x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z.$

(*) $\Leftrightarrow \sin x+2=2\cos^2 x=2(1-\sin^2 x) \Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in Z.$

d) Điều kiện : $\sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow \cos 2x\ne \pm 1.$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos 4x}{\sin x\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 2\cos^2 2x - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 1$ (loại) hoặc $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

e) Điều kiện: $\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 2x.\cos 2x} \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + \cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x = 2\sin^2 x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$ (do $\sin x \neq 0$)

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \text{ (loại do } \cos x \neq 0) \\ \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$

f) Điều kiện : $\sqrt{2} - 2\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$

$(*) \Leftrightarrow 2\left(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1$ hoặc $\sin 2x = -\dfrac{4}{3} < -1$ (loại) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

g) Điều kiện : $\cot 2x \neq \cos 2x$ và $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x = 2\cot 2x - 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(3 + \dfrac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1 = 0$ (do $\cos 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \sin 2x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$

h) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{1}{8\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2x\right)}{5} = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 20\cos 2x + 9 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

k) Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \cos\frac{x}{2} \neq 0\end{cases}$

Ta có : $1 + \tan x \tan\frac{x}{2} = 1 + \dfrac{\sin x \sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cos x}$

Do đó : (*) $\Leftrightarrow \cos x = 1$ hoặc $\cos x = 0$ (loại) $\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

i) Điều kiện : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos 2x\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ta thấy : $\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$$(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = \cos^4 x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) = \cos^4 x \Leftrightarrow \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

j) Điều kiện : $\sin 2x \neq -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$

Ta có : $\text{VT} = \dfrac{5(\sin x + 2\sin 2x\sin x + \cos 3x + \sin 3x)}{1 + 2\sin 2x}$

$$= \frac{5(\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x)}{1 + 2\sin 2x} = 5\cos x$$

$$(*) \Leftrightarrow 5\cos x = 2\cos^2 x - 1 + 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$. Vì $x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$.

Bài tập 9.

Thế $\sin^4x + \cos^4x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$, $\cos4x = 1 - 2\sin^2 2x$ vào (*) ta được

phương trình: $3\sin^2 2x - 2\sin2x = m + 3$ (1).

Đặt $t = \sin2x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Phương trình (1) có thể viết lại $3t^2 - 2t = m + 3$ (2)

(*) ít nhất một có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) ít nhất một nghiệm $t \in [0; 1]$.

- Xét hàm số $g(t) = 3t^2 - 2t$ trên đoạn $[0; 1]$, $g'(t) = 6t - 2$
- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	0		$\frac{1}{3}$		1	[redacted]
$g'(t)$			$-$	0	$+$		
$g(t)$		0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $-\frac{1}{3} \le m + 3 \le 1 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \le m \le -2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 10.

$(*) \Leftrightarrow 1 + 3(1 - \sin^2 2x) = 4a\sin2x \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4a\sin2x - 4 = 0$

Đặt $t = \sin2x, |t| \le 1$. Ta có: $3t^2 + 4at - 4 = 0$ (1)

- $t = 0$ không là nghiệm của (1), nên (1) $\Leftrightarrow \frac{4 - 3t^2}{4t} = a$.

(*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\frac{4 - 3t^2}{4t} = a$ có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

- Xét hàm số $g(t) = \frac{4 - 3t^2}{4t}$ trên đoạn $[-1; 1]$, $g'(t) = \frac{-(3t^2 + 4)}{4t^2} < 0, \forall t \neq 0$
- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	-1		0		1	[redacted]
$g'(t)$			$-$	‖	$-$		
$g(t)$		$-\frac{1}{4}$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{1}{4}$	

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $a \le -\frac{1}{4}$ hay $a \ge \frac{1}{4}$ thì (*) có nghiệm.

Bài tập 11.

(*) $\Leftrightarrow 3+2(2\cos^2x-1)-4(1+\cos x)=3k \Leftrightarrow 4\cos^2x-4\cos x-3=3k$

Đặt $t=\cos x, |t|\le 1$. Ta có: $4t^2-4t-3=3k$

- Xét hàm số $g(t)=4t^2-4t-3$ trên đoạn $[-1;1]$
- $g'(t)=8t-4, g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$
- Bảng biến thiên :

t	[redacted]	-1		$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$			$-$	0	$+$	
$g(t)$		5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3

- Dựa vào bảng biến thiên và theo yêu cầu đề ta có $\begin{cases}-4\le 3k\le 5\\ k\in \mathbf{Z}^+\end{cases} \Leftrightarrow k=1$

Với $k=1$ thì $x=\pm\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)+k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Bài tập 12.

(*) $\Leftrightarrow 2\cos^2x+m\cos x+2m=0$

Đặt $t=\cos x, |t|\le 1$. Ta có: $2t^2+mt+2m=0\,(1)$

- $t=-2$ không là nghiệm của (1), nên (1) $\Leftrightarrow \dfrac{-2t^2}{t+2}=m$.

(*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{-2t^2}{t+2}=m$ có nghiệm $t\in[-1;1]$.

- Xét hàm số $g(t)=\dfrac{-2t^2}{t+2}$ trên đoạn $[-1;1]$; $g'(t)=\dfrac{-2t(t+4)}{(t+2)^2}$
- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	-1		0		1
$g'(t)$			$+$	0	$-$	
$g(t)$		-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy nếu $-2\le m\le 0$ thì (*) có nghiệm.

Bài tập 13. (1) $\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 4) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$.

$$(2) \Leftrightarrow 3\sin^2 x + (1-a)\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{a-1}{3} \end{array}\right.$$

(1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ |\sin x| > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a-1}{3} = 0 \\ \left|\dfrac{a-1}{3}\right| > 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \dfrac{a-1}{3} > 1 \vee \dfrac{a-1}{3} < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a > 4 \\ a < -2 \end{array}\right.$$

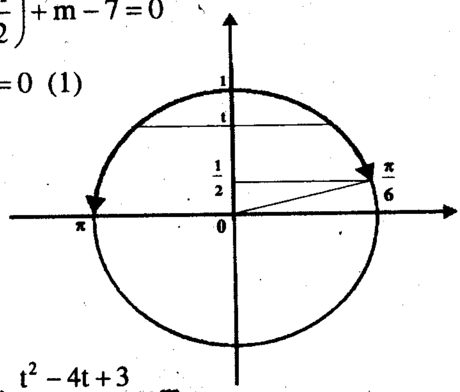
Bài tập 14.

$$(*) \Leftrightarrow 4(3m+2)\sin\frac{x}{2} - (m-1)\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) + m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\sin^2\frac{x}{2} + 2(3m+2)\sin\frac{x}{2} - 3 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sin\frac{x}{2}$. Với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$



- $t = 0$ không là nghiệm của (1), nên (1) $\Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t^2 + 6t} = m$.

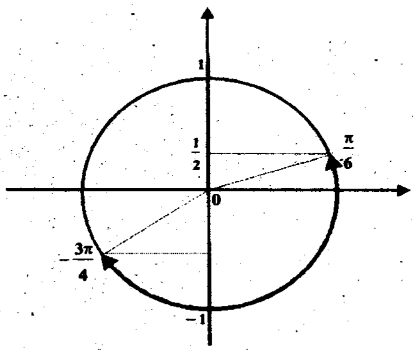
Phương trình (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{t^2 - 4t + 3}{t^2 + 6t} = m$ có nghiệm $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

- Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t^2 + 6t}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$.
- $g'(t) = \dfrac{10t^2 - 6t - 18}{(t^2 + 6t)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{189}}{10} \notin \left[\frac{1}{2}; 1\right)$
- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	$\frac{1}{2}$	1	[redacted]
$g'(t)$		–		
$g(t)$		$\frac{5}{13}$ $\searrow$	0	

• Dựa vào bảng biến thiên thấy $0 < m \le \frac{5}{13}$ thì (*) có nghiệm $x \in \left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Bài tập 15.



(*) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2(1 + 2m)\sin x = 4m + 3$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x + 1 = 2m(\sin x - 1)$ (1)

Đặt $t = \sin x$.

Với $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

(1) $\Leftrightarrow \frac{t^2 - t + 1}{t - 1} = 2m$

(*) có nghiệm $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$ khi và chỉ khi phương trình $\frac{t^2 - t + 1}{t - 1} = 2m$ có nghiệm $t \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

• Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t - 1}$ trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

• $g'(t) = \frac{t^2 - 2t}{(t-1)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2$

• Bảng biến thiên:

t	-1		0		$\frac{1}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$

• Dựa vào bảng biến thiên thấy $-\frac{3}{4} \le m \le -\frac{1}{2}$ thì (*) có nghiệm $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$.

Bài tập 16.

(*) $\Leftrightarrow \sin(2x - 2\pi) - \sin(3x - 5\pi) = a\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi - x\right)$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 3x = a\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 3 - 4\sin^2 x - a) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x[2\cos x + 3 - 4(1 - \cos^2 x) - a] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = a \end{array}\right.$

(*) có nghiệm $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $4t^2 + 2t - 1 = a$ (đặt $t = \cos x$) có nghiệm $t \in (-1; 1)$.

• Xét hàm số $g(t) = 4t^2 + 2t - 1$ trên khoảng $(-1; 1)$.

• $g'(t) = 8t + 2$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$

• Bảng biến thiên:

t	[redacted]	-1		$-\frac{1}{4}$		1
$g'(t)$			$-$	0	$+$	
$g(t)$		1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	5

•Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-\frac{5}{4} \le a < 5$ thì (*) có nghiệm $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 17. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \cos x + \frac{1}{\cos x}$, $|t| \ge 2 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2$

Ta có: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -1$ (loại).

• $t = 2 \Rightarrow \cos x + \frac{1}{\cos x} = 2 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện : $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \cos x - \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 + 2$

Ta có: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c) $(*) \Leftrightarrow 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x) + \sin^2 x - \cos^2 x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(4 - 2\cos x + \sin x + \cos x) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x + 4) - 5 = 0.$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$.

Ta có : $t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -5 < -\sqrt{2}$ (loại)

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Chủ đề 3 : PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI sinX VÀ cosX

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhóm 1: **Phương trình lượng giác bậc nhất đối với sinX và cosX**

1. Dạng: $a\sin X + b\cos X = c$ (*) $(a^2 + b^2 \neq 0)$

2. Cách giải

Cách 1

•Kiểm tra:

+ Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ thì (*) vô nghiệm.
+ Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ thì (*) có nghiệm.

•Sau khi (*) có nghiệm, ta chia hai vế của (*) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

Đặt $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$

(*) trở thành: $\left[\begin{array}{ll} \sin(X+\varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} & (1) \\ \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - (X+\varphi)\right] = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} & (1) \end{array}\right.$

• Giải (1) tìm X.

Cách 2

•Kiểm tra: $\dfrac{X}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $X = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ có phải là nghiệm của (*) không, nếu phải thì ghi nhận.

• Khi $x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ đặt $t = \tan\dfrac{X}{2}$.

Thế $\sin X = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos X = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ vào (*) ta được phương trình bậc hai mà ẩn là t: $(c+b)t^2 - 2at + c - b = 0$ (1).

• Giải (1) tìm $t \Rightarrow$ tìm X.

Nhóm 2: **Sử dụng công thức biến đổi lượng giác thích hợp để đưa phương trình lượng giác cần giải về dạng nhóm 1 .**

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin 2x + 2\cos 2x = 5$ (*).

Giải

(*) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$ với $a = 1, b = 2, c = 5, X = 2x$

Thấy : $a^2 + b^2 = 5 < c^2 = 25 \Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ (1) b) $5\cos x + 3\sin x = 4\sqrt{2}$ (2).

Giải

a) (1) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$ với $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = 1$, $X = x$

Ta có: $a^2 + b^2 = 4$, $c^2 = 1$

Ta thấy: $a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow$ (1) có nghiệm

Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2} = 2$, ta được:

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) (2) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$ với $a = 3$, $b = 5$, $c = 4\sqrt{2}$, $X = x$

Ta có: $a^2 + b^2 = 34$, $c^2 = 32$. Ta thấy: $a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow$ (2) có nghiệm

Chia hai vế của (2) cho $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{34}$, ta được:

$$\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x + \frac{3}{\sqrt{34}}\sin x = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (*)$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$(*) \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Tìm m để phương trình $\sqrt{2}\sin x + m\cos x = m - \sqrt{2}$ (*) có nghiệm.

Giải

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{2}^2 + m^2 \ge (m - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2 + m^2 \ge m^2 - 2\sqrt{2}m + 2 \Leftrightarrow m \ge 0$.

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ (*) thỏa mãn điều kiện $\frac{2\pi}{5} < x < \frac{6\pi}{7}$.

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos 7x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - 7x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + m2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{m2\pi}{7} \end{array}\right. (k, m \in \mathbb{Z})$$

Do $\dfrac{2\pi}{5} < x < \dfrac{6\pi}{7} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{5\pi}{84} + \dfrac{k2\pi}{7} < \dfrac{6\pi}{7} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2\pi}{5} < \dfrac{11\pi}{84} + \dfrac{m2\pi}{7} < \dfrac{6\pi}{7} \\ m \in \mathbf{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2}{5} - \dfrac{5}{84} < \dfrac{2k}{7} < \dfrac{6}{7} - \dfrac{5}{84} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2}{5} - \dfrac{11}{84} < \dfrac{2m}{7} < \dfrac{6}{7} - \dfrac{11}{84} \\ m \in \mathbf{Z} \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{7}{5} - \dfrac{5}{24} < k < 3 - \dfrac{5}{24} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{7}{5} - \dfrac{11}{24} < m < 3 - \dfrac{11}{24} \\ m \in \mathbf{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{53\pi}{84}; x = \dfrac{35\pi}{84}; x = \dfrac{59\pi}{84}$.

Ví dụ 5. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $\sin x + m\cos x = 1 - m$. (1)

b) $(2m+1)\sin x + (2m-1)\cos x = 2m^2 + \dfrac{3}{2}$ (2).

Giải

a) ***Cách 1.*** Thay $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ hay $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$ vào (1). Ta có:

$VT(1) = 0 - m = -m$, nên (1) không có nghiệm $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

- Đặt: $t = \tan\dfrac{x}{2}$. Ta có: (1) trở thành: $\dfrac{2t}{1+t^2} + m\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 1 - m$

$\Leftrightarrow 2t + m - mt^2 = 1 + t^2 - m - mt^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 - 2m = 0$ (*)

- $\Delta' = 1 - (1 - 2m) = 2m$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$		0		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	

- Nếu $m < 0$ thì $\Delta' < 0 \Rightarrow$ (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm
- Nếu $m = 0$ thì $\Delta' = 0 \Rightarrow$ (*) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = -\dfrac{b'}{a} = 1$

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

- Nếu $m > 0$ thì $\Delta' > 0 \Rightarrow$ (*) có nghiệm $t = 1 - \sqrt{2m}$ hoặc $t = 1 + \sqrt{2m}$

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm là $x = 2\arctan(1 \pm \sqrt{2m}) + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Tóm lại :

- Nếu $m < 0$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $m = 0$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- Nếu $m > 0$ thì (1) có nghiệm là
  $x = 2\arctan(1 - \sqrt{2m}) + k2\pi; x = 2\arctan(1 + \sqrt{2m}) + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Cách 2

(1) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$ với $a = 1$, $b = m$, $c = 1 - m$, $X = x$

Lập bảng xét dấu $A = a^2 + b^2 - c^2 = 1^2 + m^2 - (1 - m)^2 = 2m$

m	$-\infty$		0		$+\infty$
A		$-$	0	$+$	

- Nếu $m < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.
- Nếu $m = 0$: (1) $\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- Nếu $m > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow$ (1) có nghiệm
  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{m^2 + 1}$

Ta được: $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\sin x + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\cos x = \frac{1-m}{\sqrt{m^2+1}}$ (*)

Đặt $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} = \cos\varphi$, $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = \sin\varphi$, $\frac{1-m}{\sqrt{m^2+1}} = \cos\alpha$.

(*) $\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \varphi + \alpha + k2\pi$ hoặc $x = \varphi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) (2) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$; với $a = 2m + 1$, $b = 2m - 1$, $c = 2m^2 + \frac{3}{2}$,

$X = x$. Ta có:

- $a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2m - 1)^2 = 8m^2 + 2$
- $c^2 = \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2 = 4m^4 + 6m^2 + \frac{9}{4}$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2 \Leftrightarrow 4m^4 - 2m^2 + \frac{1}{4} \le 0 \Leftrightarrow \left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$$

- Với $m = \frac{1}{2}$: (2) $\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- Với $m = -\frac{1}{2}$: (2) $\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Nhóm 2

Ví dụ 6. Giải phương trình $\cos 7x\cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x\sin 5x$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow \cos 7x\cos 5x + \sin 7x\sin 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos(7x-5x)-\sqrt{3}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1 \quad (1)$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

Ta được: $\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi;\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $3\sin 2x-\sqrt{3}\cos 6x=1+4\sin^3 2x$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow (3\sin 2x-4\sin^3 2x)-\sqrt{3}\cos 6x=1 \Leftrightarrow \sin 6x-\sqrt{3}\cos 6x=1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 6x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 6x-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 6x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3} \\ x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3};\ x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $4(\sin^4 x+\cos^4 x)+\sqrt{3}\sin 4x=2$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow 4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2 \Leftrightarrow 4-2\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

$$\Leftrightarrow \cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=-1 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 4x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\pi+k2\pi \\ 4x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\cos x+\sqrt{3}\sin x=3-\frac{3}{\cos x+\sqrt{3}\sin x+1}$ (*).

Giải

Đặt $t = \cos x + \sqrt{3}\sin x$, $|t| \le 2$ và $t \ne -1$.

Ta có: (*) trở thành $t = 3 - \dfrac{3}{t+1} \Leftrightarrow t^2 + t = 3t + 3 - 3 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2$

• Với $t = 0$ thì $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

• Với $t = 2$ thì $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi;\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Chú ý: Cho $a, b \in \mathbf{R}$.

Ta có: $|a\sin X + b\cos X| \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{\sin^2 X + \cos^2 X} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi\sin 2x)$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow 1 + \cos(\pi\cos^2 x) = 1 + \cos(\pi\sin 2x) \Leftrightarrow \pi\cos^2 x = \pm\pi\sin 2x + k2\pi$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 + \cos 2x}{2} = \pm\sin 2x + 2k \Leftrightarrow \cos 2x \mp 2\sin 2x = 4k - 1$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (4k-1)^2 \le 1^2 + 2^2 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4k-1| \le \sqrt{5} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \le 4k - 1 \le \sqrt{5} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0$

+Với $k = 0$: Ta có: $\cos^2 x = \pm\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x(\cos x - 2\sin x) = 0 \\ \cos x(\cos x + 2\sin x) = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = \pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\arctan\dfrac{1}{2} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \pm\arctan\dfrac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 11. Cho phương trình $(m+2)\sin 2x - 4m\cos^2 x - 2 = 0$ (*). Tìm m để (*) có nghiệm $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; 0\right]$.

Giải

$$(*) \Leftrightarrow (m+2)\sin 2x - 4m\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) - 2 = 0$$

$\Leftrightarrow (m+2)\sin 2x - 2m\cos 2x = 2m+2 \ (1)$

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $2x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$VT(1) = (m+2).0 - 2m(-1) = 2m \neq VP(1)$

$\Rightarrow$ (1) không có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• Khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, đặt $t = \tan x$

(1) trở thành $(m+2)\frac{2t}{1+t^2} - 2m\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 2m+2$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 2t(m+2) + 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt - 2t + 2m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = m(t-2) \ (2)$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

$t = 2$ không là nghiệm của (2), nên (2) viết lại: $\frac{t^2 - 2t + 1}{t-2} = m$

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ khi và chỉ khi $\frac{t^2-2t+1}{t-2} = m$ có nghiệm $t \in [-1; 0]$.

+ Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t-2}$ trên đoạn $[-1; 0]$

$g'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2} > 0, \forall t \in [-1; 0] \Rightarrow$ hàm số $g(t)$ đồng biến trên $[-1; 0]$

• (*) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right] \Leftrightarrow g(-1) \leq m \leq g(0) \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq m \leq -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sqrt{2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x} = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$ (*).

Giải

Ta có: $2 + \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 + 2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

$(*) \Leftrightarrow 2\left|\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} + k4\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $y = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$.

Giải

Vì $2+\cos x \neq 0, \forall x$ nên tập xác định : **R**.

Giả sử y_0 là một giá trị bất kỳ của hàm số đã cho

Phương trình $y_0 = \dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$ có nghiệm $\Leftrightarrow y_0\cos x - \sin x = 1 - 2y_0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow y_0^2 + (-1)^2 \geq (1-2y_0)^2 \Leftrightarrow 3y_0^2 - 4y_0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y_0 \leq \frac{4}{3}.$$

$y_0 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$y_0 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\cos x - \sin x = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{5}\cos x - \dfrac{3}{5}\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos(x+\varphi) = -1$

$\Leftrightarrow x = -\varphi + \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$; với $\varphi = \arccos\dfrac{4}{5}$.

Vậy $\max y = \dfrac{4}{3}$, $\min y = 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$

b) $2(1+\sin x) = 5(1+\cos x)$

c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sin x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})\cos x = \sqrt{20}$.

Bài tập 2. Tìm m để phương trình $(m+2)\sin x + m\cos x = 2$ vô nghiệm.

Bài tập 3. Giải và biện luận : $(3m-1)\sin x + (m+3)\cos x = 2\sqrt{5}$.

Bài tập 4. Cho phương trình $\sin x + m\cos x = 1$ (1). Tìm m để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương trình $m\sin x + \cos x = m^2$ (2).

Nhóm 2

Bài tập 5. Giải phương trình $\sin^4 2x - \cos^4 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 2$.

Bài tập 6. Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 7. Giải phương trình $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$.

Bài tập 8. Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 2$.

Bài tập 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của :

a) $y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$

b) $y = (2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1.

a) Cách giải tương tự Ví dụ 2a. Đáp số $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$; $x = \pi + k2\pi$.

b) Cách giải tương tự Ví dụ 2b.

c) Vô nghiệm.

Bài tập 2. Phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow (m+2)^2 + m^2 < 2^2 \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Bài tập 3. Cách giải tương tự Ví dụ 5.

Bài tập 4. Xét (1), ta thấy $1^2 + m^2 \geq 1^2$, $\forall m \Rightarrow$ (1) luôn có nghiệm với mọi m

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\sin x + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$$

Đặt $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, $\cos\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$.

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \Leftrightarrow x - \varphi = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = 2\varphi - \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

- $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$ là nghiệm của (2) $\Leftrightarrow m.\ 1 + 0 = m^2 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 1$
- $x = 2\varphi - \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$ là nghiệm của (2)

$$\Leftrightarrow m\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) + \cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = m^2$$

$$\Leftrightarrow -m\cos 2\varphi + \sin 2\varphi = m^2 \Leftrightarrow -m(2\cos^2\varphi - 1) + 2\sin\varphi\cos\varphi = m^2$$

$$\Leftrightarrow -m\left(\frac{2m^2}{m^2+1} - 1\right) + 2\cdot\frac{m}{m^2+1} = m^2$$

$$\Leftrightarrow m^4 + m^3 + m^2 - 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-1)\underbrace{(m^2+2m+3)}_{>0, \forall m} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 1$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 1$ thoả mãn bài toán.

Nhóm 2

Bài tập 5. Phương trình đã cho viết lại: $\sin^2 2x - \cos^2 2x + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 6. Ta có: $\bullet \sin^4 x = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$$\bullet \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}(1 - \sin 2x)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x)$$

$$\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 7. Phương trình đã cho viết lại là: $\sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$

Ta có: $a^2 + b^2 = \sqrt{2^2} + (\sqrt{2} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{2}$, $c^2 = (3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$

Ta thấy: $a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập 8. Ta có: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x, |t| \le 2.$

Phương trình đã cho viết lại: $\sqrt{t} = 2 - t \Leftrightarrow t = (2-t)^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Chú ý: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Bài tập 9.

a) $y = 1 - \cos 2x + \dfrac{3}{2}\sin 2x + \dfrac{5}{2}(1 + \cos 2x) \Leftrightarrow 3\sin 2x + 3\cos 2x = 2y - 7$ (*)

(*) có nghiệm $\Rightarrow (2y-7)^2 \le 3^2 + 3^2 \Rightarrow |2y - 7| \le 3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -3\sqrt{2} \le 2y - 7 \le 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{7 - 3\sqrt{2}}{2} \le y \le \dfrac{7 + 3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\max y = \dfrac{7 + 3\sqrt{2}}{2}$; $\min y = \dfrac{7 - 3\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $y = 4\sin x\cos x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 x - \sin x\cos x = \dfrac{3}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow 3\sin 2x + 4\cos 2x = 2y$ (*)

Cách giải tương tự câu a. Đáp số $\max y = \dfrac{5}{2}$, $\min y = -\dfrac{5}{2}$.

Chủ đề 4: PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI ĐỐI VỚI sinX VÀ cosX

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhóm 1 : Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinX và cosX

1. Dạng : $a\sin^2X + b\sin X\cos X + c.\cos^2X = d\ (1)\ (a,b,c,d \in \mathbf{R})$

Cách giải 1.

• Xét $X = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos X = 0\\ \sin^2X = 1\end{cases}$ (hay $X = k\pi, k \in \mathbf{Z}$) có phải là nghiệm của (1) hay không.

• Khi $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (hay $X \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$), chia hai vế của (1) cho $\cos^2X$ (hay $\sin^2X$),ta được: $(a - d)\tan^2X + b\tan X + c - d = 0$ (hay $(c - d)\cot^2X + b\cot X + a - d = 0$).

•Trở về cách giải đã biết ở Chủ đề 2.

Cách giải 2.

•Thế $\sin^2X = \frac{1 - \cos 2X}{2}$, $\cos^2X = \frac{1 + \cos 2X}{2}$, $\sin X\cos X = \frac{\sin 2X}{2}$ vào (1) và rút gọn lại, ta được: $b\sin 2X + (c - a)\cos 2X = 2d - a - c$.

•Trở về cách giải đã biết ở chủ đề 3

2. Dạng : $a\sin^3X + b\sin^2X\cos X + c\sin X\cos^2X + d\cos^3X = 0\ (2)$

• Xét $X = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos X = 0\\ \sin^2X = 1\end{cases}$ (hay $X = k\pi, k \in \mathbf{Z}$) có phải là nghiệm của (2) hay không.

• Khi $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (hay $X \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$),chia hai vế của (2) cho $\cos^3X$ (hay $\sin^3X$), ta được: $a\tan^3X + b\tan^2X + c\tan X + d = 0$ (*) (hay $d\cot^3X + c\cot^2X + b\cot X + a = 0$ (*)).

• Phân tích (*) thành nhân tử $\Rightarrow$ tìm tanX (hay cotX) $\Rightarrow$ tìm X (nếu có).

Chú ý : Dạng $a\sin^4X + b\sin^3X\cos X + c\sin^2X\cos^2X + d\sin X\cos^3X + c.\cos^4X = 0$ có cách giải tương tự.

Nhóm 2 : Phương trình lượng giác có cách giải tương tự nhóm 1

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin^2x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2x = 0$ (*).

Giải

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ \sin^2x = 1\end{cases}$

Ta có: VT(*) $=1\neq$ VP(*) $\Rightarrow$ (*) không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^2x\neq 0$

•Chia hai vế của (*) cho $\cos^2x$, ta được: $\tan^2x+3\tan x-4=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\\ \tan x=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan(-4)+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\arctan(-4)+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sin^2x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x=2$ (*).

Giải

•Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2x=1\end{cases}$

Ta có: VT(*) $=2=$ VP(*) $\Rightarrow$ (*) có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

• Khi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$: $\cos^2x\neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2x$.

Ta được: $2\tan^2x+3\sqrt{3}\tan x-1=2(1+\tan^2x)\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\tan x=3$

$$\Leftrightarrow \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Ví dụ 3. Xác định a để $a\sin^2x+2\sin 2x+3a\cos^2x=2$ (*) có nghiệm.

Giải

$$(*)\Leftrightarrow a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+2\sin 2x+3a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x+a\cos 2x=2-2a\ (1)$$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2+a^2\geq(2-2a)^2$

$$\Leftrightarrow 4+a^2\geq 4-8a+4a^2\Leftrightarrow 3a^2-8a\leq 0\Leftrightarrow 0\leq a\leq\frac{8}{3}.$$

Vậy với $0\leq a\leq\frac{8}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 4. Giải và biện luận $m\sin^2x+(m+5)\cos^2x+2m\sin x\cos x-1=0$ (*)

Giải

Cách 1

•Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2x=1\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$

Với $m=1$: $(*)\Leftrightarrow \sin^2x+6\cos^2x+2\sin x\cos x-1=0$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2x+2\sin x\cos x-(1-\sin^2x)=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2x+2\sin x\cos x-\cos^2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(5\cos x+2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{5}{2}\right)+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

•Khi $m\neq 1$ thì $x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ nên $\cos^2x\neq 0$. Chia hai vế của (*) cho $\cos^2x$,ta được:$m\tan^2x+m+5+2m\tan x-(1+\tan^2x)=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\tan^2x+2m\tan x+m+4=0.$

Đặt $t=\tan x$.

Ta có: $(m-1)t^2+2mt+m+4=0$ (1)

Bảng xét dấu $\Delta'=4-3m$

m	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Δ'		+	0	−	

•Nếu $m<\dfrac{4}{3}$ thì $\Delta'>0\Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{-m+\sqrt{4-3m}}{m-1},\ t_2=\frac{-m-\sqrt{4-3m}}{m-1}$$

$$\Rightarrow (*) \text{ có nghiệm } x=\arctan\left(\frac{-m\pm\sqrt{4-3m}}{m-1}\right)+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

•Nếu $m=\dfrac{4}{3}$ thì $\Delta'=0\Rightarrow$ (1) có một nghiệm kép:

$$t_1=t_2=-\frac{m}{m-1}=-4\Rightarrow \tan x=-4\Rightarrow x=\arctan(-4)+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

•Nếu $m>\dfrac{4}{3}$ thì $\Delta'<0\Rightarrow$ (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Tóm lại :

• $m=1$: (*) có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\arctan\left(-\dfrac{5}{2}\right)+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$

•$m<\dfrac{4}{3}$ và $m\neq 1$: (*) có nghiệm $x=\arctan\left(\dfrac{-m\pm\sqrt{4-3m}}{m-1}\right)+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$

•$m=\dfrac{4}{3}$: (*) có nghiệm $x=\arctan(-4)+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$

•$m>\dfrac{4}{3}$: (*) vô nghiệm.

Cách 2

$$(*)\Leftrightarrow m\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+(m+5)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+m\sin 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2m\sin 2x+5\cos 2x=-2m-3$$

Phương trình này đã biết phương pháp giải ở Chủ đề 3.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\cos^3x + 2\sin x\cos^2x - 3\sin^3x = 0$ (*).

Giải

•Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ \sin^2x = 1\end{cases}$

Ta có: $VT(*) = \pm3 \neq VP(*) \Rightarrow$ (*) không có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

$\Rightarrow \cos^3x \neq 0$

• Chia hai vế của (*) cho $\cos^3x$, ta được:

$1 + 2\tan x - 3\tan^3x = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)\underbrace{(3\tan^2x + 3\tan x + 1)}_{\Delta<0} = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

• Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 6. Cho phương trình:

$\sin^3x + (2m+1)\sin^2x\cos x + (3m-1)\sin x\cos^2x + (m-1)\cos^3x = 0$ (*).

Xác định m để (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

Giải

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ \sin^2x = 1\end{cases}$

Ta có: $VT(*) = \pm1 \neq VP \Rightarrow$ (*) không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3x \neq 0$

• Chia hai vế của (*) cho $\cos^3x$, ta được:

$\tan^3x + (2m+1)\tan^2x + (3m-1)\tan x + m - 1 = 0$

Đặt $t = \tan x$. Với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right] \Rightarrow t \in (-\infty; 0]$.

Ta có: $t^3 + (2m+1)t^2 + (3m-1)t + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2mt + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1\\ f(t) = t^2 + 2mt + m - 1 = 0\ \ (1)\end{array}\right.$

Để (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ khi và chỉ khi (1) có hai

nghiệm phân biệt t_1, t_2: $\begin{cases}t_1 < t_2 \leq 0\\ t_1, t_2 \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'_f > 0\\ P \geq 0\\ S < 0\\ f(-1) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - m + 1 > 0,\ \forall m\\ m - 1 \geq 0\\ -m < 0\\ 1 - 2m + m - 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$

Vậy $m \geq 1$ thoả mãn đề bài.

Ví dụ 7. Cho phương trình:
$\sin^3x - \sin^2x\cos x + 18m\sin x\cos^2x - 2m\cos^3x = 0$ (*). Xác định m để (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2x = 1 \end{cases}$.

Ta có: VT(*) $= \pm 1 \neq$ VP(*) $\Rightarrow$ (*) không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3x \neq 0$

• Chia hai vế của (*) cho $\cos^3x$, ta được:

$\tan^3x - \tan^2x + 18m\tan x - 2m = 0$

Đặt $X = \tan x$. Với $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow X \in (0;\ +\infty)$.

Ta có: $X^3 - X^2 + 18mX - 2m = 0$ (1)

Xét: $Y = X^3 - X^2 + 18mX - 2m$ trên $(0;\ +\infty)$

$Y' = 3X^2 - 2X + 18m$

• Hàm số có cực đại và cực tiểu khi $Y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 54m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{54}$.

• Gọi X_1, X_2 ($X_1 < X_2$) là hoành độ của các điểm cực trị của đồ thị và là nghiệm của $Y' = 0$. Thực hiện phép chia Y cho Y', ta được:

$$Y = \left(\frac{1}{3}X - \frac{1}{9}\right)Y' + \left(12m - \frac{2}{9}\right)X$$

• Giá trị tương ứng là $Y_1 = \left(12m - \frac{2}{9}\right)X_1,\ Y_2 = \left(12m - \frac{2}{9}\right)X_2$

$Y_1Y_2 = \left(12m - \frac{2}{9}\right)^2 X_1X_2 = 6m\left(12m - \frac{2}{9}\right)^2$ (theo định lí Vi-ét $X_1X_2 = 6m$)

(*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi (1) có ba nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{54} \\ Y_1Y_2 < 0 \\ Y(0) < 0 \\ X_2 > X_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{54} \\ m < 0 \\ m \neq \frac{1}{54} \\ -2m < 0 \\ X_2 > X_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

• Vậy không tìm được m thoả mãn bài toán.

Nhóm 2

Ví dụ 8. Giải phương trình $\cos^3x + \sin x - 3\sin^2x\cos x = 0$ (*).

Giải

•Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2x = 1 \end{cases}$

Ta có: VT(*) $= \pm 1 \neq$ VP(*) $\Rightarrow$ (*) không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3x \neq 0$.

• Chia hai vế của (*) cho $\cos^3x$, ta được: $1 + \tan x(1 + \tan^2x) - 3\tan^2x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3x - 3\tan^2x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2x - 2\tan x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x - 1 = 0 \\ \tan^2x - 2\tan x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 1 \pm \sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(1 \pm \sqrt{2}) + k\pi \end{array}\right.$$

• Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan(1 \pm \sqrt{2}) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\tan x\sin^2x - 2\sin^2x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x)$ (*).

Giải

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(*) $\Leftrightarrow \tan x\sin^2x - 2\sin^2x = 3(\cos^2x - \sin^2x + \sin x\cos x)$ (1)

Chia hai vế của (1) cho $\cos^2x$: $\tan^3x - 2\tan^2x = 3(1 - \tan^2x + \tan x)$

$\Leftrightarrow \tan^2x(\tan x + 1) - 3(\tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan^2x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x + 1 = 0 \\ \tan^2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan x = \pm\sqrt{3} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 10. Giải và biện luận phương trình:

$(8m^2 + 1)\cos^3x - (4m^2 + 1)\cos x + 2m\sin^3x = 0$ (*).

Giải

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2x = 1 \end{cases}$ (1)

thay (1) vào (*) ta có: $\pm 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$: (*) $\Leftrightarrow \cos x(\cos^2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos^2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

• Với $m \neq 0 \Rightarrow \cos x = 0$ không là nghiệm của (*) $\Rightarrow \cos x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$$2m\tan^3 x-(4m^2+1)(1+\tan^2 x)+8m^2+1=0\ (2)$$

Đặt $t=\tan x$, (2) trở thành: $2mt^3-(4m^2+1)t^2+4m^2=0$

$$\Leftrightarrow (t-2m)(2mt^2-t-2m)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=2m\\ \tan x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+16m^2}}{4m}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\arctan 2m+k\pi\\ x=\arctan\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1+16m^2}}{4m}\right)+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Tóm lại : • $m=0$: (*) có nghiệm là $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

• $m\neq 0$: (*) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\arctan 2m+k\pi\\ x=\arctan\left(\dfrac{1\pm\sqrt{1+16m^2}}{4m}\right)+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sin^3\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$ (*).

Giải

Đặt $t=x-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=t+\dfrac{\pi}{4}$

(*) trở thành: $\sin^3 t=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \sin^3 t=\sin t+\cos t$ (1)

• Khi $t=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos t=0\\ \sin^2 t=1\end{cases}$

Ta có: $VT(1)=\sin^2 t.\sin t=\sin t=\pm 1=VP(1)\Rightarrow$ (*) có nghiệm $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

• Khi $t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$ thì $\cos^3 t\neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 t$, ta được:

$\tan^3 t=\tan t(1+\tan^2 t)+(1+\tan^2 t)\Leftrightarrow \tan^2 t+\tan t+1=0$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $\sin^2 x+2\cos^2 x=3\sin x\cos x$ **b)** $\sin^2 x-3\sin x\cos x=-1$

c) $2\sin^2 x+3\cos^2 x-\cos 2x-5\sin 2x=0$.

Bài tập 2. Cho phương trình $\sin^2x - m\sin2x - (m+1)\cos^2x = 0$ (*).

Xác định m để (*) có nghiệm.

Bài tập 3. Cho $m\sin^2x - 4\sqrt{2}\sin x\cos x + (m-2)\cos^2x = 0$ (*). Xác định m để phương trình (*) có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Bài tập 4. Giải và biện luận $2\sin^2x - 7\sin x\cos x - 3\cos^2x + m = 0$ (*).

Nhóm 2

Bài tập5. Giải các phương trình:

a) $\sin^2x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$

b) $\cos^3x - 4\sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$

c) $4\sin^3x + 3\cos^3x - 3\sin x - \sin^2x\cos x = 0$

d) $\cos^3x + \sin^3x = \sin x - \cos x$

e) $\sin3x + \cos3x + 2\cos x = 0$

f) $\sin x\sin2x + \sin3x = 6\cos^3x$

g) $2\cos^3x = \sin3x$.

Bài tập 6. Cho $\sin^4x + \cos^4x + \dfrac{1}{4}m\sin4x - (2m+1)\sin^2x\cos^2x = 0$ (*).

Xác định m để (*) có hai nghiệm phân biệt $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 7. Xác định m để phương trình:

$$2(2-3m)\sin^3x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2x\cos x - (4m-3)\cos x = 0 \; (*)$$

có một nghiệm duy nhất $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1.

a) Cách giải tương tự Ví dụ 1. Đáp số $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Cách giải tương tự Ví dụ 1. Đáp số $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Phương trình đã cho viết lại :

$$1 - \cos2x + \frac{3(1+\cos2x)}{2} - \cos2x - 5\sin2x = 0 \Leftrightarrow 10\sin2x + \cos2x = 5$$

(Bạn đọc xem lại phương pháp giải ở Chủ đề 3).

Bài tập 2. $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2} - m\sin 2x - \dfrac{(m+1)(1+\cos 2x)}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2m\sin 2x + (m+2)\cos 2x = -m$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow (2m)^2 + (m+2)^2 \geq (-m)^2 \Leftrightarrow \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq 0, \forall m.$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

Bài tập 3. $(*) \Leftrightarrow m\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right) - 2\sqrt{2}\sin 2x + \dfrac{(m-2)(1+\cos 2x)}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sqrt{2}\sin 2x = m - 1 \quad (1)$

Đặt $t = \tan x,\ t \in \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(1) trở thành $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 2\sqrt{2}\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right) = m - 1$

$\Leftrightarrow mt^2 - 4\sqrt{2}t + m - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \dfrac{4\sqrt{2}t + 2}{t^2 + 1} = m \quad (2)$

- Xét hàm $g(t) = \dfrac{4\sqrt{2}t + 2}{t^2 + 1}$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- $g'(t) = \dfrac{-4\sqrt{2}t^2 - 4t + 4\sqrt{2}}{(t^2+1)^2}$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ hoặc $t = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} \notin \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	[redacted]
$g'(t)$			$+$		
$g(t)$		2	$\nearrow$	$\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$	

(*) có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in \left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 2 < m < \dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$.

Bài tập 4. $(*) \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right) - \dfrac{7}{2}\sin 2x - \dfrac{3(1+\cos 2x)}{2} + m = 0$

$\Leftrightarrow 7\sin 2x + 5\cos 2x = 2m - 1$ (giải tương tự cách 2 Ví dụ 5a- Chủ đề 3)

Bài tập 5. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$, ta được:

$\tan^2 x(\tan x + 1) = 3\tan x(1 - \tan x) + 3(1 + \tan^2 x)$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

b) Cách giải tương tự Ví dụ 8. Đáp số $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

c) Cách giải tương tự Ví dụ 8. Đáp số $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

d) $(*) \Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$ (1)

• $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ là nghiệm của (1)

• Chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, tađược: $\tan^2 x - \tan x + 2 = 0$ (vô nghiệm)

e) $(*) \Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + \cos x - 4\cos^3 x = 0$

Giải tương tự Ví dụ 8. Đáp số $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

f) $(*) \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x + (3\sin x - 4\sin^3 x) - 6\cos^3 x = 0$

Giải tương tự Ví dụ 8. Đáp số $x = \arctan 2 + k\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

g) $(*) \Leftrightarrow 2\cos^3 x - (3\sin x - 4\sin^3 x) = 0$

Giải tương tự Ví dụ 8. Đáp số $x = \arctan(-2) + k\pi; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 6. $(*) \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x + \dfrac{1}{2}m\sin 2x\cos 2x - \dfrac{1}{4}(2m + 1)\sin^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow (2m + 3)\sin^2 2x - 2m\sin 2x\cos 2x - 4 = 0$ (1)

Vì $\sin 2x = 0$ không thoả (1), nên ta chia hai vế của (1) cho $\sin^2 2x$:

$4\cot^2 2x + 2m\cot 2x + 1 - 2m = 0$ (2)

Đặt $t = \cot 2x, x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow t \in (-\infty; 0)$

(2) trở thành: $\dfrac{4t^2 + 1}{1 - t} = 2m$ (do $t < 0$)

• Xét $g(t) = \dfrac{4t^2 + 1}{1 - t}$ trên $(-\infty; 0)$

• $g'(t) = \dfrac{-4t^2 + 8t + 1}{(1-t)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2-\sqrt{5}}{2} \\ t = \dfrac{2+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

• Lập bảng biến thiên và dựa vào bảng : $4(\sqrt{5} - 2) < 2m < 1$ thỏa mãn .

Bài tập 7.

• $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ không là nghiệm của (*) $\Rightarrow \cos^3 x \neq 0$

• Chia 2 vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$\tan^3 x - (2m+1)\tan^2 x + 3(2m-1)\tan x - (4m-3) = 0$ (1)

Đặt $t = \tan x$. Với $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in [0;1]$

(1) trở thành : $(t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & (2) \\ t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0 & (3) \end{array}\right.$

Vì (2) có một nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4}$ theo yêu cầu của bài toán , ta có :

hoặc (3) vô nghiệm trên [0; 1] hoặc (3) có một nghiệm duy nhất bằng 1

(3) $\Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 3}{t - 2} = 2m$

• Xét hàm số $g(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$ trên [0; 1].

• $g'(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2}$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$.

• Bảng biến thiên :

t	[redacted]	0		1	[redacted]
$g'(t)$			+		
$g(t)$		$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy nếu $\left[\begin{array}{l} 2m < \dfrac{3}{2} \\ 2m \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{3}{4} \\ m \geq 1 \end{array}\right.$ thì (*) có

một nghiệm duy nhất $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Chủ đề 5: PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhóm 1: Phương trình đối xứng đối với sinX và cosX.

Dạng 1: Phương trình đối xứng đối với sinX và cosX

$$a(\sin X + \cos X) + b\sin X\cos X + c = 0 \ (1) \ (a, b, c \in \mathbf{R})$$

Cách giải

- Đặt $t = \sin X + \cos X = \sqrt{2}\sin\left(X + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

  Khi đó $\sin X\cos X = \dfrac{(\sin X + \cos X)^2 - (\sin^2 X + \cos^2 X)}{2} = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

- Phương trình (1) trở thành : $at + b\left(\dfrac{t^2 - 1}{2}\right) + c = 0$

  $\Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0$ (*).
- Giải (*) tìm nghiệm theo t thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.
- Suy ra nghiệm X của (1).

Dạng 2: Phương trình có cách giải tương tự dạng 1

$$a(\sin X - \cos X) + b\sin X\cos X + c = 0 \ (2) \ (a, b, c \in \mathbf{R})$$

Cách giải

- Đặt $t = \sin X - \cos X = \sqrt{2}\sin\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

  Khi đó $\sin X\cos X = \dfrac{\sin^2 X + \cos^2 X - (\sin X - \cos X)^2}{2} = \dfrac{1 - t^2}{2}$.

- Phương trình (2) trở thành : $bt^2 - 2at - 2c - b = 0$ (*).
- Giải (*) tìm nghiệm theo t thoả mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.
- Suy ra nghiệm X của (2).

Nhóm 2 **: Có thể sử dụng cách giải ở nhóm 1 để giải phương trình lượng giác mà trong đó có chứa** $\sin X \pm \cos X$ **và sinX. cosX.**

Nhóm 3 **: Phương trình đối xứng đối với tanX và cotX.**

Dạng 1: Phương trình đối xứng đối với tanX và cotX

$$a(\tan^2 X + \cot^2 X) + b(\tan X + \cot X) + c = 0 \ (3)$$

Cách giải

- Điều kiện: $\begin{cases} \sin X \ne 0 \\ \cos X \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2X \ne 0 \Leftrightarrow X \ne \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- Đặt $t = \tan X + \cot X$, $|t| \ge 2 \Rightarrow \tan^2 X + \cot^2 X = t^2 - 2$
- Phương trình (3) trở thành : $a(t^2 - 2) + bt + c = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c - 2a = 0$
- Giải (*) tìm nghiệm theo t $\Rightarrow$ nghiệm X của (3).

Dạng 2: Phương trình có cách giải tương tự dạng 1

$$a(\tan^2 X + \cot^2 X) + b(\tan X - \cot X) + c = 0 \quad (4)$$

Cách giải

- Điều kiện: $\begin{cases} \sin X \neq 0 \\ \cos X \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2X \neq 0 \Leftrightarrow X \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$
- Đặt $t = \tan X - \cot X \Rightarrow \tan^2 X + \cot^2 X = t^2 + 2.$
- Phương trình (4) trở thành : $a(t^2 + 2) + bt + c = 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c + 2a = 0$ (*)
- Giải (*) tìm nghiệm theo t $\Rightarrow$ nghiệm X của (4).

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải các phương trình :

a) $\sin x + \cos x + 2\sin x\cos x - 1 = 0$ (1)

b) $6(\sin x - \cos x) - \sin x\cos x - 6 = 0$ (2).

Giải

a) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2}.$

Phương trình (1) trở thành :$t + 2\left(\dfrac{t^2 - 1}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = k2\pi; x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2}.$

Phương trình (2) trở thành : $6t - \left(\dfrac{1 - t^2}{2}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -13 < -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right., k\in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi$, $k\in \mathbf{Z}$.

> **Ví dụ 2.** Xác định m để các phương trình sau có nghiệm
>
> **a)** $\sin x\cos x - m(\sin x+\cos x)+1=0$ (1)
>
> **b)** $\sin 2x - 4(\sin x-\cos x)-m=0$ (2).

Giải

a) Đặt: $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $|t|\le\sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $\dfrac{t^2-1}{2}-mt+1=0 \Leftrightarrow t^2-2mt+1=0$ (*)

Vì $t=0$ không là nghiệm của (*), nên phương trình (*) viết lại:

$$\frac{t^2+1}{2t}=m$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{t^2+1}{2t}=m$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

• Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2+1}{2t}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

• $g'(t)=\dfrac{2t^2-2}{4t^2}$, $g'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm1$.

• Bảng biến thiên :

t	[redacted]	$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	[redacted]
$g'(t)$			+	0	−	||	−	0	+		
$g(t)$			↗	-1	↘	||	↘	1	↗		

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy : $m\le -1$ hoặc $m\ge 1$ thì (1) có nghiệm.

b) Đặt $X=x-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=2X+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \sin 2x=\cos 2X$.

Phương trình (2) trở thành: $\cos 2X-4\sqrt{2}\sin X-m=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2X-4\sqrt{2}\sin X-m=0\Leftrightarrow -2\sin^2X-4\sqrt{2}\sin X+1=m$

Đặt $t=\sin X$, $|t|\le 1$.

(2) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $-2t^2-4\sqrt{2}t+1=m$ có nghiệm $t\in[-1;1]$.

• Xét hàm số $g(t) = -2t^2 - 4\sqrt{2}t + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$

• $g'(t) = -4t - 4\sqrt{2}$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2} \notin [-1; 1]$

• Bảng biến thiên:

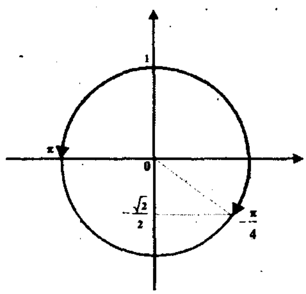
t	[redacted]	-1		1	[redacted]
$g'(t)$			$-$		
$g(t)$		$4\sqrt{2}-1$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}-1$	

• Dựa vào bảng biến thiên thấy : $-4\sqrt{2} - 1 \le m \le 4\sqrt{2} - 1$ thì (2) có nghiệm.

Ví dụ 3. Cho phương trình $2(m-1)(\sin x + \cos x) + m\sin 2x + 4m - 1 = 0$ (*).

Xác định m để (*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Giải



Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \pi$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -1 < t \le \sqrt{2}$

Phương trình (*) viết lại: $2(m-1)t + m(t^2 - 1) + 4m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow mt^2 + 2(m-1)t + 3m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(t^2 + 2t + 3) = 2t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{2t+1}{t^2 + 2t + 3}$ (do $t^2 + 2t + 3 > 0, \forall t$)

(*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $\frac{2t+1}{t^2+2t+3} = m$ có nghiệm $t \in \left(-1; \sqrt{2}\right]$.

• $g'(t) = \frac{-2t^2 - 2t + 4}{(t^2 + 2t + 3)^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

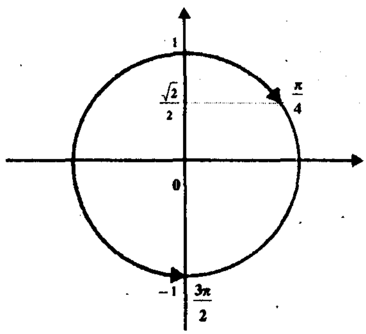
• Bảng biến thiên:

t	[redacted]	-1		1		$\sqrt{2}$	[redacted]
$g'(t)$			$+$	0	$-$		
$g(t)$		$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}$	

•Dựa vào bảng biến thiên : $-\frac{1}{2} < m \le \frac{1}{2}$ thì (*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 4. Cho $\sin 2x - (2m + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 2m\sqrt{2} + 1 = 0$ (*). Xác định m để phương trình (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Giải



Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Với $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow -1 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} < t \le \sqrt{2}$.

Phương trình (*) trở thành:

$t^2 - 1 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hoặc $t = 2m$

•Với $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Mà $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{4} + k2\pi < \frac{5\pi}{4} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8} < k < \frac{1}{2} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 0.$

Do đó $x = \frac{\pi}{4}$ là một nghiệm của (*)

Để (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$ khi $-1 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < 2m \le 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < m \le \frac{1}{2}$.

Nhóm 2

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 2(\sin x + \cos x) - 1$ (1)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

Phương trình (1) trở thành : $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 2t - 1$

$\Leftrightarrow t(3 - t^2) = 4t - 2 \Leftrightarrow t^3 + t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (do $t^2 + t + 2 > 0, \forall t \in \mathbf{R}$)

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2}+k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$ (*).

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

$(*) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \frac{10}{3}$ (1)

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \leq \sqrt{2}$.

Phương trình (1) trở thành : $t + \dfrac{t}{\frac{t^2-1}{2}} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow t + \frac{2t}{t^2-1} = \frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow 3t(t^2-1)+6t = 10(t^2-1) \Leftrightarrow 3t^3 - 10t^2 + 3t + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)(3t^2-4t-5) = 0 \Rightarrow t = \frac{2-\sqrt{19}}{3}$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} = \sin\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 7. Tìm m để $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1+\frac{1}{2}\left(\tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = m$ (*) có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$(*) \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos x + \sin x}{\sin x \cos x}\right) = m$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Với $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow 1 < t \leq \sqrt{2}.$

Phương trình (1) trở thành : $t+1+\frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{\frac{t^2-1}{2}}\right)=m \Leftrightarrow \frac{t^2}{t-1}=m$

•Xét hàm số $g(t)=\frac{t^2}{t-1}$ trên $(1;\sqrt{2}]$

•$g'(t)=\frac{t^2-2t}{(t-1)^2}$; $g'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=0 & \text{(loại)} \\ t=2 & \text{(loại)} \end{array}\right.$

•Bảng biến thiên:

t	[redacted]	1		$\sqrt{2}$	[redacted]
$g'(t)$			$-$		
$g(t)$		$+\infty$	$\searrow$	$2(\sqrt{2}+1)$	

(*) có nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $\frac{t^2}{t-1}=m$ có nghiệm $t \in (1;\sqrt{2}]$.

•Dựa vào bảng biến thiên ta thấy : $m \ge 2(\sqrt{2}+1)$ thì (*) có nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Nhóm 3

Ví dụ 8. Cho phương trình $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+m(\tan x+\cot x)+1=0$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $m=-\frac{5}{2}$

b) Xác định m để (*) vô nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\sin x\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$(*) \Leftrightarrow \tan^2 x+\cot^2 x+m(\tan x+\cot x)+3=0$

Đặt $\begin{cases} t=\tan x+\cot x=\tan x+\frac{1}{\tan x} \\ |t| \ge 2 \end{cases} \Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2.$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2+mt+1=0$ (1)

a) Với $m=-\frac{5}{2}$: (1) $\Leftrightarrow t^2-\frac{5}{2}t+1=0 \Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=\frac{1}{2}<2$ (loại)

$\Rightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=2 \Leftrightarrow (\tan x-1)^2=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

b) $t = 0$ không là nghiệm của (1), nên (1) viết lại: $\frac{-t^2 - 1}{t} = m$

(*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\frac{-t^2 - 1}{t} = m$ có nghiệm $t \in \mathbf{D}$.

(Với $\mathbf{D} = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$)

• Xét hàm số $g(t) = \frac{-t^2 - 1}{t}$ trên **D**

• $g'(t) = \frac{-t^2 + 1}{t^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \notin \mathbf{D}$

• Bảng biến thiên :

t	$-\infty$		-2	[redacted]	2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$		[redacted]		$-$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	[redacted]	$-\frac{5}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy nếu $-\frac{5}{2} < m < \frac{5}{2}$ thì (*) vô nghiệm.

Ví dụ 9. Cho phương trình $\tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x - \cot x) - m = 0$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $m = 6$

b) Xác định m để (*) có nghiệm.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

Đặt $t = \tan x - \cot x = \tan x - \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2$.

Phương trình (*) trở thành : $t^2 + 3t + 2 = m$ (1)

a) Với $m = 6$: (1) $\Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \\ \tan^2 x + 4\tan x - 1 = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \tan x = -2 \pm \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi \\ x = \arctan(-2 \pm \sqrt{5}) + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$$

b) ***Cách 1***

(*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2 + 3t + 2 = m$ có nghiệm

• Xét hàm số $g(t) = t^2 + 3t + 2$

• $g'(t) = 2t + 3$

• Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $m \geq -\dfrac{1}{4}$ thỏa mãn đề bài.

Cách 2. (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{4}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $3(\sin x + \cos x) + 4\sin x\cos x + 3 = 0$

b) $(2\sqrt{2} + 2)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 2(\sin x\cos x + \sqrt{2}) - 1 = 0$

c) $\sin 2x - 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 5$

d) $\cos x - \sin x - 2\sin 2x - 1 = 0$

e) $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}$.

Bài tập 2. Cho phương trình $\sin x + \cos x = 1 + m\sin 2x$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm.

Bài tập 3. Giải và biện luận $\sin 2x + 4m\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 1 - 8m = 0$ (*).

Bài tập 4. Cho phương trình $2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{\sin 2x}{2} + m = 0$ (*). Tìm m để (*) có nghiệm $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Nhóm 2

Bài tập 5. Giải các phương trình:

a) $(\sin x + \cos x)^3 - \sqrt{2}\sin 2x + \sin x + \cos x - 2\sqrt{2} = 0$

b) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

c) $2(1 - \sin x - \cos x) + \tan x + \cot x = 0$

d) $\dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 1 + \dfrac{1}{2}\left(\tan x + \cot x + \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0$

e) $1+\sin^3 2x+\cos^3 2x=\dfrac{3\sin 4x}{2}$

f) $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$.

Bài tập 6. Cho phương trình $(\cos x-\sin x)\left(1+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)=2m$ (*). Tìm m để (*) có đúng hai nghiệm $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Bài tập 7. Cho phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=k\sin x\cos x$ (*). Tìm k để (*) có nghiệm.

Bài tập 8. Cho $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=m(\cos x+\sin x)$ (*).

Xác định m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 9. Cho phương trình $\sin^3 x+\cos^3 x=1+\dfrac{m}{2}\sin 2x$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm $x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Nhóm 3

Bài tập 10. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{1}{\cos^2 x}+2\tan x+\dfrac{1}{\sin^2 x}+2\cot x-8=0$

b) $\tan^2 x+\cot^2 x-(\tan x-\cot x)-2=0$

c) $\tan^4 x+\cot^4 x-8(\tan x+\cot x)^2+9=0$

d) $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6$.

Bài tập 11. Cho phương trình $3(\tan^2 x+\cot^2 x)+m(\tan x+\cot x)+2=0$ (*)

Xác định m để (*) có nghiệm .

Bài tập 12. Giải và biện luận phương trình

$$(m-1)(\tan^2 x+\cot^2 x)-2m(\tan x-\cot x)-m+6=0\ (*).$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1.

a) Cách giải tương tự Ví dụ 1a.

Đáp số : $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pi+k2\pi;\ x=\varphi-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi;\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\varphi+k2\pi$

$\left(k\in\mathbb{Z},\ \sin\varphi=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

b) Thế $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$ vào phương trình đã cho, ta được phương trình dạng tương tự Ví dụ 1 a . Đáp số: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

c) Thế $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$ vào phương trình đã cho, ta được phương trình dạng tương tự Ví dụ 1a.

Đáp số : $x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

d) . Biến đổi phương trình đã cho về dạng tương tự Ví dụ 1b.

. *Đáp số :* $x=k2\pi; x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

e) . Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

. Biến đổi phương trình đã cho về dạng tương tự Ví dụ 1b.

. *Đáp số :* $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi; x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi; x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

Bài tập 2. Đặt $t=\sin x+\cos x$, $|t|\le\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho trở thành : $(t-1)[1-m(t+1)]=0$ (1)

Ta thấy (1) luôn có nghiệm $t=1$ với mọi m , nghiệm này thỏa mãn điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$.

Vậy mọi m phương trình đã cho đều có nghiệm.

Bài tập 3. Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $|t|\le\sqrt{2}$.

(*) trở thành: $t^2-4m\sqrt{2}t+8m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{2}\\ t=\sqrt{2}(4m-1)\end{array}\right.$

•$t=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

•$t=\sqrt{2}(4m-1)$ nhận khi $\left|\sqrt{2}(4m-1)\right|\le\sqrt{2}\Leftrightarrow -1\le 4m-1\le 1\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{2}$.

Tóm lại: • $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>\frac{1}{2}\end{array}\right.$: Nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbf{Z}$.

• $0\le m\le\frac{1}{2}$: Phương trình đã cho có ba họ nghiệm.

Bài tập 4. Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Với $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow -1\le t\le 1$

Phương trình (*) trở thành : $-t^2-4t+1=2m$ (1)

(*) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t \in [-1; 1]$

- Xét hàm số $g(t) = -t^2 - 4t + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$
- $g'(t) = -2t - 4$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2$
- Lập bảng biến thiên và dựa vào bảng

(*) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -4 \le 2m \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Nhóm 2

Bài tập 5. **a)** . Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

. Phương trình đã cho trở thành: $t^3 - t^2\sqrt{2} + t - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow t^2(t-\sqrt{2}) + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t-\sqrt{2})(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) . Phương trình đã cho viết lại : $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 1$ (1)

. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

. Phương trình (1) trở thành: $(t-1)^2(t+2) = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

c) . Điều kiện: $x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

. Phương trình đã cho viết lại: $2[1 - (\sin x + \cos x)] + \frac{1}{\sin x\cos x} = 0$ (1)

. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

. (1) trở thành $t(t^2 - t - 1) = 0 \Rightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sin\varphi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \varphi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

d) . Điều kiện: $x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

. Phương trình đã cho viết lại: $(\sin x + \cos x) + 2 + \frac{1}{\sin x\cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x} = 0$ (1)

. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

. (1) trở thành: $t + 2 + \frac{2(t+1)}{t^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow t + 2 + \frac{2}{t-1} = 0 \Leftrightarrow t^2 + t = 0$

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

e). Đặt $t = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow t^3 = \sin^3 2x + \cos^3 2x + 3\sin 2x\cos 2x(\sin 2x + \cos 2x)$.

. Phương trình đã cho trở thành : $1 + t^3 - 3\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)t = \frac{3}{2}(t^2 - 1)$

$\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t^2 + 2t - 5) = 0 \Rightarrow t = -1$

$$\Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

f) . $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x$ (1)

. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$.

. (1) trở thành : $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = t^2 - 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pm 1 \\ t = -2 < -\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 6.

. Phương trình (*) viết lại $(\cos x - \sin x)(1 + \cos x\sin x) = 2m$ (1)

. Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Với $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le t \le \sqrt{2}$.

. Phương trình (1) trở thành: $-t^3 + 3t = 4m$ (2)

(1) có 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm $x \in \left[0; \sqrt{2}\right]$.

. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t) = -t^3 + 3t$ trên $\left[0; \sqrt{2}\right]$

. Dựa vào bảng thấy với $\sqrt{2} \le 4m < 2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 7.

. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

. Phương trình (*) trở thành: $t^3 - 3t = k(1 - t^2)$ (1)

. (1) $\Leftrightarrow \dfrac{t^3 - 3t}{1 - t^2} = k$ ($t = \pm 1$ không phải là nghiệm của (1))

. Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng d : y = k cắt đồ thị hàm số

$$g(t) = \frac{t^3 - 3t}{1 - t^2} \text{ trên } \mathbf{D} \left(\text{ với } \mathbf{D} = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right] \setminus \{-1; 1\} \right)$$

. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t) = \dfrac{t^3 - 3t}{1 - t^2}$ trên **D**.

t	[redacted]	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	[redacted]
g'(t)	[redacted]		$-$	‖	$-$	‖	$-$		[redacted]
g(t)	[redacted]	$-\sqrt{2}$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘		$\sqrt{2}$	[redacted]

. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy d: y = k luôn cắt đồ thị hàm số g(t) trên **D**.
Vậy (*) luôn có nghiệm với mọi k.

Bài tập 8.

. Phương trình (*) viết lại là : $(\cos x + \sin x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - m] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x \cos x - m = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Vì $-\dfrac{\pi}{4} < -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k \in \varnothing$.

. Bài toán trở thành tìm m để (2) có ít nhất một nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$

. Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Vì $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; \sqrt{2})$.

(2) trở thành : $-t^2 + 4t + 1 = 2m$

. (*) có ít nhất một nghiệm $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi phương trình

$-t^2 + 4t + 1 = 2m$ có ít nhất một nghiệm $t \in (0; \sqrt{2})$.

. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t) = -t^2 + 4t + 1$ trên $(0; \sqrt{2})$

. Dựa vào bảng biến thiên thấy với $1 < m < 4\sqrt{2} - 1$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 9.

. Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Với $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2}; -1\right)$

và thế $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x) = \dfrac{3t - t^3}{2}$

vào (*) ta được $t^2 + (m+1)t + m - 2 = 0$ (1)

. $t = -1$ không là nghiệm của (1), nên $(1) \Rightarrow \dfrac{-t^2 - t + 2}{t+1} = m$ (2)

. (*) có nghiệm $x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi (2) có nghiệm $t \in [-\sqrt{2}; -1)$.

. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t) = \dfrac{-t^2 - t + 2}{t+1}$ trên $[-\sqrt{2}; -1)$.

. Dựa vào bảng thấy $m \le \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Nhóm 3

Bài tập 10.

a) .Cách giải tương tự Ví dụ 8a.

.*Đáp số :* $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-2 \pm \sqrt{3}) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b) . Cách giải tương tự Ví dụ 9a.

. *Đáp số :* $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

c). Điều kiện: $x \ne \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

. Phương trình đã cho viết lại:

$\tan^4x + \cot^4x - 8(\tan^2x + \cot^2x) - 7 = 0$ (1)

. Đặt $t = \tan^2x + \cot^2x$, $t \ge 2 \Rightarrow \tan^4x + \cot^4x = t^2 - 2$

. (1) trở thành : $t^2 - 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow \tan^2x + \cot^2x = 9$

$\Leftrightarrow \sin^4x + \cos^4x = 9\sin^2x\cos^2x \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \dfrac{9}{4}\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{11}{8}(1 - \cos4x) = 1 \Leftrightarrow \cos4x = \dfrac{3}{11} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{3}{11} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

d) . Viết lại: $(\tan^3x + \cot^3x) + (\tan^2x + \cot^2x) + (\tan x + \cot x) = 6$ (*)

. Đặt $t = \tan x + \cot x = \tan x + \dfrac{1}{\tan x}$, $|t| \ge 2$.

thế $\tan^3x + \cot^3x = (\tan x + \cot x)^3 - 3\tan x\cot x(\tan x + \cot x) = t^3 - 3t$,

$\tan^2x + \cot^2x = (\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x\cot x = t^2 - 2$ vào (*) ta được

$t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)\underbrace{(t^2 + 3t + 4)}_{>0, \forall t} = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$\Rightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 11. . Điều kiện: $x \ne \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

. Đặt $t = \tan x + \cot x = \tan x + \dfrac{1}{\tan x}$, $|t| \ge 2 \Rightarrow \tan^2x + \cot^2x = t^2 - 2$.

. $(*) \Rightarrow 3t^2 + mt - 4 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3t^2+4}{t} = m$ (1)

. Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t \in \mathbf{D}$

($\mathbf{D} = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$)

. Lập bảng biến thiên của hàm số $g(t) = \dfrac{-3t^2+4}{t}$ trên $\mathbf{D}$

. Dựa vào bảng thấy $m \le -4$ hoặc $m \ge 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 12.

. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

. Đặt $t = \tan x - \cot x \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 + 2$

(*) trở thành: $(m-1)t^2 - 2mt + m + 4 = 0$ (1)

Trường hợp 1 : $m = 1$

$(1) \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \tan x - \cot x = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2\cos x \sin x} = \dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \cot 2x = -\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\text{arccot}\left(-\dfrac{5}{4}\right) + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Trường hợp 2 : $m \ne 1$

$+ \Delta' = 4 - 3m$

+ Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Δ'		+	0	−	

. Khi $m > \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

. Khi $m = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow$ (1) có một nghiệm kép: $t = 4$

$\Rightarrow -2\cot 2x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\text{arccot}(-2) + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

. Khi $m < \dfrac{4}{3} \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt: $t = \dfrac{m \pm \sqrt{4-3m}}{m-1}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\text{arccot}\left(\dfrac{m \pm \sqrt{4-3m}}{2(1-m)}\right) + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Chủ đề 6: BIẾN ĐỔI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐÃ CHO VỀ DẠNG TÍCH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Dạng tích

Nếu phương trình $f(x)=0$ (*) biến đổi về dạng $f_1(x).\ f_2(x)...\ f_n(x)=0$ thì nghiệm của (*) là tập hợp các nghiệm của phương trình

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \quad .... \\ f_n(x)=0 \end{array}\right.$$

2. Các nhóm phương trình thường gặp

Giả sử quy ước gọi phương trình cần giải là (*).

Nhóm 1 : Ghép hàm sao cho sử dụng công thức biến đổi lượng giác là có lợi nhất để đưa phương trình (*) về dạng tích.

Nhóm 2 : Sử dụng công thức hạ bậc

- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$; $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$; $\cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}$

và kết hợp nhóm 1 để giải phương trình (*).

Nhóm 3 : Sử dụng hằng đẳng thức và kết hợp kỹ thuật biến đổi lượng giác để đưa phương trình (*) về dạng tích.

Nhóm 4 : Sử dụng phương pháp đồng bậc

(kỹ thuật dùng $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$).

Nhóm 5 : Sử dụng phương pháp nhân.

Nhóm 6 : Sử dụng phương pháp dùng tham số làm ẩn - kỹ thuật sử dụng hằng số biến thiên.

Nhóm 7 : Kết hợp nhiều phép biến đổi lượng giác.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos2x + \cos6x - \cos8x = 1$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow (1 - \cos2x) - (\cos6x - \cos8x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2x + 2\sin7x\sin(-x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin7x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin x\cos4x\sin3x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos4x = 0 \\ \sin3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4};\ x = \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin x + \sin2x + \sin3x = 1 + \cos x + \cos2x$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow (\sin3x + \sin x) + \sin2x = (1 + \cos2x) + \cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin2x\cos x + \sin2x = 2\cos^2x + \cos x$

$\Leftrightarrow \sin2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin2x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1)\cos x(2\sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*)

$$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi;\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin x - \sin3x + 2\sin5x = 0$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow (\sin5x + \sin x) + (\sin5x - \sin3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin3x\cos2x + 2\cos4x\sin x = 0$

$\Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3x)\cos2x + (2\cos^2 2x - 1)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x[(3 - 4\sin^2x)\cos2x + 2\cos^2 2x - 1] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ (3 - 4\sin^2x)\cos2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

$(2) \Leftrightarrow [3-2(1-\cos 2x)]\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{8}\right) + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của (*) là $x = k\pi$; $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{8}\right) + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 5. Giải phương trình $\cos\dfrac{x}{2}\cos x\cos\dfrac{3x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\sin x\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow \left(\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)\cos x - \left(\sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos x)\cos x - \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 2x)\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x\cos x + \cos^2 x - \cos x\sin x + \cos 2x\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 2x\cos x + 1 - \sin^2 x - \cos x\sin x + \cos 2x\sin x = 1$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0\\ \cos 2x - \sin x = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ 2x = \pm\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}.\end{array}\right.$

Ví dụ 6. Tìm m để $m\sin x + \sin 2x - \sin 4x = 0$ (*) có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{12}\right)$.

Giải

$(*) \Leftrightarrow m\sin x + 2\cos 3x\sin(-x) = 0 \Leftrightarrow (m - 2\cos 3x)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ (1) hoặc $\cos 3x = \dfrac{m}{2}$ (2)

+Xét (1)

$(1) \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Với $0 < x < \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} 0 < k < \dfrac{1}{12} \\ k \in \mathbf{Z}\end{cases} \Rightarrow k \in \varnothing$

+Xét (2)

Với $0 < x < \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow 0 < 3x < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos 3x < 1$

(*) có nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} < m < 2.$

Ví dụ 7. Giải phương trình $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3} = \frac{1+\cos 2x}{2} \Leftrightarrow 2\cos\frac{4x}{3} = 1 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2\frac{2x}{3} - 1\right) = 1 + 4\cos^3\frac{2x}{3} - 3\cos\frac{2x}{3} \quad (1)$$

Đặt $t = \cos\frac{2x}{3}$, $|t| \le 1$.

Phương trình (1) trở thành : $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(4t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 = \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\frac{2x}{3} = 1 & (2) \\ \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{4x}{3}\right) = \frac{3}{4} & (3) \end{array}\right.$$

$(2) \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = k3\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

$(3) \Leftrightarrow \cos\frac{4x}{3} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{4x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k3\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k3\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$

Nhóm 2

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = \frac{3}{2}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 8x + \cos 4x) + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x(2\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 6x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6};\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$\sin^2\frac{3x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) = \sin^2\frac{11x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{13x}{2}\right) (*).$$

Giải

Dùng công thức hạ bậc, ta có

$$VT(*) = \frac{1}{2}(1-\cos 3x) + \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)\right] = 1-\frac{1}{2}(\cos 3x+\sin 5x)$$

$$VP(*) = \frac{1}{2}(1-\cos 11x) + \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-13x\right)\right] = 1-\frac{1}{2}(\cos 11x+\sin 13x).$$

Phương trình (*) viết lại: $\cos 3x + \sin 5x = \cos 11x + \sin 13x$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \sin 13x - \sin 5x = \cos 3x - \cos 11x$

$\Leftrightarrow 2\cos 9x\sin 4x = -2\sin 7x\sin(-4x) \Leftrightarrow \sin 4x(\cos 9x - \sin 7x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \cos 9x = \sin 7x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = k\pi\\ 9x = \pm\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{k\pi}{4}\\ x = \frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{8},\ x = -\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{k\pi}{4}\\ x = \frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{8}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{k\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $2\cos^2 2x + \cos 2x = 4\sin^2 2x\cos^2 x$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow 1+\cos 4x+\cos 2x = 4\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 1+\cos 4x+\cos 2x = 1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 4x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 4x(2+\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$ hoặc $\cos 2x = -2 < -1$ (loại)

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 11. Giải phương trình $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$ (*).

Giải

Đặt $t = x+\frac{\pi}{3} \Rightarrow 3x = 3t-\pi \Rightarrow \cos 3x = -\cos 3t$.

Phương trình (*) viết lại $8\cos^3 t = -\cos 3t \Leftrightarrow 8\left(\frac{3\cos t+\cos 3t}{4}\right) = -\cos 3t$

$\Leftrightarrow 6\cos t = -3\cos 3t \Leftrightarrow -\cos t = \cos 3t+\cos t \Leftrightarrow -\cos t = 2\cos 2t\cos t$

$$\Leftrightarrow \cos t(1+2\cos 2t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t = 0\\ \cos 2t = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{2}+k\pi\\ t = \pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

•Với $t=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

•Với $t=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

•Với $t=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{6}+k\pi; x=k\pi; x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi.$

Ví dụ 12. Giải phương trình

$$\cos3x\cos^3x-\sin3x\sin^3x=\frac{1}{4}\sin8x+\frac{1}{2}\cos4x+\frac{1}{4}\ (*).$$

Giải

$$(*)\Leftrightarrow\cos3x\left(\frac{3\cos x+\cos3x}{4}\right)-\sin3x\left(\frac{3\sin x-\sin3x}{4}\right)=\frac{\sin8x+2\cos4x+1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3(\cos3x\cos x-\sin3x\sin x)+\cos^2 3x+\sin^2 3x=\sin8x+2\cos4x+1$$

$$\Leftrightarrow 3\cos4x+1=2\sin4x\cos4x+2\cos4x+1\Leftrightarrow\cos4x(1-2\sin4x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos4x=0\\ \sin4x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 4x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 4x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}; x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}; x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}.$

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sin^2x+\sin^2 3x=3\sin^2 2x$ (*).

Giải

$$(*)\Leftrightarrow 3\sin^2 2x-\sin^2x-\sin^2 3x=0\Leftrightarrow 3\sin^2 2x-\frac{1-\cos2x}{2}-\frac{1-\cos6x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x-1+\frac{1}{2}(\cos6x+\cos2x)=0\Leftrightarrow 3\sin^2 2x-1+\cos4x\cos2x=0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\cos^2 2x)-1+(2\cos^2 2x-1)\cos2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x-3\cos^2 2x-\cos2x+2=0$$

$$\Leftrightarrow(\cos2x-1)(2\cos^2 2x-\cos2x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos2x=1\\ \cos2x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}\\ \cos2x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}\ \text{(loại)}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 14. Cho phương trình $2\cos^2 2x - \cos^2 3x - a\sin^2 x = 1$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $a = 1$

b) Xác định a để (*) có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{12}\right)$.

Giải

Sử dụng công thức hạ bậc, ta có

$$(*) \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right) - a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 1 - (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) - a + a\cos 2x = 2 \qquad (1)$$

Đặt $t = \cos 2x$, $|t| \le 1$.

(1) trở thành: $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = a(t-1) \Leftrightarrow (t-1)(4t^2-3) = a(t-1)$. (2)

a) Khi $a = 1$: (2) trở thành: $(t-1)(4t^2-4) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{12}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0; \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow t \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

(2) viết lại: $4t^2 - 3 = a \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{a+3}{4}$

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < \dfrac{a+3}{4} < 1$

$$\Leftrightarrow 3 < a + 3 < 4 \Leftrightarrow 0 < a < 1.$$

Nhóm 3

Ví dụ 15. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 1 \\ \sin 2x = 2 > 1 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 16. Giải phương trình $\dfrac{3\left(\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}\right)}{2+\sin x}=\cos x$ (*).

Giải

Vì $\sin x \geq -1 > -2,\ \forall x \Rightarrow \sin x + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

$(*) \Leftrightarrow 3\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=\cos x(2+\sin x)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right).(2+\sin x)=\cos x(2+\sin x)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left[\frac{3}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0 & (1) \\ \frac{3}{2}+\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=k\pi,\ k\in\mathbf{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

$(2) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{2\sqrt{2}}<-1$ (loại)

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

Nhóm 4

Ví dụ 17. Giải phương trình $\sin^3x+\cos^3x=2(\sin^5x+\cos^5x)$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow (\sin^3x+\cos^3x)(\sin^2x+\cos^2x)=2(\sin^5x+\cos^5x)$

$\Leftrightarrow \sin^5x+\sin^3x\cos^2x+\cos^3x\sin^2x+\cos^5x=2\sin^5x+2\cos^5x$

$\Leftrightarrow (\cos^5x-\cos^3x\sin^2x)+(\sin^5x-\sin^3x\cos^2x)=0$

$\Leftrightarrow \cos^3x(\cos^2x-\sin^2x)-\sin^3x(\cos^2x-\sin^2x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos^2x-\sin^2x)(\cos^3x-\sin^3x)=0$

$\Leftrightarrow \cos2x(\cos^3x-\sin^3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos2x=0 \\ \tan^3x=1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos2x=0 \\ \tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 18. Giải phương trình $\sin^3x+\cos^3x=\sin x-\cos x$ (*).

Giải

$(*)\Leftrightarrow \sin^3x+\cos^3x=(\sin x-\cos x)(\sin^2x+\cos^2x)$

$\Leftrightarrow \sin^3x+\cos^3x=\sin^3x+\sin x\cos^2x-\cos x\sin^2x-\cos^3x$

$\Leftrightarrow 2\cos^3x+\cos x\sin^2x-\sin x\cos^2x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2x+\sin^2x-\sin x\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \cos x=0$ (1) hoặc $2\cos^2x+\sin^2x-\sin x\cos x=0$ (2)

$(1)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$(2)\Leftrightarrow 1+\cos2x+\frac{1-\cos2x}{2}-\frac{1}{2}\sin2x=0\Leftrightarrow \sin2x-\cos2x=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=3\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}>1$ (loại).

Suy ra (2) vô nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Nhóm 5

Ví dụ 19. Giải phương trình $4\sin3x\cos2x=1+6\sin x-8\sin^3x$ (*).

Giải

$(*)\Leftrightarrow 4\sin3x\cos2x=1+2(3\sin x-4\sin^3x)\Leftrightarrow 4\sin3x\cos2x=1+2\sin3x$

$\Leftrightarrow 2\sin3x(2\cos2x-1)=1\Leftrightarrow 2\sin3x[2(2\cos^2x-1)-1]=1$

$\Leftrightarrow 2\sin3x(4\cos^2x-3)=1$ (1)

+Với $\cos x=0\Leftrightarrow \sin x=\pm1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \sin3x=\pm1$

Ta có: $VT(1)=2(\pm1).(-3)=\mp6\neq1$.

Suy ra phương trình (*) không có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

+ Nhân hai vế của (1) cho cosx, ta được

$2\sin3x(4\cos^3x-3\cos x)=\cos x$ (1)

$(1)\Leftrightarrow 2\sin3x\cos3x=\cos x\Leftrightarrow \sin6x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x=\frac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 6x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}$; $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 20. Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\frac{1}{2}$ (*).

Giải

• Với $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$: $VT(*) = 5 \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (*) không có nghiệm này.

• Với $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} \neq 0$

Nhân hai vế của (*) cho $2\sin\frac{x}{2} \neq 0$, ta được:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 4x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 5x = -\sin\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{7x}{2} - \sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{9x}{2} - \sin\frac{7x}{2}$$
$$+ \sin\frac{11x}{2} - \sin\frac{9x}{2} = -\sin\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{11x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{11x}{2} = m\pi \Leftrightarrow x = \frac{2m\pi}{11}, m \in \mathbb{Z}, m \not\vdots 11.$$

Nhóm 6

Ví dụ 21. Giải và biện luận $2m^2 - 2m\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = \cos x - \frac{3}{2}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow 2m^2 - 2(\sin x + \cos x)m + \left(\frac{3}{2} + \sin x - \cos x\right) = 0 \quad (1)$$

Tính biệt số Δ'

$$\Delta' = (\sin x + \cos x)^2 - 2\left(\frac{3}{2} + \sin x - \cos x\right) = 1 + 2\sin x\cos x - 3 - 2\sin x + 2\cos x$$
$$= 2\cos x(1 + \sin x) - 2(1 + \sin x) = 2(1 + \sin x)(\cos x - 1)$$

Vì $\begin{cases}\sin x \geq -1\\ \cos x \leq 1\end{cases} \Rightarrow \Delta' \leq 0$ nên (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\cos x = 1$

• Với $\sin x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$, (1) trở thành: $2m^2 + 2m + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

• Với $\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$, (1) trở thành: $2m^2 - 2m + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Tóm lại : • $m = -\frac{1}{2}$: (*) có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $m = \frac{1}{2}$: (*) có nghiệm $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $m \neq \pm\frac{1}{2}$: (*) vô nghiệm.

Ví dụ 22. Giải phương trình:

$$2(\sin x+3)\cos^4\frac{x}{2}-\sin x(1+\cos x)-3\cos x-1=0\ (*).$$

Giải

Cách 1

$$(*)\Leftrightarrow 2(\sin x+3)\cos^4\frac{x}{2}-\sin x(1+\cos x)-3(1+\cos x)+2=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+3)\cos^4\frac{x}{2}-(\sin x+3)\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+3)\cos^4\frac{x}{2}-(\sin x+3)\cos^2\frac{x}{2}+1=0\ (1).$$

Đặt $t=\cos^2\frac{x}{2}$, $0\le t\le 1$.

Phương trình (1) trở thành: $(\sin x+3)t^2-(\sin x+3)t+1=0$

$\Delta=(\sin x+3)^2-4(\sin x+3)=\sin^2x+6\sin x+9-4\sin x-12$

$=\sin^2x+2\sin x-3=(\sin x+3)(\sin x-1)\le 0$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Cách 2

$$(1)\Leftrightarrow(\sin x+3)\cos^2\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2}-1\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow-(\sin x+3)\cos^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{4}(\sin x+3)\sin^2x+1=0\Leftrightarrow\sin^3x+3\sin^2x-4=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x-1)(\sin x+2)^2=0\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Nhóm 7

Ví dụ 23. Giải phương trình $2\cos^3x+\sin x+1=2\sin^2x$ (*).

Giải

$$(*)\Leftrightarrow 2\cos^3x-2(1-\cos^2x)+\sin x+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3x+2\cos^2x+\sin x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2x(\cos x+1)-(1-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x+1)-(1-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\sin x)[2(1+\sin x)(\cos x+1)-1]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)[2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1-\sin x=0 & (1) \\ 2(\sin x+\cos x)+2\sin x\cos x+1=0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

Giải (2), ta đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}.$

(2) trở thành : $2t+(t^2-1)+1=0 \Leftrightarrow t(t+2)=0 \Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

Ví dụ 24. Giải phương trình

$$3\tan^3x-\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2x}-8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0\ (*).$$

Giải

Điều kiện: $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

$$(*) \Leftrightarrow 3\tan^3x-\tan x+3(1+\sin x)(1+\tan^2x)-4\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3x-\tan x+3(1+\sin x)(1+\tan^2x)-4(1+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2x-1)+(1+\sin x).[3(1+\tan^2x)-4]=0$$

$$\Leftrightarrow (3\tan^2x-1)(\tan x+1+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\tan^2x-1=0 \\ \tan x+1+\sin x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \tan^2x=\dfrac{1}{3} & (1) \\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

Giải (2)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right),\ |t|\le\sqrt{2}.$

Phương trình (2) trở thành: $t+\dfrac{t^2-1}{2}=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0 \Rightarrow t=-1+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sin\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\varphi-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\varphi+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$; $x = \varphi - \frac{\pi}{4} + k2\pi$;

$x = \frac{3\pi}{4} - \varphi + k2\pi$ với $\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\varphi$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

c) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + 1 = 0$

d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

e) $\sin 3(x + \pi) - \sin 2(x + 2\pi) - \sin(x + 3\pi) = 0$

f) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

g) $2\sin\left(10x + \frac{17\pi}{2}\right) = \cos 12x + \cos 8x$.

Bài tập 2. Cho $(2\sin x + 3)(3\cos x + 2\sin x - 4 + m) + 4\cos^2 x + 5 = 0$ (*)

Xác định m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 3. Cho $\cos^3 x + (m-2)\cos^2 x - (3m+1)\cos x + 2m + 2 = 0$ (*).

Xác định m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

Nhóm 2

Bài tập 4. Giải các phương trình:

a) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 x + \cos^2 2x$ **b)** $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

c) $\sin^2 2x + \sin^2 5x = 2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)$ **d)** $\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x$

e) $\cos 3x + \sin 7x = 2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - \cos^2\frac{9x}{2}\right]$

f) $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\frac{x}{2} = 0$ **g)** $\cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x$.

Bài tập 5. Cho phương trình $\sin 5x - \sin 3x - 2\sin^2 2x + 7 = 8\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

Tìm các nghiệm của phương trình trên thỏa mãn điều kiện $|x - 1| < 3$.

Bài tập 6. Giải các phương trình:

a) $4\sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) - 2\cos x\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 8\sin^2\frac{x}{2} = 4 + \sin x$

b) $\sin^8x + \cos^8x = 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x)$

c) $4\cos^4x + 3\sin^2x + \sin3x\sin x - 2 + \cos4x = 0$

d) $2\cos^2 3x + 1 = 3\cos4x$

e) $2(\cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x) = \cos6x(2\sin2x + 1) + 3$.

Bài tập 7. Cho phương trình:

$$\sin^3\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\cos^3\frac{x}{2} = \frac{3\sin2x - \sin6x + m}{4} \quad (*)$$

a) Giải phương trình (*) khi $m = 1$.

b) Xác định m để (*) có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{24}; \frac{\pi}{8}\right)$.

Nhóm 3

Bài tập 8. Giải các phương trình:

a) $\sin2x - \cos2x + 3(\sin x - \cos x) - 1 = 0$

b) $2(\cos^4x\sin x - \sin^4x\cos x) = \sqrt{2}\sin2x\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

c) $\cos^3x + \sin^3x = \cos2x$

d) $1 + \sin x + \cos x + \sin2x + \cos2x = 0$

e) $\sin x + \sin^2x + \sin^3x + \sin^4x = \cos x + \cos^2x + \cos^3x + \cos^4x$

f) $\sin^3x + \cos^3x - (\sin x + \cos x) - 1 - \sin2x = 0$

g) $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2}\sin4x$

h) $\sin3x + \cos3x = (1 + 2\sin2x)\cos2x$ i) $\tan^2x = \frac{1 - \cos^3x}{1 - \sin^3x}$.

Nhóm 4

Bài tập 9. Giải các phương trình :

a) $\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $2\sqrt{2}\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sin4x(\cos2x + \sin2x) + 2(\cos^5x + \sin^5x)$.

Nhóm 5

Bài tập 10. Giải các phương trình :

a) $\frac{\sin3x}{3} = \frac{\sin5x}{5}$ b) $\cos x\cos2x\cos4x\cos8x = \frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{2} = \frac{1}{2}\left[(1 + \cos2x)\cos x\sin\frac{x}{2}\right]$.

Nhóm 6

Bài tập 11. Giải và biện luận phương trình

$$2(1-m)\sin x - 2(m+2)\cos x + m^2 + 5 = 0\ (*).$$

Bài tập 12. Giải các phương trình :

a) $\cos 2x + 2\sin 2x = 7\cos x + 2\sin x - 4$

b) $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

c) $2\sin x + 2\cot x = \sin 2x + 2$

d) $\sin^2 x + 4\sin x + \sqrt{3}\sin 2x + 3\cos^2 x - 2 = (1 + 2\sin x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

e) $4\left[3\sqrt{4x - x^2}\sin^2\dfrac{x+y}{2} + 2\cos(x+y)\right] = 13 + 4\cos^2(x+y).$

Nhóm 7

Bài tập 13. Giải các phương trình:

a) $\cos x(\cos 4x + 2) + \cos 2x.\cos 3x = 0$

b) $3\tan 6x - 2\tan 2x = \dfrac{2}{\sin 8x} - \cot 4x$

c) $\cos^5 x + \sin^7 x + \dfrac{1}{2}(\cos^3 x + \sin^5 x)\sin 2x = \cos x + \sin x$

d) $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Quy ước gọi các phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow (1 + \cos 2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hoặc } \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

b) $(*) \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + 2\sin 3x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin 3x + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin\dfrac{5x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

c) (*) $\Leftrightarrow (\cos 6x + \cos 2x) + \cos 4x + (1 + \cos 8x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x[2\cos 2x + 1 + 2(2\cos^2 2x - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \cos 2x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right) + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

d) (*) $\Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (\cos 3x + \cos x) + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = \cos 2x(2\cos x + 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \\ \tan 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

e) (*) $\Leftrightarrow -\sin 3x - \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos 2x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\cos x = 1/2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

f) Điều kiện : $\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{3} \end{cases}$ $(k, m, n \in \mathbf{Z})$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{\sin3x}{\cos x\cos2x} - \dfrac{\sin3x}{\cos3x} = 0 \Leftrightarrow \sin3x(\cos3x - \cos2x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin3x\left[\cos3x - \dfrac{1}{2}(\cos3x + \cos x)\right] = 0 \Leftrightarrow \sin3x(\cos3x - \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin3x = 0\\ \cos3x = \cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{3}\\ x = k\pi\\ x = \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

g) $(*) \Leftrightarrow 2\sin\left(10x + \dfrac{17\pi}{2} - 8\pi\right) = \cos12x + \cos8x$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(10x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos10x\cos2x \Leftrightarrow 2\cos10x = 2\cos10x\cos2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos10x = 0\\ \cos2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}\\ x = k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 2. $(*) \Leftrightarrow (2\sin x + 3)(3\cos x + 2\sin x - 4 + m) + 4(1 - \sin^2x) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 3)(3\cos x + 2\sin x - 4 + m) + 9 - 4\sin^2x = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 3)(3\cos x + 2\sin x - 4 + m + 3 - 2\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{3}{2} < -1 \text{ (loại)}\\ \cos x = \dfrac{1-m}{3}\end{array}\right.$$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{1-m}{3} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m < \dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 3. $(*) \Leftrightarrow (\cos x - 2)(\cos^2x + m\cos x - m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2x + m\cos x - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$ hoặc $\cos x = -(m+1)$

Với $-\dfrac{3\pi}{4} \le x \le -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Từ yêu cầu bài toán : $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le m + 1 \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}+2}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$.

Nhóm 2

Bài tập 4. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos2x}{2} + \dfrac{1-\cos4x}{2} = \dfrac{1+\cos2x}{2} + \dfrac{1+\cos4x}{2}$

$\Leftrightarrow 2(\cos4x + \cos2x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos3x\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos3x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

b) (*) $\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}=2$

$\Leftrightarrow (\cos 8x+\cos 2x)+(\cos 6x+\cos 4x)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 5x(\cos 3x+\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x=0\\ \cos 3x=-\cos x=\cos(\pi-x)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in \mathbf{Z}.$$

c) (*) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 10x}{2}=1-\cos 3x \Leftrightarrow \cos 10x+\cos 4x=2\cos 3x$

$\Leftrightarrow 2\cos 7x\cos 3x=2\cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x(\cos 7x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \cos 7x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{k2\pi}{7}\end{array}\right., k\in \mathbf{Z}.$$

d) (*) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos^2 3x$

$\Leftrightarrow (\cos 4x+\cos 2x)+2\cos^2 3x=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x=0$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(\cos 3x+\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \cos 3x=-\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in \mathbf{Z}$$

e) (*) $\Leftrightarrow \cos 3x+\sin 7x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)-(1+\cos 9x)$

$\Leftrightarrow (\cos 9x+\cos 3x)+(\sin 7x-\sin 5x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 6x(\cos 3x+\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=0\\ \cos 3x=-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right..$$

f) Điều kiện: $\cos x\neq 0$

(*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1+\cos x}{2}$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\sin^2 x=(1+\cos x)\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1-\cos^2 x)=(1+\cos x)(1-\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\cos x)(-\sin x-\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in \mathbf{Z}.$$

g) $(*) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1+\cos2x}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{1-\cos2x}{2}\right)^3 = \cos2x \quad (1)$

Đặt $t = \cos2x, |t| \le 1$.

(1) trở thành : $\dfrac{1+2t+t^2}{4} - t + 2\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^3 = 0 \quad (2)$

$(2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2\left[1+2\left(\dfrac{1-t}{2}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2(2-t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2 > 1$ (loại) $\Rightarrow \cos2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 5. $(*) \Leftrightarrow 2\cos4x\sin x - (1-\cos4x) + 7 = 4\left[1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right]$

$\Leftrightarrow \cos4x(2\sin x + 1) + 6 = 4 - 4\sin x$

$\Leftrightarrow \cos4x(2\sin x+1) = -2(2\sin x + 1) \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\cos4x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \cos4x = -2 < -1 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Do $\begin{cases}|x-1| < 3 \\ k \in \mathbf{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 < x < 4 \\ k \in \mathbf{Z}\end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}; x = \dfrac{7\pi}{6}.$

Bài tập 6. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow 4\cos x + 2\cos x\sin x + 4(1-\cos x) = 4 + \sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.; k \in \mathbf{Z}.$$

b) $(*) \Leftrightarrow \sin^8x(1-2\sin^2x) + \cos^8x(1-2\cos^2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x(\sin^8x - \cos^8x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x(\sin^2x - \cos^2x)(\sin^4x + \cos^4x) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos^2 2x(2 - \sin^2 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

c) $(*) \Leftrightarrow 4\cos x\cos^3x + 3\sin^2x + \sin3x\sin x - 2 + \cos4x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos x\left(\dfrac{3\cos x + \cos3x}{4}\right) + 3\sin^2x + \sin3x\sin x - 2 + \cos4x = 0$

$\Leftrightarrow 3(\sin^2x + \cos^2x) + (\cos3x\cos x + \sin3x\sin x) - 2 + \cos4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \cos4x + \cos2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos2x = 0 \\ \cos2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

d) $(*) \Leftrightarrow 1+\cos 6x+1=3\cos 4x \Leftrightarrow 2+4\cos^3 2x-3\cos 2x=3(2\cos^2 2x-1)$ (1)

Đặt $t=\cos 2x$, $|t|\le 1$.

(1) trở thành: $4t^3-6t^2-3t+5=0$ (2)

$(2) \Leftrightarrow (t-1)(4t^2-2t-5)=0 \Rightarrow t=1$ hoặc $t=\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}$

$\Rightarrow \cos 2x=1$ hoặc $\cos 2x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}\right)+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$

e) Phương trình (*) tương đương phương trình

$$(2\cos^2 2x-1)+(2\cos^2 3x-1)+(2\cos^2 4x-1)=\cos 6x(2\sin 2x+1)(1)$$

$$\begin{aligned}VT(1)&=\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=(\cos 8x+\cos 4x)+\cos 6x\\&=\cos 6x(2\cos 2x+1)\end{aligned}$$

$$(1)\Leftrightarrow 2\cos 6x(\cos 2x-\sin 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 6x=0\\ \tan 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6}\\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Bài tập 7.

$$\begin{aligned}VT(*)&=\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{3x}{2}\\&=\frac{3}{4}\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}\right)=\frac{3}{4}\sin 2x.\end{aligned}$$

$VP(*)=\sin^3 2x+\dfrac{m}{4}\cdot$

a) Với $m=1$: $(*)\Leftrightarrow\dfrac{3}{4}\sin 2x=\sin^3 2x+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 3\sin 2x-4\sin^3 2x=1$

$\Leftrightarrow \sin 6x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}.$

b) Phương trình (*) trở thành: $\sin 6x=m$

+ Với $\dfrac{\pi}{24}<x<\dfrac{\pi}{8}\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}<6x<\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin 6x\le 1$

+ (*) có nghiệm $x\in\left(\dfrac{\pi}{24};\dfrac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m\le 1.$

Nhóm 3

Bài tập 8. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*)\Leftrightarrow 3(\sin x-\cos x)-(1-\sin 2x)-\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)[3-(\sin x-\cos x)+\cos x+\sin x]=0$

$\Leftrightarrow(\sin x-\cos x)(3+2\cos x)=0 \quad\Leftrightarrow\sin x-\cos x=0$ hoặc $3+2\cos x=0$

$\Rightarrow \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b) + Biến đổi phương trình (*) thành $(\cos x - \sin x)\sin^2 2x = 0$

+ Phương trình (*) có nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

c) $(*) \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Giải (2). Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}.$

(2) trở thành : $t - \frac{1 - t^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

d) $(*) \Leftrightarrow (1 + \sin 2x) + (\sin x + \cos x) + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

e) Phương trình (*) tương đương phương trình

$(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos^4 x - \sin^4 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[1 + 2(\cos x + \sin x) + 1 + \cos x\sin x] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ 2(\cos x + \sin x) + \cos x\sin x + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

+ $(1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

+ Đặt $t = \sin x + \cos x, |t| \le \sqrt{2}.$

(2) trở thành: $2t + \frac{t^2 - 1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3 < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

f) $(*) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) - (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)[1 - \sin x\cos x - 1 - (\sin x + \cos x)] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

+ $(1) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

+ Giải (2). Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right),\ |t| \le \sqrt{2}.$

(2) trở thành: $t + \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 + \sqrt{2} \\ t = -1 - \sqrt{2} < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \varphi + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

g) Đặt $t = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right),\ |t| \le \sqrt{2}.$

$$\Rightarrow t^3 = \sin^3 2x + \cos^3 2x + 3\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)t$$

(*) trở thành: $1 + t^3 - \dfrac{3(t^2 - 1)t}{2} = \dfrac{3(t^2 - 1)}{2}$

$$\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

h) $(*) \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 2x(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow 3(\sin x - \cos x) - 4(\sin^3 x - \cos^3 x) = \cos 2x(1 + 2\sin 2x)$ (1)

$VT(1) = (\sin x - \cos x)[3 - 4(1 + \sin x\cos x)]$

$VP(1) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(1 + 2\sin 2x)$

$(1) \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + 2\sin 2x)(-1 + \cos x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \vee\ x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbb{Z}.$$

i) Điều kiện: $\cos x \ne 0.$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}\left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \sin x + \sin^2 x} - \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\alpha-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi \end{array}\right.,\ k\in\mathbf{Z}\ \left(\text{với } \sin\alpha=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Nhóm 4

Bài tập 9. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*)\Leftrightarrow \sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\frac{x}{2}=0 & (1) \\ \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0 & (2) \end{array}\right.$$

+ $(1)\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

+ Giải (2)

• Khi $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0\\ \sin^2\frac{x}{2}=1\end{array}\right.\Rightarrow VT(2)=1\neq 0$

$\Rightarrow$ (2) không có nghiệm $x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

nên $\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

Chia hai vế của (2) cho $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$ ta được $\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+2=0$

(vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

b) Phương trình (*) tương đương phương trình

$(\cos 2x+\sin 2x)^3-3\cos 2x\sin 2x(\cos 2x+\sin 2x)=2(\cos^5 2x+\sin^5 2x)$

$\Leftrightarrow (\cos^3 2x+\sin^3 2x)(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=2(\cos^5 2x+\sin^5 2x)$

$\Leftrightarrow (\cos^2 2x-\sin^2 2x)(\cos^3 2x-\sin^3 2x)=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x-\sin^2 2x=0$ hoặc $\cos^3 2x-\sin^3 2x=0$

$\Leftrightarrow \tan 2x=\pm 1\ \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$

Nhóm 5

Bài tập 10. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) + Thấy (*) có nghiệm $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

+ Nếu $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$, ta nhân hai vế của (*) cho sinx ta được:

$5\sin 3x\sin x=3\sin 5x\sin x$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{3}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$

$\Leftrightarrow 5(\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1) = 3(2\cos^2 2x - 1 - 4\cos^3 2x + 3\cos 2x)$

$\Leftrightarrow 5(1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x) = 3(1 - \cos 2x)(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1)$

$\Leftrightarrow 12\cos^2 2x - 4\cos 2x - 8 = 0$ (do $\cos 2x \neq 1$)

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi; x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi.$

b) + Thấy (*) không có nghiệm $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

+ Ta nhân hai vế của (*) cho $16\sin x \neq 0$, ta được:

$16\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow 8\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \sin x \Leftrightarrow 4\sin 4x\cos 4x\cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin 16x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{15}$ hoặc $x = \frac{\pi}{17} + \frac{h2\pi}{17}$ $(k, h \in \mathbf{Z})$

+ $\frac{k2\pi}{15} = m\pi \Leftrightarrow k = \frac{15m}{2} = 7m + \frac{m}{2}$. Vì $m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{m}{2} = p \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 15p$

+ $\frac{\pi}{17} + \frac{h2\pi}{17} = n\pi \Leftrightarrow h = \frac{17n - 1}{2} = 8n + \frac{n-1}{2}$

Vì $n \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{n-1}{2} = q \in \mathbf{Z} \Rightarrow h = 8(2q+1) + q = 17q + 8$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $\left[\begin{array}{l} x = 2p\pi \\ x = \frac{\pi}{17} + \frac{(17q+8)2\pi}{17} \end{array}\right.$

(với $k \neq 15p$. $h \neq 17q + 8$ $(p, q \in \mathbf{Z})$)

c) (*) $\Leftrightarrow \sin\frac{5x}{2} = 5\cos^2 x\cos x\sin\frac{x}{2}$ (1)

• Với $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin\frac{x}{2} = \pm 1 \end{cases}$

$VP(1) = \pm 5 \neq VT(1) = \pm 1 \Rightarrow$ (*) không có nghiệm $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

+ Với $x \neq \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, nhân hai vế của (*) cho $2\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ta được:

$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 5\cos^3 x\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sin 2x = 5\cos^3 x\sin x \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 5\cos^3 x\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x[3 - 4(1 - \cos^2 x) + 2\cos x - 5\cos^3 x] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos x - 1)(5\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \text{ (loại } x = \pi + k2\pi) \\ x = \pm\arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}\right) + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$

Nhóm 6

Bài tập 11.

Cách 1

$2(1-m)\sin x - 2(m+2)\cos x + m^2 + 5 = 0 \quad (*)$

$\Leftrightarrow m^2 - 2(\sin x + \cos x)m + 5 + 2\sin x - 4\cos x = 0 \quad (1)$

$\Delta' = (\sin x + \cos x)^2 - (5 + 2\sin x - 4\cos x) = 2(\cos x - 1)(\sin x + 2) \le 0$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \sin x = 0$

(1) trở thành : $m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy :

- $m = 1$: (*) có nghiệm $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $m \neq 1$: (*) vô nghiệm.

Cách 2

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow [2(1-m)]^2 + [2(m+2)]^2 \ge (m^2+5)^2$

$\Leftrightarrow m^4 + 2m^2 - 8m + 5 \le 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 \underbrace{(m^2 + 2m + 5)}_{>0, \forall m} \le 0 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy: • $m = 1$: (*) có nghiệm $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $m \neq 1$: (*) vô nghiệm.

Bài tập 12. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) (*) $\Leftrightarrow 2\cos^2 x + (4\sin x - 7)\cos x - 2\sin x + 3 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$.

(1) trở thành: $2t^2 + (4\sin x - 7)t - 2\sin x + 3 = 0 \quad (2)$

$\Delta = (4\sin x - 7)^2 - 8(-2\sin x + 3) = (4\sin x - 5)^2$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 3 - 2\sin x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \cos\dfrac{\pi}{3} \\ 2\sin x + \cos x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

($2\sin x + \cos x = 3$ vô nghiệm vì $2^2 + 1^2 < 3^2$)

b) (*) $\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3(2\cos x - 3)\sin x + 7 - 6\cos x = 0 \quad (1)$

$\Delta = [3(2\cos x - 3)]^2 - 8(7 - 6\cos x) = (6\cos x - 5)^2$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 2\sin x + 6\cos x = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

(do $2\sin x + 6\cos x = 7$ vô nghiệm vì $2^2 + 6^2 < 7^2$)

c) Điều kiện : $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(*) $\Leftrightarrow (2 - 2\cos x)\sin^2 x - 2\sin x + 2\cos x = 0 \quad (1)$

$\Delta' = 1 - (2 - 2\cos x)2\cos x = (2\cos x - 1)^2$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 1 & (2) \\ \sin x = \dfrac{\cos x}{1-\cos x} & (3) \end{array}\right.$

(2) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

(3) $\Leftrightarrow \sin x - \cos x - \sin x\cos x = 0 \qquad (4)$

Giải (4)

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right),\ |t| \le \sqrt{2}.$

(4) trở thành: $t - \dfrac{1-t^2}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} - \varphi + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \varphi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi;$

$x = \dfrac{5\pi}{4} - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

d) Phương trình (*) tương đương phương trình

$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 - (1 + 2\sin x)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - 2(1 - 2\sin x) = 0 \quad (1)$

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$

(1) trở thành $t^2 - (1 + 2\sin x)t - 2(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 2 & (2) \\ t = 2\sin x - 1 & (3) \end{array}\right.$

(2) $\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

(3) $\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin x - 1 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbf{Z}).$

Vậy nghiệm (*) là $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

e) Điều kiện : $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow 4\left[3\sqrt{4x - x^2}\cdot\dfrac{1 - \cos(x+y)}{2} + 2\cos(x+y)\right] = 13 + 4\cos^2(x+y)$

$\Leftrightarrow 4\cos^2(x+y)-2(4-3\sqrt{4x-x^2})\cos(x+y)-(6\sqrt{4x-x^2}-13)=0$

Đặt $u=\cos(x+y)$, $|u|\le 1$. Ta có phương trình:

$4u^2-2(4-3\sqrt{4x-x^2})u-(6\sqrt{4x-x^2}-13)=0$ (1)

$\Delta'_u=-(3x-6)^2\le 0$

$$\text{(1) có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\in[0;4] \\ u=\cos(x+y)=\dfrac{4-3\sqrt{4x-x^2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\in[0;4] \\ \cos(2+y)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\pm\dfrac{2\pi}{3}-2+k2\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

Nhóm 7

Bài tập 13. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) (*) $\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 2x-1+2)+\cos 2x.\cos 3x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x\cos 2x+4\cos^3 x-3\cos x)+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 2x+4\cos^2 x\cos 2x-3\cos 2x+1)=0$

$\Leftrightarrow \cos x[2\cos^2 2x+2(1+\cos 2x)\cos 2x-3\cos 2x+1]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\underbrace{(4\cos^2 2x-\cos 2x+1)}_{\text{Vô nghiệm}}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

b) Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x\ne 0 \\ \cos 6x\ne 0 \\ \sin 4x\cos 4x\ne 0 \end{cases}$

$VP(*)=\dfrac{1}{\sin 4x\cos 4x}-\dfrac{\cos 4x}{\sin 4x}=\dfrac{1-\cos^2 4x}{\sin 4x\cos 4x}=\tan 4x$

(*) $\Leftrightarrow 3\tan 6x-2\tan 2x=\tan 4x$

$\Leftrightarrow 2(\tan 6x-\tan 2x)+(\tan 6x-\tan 4x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin 4x}{\cos 6x\cos 2x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos 6x\cos 4x}=0 \Leftrightarrow 2\sin 4x\cos 4x+\sin 2x\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin 4x\left(2\cos 4x+\dfrac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

(do $\sin 4x\ne 0$)

c) VT(*) $= \cos^4x(\cos x + \sin x) + \sin^6x(\cos x + \sin x)$

(*) $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^4x + \sin^6x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ \cos^4x + \sin^6x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

(2) $\Leftrightarrow (1 - \sin^2x)^2 + \sin^6x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2x(\sin^4x + \sin^2x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin^2x = 1 \\ \sin^2x = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

d) Điều kiện $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) \neq 0$

(*) viết lại :

$$\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi; x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

PHẦN II. BỔ SUNG, NÂNG CAO

Chủ đề 1: SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

• Tác dụng của phương pháp đặt ẩn phụ là đưa phương trình đã cho về phương trình mới có cách giải dễ dàng mà ta đã biết.

Chú ý:

Trong phương pháp đặt ẩn phụ ta cần chú ý đặt điều kiện quan hệ biến cũ và biến mới chính xác (nhất là bài toán có chứa tham số).

Thật ra ngay từ đầu khi học giải phương trình lượng giác, các em đã đặt ẩn phụ rồi. Ví dụ: $a\sin^2X + b\sin X + c = 0$, ta đặt $t = \sin X$ và điều kiện $|t| \le 1$...(nội dung được trình bày trong Phần I- Chủ đề 2), ở đây tôi chỉ trình bày một số dạng phương trình lượng giác có tính đặc trưng, qua các ví dụ cụ thể sau.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $\cos 2x + \tan x = 1$ (*).

Giải

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \tan x$.

(*) trở thành: $\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1 \Leftrightarrow 1 - t^2 + t + t^3 = 1 + t^2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + t = 0$

$\Leftrightarrow t(t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(t-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)(1 + \sin x) = 1 + \tan\frac{x}{2}$ (*)

Giải

Điều kiện : $x \ne \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$.

Phương trình (*) trở thành: $(1-t)\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) = 1 + t$

$\Leftrightarrow (1-t)(1+t^2+2t)=(1+t)(1+t^2)$

$\Leftrightarrow (1-t)(1+t)^2=(1+t)(1+t^2) \Leftrightarrow (1+t)[1+t^2-(1-t)(1+t)]=0$

$\Leftrightarrow 2t^2(1+t)=0 \Leftrightarrow t=0$ hoặc $t=-1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2}=0 \\ \tan\frac{x}{2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=k\pi \\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., k\in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k2\pi; x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos 2x-\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}=0$ (*).

Giải

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\geq -1\end{cases}$

Đặt $t=\tan x$, $t\geq -1$ và $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

(*) trở thành: $\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\cdot\sqrt{1+t}=0 \Leftrightarrow (1-t)(1+t)-\sqrt{1+t}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+t}[(1-t)\sqrt{1+t}-1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ (1-t)\sqrt{1+t}=1 \end{array}\right.$$

• $t=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$.

• $(1-t)\sqrt{1+t}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}-1\leq t\leq 1\\ (1-t)^2(1+t)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\leq t\leq 1\\ t^3-t^2-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\leq t\leq 1\\ t(t^2-t-1)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\arctan\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+k\pi \end{array}\right., k\in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi$; $x=\arctan\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+k\pi$;

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}.$$

Nhận xét :

+ Qua 3 ví dụ trên ta thấy trong phương trình (*), nếu có xuất hiện quan hệ $\sin X$, $\cos X$, $\tan X$, $\tan\frac{X}{2}$, $\cot\frac{X}{2}$ thì ta đặt $t=\tan\frac{X}{2}$ với $X\neq\pi+k2\pi$, $k\in \mathbf{Z}$.

Sau đó ta thế $\sin X=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos X=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan X=\frac{2t}{1-t^2}$, $\cot\frac{X}{2}=\frac{1}{t}$ ($t\neq 0$) vào (*), ta được phương trình (1) theo t.

+ Giải (1) tìm t $\Rightarrow$ tìm X.

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

a) $8\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin 3x=0$ (1) b) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-x\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+3x\right)$ (2).

Giải

a) $(1)\Leftrightarrow 8\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin(3x+\pi)=0$

$$\Leftrightarrow 8\sin^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left[3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-4\sin^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 12\sin^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

Đặt $t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\ |t|\le 1$.

Phương trình trên trở thành: $12t^3-3t=0\Leftrightarrow 3t(4t^2-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t^2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\\ \dfrac{1-\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{2}=\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0\\ \cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \vee x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của (*) là $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

b) *Nhận xét*: $\left(\dfrac{\pi}{10}+3x\right)+3\left(\dfrac{3\pi}{10}-x\right)=\pi\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{10}+3x\right)=\sin 3\left(\dfrac{3\pi}{10}-x\right)$

Ta đặt $t=\dfrac{3\pi}{10}-x$.

$(2)\Leftrightarrow \sin t=\dfrac{1}{2}\sin 3t\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t\Leftrightarrow \sin t(4\sin^2 t-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t=0\\ 4\sin^2 t-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t=0\\ 4\left(\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right)-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t=0\\ \cos 2t=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3\pi}{10}-x=k\pi\\ \dfrac{3\pi}{10}-x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ \dfrac{3\pi}{10}-x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{10}-k\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{15}-k\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{15}-k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{3\pi}{10} - k\pi; x = \frac{2\pi}{15} - k\pi; x = \frac{7\pi}{15} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $2\sqrt{2+\sin x} = 3 + \cos 2x$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{2+\sin x} = 3 + 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \sqrt{2+\sin x} = 2 - \sin^2 x$

Đặt $t = \sqrt{2+\sin x}$, $1 \le t \le \sqrt{3} \Rightarrow t^2 = 2 + \sin x$.

(*) trở thành: $\begin{cases} t^2 = 2 + \sin x \\ t = 2 - \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - \sin x = 2 & (1) \\ t + \sin^2 x = 2 & (2) \end{cases}$

(1) và (2) $\Rightarrow t^2 - \sin x = t + \sin^2 x \Leftrightarrow t^2 - \sin^2 x - (t + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (t + \sin x)(t - \sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow t + \sin x = 0$ hoặc $t - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\sin x \\ t = \sin x + 1 \end{array}\right.$

•Với $t = -\sin x$, ta có: $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ (thế vào (2))

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 2 > 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thoả (*))

•Với $t = \sin x + 1$, ta có: $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ (thế vào (2))

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sin\varphi \\ \sin x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi + k2\pi \\ x = \pi - \varphi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$ (thoả (*)).

Vậy nghiệm của (*) là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \varphi + k2\pi; x = \pi - \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{1 + \sin x - 2\sin^2 x} + \sqrt{5 + \sin x - 2\sin^2 x} = 2$ (*).

Giải

Điều kiện : $1 + \sin x - 2\sin^2 x \ge 0$ và $5 + \sin x - 2\sin^2 x \ge 0$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1 + \sin x - 2\sin^2 x} \ge 0 \\ v = \sqrt{5 + \sin x - 2\sin^2 x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 1 + \sin x - 2\sin^2 x \\ v^2 = 5 + \sin x - 2\sin^2 x \end{cases}$

(*) trở thành: $\begin{cases} u + v = 2 \\ v^2 - u^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ (v-u)(v+u) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ v - u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ u = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Cho phương trình $2\cos x\cos 2x\cos 3x + m = 7\cos 2x$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi m = 5

b) Xác định m để (*) có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Giải

$(*) \Leftrightarrow (\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x + m = 7\cos 2x$

$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x)\cos 2x + m = 7\cos 2x.$

Đặt $t = \cos 2x$, $|t| \le 1$ ta được $m = -2t^3 - t^2 + 8t$ (1).

a) Khi m = 5:

$(1) \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 8t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t - 5) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\frac{5}{2} < -1$ (loại) $\Rightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) (*) có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow$ phương trình (1) có duy nhất một nghiệm $t \in [0; 1]$.

- Xét hàm số $g(t) = -2t^3 - t^2 + 8t$ trên đoạn [0; 1].
- $g'(t) = -6t^2 - 2t + 8$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -\frac{4}{3} \notin [0; 1]$.
- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	0		1	[redacted]
g'(t)	[redacted]		+		[redacted]
g(t)	[redacted]	0	↗	5	[redacted]

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $0 \le m \le 5$ thỏa mãn đề bài.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các phương trình :

Bài tập 1. $1 + \cos x = \tan\frac{x}{2}$.

Bài tập 2. $\cos x + \tan\frac{x}{2} = 1$.

Bài tập 3. $1 + 3\tan x = 2\sin 2x$.

Bài tập 4. $\cot x = \tan x + 2\tan 2x$.

Bài tập 5. $\tan x - 2\tan\frac{x}{2} + \sin x = 0$.

Bài tập 6. $2\cos\left(4x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

Bài tập 7. $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x.$

Bài tập 8. $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)\cdot$

Bài tập 9. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Cách giải tương tự Ví dụ 1

+Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\cdot$

+ Đáp số nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

Bài tập 2. Cách giải tương tự Ví dụ 1

+ Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\cdot$

+ Đáp số nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\ k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

Bài tập 3. Cách giải tương tự Ví dụ 1

+ Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\cdot$

+ Đáp số nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

Bài tập 4. • Điều kiện: $\sin 4x\neq 0.$

• Đặt $t=\tan x,\ \begin{cases}t\neq 0\\ t\neq\pm 1\end{cases}$

• Phương trình đã cho viết lại $\frac{1}{t}=t+2\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)\Leftrightarrow(1-t^2)^2=4t^2$

$\Leftrightarrow 1-t^2=\pm 2t\Leftrightarrow t^2+2t-1=0$ hoặc $t^2-2t-1=0$

$\Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{2}$ hoặc $t=1\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow x=\arctan(-1\pm\sqrt{2})+k\pi$ hoặc $x=\arctan(1\pm\sqrt{2})+k\pi\ (k\in\mathbf{Z}).$

Bài tập 5. • Điều kiện: $\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi\\ x\neq\pi+n2\pi\end{cases}$ $(m,n\in\mathbf{Z}).$

• Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\cdot$

• Phương trình đã cho viết lại: $\frac{2t}{1-t^2}-2t+\frac{2t}{1+t^2}=0$

$\Leftrightarrow t(t^4+1)=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

Bài tập 6.

- Đặt $t = \frac{\pi}{6} - 2x \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{3} - 2t$.
- Phương trình đã cho viết lại: $2\cos(\pi - 2t) = 3 - 4\cos t$

$\Leftrightarrow -2\cos 2t = 3 - 4\cos t \Leftrightarrow 4\cos^2 t - 4\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ t = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} - k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} - k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 7.

+ Cách giải tương tự Ví dụ 4a.

+ Đáp số nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x = k\pi$;

$x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

Bài tập 8.

+ Cách giải tương tự Ví dụ 4b.

+ Đáp số nghiệm của phương trình đã cho $x = \frac{3\pi}{5} + k2\pi$; $x = \frac{14\pi}{15} + k2\pi$;

$x = \frac{4\pi}{15} + k2\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

Bài tập 9.

+ Đặt $x = t - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 3t - \frac{3\pi}{4} \\ 2x = 2t - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

+ Phương trình đã cho trở thành: $\sin(3t - \pi) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\sin t$

$\Leftrightarrow -\sin 3t = -\cos 2t\sin t \Leftrightarrow -(\sin t\cos 2t + \sin 2t\cos t) = -\cos 2t\sin t$

$\Leftrightarrow \sin 2t\cos t = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}(2k - 1), k \in \mathbf{Z}.$

Chủ đề 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhóm 1. Phương pháp tổng bình phương

a) $A^2 + B^2 + \cdots + C^2 = 0 \Leftrightarrow A = B = \cdots = C = 0$

Mở rộng : $A^{2n} + B^{2n} + \cdots + C^{2n} = 0, n \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow A = B = \cdots = C = 0$

b) Cho $A, B, ..., C \geq 0$ (hoặc $A, B, ..., C \leq 0$), ta có:

$$A + B + \cdots + C = 0 \Leftrightarrow A = B = \cdots = C = 0$$

Nhóm 2. Phương pháp đối lập

• Xét phương trình $f(x) = g(x)$ (*) có tập xác định **D**. Nếu với mọi x thuộc **D** mà $f(x) \leq k \leq g(x)$ thì tập nghiệm của (*) chính là tập nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} f(x) = k \\ g(x) = k \end{cases}$

• Tương tự : Cho $f(x) \leq k \leq g(y)$. Khi đó : $f(x) = g(y) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k \\ g(y) = k. \end{cases}$

Nhóm 3. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

Cho $\begin{cases} A \leq k \\ B \leq h \end{cases}$. Khi đó : $A + B = k + h \Leftrightarrow \begin{cases} A = k \\ B = h \end{cases}$

Nhóm 4 Dạng đặc biệt

• $\sin A \sin B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \sin B = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sin A = -1 \\ \sin B = -1 \end{cases}$

• $\sin A \sin B = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \sin B = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sin A = -1 \\ \sin B = 1 \end{cases}$

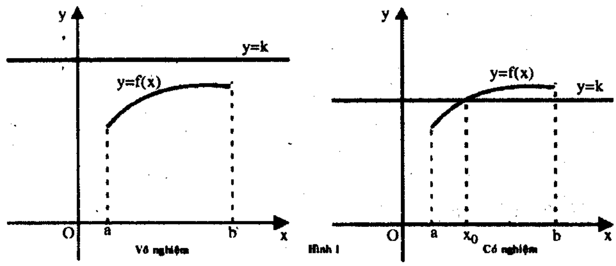
Tương tự dạng phương trình : $\cos A \cos B = \pm 1$, $\sin A \cos B = \pm 1$

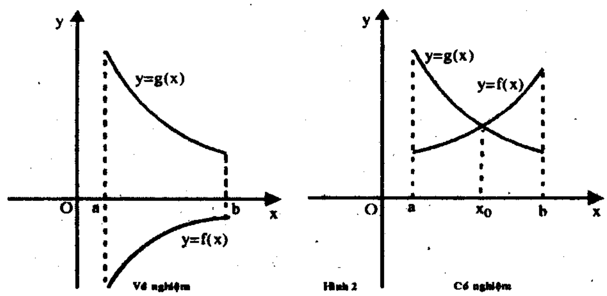
Nhóm 5. Phương pháp đạo hàm

Khi giải phương trình (*) bằng phương pháp này, ta cần chú ý:

+ Nếu hàm số $f(x)$ tăng (hoặc giảm) trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = k$ (k hằng số) hoặc vô nghiệm hoặc có duy nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$. (xem hình 1- trường hợp giảm các bạn tự vẽ).

+ Nếu hàm số $f(x)$ tăng (hoặc giảm) và $g(x)$ giảm (hoặc tăng) trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ hoặc vô nghiệm hoặc có duy nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$. (xem hình 2- trường hợp f(x)giảm và g(x) tăng trên $(a;b)$ các bạn tự vẽ).





+ Nếu hàm số f(x) tăng (hoặc giảm) trên **R** thì phương trình $f(x) = k$ (k hằng số) có duy nhất một nghiệm.

+ Nếu hàm số f(x) tăng (hoặc giảm) và g(x) giảm (tăng) trên **R** thì phương trình $f(x) = g(x)$ có duy nhất một nghiệm.

+ Nếu hàm số f(x) tăng (hoặc giảm) trong khoảng $(a;b)$ thì

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v;\ \forall u, v \in (a;b)$$

Nhóm 6. Phương pháp đồ thị (dạng thông dụng)

Bài toán: Giải và biện luận phương trình $F(x, m) = 0$ (*) bằng phương pháp đồ thị (x là ẩn số và m là tham số).

•*Phương pháp giải dạng 1:* Biến đổi (*) về dạng $f(x) = b$ (1) (b phụ thuộc tham số m).

+ Vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$ và đường thẳng d: $y = b$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

+ Dựa vào đồ thị để biện luận số giao điểm của (C) và đường thẳng d

$\Rightarrow$ số nghiệm của (1).

•*Phương pháp giải dạng 2:* Biến đổi (*) về dạng $f(x) = ax + b$ (1) (a hằng số, b phụ thuộc tham số m).

+ Vẽ đồ thị (C): $y = f(x)$ và đường thẳng d: $y = ax + b$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

+ Viết phương trình các tiếp tuyến $y = ax + b_1$, $y = ax + b_2$,... của (C).

+ Dựa vào đồ thị của (C) và các tung độ gốc $b_1, b_2, \dots$ để biện luận số giao điểm của (C) và đường thẳng d $\Rightarrow$ số nghiệm của (2).

•*Phương pháp giải dạng 3 :* Biến đổi (*) về dạng $f(x) = ax^2$ (3) (a phụ thuộc tham số m).

+ Vẽ đường cong (C): $y = f(x)$ và $f(x) = ax^2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy

+ Dựa vào đồ thị của (C) và (P) biện luận số giao điểm của (C) và (P) $\Rightarrow$ số nghiệm của (3).

Nhóm 7. Phương pháp tập giá trị

Cho hai hàm số f và g lần lượt có tập xác định $\mathbf{D}_f$, $\mathbf{D}_g$. Tập giá trị của f và g lần lượt là $Y_f = \{y \in \mathbf{R} / \exists x \in \mathbf{D}_f : y = f(x)\}, Y_g = \{y \in \mathbf{R} / \exists x \in \mathbf{D}_g : y = g(x)\}$.

+Nếu $x_0 \in \mathbf{D}_f \cap \mathbf{D}_g$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ thì $f(x_0) = g(x_0)$

Vậy nếu $f(x) = g(x)$ có nghiệm thì $Y_f \cap Y_g \neq \varnothing$.

(nhưng $Y_f \cap Y_g \neq \varnothing$ thì không suy ra được $f(x) = g(x)$ có nghiệm).

+Nếu $Y_f \cap Y_g = \varnothing$ thì $f(x) = g(x)$ vô nghiệm.

Nhóm 8. Sử dụng hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, sử dụng nguyên hàm để chứng minh phương trình lượng giác có nghiệm.

•***Hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục***

Nếu f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b) < 0 thì $\exists x_0 \in (a; b)$: $f(x_0) = 0$.

•*Định lí Lagrange :* Nếu hàm số F(x) liên tục trên [a; b] và có đạo hàm trên khoảng (a; b) thì tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $F'(c) = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a}$.

+ Nếu F(b) = F(a) thì $F'(x) = 0$ có nghiệm $x = c \in (a; b)$ (định lí Rolle).

•***Định nghĩa nguyên hàm :***

Cho hàm số f(x) liên tục trên khoảng **I**. Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của f(x) trên **I** nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbf{I}$. Kí hiệu:

+ Họ tất cả các nguyên hàm của f(x) là $\int f(x)dx$.

+ $\int f(x)dx = F(x) + C$ (C là hằng số).

•***Thuộc bảng nguyên hàm***

Nhóm 9. Phương pháp tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy hay trong không gian Oxyz, ta chọn tọa độ các vectơ (toạ độ của điểm) sao cho thích hợp với đề đã cho rồi áp dụng tính chất:

•$|\vec{a} \pm \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

•$|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

• $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

• $\vec{a}.\vec{b} \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- $AB + BC \geq AC$, $\forall A, B, C$ nằm trong mặt phẳng. Đẳng thức xảy ra khi A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A và C.

Nhóm 10. Phương pháp hàm số ngược

Định lí:

- Cho hàm $y = f(x)$ có hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$. Ta có: f tăng tương đương f^{-1} tăng.
- Cho hàm $y = f(x)$ tăng có hàm số ngược $y = f^{-1}(x)$. Ta có:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x \in \mathbf{D}_f \cap \mathbf{D}_{f^{-1}} \end{cases}.$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Nhóm 1

Ví dụ 1. Giải phương trình $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow (2\cos x)^2 - 2(2\cos x) + 1^2 + (\sqrt{3}\tan x)^2 - 2(\sqrt{3}\tan x) + 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)^2 + (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\tan^2 x + \cot^2 x = 2\sin^2 y$ (*).

Giải

Điều kiện : $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x - 2 + 2 - 2\sin^2 y = 0 \Leftrightarrow (\tan x - \cot x)^2 + 2\cos^2 y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbf{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + l\pi\right)(k, l \in \mathbf{Z})$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $8\sin^3 x - \sin^2 3x - 6\sin x - \cos^2 x - 1 = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 3x + 2(3\sin x - 4\sin^3 x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 3x + 2\sin 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x + (\sin 3x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ \sin 3x + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \pm 1\\ 3\sin x - 4\sin^3 x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $4 - \cos 2x + 2\sin 2x + 2\sqrt{2}\sin x = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow (1 - \cos 2x) + 2\sin 2x + 2\sqrt{2}\sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin 2x + 2\sqrt{2}\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin 2x + \sqrt{2}\sin x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\right) + (\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0\\ \sin x + \cos x = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi\end{array}\right.\\ x = -\frac{\pi}{4} + l\pi\end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}\quad (1)$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Nhóm 2

Ví dụ 5. Giải các phương trình: a) $2\cos^2\frac{x^2 + x}{2} = 2^x + 2^{-x}$ (*)

b) $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$ (**).

Giải

a) Ta có: $\begin{cases}2\cos^2\frac{x^2 + x}{2} \le 2\\ 2^x + 2^{-x} \ge 2\sqrt{2^x 2^{-x}} = 2\sqrt{2^{x-x}} = 2\sqrt{2^0} = 2\end{cases}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos^2\frac{x^2 + x}{2} = 2\\ 2^x + 2^{-x} = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2\frac{x^2 + x}{2} = 1\\ 4^x = 1 = 4^0\end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = 0$.

b) Điều kiện: $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Ta có: $2\sin 5x + \cos 4x \leq 3$ và $3 + \cot^2 x \geq 3$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 5x + \cos 4x = 3 \\ 3 + \cot^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1 & (1) \\ \cos 4x = 1 & (2) \\ \cot x = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, thế nghiệm của (3) vào (2) thấy đúng, còn

$$VT(1) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 5k\pi\right) = -1 \text{ nếu k lẻ}$$

$$VT(1) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 5k\pi\right) = 1 \quad \text{nếu k chẵn.}$$

Vậy nghiệm của phương trình (**) là $x = \dfrac{\pi}{2} + m2\pi, m \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 6. Các tham số a và b thỏa mãn điều kiện gì để phương trình

$x^2 + 5 = 2[x - 2\cos(ax + b)]$ (*) có nghiệm.

Giải

$(*) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = -4\cos(ax + b)\ (1)$

Ta có: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4$ và $-4\cos(ax + b) \leq 4$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 4 \\ -4\cos(ax + b) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \cos(ax + b) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \cos(a + b) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a + b = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Vậy để phương trình (*) có nghiệm thì a và b phải thỏa mãn

$a + b = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y \ (*).$$

Giải

Ta thấy: $\sin y \leq 1 \Rightarrow 12 + \dfrac{1}{2}\sin y \leq 12 + \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{25}{2}$

$$VT = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} + 4 = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x} + 4$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right) + 4 = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4$$

$$\text{Ta thấy: } \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\sin^2 2x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\sin^2 2x} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \geq \dfrac{1}{2} \\ 1 + \dfrac{16}{\sin^4 2x} \geq 1 + 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1+\frac{16}{\sin^4 2x}\right)+4 \ge \frac{25}{2}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 2x = 1\\ \sin y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 0\\ \sin y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ y = \dfrac{\pi}{2}+m2\pi\end{cases} \quad (k,m \in \mathbf{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}+m2\pi\right)$ $(k,m \in \mathbf{Z})$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\cos^8 x + \sin^8 x = 64(\cos^{14} x + \sin^{14} x)$ (*).

(Trích đề trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 309)

Giải

Ta có: $\cos^8 x + \sin^8 x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Nhắc lại BĐT Cauchy :

Với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ ta có $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 . a_2 \ldots a_n}$ hay

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 . a_2 \ldots a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 7 số không âm, ta được

$$\sin^{14} x + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \sin^{14} x + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \ge 7\cdot\sqrt[7]{\sin^{14} x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{42}}$$

hay $\sin^{14} x + 6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \ge \dfrac{7}{2^6}\sin^2 x$ (1)

Tương tụ : $\cos^{14} x + 6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \ge \dfrac{7}{2^6}\cos^2 x$ (2)

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^8 x = \cos^2 x\\ \sin^8 x = \sin^2 x\\ 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x(\cos^6 x - 1) = 0\\ \sin^2 x(\sin^6 x - 1) = 0\\ 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) = 1\end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) \ge 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \pm 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \pm 1\end{array}\right.\\ 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right.\\ 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) = 1\end{cases} \quad \text{(vô nghiệm).}$$

Nhóm 3

Ví dụ 9. Giải phương trình $\cos^7x + \sin^4x = 1$ (*).

Giải

Tacó: $\begin{cases} \cos^7x \le |\cos x|^7 \le \cos^2x \\ \sin^4x \le \sin^2x \end{cases} \Rightarrow \cos^7x + \sin^4x \le \cos^2x + \sin^2x = 1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^7x = \cos^2x \\ \sin^4x = \sin^2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2x(\cos^5x - 1) = 0 \\ \sin^2x(\sin^2x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sin x\cos\dfrac{x}{4} + 2\cos^2\dfrac{x}{2} = 3 - \cos x\sin\dfrac{x}{4}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin x\cos\frac{x}{4} + \cos x\sin\frac{x}{4}\right) + \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2$$

Vì $\sin\dfrac{5x}{4} \le 1$ và $\cos x \le 1, \forall x \in \mathbf{R}$ nên

$$\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{5x}{4} = 1 & (1) \\ \cos x = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = 2m\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{k8\pi}{5} \\ x = 2m\pi \end{cases} (m, k \in \mathbf{Z})$$

Để thoả mãn hệ (1) và (2) ta tìm $m, k \in \mathbf{Z}: \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{k8\pi}{5} = 2m\pi$

$$\Leftrightarrow 1 + 4k = 5m \Leftrightarrow k = \frac{5m-1}{4} = m + \frac{m-1}{4}$$

Vì $m, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow \dfrac{m-1}{4} = n, n \in \mathbf{Z} \Rightarrow m = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = 2m\pi = 2\pi(4n+1), n \in \mathbf{Z}$.

Nhóm 4

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sin x\sin 2x = 1$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = 1\\ \sin 2x = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin x = -1\\ \sin 2x = -1\end{cases}$$

Vì $\sin x = \pm 1 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow$ hệ trên vô nghiệm.

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\sin x - \cos\frac{x}{2}\sin^2 x + 1 = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left[\sin\frac{x}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin\frac{x}{2}\cos x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \ (1) \text{ hoặc } \sin\frac{x}{2}\cos x = -1 \ (2)$$

$(1) \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\frac{x}{2} = 1\\ \cos x = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\frac{x}{2} = -1\\ \cos x = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\frac{x}{2} = 1\\ 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\frac{x}{2} = -1\\ 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nhóm 5

Ví dụ 13. Giải phương trình $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = 0$ (*).

Giải

Ta thấy $x = 0$ là một nghiệm của (*). Ta sẽ chứng minh (*) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

- Xét hàm số $f(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$

  $f'(x) = \sin x - x$, $f''(x) = \cos x - 1$.

  Tacó: $f''(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x)$ là hàm số chẵn; nên ta xét $f(x)$ trên $[0; +\infty)$.

• Bảng biến thiên :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	
$f(x)$	0	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của (*).

Ví dụ 14. Giải phương trình $\left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x} . \cos x = \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} . \sin x$ (*).

(Trích đề thi đề nghị OLYMPIC 30-4 năm 2003)

Giải

• Ta thấy $\cos x = 0$ hoặc $\sin x = 0$ không là nghiệm của (*) nên:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x}}{\sin x} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right) \quad (1)$$

• Xét hàm số $f(u) = \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{u}}{u}$, $|u| < 1$, $u \neq 0$. $f'(u) = \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^{u}\left(u\ln\frac{5}{2} - 1\right)}{u^2}$, $|u| < 1$, $u \neq 0$.

Vì $\frac{5}{2} < e \Rightarrow 0 < \ln\frac{5}{2} < \ln e = 1$

+ Nếu $u < 0 \Rightarrow f'(u) < 0$

+ Nếu $0 < u < 1 \Rightarrow u\ln\frac{5}{2} < u < 1 \Rightarrow u\ln\frac{5}{2} - 1 < 0 \Rightarrow f'(u) < 0$

Suy ra : $f'(u) < 0$, $\forall u \in (-1; 1)\backslash\{0\}$, tức là hàm $f(u)$ giảm trên tập xác định của nó. Vì vậy: $(1) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Nhóm 6

Ví dụ 15. Cho phương trình $\sin^2 x + \sin^2 3x - m\cos^2 2x = 0$ (*). Xác định m để phương trình (*) có nghiệm.

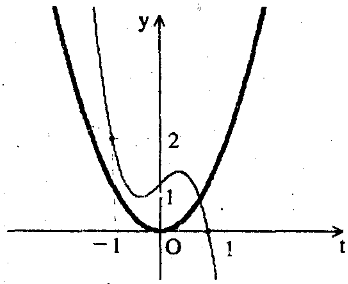
Giải

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} - m\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \cos 2x - (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) - 2m\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^3 2x + \cos 2x + 1 = m\cos^2 2x \qquad (1)$$

Đặt $t = \cos 2x$, $-1 \le t \le 1$.
Phương trình (1) trở thành:
$-2t^3 + t + 1 = mt^2$ (2)
Vẽ đồ thị (C): $y = -2t^3 + t + 1$,
(P_m) $y = mt^2$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy
Từ đồ thị ta thấy :



(*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in [-1;1]$

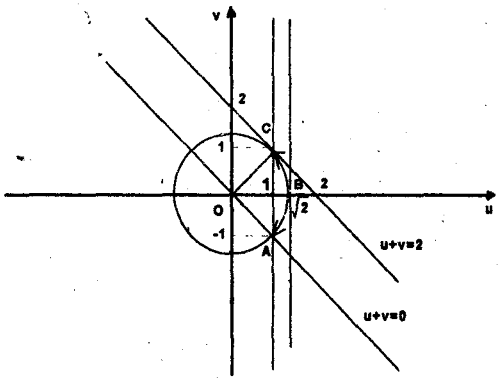
$\Leftrightarrow$ (C) và (P_m) cắt nhau trên $[-1;1] \Leftrightarrow m \ge 0$.

Ví dụ 16. Cho phương trình $\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x.\sqrt{2-\sin^2 x} = m$ (*).
Xác định m để phương trình (*) có nghiệm.

Giải

Cách 1: Phương pháp đồ thị

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2-\sin^2 x} \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 2.$



Bài toán trở thành tìm m để hệ (**)

$$\begin{cases} u + v + uv = m & (1) \\ u^2 + v^2 = 2 & (2) \\ 1 \le u \le \sqrt{2} & (3) \\ -1 \le v \le 1 & (4) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

$(2) \Leftrightarrow (u+v)^2 - 2uv = 2$

$$\Leftrightarrow uv = \frac{(u+v)^2 - 2}{2} \quad (5)$$

Thế (5) vào (1) ta được: $u + v + \dfrac{(u+v)^2 - 2}{2} = m$

$$\Leftrightarrow (u+v)^2 + 2(u+v) - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = -1 + \sqrt{2m+3} \\ u + v = -1 - \sqrt{2m+3} \end{array}\right.$$

$\left(\text{với } m \ge -\dfrac{3}{2}\right)$.

$$(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(I)} \begin{cases} u + v = -1 + \sqrt{2m+3} \\ u^2 + v^2 = 2 \\ 1 \le u \le \sqrt{2},\ -1 \le v \le 1 \end{cases} \\ \text{(II)} \begin{cases} u + v = -1 - \sqrt{2m+3} \\ u^2 + v^2 = 2 \\ 1 \le u \le \sqrt{2},\ -1 \le v \le 1 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Để hệ (I) có nghiệm thì đường thẳng (D_m): $u + v = -1 + \sqrt{2m+3}$ phải cắt cung ABC của đường tròn (C): $u^2 + v^2 = 2$ tâm O, bán kính $R = \sqrt{2}$.
$\Leftrightarrow 0 \le -1 + \sqrt{2m+3} \le 2 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2m+3} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le 2m + 3 \le 9 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$.

Cách 2 : Phương pháp đạo hàm

Đặt $t = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$ (1).

Đặt $z = \sin x$, $|z| \le 1 \Rightarrow t = z + \sqrt{2 - z^2}$, $t' = 1 - \dfrac{z}{\sqrt{2 - z^2}} = \dfrac{\sqrt{2 - z^2} - z}{\sqrt{2 - z^2}}$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - z^2} = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \ge 0 \\ z = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1.$

Bảng biến thiên

z	-1		1
t'		$+$	
t	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra $0 \le t \le 2$

$(1) \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \Leftrightarrow \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} = \dfrac{t^2 - 2}{2}$

(*) trở thành: $t^2 + 2t - 2 = 2m$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t - 2$ trên đoạn $[0; 2]$

$f'(t) = 2t + 2 > 0, \forall t \in [0; 2]$.

Bảng biến thiên:

t	0		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-2	$\nearrow$	6

Dựa vào bảng ta thấy nếu $-2 \le 2m \le 6 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$ thì (*) có nghiệm.

Nhóm 7

Ví dụ 17. Giải phương trình $\cos^{2008} x - \sin^{2008} x = 1$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow \cos^{2008} x = 1 + \sin^{2008} x$ (**)

Tập xác định : $D = \mathbf{R}$

Các hàm số $f(x) = \cos^{2008} x$ và $g(x) = 1 + \sin^{2008} x$ lần lượt có tập giá trị

$Y_f = [0; 1]$, $Y_g = [1; 2]$.

Vì $Y_f \cap Y_g = \{1\}$ nên (**) có nghiệm thì nghiệm đó phải là những giá trị

$x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = 1$.

Vì $f(x) = \cos^{2008} x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $g(k\pi) = 1$

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm là $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 18. Giải phương trình $2\cos^2\dfrac{x^2+x}{2} = 2^x + 2^{-x}$ (*).

Giải

Cách 1. Đã giải ở Ví dụ 5a.

Cách 2 Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

$f(x) = 2\cos^2\dfrac{x^2+x}{2}$ có tập giá trị là $Y_f = [0; 2]$, $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ có tập giá trị là $Y_g = [2; +\infty)$ $\left(\text{do } 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x.2^{-x}} = 2\sqrt{2^0} = 2\right)$.

Vì $Y_f \cap Y_g = \{2\}$ nếu (*) có nghiệm thì nghiệm đó phải là những giá trị $x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = 2$.

Vì $g(x) = 2^x + 2^{-x} = 2 \Leftrightarrow 2^x + \dfrac{1}{2^x} = 2 \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

và $f(0) = 2\cos^2 0 = 2$.

Nên (*) có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Nhóm 8

Ví dụ 19. Cho phương trình $a\cos x + b\sin 2x + c.\cos 3x - x = 0$ (*).

Chứng minh rằng với $\forall$ a, b, c thì (*) có nghiệm thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Giải

Xét hàm số: $f(x) = a\cos x + b\sin 2x + c\cos 3x - x$

Với $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ ta thấy f(x) liên tục trên $\mathbf{R}$ và $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$

do đó theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục

$\exists x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$: $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 20. Cho $4a\cos^3 x + 2b\cos^2 x + (c - 3a)\cos x + \sin x - b = 0$ (*).

Chứng minh rằng với $\forall a, b, c$ tùy ý cho trước thì phương trình (*) có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Giải

$(*) \Leftrightarrow a(4\cos^3 x - 3\cos x) + b(2\cos^2 x - 1) + c.\cos x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{a\cos 3x + b\cos 2x + c.\cos x + \sin x}_{f(x)} = 0$

Ta có: $\int f(x)dx = \dfrac{a}{3}\sin 3x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + c\sin x - \cos x + C$. Chọn $C = 0$.

Xét hàm số $F(x) = \dfrac{a}{3}\sin 3x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + c\sin x - \cos x$

Ta thấy F(x) liên tục trên $[0; 2\pi]$ và có đạo hàm trên $(0; 2\pi)$, nên theo định lí Lagrange thì $\exists x_0 \in (0; 2\pi)$: $\dfrac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi - 0} = F'(x_0)$

$\Leftrightarrow F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$ (định nghĩa nguyên hàm) $\Rightarrow$ đpcm.

Nhóm 9

Ví dụ 21. Giải phương trình $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3$ (*)

Giải

Cách 1, 2. Đã giải ở Ví dụ 16.

Cách 3. Đặt $\begin{cases} \vec{a} = \left(\sin x;\ 1;\ \sqrt{2 - \sin^2 x}\right) \\ \vec{b} = \left(1;\ \sqrt{2 - \sin^2 x}\ ;\ \sin x\right) \\ \vec{a}.\ \vec{b} = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 1 + 2 - \sin^2 x} = \sqrt{3} \\ |\vec{b}| = \sqrt{1 + 2 - \sin^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{3} \end{cases}$

Áp dụng: $\vec{a}.\ \vec{b} \le |\vec{a}|.\ |\vec{b}| \Rightarrow \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \le 3$ (1)

Đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = m \\ 1 = m\sqrt{2 - \sin^2 x} \\ \sqrt{2 - \sin^2 x} = m\sin x \\ m \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Nhóm 10

Ví dụ 22. Tìm a để phương trình $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ (*) có nghiệm.

Giải

Đặt $t = \sin x$, $|t| \le 1$. Khi đó (*) trở thành: $\sqrt{a + \sqrt{a + t}} = t$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (I) $\begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{a + t} = t^2 - a\ (1) \end{cases}$ có nghiệm

Xét hàm số $y = f(t) = t^2 - a$, $t \in [0; 1] \Leftrightarrow t^2 = y + a \Leftrightarrow t = \sqrt{y + a}$

Ta có : $y = f(t) = t^2 - a$ là hàm số ngược của $y = \sqrt{t + a}$ trên $[0; 1]$.

Do đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ t^2 - a = t \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{t \in [0;\ 1]} (t^2 - t) \le a \le \max\limits_{t \in [0;\ 1]} (t^2 - t)$ (2).

Xét hàm số $g(t) = t^2 - t$ trên đoạn $[0; 1]$

$g'(t) = 2t - 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

(2) $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le a \le 0$. Vậy phương trình (*) có nghiệm khi $-\frac{1}{4} \le a \le 0$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = x(2\sin x - x)$

b) $4\cos^2 x + 3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 4\sqrt{3}\cos x + 4 = 0$

c) $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$

d) $4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x + 7 = 0$.

Bài tập 2. Giải các phương trình:

a) $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0$

b) $4\cos^2(x+y) + 2(\cos 2x + \cos 2y) + 1 = 0$

c) $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x$

d) $5\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x + 2 = 0$

e) $\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) = 1$

f) $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1$

g) $2\sin 2x - \sqrt{2}\sin x + 3\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$.

Nhóm 2

Bài tập 3. Giải các phương trình:

a) $\sin x = x^2 + x + 1$

b) $3^{|\sin\sqrt{x}|} = |\cos x|$

c) $\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 3x = 2\sqrt{2}$

d) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$

e) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$

f) $\left(\sin^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\cos^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x$

g) $5 - 4x - x^2 = \frac{9}{\left|\sin\left(\frac{2y}{x}\right)\right|}$

h) $3\sin\pi x - x^2 + 5x - \frac{37}{4} = 0$

k) $\tan^4 x + \tan^4 y + 2\cot^2 x\cot^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$.

Bài tập 4 : Giải phương trình $\cos x - \cos 7x = 3\sqrt{3}\sin x$.

Bài tập 5. Tìm a để phương trình sau có nghiệm

$$(\cos 8x - \cos 4x)^2 = (a^2 + 6a + 8)(a^2 + 6a + 11) + 7 + \sin 6x \ (*).$$

Bài tập 6 : Giải phương trình $\cos x\cos 2x\cos 3x + \sin x\sin 2x\sin 3x = 1$.

Nhóm 3

Bài tập 7. Giải các phương trình:

a) $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} = 2$ b) $\sin 5x + \cos 4x = 2$

c) $\sin^{2007}x + \cos^{2008}x = 1$ d) $\sin^{2008}x + \cos^{2008}x = 1$

e) $\cos^5 x + \sin^5 x + \cos 2x + \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$.

Bài tập 8 : Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x\cos 2x\cos 3x + 2$.

Nhóm 4

Bài tập 9. Giải phương trình $\sin 4x\cos 16x = 1$.

Bài tập 10. Giải phương trình $\sin x\sin 2x\cos 5x = 1$.

Bài tập 11. Giải phương trình $\tan x + \tan 2x + \sin 3x = 0$.

Nhóm 5

Bài tập 12. Giải các phương trình:

a) $2008x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ b) $x^2 - 3x - 4 = \sin(x^2 - 4) - \sin 3x$.

Bài tập 13. Cho phương trình $ax^2 + 2\cos x = 2$ (*). Tìm các giá trị của a để (*) có đúng hai nghiệm phân biệt trong $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(Trích đề trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 301)

Nhóm 6

Bài tập 14. Tìm m để phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + m\sin x\cos x = 0$ có nghiệm.

Bài tập 15. Tìm m để phương trình $\sqrt{1 + 2\cos^2 x} + \sqrt{1 + 2\sin^2 x} = m$ có nghiệm.

Bài tập 16. Dùng đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$\sin^2 x - (m-1)\sin x + m - 1 = 0 \ (*) \text{ với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Nhóm 7

Bài tập 17. Giải các phương trình :

a) $2008\cos x = 2008 + x^2$ b) $-\cos(7\pi x) = x^2 - 6x + 11$.

Nhóm 8

Bài tập 18. Giải phương trình $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\cos x$.

(Trích đề trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 188)

Bài tập 19. Chứng minh rằng $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$.

Bài tập 20. Chứng minh $\sin(x + 2008) = x - 2008$ có nghiệm duy nhất.

Bài tập 21. Chứng minh rằng $4c.\cos^3x + 2b\cos^2x + (a - 3c)\cos x - b = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$ với mọi a, b, c.

Bài tập 22. Cho $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng $a\tan^2x + b\tan x + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 23. Giải phương trình $3^{\cos x} - 2^{\cos x} = \cos x$.

Bài tập 24. Cho $a, b, c \in \mathbf{R}$ và $n \in \mathbf{N}$ thoả mãn $c = -\frac{6(3a + 2b)}{5(n + 2)}$.

Chứng minh rằng $3a\sin^nx + 2b\cos^nx + c.\cos x + c = 0$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

(Trích đề thi đề nghị OLYMPIC 30-4 năm 2003)

Nhóm 9

Bài tập 25. Giải các phương trình :

a) $\sin x + \cos x = 1$ b) $\sin 2x = \sqrt{2} - \cos 2x$ c) $\sin 2x = 1 - \sqrt{3}\cos 2x$.

Bài tập 26. Giải phương trình $\sqrt{4\cos^2x + 1} + \sqrt{4\sin^2x + 3} = 4$.

Nhóm 10

Bài tập 27. Giải phương trình $8\sin^3x + 1 = 2\sqrt[3]{4\sin x - 1}$.

Bài tập 28. Giải phương trình $(2\cos 3x + 6\cos x + 1)^3 + 27 = 162\cos x$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Nhóm 1

Bài tập 1. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow (x - \sin x)^2 + 2(\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin x \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

b) $(*) \Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} \\ \tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

c) $(*) \Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + 3(\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4} \\ \tan x = 1 = \tan\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

d) $(*) \Leftrightarrow 4(1+\cos x) + 2(1+\cos 2x) + (1+\cos 4x) = 0$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2\frac{x}{2} + 4\cos^2 x + 2\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

$\Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.

Bài tập 2. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*) \Leftrightarrow [x+\sin(xy)]^2 + \cos^2(xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sin(xy) \\ \cos(xy) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ \sin(xy) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ \sin(xy) = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

b) $(*) \Leftrightarrow 4\cos^2(x+y) + 4\cos(x+y)\cos(x-y) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow [2\cos(x+y) + \cos(x-y)]^2 + \sin^2(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}\cos(x-y) & (1) \\ \sin(x-y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = y + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ (3).

Thế (3) vào (1), ta được: $\cos(2y+k\pi) = -\dfrac{1}{2}\cos(k\pi) \Leftrightarrow (-1)^k\cos 2y = -\dfrac{1}{2}(-1)^k$

$$\Leftrightarrow \cos 2y = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của (*) là $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + (k+n)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + n\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + (k+n)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + n\pi \end{cases}$ $(k, n \in \mathbf{Z})$.

c) $(*) \Leftrightarrow \left(\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \dfrac{1}{16}\sin^2 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x = \dfrac{1-\cos 6x}{4} \\ \sin 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

d) $(*) \Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1)^2 + (2\sin x + 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

e) Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \\ \sin(x+y) \neq 0 \end{cases}$

Tacó: $\dfrac{1}{\cot(x+y)} = \tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\Rightarrow \tan x \cot(x+y) + \tan y \cot(x+y) + \tan x \tan y = 1$ (1).

Thế (1) vào (*), ta được:

$(\tan x - \tan y)^2 + [\tan y - \cot(x+y)]^2 + [\cot(x+y) - \tan x]^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan y \\ \tan x = \cot(x+y) = \dfrac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} \end{cases} \Rightarrow \tan x = \frac{1 - \tan^2 x}{2\tan x}$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy nghiệm của (*) $\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi; \dfrac{\pi}{6} + m\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi; -\dfrac{\pi}{6} + m\pi\right)$ $(k, m \in \mathbf{Z})$.

f) $(*) \Leftrightarrow (\sin x - \sin y)^2 + (\sin x - 1)^2 + (\sin y - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin y \\ \sin x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} (k, n \in \mathbf{Z})$$

g) $(*) \Leftrightarrow 2\left[\sin 2x - \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \dfrac{3}{2}\right] + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\sin 2x - \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \frac{3}{2}\right] + \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\right]=0$$

$$\left(\text{với } t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), |t|\le\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases}\text{ (vô nghiệm).}$$

Nhóm 2

Bài tập 3. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) (*) có nghiệm khi $x^2+x+1\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 0\Rightarrow x\in(-\pi;0]\Rightarrow \sin x\le 0$

Mặt khác $x^2+x+1>0, \forall x$; vậy phương trình (*) vô nghiệm.

b) Điều kiện : $x\ge 0$

Ta có : $VT(*)\ge 1\ge VP(*)$

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}3^{|\sin\sqrt{x}|}=1\\ |\cos x|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\sqrt{x}=0\\ \sin x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$

c) $(*)\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}(2-\sin 3x)\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2-\sin 3x$ (1)

Ta có : $VT(1)\le 1\le VP(1)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 3x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+k6\pi\right)=1\end{cases}$ (vô lý)

d) Ta có : $VT(*)\le 4\le VP(*)$

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x-\cos 4x=2\\ \cos 3x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x-\cos 4x=-2\\ \cos 3x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 4x=-1\\ \cos 3x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x=-1\\ \cos 4x=1\\ \cos 3x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=1\\ 2\cos^2 2x-1=-1\\ \cos 3x=0\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}\cos 2x=-1\\ 2\cos^2 2x-1=1\\ 4\cos^3 x-3\cos x=0\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.$$

Hệ (1) vô nghiệm, hệ (2) có nghiệm $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x=0$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

e) $VT(*) \le |\sin x|^3 + |\cos x|^3 \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \le VP\ (*)$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x \\ \cos^3 x = \cos^2 x \\ \sin^4 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$

f) Điều kiện : $x \ne k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

$$VT(*) = \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 x\right)\left(1 + \frac{64}{\sin^2 x}\right) + 4 \ge \frac{81}{4} \ge VP\ (*)$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = -1 \\ (2\cos^2 2x - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

g) Điều kiện : $x \ne 0$ và $\dfrac{2y}{x} \ne k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

Ta có : $VT(*) = 9 - (2 + x)^2 \le 9 \le VP(*)$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \left|\sin\left(\dfrac{2y}{x}\right)\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \sin y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{\pi}{2} + m\pi\ (m \in \mathbf{Z}). \end{cases}$

h) $(*) \Leftrightarrow 3\sin \pi x = x^2 - 5x + \dfrac{37}{4}$ (1)

Ta có : $VP(1) = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 3 \ge 3 \ge VT(1).$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x - \dfrac{5}{2} = 0$ và $\sin \pi x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}.$

k) Điều kiện: $\begin{cases} x \ne \dfrac{m\pi}{2} \\ y \ne \dfrac{l\pi}{2} \end{cases}$ $(m, l \in \mathbf{Z})$; đặt $\begin{cases} u = \tan^2 x > 0 \\ v = \tan^2 y > 0 \end{cases}$

VT(*) trở thành: $u^2 + v^2 + \dfrac{2}{uv}$, ta có

$u^2 + v^2 + \dfrac{2}{uv} \ge 2uv + \dfrac{2}{uv} \ge 4 \ge VP(*)$ (áp dụng BĐT Cauchy)

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \tan^2 x = 1 & (1) \\ v = \tan^2 y = 1 & (2) \\ \sin^2(x + y) = 1 & (3) \end{cases}$

Giải (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}$ $(k, n \in \mathbf{Z})$ (4)

Từ (4) và(3) $\Rightarrow$ (*) có nghiệm $\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + n\pi\right); \left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; -\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right)$

Bài tập 4. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$(*) \Leftrightarrow 2\sin4x\sin3x - 3\sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x[2\sin4x(3 - 4\sin^2 x) - 3\sqrt{3}] = 0$

$\Leftrightarrow \sin x[2\sin4x(1 + 2\cos2x) - 3\sqrt{3}] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (1) \\ 2\sin4x\cos2x + \sin4x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

$(2) \Leftrightarrow 4\sin2x\cos^2 2x + \sin4x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số $\sin^2 2x, \dfrac{\cos^2 2x}{2}, \dfrac{\cos^2 2x}{2}$

Ta có: $1 = \sin^2 2x + \dfrac{\cos^2 2x}{2} + \dfrac{\cos^2 2x}{2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{(\sin2x\cos^2 2x)^2}{4}}$

$\Rightarrow (\sin2x\cos^2 2x)^2 \leq \dfrac{4}{27} \Rightarrow \sin2x\cos^2 2x \leq |\sin2x\cos^2 2x| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 4\sin2x\cos^2 2x + \sin4x \leq \dfrac{8}{3\sqrt{3}} + 1 < \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 5. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Gọi $t = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2 \geq 0$

$VP(*) = (t - 1)(t + 2) + 7 + \sin6x = t^2 + t + 5 + \sin6x \geq 5 + \sin6x \geq 4 \geq VT(*)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ (\cos8x - \cos4x)^2 = 4 \\ \sin6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \sin2x = \pm1 \\ 3\sin2x - 4\sin^3 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \sin2x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Bài tập 6.

Gọi $A = \cos x\cos2x\cos3x + \sin x\sin2x\sin3x$

Trường hợp 1 : $|\cos x| < 1$

Nhắc lại BĐT Bu- nhi-a-cốp-xki:

Cho 2 bộ số: $(a_1, a_2,...,a_n)$, $(b_1, b_2,...,b_n)$ ta luôn có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi tồn tại t: $b_i = ta_i$ hay $a_i = tb_i$ $(i = 1, 2,..,n)$

Áp dụng BĐT BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki cho 2 bộ số (cosxcos2x, sinxsin2x) (cos3x, sin3x), ta có: $A^2 \le (\cos^2 x\cos^2 2x + \sin^2 x\sin^2 2x)(\cos^2 3x + \sin^2 3x)$

$$= \cos^2 x\cos^2 2x + \sin^2 x\sin^2 2x < \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Trường hợp 2 : $|\cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$

(thoả mãn phương trình).

Nhóm 3

Bài tập 7. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Vì $\begin{cases}\cos 2x \le 1\\ \cos\dfrac{3x}{4} \le 1\end{cases}$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = k\pi & (1)\\ x = \dfrac{m8\pi}{3} & (2)\end{cases}$ $(k, m \in \mathbf{Z})$

Cần tìm $k, m \in \mathbf{Z}$ để thoả (1) và (2) hay $k\pi = \dfrac{m8\pi}{3} \Leftrightarrow 3k = 8m$

$\Leftrightarrow k = 8n$ và $m = 3n$ $(n \in \mathbf{Z})$. Vậy nghiệm của (*) là $x = 8n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

b) Vì $\begin{cases}\sin 5x \le 1\\ \cos 4x \le 1\end{cases}$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 5x = 1\\ \cos 4x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} & (1)\\ x = \dfrac{m\pi}{2} & (2)\end{cases}$ $(k, m \in \mathbf{Z})$

Tìm $k, m \in \mathbf{Z}$ để thoả (1) và (2) hay: $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} = \dfrac{m\pi}{2} \Leftrightarrow k = m + \dfrac{m-1}{4}$

$k, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \dfrac{m-1}{4} = n, n \in \mathbf{Z} \Rightarrow m = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}$.

c) Vì $0 \le |\sin x| \le 1 \Rightarrow \sin^{2007} x \le |\sin x|^{2007} \le \sin^2 x$

$\Rightarrow VT(*) \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^{2007} x = \sin^2 x\\ \cos^{2008} x = \cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \pm 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

d) $VT(*) \le \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^{2008} x = \sin^2 x\\ \cos^{2008} x = \cos^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \pm 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \pm 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

e) Vì $\begin{cases} \cos^5 x \le |\cos x|^5 \le \cos^2 x \\ \sin^5 x \le |\sin x|^5 \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^5 x + \sin^5 x \le 1 \\ \sin 2x + \cos 2x \le \sqrt{2} \end{cases}$

Suy ra $VT(*) \le 1 + \sqrt{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x \\ \cos^5 x = \cos^2 x \\ \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(Vô nghiệm).

Bài tập 8.

$$(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{2}\cos 3x(\cos 3x + \cos x) + 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{2}\cos^2 3x + \frac{1}{2}\cos 3x \cos x + 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{4}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{4}(\cos 4x + \cos 2x) + 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \left(\text{vì } |\cos 2x| \le 1, |\cos 4x| \le 1, |\cos 6x| \le 1\right)$$

Nhóm 4

Bài tập 9. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 16x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 4x = -1 \\ \cos 16x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{2} \\ \cos(2\pi + 8m\pi) = 1 \end{cases} & \text{(nhận)} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{m\pi}{2} \\ \cos(-2\pi + 8m\pi) = -1 \end{cases} & \text{(loại)} \end{array}\right. \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Bài tập 10. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Rightarrow |\sin x||\sin 2x||\cos 5x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = 1 \\ |\sin 2x| = 1 \\ |\cos 5x| = 1 \end{cases}$$

Từ $|\sin x| = 1 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow |\sin 2x| = 0$ (vô lý)

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Bài tập 11. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện : $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin 3x = 0 & (1)\\ \cos x\cos 2x = -1 & (2)\end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ (thoả mãn điều kiện).

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x = 1\\ \cos 2x = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -1\\ \cos 2x = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x = 1\\ 2\cos^2 x - 1 = -1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x = -1\\ 2\cos^2 x - 1 = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = -1$$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Nhóm 5

Bài tập 12. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) + Xét hàm số $g(x) = 2008x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$ trên $\mathbf{R}$.

+ $g'(x) = 2008 + 2\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 2008 - 2\sqrt{2} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

$\Rightarrow g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$. Mặt khác $g(0) = 0$ nên (*) có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.

b) $(*) \Leftrightarrow (x^2 - 4) - \sin(x^2 - 4) = 3x - \sin 3x \quad (1)$

+ Xét hàm số $g(t) = t - \sin t$ trên $\mathbf{R}$, $g'(t) = 1 - \cos t \geq 0, \forall t$

$\Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow g(x^2 - 4) = g(3x) \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3x \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bài tập 13. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

+ Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của (*).

+ Ta cần tìm a sao cho (*) có đúng một nghiệm $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$

Đặt $t = \frac{x}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, (*) trở thành: $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = a$

• Xét hàm số $g(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2, t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$

• $g'(t) = 2\left(\frac{\sin t}{t}\right) \cdot \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{2\sin t}{t^3}(t - \tan t)\cos t = \frac{\sin 2t}{t^3}(t - \tan t) < 0,$

$\forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow g(t)$ giảm trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$.

• Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) \le a < g(0) \Leftrightarrow \frac{8}{\pi^2} \le a < 1$

Nhóm 6

Bài tập 14. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

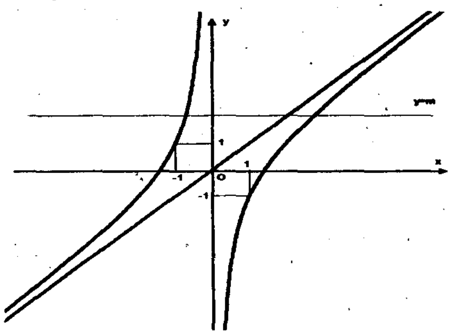
$$(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2} m\sin 2x = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\sin^2 2x - 2}{\sin 2x} \text{ (do } \sin 2x \neq 0)$$

Đặt $X = \sin 2x$, $-1 \le X \le 1$, $X \neq 0$. Trên cùng hệ trục toạ độ Oxy, ta:

+Vẽ đường cong: (C):

$$y = \frac{X^2 - 2}{X},\ X \in [-1; 1] \backslash \{0\}.$$

+Vẽ đường thẳng d: $y = m$ cùng phương với Ox.



Nghiệm của (*) là hoành độ giao điểm của hai đường (C) và đường thẳng d, nhìn vào đồ thị ta thấy nếu $m \le -1$ hoặc $m \ge 1$ thì (*) có nghiệm.

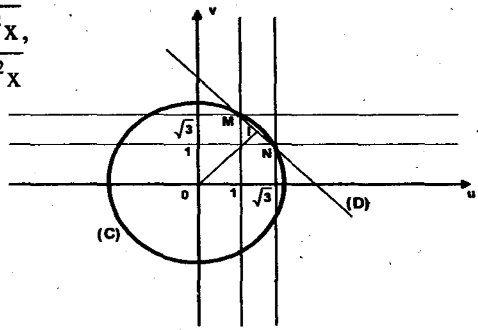
Bài tập 15. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

• Trường hợp : $m \le 0$ thì (*) vô nghiệm

• Trường hợp : $m > 0$. Đặt $u = \sqrt{1 + 2\cos^2 x}$, $v = \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$

Bài toán trở thành tìm $m > 0$ để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 = 4 \\ 1 \le u \le \sqrt{3} \\ 1 \le v \le \sqrt{3} \end{cases}$$



Muốn thế đường thẳng (D): $u + v - m = 0$ phải cắt cung MN của đường tròn (C): $u^2 + v^2 = 4$ có tâm O, bán kính $R = 2$ với $M(1; \sqrt{3})$, $N(\sqrt{3}; 1)$

$\Leftrightarrow OI \le d(O,(D)) \le R$ (1)

Tacó: $MN^2 = (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 2(\sqrt{3} - 1)^2$

$$OI^2 = R^2 - \frac{MN^2}{4} = 4 - \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

nên (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \le \frac{|-m|}{\sqrt{2}} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} + 1 \le m \le 2\sqrt{2}$

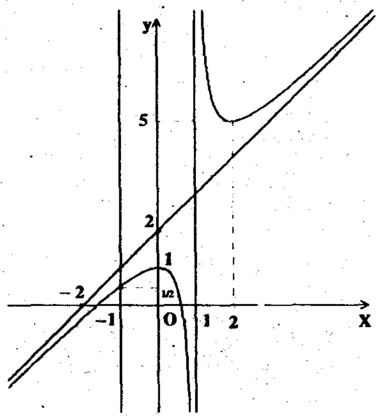
Vậy phương trình (*) có nghiệm khi $\sqrt{3} + 1 \le m \le 2\sqrt{2}$.

Bài tập 16.

Đặt $X = \sin x, -1 < X < 1$.

(*) trở thành : $\dfrac{X^2 + X - 1}{X - 1} = m$ (1).

Trên cùng hệ trục tọa độ ta :



+ Vẽ đồ thị (C) : $y = \dfrac{X^2 + X - 1}{X - 1}$

với $X \in (-1; 1)$.

+ Vẽ đường thẳng (D) : $y = m$.

Nghiệm của phương trình (1) với điều kiện đã cho là hoành độ của giao điểm của hai đường (C) và đường thẳng (D), nhìn vào đồ thị ta có

m	So sánh X_1, X_2 với -1 và 1	Nghiệm của (1)
$+\infty$		
	$-1 < 1 < X_1 < X_2$	Vô nghiệm
5	[redacted]	
1	[redacted]	[redacted]
		X_1, X_2
$\dfrac{1}{2}$	[redacted]	[redacted]
	$X_1 < -1 < X_2 < 1$	X_2
$-\infty$		

Nhìn bảng thấy ứng với mỗi X của (1) thì có một nghiệm của (*)

$\left(\text{với } \sin x = X, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

Nhóm 7

Bài tập 17. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) + Tập xác định : $D = \mathbf{R}$

+ $f(x) = 2008\cos x$ có tập giá trị là $Y_f = [-2008; 2008]$

$g(x) = 2008 + x^2$ có tập giá trị là $Y_g = [2008; +\infty)$.

+ Ta có : $Y_f \cap Y_g = \{2008\}$. Do đó (*) có nghiệm thì nghiệm đó phải là những giá trị $x_0 \in \mathbf{R}$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = 2008$.

+ Vì $g(x) = 2008 + x^2 = 2008 \Leftrightarrow x = 0$.

Mặt khác $f(0) = 2008.\cos 0 = 2008$ nên (*) có một nghiệm là $x = 0$.

b) + Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

+ $f(x) = -\cos(7\pi x)$ có tập giá trị là $Y_f = [-1; 1]$

$g(x) = (x-3)^2 + 2 \geq 2$ có tập giá trị là $Y_g = [2; +\infty)$.

+ Ta có: $Y_f \cap Y_g = \varnothing \Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm.

Nhóm 8

Bài tập 18. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

• Ta thấy $x = k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases}$

$VT(*) = \pm 4 \neq VP(*) = \pm 3 \Rightarrow$ (*) không có nghiệm trên.

• Chia hai vế của (*) cho $\sin^3 x$, ta được: $\cot^3 x - 3\cot x + 1 = 0$ (1)

(1) trở thành: $f(t) = t^3 - 3t + 1 = 0$ (2) (với $t = \cot x$, $t \in \mathbf{R}$.)

Vì $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 3 > 0$

Nên $f(t) = 0$ có ba nghiệm phân biệt trong khoảng $(-2; 2)$. Đặt $t = 2\cos\alpha$

(2) trở thành: $8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow$ (2) có 3 nghiệm: $t = 2\cos\dfrac{2\pi}{9} = \cot\beta$; $t = 2\cos\dfrac{4\pi}{9} = \cot\gamma$;

$t = 2\cos\dfrac{8\pi}{9} = \cot\delta$.

Vậy (*) có nghiệm là $x_1 = \beta + k\pi; x_2 = \gamma + k\pi; x_3 = \delta + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 19.

+ Xét hàm số $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$.

+ $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; \pi]$ và $f(0).f(\pi) = 1.(1 - \pi^2) < 0$, nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục $\exists x_0 \in (0; \pi)$ sao cho $f(x_0) = 0$ (đpcm).

Bài tập 20.

+ Xét hàm số $f(x) = \sin(x + 2008) + 2008 - x$.

+ $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và $\begin{cases} f(2006) = 2 + \sin(2006 + 2008) > 0 \\ f(2010) = -2 + \sin(2010 + 2008) < 0 \end{cases}$

nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục $\exists x_0 \in (2006, 2010)$: $f(x_0) = 0$.

+ $f'(x) = \cos(x + 2008) - 1 \leq 0, \forall x \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\mathbf{R} \Rightarrow$ đpcm.

Bài tập 21. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

(*) $\Leftrightarrow a\cos x + b(2\cos^2 x - 1) + c(4\cos^3 x - 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow a\cos x + b\cos 2x + c.\cos 3x = 0$ (Cách giải tương tự Ví dụ 20).

Bài tập 22.

Đặt $t = \tan x$, do $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Bài toán trở thành, chứng minh rằng $f(t) = at^2 + bt + c = 0\ (1)$ có ít nhất nghiệm $t \in (0; 1)$.

Trường hợp 1: $c = 0$: $(1) \Leftrightarrow t(at + b) = 0\ (2)$

+Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (do giả thiết) $\Rightarrow$ (1) có nghiệm t tuỳ ý

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm $t \in (0; 1)$.

+Nếu $a \neq 0$: $(2) \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \in (0; 1)$ (do giả thiết).

Trường hợp 2: $c \neq 0$

$$\text{Ta có}: f(0).f\left(\frac{2}{3}\right) = c\cdot\frac{1}{9}[2(2a + 3b) + 9c] = c.\left(-\frac{c}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} < 0$$

nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục

$\exists t_0 \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \subset (0;1) : f(t_0) = 0$. Vậy phương trình (1) có nghiệm $t \in (0;1)$.

Bài tập 23.

Theo giả thiết ta có

$$3^{\cos x} - 2^{\cos x} = \cos x \Leftrightarrow 3^{\cos x} - 3\cos x = 2^{\cos x} - 2\cos x \ (1)$$

Gọi x_0 là nghiệm của (1), ta có: $3^{\cos x_0} - 3\cos x_0 = 2^{\cos x_0} - 2\cos x_0$

$\Leftrightarrow F(3) = F(2)$ với $F(t) = t^{\cos x_0} - t\cos x_0$

Vì F(t) liên tục trên đoạn [2; 3] và có đạo hàm trên khoảng (2; 3), nên

theo định lí Lagrange: $\exists c \in (2;3) : F'(c) = \dfrac{F(3) - F(2)}{3 - 2} = 0$

$\Leftrightarrow \cos x_0 (c^{\cos x_0 - 1} - 1) = 0$ (với $F'(t) = t^{\cos x_0 - 1}.\cos x_0 - \cos x_0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x_0 = 0 \\ \cos x_0 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_0 = k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z} \text{ (thoả mãn).}$$

Bài tập 24.

Theo giả thiết $c = -\dfrac{6(3a + 2b)}{5(n + 2)} \Leftrightarrow \dfrac{6a}{n+2} + \dfrac{4b}{n+2} + \dfrac{5c}{3} = 0$

+ Xét hàm: $F(x) = \dfrac{6a}{n+2}\sin^{n+2}x - \dfrac{4b}{n+2}\cos^{n+2}x - \dfrac{2c}{3}\cos^3 x + c\sin^2 x$.

+ $F'(x) = \sin 2x(3a\sin^n x + 2b\cos^n x + c.\cos x + c)$.

+ F(x) liên tục trên **R** và có đạo hàm trên **R**, nên theo định lí Lagrange

$$\exists x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right): F'(x_0) = \frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)}{\frac{\pi}{2} - 0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}F'(x_0) = \left(\frac{6a}{n+2} + c\right) - \left(-\frac{4b}{n+2} - \frac{2c}{3}\right) = \frac{6a}{n+2} + \frac{4b}{n+2} + \frac{5c}{3} = 0$$

$\Leftrightarrow \sin 2x_0(3a\sin^n x_0 + 2b\cos^n x_0 + c.\cos x_0 + c) = 0 \quad (2)$

Do đó (2) $\Leftrightarrow 3a\sin^n x_0 + 2b\cos^n x_0 + c.\cos x_0 + c = 0$ (do $\sin 2x_0 \neq 0$)

$\Rightarrow$ đpcm.

Nhóm 9

Bài tập 25. **a)** Trong hệ trục tọa độ Oxy, đặt $\begin{cases} \vec{a} = (\cos x; \sin x) \\ \vec{b} = (1; 1) \end{cases}$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1; |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì $\vec{b} = (1; 1) \Rightarrow x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

b) $\sin 2x = \sqrt{2} - \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

Đặt $\begin{cases} \vec{a} = (\cos 2x; \sin 2x) \\ \vec{b} = (1; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{\cos^2 2x + \sin^2 2x} = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng $\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

c) Ta có: $\sin 2x = 1 - \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 1$

Đặt $\begin{cases} \vec{a} = (\cos 2x; \sin 2x) \\ \vec{b} = (\sqrt{3}; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{\cos^2 2x + \sin^2 2x} = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{\sqrt{3^2} + 1} = 2 \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vì $\vec{b} = (\sqrt{3}; 1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 26.

Đặt $\begin{cases} \vec{a} = (\sqrt{4\cos^2 x + 1}; \sqrt{4\sin^2 x + 3}) \\ \vec{b} = (1;1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = 2\sqrt{2} \\ |\vec{b}| = \sqrt{2} \\ |\vec{a}|.|\vec{b}| = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3} \le 4$ (1)

Đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \sqrt{4\cos^2 x + 1} = \sqrt{4\sin^2 x + 3}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Nhóm 10

Bài tập 27.

Đặt $t = 2\sin x$, $-2 \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành : $\frac{t^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2t - 1}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \\ x = \beta + k2\pi \\ x = \pi - \beta + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài tập 28. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow \left[8\left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right) + 1\right]^3 + 27 = 162\cos x \Leftrightarrow \left[\frac{(2\cos x)^3 + 1}{3}\right]^3 = 3(2\cos x) - 1$$

Đặt $t = 2\cos x$, $-2 \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành: $\frac{t^3 + 1}{3} = \sqrt[3]{3t - 1}$ (1)

Giải tương tự Bài tập 27

(1) $\Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(4\cos^3 x - 3\cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Chủ đề 3: HAI PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ và $f_2(x) = g_2(x)$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Khi đó ta viết: $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$

Chú ý: Khi nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định D và tương đương với nhau, ta nói:

- Hai phương trình tương đương trong cùng tập xác định D, hoặc
- Với tập xác định D, hai phương trình tương đương với nhau.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Xác định m để phương trình (1) và (2) tương đương với nhau:

$$1 - \cos x + \cos 2x = 0 \quad (1)$$

$$4\cos^3 x + 2m\cos 2x - (2m+1)\cos x + 2m = 0 \quad (2).$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (1+\cos 2x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2m(1+\cos 2x) - (2m+1)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x[4\cos^2 x + 4m\cos x - (2m+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x + 4m\cos x - (2m+1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = -\dfrac{2m+1}{2} \end{array}\right.$$

Để (1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{2m+1}{2} = 0 \\ -\dfrac{2m+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \left|-\dfrac{2m+1}{2}\right| > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = -1 \\ \dfrac{2m+1}{2} > 1 \\ \dfrac{2m+1}{2} < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = -1 \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Xác định m để phương trình (1) và (2) tương đương với nhau :

$$2\cos^2 x + \sin 3x = 2(1 + \sin x\cos 2x) \quad (1)$$

$$\sin 3x - m\sin x + (2 - |m|)\cos 2x = 2 - |m| \quad (2).$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + \sin 3x = 2 + \sin 3x + \sin(-x) \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - m\sin x + \left(2-|m|\right)(1-2\sin^2 x) = 2-|m|$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - m\sin x - 2\left(2-|m|\right)\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left[4\sin^2 x + 2\left(2-|m|\right)\sin x + m - 3\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\sin^2 x + 2\left(2-|m|\right)\sin x + m - 3 = 0 \quad (3)\end{array}\right.$$

Điều kiện cần:

Để (1) và (2) tương đương thì điều kiện cần là $\sin x = \frac{1}{2}$ phải thoả (3)

tức là: $1 + 2 - |m| + m - 3 = 0 \Leftrightarrow |m| = m \Leftrightarrow m \geq 0$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 0$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 2(2-m)\sin x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2}\\ \sin x = \frac{m-3}{2}\end{array}\right.$

(1) và (2) tương đương thì $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{m-3}{2} = 0\\ \frac{m-3}{2} = \frac{1}{2}\\ \left|\frac{m-3}{2}\right| > 1\end{array}\right.\\ m \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 4\\ m-3 > 2\\ m-3 < -2\end{array}\right.\\ m \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 4\\ m > 5\\ 0 \leq m < 1\end{array}\right.$.

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình (1) và (2) tương đương với nhau:

$$\sin x - \sin 2008x.\ \cos x = \frac{3}{2} \qquad (1)$$

$$m\sin x - 2\cos x = 3m - 2 \qquad (2).$$

Giải

Xét phương trình (1).

Áp dụng BĐT Bu- nhi- a- cốp- xki, ta có:

$$(\sin x - \cos x.\ \sin 2008x)^2 \leq (\sin^2 x + \cos^2 x)(1 + \sin^2 2008x) \leq 2$$

$$\Rightarrow |\sin x - \cos x.\ \sin 2008x| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Để phương trình (1) và phương trình (2) tương đương thì phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2 + (-2)^2 < (3m-2)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4 < 9m^2 - 12m + 4$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{3}{2}.$$

$(2) \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - m\sin x + \left(2-|m|\right)(1-2\sin^2 x) = 2-|m|$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - m\sin x - 2\left(2-|m|\right)\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left[4\sin^2 x + 2\left(2-|m|\right)\sin x + m - 3\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\sin^2 x + 2\left(2-|m|\right)\sin x + m - 3 = 0 \quad (3)\end{array}\right.$$

Điều kiện cần:

Để (1) và (2) tương đương thì điều kiện cần là $\sin x = \frac{1}{2}$ phải thoả (3)

tức là: $1 + 2 - |m| + m - 3 = 0 \Leftrightarrow |m| = m \Leftrightarrow m \geq 0.$

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 0$

Ta có: $(3) \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 2(2-m)\sin x + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2}\\ \sin x = \frac{m-3}{2}\end{array}\right.$.

(1) và (2) tương đương thì $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\frac{m-3}{2} = 0\\ \frac{m-3}{2} = \frac{1}{2}\\ \left|\frac{m-3}{2}\right| > 1\end{array}\right.\\ m \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 4\\ m - 3 > 2\\ m - 3 < -2\end{array}\right.\\ m \geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 4\\ m > 5\\ 0 \leq m < 1\end{array}\right.$.

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình (1) và (2) tương đương với nhau:

$\sin x - \sin 2008x.\cos x = \frac{3}{2}$ (1)

$m\sin x - 2\cos x = 3m - 2$ (2).

Giải

Xét phương trình (1).

Áp dụng BĐT Bu- nhi- a- cốp- xki, ta có:

$(\sin x - \cos x.\sin 2008x)^2 \leq (\sin^2 x + \cos^2 x)(1 + \sin^2 2008x) \leq 2$

$\Rightarrow |\sin x - \cos x.\sin 2008x| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Để phương trình (1) và phương trình (2) tương đương thì phương trình (2) vô nghiệm

$\Leftrightarrow m^2 + (-2)^2 < (3m-2)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4 < 9m^2 - 12m + 4$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Xác định a để (1) và (2) tương đương với nhau :

$$4\cos^3x + \cos2x(1-2\cos x) - 3\cos x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$2(a-2)\cos^2x - a\cos x = \cos3x \quad (2)$$

Bài tập 2. Xác định m để (1) và (2) tương đương với nhau :

$$2\cos x\cos2x = 1 + \cos2x + \cos3x \quad (1)$$

$$\cos3x + 2(|m-2|-2)\cos^2x + (6-m)\cos x = 0 \quad (2)$$

Bài tập 3. Xác định m để (1) và (2) tương đương với nhau :

$$3\cos x - \cos3x = 2(\sin x\sin2x - \cos^2x) \quad (1)$$

$$4m\cos^3x + (4-8m)\sin^2x + 4(m-1)\cos x + 8m - 4 = 0 \quad (2)$$

Bài tập 4. Xác định a để (1) và (2) tương đương với nhau :

$$\sin2x - 2a\cos x = \sin x - a \quad (1)$$

$$2\cos2x + a^2 = 5a\cos x - 2 \quad (2)$$

Bài tập 5. Xác định a để (1) và (2) tương đương với nhau :

$$2\sin^7x - (1-a)\sin^3x + (2a^3 - 2a - 1)\sin x = 0 \quad (1)$$

$$2\sin^6x + \cos2x = 1 + a - 2a^3 + a\cos^2x \quad (2)$$

Bài tập 6. Tìm a và b để (1) và (2) tương đương với nhau :

$$a\left(\sin2x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2\cos x - \sqrt{2} \quad (1)$$

$$2(\sin x - b)\sin x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos x + b - 1 = 0 \quad (2)$$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1.

$(1) \Leftrightarrow 3\cos x + \cos3x + \cos2x - 2\cos2x\cos x - 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos3x - 2\cos2x\cos x + 1 + \cos2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \frac{1}{2}$.

$(2) \Leftrightarrow 2(a-2)\cos^2x - a\cos x = 4\cos^3x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x[4\cos^2x - 2(a-2)\cos x + a - 3] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \frac{1}{2}$ hoặc $\cos x = \frac{a-3}{2}$.

(1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a-3}{2} = 0 \vee \frac{a-3}{2} = \frac{1}{2} \\ \left|\frac{a-3}{2}\right| > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \vee a = 4 \\ a > 5 \\ a < 1 \end{array}\right.$.

Bài tập 2. (1) $\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\left(|m-2|-2\right)\cos^2 x + (6-m)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x[4\cos^2 x + 2\left(|m-2|-2\right)\cos x + 3 - m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 4\cos^2 x + 2\left(|m-2|-2\right)\cos x + 3 - m = 0\ (3)\end{array}\right.$$

Điều kiện cần :

Để (1) và (2) tương đương thì điều kiện cần là $\cos x = \dfrac{1}{2}$ phải thoả mãn (3) tức là: $1 + |m-2| - 2 + 3 - m = 0 \Leftrightarrow |m-2| = m - 2 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \geq 2$, ta có:

(3) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2(m-4)\cos x + 3 - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = \dfrac{3-m}{2}$

Để (1) và (2) tương đương thì $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-m}{2} = 0\\ \dfrac{3-m}{2} = \dfrac{1}{2}\\ \left|\dfrac{3-m}{2}\right| > 1\end{array}\right.\\ m \geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 2\\ 3-m > 2\\ 3-m < -2\end{array}\right.\\ m \geq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 3\\ m = 2\\ m > 5.\end{array}\right.$

Bài tập 3. (1) $\Leftrightarrow 3\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x - 2\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow 3\cos x - \cos 3x = \cos x - \cos 3x - 2\cos^2 x$$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = -1$.

$$(2) \Leftrightarrow 4m\cos^3 x + (4-8m)(1-\cos^2 x) + 4(m-1)\cos x + 8m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos x[m\cos^2 x - (1-2m)\cos x + m - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ m\cos^2 x - (1-2m)\cos x + m - 1 = 0\end{array}\right. (*).$$

- Khi $m = 0$: (*) $\Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $\cos x = -1$. Khi đó (1), (2) tương đương

- Khi $m \neq 0$: (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \dfrac{1-m}{m}\\ \cos x = -1\end{array}\right.$

(1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1-m}{m} = 0\\ \dfrac{1-m}{m} = -1\\ \left|\dfrac{1-m}{m}\right| > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 1\\ 0 < m < \dfrac{1}{2}\\ m < 0\end{array}\right.$.

Bài tập 4.

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2a\cos x = \sin x - a$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - a) = \sin x - a \Leftrightarrow (\sin x - a)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = a \\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Điều kiện cần:

Để (1) và (2) tương đương thì điều kiện cần là $\cos x = \frac{1}{2}$ phải thoả mãn (2) tức là: $2a \ - 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = \frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ:

- Với $a = 2$: $(1) \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 10\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

(1) và (2) tương đương.

- Với $a = \frac{1}{2}$: $(1) \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin x = \frac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow 16\cos^2 x - 10\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ hoặc $\cos x = \frac{1}{8}$

(1) và (2) không tương đương.

Vậy $a = 2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 5.

$(1) \Leftrightarrow \sin x[2\sin^6 x - (1 - a)\sin^2 x + 2a^3 - 2a - 1] = 0.$

$(2) \Leftrightarrow 2\sin^6 x + 1 - 2\sin^2 x = 1 + a - 2a^3 + a(1 - \sin^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\sin^6 x + (a - 2)\sin^2 x + 2a^3 - 2a = 0.$

Điều kiện cần:(1) có nghiệm $\sin x = 0$.

$\Rightarrow$ để (1) và (2) tương đương thì $\sin x = 0$ cũng phải thoả mãn (2), tức là:

- $2a^3 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = \pm 1$

Điều kiện đủ:

- Với $a = 0$:

$(1) \Leftrightarrow \sin x(2\sin^6 x - \sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2 x - 1)(2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2 x - 1)\left[2\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \sin^2 x = 1\end{array}\right.$$

$(2) \Leftrightarrow 2\sin^2 x(\sin^4 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hoặc $\sin^2 x = 1$

(1) và (2) tương đương.

- Với $a = 1$: $(1) \Leftrightarrow \sin x(2\sin^6 x - 1) = 0$

$(2) \Leftrightarrow \sin^2 x(2\sin^4 x - 1) = 0$

(1) và (2) không tương đương.

• Với $a = -1$: (1) $\Leftrightarrow \sin x\underbrace{\left[2\sin^2 x(\sin^4 x - 1) - 1\right]}_{<0} \Leftrightarrow \sin x = 0$

$$(2) \Leftrightarrow \sin^2 x\underbrace{(2\sin^4 x - 3)}_{<0} \Leftrightarrow \sin x = 0$$

(1) và (2) tương đương.

Vậy $a = 0$ hoặc $a = -1$.

Bài tập 6.

$$(1) \Leftrightarrow a\sqrt{2}\sin x\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ a\sin x = 1\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1) + \cos 2x + \sin 2x - 2b\sin x - \cos x + b = 0\\ &\Leftrightarrow -\cos 2x + \cos 2x + 2\sin x(\cos x - b) - (\cos x - b) = 0\\ &\Leftrightarrow (\cos x - b)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = b \text{ hoặc } \sin x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(1) và (2) tương đương $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$.

Chủ đề 4: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải được phương trình lượng giác có chứa căn thức (dạng cơ bản):

• ***Chúng ta cần học nhớ:***

(Giả sử các công thức dưới đây đã có nghĩa)

1) $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

2) $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$.

3) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

4) $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$.

5) $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (với $A \geq 0$); $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (với $A < 0$).

6) $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

7) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow A = B \geq 0$.

8) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

9) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C. \end{cases}$

• ***Thực hiện một số phép biến đổi cơ bản và sử dụng phương pháp giải thích hợp đã biết ở các vấn đề trước để giải bài toán đã cho.***

• ***Chú ý:*** Những dạng $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C$, $\sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} = C$, $C \in \mathbf{R}$ thường dùng phương pháp chuyển về hệ đại số.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{1+\cos x} + \sin x = 0$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos x} = -\sin x \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x \geq 0 \\ 1 + \cos x = (-\sin x)^2 = 1 - \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \pm 1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình :

a) $3\cos x(1-\sqrt{\sin x})-\cos 2x = 2\sin^2 x\sqrt{\sin x}-1$ (1)

b) $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+4\sin 2x(1+\cos 4x)}$ (2).

Giải

a) Điều kiện: $0\le \sin x\le 1$.

$(1) \Leftrightarrow 3\cos x(1-\sqrt{\sin x})+(1-\cos 2x)=2\sin^2 x\sqrt{\sin x}$

$\Leftrightarrow 3\cos x(1-\sqrt{\sin x})+2\sin^2 x(1-\sqrt{\sin x})=0$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{\sin x})(3\cos x+2\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{\sin x}=1 & (*)\\ 3\cos x+2\sin^2 x=0 & (**)\end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$(**) \Leftrightarrow 3\cos x+2(1-\cos^2 x)=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \cos x = 2>1 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

So sánh điều kiện ta chọn $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$$\text{b) } (2)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0 & (*)\\ 4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+4\sin 2x(1+\cos 4x) & (**)\end{cases}$$

$$(**)\Leftrightarrow 2\left[1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=1+8\sin 2x\cos^2 2x$$

$\Leftrightarrow 1+2(3\sin 2x-4\sin^3 2x)=8\sin 2x(1-\sin^2 2x)$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Thay vào bất phương trình (*) ta có:

- Với $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+3k\pi\right)=\cos(3k\pi)\ge 0$

  $\Leftrightarrow 3k$ chẵn $\Leftrightarrow k=2m,\ m\in\mathbb{Z}$.
- Với $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+3k\pi\right)=-\cos(3k\pi)\ge 0$

  $\Leftrightarrow 3k$ lẻ $\Leftrightarrow k=2m+1,\ m\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x=\frac{\pi}{12}+m2\pi,\ x=\frac{5\pi}{12}+(2m+1)2\pi$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{7+\cot x}+\sqrt[3]{2-\cot x}=3$ (*).

Giải

Điều kiện: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{7+\cot x} \\ v=\sqrt[3]{2-\cot x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3=7+\cot x \\ v^3=2-\cot x \end{cases} \Rightarrow u^3+v^3=9$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} u+v=3 \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ (u+v)^3-3uv(u+v)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ u,v là nghiệm của phương trình: $X^2-3X+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$

- Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7+\cot x=8 \\ 2-\cot x=1 \end{cases} \Rightarrow \cot x=1=\cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- Với $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7+\cot x=1 \\ 2-\cot x=8 \end{cases} \Rightarrow \cot x=-6 \Rightarrow x=\text{arccot}(-6)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\text{arccot}(-6)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\cos^2 2x+2\cos 2x-2\sqrt{2-\sin x}-\sin x+4=0$ (*).

Giải

Do $\sin x \leq 1 < 2 \Rightarrow 2-\sin x>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow \left[\sqrt{(2-\sin x)^2}-2\sqrt{2-\sin x}+1\right]+(\cos^2 2x+2\cos 2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2-\sin x}-1)^2+(1+\cos 2x)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-\sin x}-1=0 \\ 1+\cos 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ 2\cos^2 x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ \sin x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{3-\sin x}=2+\sqrt{\sin x+1}$ (*).

Giải

Cách 1

Tập xác định : $x\in\mathbb{R}$.

Vì $\begin{cases} \sqrt{3-\sin x}\leq 2, \forall x\in\mathbb{R}. \\ 2+\sqrt{\sin x+1}\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$

nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-\sin x}=2 \\ 2+\sqrt{\sin x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Cách 2

Đặt $t = \sin x$, $|t| \le 1$.

(*) trở thành : $\sqrt{3-t} = 2 + \sqrt{t+1}$ (**)

Ta thấy hàm số:

+ $f(t) = \sqrt{3-t}$ giảm trên đoạn $[-1;1]$.

+ $g(t) = 2 + \sqrt{t+1}$ tăng trên đoạn $[-1;1]$.

Mặt khác $t = -1$ là một nghiệm của (**) nên $f(t) = g(t) \Leftrightarrow t = -1$

$\Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý: Phương trình (*) giải bằng cách 2, có phương pháp đã trình bày ở Phần II-Chủ đề 2.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2 + \sin^{2008}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$ (*).

Giải

Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$ và $\sqrt{2 + \sin^{2008}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)} \ge \sqrt{2}$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{2 + \sin^{2008}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin^{2008}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ \sin^{2008}(k2\pi) = 0 \end{cases} \quad (\text{đúng}).$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $8\sqrt{\sin x} + 27\sqrt{\cos x} = 97^{\frac{3}{4}},\ x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (*).

(Trích đề thi đề nghị HSG ĐỒNG BẰNG SÔNG CỬU LONG năm 1999)

Giải

Ta có: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases},\ \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Đặt $y = 8\sqrt{\sin x} + 27\sqrt{\cos x}$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bình phương hai vế: $y^2 = 64\sin x + 729\cos x + 432\sqrt{\sin x\cos x}$

$= (388\sin x + 873\cos x) - (18\sqrt{\sin x} - 12\sqrt{\cos x})^2$

$\Rightarrow y^2 \le 388\sin x + 873\cos x \le \sqrt{388^2 + 873^2}.\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{97^3} \Rightarrow y \le 97^{\frac{3}{4}}$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 18\sqrt{\sin x} = 12\sqrt{\cos x} \\ \dfrac{\sin x}{388} = \dfrac{\cos x}{873} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{388}{873} = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{4}{9}$

$\Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{4}{9} \quad \left(\text{Vì } x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Vậy phương trình (*) có một nghiệm $x = \arctan\dfrac{4}{9}$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$ (*).

(Trích đề thi Đại học Tổng hợp Hà Nội - A năm 1994)

Giải

• $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$; $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$.

• $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\left(\dfrac{2 - \sin 2x}{2}\right)$.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin^3 x + \cos^3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$

+ Xét $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ (thỏa mãn (*))

+ Xét: $\cos x + \sin x \neq 0$, điều kiện trở thành: $\begin{cases} \cos x - \sin x \geq 0 \\ \cos x + \sin x > 0 \end{cases}$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{\cos x + \sin x}\left(\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} - \sqrt{\dfrac{2 - \sin 2x}{4}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\cos x + \sin x} = \sqrt{\dfrac{2 - \sin 2x}{4}}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow \cos x - \sin x + \cos x + \sin x + 2\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} = \dfrac{2 - \sin 2x}{4}$

$\Leftrightarrow 2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = \dfrac{2 - \sin 2x}{4}$ (2).

Tacó: $VT(2) \geq 2\cos x \geq \sqrt{2}$ (3) $\left(\text{do } \cos 2x \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $VP(2) \leq \dfrac{3}{4}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 9. Cho phương trình : $\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = k\cos 2x$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi k = 2

b) Giải biện luận phương trình (*) theo k.

Giải

Ta thấy: $-1 \le \sin 2x \le 1, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \begin{cases} 1+\sin 2x \ge 0, \forall \in \mathbf{R} \\ 1-\sin 2x \ge 0, \forall x \in \mathbf{R} \end{cases}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} k\cos 2x \ge 0 \\ 1+\sin 2x + 1 - \sin 2x + 2\sqrt{1-\sin^2 2x} = k^2\cos^2 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\cos 2x \ge 0 \\ k^2|\cos 2x|^2 - 2|\cos 2x| - 2 = 0\,(1) \end{cases}$

•Với $k = 0$: $(1) \Leftrightarrow |\cos 2x| = -1$ (loại).

•Với $k \ne 0$: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |\cos 2x| = \dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \\ |\cos 2x| = \dfrac{1-\sqrt{1+2k^2}}{k^2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

a) Với $k = 2$:

Ta có: $\begin{cases} \cos 2x \ge 0 \\ |\cos 2x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

b) (*) có nghiệm khi : $\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \le 1$ và $k \ne 0 \Leftrightarrow |k| \ge 2$

•Với $k \ge 2$: $(1) \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + m\pi, m \in \mathbf{Z}$.

•Với $k \le -2$: $(1) \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} = \cos 2\beta \Leftrightarrow x = \pm\beta + m\pi, m \in \mathbf{Z}$

Tóm lại :

- Với $-2 < k < 2$: (*) vô nghiệm.
- Với $k \ge 2$: (*) có nghiệm $x = \pm\alpha + m\pi, m \in \mathbf{Z}$.
- Với $k \le -2$: (*) có nghiệm $x = \pm\beta + m\pi, m \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 10. Cho $\sqrt{3-\sin x-\cos^2 x} + \sqrt{(1+\sin x)(2-\sin x)} = 2m$ (*). Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Giải

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3-\sin x-(1-\sin^2 x)} + \sqrt{2+\sin x-\sin^2 x} = 2m$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x-\sin x+2} + \sqrt{2+\sin x-\sin^2 x} = 2m \quad (1)$

Vì $\begin{cases} \sin^2 x - \sin x + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \\ 2+\sin x-\sin^2 x = (\sin x+1)(2-\sin x) \ge 0, \forall x \in \mathbf{R} \end{cases}$ nên tập xác định: **R**.

Đặt $t = 2+\sin x-\sin^2 x$. Với $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow u = \sin x \in [-1; 1]$.

• Xét hàm số $t = 2 + u - u^2$ trên đoạn $[-1;1]$, $t' = 1 - 2u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên :

u	[redacted]	-1		$\frac{1}{2}$		1	[redacted]
t'			$+$	0	$-$		
t		0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[0;\frac{9}{4}\right]$

Phương trình (1) trở thành $\sqrt{4-t} + \sqrt{t} = 2m$ (2).

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in \left[0;\ \frac{9}{4}\right]$.

•Xét hàm số $g(t) = \sqrt{4-t} + \sqrt{t}$ trên đoạn $\left[0;\ \frac{9}{4}\right]$

$$g'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{4-t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{4-t} - \sqrt{t}}{2\sqrt{4-t}.\sqrt{t}}, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Bảng biến thiên.

t	[redacted]	0		2		$\frac{9}{4}$	[redacted]
$g'(t)$			$+$	0	$-$		
$g(t)$		2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$	

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $2 \le 2m \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 \le m \le \sqrt{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Ví dụ 11. Cho phương trình $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = m$ (*). Xác định m để (*) có nghiệm.

(Trích đề thi Đại học Luật TPHCM năm 1995)

Giải

Gọi $y = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x}$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \ge -\dfrac{1}{2}\\ \sin x \ge -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \le x \le \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Ta có: $y^2 = 2 + 2(\cos x + \sin x) + 2\sqrt{1 + 2(\cos x + \sin x) + 4\sin x\cos x}$ (1)

Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right),\ |t| \le \sqrt{2}.$

Với $-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \le x \le \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} + k2\pi \le x + \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{11\pi}{12} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \le \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \le t \le \sqrt{2}.$

(1) viết lại $y^2 = 2 + 2t + 2\sqrt{1 + 2t + 2(t^2 - 1)}$ hay

$y^2 = \underbrace{2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}}_{z}$

• $z' = 2 + \dfrac{4t + 2}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}} > 0,\ \forall t \in \mathbf{D}_1 = \left[\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}; \sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ z đồng biến trên đoạn $\left[\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}; \sqrt{2}\right]$.

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} y \le m \le \max\limits_{x \in D} y \Leftrightarrow \sqrt{\min\limits_{t\in D_1} z} \le m \le \sqrt{\max\limits_{t\in D_1} z}$

$\Leftrightarrow \sqrt{z\left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)} \le m \le \sqrt{z(\sqrt{2})} \Leftrightarrow \sqrt{1 + \sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{\sqrt{2} + 1}$

(với **D** là tập xác định của y).

Chú ý: $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\sin x\sqrt{\dfrac{1}{\sin x} - 1} + \cos x\sqrt{\dfrac{1}{\cos x} - 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin x + \cos x}$ (*).

(Trích đề thi đề nghị HSG TP Hà Nội vòng 1 năm 1990 - 1991)

Giải

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{\sin x - \sin^2 x} + \sqrt{\cos x - \cos^2 x} = \dfrac{1}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$ (1)

(với điều kiện: $0 < \sin x < 1$ và $0 < \cos x < 1$)

Áp dụng: $a^2 - a + \dfrac{1}{4} = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow a - a^2 \le \dfrac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

Ta được: $\sin x-\sin^2 x\le\frac{1}{4}$ và $\cos x-\cos^2 x\le\frac{1}{4}\Rightarrow VT(1)\le 1$.

Mà $VT(1)=1\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ và $\cos x=\frac{1}{2}$ (vôlý) (do $\sin^2 x+\cos^2 x=1$)

Cho nên $VT(1)<1$, ngoài ra $VP(1)\ge 1$.

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Giải phương trình $\sqrt{5-4\sin x-3\cos^2 x}=1-2\sin x$.

Bài tập 2. Giải phương trình $\sqrt{3+\sin x}-1=\sqrt{2-\sin x}$.

Bài tập 3. Giải phương trình $\sqrt{\cos 4x}+\sqrt{1+\sin 4x}=2\sqrt{\sin 2x+\cos 2x}$.

Bài tập 4. Giải phương trình $\dfrac{\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right)-\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}}=0$.

Bài tập 5. Giải phương trình $\dfrac{\cos^4 2x-\cos^2 2x}{\sqrt{\sin 2x}}=0$.

Bài tập 6. Cho phương trình $3\sqrt{1+\cot x}(2\sin x+\cos x)=m(3\sin x+\cos x)$(*)

a) Giải phương trình (*) khi $m=5$

b) Xác định m để (*) có nghiệm duy nhất $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 7. Giải phương trình $(1+\tan x)\cos^3 x+(1+\cot x)\sin^3 x=\sqrt{2\sin 2x}$.

Bài tập 8. Giải phương trình $2\left[\sqrt{\sin x}+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=1+\cos 2x$.

Bài tập 9. Giải phương trình $\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}-\cos x}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}+\cos x}=1$.

Bài tập 10. Giải phương trình $\sqrt[4]{10+8\cos^2 x}-\sqrt[4]{8\sin^2 x-1}=1$.

Bài tập 11. Giải phương trình $\sqrt[3]{2-\cot x}+\sqrt{\cot x-1}=1$.

Bài tập 12. Giải phương trình $\sqrt[3]{1-\cos 2x}+\sqrt[3]{1+\cos 2x}=2$.

Bài tập 13. Giải phương trình $\cos 4x+\cos 3x+\sqrt{\dfrac{3-\cos 6x}{2}}=3$.

Bài tập 14. Giải phương trình $\cos x\sqrt{\dfrac{1}{\cos x}-1}+\cos 3x\sqrt{\dfrac{1}{\cos 3x}-1}=1$.

Bài tập 15. Giải phương trình $(\sqrt{1-\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x})\cos 4x=\dfrac{1}{2}\sin 8x$.

Bài tập 16. Giải phương trình $4\cos 2x(\cos 2x+1)+\sqrt{1-\cos x}+1=0$.

Bài tập 17. Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}}{\cos x}=4\sin x$.

Bài tập 18. Cho phương trình $\sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 5} + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 8} = m$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $m = 5$

b) Xác định m để (*) có nghiệm.

Bài tập 19. Cho phương trình $2\cos^2 x\sqrt{3\cos^2 x + 1} = \cos^4 x(3\cos^2 x + 1) - m$.
Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 20. Cho phương trình $\cos x = m\cos^2\frac{x}{2}\sqrt{1 + \tan\frac{x}{2}}$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $m = 1$

b) Xác định m để (*) có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin x \geq 0 \\ 5 - 4\sin x - 3(1 - \sin^2 x) = 1 - 4\sin x + 4\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{2} \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 2. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Ta có: $VT(*) \leq 1 \leq VP(*)$. Do đó: $(*) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 3. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện: $\cos 4x \geq 0$ và $\sin 2x + \cos 2x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) \geq 0 \\ \sin 2x + \cos 2x \geq 0 \end{cases}$$

•Xét: $\cos 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ (thoả (*))

•Xét: $\cos 2x + \sin 2x \neq 0$, điều kiện trên trở thành: $\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x \geq 0 \\ \sin 2x + \cos 2x > 0 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos 2x + \sin 2x} \cdot (\sqrt{\cos 2x - \sin 2x} + \sqrt{\cos 2x + \sin 2x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\cos 2x - \sin 2x} + \sqrt{\cos 2x + \sin 2x} = 2 \ (1)$$

Với điều kiện ở trên, ta bình phương hai vế của (1). Ta được:

$$\cos 2x + \sqrt{\cos 4x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\cos 4x} = 2 - \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 2x - 1 = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ (thoả (*))}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 4. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện : $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ 1 - \tan^2\frac{x}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \cos\frac{2x}{3} - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{2x}{3} - \frac{1+\cos x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{3} - 1 - \frac{1}{2}\left(1 + 4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{3}\right) = 0 \ (1)$$

Đặt $t = \cos\frac{x}{3}, |t| \le 1.$

Phương trình (1) trở thành : $4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2-3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 = \frac{3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{3} = 1 \\ \cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k6\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{2} + k3\pi \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\left(\text{do } \cos x = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2} + k3\pi\right) = 0\right).$$

Bài tập 5. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin 2x \le 1 \\ \cos^2 2x(\cos^2 2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin 2x \le 1 \\ \cos 2x = 0 \text{ hoặc } \cos^2 2x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin 2x \le 1 \\ \sin 2x = \pm 1 \text{ hoặc } \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 6.

Đặt $\begin{cases} \text{và } \sin x \neq 0 \\ t = \cot x, t \ge -1 \end{cases}$

(*) viết lại : $3\sqrt{t+1}(2+t) = m(3+t)$ (1)

a) Với $m = 5$: (1) cho ta : $3\sqrt{t+1}(2+t) = 5(3+t)$

$$\Leftrightarrow 9(t+1)(2+t)^2 = 25(3+t)^2 \Leftrightarrow 9t^3 + 20t^2 - 78t - 189 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)\underbrace{(9t^2 + 47t + 63)}_{>0, \forall t} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow \cot x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} 3 + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

b) Đặt $u = \sqrt{1+t}, u > 1\left(\text{do } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t > 0\right)$

Phương trình (1) trở thành : $\frac{3u(u^2+1)}{u^2+2} = m$

• Xét hàm số $g(u) = \frac{3u(u^2+1)}{u^2+2}$ trên $(1; +\infty)$

$$g'(u) = \frac{3u^4 + 15u^2 + 6}{(u^2+2)^2} > 0, \forall u > 1$$

• Bảng biến thiên :

u	[redacted]	1		$+\infty$
g'(u)			+	
g(u)		2	$\nearrow$	$+\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $m > 2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 7. Điều kiện : $\sin 2x > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \cos^3 x\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) + \sin^3 x\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 \\ \sin 2x > 0 \\ (\cos x + \sin x)^2 = 2\sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \cos x > 0 \\ (\sin x - \cos x)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \cos x > 0 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m2\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 8. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\sin x} + \sin x + \cos x - \cos^2 x = 0 \quad (1)$$

Cách 1. Điều kiện: $0 \le \sin x \le 1$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{\sin x} = \cos x - 1 & (2) \\ \sqrt{\sin x} = -\cos x & (3) \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \left(\text{do } \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \cos x - 1 \le 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ge 0 \ \wedge \cos x \le 0 \\ \sin x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Cách 2. Điều kiện: $0 \le \sin x \le 1$, đặt $u = \sqrt{\sin x}$, $0 \le u \le 1$.

Phương trình (1) trở thành: $u^2 + u + (\cos x - \cos^2 x) = 0$ (2)

$\Delta = (2\cos x - 1)^2$

$$(2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = \cos x - 1 \\ u = -\cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\sin x} = \cos x - 1 \\ \sqrt{\sin x} = -\cos x \end{array}\right. ,$$

(giải tương tự cách 1).

Bài tập 9. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{\dfrac{1}{2} - \cos x} & (0 \le u \le 1) \\ v = \sqrt[4]{\dfrac{1}{2} + \cos x} & (0 \le v \le 1) \end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ [(u+v)^2 - 2uv]^2 - 2u^2v^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv(uv - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 2 \end{cases}$$

- Giải hệ: $\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0 \end{cases}$

  u,v là nghiệm của phương trình: $X^2 - X = 0 \Leftrightarrow X = 0$ hoặc $X = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}.$$

- Hệ $\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 2 \end{cases}$ vô nghiệm vì $S^2 < 4P$.

Bài tập 10. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{10 + 8\cos^2 x}\ , & \sqrt[4]{10} \le u \le \sqrt[4]{18} \\ v = \sqrt[4]{8\sin^2 x - 1}\ , & 0 \le v \le \sqrt[4]{7} \end{cases}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u - v = 1 & (1) \\ u^4 + v^4 = 17 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow [(u - v)^2 + 2uv]^2 - 2u^2v^2 = 17$ (3)

Thế (1) vào (3), ta được: $(uv)^2 + 2uv - 8 = 0 \Leftrightarrow uv = 2$ hoặc $uv = -4$.

- Giải hệ: (4) $\begin{cases} u - v = 1 \\ uv = 2 \end{cases}$ hoặc (5) $\begin{cases} u - v = 1 \\ uv = -4 \end{cases}$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \dfrac{3}{4} \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- Giải hệ (5) (vô nghiệm)

Bài tập 11. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2-\cot x} \\ v = \sqrt{\cot x - 1} \text{ với } v \geq 0 \end{cases}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u^3 + v^2 = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + (1-u)^2 = 1 \\ v = 1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(u^2 + u - 2) = 0 \\ v = 1 - u \end{cases}$,

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 2 \\ \cot x = 1 = \cot\dfrac{\pi}{4} \\ \cot x = 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arccot}2 + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \operatorname{arccot}10 + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 12. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{1-\cos 2x} \\ v = \sqrt[3]{1+\cos 2x} \\ 0 \leq u, v \leq \sqrt[3]{2} \end{cases}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 2 \\ u^3 + v^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow u = v = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Bài tập 13. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$(*) \Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{\dfrac{3 - (2\cos^2 3x - 1)}{2}} = 3 - \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 3 - \cos 4x$ (1) ($2 - \cos^2 3x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$\left(1.\cos 3x + 1.\sqrt{2 - \cos^2 3x}\right)^2 \leq 2(\cos^2 3x + 2 - \cos^2 3x) = 4$

$\Rightarrow VT(1) \leq 2$ và $VP(1) \geq 2$

nên $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m2\pi}{3} \\ x = \dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Bài tập 14. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < \cos x \leq 1 \\ 0 < \cos 3x \leq 1 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\cos x - \cos^2 x} + \sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} = 1$ (1)

Áp dụng: $a^2 - a + \dfrac{1}{4} = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \geq a - a^2$

Ta có: $\cos x - \cos^2 x \leq \dfrac{1}{4}$ và $\cos 3x - \cos^2 3x \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow VT(1) \leq 1$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \\ \cos 3x - \cos^2 3x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Bài tập 15. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện: $\cos 2x \ge 0$.

$(*) \Leftrightarrow \cos 4x(\sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x} - \sin 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 4x = 0 & (1) \\ \sqrt{1-\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x} = \sin 4x & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}.$

So sánh với điều kiện ta chọn nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{8} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \cos 2x \le 1 \\ \sin 4x > 0 \\ 1 + 2\sqrt{(1-\cos 2x)\cos 2x} = \sin^2 4x \ (3) \end{cases}$

Ta thấy : $VT(3) \ge 1 \ge VP(3)$

Do đó $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\cos 2x)\cos 2x = 0 \\ \sin^2 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \vee \cos 2x = 0 \\ \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

$\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Bài tập 16. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$(*) \Leftrightarrow (2\cos 2x + 1)^2 + \sqrt{1-\cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \\ \cos x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = m2\pi \end{cases} (k, m \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Bài tập 17. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Vì $1 - \cos x \ge 0, \forall x$ và $1 + \cos x \ge 0, \forall x$; nên điều kiện của (*) là $\cos x \ne 0$.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{1-\cos x}} = 2\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x > 0, \sin x > 0 \\ \dfrac{1}{2-2\sin x} = 4\sin^2 x \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \sin x < 0 \\ \dfrac{1}{2+2\sin x} = 4\sin^2 x \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \arcsin\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi + \arcsin\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (\text{ với } k \in \mathbf{Z}).$$

So với điều kiện nghiệm ta chọn: $x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$; $x = \arcsin\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + n\pi$.

Bài tập 18.

b) $(*) \Leftrightarrow \sqrt{(1-\cos x)^2 + 4} + \sqrt{(2+\cos x)^2 + 4} = m \ (1)$

Đặt $t = 1 - \cos x,\ 0 \le t \le 2$.

Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{t^2+4} + \sqrt{(3-t)^2+4} = m$.

- Xét hàm số $g(t) = \sqrt{t^2+4} + \sqrt{(3-t)^2+4}$ trên đoạn $[0; 2]$

$g'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}} + \dfrac{t-3}{\sqrt{(3-t)^2+4}}$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$.

- Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{3}{2}$		2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$2+\sqrt{13}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $5 \le m \le 2+\sqrt{13}$ thỏa mãn đề bài.

a) Khi $m = 5$: Ta có: $\sqrt{(1-\cos x)^2+4} + \sqrt{(2+\cos x)^2+4} = 5 \ (2)$

Cách 1.

Phương trình có nghiệm $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ (nhìn bảng thấy $t = \dfrac{3}{2}$ thỏa mãn đề bài).

Cách 2. Đặt $\begin{cases} \vec{a} = (1-\cos x; 2) \\ \vec{b} = (2+\cos x; 2) \\ \vec{a}+\vec{b} = (3; 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{(1-\cos x)^2+4} \\ |\vec{b}| = \sqrt{(2+\cos x)^2+4} \\ |\vec{a}+\vec{b}| = 5 \end{cases}$

Áp dụng: $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos x}{2} = \dfrac{2+\cos x}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 19. Đặt $t = \cos^2 x\sqrt{3\cos^2 x + 1}$, $0 \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2t = m$, $t \in [0; 2]$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2t = m$ có nghiệm $t \in [0; 2]$

- Xét hàm số $g(t) = t^2 - 2t$ trên đoạn $[0; 2]$.
- $g'(t) = 2t - 2$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
- Bảng biến thiên:

t	0		1		1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $-1 \le m \le 0$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 20.

Phương trình (*) đã cho tương đương với phương trình

$$\cos x = m\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)\sqrt{1+\tan\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 2\cos x = m(1+\cos x)\sqrt{1+\tan\frac{x}{2}} \quad (1)$$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, $x \ne \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình (1) trở thành: $1 - t^2 = m\sqrt{1+t}$ (2) $\left(\text{với } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.

a) Với $m = 1$: $(2) \Leftrightarrow 1 - t^2 = \sqrt{1+t} \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 0$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = k2\pi \text{ hoặc } x = 2\arctan\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[0; \sqrt{3}\right]$.

Phương trình (2) trở thành: $\frac{1-t^2}{\sqrt{1+t}} = m$ (3).

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $t \in \left[0; \sqrt{3}\right]$.

- Xét hàm $g(t) = \frac{1-t^2}{\sqrt{1+t}}$ trên $\left[0; \sqrt{3}\right]$, $g'(t) = \frac{-3t^2 - 4t - 1}{2(1+t)\sqrt{1+t}} < 0, \forall t \in \left[0; \sqrt{3}\right]$

Do đó (*) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow \min\limits_{t\in[0;\sqrt{3}]} g(t) \le m \le \max\limits_{t\in[0;\sqrt{3}]} g(t)$

$$\Leftrightarrow g(\sqrt{3}) \le m \le g(0) \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \le m \le 1.$$

Chủ đề 5: PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải được phương trình lượng giác có chứa giá trị tuyệt đối (dạng cơ bản):

• ***Chúng ta cần học nhớ:***

1) $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$.

2) $|AB| = |A||B|$.

3) $\left|\dfrac{A}{B}\right| = \dfrac{|A|}{|B|}$ ($B \neq 0$).

4) $|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$.

5) $|A| = B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases}$

6) $|A| + |B| = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$

$|A| + |B| = A - B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$.

7) $|A| + |B| = |A + B| \Leftrightarrow AB \geq 0$.

• *Thực hiện một số phép biến đổi cơ bản và sử dụng phương pháp giải thích hợp đã biết ở các vấn đề trước để giải bài toán đã cho.*

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải phương trình $\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = 1 - \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} \geq 0 \\ \cos^2\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} + 3\sin^2\dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 - \sin^2\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} + 3\sin^2\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 4\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin x\cos x - 1 = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ (*).

Giải

Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|, 0 \le t \le \sqrt{2}$.

Phương trình (*) trở thành : $\frac{1-t^2}{2} - 1 = t \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ (loại)

Vậy phương trình (*) vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải phương trình $|\cot x| = \tan x + \frac{1}{\sin x}$ (*).

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

•***Trường hợp 1 :*** Nếu $\cot x > 0$ thì $|\cot x| = \cot x$

Phương trình (*) trở thành: $\cot x = \tan x + \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ hoặc $\cos x = 1$ (loại) $\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

•***Trường hợp 2 :*** Nếu $\cot x < 0$ thì $|\cot x| = -\cot x$

Phương trình (*) trở thành: $-\cot x = \tan x + \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow -\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

$\Leftrightarrow -\cos^2 x = \sin^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x + \cos x$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$ (loại).

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2} = \left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|$ (*).

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) = \left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow -\cos x = \left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos x > 0 \left(\text{do } \left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right| > 0, \forall x\right) \\ \cos^2 x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left|\cos\frac{x}{2}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ 1 - \sin^2 x = 1 + |\sin x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ |\sin x|\left(|\sin x| + 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x < 0 \\ |\sin x| = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ |\sin x| = -1 \end{cases} \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{2(1+\cos 2x)} + 4\sin x\cos x = 0, x \in (3\pi; 5\pi).$

Giải

Ta có: $\sqrt{2(1+\cos 2x)} + 4\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow |\cos x| + 2\sin x\cos x = 0\ (*)$

•***Trường hợp 1***:

Nếu $\cos x \ge 0$ thì $|\cos x| = \cos x$

$(*) \Leftrightarrow \cos x + 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 + 2\sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi \text{ (loại)} \end{array}\right. \quad (n, k \in \mathbf{Z})$$

$$+\text{Với } 3\pi < x < 5\pi \Rightarrow \begin{cases} 3\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi < 5\pi \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 3\pi < -\frac{\pi}{6} + n2\pi < 5\pi \\ n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{5}{2} < k < \frac{9}{2} \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{19}{12} < n < \frac{31}{12} \\ n \in \mathbf{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \in \{3; 4\} \\ n = 2 \end{array}\right.$$

Trường hợp này phương trình có nghiệm là $x = \frac{7\pi}{2}, x = \frac{9\pi}{2}, x = \frac{23\pi}{6}.$

•***Trường hợp 2***: Nếu $\cos x < 0$ thì $|\cos x| = -\cos x$

$(1) \Leftrightarrow -\cos x + 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \text{ (loại)} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ (do } \cos x < 0)$$

+Với $3\pi < x < 5\pi \Rightarrow \begin{cases} 3\pi < \frac{5\pi}{6} + k2\pi < 5\pi \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{12} < k < \frac{25}{12} \Rightarrow k = 2 \\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Trường hợp này phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{29\pi}{6}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{7\pi}{2}$; $x = \frac{9\pi}{2}$; $x = \frac{23\pi}{6}$; $x = \frac{29\pi}{6}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{3\sin^2 x - 4}{\sin^2 x}\right) (*).$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

$$VT(*) = \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1+\cos x + 1 - \cos x}{1-\cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin x|\sin x|} - 1\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x|\sin x|} - 1 = \frac{3\sin^2 x - 4}{\sin^2 x} \quad (1)$$

•***Trường hợp 1***: Nếu $\sin x > 0$ thì $|\sin x| = \sin x$

(1) trở thành : $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{3\sin^2 x - 4}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{5}{4} > 1$ (loại)

$\Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm.

•***Trường hợp 2***: Nếu $\sin x < 0$ thì $|\sin x| = -\sin x$

(1) trở thành: $-\frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \frac{3\sin^2 x - 4}{\sin^2 x} \Leftrightarrow -1 - \sin^2 x = 3\sin^2 x - 4$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 7. Cho phương trình $\cos x + |\sin x| = a$ (*). Xác định các giá trị a để (*) có nghiệm $x \in [0;2\pi]$.

Giải

• ***Trường hợp 1*** **:** Nếu $x \in [0; \pi]$ thì $\sin x \ge 0$, lúc đó: $|\sin x| = \sin x$.

$(*) \Leftrightarrow \cos x + \sin x = a \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$

+ Với $0 \le x \le \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{5\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

(*) có nghiệm $x \in [0; \pi] \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{a}{\sqrt{2}} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le a \le \sqrt{2}$.

• ***Trường hợp 2*** **:** Nếu $x \in [\pi; 2\pi]$ thì $\sin x \le 0$, lúc đó: $|\sin x| = -\sin x$.

$(*) \Leftrightarrow \sin x - \cos x = -a \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}}$

+Với $\pi \le x \le 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{4} \Rightarrow -1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

(*) có nghiệm $x \in [\pi; 2\pi]$ $\Leftrightarrow -1 \le -\frac{a}{\sqrt{2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -1 \le a \le \sqrt{2}$.

Từ 2 trường hợp với $-1 \le a \le \sqrt{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm $[0; 2\pi]$.

Ví dụ 8. Cho phương trình $\sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = m - 4\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2x\right)$ (*).

Xác định các giá trị m để (*) có nghiệm.

Giải

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = m - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = m - 4\sin 2x$ (1).

Đặt $t = \sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = |\sin x - \cos x|$, $0 \le t \le \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = 1 - \sin 2x$.

Phương trình (1) trở thành :$t = m - 4(1 - t^2) \Leftrightarrow -4t^2 + t + 4 = m$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $-4t^2 + t + 4 = m$ có nghiệm $t \in \left[0; \sqrt{2}\right]$. Xét hàm số $g(t) = -4t^2 + t + 4$ trên đoạn $\left[0; \sqrt{2}\right]$

• $g'(t) = -8t + 1, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}$

t	0		$\frac{1}{8}$		$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	4	$\nearrow$	$\frac{65}{16}$	$\searrow$	$\sqrt{2} - 4$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $\sqrt{2} - 4 \le m \le \frac{65}{16}$ thỏa mãn đề bài.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các phương trình :

Bài tập 1. $4\sin x + 3|\cos x| = 3.$

Bài tập 2. a) $|\cos x + \sin x| = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$ b) $\sqrt{2}\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1 - 2\sin 2x.$

Bài tập 3. $\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{2}\sin x = 0, x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right).$

Bài tập 4. $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x, x \in (0; 2\pi).$

Bài tập 5. $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos 4x}.$

Bài tập 6. $2\tan x - 4\cot x = \sqrt{\tan^2\frac{x}{2} - 2 + \cot^2\frac{x}{2}}.$

Bài tập 7. $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x| = \sqrt{3}.$

Bài tập 8. $|\cos x + 2\sin 2x - \cos 3x| = 1 + 2\sin x - \cos 2x.$

Bài tập 9. $\cot^2 x = \frac{1 - \sin|x|}{1 - \cos|x|}.$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Cách giải tương tự Ví dụ 1. Đáp số : $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Bài tập 2. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Đặt $t = |\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|, 0 \le t \le \sqrt{2}.$

(*) $\Leftrightarrow t = 1 - \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -3$ (loại)

$\Leftrightarrow |\sin x + \cos x| = 1 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) Cách giải tương tự Ví dụ 2. Đáp số $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Bài tập 3. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} + 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left|\cos\frac{x}{2}\right| + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

Cách giải tương tự Ví dụ 3. Đáp số $x = \frac{5\pi}{3}.$

Bài tập 4. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Ta có: $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, nên điều kiện : $x \ne \pi$

Phương trình (*) viết lại: $\frac{2\cos 2x\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x\sin x}{|\sin x|}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

• ***Trường hợp 1***: Với $0<x<\pi$ thì $\sin x>0$ nên $|\sin x|=\sin x$

$$(1)\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$$

Mà $0<x<\pi \Rightarrow \begin{cases}0<\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2}<\pi\\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{8}<k<\dfrac{15}{8}\\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow k=\{0;1\}.$

Do đó $x=\dfrac{\pi}{16}$, $x=\dfrac{9\pi}{16}$.

• ***Trường hợp 2***:

Với $\pi<x<2\pi$ thì $\sin x<0$ nên $|\sin x|=-\sin x$

$$(1)\Leftrightarrow \cos 2x=-\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-2x\right)\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{16}+\frac{n\pi}{2}, n\in\mathbf{Z}.$$

Mà $\pi<x<2\pi \Rightarrow \begin{cases}\pi<\dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{n\pi}{2}<2\pi\\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{11}{8}<n<\dfrac{27}{8}\\ n\in\mathbf{Z}\end{cases}\Rightarrow n=\{2;3\}.$

Do đó $x=\dfrac{21\pi}{16}$, $x=\dfrac{29\pi}{16}$.

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\dfrac{\pi}{16}$; $x=\dfrac{9\pi}{16}$; $x=\dfrac{21\pi}{16}$; $x=\dfrac{29\pi}{16}$.

Bài tập 5. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x-(1+\cos 4x)=2\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2 2x}\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x-2\cos^2 2x=4|\cos 2x|$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x)=2|\cos 2x|$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \begin{cases}\cos 2x>0\\ \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\end{cases}\quad \text{hoặc}\quad \begin{cases}\cos 2x<0\\ \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \begin{cases}\cos 2x>0\\ \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1\end{cases}\quad \text{hoặc}\quad \begin{cases}\cos 2x<0\\ \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ \begin{cases}2x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right)<0\ (\text{vô lý})\end{cases}\vee\begin{cases}2x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}>0\ (\text{vô lý})\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}.$$

Bài tập 6. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện: $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $\tan^2\frac{x}{2} - 2 + \cot^2\frac{x}{2} = \frac{\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4\cot^2 x$

(*) $\Leftrightarrow 2\tan x - 4\cot x = 2|\cot x|$ (1)

• ***Trường hợp 1*:** Nếu $\cot x > 0$ thì $|\cot x| = \cot x$

(1) $\Leftrightarrow 2\tan x - 4\cot x = 2\cot x \Leftrightarrow \tan x = 3\cot x \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (vì $\cot x > 0$).

• ***Trường hợp 2*:** Nếu $\cot x < 0$ thì $|\cot x| = -\cot x$

(1) $\Leftrightarrow \tan x = \cot x \Leftrightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(Vì $\cot x < 0$).

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 7. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Bình phương hai vế của (*), ta có:

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 + 2|\cos^2 x - \sin^2 x| = 3$$

$$\Leftrightarrow 2|\cos 2x| = 3 - 2 = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 8. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

(*) $\Leftrightarrow |2\sin 2x\sin x + 2\sin 2x| = 2\sin^2 x + 2\sin x$

$\Leftrightarrow |\sin 2x(1 + \sin x)| = \sin x(1 + \sin x)$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x)\left[\,|\sin 2x| - \sin x\right] = 0$ (1)

•Nếu $\sin 2x \geq 0$: (1) $\Leftrightarrow (1 + \sin x)\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin x = -1$ hoặc $\sin x = 0$ hoặc $2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k\pi$ hoặc $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = k\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

•Nếu $\sin 2x < 0$: $(1) \Leftrightarrow (1 + \sin x)\sin x(-2\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 9. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Đặt $t = |x|$.

Phương trình (*) trở thành: $\cot^2 t = \frac{1 - \sin t}{1 - \cos t} \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 t}{1 - \cos^2 t} = \frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}\left(\frac{1 + \sin t}{1 + \cos t} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}\left(\frac{\sin t - \cos t}{1 + \cos t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 1 \\ \tan t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \\ x = \pm\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Chủ đề 6: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CHỨA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để giải được phương trình mũ có chứa hàm số mũ và hàm số lôgarit: ***Chúng ta cần học nhớ:***

I. Hàm số mũ

1. Định nghĩa: Hàm số mũ cơ số a ($a > 0$ và $a \neq 1$) là hàm số xác định bởi công thức $y = a^x$ (khi $a = 1$ thì $y = 1, \forall x \in \mathbf{R}$).

2. Một số công thức và tính chất cần phải học nhớ

- Cho $a, b, m, n \in \mathbf{R}$ và $a > 0, b > 0$. Ta có:

$$a^m . a^n = a^{m+n} \quad , \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m . b^m \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} .$$

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^+)$.
- $a^x > 0, \forall x$.
- Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.
- $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ (với $b > 0$; $0 < a \neq 1$).
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$.

II. Hàm số lôgarit

1. Định nghĩa: Hàm số lôgarit theo cơ số a của đối số x là hàm số xác định bởi công thức $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1, x > 0)$ (hàm số lôgarit $y = \log_a x$ là hàm số ngược của hàm số $y = a^x$).

2. Một số công thức và tính chất cần phải nhớ

- $\log_a M = N \Leftrightarrow a^N = M$ $(0 < a \neq 1; M > 0)$.
- $\log_a a^M = M$ $(0 < a \neq 1$; M tuỳ ý).
- $a^{\log_a M} = M$ $(0 < a \neq 1; M > 0)$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ $(0 < a \neq 1)$.
- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ $(M, N > 0; 0 < a \neq 1)$.

  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ $(M, N > 0; 0 < a \neq 1)$.
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(0 < a \neq 1; 0 < c \neq 1; b > 0$.

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ ($0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ ($0 < a \neq 1$; $b > 0$; $\alpha \in \mathbf{R}$).

  $\log_{a^\beta} b^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}\log_a b$ ($0 < a \neq 1$; $b > 0$; $\alpha \in \mathbf{R}$; $\beta \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$).

- Hàm số $y = \log_a x$ ($x > 0$):

  + Đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}$.

Chú ý: + Lôgarit Nê-Pe (lôgarit tự nhiên) của x còn gọi là lôgarit cơ số e

của x. Kí hiệu: $\ln x$ $\left(\text{với } e = \lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828... \right)$.

+ Lôgarit cơ số 10 của x gọi là lôgarit thập phân của x . Kí hiệu: $\lg x$.

. Thực hiện một số phép biến đổi cơ bản và sử dụng phương pháp giải thích hợp đã biết ở các vấn đề trước để giải bài toán đã cho.

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $2^{\cos 2x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $8^{\sin 2x} - 6.\,2^{\sin 2x} - \dfrac{1}{8^{\sin 2x - 1}} + \dfrac{12}{2^{\sin 2x}} = 1$

c) $4^{-\cos 2x} + 4^{\sin^2 x} = 3$ **d)** $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = 4$

e) $3^{2\sin^2 2x - 6\sin 2x + 3} + 6^{\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1} = 2^{2\sin^2 2x - 6\sin 2x + 3}$.

Giải

a) Ta có: $2^{\cos 2x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2^{\cos 2x - 1} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

b) Đặt $t = 2^{\sin 2x}$, $\dfrac{1}{2} \le t \le 2$.

Phương trình đã cho trở thành : $t^3 - 6t - \dfrac{8}{t^3} + \dfrac{12}{t} = 1$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2\left(\frac{2}{t}\right) + 3t\left(\frac{2}{t}\right)^2 - \left(\frac{2}{t}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \left(t - \frac{2}{t}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow t - \frac{2}{t} = 1$$

$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -1$ (loại)

$\Rightarrow 2^{\sin 2x} = 2^1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

c) Phương trình đã cho tương đương với $4^{-(1-2\sin^2x)} + 4^{\sin^2x} = 3$

$$\Leftrightarrow 4^{2\sin^2x-1} + 4^{\sin^2x} = 3 \Leftrightarrow \frac{4^{2\sin^2x}}{4} + 4^{\sin^2x} = 3 \Leftrightarrow \left(4^{\sin^2x}\right)^2 + 4.4^{\sin^2x} - 12 = 0 \ (*)$$

Đặt $t = 4^{\sin^2x} = 2^{2\sin^2x}, 1 \le t \le 4$ (do $0 \le \sin^2x \le 1$)

(*) trở thành: $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -6 < 1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow 2^{2\sin^2x} = 2^1$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x = 1 \Leftrightarrow \cos2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

d) Nhận thấy : $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} . \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x} = 1$

Đặt $t = (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\sin x} = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{2\sin x}, 0 < t < \sqrt{7+4\sqrt{3}}.$

Phương trình đã cho trở thành : $t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{2\sin x} = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \\ (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{2\sin x} = (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \pm1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

e) Phương trình đã cho tương đương với

$$27.3^{2(\sin^2 2x - 3\sin2x)} + 6.6^{\sin^2 2x - 3\sin2x} - 8.2^{2(\sin^2 2x - 3\sin2x)} = 0 \ (*)$$

Chia hai vế của (*) cho $2^{2(\sin^2 2x - 3\sin2x)} \neq 0$, ta được:

$$27.\left(\frac{3}{2}\right)^{2(\sin^2 2x - 3\sin2x)} + 6.\left(\frac{3}{2}\right)^{\sin^2 2x - 3\sin2x} - 8 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\sin^2 2x - 3\sin2x} > 0.$

Phương trình (1) trở thành : $27t^2 + 6t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \\ t = -\frac{2}{3} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\sin^2 2x - 3\sin2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \sin^2 2x - 3\sin2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin2x = 1 \\ \sin2x = 2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

a) $\log_2(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 1$ b) $\log_{\sin x} 2 + \log_{\cos x} 2 + \log_{\sin x} 2 . \log_{\cos x} 2 = 0$

c) $\log_{\sin^2 x} 16 + \log_{2\sin x} 64 = 3$ d) $\log_2\left(\cos 2x + \cos\dfrac{x}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x + \cos\dfrac{x}{2}\right) = 0.$

Giải

a) Điều kiện: $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 0\ (*)$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2^1 = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ (thoả điều kiện (*)).

b) Điều kiện: $\begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases}$.

Phương trình đã cho trở thành : $\dfrac{1}{\log_2 \sin x} + \dfrac{1}{\log_2 \cos x} + \dfrac{1}{\log_2 \sin x . \log_2 \cos x} = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 \cos x + \log_2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2(\cos x \sin x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos x \sin x = 2^{-1} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$

c) Điều kiện $\begin{cases} 0 < \sin^2 x < 1 \\ 0 < 2\sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Phương trình đã cho viết lại: $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 \sin^2 x} + \dfrac{\log_2 64}{\log_2(2\sin x)} = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2\log_2 \sin x} + \frac{6}{1 + \log_2 \sin x} = 3\ (*)$$

Đặt $t = \log_2 \sin x,\ t < 0$.

Phương trình (*) trở thành: $\dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3 \Leftrightarrow 2 + 2t + 6t = 3t + 3t^2$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$ hoặc $t = 2$ (loại) $\Rightarrow \log_2 \sin x = -\dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sin\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi + k2\pi \\ x = \pi - \varphi + k2\pi \end{array}\right.,\ k \in \mathbf{Z}.$$

d) Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2\left(\cos2x+\cos\frac{x}{2}\right)=\log_2\left(\sin x+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos\frac{x}{2}>0\\ \cos2x+\cos\frac{x}{2}=\sin x+\cos\frac{x}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos\frac{x}{2}>0\ (*)\\ 2\sin^2x+\sin x-1=0\ (**)\end{cases}$$

$(**)\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ hoặc $\sin x=-1$

- Với $\sin x=-1$ (loại) $\left(\text{do } -1+\cos\frac{x}{2}\le 0\right)$.
- Với $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ thoả mãn (*) , còn $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ chỉ thoả mãn (*) khi $k=2m$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{\pi}{6}+k4\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Cho phương trình: $81^{\sin^2x}+81^{\cos^2x}=m$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $m=30$ b) Xác định m để (*) có nghiệm.

Giải

a) Khi $m=30$, ta có: $81^{\sin^2x}+81^{\cos^2x}=30$ (1)

Cách 1. Đặt $\begin{cases}u=81^{\sin^2x},\ 1\le u\le 81\\ v=81^{\cos^2x},\ 1\le v\le 81\end{cases}$; ta có hệ: $\begin{cases}u+v=30\\ uv=81^{\sin^2x+\cos^2x}=81\end{cases}$

$\Rightarrow$ u,v là nghiệm của phương trình: $X^2-30X+81=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=27\\ X=3\end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=27\\ v=3\end{cases}\\ \begin{cases}u=3\\ v=27\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}3^{4\sin^2x}=3^3\\ 3^{4\cos^2x}=3\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}3^{4\sin^2x}=3\\ 3^{4\cos^2x}=3^3\end{cases} & (2)\end{array}\right.$

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2x=\frac{3}{4}\\ \cos^2x=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{3}{4}\\ \frac{1+\cos2x}{2}=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\cos2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2x=\frac{1}{4}\\ \cos^2x=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{4}\\ \frac{1+\cos2x}{2}=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\cos2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Cách 2. Phương trình đã cho trở thành: $81^{\sin^2 x} + \dfrac{81}{81^{\sin^2 x}} = 30$ (2)

Đặt $t = 81^{\sin^2 x} = 3^{4\sin^2 x},\ 1 \le t \le 81$.

Phương trình (2) trở thành: $t^2 - 30t + 81 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 27 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{4\sin^2 x} = 3^3 \\ 3^{4\sin^2 x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{3}{4} \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b) Đặt $t = 81^{\sin^2 x}$, $1 \le t \le 81$.

Phương trình (*) trở thành: $t + \dfrac{81}{t} = m$ (1)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t \in [1; 81]$.

- Xét hàm số $g(t) = t + \dfrac{81}{t}$ trên đoạn $[1; 81]$

$g'(t) = 1 - \dfrac{81}{t^2} = \dfrac{t^2 - 81}{t^2}$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9 \in [1; 81]$.

- Bảng biến thiên:

t	[redacted]	1		9		81	[redacted]
g'(t)			−	0	+		
g(t)		82	↘	18	↗	82	

- Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $18 \le m \le 82$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 4. Giải các phương trình :

a) $4^{\cot^2 x} + 4^{\frac{1}{1-\cos 2x}} \cdot \log_{2\sqrt{2}} 4 = -\log_{\cos x}\left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)$

b) $4^{\log_{0,5}(3 - \cos^2 x + 5\sin x\cos x)} = \dfrac{1}{9}$

c) $\sin x + 4^{\log_3 \sin x} = (\sin x)^{\log_3 7}$.

Giải

a) Điều kiện : $0 < \cos x < 1$

• $\log_{\cos x}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \log_{\cos x}\cos^2 x = 2.$

• $4^{\frac{1}{1-\cos 2x}} = 4^{\frac{1}{2\sin^2 x}} = 2^{1+\cot^2 x} = 2.2^{\cot^2 x}.$

• $\log_{2\sqrt{2}} 4 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^2 = \frac{2}{\frac{3}{2}}\log_2 2 = \frac{4}{3}.$

Phương trình đã cho tương đương với $2^{2\cot^2 x} - 3.2^{\cot^2 x} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{\cot^2 x} = 2 \\ 2^{\cot^2 x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot^2 x = 1 \\ \cot^2 x = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

b) Điều kiện: $3 - \cos^2 x + 5\sin x\cos x > 0$ (*).

Lôgarit hoá hai vế của phương trình đã cho theo cơ số 4, ta được:

$$\log_4\left[4^{\log_{0,5}(3-\cos^2 x + 5\sin x\cos x)}\right] = \log_4\frac{1}{9} = \log_{2^2} 3^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{2^{-1}}(3 - \cos^2 x + 5\sin x\cos x) = -\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3 - \cos^2 x + 5\sin x\cos x) = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow 3 - \cos^2 x + 5\sin x\cos x = 3 \Leftrightarrow \cos x(5\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\frac{1}{5} + k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z} \text{ (thoả (*))}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \arctan\frac{1}{5} + k\pi$.

c) Điều kiện: $0 < \sin x \le 1$.

Đặt $u = \log_3 \sin x$, $u \le 0 \Rightarrow 3^u = \sin x$.

Phương trình đã cho trở thành : $3^u + 4^u = 7^u \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^u + \left(\frac{4}{7}\right)^u = 1$ (*)

Ta thấy: $f(u) = \left(\frac{3}{7}\right)^u + \left(\frac{4}{7}\right)^u$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$,

nên (*) có một nghiệm duy nhất $u = 1 \Rightarrow \sin x = 3$ (loại).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5. Tìm các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y$ (*).

Giải

$(*) \Leftrightarrow 8^{\sin^2x} + \dfrac{8}{8^{\sin^2x}} - 9 = 1 + \cos 2y \quad (1)$

Đặt $t = 8^{\sin^2x}$, $1 \le t \le 8$.

Phương trình (1) trở thành: $t + \dfrac{8}{t} - 9 = 2\cos^2 y \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 2t\cos^2 y$ (2)

Ta có: $VP(2) \ge 0$ và $VT(2) \le 0$, $\forall t \in [1; 8]$.

$$\text{nên (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 8 \end{array}\right. \\ \cos^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \\ \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $\left(\dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + l\pi\right)$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\ln(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0$ (*).

(Trích đề thi Đại học Kiến Trúc năm 1999)

Giải

Điều kiện: $\sin^2 x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

$(*) \Leftrightarrow \ln(\sin^2 x) = 1 - \sin^3 x$ (1)

Ta có: $\begin{cases} \ln(\sin^2 x) \le 0, \forall x \ne k\pi, k \in \mathbf{Z} \ (\text{ do } 0 < \sin^2 x \le 1) \\ 1 - \sin^3 x \ge 0, \forall x \ne k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

nên $(1) \Leftrightarrow \ln(\sin^2 x) = 0$ và $1 - \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$ và $\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Ví dụ 7. Giải các phương trình :

a) $25^{\sin x} - 2(3 - \sin x)5^{\sin x} + 2\sin x - 7 = 0$ (1)

b) $2\log_3(\cot x) = \log_2 \cos x$ (2).

Giải

a) *Cách 1.* Đặt $t = 5^{\sin x}$, $\dfrac{1}{5} \le t \le 5$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2(3 - \sin x)t + 2\sin x - 7 = 0$ (*)

$\Delta' = (3 - \sin x)^2 - 1.(2\sin x - 7) = (\sin x - 4)^2$

$(*) \Leftrightarrow t = 7 - 2\sin x$ hoặc $t = -1$ (loại) $\Rightarrow 5^{\sin x} = 7 - 2\sin x$ (**)

Vì $\begin{cases} VT(**) \le 5 \\ VP(**) \ge 5 \end{cases}$, nên (**) có nghiệm $\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Cách 2

$(1) \Leftrightarrow (5^{2\sin x} - 6.5^{\sin x} - 7) + 2(5^{\sin x} + 1)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow (5^{\sin x} + 1)(5^{\sin x} - 7) + 2(5^{\sin x} + 1)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow (5^{\sin x} + 1).(5^{\sin x} - 7 + 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow 5^{\sin x} = 7 - 2\sin x$

(trở về *Cách 1*)

b) Điều kiện : $\begin{cases} \cot x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$(2) \Leftrightarrow \log_3(\cot x)^2 = \log_2\cos x \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right) = \log_2\cos x \ (*)$

Đặt $u = \log_2\cos x \Leftrightarrow 2^u = \cos x$.

Phương trình (*) trở thành: $\log_3\left(\frac{4^u}{1-4^u}\right) = u \Leftrightarrow \frac{4^u}{1-4^u} = 3^u$

$\Leftrightarrow 4^u + 12^u = 3^u \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u = 1$

Vì các cơ số $\frac{4}{3} > 1, 4 > 1$, nên hàm số $f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u$ là hàm số đồng biến trên **R**, lại có $f(-1) = 1 \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm duy nhất

$u = -1 \Rightarrow \cos x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\cos x(2\sin x - 1) = \log_2\sin 2x - \log_2\cos x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (*).

Giải

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nên $\begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases}$.

$(*) \Leftrightarrow \sin 2x - \log_2\sin 2x = \cos x - \log_2\cos x \ (1)$

Xét hàm $g(t) = t - \log_2 t$ trên $(0; 1)$; $g'(t) = 1 - \frac{1}{t\ln 2} < 0, \forall t \in (0; 1)$

$\Rightarrow g(t)$ nghịch biến trên $(0; 1)$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow g(\sin 2x) = g(\cos x) \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $4\cos^2\frac{x}{2}+4^{\cos x}(\cos x-2)=0$ (*).

Giải

(*) $\Leftrightarrow 2(1+\cos x)+4^{\cos x}(\cos x-2)=0$ (1)

Đặt $u=\cos x$, $|u|\le 1$.

Phương trình (*) trở thành: $2(1+u)+4^u(u-2)=0$

$\Leftrightarrow (1+u)(2+4^u)=3.4^u \Leftrightarrow \dfrac{3.4^u}{2+4^u}-u-1=0$

Gọi $f(u)=\dfrac{3.4^u}{2+4^u}-u-1$

$+f'(u)=\dfrac{(3.4^u)'(2+4^u)-(2+4^u)'.(3.4^u)}{(2+4^u)^2}-1$

$=\dfrac{(3.4^u\ln4)(2+4^u)-(4^u\ln4).(3.4^u)}{(2+4^u)^2}-1=\dfrac{6.4^u\ln4}{(2+4^u)^2}-1$

$f'(u)=0\Leftrightarrow (4^u)^2+(4-6\ln4)4^u+4=0$ (2)

Ta thấy phương trình (2) không có quá hai nghiệm $\Rightarrow$ theo định lí Rolle thì $f(u)=0$ không có quá ba nghiệm (3).

Ngoài ra: $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=0$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}u=0\\ u=\dfrac{1}{2}\\ u=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\\ x=k2\pi\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Giải các phương trình:

a) $5^{\sin x-1}.2^{\sin x}=\dfrac{10^{2-\sin x}}{5}$ b) $(\sqrt{4}+\sqrt{3})^{\cos x}=(\sqrt{4}-\sqrt{3})^{\sin x}$

c) $9^{\cos x}=4.3^{\cos x}-3$ d) $6.9^{2\sin x}-13.6^{2\sin x}+6.4^{2\sin x}=0$

e) $2^{2\sin x-2\sqrt{3}\cos x+1}-7.10^{\sin x-\sqrt{3}\cos x}+5^{2\sin x-2\sqrt{3}\cos x+1}=0$

f) $3.8^{\cos x}+4.12^{\cos x}-18^{\cos x}-2.27^{\cos x}=0$

g) $(\sin x)^{x^2}=(\sin x)^{3x-2}$.

Bài tập 2. Giải phương trình $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2x}=3$, $x\in\left[\frac{3}{4};1\right]$.

Bài tập 3. Giải phương trình $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^{2\sin x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt6}\right)^{2\sin x}=10.$

Bài tập 4. Giải phương trình $4^{\sin^2x+\sin x}+2^{1-\sin^2x}=2^{(\sin x+1)^2}+1$

Bài tập 5. Giải phương trình $9^{\sin x}+2(\sin x-2)3^{\sin x}+2\sin x-5=0.$

Bài tập 6. Giải phương trình $3^{2x}=\cos\sqrt{2x}.$

Bài tập 7. Giải phương trình

$$(2+\sqrt2)^{\sin^2x}-(2+\sqrt2)^{\cos^2x}+(2-\sqrt2)^{\cos2x}=\left(1+\frac{\sqrt2}{2}\right)^{\cos 2x}$$

Bài tập 8. Giải phương trình $2^{\sin x-1}-2^{\sin^2x-\sin x}=(\sin x-1)^2,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

Bài tập 9. Giải phương trình $3^{2008x^2+4\sin^3x}+3^{2008x^2+3\sin x}=5\sin3x$

Bài tập 10. Cho phương trình $4^{-\sin x+1}-\left(\frac12\right)^{\sin x-1}+m+2=0$ (*)

Xác định m để (*) có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

Bài tập 11. Cho phương trình $2^{\cos x}+a\cos x=\frac{7-\cos2x}{2}$ (*). Xác định a để (*) có duy nhất $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

Bài tập 12. Cho phương trình $(7+4\sqrt3)^{\tan x}+(7-4\sqrt3)^{\tan x}=m$ (*)

a) Giải phương trình (*) khi $m=14$

b) Tìm m để (*) có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$

Bài tập 13. Giải các phương trình :

a) $\log_{\sin x}(\sin x+\cos2x)=0$ b) $\log_{\sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)}4.\log_{\cos^2x}2=4.$

c) $\log_x\left(\sqrt2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\log_{\frac1x}(2\cos^2x+\cos x-1)=0$

d) $\log_{0,25}\left(\sin\frac{x}{2}-\sin x\right)+\log_4\left(\sin\frac{x}{2}+\cos2x\right)=0.$

(Trích đề thi Đại học Dược Hà Nội năm 1996)

Bài tập 14. Giải phương trình $3^{\frac12+\log_3\cos x}+6^{\frac12}=9^{\frac12+\log_9\sin x}.$

Bài tập 15. Cho phương trình $\log_2(3-|\sin\alpha x|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$ (*). Tìm tất cả các giá trị α thoả mãn $\alpha\in(2;5)$ sao cho phương trình (*) có ít nhất một nghiệm thoả mãn $x\in[2;3].$

Bài tập 16. Giải phương trình $\log_{2008}\left(2008+|\sin x|\right)=2-2^{|2x|}$.

Bài tập 17. Giải phương trình :

a) $(1+\cos x)^{\log_{\cos x}\sin x}=(1+\sin x)^{\log_{\sin x}\cos x}$

b) $\sin x+\cos x-\sin x\cos x-\lg 2=1+\lg\dfrac{3+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{8+\sin 2x}$.

Bài tập 18. Giải các phương trình :

a) $\log_2(\cos x+1)=2\cos x$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}+\sin\dfrac{\pi}{6}=\cos 2x+\log_4(4\cos^3 2x-\cos 6x-1)$.

(Trích đề trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 303)

D. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài tập 1. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) $(*)\Leftrightarrow \dfrac{5^{\sin x}}{5}\cdot 2^{\sin x}=\dfrac{1}{5}\cdot 10^{2-\sin x}\Leftrightarrow 10^{\sin x}=10^{2-\sin x}\Leftrightarrow \sin x=2-\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

b) Thấy : $(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})=1\Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{3}=\dfrac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}=(\sqrt{4}-\sqrt{3})^{-1}$

$(*)\Leftrightarrow(\sqrt{4}-\sqrt{3})^{-\cos x}=(\sqrt{4}-\sqrt{3})^{\sin x}\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

c) Đặt $t=3^{\cos x}$, $\dfrac{1}{3}\le t\le 3$. Phương trình (*) trở thành: $t^2-4t+3=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

d) $(*)\Leftrightarrow 6\left(\dfrac{9}{4}\right)^{2\sin x}-13\left(\dfrac{6}{4}\right)^{2\sin x}+6=0\ (1)$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\sin x}$, $\dfrac{4}{9}\le t\le\dfrac{9}{4}$.

$$\text{(1) trở thành: } 6t^2-13t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3}{2}\\ t=\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

e) (*) $\Leftrightarrow 2^{1+2(\sin x-\sqrt{3}\cos x)} - 7.10^{\sin x-\sqrt{3}\cos x} + 5^{1+2(\sin x-\sqrt{3}\cos x)} = 0$

$\Leftrightarrow 2.\,4^{\sin x-\sqrt{3}\cos x} - 7.\,10^{\sin x-\sqrt{3}\cos x} + 5.\,25^{\sin x-\sqrt{3}\cos x} = 0\,(1)$

Chia hai vế của (1) cho $4^{\sin x-\sqrt{3}\cos x} \neq 0$ và đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x-\sqrt{3}\cos x} \neq 0$, ta

được phương trình: $5t^2 - 7t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{2}{5}$.

• $t = 1 \Rightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $t = \frac{2}{5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \Rightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

f) (*) $\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^{3\cos x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cos x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} - 2 = 0(1)$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x}$, $\frac{2}{3} \le t \le \frac{3}{2}$.

(1) trở thành: $3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2 + t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

g) Sử dụng: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \begin{cases} 0 < \sin x \neq 1 \\ x^2 = 3x - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bài tập 2. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$(*) \Leftrightarrow 4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3\,(1)$

Đặt $t = 4^{\cos^2 x}$, $1 \le t \le 4$.

(1) trở thành : $\frac{1}{4}t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow 2^{2\cos^2 x} = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]\right)$.

Bài tập 3. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Nhận xét: $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right).\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right) = \sqrt{25 - 24} = 1$

Đặt $t=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{2\sin x}>0$. Phương trình (*) trở thành: $t+\dfrac{1}{t}=10$

$\Leftrightarrow t^2-10t+1=0 \Leftrightarrow t=5\pm 2\sqrt{6} \Rightarrow 2\sin x=\pm 2 \Leftrightarrow \cos x=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in \mathbb{Z}.$

Bài tập 4. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

$$(*) \Leftrightarrow \left(2^{2\sin^2x+2\sin x}-1\right)+2^{1-\sin^2x}\left(1-2^{2\sin^2x+2\sin x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{2\sin^2x+2\sin x}=1\\ 2^{1-\sin^2x}=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin^2x+2\sin x=0\\ 1-\sin^2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\pm 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2},\ k\in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 5. Cách giải tương tự Ví dụ 7a. Đáp số: $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in \mathbb{Z}.$

Bài tập 6. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Tập xác định : $[0;+\infty)$. Ta có : $3^{2x}\ge 3^0=1$ và $\cos\sqrt{2x}\le 1$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}3^{2x}=1\\ \cos\sqrt{2x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \sqrt{2x}=k2\pi\ (k\in \mathbb{Z}, k\ge 0)\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Bài tập 7. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Đặt $f(x)=(2+\sqrt{2})^{\sin^2x}-(2+\sqrt{2})^{\cos^2x}$, $g(x)=(2-\sqrt{2})^{\cos 2x}$, $h(x)=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}$

•Nếu $\cos 2x>0 \Rightarrow \cos^2x>\sin^2x \Rightarrow (2+\sqrt{2})^{\cos^2x}>(2+\sqrt{2})^{\sin^2x} \Rightarrow f(x)<0$

$(2-\sqrt{2})^{\cos 2x}<(2-\sqrt{2})^0=1 \Rightarrow g(x)<1$

$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\cos 2x}>\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 \Rightarrow h(x)>1.$

Suy ra: $f(x)+g(x)<1<h(x) \Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

•Nếu $\cos 2x<0$ lý luận tương tự trường hợp 1.

•Nếu $\cos 2x=0$ thì (*) thoả,(*) có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in \mathbb{Z}.$

Bài tập 8. Đặt $u=\sin x$, $u\in[0;1]$ $\left(\text{do } x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

Phương trình đã cho trở thành: $2^{u-1}-2^{u^2-u}=(u^2-u)-(u-1)$

$\Leftrightarrow 2^{u-1}+(u-1)=2^{u^2-u}+(u^2-u)\ (1).$

Xét hàm số: $f(X)=2^X+X$

Vì $f'(X)=2^X\ln 2+1>0, \forall X \Rightarrow f$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên:

$(1) \Leftrightarrow f(u-1)=f(u^2-u) \Leftrightarrow u-1=u^2-u \Leftrightarrow u=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}.$

Bài tập 9. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Xét hàm số $g(u) = 3^u + 5u$ trên $\mathbf{R}$

Vì $g'(u) = 3^u\ln 3 + 5 > 0, \forall u \in \mathbf{R} \Rightarrow g$ đồng biến trên $\mathbf{R}$, nên:

$(1) \Leftrightarrow g(2008x^2 + 4\sin^3 x) = g(2008x^2 + 3\sin x)$

$\Leftrightarrow 2008x^2 + 4\sin^3 x = 2008x^2 + 3\sin x \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 10.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2(\sin x - 1)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x - 1} + m + 2 = 0$$

Đặt $t = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x - 1}$, $1 \le t \le 2 \left(\text{do } x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $-t^2 + t - 2 = m$ có nghiệm trên đoạn [1; 2].

• $g'(t) = -2t + 1$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

• Bảng biến thiên:

t	1		2
g'(t)			
g(t)	−2	↘	−4

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $-4 \le m \le -2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 11.

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm của (*) thì $-x_0$ cũng là nghiệm của (*)

Do đó (*) có nghiệm duy nhất thì $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

• Nếu $x_0 = 0 \Rightarrow a = 1$

• $a = 1$: Ta có: $2^{\cos x} + \cos x = \dfrac{7 - \cos 2x}{2}$ (1)

Vì VT(1) ≤ 3 và VP(1) ≥ 3, nên:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 2\cos^2 x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Vậy a = 1 là giá trị cần tìm.

Bài tập 12.

a) Điều kiện: $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Đặt $t = (7 + 4\sqrt{3})^{\tan x}, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t + \dfrac{1}{t} = 14$

$\Leftrightarrow t^2 - 14t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 7 \pm 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

b) (*) $\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=m \Leftrightarrow f(t)=t^2-mt+1=0$ với $t=(7+4\sqrt{3})^{\tan x}>0$.

Cách 1:

(*) có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ (1) có đúng hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4>0\\ 1>0\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow m>2.$

Cách 2: • Xét hàm số $g(t)=t+\frac{1}{t}$ trên $D=(0;\ +\infty)$

• $g'(t)=1-\frac{1}{t^2}$, $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$

• Bảng biến thiên:

t	[redacted]	0		1		$+\infty$
$g'(t)$			$-$	0	$+$	
$g(t)$		$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

• Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $m>2$ thỏa mãn đề bài.

Bài tập 13. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $\begin{cases}0<\sin x<1\\ \sin x+\cos 2x>0\end{cases}$.

(*) $\Leftrightarrow \sin x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sin x+1-2\sin^2 x=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\ \text{(loại)}\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$, $k\in\mathbb{Z}$ (thỏa điều kiện).

b) (*) $\Leftrightarrow \log_{\sin\left(\frac{13\pi}{2}-6\pi-x\right)}4.\log_{\cos^2 x}2=4 \Leftrightarrow \log_{\cos x}4.\log_{\cos^2 x}2=4$ (1)

Điều kiện: $0<\cos x<1$.

(1) $\Leftrightarrow (2\log_{\cos x}2)\cdot\left(\frac{1}{2}\log_{\cos x}2\right)=4 \Leftrightarrow (\log_{\cos x}2)^2=4 \Leftrightarrow \log_{\cos x}2=\pm 2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x=2>1\text{(loại)}\\ \cos^{-2}x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c) (*) $\Leftrightarrow \log_x(\cos x-\sin x)+\log_{\frac{1}{x}}(\cos x+\cos 2x)=0$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x-\sin x>0\\ 0<x\neq 1\end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}^+$.

d) • $\log_{0,25}\left(\sin\frac{x}{2} - \sin x\right) = \log_{4^{-1}}\left(\sin\frac{x}{2} - \sin x\right) = -\log_4\left(\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$

$(*) \Leftrightarrow \log_4\left(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x\right) = \log_4\left(\sin\frac{x}{2} - \sin x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \sin x > 0 \\ \cos 2x = -\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \sin x > 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \sin x > 0 \ (1) \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

• $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (loại do không thỏa (1))

• $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ thỏa (1)} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ thỏa (1) khi } k = 2m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Bài tập 14. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Điều kiện: $\cos x > 0$ và $\sin x > 0$.

$(*) \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}}.\, 3^{\log_3 \cos x} + \sqrt{6} = 9^{\frac{1}{2}}.\, 9^{\log_9 \sin x} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sqrt{6} = 3\sin x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện chọn $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 15.

Ta có: $|\sin\alpha x| \le 1 \Rightarrow \log_2(3 - |\sin\alpha x|) \ge 1$ và $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin\alpha x| = 1 \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha x = 0 \\ x = \frac{1}{6} + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (1) \\ x = \frac{1}{6} + 2k \quad (2) \end{cases} (n, k \in \mathbb{Z})$$

Từ $2 \le x \le 3 \Rightarrow 2 \le \frac{1}{6} + 2k \le 3, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1;\ (2) \Rightarrow x = \frac{13}{6}$ (3)

Thế (3) vào (1) $\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{13} + \frac{6n\pi}{13} \in (2;\ 5) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{9\pi}{13} \\ \alpha = \frac{15\pi}{13} \end{array}\right.$

Vậy: $\alpha = \frac{9\pi}{13}, \alpha = \frac{15\pi}{13}$.

Bài tập 16. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

Vì $\begin{cases} \log_{2008}(2008 + |\sin x|) \ge 1 \\ 2 - 2^{|2x|} \le 1 \end{cases}$, nên (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = 0 \\ |2x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Bài tập 17. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Điều kiện: $k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $1 + \cos x > 0$ và $1 + \sin x > 0$

(*) $\Leftrightarrow (\log_{\cos x}\sin x).\ \ln(1 + \cos x) = (\log_{\sin x}\cos x).\ \ln(1 + \sin x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x} \cdot \ln(1 + \cos x) = \frac{\ln\cos x}{\ln\sin x} \cdot \ln(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln\sin x)^2}{\ln(1 + \sin x)} = \frac{(\ln\cos x)^2}{\ln(1 + \cos x)} \quad (1)$$

Xét hàm số $g(t) = \frac{(\ln t)^2}{\ln(1 + t)}$ trên (0; 1), thấy hàm g(t) giảm trên (0; 1)

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) (*) $\Leftrightarrow \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 1 + \lg\left(\frac{6 + 2(\sin x + \cos x)}{8 + 2\sin x\cos x}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 1 + \lg\left(\frac{3 + \sin x + \cos x}{4 + \sin x\cos x}\right) \quad (1)$$

Ta thấy: $\begin{cases} 3 + \sin x + \cos x = 3 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \ge 3 - \sqrt{2} > 1 \\ 4 + \sin x\cos x = 4 + \frac{1}{2}\sin 2x \ge 4 - \frac{1}{2} > 1 \end{cases}$, nên tập xác định của (*) là $\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow \lg u - u = \lg v - v$, với $\begin{cases} u = 3 + \sin x + \cos x > 1 \\ v = 4 + \sin x\cos x > 1 \end{cases}$

• Xét hàm $f(t) = \lg t - t$ với $t > 1$

$+\ f'(t) = \frac{1}{t\ln 10} - 1 < 0, \forall t > 1 \Rightarrow$ f giảm trên $(1;\ +\infty)$.

Do đó $u = v \Leftrightarrow \sin x + \cos x - \sin x\cos x - 1 = 0$ (Xem lại Phần I- Chủ đề 5)

Đáp số : $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Bài tập 18. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Đặt: $u = \cos x, \ -1 < u \le 1$

(*) trở thành: $\log_2(u+1) = 2u \Leftrightarrow 4^u - u - 1 = 0$

• Xét hàm số $g(u) = 4^u - u - 1$ trên $(-1; 1]$

• $g'(u) = 4^u \ln 4 - 1$, $g''(u) = 4^u \ln^2 4 > 0$

Ta có $g(u) = 0$ không có quá hai nghiệm phân biệt, thật vậy:
Nếu có ít nhất ba nghiệm phân biệt thì theo định lí Rolle: $g'(u) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt và $g''(u) = 0$ có nghiệm, ta thấy:

$$g(0) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \text{ Do đó } g(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

b) $(*) \Leftrightarrow 2^{\cos 2x - 1} + \frac{1}{2} = \cos 2x + \log_4(3\cos 2x - 1)$ (1)

Điều kiện: $\cos 2x > \frac{1}{3}$, đặt $u = \cos 2x$, $\frac{1}{3} < u \le 1$.

Phương trình (1) trở thành: $2^{u-1} + \frac{1}{2} = u + \log_4(3u - 1)$

$\Leftrightarrow 2^u + 1 = 2u + \log_2(3u - 1)$ (2)

Đặt $y = \log_2(3u - 1) \Rightarrow 2^y = 3u - 1, y \le 1$ (3)

Ta có hệ: $\begin{cases} 2^y = 3u - 1 \\ 2^u = 2u + y - 1 \end{cases} \Rightarrow 2^y + y = 2^u + u$ (4)

Xét hàm $f(z) = 2^z + z$, $f'(z) = 2^z \ln 2 + 1 > 0, \forall z \Rightarrow f$ là hàm số tăng.
Do đó (4) $\Leftrightarrow y = u$

Thế $y = u$ vào (3) được $2^y - 3y + 1 = 0, y \le 1$ (5)

Xét hàm $g(y) = 2^y - 3y + 1$

$g'(y) = 2^y \ln 2 - 3$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow 2^y \ln 2 = 3$

(5) không quá hai nghiệm và thấy $g(1) = g(3) = 0 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Do đó $u = v \Leftrightarrow \sin x + \cos x - \sin x\cos x - 1 = 0$ (Xem lại Phần I- Chủ đề 5)

Đáp số : $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Bài tập 18. Quy ước gọi phương trình đã cho là (*)

a) Đặt: $u = \cos x$, $-1 < u \le 1$

(*) trở thành: $\log_2(u+1) = 2u \Leftrightarrow 4^u - u - 1 = 0$

• Xét hàm số $g(u) = 4^u - u - 1$ trên $(-1; 1]$

• $g'(u) = 4^u\ln 4 - 1$, $g''(u) = 4^u\ln^2 4 > 0$

Ta có $g(u) = 0$ không có quá hai nghiệm phân biệt, thật vậy:
Nếu có ít nhất ba nghiệm phân biệt thì theo định lí Rolle: $g'(u) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt và $g''(u) = 0$ có nghiệm, ta thấy:

$$g(0) = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \text{ Do đó } g(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

b) $(*) \Leftrightarrow 2^{\cos 2x - 1} + \frac{1}{2} = \cos 2x + \log_4(3\cos 2x - 1)$ (1)

Điều kiện: $\cos 2x > \frac{1}{3}$, đặt $u = \cos 2x$, $\frac{1}{3} < u \le 1$.

Phương trình (1) trở thành: $2^{u-1} + \frac{1}{2} = u + \log_4(3u - 1)$

$\Leftrightarrow 2^u + 1 = 2u + \log_2(3u - 1)$ (2)

Đặt $y = \log_2(3u - 1) \Rightarrow 2^y = 3u - 1$, $y \le 1$ (3)

Ta có hệ: $\begin{cases} 2^y = 3u - 1 \\ 2^u = 2u + y - 1 \end{cases} \Rightarrow 2^y + y = 2^u + u$ (4)

Xét hàm $f(z) = 2^z + z$, $f'(z) = 2^z\ln 2 + 1 > 0$, $\forall z \Rightarrow f$ là hàm số tăng.

Do đó (4) $\Leftrightarrow y = u$

Thế $y = u$ vào (3) được $2^y - 3y + 1 = 0$, $y \le 1$ (5)

Xét hàm $g(y) = 2^y - 3y + 1$

$g'(y) = 2^y\ln 2 - 3$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow 2^y\ln 2 = 3$

(5) không quá hai nghiệm và thấy $g(1) = g(3) = 0 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.